LA SCHÉMATISATION DANS UNE DÉMARCHE D'INVESTIGATION : LA PLACE DE CONCEPTS GÉOMÉTRIQUES DANS L'ACTIVITÉ DE LA MAIN À LA PÂTE « SUR LES PAS D'ÉRATOSTHÈNE »

Bertrand LEBOT
PIUFM, IUFM Poitou Charentes/IREM de Poitiers
bertrand.lebot@univ-poitiers.fr

Résumé
Cet atelier avait comme projet initial de partir de la situation « Sur les pas d'Eratosthène » de l'association « La Main à la Pâte » et de chercher si lors d'une démarche d'investigation, il ne pouvait y avoir une situation déclenchante pertinente pour l'étude de notion(s) mathématique(s).
Dans un premier temps nous nous sommes penchés sur la place des mathématiques dans une situation d'investigation en science physique. Cela a permis de préciser les similitudes entre les constructions des savoirs. La schématisation très présente dans la situation étudiée, laisse une place pour les connaissances mathématiques. Elles ont un rôle important à jouer pour émettre des hypothèses.
La situation s'appuie sur la propagation rectiligne de la lumière. Il s'agit d'étudier des phénomènes de l'optique géométrique. Ainsi l'étude de la situation fait intervenir de nombreux éléments en lien avec les savoirs mathématiques : mesure des angles, propriété angulaire du parallélisme, relation angulaire dans le cercle. Autant de notions qui ne sont pas au programme du primaire. Toutefois la découverte de la trajectoire rectiligne de la lumière est riche pour le cycle 3.
Les participants se sont partagés trois séances devant faire découvrir la forme rectiligne du trajet de la lumière. Les non-dits et les phénomènes ostentatoires ont surpris un groupe de participants. D'autres ont eu du mal à identifier les différents moments du canevas de la démarche d'investigation. Un autre groupe a trouvé que finalement les élèves n'avaient que peu de liberté. Les situations se trouvaient rapidement fermées par les commentaires. Les schémas ont interpellé un dernier groupe. Ils sont omniprésents et pourtant tellement complexes à concevoir.
Nos critiques nous ont interrogés sur notre regard de formateur. La confrontation avec la mise en œuvre filmée montre que nous sommes parfois trop critiques. L'enseignante a su mettre en place une organisation induisant les objets nécessaires au bon fonctionnement de l'étude. Le schéma eut à nouveau une place importante par les tracés qui étaient demandés.
L'atelier s'est terminé par la présentation des différents modes de pensée de Gonseth (1945-1946) qui, associés aux espaces de travail de géométrie, pourraient être un bon prisme pour comprendre la place du schéma dans ce type de situation.
Ce compte rendu d'atelier reprend et complète ce qui a été dit, ajoutant des précisions quant aux interventions des participants.

Cet atelier trouve son origine dans la recherche menée au sein de l'IREM de Poitiers autour des grandeurs au collège. Toute l'année de sixième a été organisée à travers l'étude de six grandeurs. Cette programmation s'inspire des travaux de CLAIRAUT (1765) dans ses « Eléments de Géométrie ». Notre étude initiale s'est faite avec la théorie anthropologique du didactique (TAD) de CHEVALARD (2002) qui permet de voir l'œuvre de CLAIRAUT comme une organisation mathématique autour de problèmes d'arpentage pour permettre au débutant d'entrer dans les savoirs géométriques (BARBIN, 1995). Sa progression se fait autour de Questions à Fort Pouvoir Générateur (QFPG) lui permettant d'avoir une organisation mathématique pertinente.

Dans cet esprit, nous avons donc étudié les différentes grandeurs du programme de sixième en recherchant les problèmes qu'elles permettaient de résoudre. Nous en avons retenu six. Nous avons construit des organisations mathématiques et didactiques publiées dans les brochures de l'IREM de Poitiers (2009-2012). Elles prennent en compte toutes les connaissances de sixième de façon spiralaire. Les retours des enseignants qui les mettent en place, nous montrent que cette approche répond à une attente du terrain. Est-il alors possible de transposer cette approche à l'école primaire ? La Main à la Pâte propose des situations et du matériel qui pourraient correspondre à cet esprit. L'objectif de cet atelier est de recueillir des avis sur la pertinence de ces situations pour développer des savoirs mathématiques.

Par ailleurs, en tant que formateurs du premier degré, nous devons proposer des solutions pour optimiser les temps d'enseignement. L'une d'elles est de trouver des situations qui permettent de travailler conjointement plusieurs disciplines. Celles-ci peuvent permettre de gagner du temps dans la dévolution des problèmes et la motivation des élèves. Les disciplines connexes aux mathématiques que sont les sciences sont sans doute les plus faciles à étudier. Mais est-il possible qu'une situation déclenchante de mathématiques soit une situation de science ?

La technique d'Eratosthène pour mesurer le diamètre de la terre pourrait être une situation qui vérifie ces différentes conditions. Elle est à l'origine de différentes études tant en mathématiques qu'en sciences (DECAMP et DE HOSSON, 2011). Deux concepts sont en jeu : les rayons lumineux en sciences physiques, les droites parallèles en mathématiques.

Nous analyserons donc les connaissances de sciences de cycle 3 nécessaires en nous aidant des programmes et de l'étude proposée par DECAMP et DE HOSSON (2011).

Par ailleurs, l'association « La Main à la Pâte » propose différentes séquences d'investigation autour de la découverte d'Ératosthène. L'une d'entre elles porte sur la relation entre les ombres et la lumière. Une ressource est en ligne proposant un canevas proche de celui des programmes de sciences du collège. Ce canevas donne une grille de lecture des séances mais aussi permet de mieux comprendre les temps où les mathématiques peuvent trouver une place.

Après cette première étude, nous analyserons trois séances de la première séquence proposée. Elles ont donné lieu à des débats permettant de faire ressortir quelques éléments intéressants comme la place du schéma ou la façon d'aborder un problème en sciences.

Pour finir, nous avons rapidement observé comment une enseignante mettait en place une de ces séances en utilisant différentes ostensions pour arriver à établir la relation entre les ombres et les sources lumineuses. C'est ainsi que furent introduites la notion d'espace de travail géométrique et la question de la place de l'intuition dans ces situations.

I - LA PLACE DES MATHÉMATIQUES DANS LA DÉMARCHE D'INVESTIGATION

1 La relation entre les sciences et les mathématiques : première approche

Dans les problèmes d'arpentage, la question des distances inaccessibles est riche en développements mathématiques et plus particulièrement en ce qui concerne les propriétés angulaires avec le problème de la visée. Dans un travail précédent, j'ai eu l'occasion d'étudier trois situations autour des angles : l'une était extraite du manuel Euromath et reprenait les travaux de BERTHELOT et SALIN (1993-1994), une seconde portait sur l'étude de la transformation au rugby avec la notion d'ouverture d'angle, et enfin la troisième était l'analyse d'une séquence sur les angles en Cycle 3 de MERLE et MUNIER à partir de l'angle mort d'une voiture.

Ce dernier travail a été mené par une didacticienne de physique. Dans les premières situations de la séquence, elle donne une place importante aux schémas. Ils servent à élaborer tout un processus de conceptualisation du champ de vision, délimitant l'angle de vue par des demi-droites. Mais l'introduction des objets mathématiques m'a posé question. J'ai souhaité approfondir ce passage entre les concepts physiques et les mathématiques.

Nous pouvons retrouver cette question de la place des mathématiques dans les sciences dans des questions plus d'actualité. L'Institution affiche une volonté forte de motiver les élèves à suivre des études scientifiques (MONOD-ANSALDI et PIREU, 2011 ; CHARVET, 2004). Les programmes de primaire et du secondaire insistent sur la place de la culture scientifique que l'on retrouve comme un des éléments des compétences du pilier 3 à côté des éléments de mathématiques. Actuellement l'intégration des mathématiques dans ces dispositifs (TPE, enseignement d'exploration « Méthode et pratiques scientifiques », thèmes de convergence, ...) pose des difficultés aux enseignants ; les raisons pouvant être diverses (crainte de l'hégémonie des mathématiques, représentation des savoirs comme objets abstraits, désintérêt des enseignants de mathématiques, choix des thèmes, …).

La première étape du travail a donc été d'aller chercher où les mathématiques pouvaient trouver une place dans les programmes de sciences expérimentales et technologiques (MEN, 2008-a)

2 Existe-t-il une place pour les mathématiques dans les sciences expérimentales et technologiques de Cycle 3 ?

2.1 Échange autour de l'introduction de ces programmes

L'en-tête nous dit :

> *« Les sciences expérimentales et les technologies ont pour objectif de comprendre et de décrire le monde réel, celui de la nature et celui construit par l'Homme, d'agir sur lui, et de maîtriser les changements induits par l'activité humaine. Leur étude contribue à faire saisir aux élèves la distinction entre faits et hypothèses vérifiables d'une part, opinions et croyances d'autre part.*
>
> *Observation, questionnement, expérimentation et argumentation pratiqués, par exemple, selon l'esprit de la Main à la pâte sont essentiels pour atteindre ces buts ; c'est pourquoi les connaissances et les compétences sont acquises dans le cadre d'une démarche d'investigation qui développe la curiosité, la créativité, l'esprit critique et l'intérêt pour le progrès scientifique et technique. »*

La première remarque que les participants ont faite, c'est que la relation entre les sciences expérimentales et les mathématiques n'est pas explicitée. Est-ce que le lien ne doit pas être établi ? Nous en avons plutôt conclu que les mathématiques seraient des outils de pensée.

Nous pourrions envisager qu'elles entrent dans la notion d'« *hypothèses vérifiables* ». Mais il nous a fallu préciser ce que l'on pouvait mettre derrière cette expression. Nous avons considéré qu'une hypothèse est parfois construite à partir d'un modèle mathématique. Un dispositif mathématique peut permettre sa vérification qui confirme ou ne confirme pas la solidité de la théorie en jeu (mais pas nécessairement sa vérité). On peut l'interpréter comme le principe de réfutabilité de POPPER. Dans sa thèse, MATHÉ (2010 p 29) approfondit cette question de l'hypothèse qui « *s'est retrouvée au centre du débat* ».

Le parallèle avec la démarche du mathématicien est explicité dans le passage qui suit. C'est un extrait qui se trouve dans l'introduction commune aux disciplines scientifiques (MEN, 2008-a p.4 ou MEN, 2008-b p.10).

> *« La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre. »*

Le temps et le thème de l'atelier ne nous ont pas permis de développer ce point de vue qui demande de faire la distinction entre hypothèse/conjecture ainsi qu'entre explication/preuve/démonstration. Ces dernières ont été caractérisées par BALACHEFF (1988). En poussant la réflexion dans cette direction, sans doute trouverions nous des éléments concomitants entre la démonstration et l'expérience. Un des participants nous a interrogés sur le statut de la démonstration faite par informatique comme ça été le cas pour le théorème des quatre couleurs : est-ce une démonstration ou une preuve expérimentale ?

Nous avons vu deux autres places pour les mathématiques : dans les phases d'argumentation et dans la démarche d'investigation. Là encore nous n'avons pas approfondi le thème de l'argumentation. Il nécessite des compétences plus larges que les simples compétences mathématiques et l'on retrouve pour partie des questions sur la preuve.

Nos discussions nous ont amenés à envisager d'autres lieux où les mathématiques pouvaient prendre place :

- ✓ « *Comprendre et […] décrire le monde rée*l » passe parfois par une modélisation nécessaire de la réalité par exemple à l'aide de schémas.
- ✓ Hypothèse et fait vérifiable : ils ne doivent pas être vus comme des oppositions mais comme des compléments. Les faits sont liés à une observation de la réalité sans interprétation alors que les hypothèses marquent une prédiction. Il s'agirait d'événements qui ne sont pas encore intervenus. Il y a la possibilité qu'elles soient fausses. Tous deux sont vérifiables soit directement par l'action comme lorsque l'on constate qu'un stylo tombe si on le lâche, soit après l'élaboration un dispositif. Dans ce cas nous parlerions d'une hypothèse : la réalisation de l'expérience demande une première analyse de l'événement. Mais est-ce que seule l'hypothèse est vérifiable ? Est-ce que le fait peut l'être ?

Dans ce passage, il faut sans doute davantage saisir l'esprit dans lequel doivent s'enseigner les sciences expérimentales et technologiques. L'opposition entre les faits et les hypothèses d'un côté et les croyances et les opinions est spécifique à ces disciplines. Ce n'est pas un point de convergence avec les mathématiques même si, à un certain moment, ce sera une raison de développer un savoir comme lorsque l'on étudie les gestions de données.

2.2 Place des mathématiques dans les contenus de sciences et de technologie

L'histoire nous a appris que l'étude du ciel et de la terre avait fourni des occasions pour développer des théories mathématiques. En cycle 3, les élèves doivent étudier :

> *Le mouvement de la Terre (et des planètes) autour du Soleil, la rotation de la Terre sur elle-même ; la durée du jour et son changement au cours des saisons.*
> *Le mouvement de la Lune autour de la Terre.*
> *Lumières et ombres.*
> *Volcans et séismes, les risques pour les sociétés humaines.*

Seul le dernier point ne laisse pas entrevoir de place pour les mathématiques sauf peut être dans le cadre de la gestion et de l'organisation des données.

Les développements de ces domaines durant l'antiquité ont pour origine les observations faites notamment par les Mésopotamiens et les Égyptiens (PICHOT - 1991) à une époque où l'astronomie et l'astrologie étaient confondues.

Le BO n°1 du 5 janvier 2012 (MEN 2012) propose une progression des apprentissages en sciences sur les différentes années de l'école primaire. Sans préciser les liens entre les disciplines, nous avons une indication sur la progression de la découverte de la relation entre la lumière et les ombres.

Dans le détail du socle, les sciences expérimentales et technologiques se retrouvent dans la même compétence que les mathématiques sous l'étiquette « *principaux éléments de mathématiques et de cultures scientifiques et technologique* » mais restent séparées lorsque les compétences sont listées. La démarche d'investigation se situe dans la partie culture scientifique et technologique :

> « *L'élève est capable de :*
> - *pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner ;*
> - *manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter ;*
> - *mettre à l'essai plusieurs pistes de solutions ;*
> - *exprimer et exploiter les résultats d'une mesure ou d'une recherche en utilisant un vocabulaire scientifique à l'écrit et à l'oral ;*
> - *maîtriser des connaissances dans divers domaines scientifiques ;*
> - *...*

Nous verrons que ces différents points se retrouvent dans le canevas de la Démarche d'Investigation.

2.3 Éclairage sur l'opposition entre opinion et science : La position de de Bachelard

Derrière les échanges que nous avons eus, se trouvent certains éléments développés par BACHELARD (1938, p.9) sur l'opposition faite avec les opinions et les croyances.

> « *L'opinion pense mal ; elle ne pense pas : elle traduit des besoins en connaissances ! En désignant les objets par leur utilité, elle s'interdit de les connaître. On ne peut rien fonder sur l'opinion : il faut d'abord la détruire.* »

Cette opinion est le « *premier obstacle à surmonter […] il faut d'abord la détruire* ». L'esprit scientifique se construit pour répondre à des questions. Ainsi contrairement à l'opinion :

> « *L'esprit scientifique nous interdit d'avoir une opinion sur des questions que nous ne comprenons pas, sur des questions que nous ne savons pas formuler clairement. Avant tout, il faut savoir poser des problèmes. Et quoi qu'on dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. C'est précisément ce sens du problème qui donne la marque du véritable esprit scientifique. Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit.* »

Au travers cet extrait, on retrouve la finalité prônée dans l'en-tête des programmes : « [L'] *étude* [des sciences expérimentales et les technologies] *contribue à faire saisir aux élèves la distinction entre faits et hypothèses vérifiables d'une part, opinions et croyances d'autre part.* ».

L'analyse qui suit cet extrait développe la notion d'obstacle épistémologique. La connaissance empirique « *engage l'homme sensible* », perturbe sa raison et bloque l'évolution de son savoir. Il est alors nécessaire de reconstruire le savoir en surmontant ces obstacles.

Bachelard propose d'étudier l'histoire des sciences pas seulement chronologiquement mais en observant l'évolution des concepts à la recherche des contre-pensées et de leurs explications.

Cette approche se retrouve finalement dans certains thèmes du site de la Main à La Pâte (http://www.fondation-lamap.org/fr/projets) comme « *Calendriers, miroirs du ciel et des cultures* », « *Sur les pas d'Ératosthène* » ou encore « *Ma Maison, ma planète … et moi* ». Le premier met en relation les calendriers et établit leur lien avec les observations astronomiques. Le second que nous avons traité dans l'atelier fait découvrir la relation entre les ombres et une source lumineuse. Le soleil sera plus particulièrement étudié pour montrer l'influence des rayons divergents et parallèles. Le dernier sujet est plus éloigné du domaine mathématique. Il reste intéressant à étudier car il montre que le climat et la richesse des pays ont pu influencer l'habitat.

Ainsi ces trois projets sont construits autour de l'adaptation du savoir des hommes aux contraintes environnementales.

3 La démarche d'investigation

3.1 La démarche d'investigation dans les pratiques

Les élèves vont rencontrer ces obstacles en s'appuyant sur la Démarche d'Investigation (DI).

Celle-ci a une grande variabilité dans son application comme le souligne MONOD-ANSALDI et PIREU (2011, p. 8) :

> « *Les séquences d'investigation sont diverses (Morge & Boilevin, 2007). Cette diversité se manifeste à travers les champs disciplinaires mais également à l'intérieur du même domaine. La question cruciale reste celle de la responsabilité de l'élève vis-à-vis du savoir. Dans les propositions didactiques, le constructivisme et le socio-constructivisme sont souvent considérés comme des références épistémologiques à la DI (Calmettes, 2008). D'un point de vue institutionnel, la DI est structurée autour de plusieurs moments-clés. On y trouve, incluse, l'approche hypothético-déductive d'une démarche expérimentale (Triquet & Guillaud, 2011), avec un accent mis sur l'activité des élèves. Le protocole expérimental n'est pas imposé aux élèves par le professeur, il est laissé à leur initiative. Ils le conçoivent et le réalisent pour tester leurs hypothèses (Coquidé et al., 2009). Parallèlement, dans l'étude de (Mathé, Meheut & Hosson, 2008), la DI est identifiée comme une démarche hypothético-déductive exploitant le conflit cognitif. Pour (Larcher & Peterfalvi, 2006), l'investigation met l'accent sur le questionnement et l'important est que l'élève construise ses connaissances. Il s'agit donc de laisser plus d'autonomie aux élèves en proposant des tâches plus ouvertes et des activités de plus haut niveau cognitif (Boilevin & Brandt-Pomares, 2011).* »

L'un des auteurs cité, MATHÉ (2010) étudie l'application de la démarche d'investigation dans les collèges français. Les programmes du collège de 2007 donnent un « *canevas d'une séquence d'investigation* » (annexe 1) : choix d'une situation-problème/appropriation du problème par les élèves/formulation de conjectures, d'hypothèses, explicatives, de protocoles possibles/investigation ou résolution du problème conduite par les élèves/échange argumenté autour des propositions élaborées/acquisition et structuration des connaissances/mobilisation des connaissances. Ce canevas reprend celui proposé par DROUARD (2008).

3.2 Les types de problèmes qui peuvent être traités par la DI

MATHÉ choisit trois auteurs ayant traité de la notion de problème en sciences :

- T. S. KUHN (« *La structure des révolutions scientifiques* ») : Il dissocie les problèmes d'énigmes liés au fonctionnement d'une « *science normale* » et les problèmes liés aux anomalies qui vont correspondre aux révolutions scientifiques.
- L. LAUDANT : il se centre sur la continuité historique et distingue les problèmes empiriques qui concernent « *tout ce qui nécessite une explication* » et les problèmes conceptuels qui émergent de la théorie elle-même lorsque celle-ci a une incohérence interne ou qu'il y a une opposition avec une autre théorie.
- I. HACKING : les problèmes s'organisent autour des finalités de l'activité scientifique : la représentation qui va permettre l'élaboration d'une théorie ou l'interprétation d'un phénomène et l'intervention où le savoir devient un « outil de transformation du monde ».

Dans les programmes, la notion de situation-problème n'est pas présente en primaire où on parle de « *situation de départ* » pour éveiller la curiosité des élèves, les faire se questionner et s'exprimer. Elle apparaît dans ceux du collège et du lycée. On peut penser que le type de problèmes suggéré par le canevas de la démarche d'investigation serait celui de la représentation d'HACKING, ou des problèmes empiriques de LAUDAN. Mais MATHÉ voit surtout les problèmes d'anomalie de

KUHN. L'article de MATHÉ, MÉHEUT & DE HOSSON (2008) en présente une analyse synthétique.

Avec l'extrait du texte de BACHELARD, cette analyse donne une vision plus claire des attentes que peuvent avoir les programmes d'une situation-problème en science expérimentale. Nous avons maintenant des éléments pour déterminer si une situation de science expérimentale est adaptée au développement de connaissances mathématiques tout en gardant sa pertinence.

Ainsi les problèmes d'anomalie sont dans les trois thèmes de la Main à la Pâte. Dans les deux premières, les concepts mathématiques et physiques sont intimement liés dans les notions d'espace et de temps.

4 La place des connaissances mathématiques dans le canevas de la DI

Nous allons maintenant nous interroger sur les moments du canevas où les mathématiques peuvent intervenir.

4.1 Les mathématiques essentiellement des outils

Les premières propositions se sont centrées sur la place des mathématiques comme outil. Lors des moments de modélisation ou de schématisation d'une situation, l'élève ou l'enseignant essaye d'identifier un objet mathématique dont les propriétés sont connues. Celles-ci permettront de déduire une hypothèse ou d'expliquer la réaction d'un système.

Prenons l'exemple de l'étude de la croissance d'une plante. Après avoir trouvé un moyen de mémoriser la taille de la plante chaque jour, les relevés permettent d'analyser l'évolution de la taille. Est-ce régulier ? Est-elle d'abord rapide puis lente ? Est-elle lente puis rapide ? En fonction on peut supposer que la croissance suit une progression affine, logarithmique, exponentielle ou autre.

Dans le cas d'Erathostène, l'utilisation d'objets géométriques dans le schéma représentant la terre et les rayons du soleil permet de trouver l'angle au centre d'un arc à partir d'observation des ombres. Plus globalement, la confrontation du modèle géocentrique du système solaire aux observations a dû être plusieurs fois adaptée pour que celles-ci puissent correspondre aux prévisions. Le passage au modèle héliocentrique a été finalement reconnu comme le plus juste car le plus en adéquation avec les observations. C'est la notion de paradigme de KUHN (1962, p. 71) :

> *« L'étude historique minutieuse d'une spécialité scientifique donnée, à un moment donné, révèle un ensemble d'illustrations répétées et presque standardisées de différentes théories, dans leurs applications conceptuelles, instrumentales et dans celles qui relèvent de l'observation. Ce sont les paradigmes du groupe [...] »*

Comme l'ont souligné les participants, le raisonnement mathématique peut avoir une place dans le paradigme d'une démarche d'investigation. Même si elles sont le cœur de la démarche hypothético-déductive (MATHÉ 2010, p. 31), les étapes 3 et 4 ne sont peut-être pas le meilleur moment pour employer un raisonnement mathématique. Dans ces étapes, le raisonnement expérimental s'appuie soit sur des faits, soit sur des hypothèses. L'utilisation de matériels expérimentaux est source d'erreurs à prendre en compte au moment de l'analyse des résultats. Le raisonnement mathématique s'appuie sur des relations logiques à partir d'hypothèses initialement fixées et considérées comme vérifiées. Il y a une décontextualisation. Les éléments extérieurs n'entrent pas en jeu dans les propriétés déduites.

Les mathématiques ont aussi une place dans la phase hypothético-déductive : elles sont un outil de communication des résultats. Ainsi, le nombre a été dès son origine employé pour conserver des quantités en mémoire. Les mésopotamiens ont pu faire des avancées considérables sur l'observation des astres car ils avaient l'habitude d'établir des listes (PICHOT 1991, p. 150) :

> *« Simplicius rapporte que Callisthène, qui accompagnait Alexandre [Le Grand] dans ses conquêtes, a envoyé à son oncle Aristote une liste des éclipses s'étant produites pendant 1903 ans (ce qui donne la date approximative de 2200 av J.-C. pour le début des observations »*

Cette mathématisation des données est nécessaire lorsque l'expérimentation fait appel à des mesures : il s'agit de « *ne faire varier qu'un facteur à la fois* » et d'obtenir ainsi une relation fonctionnelle entre des données pour en tirer des conclusions. Ce fut une des conclusions de l'atelier de la COPIRELEM 2012 (LEBOT, 2012). Un des participants avait souligné que les mathématiques donnaient des outils de comparaison de résultats expérimentaux et théoriques lors de l'étape 4. Cela est donc plus global car la comparaison a aussi lieu lors du tâtonnement expérimental, de l'exploitation des résultats d'expérience, dans la recherche documentaire où les résultats sont donnés sous formes synthétiques.

Mais dans ces différents moments, les mathématiques restent des outils. Cet usage nécessite que les connaissances aient déjà été des objets d'études ou du moins qu'elles aient acquis le statut d'outils. Si les situations de sciences expérimentales doivent servir à construire les savoirs mathématiques, il nous faut rechercher des situations où ces connaissances seront des sujets d'études. Ces situations pourraient faire appel à des objets mathématiques qui apparaissent de façon intuitive (trajectoire circulaire par exemple). Pour pouvoir trouver des hypothèses, il serait alors nécessaire d'étudier ces objets.

4.2 Une démarche hypothético-déductive

Revenons sur le statut des hypothèses. L'étude de la description des activités de la Main à la Pâte montre que la liberté laissée aux élèves l'est souvent au moment de la formulation des hypothèses. En effet comme le souligne MATHÉ (2010), les programmes de l'école primaire « *réfèrent à l'idée de « situation de départ », censée* [focaliser] *la curiosité des élèves,* [déclencher] *leurs questions et* [leur permettre] *d'exprimer leurs idées préalables » (M.E.N., programmes de l'école primaire, 2007, p. 96)* » (MATHÉ 2010, p. 27). Son analyse de la démarche hypothético-déductive dégage deux types d'hypothèses apparus durant le XX^{e} siècle :

> *« La première correspond à une généralisation dans un processus inductif : de nombreuses observations concordantes permettent la formulation d'une hypothèse généralisatrice. Le second type d'hypothèses s'inscrit dans un processus créatif : il s'agit de créer de nouvelles entités théoriques (neutrinos, trous noirs, etc.) qui ne sont pas directement observables, mais qui sont de nature à permettre une explication plausible de certains faits. »* (MATHE 2010, p. 29)

Elle poursuit en précisant que

> *« Les démarches s'appuyant sur la formulation d'hypothèses visaient, de la même manière que la déduction et l'induction, la recherche d'énoncés ''vrais'', l'hypothèse se trouvant vérifiée ou définitivement écartée par l'expérience. Progressivement, le statut de l'hypothèse change. Ainsi, dans ses premiers écrits, Popper s'oppose-t-il à l'idée de vérification ou même de confirmation d'une hypothèse par l'expérience, mais met en avant la possibilité de sa réfutation (ou falsification) »*

Le point de vue de DUHEM qu'elle décrit est intéressant :

> *« Duhem avance « qu'une expérience de Physique ne peut jamais condamner une hypothèse isolée, mais seulement tout un ensemble théorique » (Duhem, 1906, p. 278), car selon lui, pour déduire une prédiction et pour la soumettre à l'expérience, le physicien fait nécessairement appel à d'autres propositions théoriques. Si le résultat d'une expérience est contradictoire avec l'hypothèse, c'est peut-*

> *être un autre principe de la théorie (une « hypothèse auxiliaire ») qui est en cause, sans que l'expérience ne signale lequel... C'est l'ensemble de ces propositions théoriques qui doit être remis en question, et non seulement l'hypothèse isolée que le physicien veut tester. »*

Cette approche exhibe l'un des points les plus délicats dans la démarche d'investigation qui se trouve sans doute être le moins bien maîtrisé par les enseignants du primaire.

Le bilan des observations menées (MATHÉ, MÉHEUT & DE HOSSON, 2008) est très mitigé sur la mise en place des situations de démarche d'investigation. Sur les étapes 2 à 4 du canevas, elles soulignent que onze fiches sur les vingt-six étudiées

> « *comportaient réellement une demande de formulation d'hypothèses* » (Ibid., p 62) et « *peu d'autonomie est laissée aux élèves dans l'élaboration de protocoles expérimentaux puisque seuls 9 protocoles sur 31 sont entièrement à la charge des élèves. La phase de réalisation de l'expérience est, quant à elle, largement laissée aux élèves (26/31). L'expérimentation paraît alors limitée à une simple phase de manipulation, puisque la plupart des protocoles proposés par les élèves ont été soit corrigés par l'enseignant, soit discutés dans la classe avec l'enseignant pour tendre vers une expérience commune. »*

4.3 Une place pour les mathématiques

Les situations propices à la démarche d'investigation seraient celles qui renvoient à des anomalies d'une théorie. Elles doivent donner des résultats qui vont à l'encontre d'une théorie déjà établie. Les élèves ont une première idée du résultat donnée par une théorie initiale familière. Ils doivent observer la rupture qu'il y a entre ce qu'ils pensaient trouver et le résultat qu'une expérience leur donne. C'est le point de vue de BACHELARD (1934, p. 23). Divers moyens sont possibles pour anticiper le résultat. Les situations intéressantes pour construire des connaissances mathématiques sont celles qui font appel dans cette phase d'hypothèse à des objets mathématiques. Deux types de situations offrent des perspectives : celles qui utilisent des grandeurs et celles qui demandent une schématisation par des objets géométriques. Toutefois les deux peuvent être associées si l'on considère que les objets géométriques sont définis à partir de grandeurs géométriques (angles et longueurs) non nécessairement numérisées.

La modélisation mathématique permet de prévoir les résultats d'une expérience dont toutes les conditions sont fixées et en supposant qu'il n'y ait pas de perturbation liée à des paramètres extérieurs. Ayant développé un modèle mathématique reliant les ombres et le mouvement du soleil et de la terre, cette trajectoire déterminera l'évolution théorique des ombres dans la journée. La comparaison avec les observations déterminera si le modèle est adapté ou non. Il sera possible par exemple de constater que si le mouvement est proche d'une journée sur l'autre, il n'en sera pas de même lorsque les comparaisons se font sur des journées plus éloignées. Le modèle devra être affiné.

La mise en place d'expériences pour valider ces hypothèses sera nécessairement entachée d'erreurs liées aux différents paramètres extérieurs. Afin de pouvoir distinguer les erreurs d'incertitudes et celles liées au modèle, il est nécessaire d'avoir auparavant étudié l'objet mathématique qui servira à la modélisation. La théorie doit être suffisamment robuste pour qu'elle n'induise pas de doute dans les prévisions qu'elle donne. Elle doit être étudiée par les élèves soit en amont soit au moment de cette rencontre.

La situation sur les ombres et la lumière est intéressante de ce point de vue car l'ensemble des observations et des analyses repose sur la connaissance des droites sécantes et parallèles et leurs propriétés angulaires. Mais tout comme la croissance de la plante, nous constaterons que les élèves ont des connaissances empiriques personnelles. Lorsque l'élève pense à la croissance de la plante (ou à la fonte du glaçon), la notion de temps est prégnante mais il ne la formalise pas. Il a l'intuition de la relation fonctionnelle qui va lier le temps et la longueur. En demandant de trouver une expérience qui permet de vérifier qu'une plante grandit, nous obligeons l'élève à étudier cette relation fonctionnelle en centrant les observations soit sur la durée soit sur la longueur. Cette première phase permet de justifier l'étude d'objets mathématiques. Dans cet exemple, il faut saisir que la croissance est une relation fonctionnelle entre le temps et la longueur et chercher les moyens de montrer cette relation.

On comprend alors que les situations ne sont pas toutes propices au développement de connaissances mathématiques comme l'ont souligné les participants.

II - LA SITUATION D'ERATHOSTÈNE

1 Analyse de la situation par des didacticiens de sciences physiques

DECAMP et DE HOSSON (2011) ont analysé la situation d'Ératosthène sous différents points de vue : historique, scientifique et didactique. Ils relèvent les différents travers observés dans les mises en œuvre puis proposent une nouvelle organisation didactique.

L'étude historique décrit les techniques de l'époque pour observer le déplacement du soleil. Il a pu être observé à l'aide d'un scaphé, demi-sphère dans laquelle un gnomon est planté. L'observation de l'ombre de ce bâton sur la demi-sphère permet de connaître l'angle du rayon du soleil avec la terre grâce à certaines hypothèses qu'Erathostène a posées. Le schéma suivant explicite les relations angulaires :

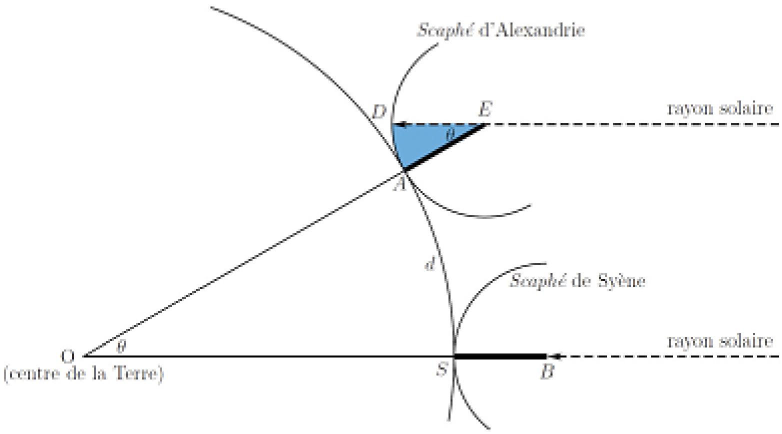


Fig. 1 : Schéma représentant la méthode d'Ératosthène selon le récit de CLÉOMÈDE

DECAMP et DE HOSSON (2011) reprennent les différentes analyses des historiens sur l'usage des instruments et des approximations des mesures. Les travaux de références cités, en particulier ceux de GOLDSTEIN (1984), reviennent sur la naissance de l'unité de mesure des angles. Les erreurs relevées sont liées aux techniques employées pour mesurer la distance de Syène à Alexandrie, ou sur le parallélisme des rayons du soleil. Ils comparent aussi cette méthode à celle de Posseidônios qui reprend une comparaison faite par Cléomède.

Leur analyse didactique des différentes mises en œuvre introduit la notion d'objectif-obstacle définie par Martinand :

> « *Dans la mesure où ces obstacles ont une signification épistémologique profonde, je crois qu'ils fournissent la clé pour formuler les buts les plus essentiels d'une éducation scientifique. Autrement dit, il s'agit d'exprimer les objectifs en termes d'obstacles franchissables, car parmi la diversité des objectifs possibles, les objectifs intéressants sont les objectifs-obstacles. [...] II nous paraît légitime de faire de leur franchissement les vrais objectifs conceptuels. […]*
>
> *L'ambition pratique est donc de fournir aux maîtres, avec une liste d'obstacles à franchir par les*

élèves, la description des buts des activités, afin de permettre d'orienter les interventions pédagogiques et l'évaluation. »

Leur constat est le suivant : les élèves qui ont été interrogés (niveau collège) ont une représentation performante de la propagation du soleil (DECAMP et DE HOSSON 2011, pp. 1074-1075) :

« elle permet d'expliquer pourquoi il n'y a pas d'ombre à un endroit et une ombre à un autre endroit de la Terre et pourrait même, dans une certaine mesure, être considérée comme correcte […] Représenter la propagation de la lumière du Soleil en des rayons parallèles n'est pas naturel. Les élèves choisissent spontanément un modèle en rayons divergents et font figurer le Soleil sur la plupart de leurs dessins. Le passage de la divergence au parallélisme nécessite un passage à la limite complexe, un saut conceptuel dont la difficulté ne doit pas être sous-estimée.

Pourtant, la plupart des fiches d'enseignement conçues en référence à la découverte d'Ératosthène se contentent d'énoncer l'hypothèse du parallélisme sans que celle-ci ne soit réellement construite, voire interrogée. Cette hypothèse est parfois posée comme alternative à l'hypothèse des rayons divergents d'Anaxagore, mais en tant que modélisation de la propagation de la lumière du Soleil, elle fait rarement l'objet d'une construction spécifique. »

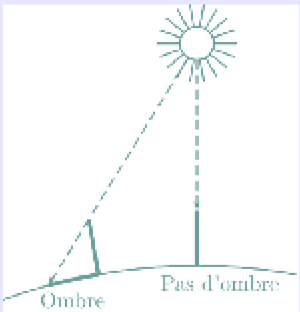


Fig 2 : Dessin prototypique d'élèves à qui l'on demande d'expliquer pourquoi au solstice d'été deux gnomons ne projettent pas la même ombre en deux endroits différents de la Terre situés le long du même méridien [14, 16, 28].

Ainsi pour des didacticiens de la physique, le passage des rayons convergents aux rayons parallèles par un passage à la limite est problématique. Nous trouvons cette difficulté lorsqu'il s'agit de caractériser des droites parallèles : alors qu'à l'école primaire, l'approche par les conservations de l'écart est privilégiée, au niveau du collège, les droites parallèles sont deux droites confondues ou qui ne se coupent pas. En primaire la conservation de l'écart permet de développer une technique de construction. En collège, il s'agit de donner la définition n°35 du livre I des Eléments d'Euclide.

2 Analyse mathématique de la situation

Cette situation sert de support dans de nombreux exercices mathématiques à tous les niveaux.

Les différentes critiques qui vont suivre ont été soulevées par des enseignants du second degré lors de la journée régionale de l'APMEP du Poitou Charentes de 2012.

2.1 La notion de verticalité

Dans le scaphé, il est nécessaire que le gnomon soit en position verticale. Mais que représente la verticale d'un point de vue mathématique ? C'est de cette caractérisation que vont se déduire les relations angulaires. Cette verticalité est portée par la droite passant par le centre de la sphère que nous simplifierons par une projection en un cercle. Or dans notre cas, nous n'avons pas le centre de la Terre. Nous ne connaissons que des points de la surface de la sphère ou du cercle. La direction est portée par la médiatrice du segment joignant ces deux points :

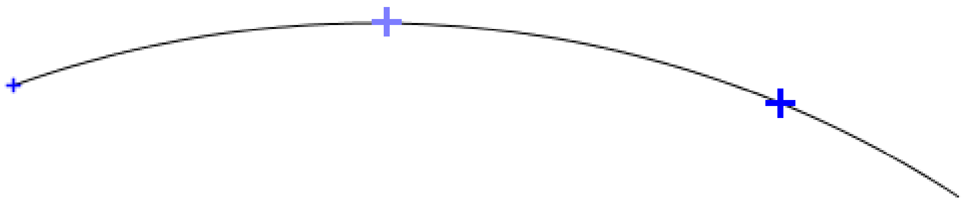


Fig. 3

Cette approche est intéressante car elle s'inscrit dans un cadre théorique plus large. La verticalité est finalement un cas particulier de la normale à une courbe et qui permet de définir l'angle que l'on fait avec la pente d'une montagne pour se tenir à la verticale.

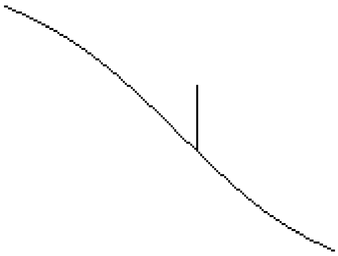


Fig. 4

2.2 Le scaphé

Le scaphé mesurait donc l'angle formé par les rayons du soleil et la verticale. La question qui se pose est de savoir quelle unité employaient les Grecs. GOLDSTEIN (1984) estime qu'il est fort probable que ce soit le douzième ou le vingt quatrième d'angle plein soit des angles de 30° ou de 15°. Le scaphé contient alors des lignes indiquant cette graduation :

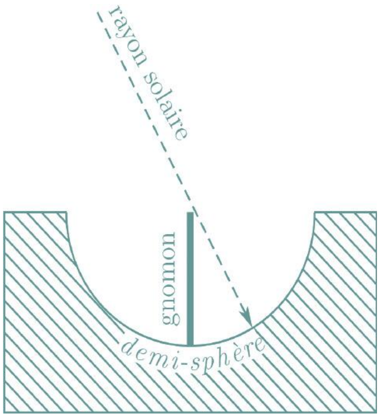


Fig. 5 :Cadran solaire hémisphérique ou scaphé.

Fig. 6 : Hartmann Linge Hartmann. Linge@de.wikipedia (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)

Cette graduation est liée au fractionnement du cercle. Dans les travaux de l'IREM de Poitiers pour l'étude de la grandeur de l'angle en sixième, nous avons essayé de chercher l'origine du partage de l'angle en 360°. Comment cette graduation a-t-elle pu être construite ? Elle fait appel entre autre à la trisection de l'angle. Il est possible de partager en secteur de 15° (1/24 d'angle plein). Il n'est pas possible d'aller plus loin dans le partage. GOLDSTEIN (1984) suppose que les Grecs prenaient comme unité l'angle de 7,1255°. Cet angle correspondrait à la limite de la précision de l'œil.

La recherche de la relation entre l'unité de mesure de l'angle et sa construction est une problématique spécifique aux mathématiques. Elle peut se poser lorsqu'un physicien voudra construire un instrument de mesure. Mais deux alternatives s'offriront à lui : soit s'appuyer sur un étalonnage soit construire un dispositif matériel qui, par des propriétés géométriques, garantit une homogénéité de la mesure. Dans les différents manuels de science, on constate que cette question n'est pas abordée. Les unités sont introduites comme des normes.

La dernière difficulté que nous allons aborder est d'ordre ontogénique. Il s'agit du problème de la projection. Comme on le voit sur le schéma explicatif, pour bien saisir les relations, la situation a été représentée dans un plan de coupe. Diverses transformations sont employées : les passages du macro-espace au micro-espace, de l'espace au plan déterminé par le gnomon et le centre de la Terre. Ces difficultés sont des questions prégnantes dans l'enseignement des mathématiques. De plus le schéma n'a pas une échelle homogène. Le scaphé ne peut être représenté dans la même proportion que la Terre.

2.3 Mesure de l'angle au centre

DECAMP et DE HOSSON (2011) nous présentent deux techniques pour mesurer l'angle de l'arc de cercle joignant Alexandrie à Syène. Les Grecs obtenaient la circonférence de la Terre en utilisant la proportionnalité entre l'angle au centre et la longueur de l'arc. La première utilise les angles alternes internes. C'est celle employée dans l'activité de la Main à la Pâte. Cette notion est au programme de cinquième. L'étudier en primaire nécessite des adaptations soit par des ostensions soit en s'appuyant sur l'intuition.

Le schéma a un rôle particulier. Il est un instrument de compréhension intéressant à mettre en regard avec le point de vue de BACHELARD (1934) dans son discours préliminaire de « *La formation scientifique* » :

> *« Rendre géométrique la représentation, c'est-à-dire dessiner les phénomènes et ordonner en série les événements décisifs d'une expérience, voilà la tâche première où s'affirme l'esprit scientifique. »*

Nous retrouverons cette position dans l'analyse du tome II de « *La géométrie et problèmes de l'espace* » de GONSETH (1946) lorsqu'il introduit les théâtres des perceptions et des gestes pour caractériser l'intuition. La personne mathématicienne est celle qui raisonne à partir de ces représentations de la réalité.

Le texte de Cléomède

Cléomède commence par poser ses hypothèses et les données qu'il possède. Il reprend la présentation des éléments d'Euclide. C'est aussi celle attendue dans les démonstrations par certains enseignants du secondaire.

DECAMP et DE HOSSON (2011) ont un point de vue de physicien. Ils posent la question de la vraisemblance des mesures choisies et non des hypothèses. Les différentes analyses et critiques de ces mesures sont parfois d'ordre mathématique comme nous l'avons vu pour la mesure des angles.

La distance entre Syène et Alexandrie a pu être évaluée de différentes façons : en utilisant la vitesse moyenne de voyageurs, par triangulation ou en mesurant le long du Nil et en corrigeant les déviations à partir de tables. Derrière ces techniques, on retrouve des niches écologiques qui ont permis le développement des mathématiques et l'élaboration de théories plus complexes.

La méthode de Posseidônios

Elle n'a pas été abordée durant l'atelier. Elle passe par la tangente au cercle qui est obtenue par l'observation d'un point à l'horizon.

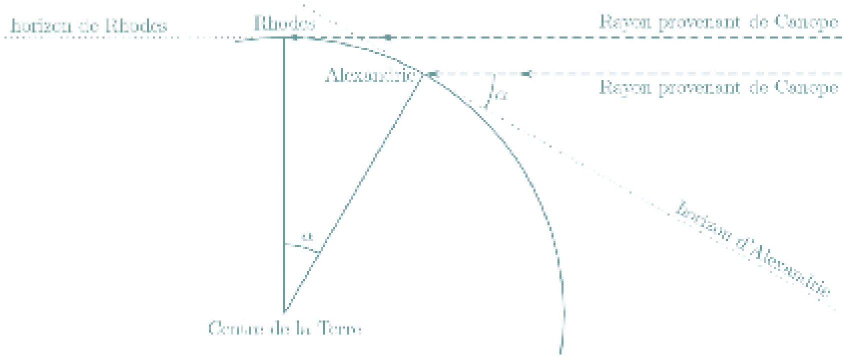


Fig 7

La comparaison des résultats donnés par les deux techniques permet d'apprécier la justesse de la méthode d'Eratosthène. Nous ne développerons pas ce point ici.

Ainsi cette situation se prête à un travail conjoint en mathématique et en sciences même si nous sommes conscients que ces disciplines n'ont pas les mêmes problématiques. Elle est riche mais fait appel à des notions plus complexes en physique : il ne s'agit plus d'observer le soleil mais une étoile, Canopé, qui est à l'horizon à Rhodes et plus haute dans le ciel à Alexandrie. Mais l'observation de l'horizon demande de prendre en compte les phénomènes de réfraction des rayons lumineux. Les mesures sont alors moins précises.

D'un point de vue mathématique, cette situation est pourtant intéressante. Elle permet d'aborder les relations angulaires des tangentes au cercle faisant intervenir diverses propriétés. Mais là encore il est trop précoce de les faire étudier en Cycle 3 : la relation entre l'angle au centre et l'angle de l'horizon n'est pas directe.

3 Analyses didactique et épistémologique

3.1 Articulation mathématiques/sciences expérimentales

Remarques des participants

La trajectoire de la lumière : des approximations nécessaires

Dans les échanges de l'atelier sur la situation, des participants ont été surpris de constater qu'il semblait évident que la trajectoire de la lumière soit rectiligne. Toutes les représentations font cette hypothèse. Or l'atmosphère n'est pas homogène, il y a des phénomènes de réfraction par exemple liés aux différentes particules en suspension. Alors pourquoi ne pas la remettre en cause ? Le document ressource de la Main à la Pâte propose un complément historique (p. 51) que l'on peut approfondir avec l'article de l'Encyclopédie Universalis sur l'optique (http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/optique-principes-physiques)

La notion de cône de lumière lié à une source lumineuse est aussi problématique. Elle supposerait que la source soit ponctuelle. Or mathématiquement, elle ne peut l'être, elle est nécessairement un regroupement de points. Elle donne lieu à la pénombre que les auteurs de la Main à la Pâte soulignent à la page 44 de leur « *guide de l'enseignant* » :

> *« Il est possible que les élèves s'interrogent sur le fait que les contours des ombres apparaissent plus ou moins flous : ils peuvent, par des expériences très simples, être amenés à découvrir que ce flou constitue ce qu'on appelle la pénombre, et que la formation de celle-ci est liée à la dimension, ponctuelle ou non, de la source lumineuse. »*

C'est la notion d'approximation qui est derrière ces observations.

Ces deux difficultés sont évacuées des premières analyses de DECAMP et DE HOSSON (2011). Cela est similaire à ce que l'on peut trouver lors de l'approche de certains concepts mathématiques.

Le temps scolaire ne permet pas d'explorer pleinement les différentes hypothèses. Il est nécessaire de faire des choix et de passer sous silence certaines questions. C'est une forme d'expertise des enseignants de survoler ces obstacles pour aller à leur objectif d'enseignement sans amener de confusion chez les élèves. Ceci est à rapprocher des phénomènes d'ostension de BERTHELOT-SALIN (1993-1994, p. 40).

Le continu physique

La question de l'approximation impose de distinguer le continu physique des sciences appliquées et le continu mathématique. POINCARÉ (1902, p. 51) :

> *« On a observé, par exemple, qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids B ne pouvait non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C. Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes :*
>
> $A = B, \qquad\qquad B = C, \qquad\qquad A < C$
>
> *qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique.*
>
> *Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable, et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraints à inventer le continu mathématique. »*

Cette distinction est intuitive. Elle se confronte à l'expérience. POINCARE y voit une distinction fondamentale entre les mathématiques et les sciences appliquées. Cette distinction peut être vue dans les écrits de BACHELARD (1934, « Discours préliminaire » p. 5) :

> *« Rendre géométrique la représentation, c'est-à-dire dessiner les phénomènes et ordonner en série les événements décisifs d'une expérience, voilà la tâche première où s'affirme l'esprit scientifique. C'est en effet de cette manière qu'on arrive à la quantité figurée, à mi-chemin entre le concret et l'abstrait, dans une zone intermédiaire où l'esprit prétend concilier les mathématiques et l'expérience, les lois et les faits. Cette tâche de géométrisation […] vient toujours à révéler une insuffisance. Tôt ou tard, dans la plupart des domaines, on est forcé de constater que cette première représentation géométrique, fondée sur un réalisme naïf des propriétés spatiales, implique des convenances plus cachées, des lois topologiques moins nettement solidaires des relations métriques immédiatement apparentes, bref des liens essentiels plus profonds que les liens de la représentation géométrique familière. On sent peu à peu le besoin de travailler pour ainsi dire sous l'espace, au niveau des relations essentielles qui soutiennent et l'espace et les phénomènes. La pensée scientifique est alors entraînée vers des « constructions » plus métaphoriques que réelles, vers des « espaces de configuration » dont l'espace sensible n'est, après tout, qu'un pauvre exemple. Le rôle des mathématiques dans la Physique contemporaine dépasse donc singulièrement la simple description géométrique, Le mathématisme est non plus descriptif mais formateur. La science de la réalité ne se contente plus du comment phénoménologique ; elle cherche le pourquoi mathématique. »*

Dans les schémas précédents, le modèle géométrique explique pourquoi au même moment, une ombre est présente à un endroit du globe et pas à un autre. Il donne aussi le moyen de calculer le rayon de la Terre. Les schémas montrent les relations. Ils vont expliquer le pourquoi des observations. La Main à la Pâte (p. 29) propose une séance (première séance de la première séquence) pour confronter deux modèles : le cas où la Terre serait plate et celui où elle serait ronde. Ils s'appuient sur la confrontation entre l'intuition et l'expérience. Le nouveau modèle montrera ses limites plus tard dans la scolarité des élèves. Les remarques précédentes pourront être la source de nouvelles questions remettant en cause le système.

Par exemple, lors de l'expérimentation en classe, l'enseignante a dû expliquer le passage de la feuille courbée à la sphère. Des élèves avaient du mal à comprendre que la figure 2b était une partie du globe.

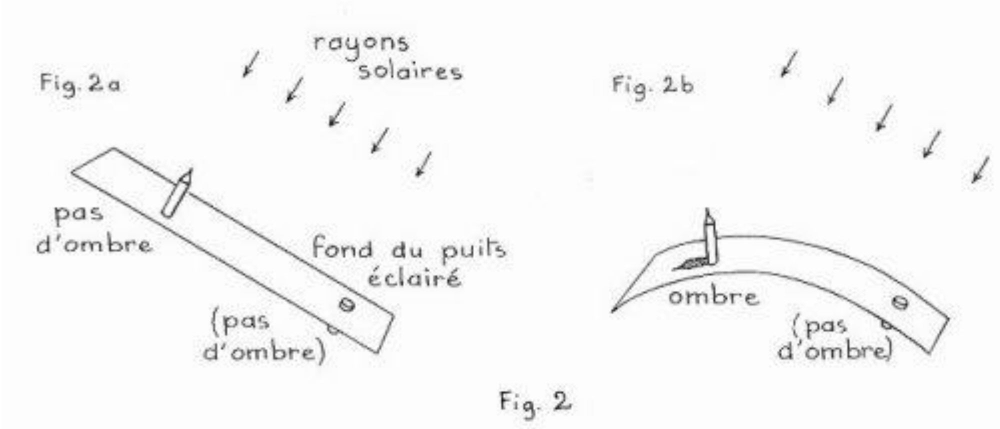


Fig 8

D'autres ont obtenu le résultat en courbant la feuille dans l'autre sens. L'enseignante a dû expliquer l'erreur en faisant référence au globe terrestre.

Physiciens, mathématiciens : deux finalités différentes

La confrontation des échanges et de l'analyse de DECAMP et DE HOSSON (2011) met en évidence que les priorités des physiciens et des mathématiciens ne sont pas la même. En particulier le temps didactique est différent.

Pour les premiers, c'est l'application du modèle pour vérifier les hypothèses qui prime. Il s'agit de confronter le résultat aux hypothèses. Ceci se voit dans la description du déroulement des séances. Elles précisent les hypothèses qui doivent arriver et induisent les dispositifs expérimentaux.

A contrario, en mathématiques, la richesse de la situation va dépendre de la formulation des hypothèses. Leur explicitation induira un modèle. Celui-ci orientera le choix du dispositif expérimental. La confrontation du résultat de l'expérience avec la prédiction faite à partir du modèle permet de confirmer ou de réfuter les hypothèses. Dans les figures précédentes, les propriétés des rayons parallèles permettent d'expliquer pourquoi en 2a il n'y a pas d'ombre et pourquoi en 2b il y en a une.

Cet exemple montre que le modèle utilisé est d'abord intuitif. Il faudrait d'abord l'étudier pour avoir les propriétés qui permettront d'expliquer les observations.

Pour formuler rigoureusement des hypothèses, il est nécessaire d'avoir des objets mathématiques clairement définis. Il faut ensuite avoir un cadre théorique qui donne des propriétés qui vont permettre de faire des prévisions. On retrouve le cadre de la résolution de problèmes.

POINCARÉ (1902, p. 49) nous fournit une explication à ce phénomène :

> *« Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets ; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse. »*

Dans son ouvrage « *La valeur de la science* », il précise la fonction des définitions (p 34) :

> *« Je veux démontrer, par exemple, que telle propriété appartient à tel objet dont la notion me semble d'abord indéfinissable, parce qu'elle est intuitive. J'échoue d'abord ou je dois me contenter de démonstrations par à peu près ; je me décide enfin à donner à un objet une définition précise, ce qui me permet d'établir cette propriété d'une manière irréprochable. »*

Cela explique les remarques lors de l'atelier : il est important pour un mathématicien d'avoir différentes définitions. C'est lors de la démonstration ou de l'expérimentation qu'une définition plus précise et unique pour tous va émerger. L'article de OUVRIER-BUFFET (2012) donne des éléments extrêmement intéressants pour déterminer la pertinence de telles situations. En particulier elle donne une classification des situations impliquant une activité de définition (p. 501).

La notion d'obstacle épistémologique

Reprenons les raisons qui nous ont amenés à étudier cette situation. Historiquement, elle a été le signe d'une avancée des connaissances physiques. Dans sa rédaction, Cléomède reprend une rédaction mathématique, comme s'il voulait démontrer son résultat car il répond à une question complexe : comment mesurer la circonférence de la Terre à partir de l'observation d'ombres ? Ne serait-ce pas un indicateur d'obstacle épistémologique au sens de BACHELARD, tel qu'il le définit dans « *La formation de l'esprit scientifique* » (1934, p. 13) :

> *« Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques. [...]*
>
> *On connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même fait obstacle à la spiritualisation »*

Cette notion a été reprise par BROUSSEAU (1998, p. 124) pour expliquer l'origine d'obstacles didactiques. En les transposant aux problèmes mathématiques, son analyse met en relation les théories de BACHELARD et de PIAGET (BROUSSEAU 1998, pp. 115-160).

L'obstacle est caractéristique d'une situation. Il va permettre d'entrer dans l'apprentissage et de construire le savoir en surmontant les erreurs :

> *« L'obstacle est constitué comme une connaissance, avec des objets, des relations, des méthodes d'appréhension, des prévisions, avec des évidences, des conséquences oubliées, des ramifications imprévues, ... Il va résister au rejet, il tentera, comme il se doit, de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit, suivant un processus d'accommodation bien connu. »*

Celui d'origine épistémologique est un cas particulier :

> *« Les obstacles d'origine épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire qu'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus. »*

La dernière phrase nous incite toutefois à réfléchir sur la pertinence de donner l'étude de cette situation à des élèves.

3.2 Pertinence du choix de cette situation

L'analyse préliminaire de la situation montre la richesse de la situation. Dans la schématisation, le passage du macro espace au micro espace nécessite un saut cognitif important. Elle impose de sélectionner les éléments importants. Nous avons vu que les mathématiques sont un outil prédictif pour les sciences. La première note du texte de DECAMP et DE HOSSON (2001) indique que cette schématisation était sans doute un problème en son temps :

> *« Selon RUSSO [31], bien que cette méthode semble aujourd'hui facile à comprendre en s'aidant d'un dessin, ce passage d'un dessin à des conclusions valables pour la Terre entière était incompréhensible pour une civilisation préscientifique. »*

L'observation des ombres est un des éléments qui a permis de confirmer la sphéricité de la terre qui avait pu être trouvée par d'autres observations (DECAMP et DE HOSSON 2011, p. 1066). Cette schématisation fait partie de l'activité scientifique : elle permet la formulation d'hypothèses (l'angle au centre de la Terre est le même que celui formé par l'ombre d'Alexandrie) déduites des propriétés angulaires du parallélisme. L'expérience permettra de confirmer ou non ce modèle.

Travail mathématique possible dans la démarche d'investigation

Cette analyse montre que les mathématiques avaient une place dans certaines démarches d'investigation. Essayons de généraliser la caractérisation des situations de démarches d'investigation qui peuvent laisser une place aux mathématiques.

C'est la nécessité de passer par un schéma pour trouver un modèle géométrique qui a permis cette introduction. Les hypothèses ont été déduites des propriétés des objets géométriques employés. La validité du modèle a été obtenue par la confrontation des hypothèses au résultat d'une expérience. Il est donc nécessaire que les déductions tirées de la schématisation aient une bonne assise théorique. Cette théorie est mathématique car reposant sur des objets abstraits : le schéma est une représentation forte en symboles où seuls les éléments nécessaires sont représentés. Il impose d'avoir déjà abstrait la situation. La connaissance mathématique permet de donner une hypothèse "raisonnable". L'expérience pourra dévoiler un conflit entre le jugement initial et la réalité remettant en cause le modèle mathématique employé :

L'approche de CHEVALLARD (2002) dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique donne des éléments pour exploiter ce conflit et développer le savoir mathématique.

> *« La théorie anthropologique du didactique considère que, en dernière instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche τ d'un certain type T, au moyen d'une certaine technique t, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. En bref, toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on peut noter [T/τ/θ/Θ] et qu'on nomme praxéologie, ou organisation praxéologique. Le mot de praxéologie souligne la structure de l'organisation [T/τ/θ/Θ] : le grec praxis, qui signifie « pratique », renvoie au bloc pratico-technique (ou praxique) [T/τ], et le grec logos, qui signifie « raison », « discours raisonné », renvoie au bloc technologico-théorique [θ/Θ]. Ces notions permettent de redéfinir de manière assez réaliste certaines notions courantes : ainsi peut-on considérer que, par savoir-faire, on désigne usuellement un bloc [T/τ], et, par savoir, en un sens restreint, un bloc [θ/Θ] – ou même, mais en un sens large cette fois, une praxéologie [T/τ/θ/Θ] tout entière. »*

Les origines possibles du conflit pourraient être une technologie fausse qui impose de revisiter la théorie associée pour améliorer le modèle. Le schéma évoluera avec une nouvelle sémiotique. Il s'agit alors de construire une théorie plus précise avec des hypothèses plus fines à l'image de la révolution mathématique du XIX^{e} siècle et de son exigence à une plus grande rigueur qui va réorganiser les savoirs mathématiques (BOURBAKI 1984, p. 31).

Ce pourrait être une difficulté technique : le modèle est identifié par l'élève mais les outils mathématiques connus ne sont pas suffisamment développés pour en déduire des hypothèses. Il doit alors être étudié pour développer la technologie et la théorie qui vont ouvrir sur de nouveaux résultats. Notre situation en est un exemple : les rayons du soleil sont parallèles. Mais les élèves qui ne connaissent pas les propriétés angulaires du parallélisme ne pourront pas établir d'hypothèses pertinentes. Ils devront se contenter d'une approche intuitive.

Enfin les résultats obtenus lors de l'expérience peuvent aller contre l'opinion. Il sera nécessaire de convaincre et construire le savoir contre celle-ci. C'est la demande des programmes et l'exigence de BACHELARD (1934, P. 16) :

> « *Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit.* »

On voit se dessiner une articulation entre les situations mathématiques et la démarche d'investigation en sciences expérimentales. Cette dernière pourrait contenir des situations d'approche, de première rencontre avec un savoir. L'étude pourrait avoir comme objectif de développer une théorie, d'élaborer une technique ou encore de travailler sur le discours technologique.

Quels esprits mathématiques dans ces situations ?

Ces situations peuvent donc être des niches écologiques pour des savoirs mathématiques.

Les sciences appliquées étudient des phénomènes. Ils en dégagent des modèles. Les mathématiciens ont alors la mission de les étudier pour faire des hypothèses. Nous sommes dans une praxéologie de mathématiques appliquées.

Les développements des mathématiciens sont donnés par une approche plutôt intuitive : les résultats sont en relation avec la réalité, il est donc possible de s'appuyer sur une approche intuitive ou sensible des conjectures. Elle est liée à l'expérience. Cette approche est-elle pertinente ?

Revenons à la catégorisation des mathématiciens par POINCARÉ (1905, p. 27) :

> « *Il est impossible d'étudier les Œuvres des grands mathématiciens, et même celles des petits, sans remarquer et sans distinguer deux tendances opposées, ou plutôt deux sortes d'esprits entièrement différents. Les uns sont avant tout préoccupés de la logique ; à lire leurs ouvrages, on est tenté de croire qu'ils n'ont avancé que pas à pas, avec la méthode d'un Vauban qui pousse ses travaux d'approche contre une place forte, sans rien abandonner au hasard. Les autres se laissent guider par l'intuition et font du premier coup des conquêtes rapides, mais quelquefois précaires, ainsi que de hardis cavaliers d'avant-garde.* »

La démarche d'investigation semble privilégier l'expérience et l'intuition allant vers une approche de géomètre. Mais comme l'indique POINCARE, il est possible d'avoir un regard de logicien comme cela a été le cas au XIX^{e} avec le souhait d'une plus grande précision. Les remarques faites en 3-1 sur l'aspect rectiligne de la lumière seraient du côté des logiciens.

La schématisation du problème emprunte beaucoup à la vision euclidienne de la géométrie. C'est ainsi que la position des Éléments d'Euclide a été abordée dans l'atelier. Dans le premier livre (PEYRARD 1804, p. 18) une large place est laissée initialement à l'intuition. Les définitions des premiers objets parlent d'« *égalité* », d'« *inclinaison* », de « *ligne qui se touchent* », … D'ailleurs pourrait-il en être autrement ? La notion d'égalité de figure est fortement liée à la notion des superpositions. Mais le point de vue du géomètre n'est pas le seul présent comme nous l'explique POINCARÉ (1905) :

> « *Si nous relisons les œuvres des anciens, nous serons tentés de les classer tous parmi les intuitifs. Et pourtant la nature est toujours la même, il est peu probable qu'elle ait commencé dans ce siècle à créer des esprits amis de la logique.*
>
> *Si nous pouvions nous replacer dans le courant des idées qui régnaient de leur temps, nous reconnaîtrions que beaucoup de ces vieux géomètres étaient analystes par leurs tendances. Euclide,*

> *par exemple, a élevé un échafaudage savant où ses contemporains ne pouvaient trouver de défaut. Dans cette vaste construction, dont chaque pièce, pourtant, est due à l'intuition, nous pouvons encore aujourd'hui sans trop d'efforts reconnaître l'œuvre d'un logicien. Ce ne sont pas les esprits qui ont changé, ce sont les idées ; les esprits intuitifs sont restés les mêmes ; mais leurs lecteurs ont exigé d'eux plus de concessions. »*

La vision du géomètre ou celle du logicien sont sans doute toutes deux présentes dans certaines situations de démarche d'investigation. La place des mathématiques tout comme le travail mathématique pourrait dépendre de l'angle sous lequel on traite ces situations.

3.3 Une situation issue de la réalité

Un problème complexe

Mais partir d'une situation expérimentale reste difficile. D'abord la modélisation fait appel à un processus de schématisation et à la sélection d'éléments pertinents. Ces éléments correspondent à des connaissances mathématiques accessibles aux élèves.

Les problèmes ancrés dans la réalité nécessitent des comparaisons de mesures. Or ces mesures vont être prises sur des objets réels avec toutes les incertitudes et approximations afférentes. La comparaison des résultats expérimentaux et théoriques devra prendre en compte les incertitudes éventuelles.

Ce sont donc des situations complexes. Est-il nécessaire d'aller aussi loin pour étudier des savoirs mathématiques ? Peut-on les considérer comme des problèmes mathématiques ?

Nous avons retenu que les difficultés doivent être liées à la notion d'obstacle épistémologique. L'enseignant doit donc aménager le milieu pour que l'élève y ait accès le plus rapidement possible en contournant les autres difficultés.

Dans les cahiers pédagogiques n° 427, CHARNAY (2004) donne une description du problème qui peut nous aider à faire des choix d'étayage :

> *« La résolution de problèmes, enjeu et moyen principal de l'éducation mathématique : tout le monde est d'accord. Mais, y a-t-il le même consensus autour de ce que désigne le mot problème ? Souvent le problème se confond avec un genre littéraire appelé énoncé de problème. Apprendre à résoudre un problème se confond parfois avec apprendre à lire l'énoncé du problème [...]*
>
> *Or l'énoncé, qui peut être oral aussi bien qu'écrit, n'est que le support permettant de communiquer le problème. Il n'est pas le problème ! [...]*
>
> *Adoptons une définition simple du problème. Un énoncé compris par un élève devient un problème ... si sa résolution fait problème à cet élève. S'il « voit» la solution immédiatement, il est confronté à un exercice utile pour entretenir et valoriser ses connaissances, mais pas à un problème.*
>
> *Bonne question que doit se poser un enseignant : Combien de fois, dans l'année, mes élèves sont-ils confrontés à un problème ? » (ibid., p. 36)*

Ainsi l'élève rencontre le problème une fois que l'élève a compris l'énoncé.

HOUDEMENT (2003 p 11) propose différentes pistes pour favoriser cette compréhension. Ainsi en proposant des représentations des éléments en jeu, il est possible d'induire et de simplifier la situation.

Exemples d'étayage

Lors de l'atelier, c'est dans la géométrie non Euclidienne que des exemples ont été donnés : pour donner un exemple de ce que peut être un triangle non euclidien différentes représentations sont possibles. On peut prendre un globe terrestre, se donner trois points sur celui-ci et les relier par trois segments en les définissants comme les chemins les plus courts. La somme des angles n'est alors plus de 180° (figure ci-contre triangle, trirectangle).

On obtient une figure analogue en découpant un triangle dans une feuille, en l'évidant sur un secteur et en le redécoupant pour obtenir un triangle "courbe".

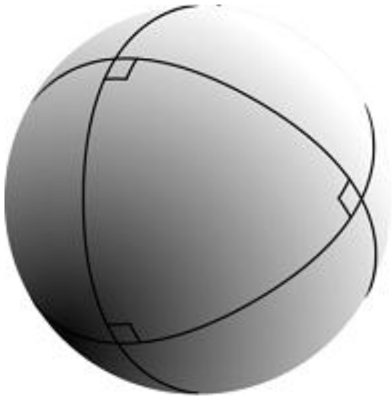


Fig. 9 : Coyau (Own work) [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ces représentations aident à la compréhension. Elles permettent des manipulations mentales ou physiques. Mêmes si celles-ci restent approximatives, elles offrent la possibilité d'aborder les problèmes de façon intuitive alors qu'ils étaient jusqu'alors inaccessibles théoriquement pour une partie des élèves.

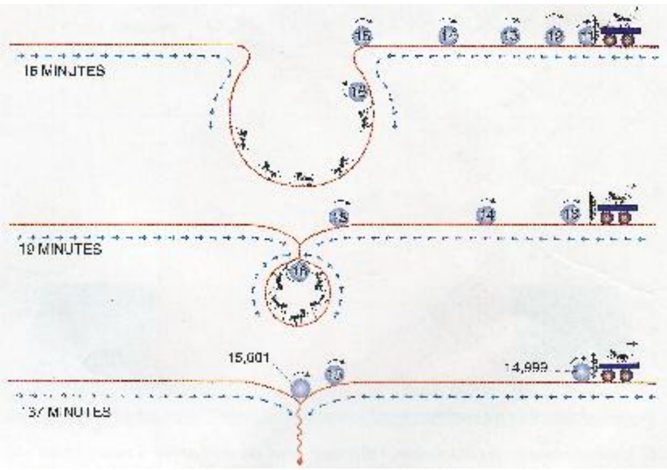


Fig. 10 : « Dossier de Pour La Science » (n°16, 1997 p. 31 illustration 3)

Autre notion complexe présentée dans l'atelier, la notion d'espace-temps a été représentée à plusieurs reprises par des dessins pour aider à la compréhension de la théorie.

Le « *Dossier de Pour La Science* » (n°16, 1997 p. 31 et 32-33) explique la courbure de l'espace-temps et l'horizon d'un trou noir. Une fourmi envoie des balles à intervalles réguliers. Lorsqu'elle arrive à un rayon critique, la dernière balle envoyée à ce moment reste indéfiniment sur place.

BACHELARD (1934, p. 17) nous met en garde quant à cette simplification :

« Une connaissance acquise par un effort scientifique peut-elle-même décliner. La question abstraite et franche s'use : la réponse concrète reste. Dès lors, l'activité spirituelle s'invertit et se bloque. Un obstacle épistémologique s'incruste sur la connaissance non question-née. Des habitudes intellectuelles qui furent utiles et saines peuvent, à la longue, entraver la recherche. « Notre esprit, dit justement M. Bergson a une irrésistible tendance à considérer comme plus claire l'idée qui lui sert le plus souvent ». L'idée gagne ainsi une clarté intrinsèque abusive. À l'usage, les idées se valorisent indûment. Une valeur en soi s'oppose à la circulation des valeurs. »

Ainsi la complexité de la situation peut être étayée par l'enseignant pour que les élèves puissent aborder le problème. Une forme d'étayage de ce type identifiée par les didacticiens est l'ostension.

La notion d'ostension

Dans la situation d'Ératosthène, les droites, les angles et le parallélisme sont omniprésents. La situation demande de changer d'espace et de manier les approximations. Elle reflète les difficultés vues précédemment.

Face à de telles difficultés, nous avons pu observer dans l'expérimentation que les enseignants ou le guide de l'enseignant de la Main à la Pâte utilisaient différentes stratégies pour adapter la situation aux niveaux des élèves. Nous avons alors parlé d'ostension.

Cette notion se réfère à la définition qu'en a donné RATSIMBA-RAJOHN, dans son « Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques » citée et développée par BERTHELOT et SALIN 1992, p. 163) :

> *« Il définit la présentation ostensive comme la donnée par l'enseignant de "tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée". Il précise : "le rapport du sujet et de l'objet nouveau est institué seulement au niveau de la représentation de l'objet présumé indépendant du sujet". »*

En particulier, ils préconisent l'usage d'une ostension assumée seulement dans certains cas :

> ⅄ *[si] le savoir officiel est présenté dès l'entrée dans la situation didactique,*
>
> ⅄ *[s']il n'existe pas, au sein de la situation d'enseignement, de situation a-didactique d'apprentissage où l'élève peut se situer en "résolveur de problèmes" grâce à ses interactions avec un milieu de référence effectif.*

Mais leur recherche a fait apparaître des effets d'ostension « *déguisée* » (Ibid. p. 178)

> *« Au lieu de montrer à l'élève ce qui est à voir, le maître le dissimule derrière une fiction: celle que c'est l'élève lui-même qui le découvre sur les figures soumises à son observation. Comme ce savoir à découvrir est un savoir très élaboré, le maître est obligé de "manipuler" le milieu matériel pour rendre la lecture de ses propriétés la plus simple possible; malgré cela, ses interventions sont indispensables, mais au lieu d'être vécues par l'élève comme un apport d'informations dont il ne dispose pas, elles peuvent l'être comme le signe manifeste de son incapacité à voir et comprendre ce qui est si évident pour l'enseignant et une plus grande incitation à décoder les intentions didactiques du maître. Nous retrouvons là l'un des paradoxes étudiés par Brousseau (1986), sous le nom "d'effet Dienes" »*

La complexité des situations n'est un secret pour personne : ni pour les élèves ni pour les enseignants. La frontière entre l'étayage et l'ostension est fine et impose une analyse fine de la situation. L'étayage doit préserver la richesse a-didactique de la situation. L'intérêt de la démarche d'investigation est de permettre des rétroactions en comparant les hypothèses et les résultats expérimentaux. Mais la simplification de la situation pour permettre aux élèves de rentrer dans la résolution de problèmes nécessite d'introduire des éléments mathématiques. C'est à ce niveau que se produisent les phénomènes ostentatoires. Dans son article « *Obtention et dévolution dans l'enseignement des mathématiques* » (2007), SARAZY montre que « *toute explication comporte [...] une dimension ostensive* » et citant WITTGENSTEIN (Ibid., p. 8) :

> *« L'ostension est à la dévolution ce qu'est l'explicitation au contrat : elle désigne toujours un au-delà qui veut être montré mais qui ne peut être vu que par celui qui sait (c'est souvent à ce « vu » que l'on voit que l'élève a appris).[...]*
>
> *''Est-ce que je me soucie de l'intériorité de celui à qui je fais confiance ? Si je ne lui fais pas confiance, je dis « je ne sais pas ce qui se passe en lui » ; mais si je lui fais confiance, je ne dis pas que je ne sais pas ce qui se passe en lui. Si je ne me méfie pas de lui, je ne me soucie pas de ce qui se passe en lui. (Les mots et leur signification.) Dans une conversation normale, je ne me soucie pas de la signification des mots, de ce qu'il y a derrière eux. Les mots coulent et le passage se fait de lui-même entre eux et les actes, entre les actes et eux.'' (Wittgenstein, 1994,§ 602-603) »*

Nous avons pu observer cette pratique dans les classes où ont été filmées les situations. Les enseignantes introduisaient du vocabulaire, sans nécessairement le définir et chose plus surprenante encore, sans que cela pose de problème dans la compréhension du discours par les élèves.

III - MISE EN ŒUVRE

Malgré la complexité de la situation, sa mise en œuvre existe dans diverses écoles comme l'atteste le site dédié de la Main à la Pâte.

Les trois enseignantes à qui nous avons proposé de mettre en place cette situation ne sont pas de formation scientifique et ne maîtrisaient pas le savoir sous-jacent. Malgré une certaine appréhension, elles ont toutefois su contourner les différents obstacles précédents pour arriver à l'enseignement visé. Durant l'atelier nous avons étudié la mise en œuvre faite par l'une d'entre elles, Sarah, au cours de la séance qui devait amener à la relation entre les rayons du soleil et la longueur de l'ombre du gnomon.

1 Contexte

1.1 Cadrage général

Cette expérience a été réalisée dans un travail interdisciplinaire de l'IUFM de Poitiers regroupant trois enseignantes-chercheuses en science du langage, un enseignant de sciences physiques et deux formateurs en mathématiques. Nous souhaitions observer la reformulation au moment de l'institutionnalisation dans une séance de sciences. Au niveau mathématique, nous nous sommes intéressés à l'introduction des concepts mathématiques dans une situation de sciences et à la façon dont ces conceptss allaient être définis.

Pour les enseignantes, la consigne était floue. Nous leur avons simplement dit que nous souhaitions les filmer durant une séquence de la Main à la Pâte, celle-ci faisant environ 6 séances. Elles ont eu les documents ressources mis à disposition par l'association et après échanges, nous nous sommes mis d'accord sur la période où elles seraient filmées : en seconde période, entre les vacances de la Toussaint et celles de Noël. Pour des raisons de progressions deux d'entre elles, Sophie et Sarah ont choisi la découverte des ombres. Lætitia, la troisième, a choisi la séquence sur le déplacement des ombres dans la journée et dans l'année.

Elles sont toutes les trois parties de l'étude du texte historique (http://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/projet_eratosthene/enseignants/eratos_module.pdf).

Dans l'atelier nous nous sommes restreints à l'étude de la première séquence mise en place par Sarah et Sophie (voir annexes).

1.2 Déroulement de la séquence analysée

Avant de mettre en place la séquence, les élèves de Sarah ont fait le pré-test du guide. Puis ils ont été interrogés sur le texte d'Ératosthène et la carte de l'Égypte. Ils ont alors un schéma de la situation qui servira de point de départ à la séance suivante. Une fiche leur est distribuée sur laquelle il y a un crayon représentant l'obélisque d'Alexandrie et un bouchon pour le puits de Syène. Les élèves vont dans la cour pour chercher le moyen de retrouver les observations d'Ératosthène : une ombre pour le crayon tout en éclairant le fond du puits.

Le bilan est fait en classe et doit amener à la confrontation avec les résultats que l'on obtient lorsque l'on remplace le soleil par une lampe de poche.

Ce sont les trois premières séances.

La quatrième séance est décrochée et reprend l'activité complémentaire mettant en évidence la relation entre l'ombre et la lumière.

2 Etude des séances complémentaires lors de l'atelier

Les groupes se sont réparti les documents ressources des trois séances complémentaires sur la formation de l'ombre (voir annexes). L'objectif était de mettre en perspective l'étude théorique précédente et les propositions de la Main à la Pâte.

2.1 Consignes

Les séances optionnelles de la séquence 1 sont :

- Travail sur la propagation rectiligne de la lumière : groupe 1 (Annexe 2).
- Travail sur les ombres et leurs relations avec la source lumineuse : groupe 4 (Annexe 3).
- Notion de rayons divergents et de rayons parallèles : groupe 2 et 3 (Annexe 4).

Chaque groupe avait à répondre aux questions suivantes :

- Pour chacune des séances, identifiez les différentes étapes de la DI.
- Quels sont le(s) objectif(s)-obstacle(s) de la séance.
- Identifiez ce qui dépend de l'opinion et, ce qui dépend du fait scientifique.

La mise en œuvre de la séance n'est pas l'objectif de l'observation mais émergera assez naturellement de l'étude.

La recherche des phénomènes d'ostension devait conclure l'atelier mais faute de temps, il fut à la charge de l'animateur.

2.2 « Propagation rectiligne de la lumière »

Le terme de propagation

La première séance commence par une enquête préalable. Cette étape est fortement à la charge de l'enseignant.

La dévolution commence par la remarque :

> *« les enfants ne s'interrogent guère sur la propagation de la lumière, qu'il s'agisse de celle du Soleil ou de celle d'une ampoule électrique (celle d'un plafonnier par exemple) : ils ont l'intuition que la lumière se diffuse autour de sa source dans toutes les directions puisqu'ils " baignent " dedans, et cela leur suffit. »*

Cela semble une évidence : les élèves peuvent-ils imaginer que la lumière se propage ? Pour nous, adultes, la conceptualisation est difficile : le terme « propagation » est obscur. Quelle représentation pourraient avoir les élèves pour qu'ils puissent l'évoquer ? Il semble évident que le cadre théorique est celui de l'optique géométrique où les rayons lumineux sont considérés comme rectilignes.

Ce questionnement reste celui du mathématicien qui a le souhait de définir rigoureusement les objets qu'il emploie. Or lors de l'expérimentation, les élèves répondent à cette question sans difficulté particulière, et en faisant plusieurs propositions. Mais au préalable, l'enseignante a induit une représentation rectiligne des rayons lumineux. Elle s'est appuyée sur une gestuelle et une formulation mathématique incitant à avoir cette vision.

La question initiale

Le groupe qui a étudié cette séance, s'est longuement interrogé sur la question initiale. Et ce n'est qu'au travers du scénario qu'ils ont réussi à l'expliciter. Ils ont déduit qu'il devait s'agir de savoir « Comment ça éclaire ? ». Cette absence est d'autant plus surprenante que l'on parle d'une enquête préalable qui serait une discussion collective mais sans qu'un questionnement ne soit formulé.

Cela leur a posé problème car ils ont eu du mal à identifier pour quelle finalité les élèves manipulaient le matériel à leur disposition. C'est la phase d' « expérimentation ». Ces manipulations donnent lieu à des explicitations pour être ensuite schématisées et créer un dispositif expérimental.

Les participants estimaient que le passage de la question initiale « comment ça éclaire ? » à la verbalisation aurait mérité plus de précision. Ils estimaient que des étapes étaient nécessaires. En effet, la mise en œuvre proposée est la suivante :

> *« Un premier moment d'expérimentations – assez court – peut avoir lieu par rotation des groupes : d'une part, dans un endroit ensoleillé de la classe, les enfants, à l'aide de miroirs, "renvoient le soleil" dans une partie plus sombre de la pièce, sur un mur ou au plafond, et observent le déplacement de la tache lumineuse en fonction de l'orientation de leur miroir ; d'autre part, dans une pièce assombrie, les élèves observent la position des objets éclairés avec leur torche par rapport à celle-ci, tout en évaluant la forme et l'étendue de la zone éclairée. Mais ils pourront également expérimenter le "renvoi" de la lumière de la torche avec un miroir. »*

Dans cette description, il y a un cheminement pour passer de la formalisation de l'observation de la lumière provenant du soleil à celle d'une lampe. Il est complexe et peu explicité. Le texte laisse à penser que c'est l'enseignant qui va mettre les élèves dans des situations où l'aspect rectiligne sera mis en évidence. Et il sera exhibé au moment de la phase de verbalisation. Nous pouvons y voir une ostension déguisée. Tout est prévu pour que l'aspect rectiligne de la lumière apparaisse. L'activité commence par demander aux élèves d'anticiper une observation. Ils commencent donc par émettre une hypothèse. Le modèle que nous connaissons en mathématiques est plutôt d'observer d'abord et d'anticiper un résultat ensuite. Sur quoi se fonde donc cette hypothèse ? Si elle n'est pas vérifiée que remet-elle en cause ? Et par conséquent quel est son statut ?

La place de la schématisation

Le schéma se trouve entre l'émission des hypothèses et l'expérimentation. Il doit « montrer » les hypothèses que les élèves viennent de faire. Il sert de support pour la verbalisation. La structuration du savoir émerge de la confrontation entre ces différentes représentations. De ces échanges doit sortir l'aspect rectiligne de la trajectoire de la lumière.

La conception de ligne droite est donc centrale. Alors quelle expérience permet de savoir si la trajectoire est une ligne droite ? On peut imaginer l'utilisation d'un obstacle sur la trajectoire de la lumière. C'est alors la notion d'alignement qui est utilisée. Le lien entre la ligne droite et la représentation physique s'établit : suivant la position où je mets l'obstacle, le faisceau s'arrêtera ou non et l'ombre portée permettra de confirmer ou d'infirmer le modèle. Il faut avoir compris la relation entre l'ombre, la source lumineuse et l'obstacle or c'est l'objet d'étude. Ainsi la schématisation traduit la compréhension de la relation entre l'ombre et la lumière. Elle est entrelacée avec la notion de ligne droite.

Ainsi nous constatons que dans cette séance, certains élèves peuvent avoir compris que la lumière se déplaçait de façon rectiligne sans être capables de le formuler. Le schéma est le moyen d'évaluer l'acquisition du savoir.

2.3 « Relation ombres et sources lumineuses »

Dans cette séance, les élèves partent des représentations qu'ils ont fait dans le pré-test « *d'un bâton au soleil* » (annexe 5). La confrontation des différentes représentations des élèves et de l'observation au soleil doit établir la problématique.

Définir une question

De cette confrontation, les participants ont extrait trois questions qui pouvaient être posées :

- Quelle relation existe entre la longueur de l'ombre et la longueur du bâton ?

- L'ombre et l'objet ont-ils des formes similaires ?
- Quelle relation existe-il entre l'inclinaison des rayons et l'ombre ?

Leur problème était alors de savoir comment l'enseignant peut créer les conditions pour avoir la bonne formulation de ces questions, puis passer à la formulation des hypothèses et aux expérimentations qui doivent les vérifier ?

Le document semble indiquer que les représentations et leurs explicitations doivent permettre d'atteindre cet objectif. Mais les premières représentations s'appuient sur les croyances des élèves. Elles ne sont pas nécessairement raisonnées. Quelle est la responsabilité de chacun dans cette formulation ? Comment la question est-elle amenée ?

La première observation a lieu dans la cour. Les élèves doivent observer leur ombre au soleil. De façon analogue à la première séance, cette activité est présentée sans question. Les élèves sont-ils en train de résoudre un problème ou continuent-ils à chercher à trouver une question ?

Ne s'agit-il pas de définir ce qu'est une ombre ? Ou est-ce la relation entre deux objets que l'on cherche ? Dans ce cas, s'agit-il d'un problème géométrique ou de physique ?

L'absence d'une finalité claire gêne l'analyse de cette séance.

Les ostensions

Le rôle du dessin

Les dessins initialement demandés ont un statut ambigu. Quelle est leur finalité ? La question est ouverte : les élèves doivent « *montrer par des dessins ce qui vient d'être dit* ». Des éléments sont attendus comme les rayons lumineux sous diverses formes. Mais les interventions des enseignants ferment implicitement ces ouvertures :

> *« Leur demander s'ils voient réellement cette partie de leur dessin. Convenir alors avec les élèves que si cela peut les aider, ils peuvent les représenter. Mais comme ils ne se voient pas, on décide de les dessiner en pointillés... »*

De la même façon, les élèves se retrouvent avec peu de choix dans l'expérience : le matériel leur est donné tout comme la tâche à réaliser et le lieu. On ne retrouve pas le sens d'une situation d'investigation.

Mise en œuvre

Cette situation a été mise en place dans l'expérimentation. Pour cela, l'enseignante a intégré une fiche supplémentaire pour obtenir une trace écrite. Cela lui a permis de mettre en évidence la relation entre l'ombre et la source lumineuse pour définir le rayon lumineux. On voit nettement dans la vidéo et dans la fiche élève (annexe 6) que par une évolution progressive du questionnement, la notion de direction se met en place, puis le rayon limite qui passe par le sommet du gnomon et l'extrémité de l'ombre. Elle accompagne les élèves avec ce questionnement, en caractérisant la droite par deux points (premier postulat d'Euclide) et en accompagnant ses questions de gestes indiquant la direction.

Des ostensions déguisées

Ainsi la description de cette séance laisse un flou qui donne l'impression que ce ne sont pas les élèves qui construisent l'expérience mais que cela est à la charge de l'enseignante en particulier la phase où par le raisonnement et leurs connaissances les élèves doivent expliquer leurs opinions et mettre en place l'expérience. Finalement les élèves passent du temps dans des manipulations et l'expérience ne leur est pas dévolue. Cette analyse met en évidence de nombreuses ostensions. Étaient-elles nécessaires ? Si oui, ne pouvaient-elles pas être explicitées et assumées ? Sinon est-ce qu'elles n'auraient pas pu être évitées en questionnant les observations sous l'angle mathématique ?

La résolution de problème

Les membres du groupe ont trouvé dans ce déroulement une différence avec notre approche mathématique des problèmes. Les élèves ne sont pas dans ce que l'on appelle une résolution de problème, présente dans la pensée bachelarienne. Or celle-ci est pensée pour les sciences expérimentales et c'est une des raisons qui a poussé BROUSSEAU à développer sa théorie des situations didactiques pour l'adapter à l'enseignement des mathématiques (BROUSSEAU 1998, p. 119).

Posons-nous la question des raisons qui amènent aux écarts observés dans cette transposition.

La difficulté est-elle liée au format du média comme pour les manuels ? Un participant met cela en écho avec l'atelier de Stéphane Fabre et Brigitte Grugeon-Allys « *Etude comparative de deux situations sur les triangles particuliers au Cycle 3* ». Ils ont comparé l'approche d'un manuel et d'une activité de manipulation.

Ce détournement peut aussi s'expliquer par le sujet d'étude qui est mathématique. Nous sommes finalement dans une géométrie naturelle (HOUDEMENT et KUZNIACK, 2006) difficilement reconnue comme rigoureuse.

La place du dessin

Pour chercher à aménager cette situation, la réflexion s'est déplacée sur les croquis.

Cette séance repose sur la première représentation et rejoint la difficulté que nous avons de faire passer les élèves du croquis au schéma. La différence entre ces représentations vient du degré d'abstraction qu'elles ont, de leur valeur sémiotique. Le schéma sera plus épuré, ne contenant que les éléments qui sont pertinents à l'étude de la situation. Christine Choquet a donné un exemple qu'elle a observé pour sa thèse. Dans le cadre d'une résolution de problème, des élèves de CM2 avaient à schématiser un chien attaché à un poteau pour représenter la zone où l'animal pouvait se déplacer. Les dessins représentaient des détails des objets et les enseignantes ont eu du mal à les faire évoluer pour arriver à un schéma. Elles ont dû passer par des conduites ostentatoires pour n'obtenir que l'essentiel. Ce travail a été d'autant plus complexe que la situation est attachée à une chronologie. Dans cette expérience, partir de schémas de quelques élèves n'a pas été efficace, même pour un réinvestissement plus tardif. Lorsque l'enseignante présentait le schéma, lors du réinvestissement suivant les élèves restaient à nouveau sur des représentations imagées. Une des explications possibles serait que les élèves ne voient pas l'intérêt de supprimer les détails pour obtenir un schéma.

La discussion s'est poursuivie sur la place de la représentation en géométrie. Ainsi les connaissances sur les triangles sont essentiellement l'étude des figures et leur construction. On demande parfois aux élèves de reconnaître une forme. En primaire, sa caractérisation et sa définition sont problématiques. La définition est d'abord donnée de façon simple et sera complétée au fur et à mesure des rencontres avec des monstres ou des exceptions (OUVRIER-BUFFET 2012).

Définition des objets géométriques

La discussion s'est poursuivie sur la définition du polygone. Elle dépend du point de vue choisi : peut-il être défini à partir de ses faces ? De ses sommets ? De ses arêtes ? Des barycentres ? Cela dépendra du cadre géométrique choisi.

Que peut-on donner en primaire ou en formation initiale des Professeurs des Écoles ? Il est possible de partir de manipulations de polyèdres. Les polygones sont alors des faces de polyèdres. Une face est une partie de l'enveloppe du solide sur lequel il peut reposer sur une table sans laisser d'espace. C'est une approche similaire à celle proposée dans la communication de FABRE-GRUGEON. La situation donnée en référence utilisait des pailles. La Main à la Pâte, propose une approche plus sensible et intuitive liée à la perception qu'ont les élèves des objets. En termes de genèse, la première approche est plutôt expérimentale alors que la seconde est plutôt intuitive. En termes d'espace de travail géométrique, ce sont deux genèses différentes qui sont employées : la première est intuitive et la seconde instrumentale. Leur confrontation peut permettre par le discours de construire la définition.

La place des faits et des hypothèses

Un groupe a été surpris par l'amorce de la situation qui ne correspond pas au canevas de la démarche d'investigation. Celui-ci met les observations après que les hypothèses ont été formulées. Or dans la situation étudiée, le croquis anticipe des observations qui seront vérifiées à l'extérieur. La suite est alors plus classique.

Toutefois, ce que les élèves ont à vérifier est explicité et reste de l'ordre du constat. L'observation semble guidée. Finalement il s'agit de confronter un modèle mathématique non explicité avec la réalité des observations. Mais ont-ils les connaissances nécessaires pour sortir du simple constat ? De quel prérequis ont-ils besoin ? Peuvent-ils faire ces hypothèses ?

Notre analyse critique se fait du point de vue de la didactique des mathématiques avec nos outils et notre évaluation des connaissances mathématiques des élèves. Or la description de cette mise en œuvre et l'articulation des hypothèses et des faits s'appuient sans doute sur les contraintes et les conditions liées au terrain et à la discipline.

Une analyse conjointe avec d'autres disciplines serait enrichissante : il y a tout au long de cette étude une forte présence de verbalisation et d'explicitation. Les interconnexions peuvent justifier le choix de leurs importances et la façon dont sont présentés les faits.

2.4 Aparté : échos avec le mémoire de CAFIPEMF d'une des participantes

Une démarche d'investigation

Cet atelier a fait écho au mémoire de CAFIPEMF d'une participante. Elle avait proposé à ses élèves de réaliser la maquette d'un système solaire. C'est un projet qui s'est montré motivant à la fois pour elle et pour ses élèves. Il a demandé de développer de nombreuses connaissances mathématiques :

- La question de l'échelle

La demande était de faire rentrer la maquette dans la classe. Il fallut donc choisir une échelle adaptée mais cela pose le problème du rapport entre les rayons des planètes et du soleil. Il fallut choisir deux échelles distinctes.

- La découverte de nouvelles connaissances

Pour réaliser les planètes, les élèves sont allés chercher des informations à la fois sur celles- ci et sur les connaissances mathématiques pour construire les sphères qui devaient les représenter. En particulier Saturne et ses anneaux ont imposé d'expliciter les relations entre le rayon et la circonférence. C'est par une recherche documentaire que les élèves ont pu répondre à cette difficulté. Ils étaient ainsi dans une démarche d'investigation.

Problème complexe et structuration des savoirs

La participante a tiré comme bilan de cette expérience d'avoir vu des élèves dans une véritable activité de recherche mathématique. Ils ont acquis plus d'autonomie. La complexité du problème a été gérée en fractionnant les différentes étapes en temps d'études plus spécifiques sur certains objets. Le projet s'est donc étalé sur une longue période.

Cette succession de problèmes mathématiques amène à la question de la structuration du savoir. Dans ce projet, les savoirs s'organisent autour d'une question pratique. Les connaissances sur le cercle se retrouvent à côté de la proportionnalité. Cela n'a semble-t-il pas posé de problème pour les élèves.

Serait-il possible d'avoir des situations analogues adaptées à une organisation du savoir respectant les grandes structures des champs mathématiques ?

La liberté des élèves d'explorer différentes pistes, bonnes ou mauvaises, est la richesse à préserver de ce projet. Elle permet de construire des « Proof generated definition » (OUVRIER-BUFFET 2012).

C'est un exemple de ce que pourrait être la construction de savoirs mathématiques par la démarche d'investigation. Mais les connaissances mises en place seront vouées à évoluer et à se réorganiser au fur et à mesure des problèmes rencontrés. Les notions mathématiques développées doivent pouvoir être transférables dans d'autres cadres, soit en tant qu'outils soit en tant qu'objets. L'organisation mathématique des savoirs doit permettre cette flexibilité. C'est pourquoi celle-ci doit prendre en compte les grandes structures mathématiques.

3 Retour sur les analyses

Après ces analyses nous avons pris le temps de faire une synthèse de ce qui a été dit dans les différents groupes.

3.1 Le regard du formateur en mathématiques sur les situations expérimentales

Notre regard reste toujours critique. Il est le même que celui que nous avons lorsque l'on observe des situations d'enseignement mathématique.

Mais cette critique ne doit pas occulter les autres regards des didactiques des disciplines. La théorie des situations didactiques de BROUSSEAU n'est pas nécessairement transposable à toutes les disciplines. Un participant a fait la remarque sur la place de la résolution de problèmes en histoire géographie qui ne peut avoir le même sens. Malgré tout ASTOLFI (1992) et BACHELARD (1934) représentent un courant de l'éducation des sciences. Ainsi lorsqu'ASTOLFI propose d'« *apprendre par franchissement d'obstacle* », présentant la notion d'objectif-obstacle cité par DECAMP et DE HOSSON (2011), il s'appuie sur deux exemples (le sèche-cheveux et la falaise) pour expliquer cette notion qu'il prend dans les sciences expérimentales. Le canevas proposé pour la démarche d'investigation et repris dans les programmes du collège est le témoin de la persistance de cette approche. Cela se retrouve dans les programmes de cycle 3 (MEN 2007) : « *les connaissances et les compétences sont acquises dans le cadre d'une démarche d'investigation qui développe la curiosité, la créativité, l'esprit critique et l'intérêt pour le progrès scientifique et technique.* »

Si le principe est le même entre les sciences expérimentales et les mathématiques, l'analyse critique que nous en avons faite peut nous interroger. Sans parler d'hégémonie des mathématiques sur les disciplines, notre discours critique doit nous amener à réfléchir sur la relation avec les disciplines connexes. Cette vision critique se retrouve dans le regard que nous portons sur les différentes théories didactiques de mathématiques et sur leurs applications comme lors des débats entre les tenants de la théorie de situations didactiques et ceux de la théorie anthropologique du didactique.

3.2 Distinction entre l'approche des sciences expérimentales et des mathématiques

Les programmes du collège (MEN 2008) indiquent que :

> « *La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre.* »

Nous pouvons nous questionner sur ces différentes approches. Nous avons vu comment BACHELARD (1934) conçoit la construction de la science contre l'opinion. Nos questions ont finalement porté sur la façon dont cette confrontation était mise en place comme nous l'observons pour des séances de mathématiques. Un même dogmatisme finit par émerger des séances de mathématiques où l'opinion des élèves ne porte plus sur l'objet d'étude mais sur la parole de l'enseignant. Dans une situation où l'élève ne perçoit pas les finalités d'un apprentissage, il considère que le savoir est le bon parce qu'il vient de l'enseignant et non parce qu'il a été convaincu par raison.

3.3 Retour sur la séquence

La dévolution

Le groupe qui a étudié la situation « *Travail sur la propagation rectiligne de la lumière* » (Annexe 2) n'a pas réussi à identifier la situation déclenchante du problème, la question que les élèves doivent se poser. Elle commence par une enquête sans qu'il y ait d'enrôlement apparent de l'élève.

Il y a un certain nombre de concepts nécessaires pour comprendre la situation d'Ératosthène dont l'appropriation se trouve forcée par la situation. Cette approche se fait de façon plus ou moins expérimentale mais les relations avec le maître et la place des notions mathématiques ne sont pas explicites.

Ce problème du questionnement ne se retrouve pas dans la deuxième situation « *Travail sur les ombres et leurs relations avec la source lumineuse* » (Annexe 3) où la dévolution a pu être identifiée.

La place du dessin

Dans les deux premières situations, le dessin tient une place primordiale : il est un moyen de connaître la compréhension des élèves et permet une première abstraction du phénomène. Il tient lieu de formulation des hypothèses que l'expérience validera ou non.

Lorsque les hypothèses sont formulées par les élèves, il est nécessaire qu'ils aient auparavant trouvé les mots les plus justes pour garder une trace écrite. Or lorsqu'il s'agit d'un nouveau savoir, le vocabulaire se trouve limité.

Nous pensons que le dessin permet de juxtaposer et de comparer plus facilement des hypothèses. Les différences sont plus apparentes. Mais la schématisation présuppose l'association d'objets physiques à des formes géométriques et d'actions à des relations géométriques. Pour justifier qu'une ligne droite représente un faisceau lumineux, il faut que l'analogie soit déjà présente chez l'élève.

Mais ils ont acquis des représentations à travers différents médias. Dans les dessins animés, les rayons lumineux peuvent être représentés par des traits droits, tout comme dans les albums de jeunesse. Et c'est ainsi que l'enseignante filmée a introduit la notion de rayon lumineux à partir des deux photos suivantes.

fig 11

fig 12

Il semble que le dessin fasse partie du contrat didactique de l'école primaire en sciences : lorsqu'il y a une observation à faire, les élèves doivent la représenter.

Ainsi nous en avons déduit que dans un cas, on parle d'une imprégnation culturelle alors que dans l'autre, il a une valeur didactique. Finalement ces dessins n'ont pas la même valeur sémiotique.

3.4 Situation filmée

L'observation en classe

L'extrait présenté montre comment les élèves font leur exploration pour répondre à la troisième question de la fiche (annexe 6) :

> « **Je pose un crayon debout, verticalement, sur le bureau et j'oriente la lumière de ma lampe vers le crayon.**
> *Qu'est-ce que j'observe sur le bureau ? Pourquoi ?* »

Dans la phase de manipulation, on voit les élèves déplacer leur lampe et constater que l'ombre se déplace en opposition du déplacement de la lampe. Ils établissent une relation entre la source lumineuse et l'objet. On peut le voir comme la mise en place du concept d'alignement entre la source lumineuse, l'objet et son ombre. Cette relation est matérialisée lorsque l'enseignante passe dans les groupes. Elle fige le mouvement en tenant la main de l'élève puis elle insiste sur des éléments particuliers, induisant des invariants qui définiront le rayon lumineux. Les élèves finissent par suivre du doigt la trajectoire que doit suivre la lumière matérialisant la relation entre ces points. Le discours qui accompagne le questionnement induit lui aussi l'aspect rectiligne : « *Elle vient d'où ce...* » « *Mais ils vont où ces rayons* ? ».

Cette ostension avait commencé en début de séance avec les deux photos présentées ci-dessus au vidéoprojecteur. Elles induisent une vision rectiligne de la lumière. D'ailleurs lorsque les élèves les décrivent ce sont ces éléments qui vont être relevés et attendus.

Dans l'entretien qui a suivi cette séance, Sarah a justifié ce choix par la complexité du concept : elle estime qu'il faut que les élèves aient une représentation pour pouvoir réfléchir.

Du point de vue des sciences cela peut être problématique mais pour nous enseignants de mathématiques, est-ce problématique ? Ne doit-on pas proposer ou induire des modèles qui pourraient être confrontés avec une vision empirique ou une opinion ?

La propagation rectiligne est une représentation coutumière de la propagation de la lumière. Elle fait appel à un objet mathématique dont les propriétés vont permettre de développer une théorie, l'optique géométrique qui permet d'expliquer de nombreux phénomènes lumineux. L'étude des droites d'un point de vue abstrait permet de dégager des propriétés qui pourront être confrontées à des expériences. Cette situation est finalement une bonne situation déclenchante pour étudier les propriétés liées à l'alignement.

Pouvait-on se passer des ostensions ? Certaines personnes de l'atelier pensent que oui en jouant sur les obstacles positionnés sur la trajectoire.

Passage du croquis au schéma

Un groupe s'était interrogé sur le passage du dessin du pré-test au schéma au tableau. Dans sa correction, nous avons pu voir que l'enseignante a finalement utilisé différents procédés ostentatoires pour amener les élèves à une représentation conventionnelle. Quelle signification va alors avoir ce dessin ? Est-ce que les propriétés qu'il engage sont perçues par les élèves ?

Les représentations des questions suivantes peuvent nous interpeller. L'alignement ne semble pas poser de problème lorsque l'on observe les élèves tracer les rayons aux questions 3, 4 et 5. Ils prennent leur règle et s'appliquent à tracer des segments passant par la pointe du gnomon et l'extrémité de l'ombre.

Alors est-ce que l'on ne se trompe pas d'objectif d'apprentissage ? Le premier postulat d'Euclide est finalement très intuitif et détermine notre géométrie. Il ne pose pas de problème.

Le second objectif apparaît dans la réponse à la question 3 : on voit apparaître des rayons parallèles. Voici trois productions d'élèves recopiées du tableau :

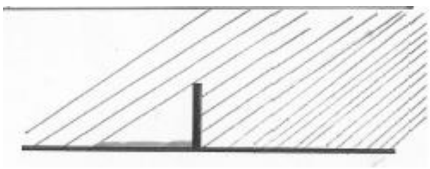


Fig. 14

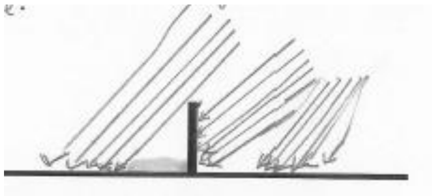


Fig. 15

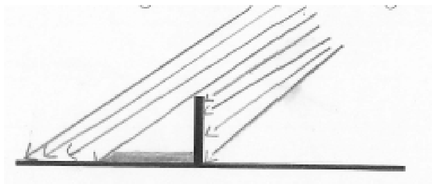


Fig. 16

On voit que le parallélisme est présent sur chacune même si le tracé reste problématique. Leur comparaison doit pouvoir amener à définir le concept. On voit intuitivement que certains tracés sont "plus justes" que d'autres. Est-ce que l'explicitation de ces différences ne peut pas permettre de définir le parallélisme ? La recherche d'une technique de tracé permettrait ensuite de justifier la recherche de propriétés.

Mais cette représentation du parallélisme peut rentrer en opposition avec d'autres représentations comme celles que l'on peut trouver dans la perspective en point de fuite.

Toutefois cette représentation traduit un parti-pris fixé par les hypothèses initiales lors des premières représentations. Le choix d'une trajectoire rectiligne est de permettre de comprendre les premiers phénomènes d'optique. Choisir comme schéma une projection dans le plan perpendiculaire, c'est déjà vouloir attirer l'attention des élèves sur les relations géométriques.

Ainsi la place des mathématiques dans ce type de situation d'investigation se trouve bien dans la réalisation des schémas. Ces schémas sont porteurs de sens pour l'enseignante qui va pouvoir amener les élèves à comprendre pourquoi il y a une ombre à Alexandrie et pas à Syène.

Mais est-ce que les élèves ont saisi l'enjeu d'apprentissage ? Est-ce que cela va les aider dans la structuration de leurs savoirs ?

Perspective

Nous avons déjà parlé des Espace de Travail Géométrique d'HOUDEMENT et KUZNIAK (2006).

Ils permettent de mettre dans une même perspective les différents modes de pensée de GONSETH (1945), le plan cognitif des élèves et le plan épistémologique de l'enseignant.

GONSETH en a exhibé trois pour la géométrique : l'intuition, l'expérience, la déduction. Ces trois modes sont consécutifs. On aborde une notion d'abord de façon intuitive puis on la développe autour d'expériences et on finit sa construction par la déduction.

Dans cette étude, je souhaitais montrer comme la déduction pouvait venir de la confrontation des approches intuitives et expérimentales comme nous l'avons expliqué précédemment pour le tracé des rayons parallèles.

L'ensemble des productions des élèves (Annexe 7) montre des rayons ayant la même direction mais des tracés pas tous justes. Ces tracés se sont faits de façon intuitive : aucune technique n'avait été vue avant. Or l'observation des techniques employées au tableau et par les élèves a permis de constater qu'une grande majorité faisait glisser leur règle. Est-ce que cette technique reflète la perception qu'ont les élèves des droites parallèles ? Est-ce qu'elle s'appuie sur une connaissance empirique ? La justification de ces techniques par rapport au regard intuitif va permettre de développer la technologie. La question de la précision devra permettre de construire le référentiel théorique qui se détachera de la réalité.

Cette approche correspond à celle définie par GONSETH (1945).

Pour expliquer l'intuition géométrique, il utilise la métaphore des poupées russes. L'action de l'homme sur le monde se partage en deux secteurs : la prise d'informations sur le monde réel obtenues à partir de ces perceptions et l'action sur celui-ci réalisée par les gestes. On pourrait imaginer deux tables de registres P et G, la première contenant les perceptions que l'homme peut avoir, la seconde contiendrait les gestes qu'il peut effectuer. Pour faire correspondre ces deux registres, GONSETH imagine plusieurs niveaux où tout ce qui peut être automatisé serait confié à des robots. Ainsi l'action réflexe consistant à mettre en relation une perception et une action peut être confiée à un robot. Mais à un certain niveau, les perceptions demandent une interprétation (par exemple reconnaître un triangle) et le robot ne peut plus seul en avoir la charge. C'est alors l'homme mathématique ou mu qui prend le relais. Il n'a pas accès directement au monde réel, il n'a accès qu'à un théâtre de perception où la réalité est représentée. Il ne peut pas non plus agir directement. Il passe par le théâtre des gestes : il donne les actions à mener dans la réalité. Et ce sont les robots qui vont mettre en relation la réalité extérieure et ces deux théâtres.

Ainsi les mathématiques ne s'appliquent pas directement au monde mais à la représentation que l'on s'en fait. Les schémas sont une forme de représentation du théâtre des perceptions.

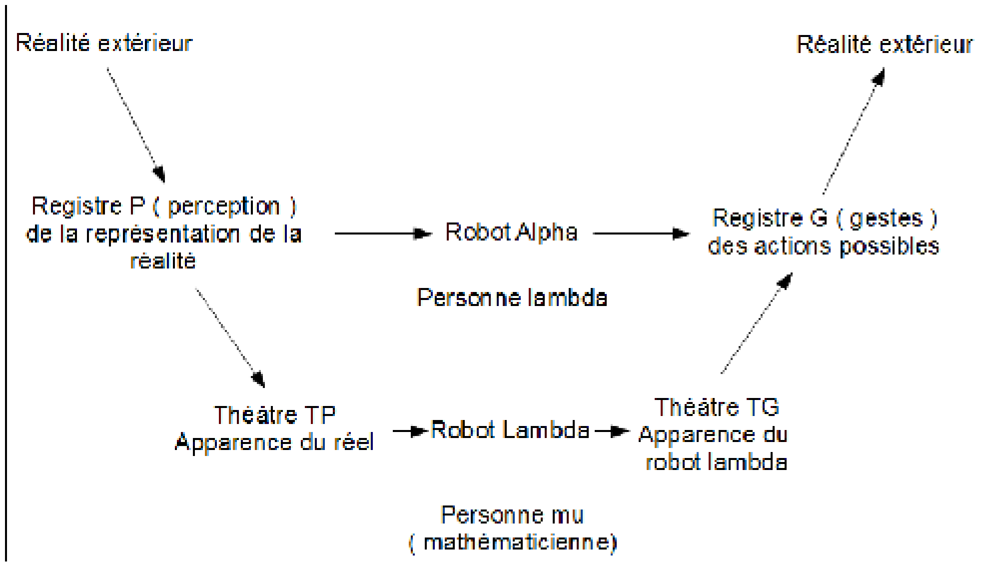


Fig. 13 : personage mu

Dans cette schématisation on peut voir une inspiration de l'analyse de POINCARÉ lorsqu'il distingue le continu physique et mathématique. Le continu physique se fait à partir des perceptions alors que le continu mathématique est une interprétation de nos perceptions. C'est à partir de l'intuition que se construit le continu mathématique et de l'expérience celui du continu physique.

Pour répondre à la nécessité d'ostension, GONSETH (1945, Tome I p. 57) définit le principe d'idonéité :

> *« Le passage à une nouvelle perspective, à une nouvelle façon de penser est marqué par l'intervention du mot « idoine ».[...] il signifie qui convient, qui tient compte des conditions, qui répond aux exigences, qui est conforme aux fins et aux intentions, approprié à sa fonction, etc.*
>
> *[…]*
>
> *C'est naturellement un principe de simple bon sens car, si l'on ne peut réaliser une perfection en quelque sorte automatique, il reste la faculté de répondre au mieux, compte tenu de toutes les exigences et de toute l'information du moment. Il se trouve d'ailleurs, quant aux questions analogues à celles que nous traitons, que le chemin à suivre n'est guère douteux, que les décisions à prendre ne sont guère problématiques, si l'on ne veut pas faire moins bien qu'il n'est possible. »*

Ainsi lorsque Sarah induit la forme rectiligne, elle met en place un environnement idoine, prenant en compte différents paramètres et qui suffit pour ce qui est attendu des élèves. La propagation rectiligne répond au mieux au problème posé. Mais cette vision n'est pas figée.

IV - BIBLIOGRAPHIE

ASTOLFI J.-P. (1992). Apprendre par franchissement d'obstacles ? *Repères n°5*

BACHELARD G. (1934). *La formation de l'esprit scientifique.* Vrin

BALACHEFF N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves du Collège.* ***Thèse de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I***

BARBIN E. (1991). Les éléments de géométrie de Clairault : une géométrie problématisée, *Repère IREM* , n°4, p 119

BERTHELOT R. et SALIN M.-H. (1993-1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire – *Grand N* n°53

BERTHELOT R. et SALIN M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université de Bordeaux

BOURBAKI N. (1984). *Éléments d'histoire des mathématiques.* Masson

BROUSSEAU G. (1998). *La Théorie des Situation Didactiques*. La pensée sauvage

CHARNAY R. (2004). L'école primaire, première étape de la culture mathématique des élèves. *Cahiers pédagogiques, n° 427.*

CHARVET J. (2004). *Les jeunes et les études scientifiques dans l'académie d'Orléans-Tours* - Académie Orléans-Tours

CHEVALLARD Y. (2002). *Organiser l'étude 1 : Structures et fonctions.* Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques - version électronique

CLAIRAULT (1765). Eléments de géométrie.

DECAMP N. et DE HOSSON C. (2011). Quelques éléments historiques et didactiques sur l'expérience d'Ératosthène, *Le Bup*, n°937, 1065-1082

DROUARD F. (2008). La démarche d'investigation dans l'enseignement des sciences. *Grand N* n°82

GOLDSTEIN B., R. (1984). Eratosthenes on the "Measurement" of the Earth - *Historia Mathematica*, n°11, 411-416.

GONSETH F. (1945-1946). *La géométrie et le problème de l'espace – Tomes I et II*. Édition du Griffon

HOUDEMENT C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N n°71*

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 11, 175 – 193

IREM Poitiers (2009 à 2012). *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs T1 à 6*– IREM de Poitiers

KUHN T. S. (1962). *La structure des révolutions scientifiques*. **Champs Sciences**

LA MAIN À LA PÂTE - Guide enseignant (http://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/astep/PDF/guideenseignant_fr.pdf)

LEBOT B. (2012). La place des mathématiques dans une situation expérimentale : étude de la fonte d'un glaçon cycle 2, *Acte colloque copirelem 2012*

MATHÉ S. (2010). *La "démarche d'investigation" dans les collèges français - Élaboration d'un dispositif de formation et étude de l'appropriation de cette nouvelle méthode d'enseignement par les enseignants*, Thèse de l'Université de Paris Diderot

MATHÉ S., MÉHEUT M. et DE HOSSON C. (2008). Démarche d'investigation au collège : quels enjeux ? *Didaskalia* n°32

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2007). Programmes de l'école primaire – *Bulletin officiel HS* n°3

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2008-a). Programmes du collège : Programmes de l'enseignement de physique-chimie – *Bulletin officiel* n°6

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2008-b). *Mathématiques : classe de sixièmes, cinquième, quatrième, troisième* – CNDP

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2012). Ecole primaire : Programmes d'enseignement : modification – *Bulletin officiel* n°1

MONOD-ANSALDI R. et PIREU M. (2011). *Démarches d'investigation dans le secondaire : représentation des enseignants de mathématiques, SPC, SVT et technologie*, IFE

OUVRIER-BUFFET C. (2012). L'activité de définition vers un mode de pensée spécifique ? *In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement Des Mathématiques et Contrat Social : Enjeux et Défis pour le 21e Siècle*, *Actes du Colloque EMF2012 (*GT3*, pp. 492–503)*. http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

PEYRARD F. (1804). *Les éléments de Géométrie d'Euclide*. Ed F. Louis

PICHOT A. (1991). *La naissance de la science T1 : Mésopotamie – Égypte*. Folio essais

POINCARE H. (1902). *La science et l'hypothèse*, Champs Sciences

POINCARE H. (1905). *La valeur de la science*, Champs Sciences

V - ANNEXE

Annexe 1

LA DÉMARCHE D'INVESTIGATION RAISONNÉE DANS L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES

1 À partir d'une situation fonctionnelle ou d'une situation de départ fortuite ou provoquée

Etonnement, curiosité, questionnement

Formulation d'un problème à résoudre

2 Par le raisonnement et en utilisant ces connaissances

Explications possibles, réponses possibles, représentations de la solution

Formulation des hypothèses à tester ou le cas échéant à vérifier dans de la documentation

3 Selon la nature du problème et des hypothèses, établissement d'un protocole ou de plusieurs protocoles avec au choix :

Expérimentation	Tâtonnement expérimental	Modélisation	Observation	Recherche documentaire
Prévoir le dispositif ; ne faire varier qu'un facteur à la fois ; recueillir les résultats par l'observation ou la mesure	Prévoir divers essais ; comparer les résultats	Raisonner par analogie, vérifier en construisant un modèle	Ou exploitation de documents (images, données, résultats d'expériences)	Par la lecture de documents papiers ou électroniques ou par l'interview de personnes compétentes

Réalisation des protocoles

4 Constatation des résultats et comparaison avec les hypothèses testées

Validation ou non de l'hypothèse ou de certaines des hypothèses

5 Synthèse de l'ensemble des hypothèses validées et invalidées

Structuration du savoir construit en réponse au problème posé

6 Confrontation au savoir établi

7 Réinvestissement dans une nouvelle situation en classe ou de la vie courante

Annexe 2

Travail sur la propagation rectiligne de la lumière

Durée :

1 séance d'une heure, ou deux séances de 40 min, selon l'entraînement des élèves.

Lieu :

D'une part une pièce partiellement ensoleillée, d'autre part, une pièce pouvant s'assombrir.

Matériel :

Pour chaque groupe de 3 à 5 élèves :
deux petits miroirs,
une lampe-torche,
un crayon noir,
une feuille de papier blanc.
Prévoir ensuite un projecteur de diapos et un
chiffon contenant de la poussière de craie.

Enquête préalable.

En général, les enfants ne s'interrogent guère sur la propagation de la lumière, qu'il s'agisse de celle du Soleil ou de celle d'une ampoule électrique (celle d'un plafonnier par exemple) : ils ont l'intuition que la lumière se diffuse autour de sa source dans toutes les directions puisqu'ils "baignent" dedans, et cela leur suffit. Par contre, ils reconnaissent qu'avec une lampe-torche, c'est différent, cela à cause du réflecteur « *qui n'envoie sa lumière que vers l'objet que l'on veut éclairer* » : ils précisent alors que sa lumière « *part tout droit* » vers l'objet en question. D'autre part, si vous les interrogez sur la possibilité d'envoyer « *tout droit* » la lumière du Soleil quelque part, certains penseront sûrement aux jeux utilisant un petit miroir : « *on peut envoyer comme ça le soleil dans l'œil d'un copain !* »

Dessins avant expérimentations.

Proposez aux élèves de montrer par des dessins ce qui vient d'être dit.

Certains auront peut-être l'idée de représenter leurs rayons lumineux (rectilignes ou non, fléchés ou non). Leur demander s'ils voient réellement cette partie de leur dessin. Convenir alors avec les élèves que si cela peut les aider, ils peuvent les représenter. Mais comme ils ne se voient pas, on décide de les dessiner en pointillés...

Adopter ensuite systématiquement la même représentation.

Si les élèves représentent massivement les rayons de manière rectiligne, il faut alors leur demander s'ils en sont sûrs... Si les avis sont partagés, il faut de toute façon chercher à savoir qui a raison. Cela introduit la problématique du paragraphe suivant.

Expérimentations

Un premier moment d'expérimentations – assez court – peut avoir lieu par rotation des groupes : d'une part, dans un endroit ensoleillé de la classe, les enfants, à l'aide de miroirs, " renvoient le soleil " dans une partie plus sombre de la pièce, sur un mur ou au plafond, et observent le déplacement de la tache lumineuse en fonction de l'orientation de leur miroir ; d'autre part, dans une pièce assombrie, les élèves observent la position des objets éclairés avec leur torche par rapport à celle-ci, tout en évaluant la forme et l'étendue de la zone éclairée. Mais ils pourront également expérimenter le " renvoi " de la lumière de la torche avec un miroir.

Les rapporteurs de chaque groupe viendront sans doute confirmer que la lumière a bien quelque chose à voir avec des trajets rectilignes. Mais comment faire pour essayer de vérifier cela, par exemple avec les torches ?

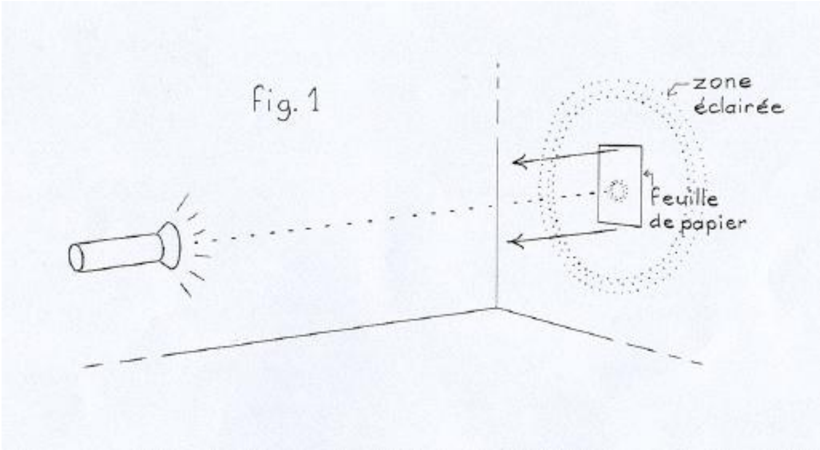


Photo Huguette Farges (Compiègne)

Deuxième moment d'expérimentation : les élèves qui ont une idée se chargent de l'exécuter après avoir rassemblé le matériel nécessaire. Pour les autres, proposez une feuille de papier blanc, à tenir d'abord contre un mur, dans la partie éclairée par une torche, de façon à ce que le petit " rond " central très lumineux - dont on va tracer le contour au crayon sur la feuille - se trouve au centre de celle-ci (figure 1). Il s'agit ensuite de ramener lentement la feuille vers la torche (immobile !) en maintenant le petit rond lumineux dans le tracé : les élèves remarquent que c'est par un mouvement rectiligne vers la source lumineuse que l'on peut obtenir cela.

Dessins après expérimentations.

Les élèves font de nouveaux dessins, lesquels seront sans doute plus complets et plus précis que les premiers. Ils les accompagnent d'une courte légende explicative.

Pour aller plus loin.

Les enfants auront constaté que les rayons lumineux à la sortie des torches ne sont pas visibles : il faut qu'un objet s'interpose devant, et donc " coupe " leur trajet, pour que l'œil voie l'objet éclairé, ce dernier renvoyant la lumière dans notre œil (l'idéal serait de refaire la " manip " dans un local très vaste et dans l'obscurité complète). Il s'agira alors de faire appel à la mémoire des élèves pour qu'ils recherchent dans quelles occasions ils ont pu percevoir un ou plusieurs faisceaux lumineux : rais de lumière passant par un trou de volet dans une pièce où de fines poussières se trouvent en suspension, rais de soleil à travers des feuillages par temps de brume, phares de voiture par temps de brouillard, fumée de cigarette dans le faisceau d'un projecteur… : on leur fera remarquer qu'à chaque fois il y avait la présence de fines particules : en effet, celles-ci reçoivent la lumière de la source et réémettent de la lumière de tous côtés (comme la Lune) : on dit que ces particules diffusent la lumière. On peut mettre cela en évidence dans un endroit très sombre : on produit par exemple un petit nuage de poussière de craie en secouant un chiffon à tableau au-dessus du faisceau d'un projecteur de diapos.

Annexe 3

Travail sur les ombres et leurs relations avec la source lumineuse

Durée :

plusieurs moments d'observation à l'extérieur, en fonction de la météo ; une séance de 20 min de tracés d'ombres à l'extérieur ; une autre pour des simulations à l'intérieur.

Lieu :

endroit ensoleillé avec sol bitumé ; lieu pouvant s'assombrir.

Matériel :

Pour chaque groupe de 3 à 5 élèves :
bâton de craie,
ruban de couturière ou mètre à enrouleur,
calculette,
lampe de poche,
crayon ou objet allongé,
pâte à modeler,
feuille blanche,
crayon,
papier millimétré

Enquête préalable

Après l'avoir exprimé par le dessin "d'un bâton au soleil" (dans le questionnaire-test), les élèves disent ce qu'ils savent des ombres en général et de la façon dont elles se forment. On leur propose ensuite de se dessiner eux-mêmes "au soleil", à côté d'un arbre et d'une maison, selon leur propre opinion par rapport à ce qui vient d'être dit.

Confrontation des dessins

Les élèves, lors du pré-test, ont produit des dessins qui, nécessairement, comporteront des divergences.

L'enseignant reproduit ceux qui présentent des caractéristiques contradictoires et demande d'abord aux élèves, en groupes, de réfléchir aux erreurs qu'ils comportent.

L'observation du paragraphe suivant est davantage problématisée.

Observations

Celles-ci se font par temps ensoleillé mais aussi quand le Soleil est légèrement voilé, de façon à pouvoir constater que les ombres sont plus ou moins nettes, plus ou moins contrastées, et qu'elles peuvent bien sûr disparaître dès qu'un nuage passe devant le Soleil. Leur forme est mise en relation avec la forme de l'objet lui-même selon la face présentée au Soleil (face, profil, trois-quarts, dessus…).

Expériences

Les enfants vont découvrir que l'ombre, en réalité, ne se borne pas aux deux dimensions qu'on lui attribue généralement : en passant leur main derrière un objet placé au soleil, ou mieux, derrière un camarade, ils constatent que leur main s'assombrit et cela, quelle que soit sa distance entre l'enfant-objet et l'écran sur lequel se projette son ombre (mur ou sol) : ils réalisent que l'ombre a en réalité trois dimensions mais qu'elle n'a pas de consistance propre , c'est une région de l'espace dans laquelle la lumière venant du Soleil n'arrive pas. Quand un objet s'interpose entre une source de lumière et un écran, on voit alors sur l'écran une "ombre" que l'on appelle ombre portée. (Comme il ne sera question que de cette dernière dans toutes les activités qui vont suivre, il ne sera plus nécessaire d'apporter cette précision).

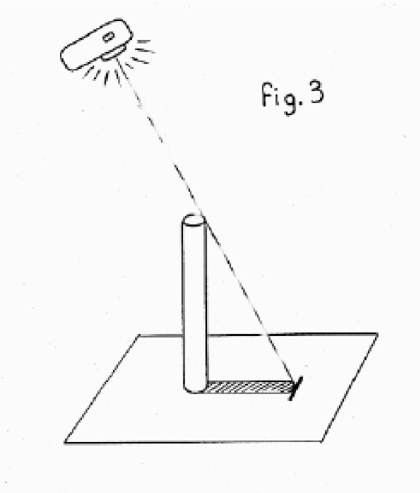
Interprétation de tracés d'ombre.

Des élèves s'aperçoivent que leur ombre n'a pas la même " grandeur " qu'eux-mêmes : comment le vérifier ? En effectuant des comparaisons à l'aide de mesures de tracés. Les enfants se mettent en binôme :

tandis que l'un se présente de face par rapport au Soleil, l'autre trace le contour de son ombre à la craie sur un sol bitumé, cela, en incluant les pieds puisque nous "marchons" sur notre ombre.

Comment vérifier maintenant si les tracés sont de taille identique, supérieure ou inférieure à la stature des élèves ?. Chaque binôme choisit son procédé et l'exécute (le plus simple étant de s'allonger sur son propre tracé !).

Expérimentations avec une lampe électrique



Entre temps, les élèves se seront interrogés sur la cause de cette différence entre leur stature et la longueur de leur ombre, et ils auront compris que la hauteur du Soleil au dessus de l'horizon y était pour quelque chose. Afin de pouvoir maîtriser le phénomène, ils vont effectuer des simulations par petits groupes, avec une lampe électrique et un objet quelconque (un crayon planté sur une boule de pâte à modeler étant l'idéal) : ils auront tôt fait de constater le lien existant entre la hauteur de la lampe et la longueur de l'ombre de l'objet.

Mais il se peut qu'un petit malin fasse une trouvaille venant contredire ce fait : il va mettre au défi ses camarades de trouver le moyen d'abaisser ou d'élever leur lampe sans que l'ombre obtenue au départ varie en longueur (on tracera un repère sur une feuille de papier supportant l'objet).

La figure 3 montre que l'angle formé par le faisceau lumineux et la feuille-support doit rester constant : pour cela, la lampe doit être abaissée, dans un mouvement rectiligne, vers le sommet de l'objet (le plus simple étant, bien sûr, que cet angle soit égal à 90° : dans ce cas, la lampe, durant sa descente, reste à l'aplomb de l'objet dont l'ombre " disparaît " alors, comme dans l'histoire d'Ératosthène !

Et il se peut fort également que d'autres élèves découvrent que, lorsque la lampe est déplacée latéralement, l'ombre fait de même « *mais à l'envers !* » Ils retrouveront cela un peu plus tard…

Dessins avec légendes

Les élèves consignent leurs observations liées à cette partie par des croquis accompagnés de légendes. On peut leur demander aussi de reproduire à l'échelle de 1/10ème, sur du papier millimétré, un personnage vu de profil ayant leur stature, avec son ombre devant lui (donc apparaissant à gauche ou à droite comme sur la figure 3), et dont la longueur correspondra à leur propre relevé ; ils chercheront comment placer le Soleil de la façon la plus exacte possible : certains penseront à tracer le rayon solaire oblique passant par le haut de la tête et aboutissant à l'extrémité de l'ombre, et ils le prolongeront vers le haut pour y placer le Soleil.

Note : Si les élèves représentent les rayons, il faudrait qu'ils le fassent en pointillés...

Pour aller plus loin

Il est possible que les élèves s'interrogent sur le fait que les contours des ombres apparaissent plus ou moins flous : ils peuvent, par des expériences très simples, être amenés à découvrir que ce flou constitue ce qu'on appelle la pénombre, et que la formation de celle-ci est liée à la dimension, ponctuelle ou non, de la source lumineuse. Nous ne détaillerons pas ici ces expériences puisque le phénomène impliqué n'intervient pas – ou très peu – dans le projet Ératosthène. Pour les enseignants intéressés néanmoins, signalons qu'ils trouveront tous les détails nécessaires dans le dossier Éclipses du site, séquence s'initier à l'éclipse de Lune et séquence faire apparaître la pénombre.

Évaluation intermédiaire

On peut prévoir une évaluation intermédiaire, complètement formative, pour voir si, à ce stade, les élèves ont acquis les notions sur lesquelles il faudra s'appuyer plus tard.

L'enseignant peut leur proposer un dessin très simple.

1. En coupe, une chaussée bordée de deux trottoirs et un poteau électrique sur un des trottoirs (NE PAS DESSINER LE SOLEIL !).

Question : Positionne le Soleil pour que l'ombre du poteau atteigne le trottoir d'en face ?

Annexe 4

Notion de rayons divergents et de rayons parallèles

Durée :

simulation de 15 min environ ; expérimentations et mesures en extérieur de 20mn.

Lieu :

local pouvant s'assombrir ; endroit ensoleillé à l'extérieur.

Matériel :

Pour chaque groupe de 3 à 5 élèves :
une lampe de poche,
trois ou quatre crayons,
de la pâte à modeler,
une grande feuille de papier,
une règle graduée,
de la ficelle fine,
du papier calque.

Simulation

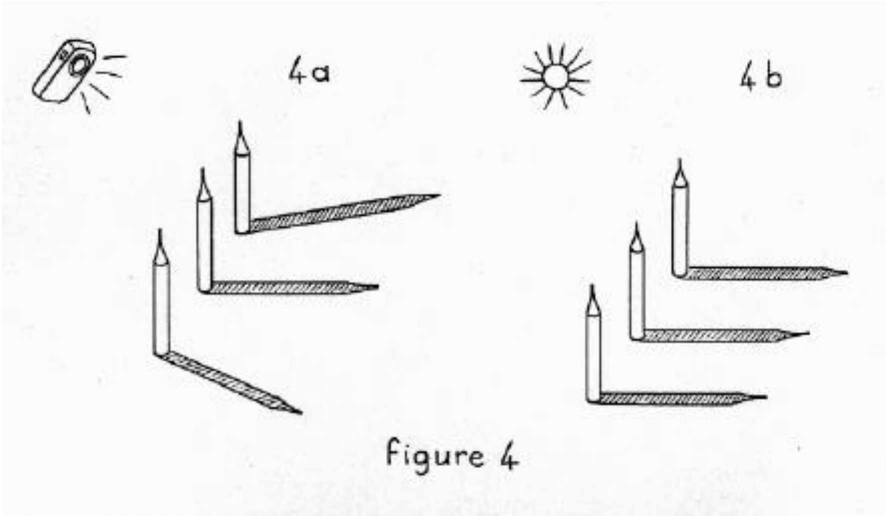
L'enseignant expose la situation : plusieurs crayons vont être dressés en ligne sur la table et une lampe de poche va les éclairer par derrière, puis demande aux élèves d'anticiper : que va-t-il se passer lorsque vous allumerez la lampe ? (les lampes n'ont pas encore été distribuées).

Note : Ce moment d'anticipation permet au maître d'évaluer où en sont ses élèves du point de vue de la propagation rectiligne, et aux élèves de bien prendre conscience de leur manière de raisonner. Si, après vérification, l'expérience invalide la prévision, les élèves comprendront sans doute mieux l'origine de leur erreur.

On distribue à chaque groupe d'élèves les lampes de poche. Cette fois, avec leur lampe électrique, les élèves éclairent plusieurs crayons installés comme sur la figure 4 mais sur une grande feuille de papier. Ils notent ce qu'ils remarquent de particulier : les enfants qui ont à peu près aligné leurs crayons, en les écartant plus ou moins et en les éclairant par derrière, notent tout de suite que les ombres « *s'écartent vers le bout* », cela d'autant plus que la lampe se rapproche des crayons (figure 4a). Ils voient aussi qu'en éloignant la lampe, les ombres " se redressent " mais sans pouvoir " y arriver tout à fait, parce que la lampe n'est pas assez forte et qu'on n'a pas assez de place pour reculer encore ". Demandez-leur quelle source de lumière pourrait être assez puissante et assez éloignée pour vérifier si les ombres vont pouvoir se « *redresser tout à fait* » : il y en aura bien un qui finira par penser au Soleil !

Note: *Il est possible (mais pas certain) que les élèves remarquent qu'en éloignant la lampe, les ombres se redressent. De la même manière, on peut demander aux élèves s'il est possible d'obtenir des ombres parallèles. Là encore, une phase d'anticipation est intéressante avant expérimentation (il faudrait momentanément retirer les lampes de poche).*

Si l'idée du Soleil apparaît, tant mieux, mais ne pas la valider. La garder comme hypothèse. « Certains pensent qu'avec le Soleil, on obtiendra des ombres parallèles, qu'en pensent les autres ?... » Si l'idée n'apparaît pas, le maître posera la question : « comment pensez-vous que seront les ombres avec le Soleil ? ». Cela permettra d'introduire l'expérimentation suivante.



Expérimentation à l'extérieur

Les élèves réinstallent leurs crayons au soleil. A condition que les objets soient quasiment parallèles entre eux (mais pas forcément verticaux), et que le sol soit plan à cet endroit (mais pas forcément horizontal) ils constatent que les ombres ont l'air de s'être « *tout à fait redressées* » (figue 4b). Les enfants ayant bien répondu à la question n°4 du questionnaire-test se souviendront peut-être du mot " parallèle ". Comment vérifier ce parallélisme ? Certains proposeront de mesurer l'écartement des ombres à leur base et à leur extrémité, « *mais seulement si les crayons ont bien la même hauteur* », conditions que l'on cherchera à obtenir du mieux possible, de même que le parallélisme des crayons entre eux. L'installation se fera sur une grande feuille de papier sur laquelle on tracera soigneusement l'ombre des crayons, afin de procéder aux mesures une fois revenus en classe.

Mesures et interprétations

Les mesures une fois effectuées et comparées, en admettant des différences n'excédant pas le demi-centimètre par excès ou par défaut, les élèves concluront au parallélisme probable des ombres. Avant qu'ils ne puissent en déduire le parallélisme des rayons solaires, ils devront faire certaines observations lors de deux autres simulations, d'abord avec une lampe électrique, puis au soleil.

Nouvelles observations

Tout d'abord, comment voir pourquoi les ombres divergent avec une lampe électrique ? Se souvenant du croquis exécuté sur le papier millimétré, des élèves proposeront sans doute de matérialiser avec de la ficelle le trajet des rayons lumineux partant de la lampe, passant sur la pointe de chaque crayon, et aboutissant à l'extrémité de leur ombre (côté pratique, il faudra chercher le moyen de réduire au minimum les ombres parasites créées par les ficelles au niveau du verre de la lampe et à l'extrémité des ombres). Les enfants constateront que « *c'est parce que les ficelles s'écartent que les ombres s'écartent aussi* » (figure 5a).

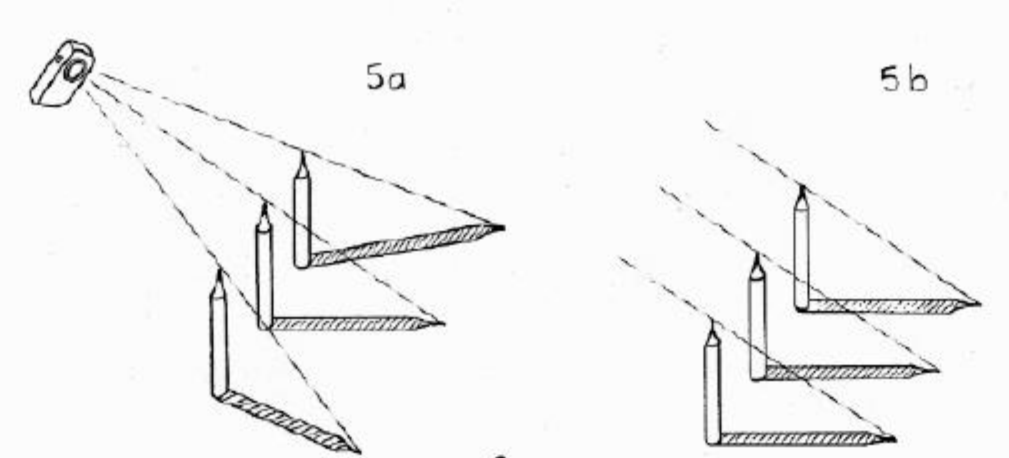


figure 5

Des petits malins ajouteront certainement : « *Mais alors, avec le Soleil, les ficelles devraient être parallèles !* » (figure 5b). Ils iront bien sûr vérifier cela sur place et en déduiront que les rayons solaires doivent eux-mêmes être parallèles.

Traces écrites

Les enfants illustreront ces dernières trouvailles par des dessins et des légendes..

Pour aller plus loin

L'enseignant propose d'essayer de tracer des droites les plus parallèles possible, à vue d'œil, puis de vérifier leur parallélisme de différentes manières, dont celles-ci :

Les élèves reproduisent sur du papier calque un réseau de droites réellement parallèles, cela grâce aux réglures de feuilles de copies : ce réseau, assez serré, est posé ensuite sur les droites prétendues parallèles : en faisant coïncider l'une de celles-ci avec l'une du réseau, cela permet de vérifier le parallélisme de toutes les autres (figure 6a)

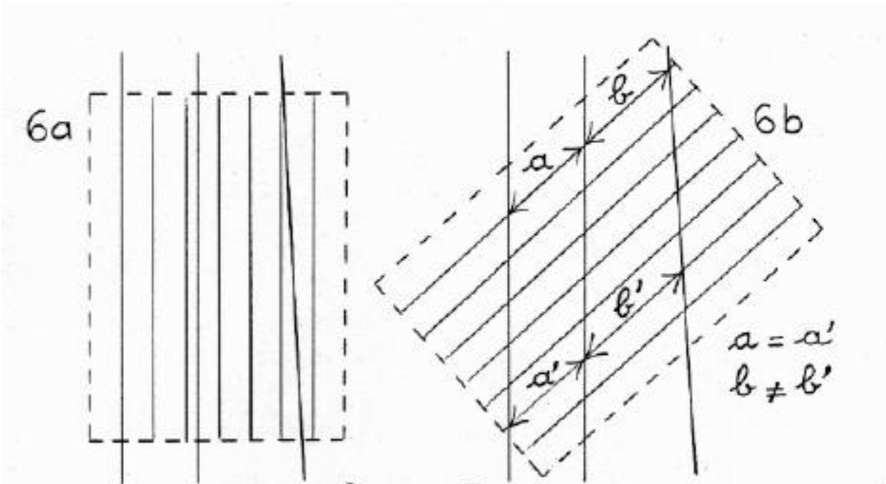


figure 6

En posant ce réseau, mais cette fois de façon quelconque sur les droites en questions, puis en procédant pour chacune à la mesure d'un couple de segments obtenus, ils comparent les résultats (figure 6b).

D'autre part, les élèves verront qu'il est facile de tracer des parallèles obliques sur du papier quadrillé.

Annexe 5

1.2 1°) Mettons-nous à l'ombre !

As-tu déjà observé des ombres ? Essaie de dessiner l'ombre d' un bâton au soleil (ce bâton est planté dans le sol).

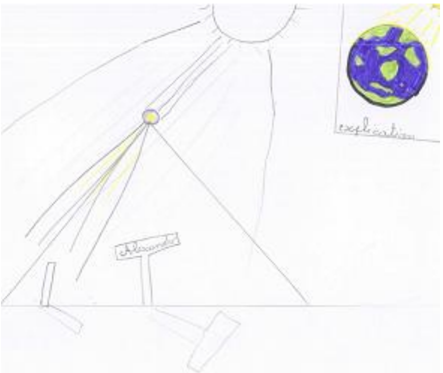
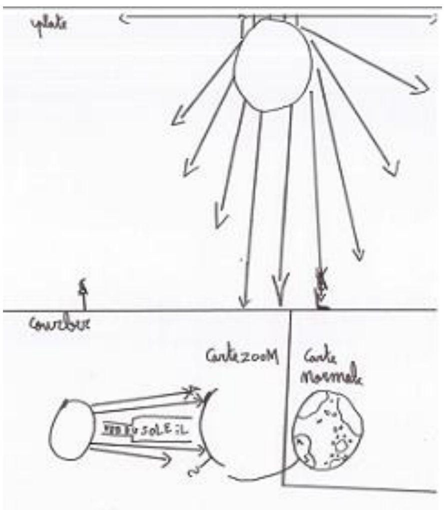
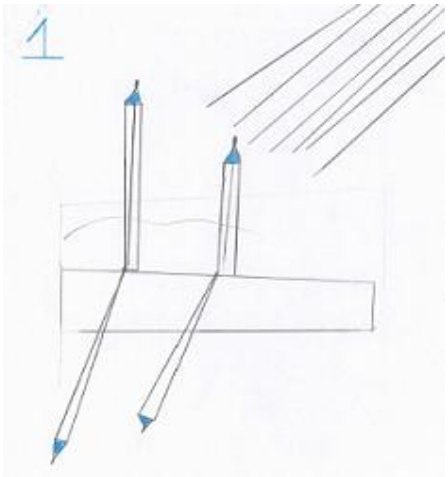
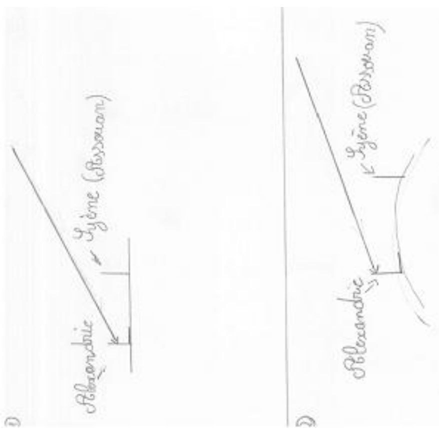
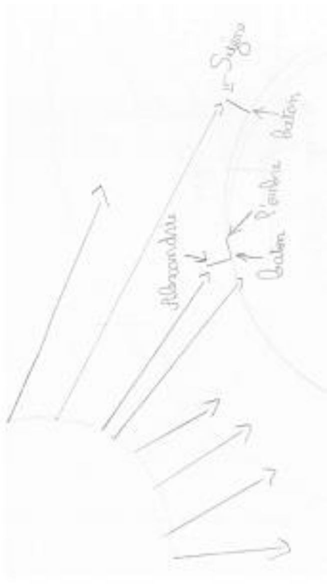
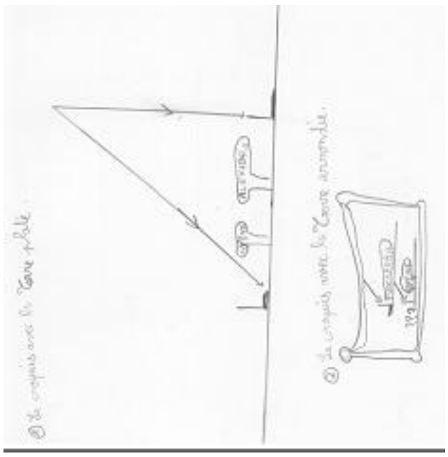
Fais de même ensuite, pour trois bâtons assez écartés les uns des autres.

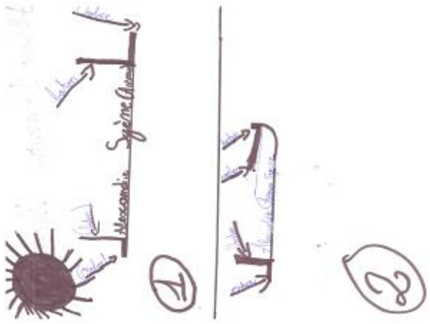
1.3 7°) Encore des bâtons !

Reprends le dessin de la Terre que tu viens de faire, et ajoute, sur le pourtour, trois petits bâtons plantés dans le sol comme des piquets, mais très éloignés les uns des autres.

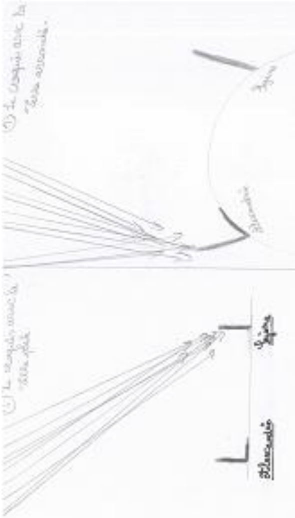
1.4 8°) La Terre s'est mise au soleil

Dessine la Terre comme tu imagines qu'on peut la voir dans l'espace, avec des continents par exemple, mais aussi avec le Soleil qui l'éclaire. Si tu veux montrer qu'il fait nuit quelque part sur ta planète, colorie soigneusement cette partie en noir.

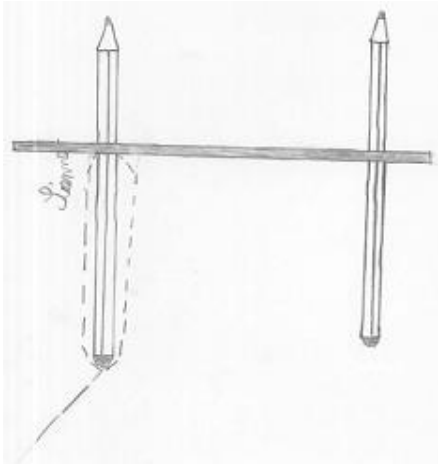
 ---	 --2	 003
 Ariel (CM2)	 Elia (CM2)	 Garion (CM2)



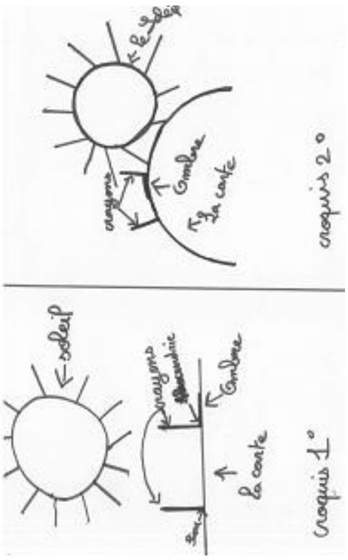
Héléna (CM1)



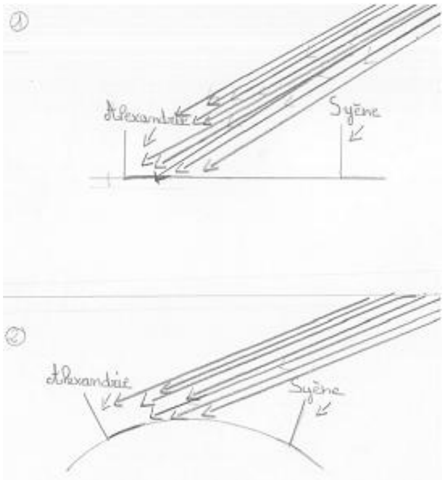
Hichame (CM2)



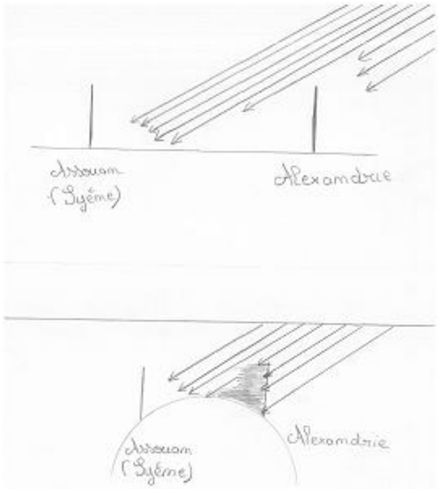
Hugo (CM1)



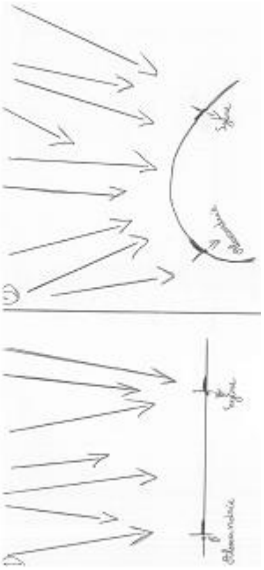
Ines (CM2)



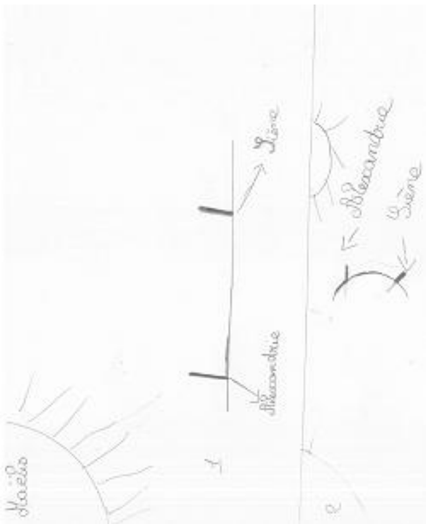
Jeanne (CM2)



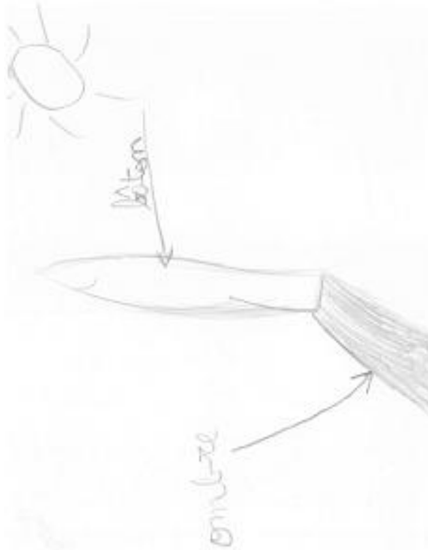
Juliette (CM 2)



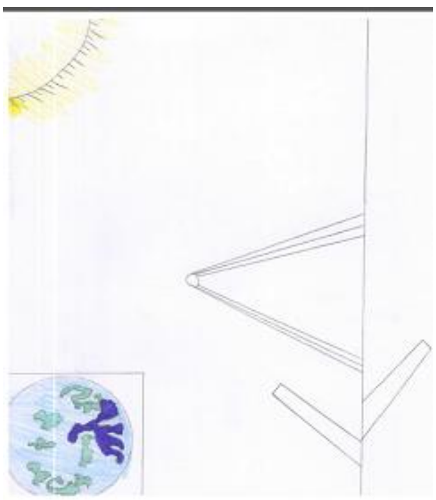
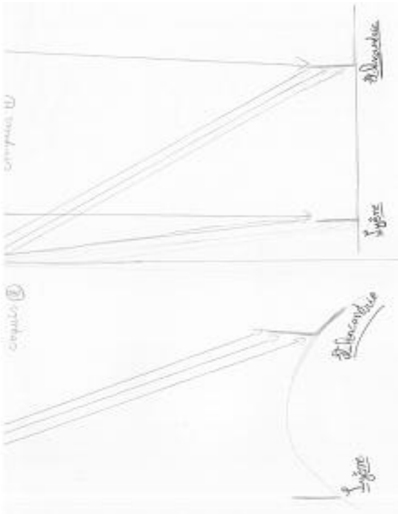
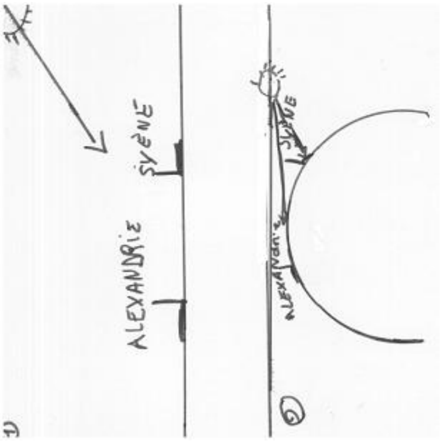
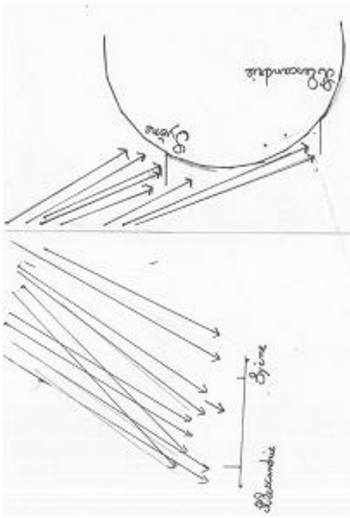
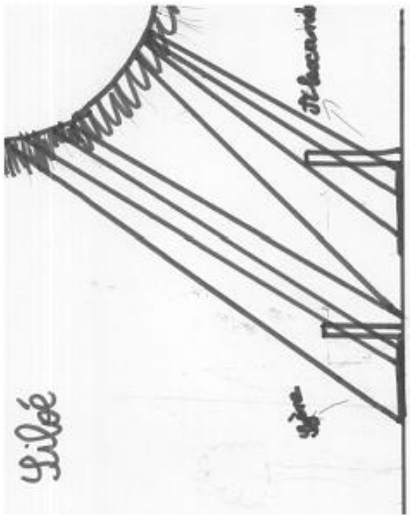
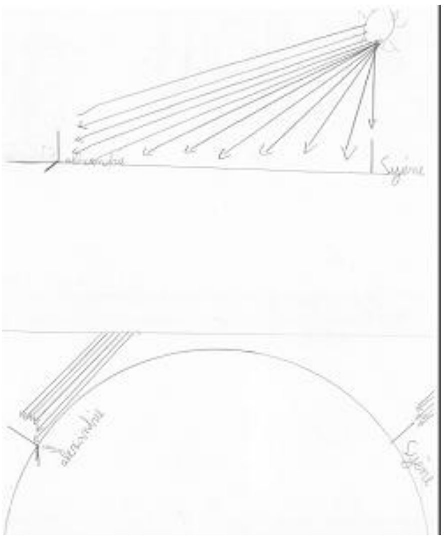
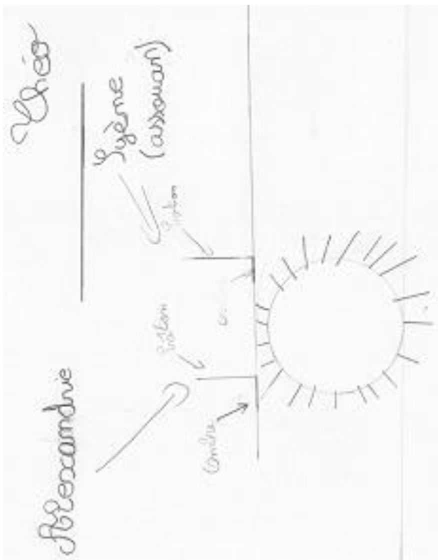
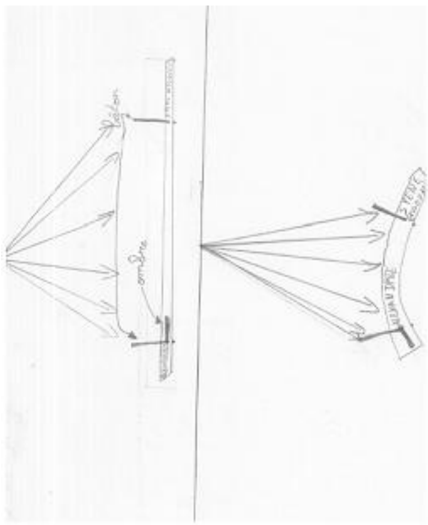
Léo (CM1)



Maelis (CM2)



Marcel (CM2)

 Maria (CM2)	 Marine (CM2)	 Nell (CM2)
 Orane (CM1)	 Pierre (CM2)	 Siloe (CM2)
 Simon (CM2)	 Théo (CM2)	 Zoe (CM1)

Annexe 6

Petit recueil d'observations sur les ombres

1) **En observant des photos de lumières émises par des lasers ou des rayons de soleil à travers les arbres.**

Qu'est-ce que je peux dire sur la façon dont se déplace la lumière?

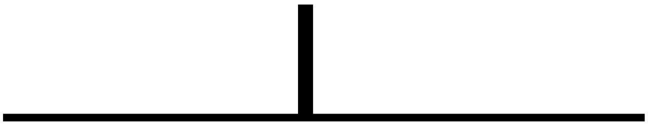
2) **J'oriente la lumière de ma lampe sur le bureau.**

Qu'est-ce que j'observe?

3) **Je pose un crayon debout, verticalement, sur le bureau et j'oriente la lumière de ma lampe vers le crayon.**

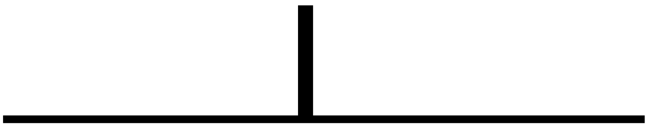
Qu'est-ce que j'observe sur le bureau?

Pourquoi?



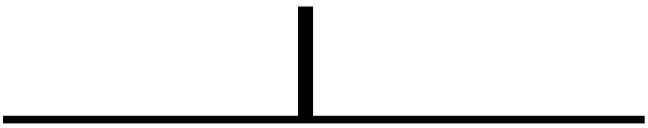
4) **Je regarde mon crayon. Je veux que l'ombre soit projetée vers la droite du crayon.**

Où vais-je placer ma lampe?

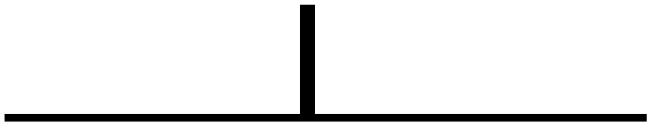


5) **Je regarde mon crayon. Je veux que l'ombre soit projetée vers la gauche du crayon.**

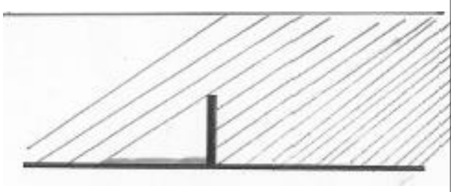
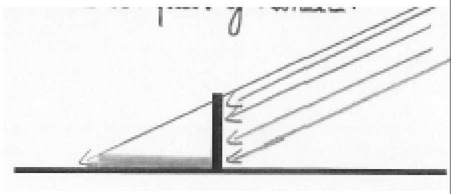
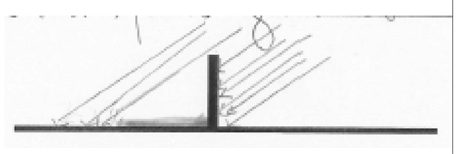
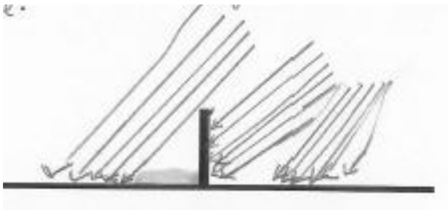
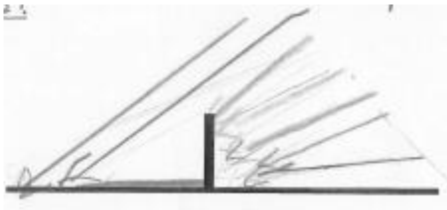
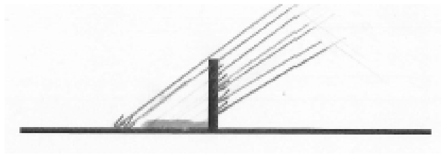
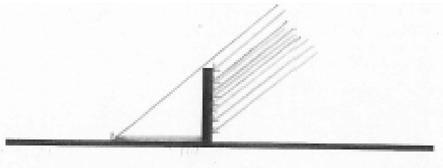
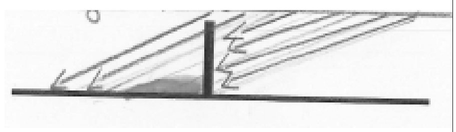
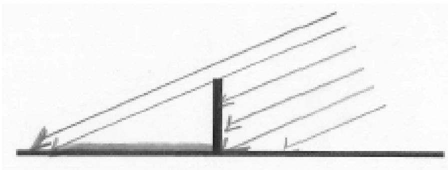
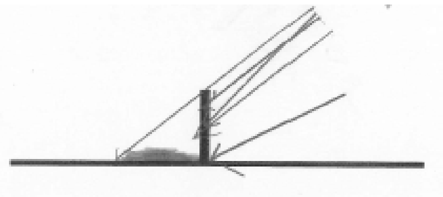
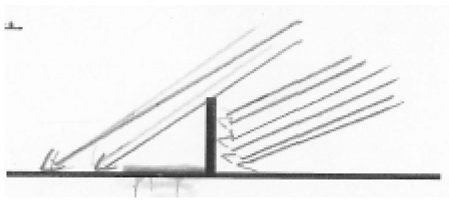
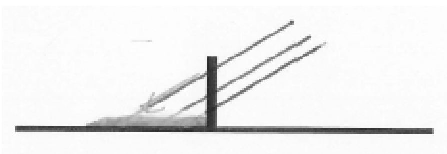
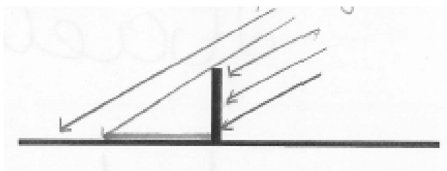
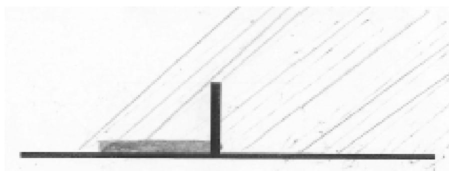
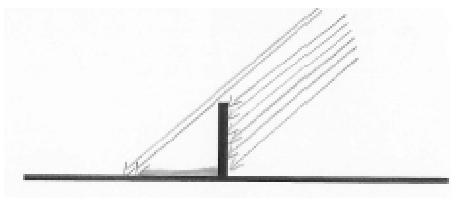
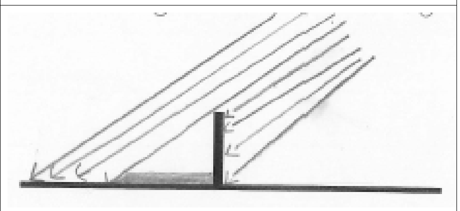
Où vais-je placer ma lampe?

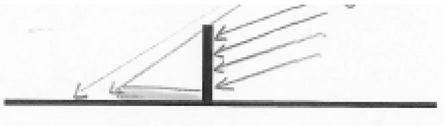
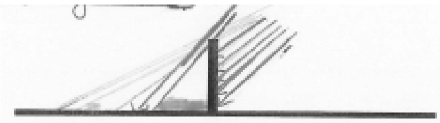
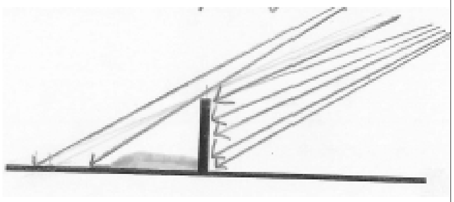
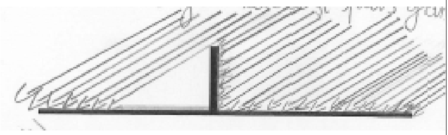
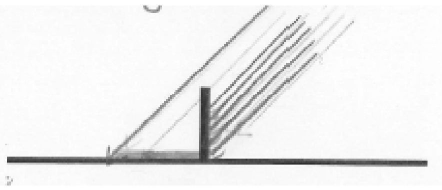
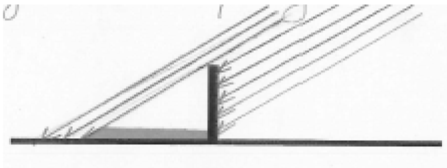


6) **Mon crayon est toujours posé verticalement sur mon bureau. Je veux faire disparaître l'ombre au maximum,** *comment dois-je placer ma lampe?*



Annexe 7

 Adrien (CM1)	 Ariel (CM2)	 Elia (CM2)
 Garion (CM2)	 Héléna (CM1)	 Hychame (CM2)
Hugo (CM1)	 Ines (CM2)	 Jeanne (CM2)
 Juliette (CM2)	 Kelian (CM2)	 Léo (CM1)
 Lucile (CM1)	 Maelis (CM2)	 Marcel (CM2)
Maria (CM2)	 Marine (CM2)	 Mathéo (CM1)

 Nell (CM2)	 Orane (CM1)	 Pierre (CM2)
Siloe (CM2)	 Simon(CM2)	 Théo (CM2)
 Zoe (CM1)		