

CONFÉRENCE D'OUVERTURE

REGARDS CROISÉS SUR L'ENSEIGNEMENT ET LA FORMATION DE LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Que veut-on que les élèves de l'école primaire apprennent en géométrie ?

Valentina CELL, Maître de Conférences,
IUFM D'AQUITAINE, LACES, équipe E3D
valentina.celi@iufm.u-bordeaux4.fr

Le point de vue d'ingénieries didactiques.

Fabien EMPRIN, Maître de Conférences,
UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE ARDENNE – ESPE
CEREP EA4692 / ERMEL- IFé
Fabien.emprin@univ-reims.fr

Quelques remarques autour des finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire.

Marie-Hélène SALIN, Maître de Conférences honoraire
IUFM Aquitaine
mh.salin@sfr.fr

Les technologies pour la géométrie à l'école primaire.

Sophie SOURY-LAVERGNE, Maître de Conférences,
Institut Français de l'éducation
Sophie.Soury-Lavergne@ens-lyon.fr

QUE VEUT-ON QUE LES ÉLÈVES DE L'ÉCOLE PRIMAIRE APPRENNENT EN GÉOMÉTRIE ?

Valentina CELI

Maître de Conférences, IUFM D'AQUITAINE
LACES, équipe E3D
valentina.celi@iufm.u-bordeaux4.fr

Résumé

À travers une lecture de quelques documents officiels et la présentation de quelques résultats d'une étude menée auprès d'enseignants de l'école élémentaire (cycle 3), nous tentons d'identifier des éléments de réponse à la question : *quelles devraient/pourraient être les finalités de l'enseignement de la géométrie ?* Ce qui nous conduit à décliner autrement cette question afin de nous interroger aussi sur ce que l'on veut que les élèves apprennent, qu'ils maîtrisent, qu'ils sachent et sur ce que l'on veut leur enseigner.

Quelles devraient/pourraient être les finalités de l'enseignement de la géométrie ?

Publié en 2002, le rapport de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) concentre tous les éléments essentiels pour répondre à cette question. Persuadée que la géométrie participe à la formation du futur citoyen et à celle des futurs scientifiques, la commission indiquait dans son rapport les raisons pour que cette discipline soit encore enseignée : la géométrie est un lieu où l'on apprend à appréhender l'espace et où l'on apprend à raisonner ; elle fait partie intégrante de la culture de l'humanité et elle est utile dans la vie courante (pour lire des cartes, s'orienter sur le plan de la ville ; pour comprendre les plans des objets à monter soi-même ; pour déplacer des meubles ; ... pour interpréter des représentations géométriques de données statistiques, ...) ; elle est aussi utile dans la vie professionnelle (artisans, techniciens et ingénieurs mais aussi tous les métiers qui se servent des nouvelles technologies faisant souvent appel à la vision géométrique, je pense par exemple aux dentistes qui peuvent désormais utiliser des logiciels de géométrie pour faire des moulages des dents sans plâtre) ; elle est utile dans les mathématiques et dans d'autres disciplines scientifiques, comme la physique et la chimie, par exemple pour étudier la structure des matériaux.

À propos des finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire, la commission redoutait toute approche formelle et s'exprimait clairement sur deux aspects : si d'une part apprendre à appréhender l'espace doit être un objectif à viser avant même de parler de figures et de géométrie, d'autre part un premier *travail spécifique sur le thème « voir sur la figure »* doit demeurer primordial *dans la perspective d'une utilisation plus importante de la figure à tous les niveaux.*

Cette même commission commentait ensuite les programmes scolaires de tous les niveaux, en vigueur à l'époque. Pour l'école primaire (il s'agissait des programmes de 1995), on peut y lire : « *Tels qu'ils sont rédigés, les programmes semblent assez équilibrés mais sans doute pas suffisamment explicites. Les anciens programmes de 1985 étaient accompagnés d'instructions concernant les activités géométriques qui étaient très intéressantes. Malheureusement ces instructions, qui pourraient encore être utiles aujourd'hui, ne sont plus diffusées, ce qui laisse trop souvent la place, en pratique, à une réduction de la géométrie à l'apprentissage d'un vocabulaire et à la manipulation des instruments* ».

Dans ces réflexions, je vois au moins deux points névralgiques : d'une part, la conception et la diffusion de documents d'accompagnement ; d'autre part, l'image réductrice renvoyée par les pratiques à propos de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie à l'école.

Il me semble intéressant, à partir de là, de poser la question autrement, à savoir : *que veut-on que les élèves de l'école primaire apprennent en géométrie ?*

Dans le cadre d'une étude que j'ai menée auprès d'enseignant(e)s¹ de cycle 3, les données recueillies me semblent fournir quelques éléments de réponse à cette question.

J'ai invité ces enseignants à repérer deux difficultés que leurs élèves rencontrent le plus souvent en traitant des activités de géométrie. Les réponses des enseignants interrogés évoquent quasi exclusivement des difficultés dans le maniement des instruments, dans la précision des tracés et dans la maîtrise du vocabulaire géométrique.

En leur demandant ensuite de repérer deux difficultés qu'ils rencontrent en enseignant la géométrie, ces mêmes enseignants signalent plusieurs points, je n'en cite que quelques uns.

Ils s'interrogent sur comment aider les élèves à apprendre et utiliser un vocabulaire idoine et surtout à manipuler correctement les instruments.

Si, à travers ces résultats, on veut discerner en filigrane ce que les enseignants souhaitent que leurs élèves apprennent, nous retrouvons ce qui préoccupait la CREM en 2002, à savoir que l'on réduit souvent *la géométrie à l'apprentissage d'un vocabulaire et à la manipulation des instruments*.

Les enseignants interrogés se demandent aussi comment donner du sens aux activités géométriques : par le jeu ? en liaison avec d'autres disciplines ? dans un projet ? Je ne veux pas ici pointer du doigt un manque de ressources pour enseigner la géométrie mais cela me semble néanmoins renvoyer à la question de l'accessibilité aux ressources existantes, des moyens (et de la volonté ?) dont les enseignants disposent pour accéder à ces ressources.

L'évaluation en géométrie est un autre point qui revient dans les réponses de nombreux enseignants interrogés : mais sur quoi s'interrogent-ils ? Principalement, sur comment valider la maîtrise des instruments ainsi que *l'exactitude* et la précision des tracés réalisés. La vérification individuelle est longue, disent-ils... Ici, la prégnance des instruments et de la précision des tracés revient en force !

En lien avec l'évaluation, je vais reformuler encore la question de départ : *que veut-on que les élèves maîtrisent, qu'ils sachent en géométrie ?*

D'après le palier 1 pour la maîtrise du socle commun (B.O. n°3, 19 juin 2008, p. 20), trois compétences géométriques sont attendues en fin de cycle 2, on y lit notamment

- utiliser la règle et l'équerre pour tracer avec soin et précision...
- être précis et soigneux dans les tracés.

D'après le palier 2 (B.O. n°3, 19 juin 2008, pp. 27-28), plusieurs compétences sont attendues en fin de cycle 3, de même ici le soin et la précision sont évoqués en relation avec les constructions.

Si les enseignants semblent donc se conformer en bonne partie aux attentes institutionnelles, certaines inquiétudes de la CREM demeurent encore d'actualité ! De plus, on pourrait se demander si l'importance que l'on attribue à la précision des tracés ne participe pas à mettre plus tard en difficulté l'élève dans l'apprentissage de la démonstration.

Mais un autre document officiel a attiré mon attention, à savoir *les grilles de références pour l'évaluation et la validation des compétences du socle commun* aux paliers 1 et 2. On y lit notamment que *les situations d'évaluation proposées dans l'évaluation nationale sont proches de celles travaillées en classe pendant les temps d'apprentissage et d'entraînement*.

Si les exercices des évaluations nationales pouvaient inspirer les enseignants dans le choix de situations d'apprentissage, les commentaires qui les accompagnent pourraient alors les orienter vers des objectifs à poursuivre ou bien les conforter dans leurs choix. Cela mérite sans doute d'être étudié.

Pour illustrer mes réflexions à ce propos, je ne me focalise ici que sur les exercices de reproduction de figures aux instruments, exercices que l'on retrouve dans les *livrets des évaluations nationales des acquis des élèves de CE1 et de CM2* de 2009 à 2013.

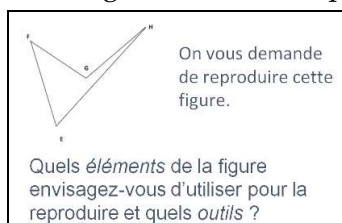
¹ Pour ne pas alourdir le texte, je me résigne à n'indiquer par la suite que le genre masculin !

Dans les indications fournies aux enseignants, parmi les erreurs à repérer, on signale les imprécisions des tracés dues à une dextérité insuffisante, à des manipulations incorrectes dans l'utilisation des instruments (la règle en CE1 ; la règle, l'équerre et le compas en CM2). Voilà donc ce qui conforte encore les enseignants dans l'idée que l'habileté dans le maniement des instruments est une compétence indispensable pour les apprentissages géométriques.

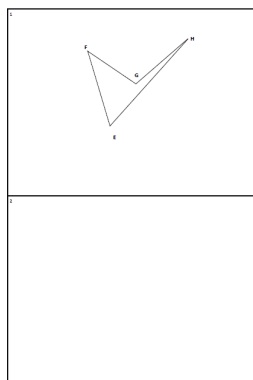
Toujours à propos des exercices de reproduction proposés dans les évaluations nationales, les attentes relatives à la disposition de la figure reproduite méritent aussi d'être commentées.

D'après les indications qui accompagnent ces exercices, on s'attend à ce que la figure obtenue soit identique à la figure donnée, à une translation près en CE1, à une rotation près en CM2. Pour les exercices de reproduction sur papier quadrillé en CE1, on précise néanmoins que « *parmi les erreurs possibles, l'élève a construit une figure symétrique (ce n'est pas une reproduction), ce n'est pas l'exercice demandé* ». Est-il pertinent d'attribuer autant d'importance à la disposition des figures lors de la reproduction ? N'y aurait-il pas de conséquences défavorables lors d'activités de description d'une figure, voire de la rédaction d'un programme de construction ?

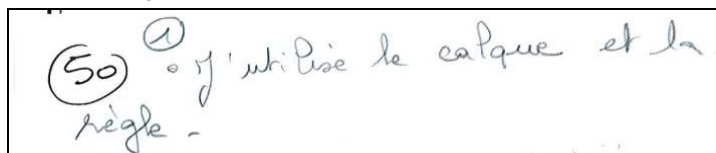
J'en viens alors au deuxième volet de mon enquête auprès d'enseignants de cycle 3 qui n'a concerné qu'une partie des enseignants interrogés dans le premier volet. Je leur ai proposé une activité de reproduction d'un quadrilatère². Sans qu'ils aient directement accès à la figure, je leur ai d'abord demandé quels éléments de la figure ils envisageaient d'utiliser pour la reproduire et avec quels outils.



Je leur ai ensuite distribué la feuille ci-après en leur précisant que, dans le cadre 1 (en haut de la feuille), ils avaient la figure à reproduire et que pour cela ils devaient se servir du cadre 2 (en bas de la feuille) :



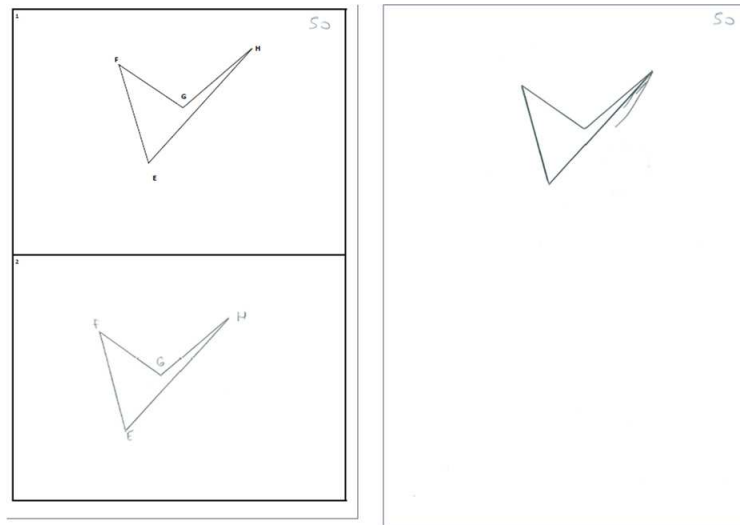
Je voudrais simplement évoquer le cas d'une enseignante interrogée. À la première question, elle envisage d'utiliser le calque et la règle :



Lorsqu'elle a effectivement à réaliser la tâche, n'ayant pas de papier calque, elle plie la feuille dans le but de reproduire la figure par transparence mais elle s'arrête aussitôt car elle s'aperçoit que la figure ne sera pas dans le cadre 2 ou alors, si elle la calque dans ce cadre, la figure ne sera pas disposée de la même manière. Elle s'interdit de reproduire la figure « par pliage », par symétrie axiale et se débrouille

² Le quadrilatère en question est extrait de Cf. Champeyrache G., Fatta J.-C., Stoecklé D. (1998), p. 67

autrement : elle calque la figure du cadre 1 en utilisant une deuxième feuille ; elle calque ensuite cette figure dans le cadre 2 de la feuille fournie (cf. ci-dessous).



La symétrie ne serait-elle pas un outil pour réussir une activité de reproduction ? Les commentaires qui accompagnent les exercices des évaluations nationales évacuent cette possibilité dans les problèmes de reproduction. Les enseignants aussi ?

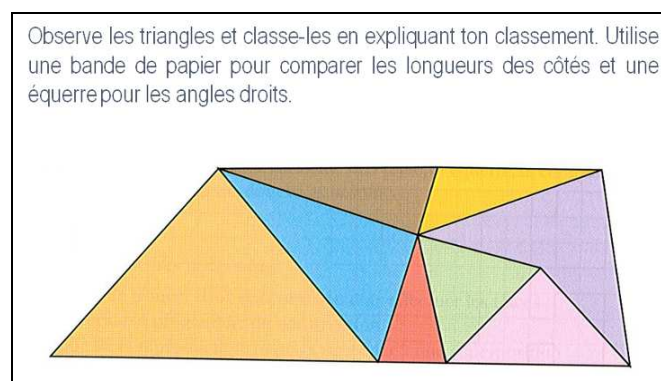
De façon plus générale, je m'interroge alors sur la façon dont les enseignants articulent les contenus géométriques avec les activités et les situations qui peuvent mettre en jeu ces contenus.

Ce qui me conduit à une dernière reformulation de la question de départ : *que veut-on enseigner aux élèves ?*

Le deuxième volet de mon enquête compte une étape durant laquelle, à propos de l'activité de reproduction du quadrilatère, j'ai demandé aux enseignants s'ils envisageaient de proposer à leurs élèves l'activité de reproduction du quadrilatère concave. La quasi-totalité des enseignants jusqu'à présent interrogés n'y étaient pas favorables : elle est complexe, ont-ils dit. Ils n'ont pas perçu l'intérêt d'une telle activité pour un travail spécifique sur l'analyse de la figure. En effet, ils n'ont pas été nombreux à envisager la reproduction du quadrilatère en ajoutant une diagonale : soit ils ont considéré les côtés et les angles, soit ils étaient convaincus que la donnée des longueurs des quatre côtés suffisent (pour la reproduire) ! Ils ne sont pas parvenus, par exemple, à envisager d'intégrer cette activité dans une séquence sur le triangle et sa construction à la règle et au compas.

Lors des échanges qui ont suivis, j'ai perçu que, dans leurs pratiques, ces enseignants ont du mal à faire jouer convenablement les variables didactiques disponibles en géométrie.

Par exemple, toujours en relation avec les instruments, ils ne conçoivent au cycle 3 que l'utilisation de la règle "graduée" (bien sûr !) et de l'équerre : comme s'il y avait une chronologie d'usages, les gabarits de longueur et d'angle droit ne sont pour eux adaptés que pour le cycle 2.



Dans le cas de l'exercice³ ci-dessus, par exemple, lorsque je les ai invités à l'analyser, ils étaient gênés non pas par l'équerre mais par la bande de papier : "comment voulez-vous qu'ils vérifient que le triangle rouge est isocèle sans avoir la règle graduée ?", réplique une enseignante. En outre, ils ne sont pas parvenus à justifier, ils étaient gênés par la présence d'un intrus, représenté ici par le quadrilatère concave.

En me posant cette dernière question « *que veut-on enseigner aux élèves en géométrie ?* », je m'aperçois alors que les échanges que j'ai eus avec ces enseignants m'aident plutôt à identifier ce qu'ils ne veulent pas enseigner. À les entendre s'exprimer, leurs pratiques sont pauvres et ils se sentent démunis, incapables de faire jouer convenablement les variables didactiques disponibles en géométrie ; ils cherchent d'abord à exiger la rigueur et ils croient bien faire en sollicitant avant tout la précision des tracés et la maîtrise du vocabulaire adapté. De plus, certains documents officiels les confortent dans cette idée.

Je n'ajouterai rien d'original et de plus que le rapport de la CREM il y a onze ans, si je conclus en disant qu'il me semble toujours urgent de prévoir des mesures d'accompagnement pour la formation des enseignants :

- il faut renforcer la place de la géométrie dans les cursus scolaire et universitaire ;
- il faut renforcer la formation initiale des enseignants et développer la formation continue en géométrie ;
- il faut produire, oui, mais aussi rendre accessibles des textes qui pourraient orienter les choix des enseignants et des auteurs de manuels dans le domaine de la géométrie.

On a beau affirmer que la géométrie est utile pour la vie courante et la vie professionnelle : cela ne se voit pas et la pression sociale semble être moindre lorsqu'il ne s'agit pas de lire, écrire et compter.

BIBLIOGRAPHIE

CHAMPEYRACHE G., FATTA J.-C., STOECKLÉ D. (1998), *Math Élem CM2*, Belin, pp. 67, 140

CREM (2002), *L'enseignement des sciences mathématiques, rapport au ministre de l'éducation nationale*, Odile Jacob, CNDP, pp. 87-169

MEN (2008), *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire*, B.O. n°3, 19 juin 2008, SCÉRÉN, CNDP, p. 20, 27-28

MEN (2011), *Livret personnel des compétences. Grille de références pour l'évaluation et la validation des compétences du socle commun au palier 1*, MENJVA/DGESCO, pp. 2, 15, 19-20

MEN (2011), *Livret personnel des compétences. Grille de références pour l'évaluation et la validation des compétences du socle commun au palier 2*, MENJVA/DGESCO, pp. 2, 25, 30-31

MEN (2009-2013), *Évaluation nationale des acquis des élèves en CE1. Livret de l'élève*, MEN/DGESCO

MEN (2009-2013), *Évaluation nationale des acquis des élèves en CE1. Livret de l'enseignant*, MEN/DGESCO

MEN (2009-2013), *Évaluation nationale des acquis des élèves en CM2. Livret de l'élève*, MEN/DGESCO

MEN (2009-2013), *Évaluation nationale des acquis des élèves en CM2. Livret de l'enseignant*, MEN/DGESCO

³ Cf. Champeyrache G., Fatta J.-C., Stoecklé D. (1998), p. 140

LE POINT DE VUE D'INGÉNIERIES DIDACTIQUES

Fabien EMPRIN

Maître de Conférences, UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE ARDENNE - ESPE
CEREP EA4692 / ERMEL- IFé
Fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé

Dans cette table ronde nous apportons un éclairage sur des recherches d'ingénieries didactiques qui s'appuient sur des expérimentations en classe à grande échelle et dont l'enjeu est l'appropriation par les enseignants des dispositifs produits. Après avoir présenté quelques éléments de méthodologie, nous avons choisi de traiter deux principales questions :

Que veut-on que les élèves de l'école primaire apprennent en géométrie ?

En formation, quels sont les outils théoriques pour analyser les situations de classe, pour construire des activités pour la classe ?

A chaque fois, nous nous appuyons sur des exemples tirés de nos recherches pour mettre à jour les éléments de réponse.

I. LE POINT DE VUE

Cette table ronde a pour objectif de proposer plusieurs regards sur l'enseignement de la géométrie à l'école. Elle s'articule sur plusieurs questions que nous proposons d'éclairer d'un point de vue particulier. Nous commençons donc par expliquer le point de vue que nous privilégions, celui des recherches sur les ingénieries didactiques parfois appelées « recherche action »

1. Nos recherches en ingénieries didactiques

Nous nous appuyons principalement sur deux recherches, qui ont, malgré leurs différences (en termes d'analyse préalable, d'étendue du champ étudié ou de méthodologie) toutes deux pour caractéristique de confronter des hypothèses de recherche à une expérimentation à « grande échelle » : la recherche de l'équipe ERMEL (Équipe de Recherche sur les Mathématiques à l'école ELémentaire) de l'IFé et la recherche sur les rallyes mathématiques à l'école maternelle en partenariat avec l'AGEEM (Association Générale des Enseignants-es de l'Ecole Maternelle)

1.1 Questions de terminologie

Nos recherches ont été et sont parfois qualifiées de « recherche action ». Nous ne renions pas ce terme dans son acception qu'utilisent Hugon et Seibel « Il s'agit de recherches dans lesquelles il y a une action délibérée de transformation de la réalité ; recherches ayant un double objectif : transformer la réalité et produire des connaissances concernant ces transformations » (Hugon et Seibel, 1988). Nos recherches visent effectivement à produire des ressources qui présentent l'analyse des enjeux de l'enseignement en relation avec les programmes scolaires et leur évolution, la description de dispositifs d'enseignement en découpant les séquences en phases et en décrivant le travail de l'enseignant, la transformation des pratiques fait donc bien partie de nos objectifs. De plus, la question de l'appropriation des dispositifs d'enseignement par les enseignants qu'ils soient débutants ou non est une question importante dans notre recherche. Néanmoins, ce terme de « recherche action » est utilisé dans de nombreux contextes, notamment en sociologie avec des acceptions variables qui introduisent du flou, c'est pourquoi nous préférons le terme recherche d'ingénierie didactique.

Le terme ingénierie didactique que nous utilisons ici entre en tension avec deux définitions, celle de l'ingénierie didactique comme méthodologie en didactique des mathématiques et celle de l'ingénierie de formation de la didactique professionnelle.

Nos démarches ont de commun avec le premier concept les questions générales qu'elles permettent d'aborder. En effet « l'expression « ingénierie didactique » apparaît dans la didactique des mathématiques française, au début des années 80, comme un moyen de répondre à deux questions fondamentales (Chevallard, 1982) :

Comment prendre en compte la complexité de la classe dans les méthodologies de recherche ?

Comment penser les relations entre recherche et action sur le système d'enseignement ? » (Artigue, 2002)

Nous partageons également avec l'ingénierie didactique le fait de confronter des hypothèses à une expérimentation réelle mais la méthode de validation et la portée des résultats n'est pas la même :

« Comme méthodologie de recherche, l'ingénierie didactique se différencie d'abord des méthodes expérimentales alors usuelles en éducation par son mode de validation. Ce mode de validation est en effet interne et basé sur la confrontation entre une analyse a priori dans laquelle sont engagées un certain nombre d'hypothèses et une analyse a posteriori qui s'appuie sur les données issues de la réalisation effective. » (Artigue, 2002)

Alors que les hypothèses de l'ingénierie didactique, dans cette définition, sont centrées plutôt sur les processus d'enseignement apprentissage et sont validées par des études de cas, nos hypothèses concernent également l'organisation de l'étude des concepts à l'échelle des cycles de l'École et la viabilité des situations didactiques dans les classes, ce qui nous amène à expérimenter des dispositifs complets d'enseignement dans un nombre important de classes.

Ces dispositifs complets d'enseignement sont, pour l'ingénierie de la formation, des ingénieries pédagogiques (Le Bortier, 1999) : « L'ingénierie pédagogique qui est du ressort des prestataires de formation et définit les objectifs, les progressions pédagogiques et les modalités d'apprentissage. » Notre ancrage dans la recherche et notre méthodologie nous amène ne pas utiliser ce terme est à choisir plutôt le terme d'ingénierie didactique au sens de (Douady, 1994) : « Le terme d'ingénierie didactique désigne un ensemble de séquences de classe conçues, organisées et articulées dans le temps de façon cohérente par un maître-ingénieur pour réaliser un projet d'apprentissage pour une certaine population d'élèves »

Nous nous appuyons sur cette méthodologie notamment dans deux recherches en relation avec l'enseignement de la géométrie à l'école que nous présentons succinctement.

1.2 Recherches sur les apprentissages géométriques au cycle 3 et au cycle 2

L'équipe ERMEL s'intéresse depuis presque quinze ans aux ingénieries didactiques concernant la géométrie d'abord au cycle 3 puis depuis 2006 au cycle 2. Au cycle 3, l'expérimentation concernait 21 chercheurs ; 75 classes ont expérimenté de façon hebdomadaire les dispositifs. Pour le cycle 2, c'est environ 10 chercheurs et 25 classes.

Nous pouvons décrire la méthodologie de la recherche comme un cycle (Douaire & Emprin, 2011) figure 1 ci-dessous. La robustesse des situations proposées venant de la confrontation des hypothèses à la mise en œuvre réelle.

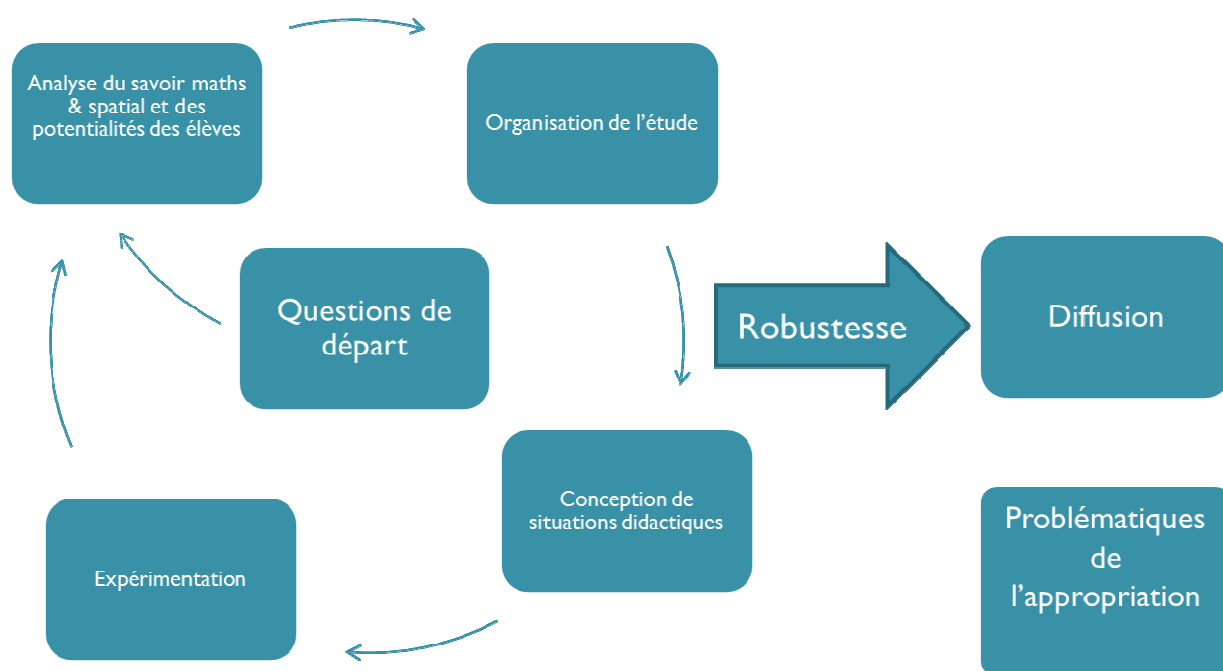


Figure 1 : méthodologie de la recherche

La seconde recherche a été mise en place à l'initiative de l'AGEEM de la Marne. Son point de départ est une remarque d'un collègue de l'association qui nous avait fait remarqué qu'il existait des rallyes lectures à l'école maternelle (alors que les élèves ne savent pas lire), qu'il existait des rallyes mathématiques au collège principalement, quelques-uns à l'école primaire, mais à sa connaissance aucun pour l'école maternelle. Nous avons donc décidé de mettre en place un cycle d'animations pédagogiques ayant pour but de construire un rallye mathématique pour les écoles maternelles. Ce cycle a duré quatre années entre expérimentations et retour d'animation et a débouché sur la production d'un dispositif (Charlotte & Emprin, 2009).

Nous allons, à présent, utiliser ces résultats de recherche pour apporter notre éclairage à deux questions proposées à cette table ronde :

Que veut-on que les élèves de l'école primaire apprennent en géométrie ?

En formation, quels sont les outils théoriques pour analyser les situations de classe, pour construire des activités pour la classe ?

Les expérimentations que nous menons nous amènent à retourner la réponse c'est-à-dire à vous présenter ce que les élèves nous apprennent des enjeux qui peuvent être assignés à l'école. C'est pourquoi nous choisissons d'entrer par des exemples.

II. QUE VEUT-ON QUE LES ÉLÈVES DE L'ÉCOLE PRIMAIRE APPRENNENT EN GÉOMÉTRIE ?

Tout d'abord, nous devons clairement dissocier cycle 3 et cycle 1 et 2. Au cycle 3, nous nous centrons sur la résolution de problèmes spatiaux qui permettent d'aborder les concepts géométriques sous différents aspects et à amorcer le passage du spatial au géométrique (Berthelot & Salin, 1992). Aux cycles 1 et 2, les concepts manipulés sont beaucoup plus difficiles à cerner et même à justifier du point de vue des mathématiques. Cela n'aurait pas de sens de dire à un enseignant de maternelle qu'il travaille le repérage dans l'espace (gauche, droite, devant..) pour préparer le repérage dans un repère au collège et

in fine la conceptualisation des espaces vectoriels. Dans ces cycles, les différentes mises en œuvre, mettent en avant l'importance des situations de construction d'expérience et de la place du langage.

1. Un exemple de passage du spatial au géométrique

Il s'agit d'une situation issue de la recherche sur les apprentissages spatiaux et la résolution de problèmes au cycle 3 (ERMEL, 2006). Elle est placée en CM2 et est définie comme une situation de synthèse, elle peut tout à fait être menée en sixième. La situation reprend un grand nombre de caractéristiques d'un problème ouvert (Arsac et Al., 1984)(Arsac et Mante, 2007) : l'énoncé est court, les élèves peuvent facilement entrer dans la résolution, aucune procédure particulière et aucune réponse spécifique ne sont attendus par l'enseignant, l'enjeu de la situation n'est pas l'enjeu de l'apprentissage.

Les élèves doivent dessiner à main levée et sur une feuille blanche, tous les types quadrilatères différents qu'ils peuvent trouver. Ils travaillent d'abord seuls pendant cinq minutes environ, puis se regroupent par quatre pour mettre en commun et dessiner, toujours à main levée, sur une feuille tous les quadrilatères différents que le groupe a trouvés. Ensuite, se déroule une phase de mise en commun collective. L'affichage de sept affiches (sept groupes pour une classe de vingt-huit élèves) présentant chacune une dizaine de dessins à main levée donc soixante-dix dessins à comparer entre eux serait ingérable. On organise donc la mise en commun en demandant à un premier groupe d'aller dessiner au tableau à main levée un quadrilatère ; un deuxième groupe va ensuite dessiner un de ses quadrilatères mais qui n'est pas encore au tableau. On compare donc un dessin à un autre. Un troisième groupe va dessiner un quadrilatère qui n'est pas encore au tableau, on compare donc un dessin à deux autres... et ainsi de suite tant qu'il y a des quadrilatères différents. A la fin, on obtient la liste de tous les quadrilatères différents que la classe a trouvés. Peu importe qu'on ne les ait pas tous, ce n'est pas l'enjeu de la situation. Il s'agit de faire travailler les élèves sur ce qui fait la différence entre deux quadrilatères et donc le concept de quadrilatère comme ensemble de propriétés.

Certains élèves commencent par dessiner beaucoup de carrés comme dans la figure 2

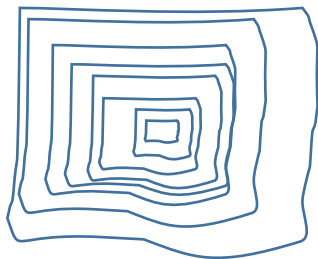


Figure 2 : exemple de dessin d'une élève : différent = de taille différente

Ces élèves s'arrêtent assez rapidement devant l'ampleur de la tâche. Ils disent : « on n'y arrivera jamais, on n'aura jamais fini ». On peut alors faire une première mise en commun pour renvoyer la question à la classe. Voici un exemple de réponse : « c'est la même forme, grande ou petite, c'est comme la couleur. Si tu en es là, un carré rouge et un carré bleu, c'est pas le même alors tu vois ça peut pas aller ; il faut faire un seul carré et puis des « pas carrés ». »

Ce premier obstacle permet de voir les propriétés qui permettent de définir le type de quadrilatères (le mot « type » qui est bien dans la consigne est choisi sciemment). La taille, la couleur ne sont pas des propriétés qui permettent de définir le type de quadrilatères.

Lors des travaux par groupe de quatre, ce type de problème disparaît ; sont également éliminés par les élèves, dans ce premier travail de synthèse en autonomie, la plupart des « monstres » c'est-à-dire les formes qui n'ont pas quatre côtés (soit plus, soit moins), les formes arrondies, les formes ouvertes.

Le choix du dessin à main levée est central dans cette situation (en plus du fait que faire dessiner des figures aux instruments focaliserait les élèves sur cette tâche prendrait un temps certain et rendrait la situation ingérable au niveau du temps) car il oblige les élèves à penser les propriétés puisqu'elles ne transparaissent pas de façon visible. On voit son intérêt quand les élèves ont dessiné des figures proches mais qu'ils veulent les différencier comme sur la figure 3

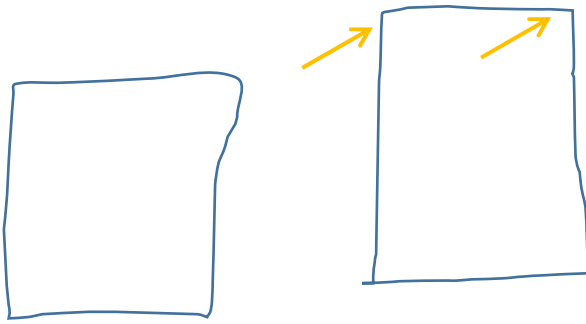


Figure 3 : Deux figures proches qui montrent l'utilité de choisir un codage

Lors de la mise en commun, le premier dessin est déjà au tableau, le second vient d'être dessiné. Les élèves refusent le nouveau dessin en disant qu'il est déjà présent. Le groupe qui vient de dessiner argumente alors « « oui, mais nous, il n'y a pas d'angles droits là et là (où il y a les flèches) c'est donc pas le même ». L'enseignante en profite alors « comment expliquer aux autres, sur le dessin, ce que vous avez voulu dessiner ? ». Les élèves se mettent alors d'accord pour :

- mettre les côtés parallèles de la même couleur.
- mettre des mesures fictives pour coter la figure et montrer les côtés de même mesure.
- coder les angles droits par le codage usuel (qu'ils connaissent manifestement).

Le codage des propriétés montre que l'on travaille bien avec un ensemble de propriétés et non un dessin (voir l'opposition dessin/figure (Parzysz, 1988))

Les deux dessins, figure 4, engendrent des échanges qui montrent bien que les élèves sont en train de passer du spatial au géométrique ainsi que les difficultés qui persistent.

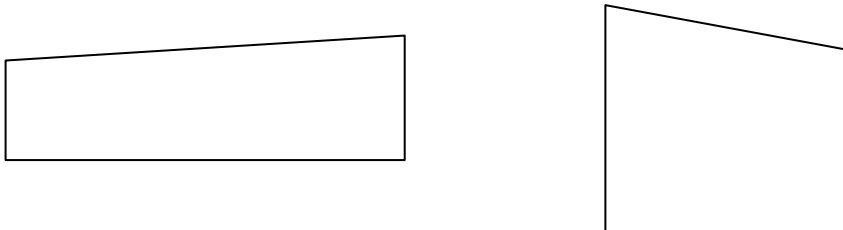


Figure 4 : deux quadrilatères du même type qui pourtant semblent bien différents

Voici les échanges engendrés :

- c'est le même parce qu'il y a deux angles droits et deux côtés parallèles
- oui, mais là, c'est bancal et là, c'est pas bancal
- c'est pas le même parce que même si on le tourne c'est pas le même

Un élève propose alors de découper.

- il y en a un qui vient plus du carré et l'autre qui vient plus du losange
- c'est pas la taille qui est importante celui-là (le second) il suffit de l'étendre et de le retourner et c'est le même.
- Oui mais alors si tu étends le carré tu as un rectangle c'est bien pas pareil ...
- Oui mais là t'as pas de côtés égaux...et là non plus alors que sur le carré t'as tous les côtés égaux.

Les élèves finissent par conclure que « c'est plus simple de regarder les propriétés »

Lors du bilan de cette séance, les élèves restent sans exception sur les propriétés et non plus sur les aspects perceptifs ou liés à l'orientation.

Pour amener les élèves à ce basculement du spatial vers le géométrique, ils ont résolu des problèmes spatiaux durant le cycle 3. Quant aux cycles 1 et 2, si des problèmes spatiaux persistent, leur enjeu apparaît parfois comme lié à l'expérience et au langage plus qu'à l'approche d'un aspect d'un concept mathématique clairement identifié.

2. Un exemple de construction d'expérience spatiale

Le jeu des chats est à l'origine un atelier du rallye mathématique maternelle (Charotte & Emprin, 2009).

Les élèves sont par groupe de quatre. Ils ont chacune une feuille consigne. Il leur est indiqué qu'ils sont le chat encadré (surtout ne pas dire du milieu). (voir figure 4)

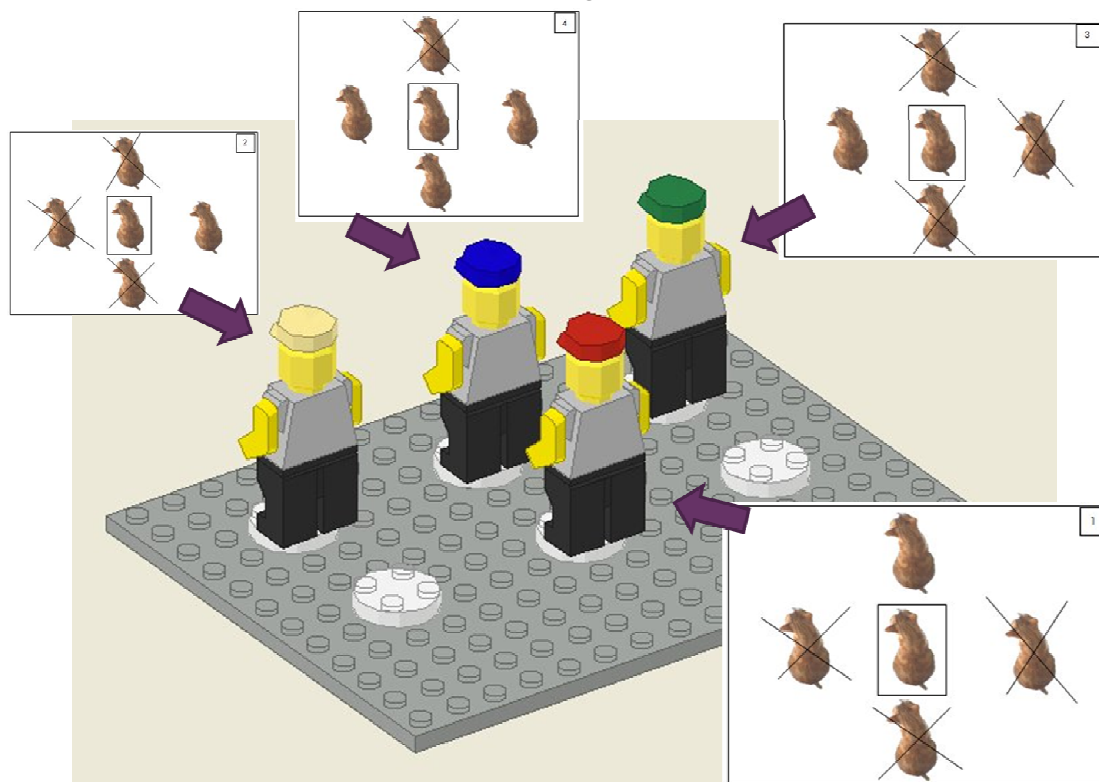


Figure 4 : chaque « bonhomme » représente un élève et sa fiche consigne.⁴

Les élèves doivent se placer dans le dispositif formé par six cerceaux tout en respectant les contraintes de leur fiche consigne. Les élèves doivent à la fois découvrir le sens du codage (un chat rayé en haut de la fiche signifie qu'il ne doit pas y avoir d'élève devant lui et inversement un chat à gauche de la fiche indique qu'il doit y avoir un autre élève à sa gauche). On précise bien à tous les élèves que tout le monde doit regarder dans la même direction « tout le monde regarde vers le tableau ».

Nous relatons une expérience en grande section de maternelle. Les élèves entrent dans le dispositif, échantent : « il me faut personne, ici » « je voudrais bien aller là »...

Il est possible, une fois que les élèves se sont rendus compte de la tâche, de les faire ressortir du dispositif et de les faire revenir un par un. Un élève arrive dans les cerceaux, il se met en première ligne (devant). L'enseignante demande alors : « que dit ta consigne ? », l'élève répond : « il me faut un chat devant ». En disant cela, il marque un temps de pause puis recule en deuxième ligne. Il s'agit pour nous d'une déduction spatiale (j'ai quelqu'un devant moi donc je ne suis pas en première ligne) qui constitue une expérience spatiale difficilement analysable en termes de concept mathématique mais déterminante pour construire les relations dans l'espace.

Par ailleurs, les élèves développent un vocabulaire spécifique qui commence par « pas là » en montrant la position à des formalisations du type « à ma gauche » « devant moi » qui indiquent des positions relatives à l'observateur. A un moment, un élève dit : « moi, j'ai besoin de quelqu'un devant moi et toi tu as besoin de quelqu'un derrière toi alors moi je suis le quelqu'un que toi tu as besoin derrière ». On trouve dans cet échange une expérience spatiale de décentration et d'adoption du point de vue de l'autre.

⁴ Réalisé avec le logiciel blockcad www.blockcad.net (freeware, en fait lego-ware : le téléchargement et l'usage sont gratuits, si vous aimez le logiciel, l'auteur vous invite à lui envoyer une pièce de légo© par la poste)

Pour les élèves observés, on identifie bien des apprentissages, mais leur nature est difficile à caractériser et à mettre en perspective avec les concepts à enseigner. Cela pose donc des problèmes le problème de la transmission de ces dispositifs. Comment argumenter, en formation, l'importance de mettre en œuvre ce type de situations ? L'appropriation des ressources produite est un point important de nos recherches (Douaire, 2010) ce qui amène à nous interroger sur les outils théoriques disponibles pour la formation des enseignants.

III. EN FORMATION, QUELS SONT LES OUTILS THÉORIQUES POUR ANALYSER LES SITUATIONS DE CLASSE, POUR CONSTRUIRE DES ACTIVITÉS POUR LA CLASSE ?

Depuis 2010, pour être enseignant en France, les étudiants doivent obtenir un Master. Ce diplôme fait apparaître clairement un adossement à la recherche. Se pose donc la question des outils théoriques dont nous disposons pour appuyer nos enseignements et nos formations. Si en ce qui concerne le nombre un corpus de savoirs didactiques tant méthodologiques que théoriques importants existent depuis les années 1980 en ce qui concerne la géométrie il n'en est pas de même (Emprin, 2012). Des précurseurs (Berthelot & Salin, 1992) ou (Houdement & Kuzniak, 2006) ont produit des résultats importants mais qui restent relativement isolés. Les chercheurs intéressés par les problématiques de relation à l'espace peuvent également s'appuyer sur des travaux de psychologie (Lurçat, 1976), (Piaget & Inhelder, 1947), (Duval, 1996) mais qui sont, comme vous pouvez le constater, relativement anciens.

Par ailleurs, les outils théoriques de la didactique des mathématiques tels que la TSD (Brousseau, 1998), la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990) ou la TAD (Chevallard, 1999) ne nous permettent pas d'analyser toutes les situations qui sont menées sur l'espace, notamment en cycles 1 et 2. Les situations de construction d'expérience semblent trop faibles d'un point de vue de la didactique des mathématiques pour être complètement capturées par elle.

Pour commencer, nous revenons sur le repérage dans l'espace qui est un domaine caractéristique pour illustrer le manque de savoirs didactiques et la difficulté à relier savoirs scolaires et concepts mathématiques.

1. Quelques savoirs théoriques issus des expérimentations sur le repérage

En cycle 2, le travail sur le plan, notamment le plan de la classe fait partie des apprentissages géométriques liés au repérage, mais quels sont les concepts mathématiques sous jacents ? Et pourquoi l'enseigner ?

Il n'est pas possible de répondre à cette dernière question par un enjeu social : parce que cela sera utile dans la vie : outre l'évolution des technologies qui réduisent l'utilité du plan, il n'y a rien de comparable entre le handicap social engendré par des difficultés dans le domaine de la lecture et du calcul et la difficulté à lire un plan. Il n'est pas non plus possible d'argumenter par les besoins scolaires ultérieurs : on ne travaille pas sur le repérage en maternelle pour préparer le repérage cartésien au collège. Notre parti pris a donc été de donner du sens à l'enseignement du repérage comme lieu de la construction d'attitudes et de connaissances liées à l'espace sensible c'est-à-dire de lui donner une justification interne. Par ailleurs, nous avons souhaité nous centrer sur les sens des concepts manipulés. Par exemple pour le « concept » de plan, nous avons choisi de mettre en place des situations rendant nécessaire son utilisation et donc lui donnant du sens.

1.1 Donner du sens au « concept » de plan

Une de ces situations consiste à jouer, pour le même objet : une maison, sur la dialectique entre un espace 3D immersif (où l'élève se déplace à la première personne), une maquette de maison (en carton) et l'espace de la feuille de papier. Cette maison est structurée autour un couloir en L dont toutes les portes sont fermées (figure 5). Cette situation est menée en fin de CP ou en CE1. Dans un premier temps, les élèves se déplacent dans la maison de façon libre et découvrent les différentes pièces. On leur

communiquent alors l'enjeu de la situation : dans la deuxième phase du jeu l'ordinateur affichera une photo d'une pièce de la maison et l'élève devra aller ouvrir la porte de celle-ci du premier coup.

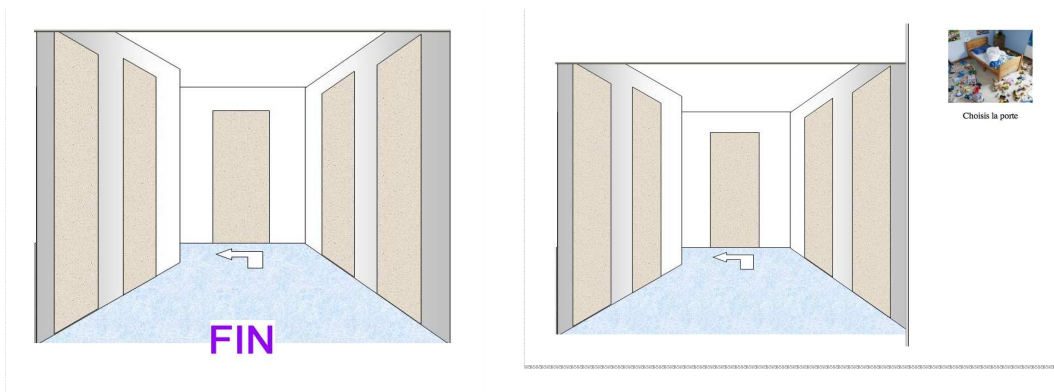


Figure 5 : vue de la maison en 3D / vue de la maison avec interrogation sur la pièce à trouver

Il y a principalement deux stratégies gagnantes : faire un plan en L et mettre le nom des pièces (figure 6) ou un symbole représentant la pièce et prendre en note de façon linéaire l'enchaînement des pièces par exemple en commençant par le mur de gauche du couloir et en suivant ce mur jusqu'à revenir au point de départ (figure 6). Le dessin en perspective n'apparaît pas chez les élèves car il est trop coûteux en temps et qu'ils n'ont pas les outils conceptuels pour le mettre en œuvre. Chacune de ces stratégies peut être déclinée en séparant le plan ou la suite des pièces en deux, en prenant les deux parties du L c'est le cas dans la figure 6. Le dessin du plan est plus efficace car cela n'oblige pas l'élève à recommencer à pointer l'enchaînement des pièces du début. Sans disqualifier totalement la procédure qui revient à une linéarisation de l'espace ou même le dessin en perspective cette situation donne néanmoins du sens au plan.

L'analyse du savoir en jeu dans les situations nous permet de proposer une typologie des procédures

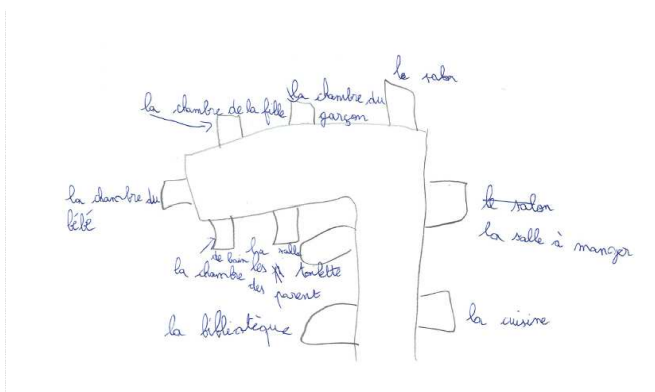


Figure 6 : production d'élève : une ébauche de plan score 10 réussites sur 10 pièces

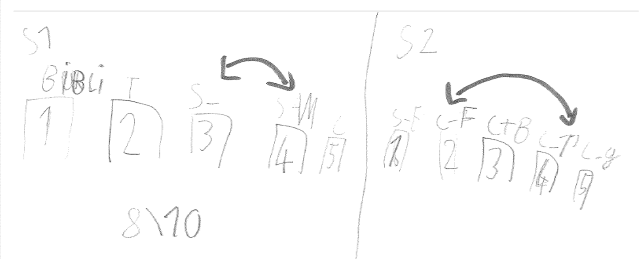


Figure 7 : production d'élève : la succession des pièces par zone de la maison. Score 8/10

des élèves pour résoudre les problèmes de repérage.

1.2 Un essai de typologie des procédures

Pour comprendre les enjeux de cet apprentissage, il est important de comprendre comment, par quelles procédures, les problèmes de repérage peuvent être résolus. Nous avons choisi de classer ces procédures en deux grandes catégories en fonction de la place de l'observateur.

- Procédure dépendante de l'observateur
 - o Centrée sur l'observateur (devant moi, à ma gauche)
 - o Centrée sur un objet non orienté (derrière l'arbre ne peut être « compris » que relativement à l'observateur qui voit l'objet derrière l'arbre).
- Procédure indépendante de l'observateur

- o Relative à un objet orienté : « devant la mairie » dans ce cas quel que soit la place de l'observateur la communication est la même mais le mode de repérage reste relatif.
- o Absolue, fixée par un système de repère. Ce sont bien des systèmes dans la mesure où ils permettent de repérer n'importe quel point de l'espace en utilisant la même méthode. Alors que dire : « le ballon est sous le banc rouge » ne permet de repérer que les objets qui sont sous, sur ou à côté d'un objet fixe. Ce système de repère peut être de nature différente
 - Système de repérage géométrique : à 17 mètres de l'arbre à 23 mètres du pont, du côté de la rivière.
 - Système de repérage cartésien : Système à une dimension : sur la ligne 47 direction Kremlin Bicêtre c'est la troisième station après Monge. Dans ce cas, on considère la trajectoire courbe de la ligne métro comme linéarisée (comme elle est d'ailleurs affichée dans les rames, avec la succession des stations)
 - Système à deux dimensions et plus : repère cartésien. A 3 dimensions longitude, latitude, altitude. A 4 dimensions en incluant le temps j'étais à 17h00 aux coordonnées (x,y,z)
 - Système de repérage par nœuds (utilisation de graphes) par exemple sur une carte de ville à l'intersection de la rue Sébastopol et du faubourg Saint-Denis.

Bien évidemment, tous ces systèmes ne sont pas des enjeux de l'école élémentaire.

Cette typologie nous permet d'analyser les procédures visées par rapport aux procédures possibles, à mieux comprendre les procédures des élèves et à mieux appréhender les capacités des élèves. Cette analyse est à mettre en relation avec les types de problème posés : retrouver une position dans un espace ou construire un système de repérage,

1.3 Quelques éléments sur les capacités des élèves

En plus de la viabilité des situations qui découle de la méthodologie liée à l'ingénierie, nous obtenons des informations sur les capacités des élèves à un « moment » donné de l'apprentissage. Des enjeux d'enseignement découlent de ces analyses :

En Moyenne Section, les élèves commencent à utiliser des repérages indépendants de l'observateur (regarde vers l'aquarium), en grande section et CP les élèves font des déductions spatiales et se décentrent (jeu des chats), se mettent à la place d'un autre mentalement. En CE1 ils opèrent des changements de points de vue passent du plan à différentes vues. En CE2 ils accèdent à la nécessité de donner un repère fixe pour communiquer des positions dans un système de repérage (position de cases dans un quadrillage, objets dans un plan qu'il faut orienter). En CM on passe de la case au nœud de quadrillage puis au repérage dans un espace continu (sans quadrillage).

2. Réflexion sur les situations en géométrie

2.1 La nature des situations

En termes de Théorie des Situations (Brousseau, 1998), nous utilisons principalement des situations de communication et relativement peu de situations d'action. Plus l'âge des élèves est faible, plus ce constat est vérifié.

En TSD, l'enseignant construit un milieu résistant ; il dévolue le problème à l'élève, le rend donc responsable de sa tâche en lui communiquant les critères de réussite. Le milieu est construit de telle sorte qu'il existe une procédure optimale qui est en fait l'apprentissage visé. Dans une situation d'action la résistance du milieu est réalisée par l'action et la rétroaction du milieu est matérielle. La situation rectangle à terminer est une situation d'action : l'élève doit terminer un rectangle dont il n'a qu'une partie (figure 8). La partie A reste au tableau, la partie B est donnée à l'élève. Il doit donc faire le trait manquant. Pour savoir s'il a réussi, il emmène la partie B au tableau, la recolle à la partie A et regarde si son trait termine bien le rectangle (donc rejoint le trait d'origine). Dans cette situation, s'il y a bien rétroaction matérielle, la faiblesse de la situation vient du fait que ce soit un problème spatial qui est donc résolu par des procédures spatiales. Les élèves peuvent réussir la tâche en utilisant l'équerre, un

autre instrument qui permet de faire des angles droits comme la réquerre ou la téquerre, la règle avec double graduation. Toutes des procédures sont valides et permettent de relier l'angle droit avec le coin de rectangle. Mais des élèves qui utilisent la bonne procédure peuvent ne pas avoir une production valide à cause d'imprécisions de tracé ou avoir une production valide par un tracé au jugé. On retrouve la même problématique en cycle 2 avec le déménagement de Marianne décrit en 1.1, la rétroaction matérielle se faisant par l'ouverture de la porte. Le milieu construit est donc plus faible que dans les situations sur le numérique. Cette faiblesse n'est pas à imputer à la situation qui n'est pas à remettre en cause mais au fait qu'en géométrie à l'école, on est obligé de poser des problèmes spatiaux alors que dans le numérique, on peut travailler beaucoup plus tôt sur des problèmes théoriques.

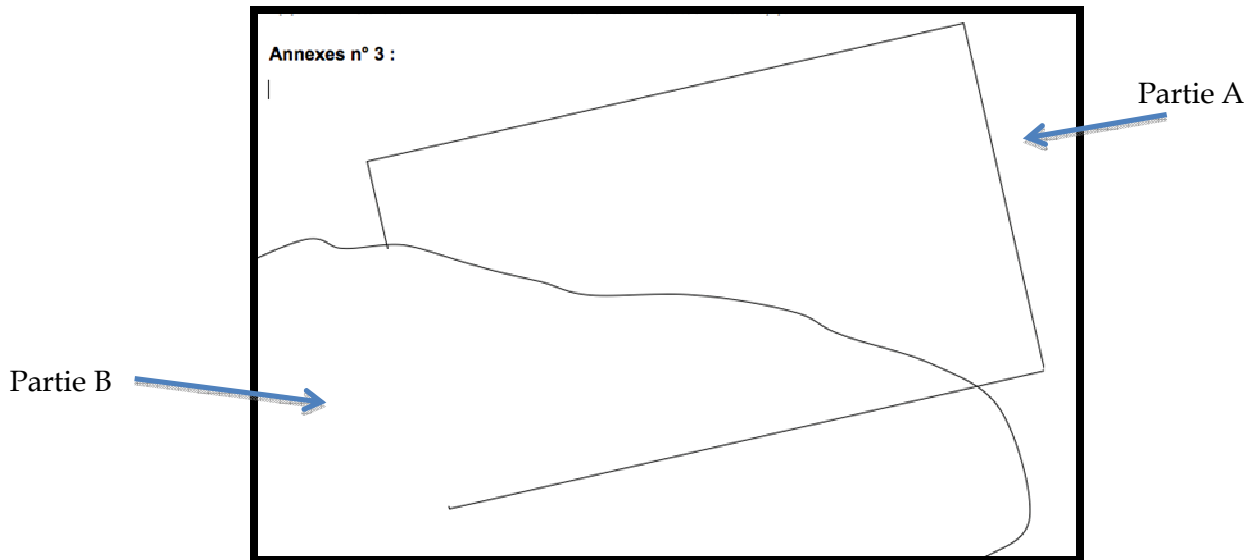


Figure 8 : rectangle à terminer

En géométrie nous trouvons plus de situations de communication c'est-à-dire de situations où l'obstacle qui permet l'apprentissage réside dans la communication entre un émetteur et un récepteur. Par exemple dans les situations repérage (ERMEL, 2006) un élève possède une grille rectangulaire sur laquelle sont marqués plusieurs nœuds. Il doit communiquer à un élève B l'emplacement de ces nœuds. La validation se fait par confrontation des deux feuilles : celle de l'émetteur et celle du récepteur. L'apprentissage quant à lui vient des échecs dans la communication qui montrent aux élèves qu'il est nécessaire d'indiquer une origine et une orientation pour réussir à communiquer une position. En effet les élèves commencent à écrire des messages du type : « il est sur la troisième ligne et sur la 4^{ème} ligne ». Ces messages sont insuffisants pour réussir à coup sûr. Le nombre important de nœuds à communiquer incite les élèves à construire un système de coordonnées qui une fois établi sera économique pour communiquer tous les points.

Au delà de ces deux types de situations nous avons rencontré la nécessité de produire des situations comme la situation des chats pour lesquelles il est difficile d'identifier le savoir en jeu. Ce sont bien des problèmes, elles résistent aux élèves mais il n'est pas possible de les définir en termes de TDS. Ces situations nous sont apparues comme importantes car elles permettent de construire des expériences spatiales (peut-être des connaissances en acte) qui sont nécessaires comme les empreintes que laissent un objet 3D sur un plan, les vues des objets 3D, les relations spatiales comme dans les chats, les superpositions et les encastrement de formes planes (représentant des objets 2D dans l'espace)... Nous avons donc fait le choix de définir des problèmes et d'organiser leur enseignement dans nos ingénieries didactiques.

2.2 La place du langage

Le premier enjeu est d'amener les enseignants à dépasser les « leçons de vocabulaire » c'est-à-dire d'enseigner les noms des formes géométriques comme on a pu enseigner les langues étrangères à une certaine époque, en montrant une image et en disant « this is a circle, repeat after me ». Alors que, de

notre expérience, les enseignants ont tendance à s'attacher au nom des objets mathématiques, l'enjeu est de faire passer le concept mathématique avant son nom. Le nom arrivant comme un outil permettant de désigner le concept à coup sûr. Les situations de communications ont donc un rôle important. Par exemple en maternelle nous faisons toucher un objet dans un sac à un élève (en aveugle donc), il doit ensuite le mimer pour que les autres élèves de la classe puissent le retrouver parmi un lot. Le lot est choisi de tel sorte que l'élève soit obligé de miner des propriétés de l'objet, par exemple il y a un cube, un pavé droit, une pyramide à base carrée, une pyramide à base pentagonale, un prisme droit à base pentagonale (avec des faces carrées). Il est donc obligé de faire un mime montrant les proportions des faces pour que les élèves repèrent si c'est un cube ou un pavé par exemple. Dans une autre phase du jeu le mime est remplacé par une description verbale. Quand un élève dit c'est carré, cela ne suffit pas pour trouver l'objet. On travaille ainsi le concept de carré par ses propriétés et par opposition à ce qui n'est pas carré. De plus le carré n'est jamais représenté et n'est donc pas associé à une figure prototypique.

L'enjeu des situations qui utilisent le langage est d'amener les élèves à passer du spécifique, le langage lié à une situation, au générique, quand le mot est attaché au concept indépendamment de la situation. Ainsi, nous mettons en place des situations qui abordent le concept sous différents aspects (le concept objet de l'apprentissage) et différents contextes et nous proposons des situations de synthèse qui permettent de mettre le concept au service de la résolution du problème (le concept outil). C'est le cas de la situation « tous les quadrilatères » décrite en II.1 qui permet de mobiliser les concepts de parallèle, perpendiculaire entre autre.

IV. CONCLUSION

Notre contribution à cette table ronde vise à apporter un regard complémentaire de ceux qui ont été posé sur l'enseignement de la géométrie par nos collègues. En tant que représentants des ingénieries didactiques, nous avons souhaité proposer des exemples concrets issus de ces recherches. Nous espérons qu'ils vous seront utiles, dans vos pratiques et en formation car la transmission des résultats de recherche nous apparaît comme un enjeu important pour la didactique des mathématiques.

V. BIBLIOGRAPHIE (TITRE 1)

- ARSAC G. GERMAIN G. MANTE M. PICHOD D. (1984) les pratiques du problème ouvert, IREM de Lyon, Villeurbanne
- ARSAC G. MANTE M. (2005) les pratiques du problème ouvert, Scéren.
- ARTIGUE M. (2002) Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche en didactique aujourd'hui, *Revue Internationale des Sciences de l'éducation*, n°8, 59-72
- BERTHELOT R., SALIN M.-H. (1992) L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire, Thèse de doctorat, Bordeaux.
- BROUSSEAU G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD Y. (1982) *Sur l'ingénierie didactique*. Preprint. IREM d'Aix Marseille cité par Artigue (2002)
- CHEVALLARD Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2).
- DOUADY R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde, Repères IREM n° 15, Topiques Éditions
- DOUAIRE J. (2010) Équipe ERMEL, Journées mathématiques de l'INRP 2010 : Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources ? 9 et 10 juin 2010 à l'INRP, Lyon consulté à <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/journees-maths/jmj10/theme-1/ERMEL.pdf> Dernière modification 19/01/2011
- DOUAIRE J., EMPRIN F. (2011) Apprentissages géométriques au cycle 2 et formation des enseignants, *In XXXVIIIème colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques : Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants*, Dijon, les 22 - 23 - 24 juin 2011

DUVAL R. (1996). – Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 16-3, p. 349-380.

EMPRIN F. (2012) Éléments d'observation et d'analyse sur l'enseignement à l'école maternelle. Educmath, en ligne <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale--emprin>

ERMEL (2006), Apprentissages géométriques et résolution de problèmes (Hatier ed.)

HOUEMENT C., KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement des la géométrie, ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 175 – 193.

HUGON Marie.-Anne., SEIBEL Claude. (1988) Recherches impliquées, Recherches-action : le cas de l'éducation, Belgique, De Boeck Université. Définition mise au point au cours du colloque "Recherches impliquées, recherches-action : le cas de l'éducation", Paris, INRP, 22, 23, 24 octobre 1986.

LE BOTERF G. (1999) Les défis posés à l'ingénierie de formation et à la production des expertises collectives. Quelles évolutions prendre en compte ? Quelles conséquences pratiques ?, *Journées d'étude " Ingénierie des dispositifs de formation à l'international "* - 24-25 novembre 1999 – Montpellier

LURÇAT L. (1976) L'enfant et l'espace : le rôle du corps. Paris : PUF.

PARZYSZ B. (1988) Knowing vs Seeing : Problems of the plane Representation of Space Geometry; Educational Studies in Mathematics, 19; p. 79 – 92

PIAGET J., & INHELDER, B. (1947). La représentation de l'espace chez l'enfant. Paris : PUF

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.10 n°2-3, pp.133-170.

QUELQUES REMARQUES AUTOUR DES FINALITÉS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Marie-Hélène SALIN

MCF honoraire IUFM Aquitaine

mh.salin@sfr.fr

Résumé

La première partie de ce texte est consacrée à un rappel sur l'enseignement de la géométrie en primaire, au début des travaux de recherche en didactique des mathématiques le concernant.

Le corps du texte est constitué de quelques remarques relatives à l'évolution de cet enseignement, manifestant un recul de la finalité : « maîtrise de l'espace » et d'un rappel de l'importance de cette finalité que ce soit pour les besoins généraux des élèves du primaire, pour les besoins particuliers des jeunes qui se dirigeront vers l'enseignement professionnel, ou pour la compréhension en profondeur de la démarche géométrique proposée au collège. Je plaide ensuite pour un retour explicite de cette finalité dans les programmes de mathématiques du primaire et pour un approfondissement, tant par les chercheurs que par les formateurs, de nos connaissances sur la complexité des savoirs visés dans ce domaine, condition nécessaire mais évidemment pas suffisante pour une amélioration de l'enseignement de l'espace et de la géométrie dans les classes.

I. INTRODUCTION

Quand Sylvie Coppé m'a proposé d'intervenir dans cette conférence à quatre, j'ai d'abord eu une réaction négative : je ne suis plus formatrice depuis dix ans, chercheuse depuis cinq, que pourrais-je dire d'intéressant et de nouveau pour les collègues qui ont les mains dans le cambouis et dont je sais que la tâche a été de plus en plus difficile ces dernières années ?

Puis, j'ai pensé qu'il était peut-être utile pour un formateur, d'entendre un point de vue rétrospectif, appuyé sur des indications chronologiques (je n'ose pas dire historiques) sur l'évolution des questions posées par l'enseignement d'un domaine dont il a la charge en formation, surtout quand cet enseignement pose autant de problèmes. J'ai accepté d'aborder certaines des questions proposées par le comité scientifique, en essayant de cerner les évolutions que je perçois de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. Certaines sont positives, je ne cacherai pas que d'autres m'inquiètent.

II. LE CONTEXTE DE L'ELABORATION DE NOTRE⁵ THÈSE

Mon collègue René Berthelot et moi-même avons commencé le travail sur l'enseignement de l'espace et de la géométrie en 1984. Je crois que nous étions les premiers à nous lancer dans une thèse de didactique sur ce sujet, tout au moins dirigée en priorité vers l'enseignement primaire. Il s'agissait de développer et de mettre à l'épreuve des faits dans le cadre du COREM⁶, les idées de Guy Brousseau exprimées dans son texte du séminaire de Grenoble « Études de questions d'enseignement, un exemple : la géométrie ». Il y décrivait « la situation fondamentale pour la géométrie élémentaire en tant que modèle de l'espace » et « la situation fondamentale de l'étude de la géométrie », en insistant sur leur différence et il proposait une méthodologie d'étude.

⁵ Il ne s'agit pas d'un « pluriel de majesté » mais du fait que c'était une thèse collective

⁶ Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, qui a été le creuset pendant plus de 25 ans de l'élaboration de la Théorie des Situations Didactiques

A l'époque, il y avait très peu de géométrie dans les classes de l'élémentaire, malgré un programme et des instructions très riches datant de 78 à 80, (c'était le contrecoup des « maths modernes »), et on avait récemment introduit la « structuration de l'espace » à l'école maternelle et au CP, sous l'influence des travaux piagétien. Par contre, l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée faisait l'objet de débats passionnés, dans lesquels les IREM avaient une part importante (Perrin & Salin 2009). Avant le démarrage des recherches universitaires concernant le primaire, dès la fin des années 70, on trouvait dans les aides pédagogiques publiés par la COPIRELEM ainsi que dans les ERMEL CE et CM, et dans Grand N, des descriptions d'activités géométriques riches et nouvelles par rapport aux enseignements traditionnels, expérimentées dans des classes, dont les Instructions Officielles de 80 s'étaient inspirées. Toutefois il n'y avait pas de réflexion générale sur les finalités de l'enseignement de la géométrie ni sur les savoirs à enseigner.

Dans Grand N n°53 (Berthelot & Salin 1993), nous résumions ainsi la situation : nous rappelions qu'à l'école primaire, l'enseignement de la géométrie :

« renvoyait à deux champs de connaissances : d'une part celui des connaissances nécessaires à l'enfant pour contrôler ses rapports usuels à l'espace, champ désigné à l'époque par "structuration de l'espace", d'autre part celui de la géométrie proprement dite. Mais [que] la distinction entre ces deux champs n'était pas très claire »,

et nous énumérions quelques-unes des questions que les enseignants se posaient :

« Quels sont ses objectifs? En quoi les activités géométriques concourent-elles, comme le disent les instructions "à la construction de l'espace chez l'enfant"?

Quelles connaissances doit-on faire apprendre? Faut-il des définitions? Lesquelles? Les différentes notions sont-elles liées? Y-a-t-il une progression à respecter?

Quelles sont les attentes des enseignants du secondaire et quels sont les besoins réels de leurs élèves? »

Les réponses des formateurs étaient peu étayées et la géométrie était un domaine très souvent négligé.

Le titre de la thèse : « L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire » semble renvoyer à l'enseignement mais c'est plutôt à l'apprentissage de l'espace et de la géométrie que nous nous sommes consacrés. En fait nous avons traité les deux domaines mais sans les considérer comme des cadres de recherches profondément différents. Nous avons interrogé l'enseignement dans son aspect institutionnel (les programmes), dans ses formes de réalisation les plus courantes en nous appuyant sur l'analyse des manuels (l'ostension déguisée), mais l'essentiel de notre travail a porté sur l'apprentissage. Les situations d'enseignement expérimentées rentrent dans la catégorie « épistémologie expérimentale », on a regardé dans quelle mesure les élèves étaient en mesure d'entrer dans les apprentissages (l'orientation du plan, les angles), mais nous ne nous sommes pas questionnés, à cette étape de notre travail, sur les conditions à réunir pour rendre compatibles nos propositions d'enseignement et les contraintes scolaires ordinaires. Nous n'avons pas non plus travaillé sur la formation des professeurs d'école. Je n'aborde donc pas ces deux thèmes dans ce court exposé, ils sont pourtant cruciaux.

III. ET MAINTENANT ?

1. Quelques constats

Vingt ans après, alors qu'un nombre conséquent de recherches en didactique ont été développées sur cette période, l'enseignement de la géométrie à l'école primaire s'est-il amélioré et les enseignants maîtrisent-ils mieux le pourquoi et le comment de cet enseignement ? Je ne sais pas si quelqu'un peut répondre à cette question, en tout cas, elle dépasse largement mes compétences et je voudrais seulement dans ces vingt minutes dégager quelques interrogations sur les évolutions que j'ai pu percevoir en suivant les recherches menées dans ce domaine et par l'examen des programmes et de quelques manuels. Je laisserai complètement de côté tous les travaux menés sur l'apport des environnements informatiques.

1.1 Des avancées certaines

Il est facile de constater que la géométrie a pris une place dans les manuels qu'elle n'avait pas autrefois. Et que leurs auteurs (même les non didacticiens) manifestent une culture didactique inconnue il y a 20 ans.

D'autre part, les enseignants disposent de ressources relativement nombreuses, variées, appuyées sur des résultats de recherches : c'est le cas de certaines collections de manuels et du ERMEL cycle 3. La richesse de ses propositions, réflexions et observations en fait un document dont les fonctions peuvent être multiples, en particulier pour la formation.. Mais qu'en est-il tous les jours dans les classes ?

1.2 Des inquiétudes

Des recherches déjà anciennes (Vergnes D. 2000) avaient montré à quel point l'appropriation par les enseignants des propositions de situations d'enseignement issues de la formation était difficile.

Un poste actuel d'observation est fourni par les sites web d'enseignants bien intentionnés qui désirent partager leurs préparations avec leurs collègues

En voici un exemple assez représentatif : (http://jlgrenar.free.fr/fichiers/math/Maths_C3.pdf). Il s'agit de 64 leçons couvrant l'ensemble du programme du cycle 3, dont 16 correspondent à la géométrie (Voir les annexes 1 à 3). Sous le mot « leçons », il faut sans doute comprendre « bilans » pour ce qui concerne le numérique, par contre, pour la géométrie, l'ordre des fiches et leur contenu correspondent bien au modèle traditionnel : « du simple (apparemment !) au compliqué ». Les remarques faites sur le forum⁷ (une centaine, toutes de félicitations), doivent nous interroger. Par exemple :

« Merci beaucoup pour ce travail remarquable. Je débute dans le cycle 3 et je cherchais des leçons très détaillées et toutes prêtes. Pour moi c'est un petit miracle » ou : « Mes névroses sur la clarté, la simplicité des leçons, leur précision sont comblées avec votre travail ».

Ces remarques manifestent le besoin de références à un savoir « simple » et bien cadré, que ne fournissent pas les programmes et instructions : une liste de définitions associées à des figures prototypiques et à des techniques de construction prédéfinies. Pour moi, la persistance du rapport à cette conception de la géométrie⁸, manifestée par ces enseignants, renvoie d'abord à la question des finalités de cet enseignement et de leur appropriation par les professeurs. Pour l'aborder, je dois revenir sur un sujet au cœur de nos recherches : les rapports entre espace et géométrie

2. Réflexions sur les finalités

2.1 Rapports entre espace et géométrie

Nous avons essayé de faire un effort de clarification en prenant le point de vue suivant :

* différencier les types de connaissances (spatiales / géométriques) par les types de situations et de problèmes dans lesquelles elles sont mobilisées.

* et prendre le terme « géométrie » au sens strict, c'est-à-dire renvoyant à une branche des mathématiques, possédant ses critères de validation spécifiques.

Selon ce point de vue, les problèmes spatiaux et les problèmes géométriques sont de nature très différente même si les connaissances proprement géométriques sont nécessaires pour résoudre des problèmes spatiaux sitôt qu'ils deviennent un peu complexes.

A l'école primaire, ce n'est pas la géométrie en tant que théorie mathématique qui est enseignée, ce sont des connaissances faisant partie du corpus du savoir géométrique mais mises en jeu dans la résolution de certains problèmes posés aux élèves dans l'espace sensible : décrire, construire, représenter, etc. Nous avons proposé le terme : « spatio-géométrie » pour désigner ces connaissances et rappeler ainsi

⁷ <http://jlgrenar.free.fr/spip/spip.php?article45>

⁸ On peut se demander si ce ne serait pas « ce qui reste » de la géométrie du collège qui ferait obstacle à une approche plus « spatiale » de la géométrie.

que la géométrie pour les élèves de l'école primaire est issue de l'expérience spatiale, et nous avons proposé :

« d'introduire dès l'école primaire, les savoirs géométriques de base comme outils pour résoudre effectivement des problèmes spatiaux »,

c'est-à-dire comme outils dans une problématique de modélisation.

Mais à côté de ces connaissances, bien identifiées, les problèmes spatiaux font intervenir des connaissances moins bien définies, comme celles nécessaires à l'orientation d'un plan pour se déplacer, comme la notion de point de vue, etc., qui ne sont pas considérées traditionnellement comme relevant de la géométrie, tout au moins à un niveau élémentaire.

A la suite d'études de psychologues ou de didacticiens montrant l'importance des déficits spatiaux chez les élèves et leurs effets néfastes pour la formation professionnelle, nous avons proposé

« d'introduire explicitement dans l'enseignement des mathématiques de la scolarité obligatoire, des objectifs relatifs à certaines connaissances spatiales utiles, en particulier pour le macro-espace et pour la maîtrise des représentations matérielles des objets. »

2.2 L'impact des programmes

Les programmes 2002-2007

C'est ce qu'avait réalisé le programme de 2002, avec l'intitulé « espace et géométrie » valable pour le cycle 2 et le cycle 3 et l'introduction explicite au cycle 3 de la référence aux problèmes spatiaux, comme finalités de l'enseignement de ce domaine :

« Les activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais des connaissances fonctionnelles, utiles pour résoudre des problèmes dans l'espace ordinaire, dans celui de la feuille de papier ou sur l'écran d'ordinateur, en particulier des problèmes de comparaison, de reproduction, de construction, de description, de représentation d'objets géométriques ou de configurations spatiales »

Ainsi sont apparus des intitulés comme « utiliser un plan ou une carte pour situer un objet, anticiper ou réaliser un déplacement, évaluer une distance »

Mon travail avec un enseignant de SEGPA ces dernières années n'a fait que renforcer ma conviction de la nécessité de ce travail sur l'espace et ses représentations⁹

Le programme de 2008

Or que s'est-il passé en 2008 ? L'instance mathématicienne qui a revu les programmes a supprimé la référence à l'espace, tant dans l'intitulé du domaine que dans la présentation de ses finalités:

« L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance des objets et de leurs propriétés essentiellement fondée sur la perception à une étude davantage fondée sur le recours à des instruments de tracé et de mesure »

Non seulement les connaissances spatiales ont disparu¹⁰ mais aussi la référence à la géométrie comme moyen de résoudre des problèmes dans divers types d'espace.

Les rédacteurs du programme se sont comportés comme le décrit Y. Chevallard (1989)

« Tout se passe comme si tout savoir enseigné cherchait à s'autoriser d'un savoir savant correspondant »

A leur décharge, les auteurs de ce programme ne sont pas les premiers à agir ainsi : l'étude des programmes et des manuels depuis 1923 nous avait amenés à conclure que les connaissances spatiales n'ont jamais été prises en compte de manière stable (par exemple, dans les Instructions officielles de

⁹ voir F Emprin et C Rajain 2004)

¹⁰ certaines de ces connaissances sont mentionnées dans d'autres champs disciplinaires mais à titre d'outils pour des apprentissages dont les objectifs relèvent de ces champs.

1980, il y avait tout un développement sur les changements de point de vue, qui a totalement disparu en 85) et que par contre, les connaissances spatio-géométriques, elles, ont une existence stable. Mais la justification de leur présence dans l'enseignement primaire a varié : autrefois, elles étaient nécessaires pour les pratiques de mesurage (donc dans une perspective pré-professionnelle), depuis 1970 ces connaissances font référence au « savoir savant », que représente la géométrie du collège. Par exemple, la symétrie orthogonale a été introduite au même moment, en 1985, à l'école primaire et au collège ; en 2008, apparaissent dans les programmes ou dans les « progressions des apprentissages » pour le CM2 des notions ou des techniques réservées jusque-là à la classe de sixième. Ainsi, même pour l'école primaire, le choix des savoirs à enseigner est moins la conséquence d'une analyse réaliste des besoins des élèves que des contraintes institutionnelles.

2.3 Deux exemples d'emprunts précoces au « savoir savant »

Les dessins à main levée

L'idée d'utiliser des dessins à main levée est née des difficultés rencontrées au collège pour faire entrer les élèves dans la démarche géométrique : fournir les données du problème à l'aide d'une figure à main levée codée les empêche de lire les propriétés de la figure sur le dessin réalisé aux instruments et devrait les obliger à raisonner à partir des indications données par cette figure. (S. Coppé et J.L. Dorier (2005) ont montré que ce n'est pas forcément le cas). Cette utilisation a d'abord été proposée en 4^{ème}, elle est peu à peu descendue en 5^{ème} puis en 6^{ème} et maintenant, on la trouve, sous une forme atténuée, dans des manuels de CM1. Jusqu'où ira-t-on ? Bien sûr, les élèves de CM1 sont capables d'utiliser spontanément des schémas dans des situations de communication spatiales, de se mettre d'accord sur des codages pour remédier à des incompréhensions (des ingénieries l'attestent¹¹) mais quel sens cela a-t-il de présenter schémas et codages comme des objets isolés (c'est à dire sans fonction dans la situation), permettant peut-être d'éviter des difficultés qui se situeront dans un contexte bien différent ? Comment ne pas s'inquiéter en lisant, dans le document descriptif d'une animation pédagogique, à propos des buts de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire : « il s'agit de conduire les élèves à compléter leur vision pragmatique et instrumentée de la géométrie par une vision plus théorique dans laquelle les figures ne sont plus des objets matériels, mais des objets « virtuels » définis par leurs propriétés. Ils seront prêts pour la géométrie du collège. » (Dubois 2009). C'est l'objet même de l'enseignement de la géométrie au collège qui est ici anticipé (Salin 2006), sans qu'aucun résultat de recherche ne valide ce choix¹².

L'usage du mot « géométrie » à l'école maternelle

Je m'interroge aussi sur le fait suivant : à l'école maternelle, la « structuration de l'espace » a cédé la place à la géométrie. En 2000, Grand N a rassemblé sous un numéro spécial dont le titre était « Structuration de l'espace », tous les articles parus, qu'ils concernent le repérage de l'espace ou la reconnaissance des formes. On trouve encore cette dénomination dans les documents de certaines circonscriptions mais plus chez les éditeurs : tout est devenu « géométrie » ou « graphismes et mathématiques » comme chez Retz. Quelles conséquences aura ce glissement sur les contenus effectifs ?

2.4 Une évolution significative du vocabulaire ?

Enfin, (et là, je m'avance peut-être trop), il me semble que, même dans le monde de la formation des enseignants du premier degré, une conception de la géométrie proche de celle du collège a tendance à se substituer à la conception sous-jacente à la désignation « espace et géométrie ». Dans la présentation du

¹¹ le « dessin à main levée » est apparu dans les programmes de 2002, avec les précisions suivantes : « En fin de cycle, des tracés à main levée accompagnés de données codées (mesures, symboles d'égalité de segments, d'angles droits) **peuvent** être proposés par l'enseignant, en vue de faire construire une figure, à condition que les codes utilisés aient acquis une signification pour les élèves » (document d'application C3)

¹² Remarquez que si je suis réticente à l'introduction des schémas codés, cela ne pose pas de problème à l'enseignant du site que j'ai cité, qui trouve d'ailleurs une raison fonctionnelle au schéma (c'est le brouillon de la figure) voir annexe 3

thème du colloque, comme dans celle de cette conférence, seul le terme « géométrie » est utilisé et la référence au spatial n'est qu'implicite et ne concerne que l'école maternelle.

Faut-il comprendre que le colloque ne traite que de la « vraie » géométrie ou que le terme recouvre désormais les deux domaines ? La deuxième alternative n'est pas une fausse question. Il faudrait étudier sa pertinence et les conséquences qu'elle pourrait avoir. De toute façon, il me semble que la disparition d'une référence explicite à la maîtrise spatiale, montre la nécessité d'une réflexion plus importante sur les finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et sur la manière de les communiquer.

Sont-elles seulement, à l'école maternelle, de préparer l'enseignement de la géométrie à l'élémentaire, et à l'élémentaire de préparer celui du collège ? Non, bien sûr, plusieurs des interventions programmées dans le colloque en sont un contre-exemple.

3. Quelques suggestions

J'ai bien conscience que les deux pistes que je propose ne sont pas neuves et surtout pas suffisantes mais peut-être faut-il revenir quelquefois sur des considérations anciennes.

3.1 Plaider pour la réintroduction des connaissances spatiales dans les futurs programmes

Il me semble important de dire et redire que les concepts spatiaux et l'utilisation des concepts spatio-géométriques pour résoudre des problèmes dans le méso-espace ou le macro-espace, nécessaires à toute une catégorie de la population scolaire, ne s'acquièrent pas tout seuls (voir Salin 2007) et qu'il est nécessaire de poursuivre les recherches qui montrent que des enseignements bien pensés, plus facilement communicables aux enseignants que les prototypes de l'ingénierie didactique, sont efficaces et doivent concerner tous les enfants de l'école primaire. Les travaux d'A. Bessot et M. Eberhard à propos de l'enseignement professionnel montrent à quel point l'enseignement de la géométrie dans le cadre des mathématiques, à l'école primaire et au collège, ne fournit pas aux élèves de cet enseignement les outils dont ils ont besoin pour résoudre les problèmes spatiaux auxquels ils seront confrontés dans la vie professionnelle (Bessot 2009).

3.2 Approfondir nos connaissances sur la complexité des savoirs visés pour l'école primaire

Ne faudrait-il pas que nous, (formateurs et/ou chercheurs) soyons mieux capables d'identifier et de communiquer sur les difficultés de la maîtrise des connaissances spatiales utiles, et celles de la conceptualisation spatio-géométrique ? Cela permettrait peut-être d'éviter ces effets institutionnels, dont nous sommes quelquefois les propres agents. Car notre compétence en géométrie nous fait sous-estimer la complexité des savoirs enseignés.

C'est l'intrication entre spatial et géométrie qui explique en grande partie cette complexité. C'est parce que les connaissances nécessaires pour considérer les figures et les configurations spatiales, les traiter, mener un raisonnement géométrique sont à première vue, proches mais en fait différentes de celles acquises dans la résolution des problèmes spatiaux ordinaires auxquels nous sommes confrontés depuis l'enfance qu'entrer dans la géométrie est si difficile.

Je me réfère à deux sources complémentaires pour affirmer cela :

- A la suite de G. Brousseau, nous avons fait l'hypothèse que les connaissances spatiales dépendent du type d'interactions avec l'espace, qui ne sont pas les mêmes selon la taille de l'espace. Dans les interactions usuelles de manipulation des petits objets, très fréquentes et rencontrées très tôt par l'enfant, il se construirait une représentation micro-spatiale de l'espace dont les caractéristiques sont très différentes de celles de l'espace géométrique. Cette représentation micro-spatiale serait activée dans les activités géométriques « spatio-graphiques », ie sur support papier, les élèves assimilant les « figures » de la géométrie aux objets du micro-espace, dont les possibilités de traitement sont particulièrement pauvres. Cela pourrait expliquer par exemple leurs difficultés à concevoir des sous et des sur-figures. (Berthelot & Salin 1992)

- R Duval (2005) est beaucoup plus affirmatif et provoquant dans son article des Annales de didactique, sur les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie.

« La géométrie est un domaine de connaissance qui exige l'articulation cognitive de deux registres de représentation très différents : la visualisation de formes pour représenter l'espace et le langage pour en énoncer des propriétés et pour en déduire de nouvelles. Les difficultés d'apprentissage viennent d'abord de ce que ces deux registres sont utilisés d'une manière souvent contraire à leur fonctionnement cognitif normal en dehors des mathématiques. »

Je crois que sans un travail approfondi sur ce qu'est la géométrie, « à la fois en tant que science, en tant que pratique et en tant qu'objet d'enseignement » (Brousseau 2000), il est très difficile d'avoir conscience de ces différences de fonctionnement et des conséquences sur son enseignement.

IV. CONCLUSION : POURSUIVONS LES RECHERCHES¹³ !

Je n'ai abordé qu'un petit nombre des questions posées par le Comité Scientifique du Colloque. J'ai la conviction que nous sommes loin de savoir y répondre et qu'il est nécessaire de poursuivre et développer des recherches sur différents terrains, concernant aussi bien l'apprentissage des élèves, que la formation spécifique des professeurs d'école. J'en signale ci-dessous plusieurs¹⁴, qui peuvent nous aider, en particulier, à comprendre certains des problèmes causés par cet enracinement inévitable mais contradictoire du géométrique dans le spatial, et à proposer des solutions.

1. Le travail de l'équipe de Lille

Partant des analyses de R. Duval, cette équipe a pour projet, en partie réalisé, de construire un ensemble cohérent de ressources pour l'enseignement de la géométrie spatio-graphique. Voir la conférence de MJ Perrin et C. Mangiante-Orsola dans ce volume.

2. En ce qui concerne la problématique de modélisation,

- R. Berthelot et moi-même avons publié dans « Autour des la Théorie des Situations » (Berthelot & Salin 2005) un article analysant les difficultés que nous avons rencontrées entre 1994 et 1999 quand nous avons essayé de mettre en œuvre une problématique de modélisation de l'espace, dans des situations d'enseignement qui ne soient pas trop en rupture avec les pratiques scolaires. Pour cela, nous avons décidé de simuler dans le micro-espace de la feuille de papier certaines contraintes "naturelles" du méso-espace ou du macro-espace, qui rendent inopérant un rapport pratique dans la situation. Malgré quelques réussites, nous nous sommes heurtés à toute une série de difficultés, ce qui nous a convaincus qu'il fallait explorer d'autres voies, ce que nous n'étions plus en mesure de faire ;

- C'est ce qu'a réalisé S. Gobert (2001) dans sa thèse où elle a dégagé des conditions à l'entrée des élèves dans une problématique de modélisation.

- Dans leur cours à l'École d'été 2007 (BLOCH I. & PRESSIAT A. (2009)), I. Bloch pose la question de la constitution des références spatiales nécessaires à l'entrée dans la problématique de modélisation et A Pressiat, s'appuyant sur les résultats de la recherche INRP en 6ième montre la nécessité de recherches sur la schématisation.

3. Depuis peu, plusieurs équipes s'intéressent spécifiquement aux aspects langagiers, avec des problématiques différentes

- T. Barrier , C. Bulf, A. Chesnais, C. Hache, A.-C. Mathé, J. Mithalal présentent ainsi leur projet ANR commun :

¹³ Ce n'est bien sûr, qu'une condition nécessaire ...

¹⁴ Je m'appuie pour cela sur certains textes issus de l'École d'été de Didactique de 2007, dont un des thèmes était consacré à la géométrie, sur les actes du séminaire national de didactique de l'année 2009, et sur certains textes du thème du langage de l'École d'Été 2011.

Notre projet vise à éclairer le rôle du langage, en tant que levier ou obstacle, dans le processus d'enseignement-apprentissage, [] Nous choisissons, dans ce projet, de centrer notre réflexion sur la géométrie, présente tout au long de la scolarité. Elle est le lieu d'une articulation riche entre espace réel perçu et espace géométrique, voire raisonnement déductif et nous semble ainsi porteuse de phénomènes langagiers particulièrement intéressants."

Mathé (2012) et Bulf & al (à paraître) présentent leurs premiers travaux.

- Les recherches actuelles de S. Gobert (à paraître) portent sur les pratiques langagières et sémiotiques du professeur dans l'évolution des processus de dévolution et d'institutionnalisation, en particulier en géométrie. (EE 2011)

J'ai le sentiment d'avoir porté un regard trop subjectif sur l'évolution de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. Heureusement, les autres conférenciers et les ateliers apportent des éléments concrets, propres à vous aider dans votre travail de formation, à condition que la future formation vous permette de disposer du temps nécessaire !

V. BIBLIOGRAPHIE¹⁵

BERTHELOT R. & SALIN M.H., (1992) * L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse Université Bordeaux 1.

BERTHELOT R. & SALIN M.H., (1993) * L'enseignement de la géométrie à l'école primaire *Grand N* 53 *

BERTHELOT R. & SALIN M.H., (1999) * L'enseignement de l'espace à l'école primaire *Grand N* 65 *

BERTHELOT R. & SALIN M.H., (2005) Vers une problématique de la modélisation dans l'enseignement élémentaire de la géométrie in Salin M.H., Clanché P. et Sarrazy B. eds, *Sur la théorie des situations didactiques* La Pensée Sauvage, Grenoble

BESSOT A. (2009) * Géométrie et métiers du bâtiment *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone. Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation*. <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/46/43/13/PDF/Bessot-EMF2009-GT5.pdf>

BLOCH I. & PRESSIAT A. (2009). L'enseignement de la géométrie, de l'école au début du collège : situations et connaissances. In Bloch I. & Conne F. (2009). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIVème école d'été de didactique des mathématiques*, 65-88. Grenoble : La Pensée sauvage.

BROUSSEAU G. (1983) Études de questions d'enseignement, un exemple : la géométrie ; *Séminaire de didactique et de l'informatique*, 45; 183-226 LSD IMAG Université J. Fourier Grenoble

BROUSSEAU G. (2000) * Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. *Conférence prononcée au campus universitaire de Réthymnon (Crète) lors du 2^e colloque de didactique des mathématiques en avril 2000* <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/fr/>

BULF, C., MATHÉ, A.-C., MITHALAL, J., WOZNIAC F. (A paraître). Le langage en classe de mathématiques : regards croisés en TSD et en TAD. In A. Bronner & al. (Eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée Sauvage

CHEVALLARD Y. (1989) : Le concept de rapport au savoir -rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, année 1988-1989, LSD-IMAG et Institut Fourier Université de Grenoble 1 Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire

GOBERT S. (2001) * Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire Thèse Université Denis Diderot Paris VII

¹⁵ Les articles dont le titre est précédé d'une étoile sont accessibles sur le réseau.

GOBERT S. (à paraître) Construire des significations dans, et par le langage In A. Bronner & al. (Eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée Sauvage

COPPÉ S. & DORIER J.L. (2005) * Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5^{ème} Petit x **68** 8-37

DUBOIS S. (2009) * Animation géométrie cycle 3 , repéré à l'adresse : http://ecoles.ac-rouen.fr/circ-canteleu/site/spip.php?rubrique58&debut_article_dates=5#pagination_article_dates

DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnement. *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, **10**, 5-55.

EMPRIN F & RAJAIN C *Apprendre à (se) représenter l'espace* CRDP de Champagne-Ardenne

MATHÉ, A.-C. (2012). Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **32(2)**, 195-228

PERRIN MJ & SALIN MH (2009). * Didactique de la géométrie Peut-on commencer à faire le point ? *Actes du séminaire National de Didactique des Mathématiques année 2009*, 47-83 IREM de Paris 7

SALIN M.H. (2006). * Du CM2 à la sixième : quelques pistes pour une transition plus efficace (2ème partie) *PLOT. Nouvelle série*. **14** 2-9

SALIN M.H. (2008) * Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège le facteur temps *Bulletin de l'APMEP*. **478**. 647-670.

VERGNES D. (2000) * Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire in *Actes du séminaire National de Didactique des Mathématiques année 2000* 129-142, IREM de Paris 7

VI. ANNEXES

1. Annexe 1

GÉOMÉTRIE

- ▷ GM.01 OBJETS ET NOTATIONS
- ▷ GM.02 LES INSTRUMENTS DE DESSIN
- ▷ GM.03 TRACER 2 DROITES PERPENDICULAIRES
- ▷ GM.04 TRACER 2 DROITES PARALLÈLES
- ▷ GM.05 LES POLYGONES
- ▷ GM.06 LES QUADRILATÈRES
- ▷ GM.07 LES CARRÉS
- ▷ GM.08 LES RECTANGLES
- ▷ GM.09 LES TRIANGLES
- ▷ GM.10 LE CERCLE
- ▷ GM.11 LES SOLIDES
- ▷ GM.12 CONSTRUIRE DES SOLIDES
- ▷ GM.13 LES ANGLES
- ▷ GM.14 LA SYMÉTRIE
- ▷ GM.15 RÉDUIRE / AGRANDIR
- ▷ GM.16 REPÉRAGE DANS LE PLAN
- ▷ GM.17 PROGRAMMES DE CONSTRUCTION

2. Annexe 2

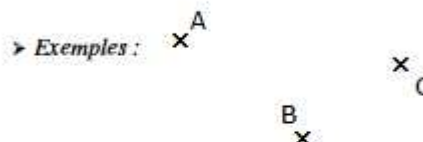
GM.01

OBJETS ET NOTATIONS

1 LE POINT

Un point est un endroit précis du plan.

- On le repère avec une croix ($\times$).
- On le nomme avec une lettre majuscule.

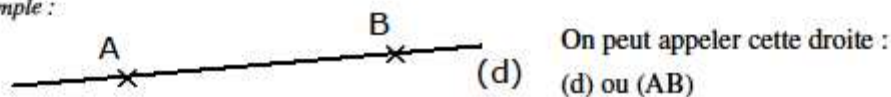


2 LA LIGNE ET LA DROITE

Une ligne est une suite de points qui ne s'arrête pas. On la trace sans lever le crayon.

- une ligne peut être **courbe** :
- Une ligne peut être **droite**. Dans ce cas, on la trace avec une règle.
- On nomme une droite entre parenthèses, soit avec une lettre minuscule, soit avec le nom de deux de ses points.

➤ Exemple :

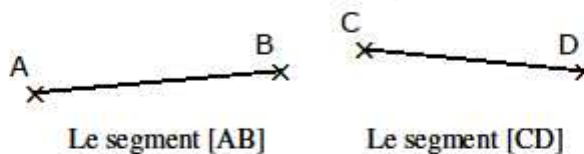


3 LE SEGMENT

Un segment est une *portion de droite* limitée par deux points appelés **extrémités**.

- On nomme un segment à l'aide du nom de ses extrémités, entre crochets.

➤ Exemples :

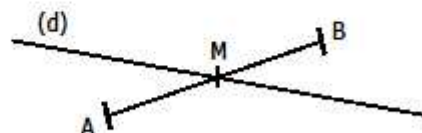


4 INTERSECTION

On appelle **intersection** le **point** où deux objets (droite, segment, ...) se croisent (se coupent).

Le point d'intersection appartient *aux deux objets à la fois*.

Le point *M* est l'intersection de la droite *(d)* et du segment *[AB]*.



3. Annexe 3

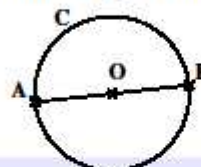
GM.17

PROGRAMMES DE CONSTRUCTION

1 DEFINITION

Un programme de construction est un texte qui donne des **instructions** pour **tracer** précisément une figure géométrique.

➤ Tracer un cercle C de centre O . Tracer un diamètre $[AB]$.



2 LIRE UN PROGRAMME DE CONSTRUCTION

- Un programme de construction est un **texte de géométrie** : il utilise le vocabulaire de géométrie. Il faut s'assurer de bien **comprendre tous les mots**.
- Il faut suivre les instructions **dans l'ordre** où elles sont écrites.
- Avant de tracer précisément, on doit faire un **brouillon**. On essaie de suivre le programme, rapidement, à main levée. Cela permet de voir si on a **bien compris** toutes les étapes, et de savoir de **quels outils** on va avoir besoin.

programme	brouillon	outils
Tracer 3 points P, Q, R distincts*. * à des endroits différents		➤ crayon
Tracer un carré $ABCD$ de côté 4 cm. Tracer le point M , milieu de $[AB]$. Tracer le point N , milieu de $[CD]$. Tracer le segment $[MN]$.		➤ crayon ➤ règle graduée ➤ équerre
Tracer une droite (d) . Placer un point A sur la droite (d) . Tracer la droite (e) , perpendiculaire à (d) et passant par A . Placer le point B sur la droite (e) , tel que $AB = 5$ cm. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon AB .		➤ crayon ➤ règle graduée ➤ équerre ➤ compas

LES TECHNOLOGIES POUR LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Sophie SOURY-LAVERGNE

Maître de Conférences, INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION
S2HEP

Sophie.Soury-Lavergne@ens-lyon.fr

Résumé

La géométrie dynamique est une technologie dont les apports pour l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire ont été étudiés depuis une dizaine d'années. Récemment de nouveaux développements à la fois didactiques, à propos des déconstructions dimensionnelles d'une figure, et technologiques, avec l'apparition de la technologie Cabri Elem, ont permis de concevoir de nouvelles situations qui mettent en relation différents espaces, l'espace sensible des objets, l'espace graphique des représentations et l'espace dynamique de la technologie.

Cette contribution à la table ronde dresse un panorama des nouvelles possibilités et des nouvelles tâches qu'offre l'intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. A partir d'exemples d'usages pionniers ou plus récents, elle présente quelques idées-clefs pour comprendre les apports possibles des technologies à l'apprentissage et l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire : la déconstruction dimensionnelle introduite par Duval (2005) pour décrire le travail nécessaire chez l'élève pour une approche géométrique des figures, l'interaction entre les connaissances spatiales et les connaissances géométriques au cœur des apprentissages à l'école primaire (Perrin-Glorian & Salin, 2010), le rôle du déplacement et des différentes rétroactions dans l'utilisation d'un environnement informatique pour apprendre (Soury-Lavergne, 2006) (Mackrell, Maschietto, & Soury-Lavergne, 2013) et pour finir le rôle de la manipulation directe d'objets tangibles et de représentations informatisées de ces objets (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013).

I. LES DÉBUTS HISTORIQUES AVEC LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

Le projet MAGI, Mieux Apprendre la Géométrie avec l'Informatique, a démarré en 2003 pour étudier les intérêts et les possibilités de la géométrie dynamique dès l'école élémentaire, alors que ces logiciels étaient déjà largement connus et utilisés au niveau secondaire depuis plusieurs années. Ce projet avait pour objectif de concevoir et d'analyser des situations possibles pour tous les niveaux de l'école élémentaire et au début du collège, mais aussi d'étudier l'intégration de la technologie dans les pratiques des enseignants (Laborde, 2004) (Assude, Grugeon, Laborde, & Soury-Lavergne, 2006).

1. Les constructions robustes

Les usages les plus répandus de la géométrie dynamique consistent à faire construire aux élèves des figures géométriques qui conserveront leurs propriétés au cours du déplacement des points qui les forment. Par exemple, si l'on considère la tâche de construction d'un rectangle, il est attendu que la figure soit construite en utilisant certaines de ses propriétés géométriques, qui sont mises en œuvre dans l'environnement par l'utilisation d'outils. Par exemple, pour construire un rectangle, il faut utiliser l'outil droite perpendiculaire à trois reprises, ou toute autre combinaison d'outils permettant que le quadrilatère obtenu soit un rectangle. La construction du rectangle est validée par le fait que le déplacement des points mobiles produit des états graphiques successifs d'un rectangle (Figure 1, états a, b et c). Il s'agit alors d'une construction robuste du rectangle. En revanche, une figure obtenue à l'écran par ajustement perceptif des quatre sommets et qui se déforme dès qu'un sommet est déplacé (Figure 1,

états d, e et f), est appelée construction molle du rectangle (Soury-Lavergne, 2011) et n'est pas considérée comme valide.

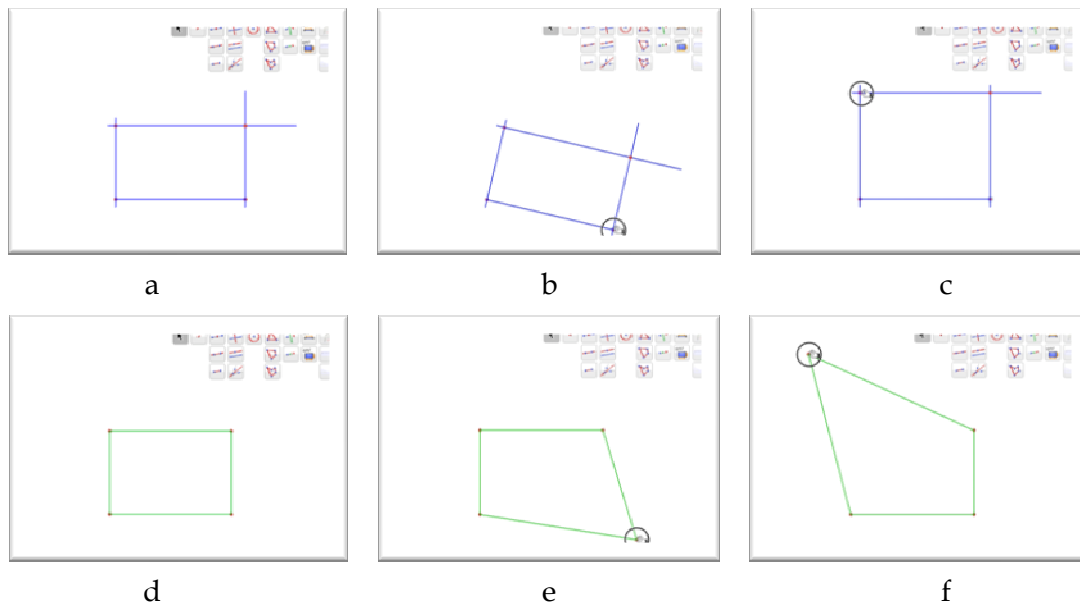


Figure 1. Trois états successifs de deux constructions différentes d'un rectangle. Les états a, b et c correspondent à une construction robuste du rectangle (à partir de a et en déplaçant le sommet en bas à droite on obtient b et en déplaçant le sommet en haut à gauche on obtient c). Les états d, e et f correspondent à une construction de rectangle par ajustement de 4 segments (à partir de d et en déplaçant le sommet en bas à droite on obtient e et en déplaçant le sommet en haut à gauche on obtient f).

La recherche de constructions robustes a été le point de départ des usages de la géométrie dynamique pour l'enseignement. En effet, seules les figures construites avec une utilisation explicite de leurs propriétés géométriques restent valides lorsque leurs sommets sont déplacés. De plus, plusieurs procédures différentes sont possibles pour obtenir une même figure robuste et toutes nécessitent l'utilisation d'une combinaison valide de propriétés géométriques.

La géométrie dynamique a ainsi fourni un milieu (Brousseau, 1998) qui permet de distinguer les propriétés spatiales des propriétés géométriques d'une figure et d'amener les élèves au contrat géométrique (Berthelot & Salin, 1993). Ce point est important car les connaissances en jeu dans l'apprentissage de la géométrie sont de deux natures, renvoient à deux champs de connaissances, l'un théorique celui de la géométrie et l'autre fondé sur l'interaction du sujet avec l'environnement, celui des connaissances spatiales. La géométrie est un ensemble d'objets et de relations théoriques, que l'on manipule à travers leurs représentations dans des registres différents, par des énoncés de langage et par des dessins. Ces deux types de registres nécessitent des appréhensions différentes (Duval, 2005). Les dessins appellent une appréhension globale en donnant à voir des relations spatiales tandis que les énoncés sollicitent une appréhension linéaire et analytique d'un discours qui renvoie le plus souvent aux objets théoriques géométriques. Les contrôles mis en jeu par l'appréhension du dessin sont en un premier temps de type perceptif, tandis que les contrôles sur les énoncés se font par des connaissances géométriques. La géométrie dynamique permet d'articuler et de différencier les deux types de contrôle et donc les deux référents. Elle permet d'extérioriser les propriétés théoriques sous forme d'invariants spatiaux dans et par le déplacement (Laborde & Capponi, 1994) qui est donc une fonctionnalité fondamentale de la géométrie dynamique pour l'apprentissage.

Le déplacement est accessible directement aux élèves, qui peuvent l'effectuer eux-mêmes et, dans une certaine mesure, en tirer les conclusions. De ce point de vue, la validation des constructions grâce au déplacement est donc du côté des élèves, indépendante de l'enseignant, ce qui constitue une autre valeur ajoutée.

2. Les boîtes noires

La technologie ne permet pas seulement de proposer des tâches dans un nouvel environnement, mais aussi de proposer de nouvelles tâches, dont la résolution engage les connaissances géométriques, ce qui ne serait pas possible sans la technologie (Laborde, 2001). C'est le cas des boîtes noires. Il s'agit d'une tâche de reproduction de figures dans laquelle la figure dynamique attendue, en version informatisée, est elle-même directement donnée à l'élève, sans toutefois permettre l'accès aux parties cachées ou à l'historique de la construction. La figure à reproduire n'est donc pas fournie à l'élève à partir d'une description verbale ou d'un schéma statique. Cependant, même avec la figure disponible et en disposant de la possibilité de déplacer les objets qui la constitue, la reproduction n'est pas simple et le travail mathématique reste à faire. En effet, ce n'est pas seulement la forme graphique de la figure que l'élève doit reproduire, mais aussi son comportement dynamique. Pour y arriver, une identification des propriétés géométriques de la figure est nécessaire.

La tâche nécessite de passer d'une analyse des propriétés spatiales et graphiques de la figure à une analyse en termes géométriques. Elle requiert également de déplacer les points de la figure initiale pour l'explorer et ceux de la figure reproduite pour valider ou pas le processus de construction.

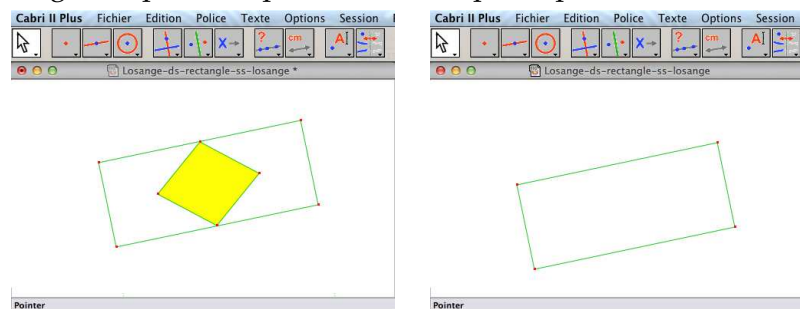


Figure 2. Dans un problème de type boîte noire, la figure modèle est donnée (à gauche). La tâche est de reconstruire la figure jaune (incluse) étant donné le rectangle (à droite).

Dans l'exemple proposé en Figure 2 (expérimenté dans une classe de CM1-CM2 à Soleymieux dans la Loire), la tâche consiste à reconstruire le quadrilatère intérieur à partir du rectangle initial (Figure 2 à droite), après avoir analysé la figure modèle (Figure 2 à gauche). Dans une boîte noire, la reconstruction de la figure peut démarrer d'une page blanche, ou bien d'un début de construction. Lors de la résolution du problème, le déplacement joue deux rôles différents. Il permet d'abord d'explorer la figure donnée en modèle (au sens de modèle à reproduire, le modèle du peintre), puis de valider ou invalider la reconstruction (voir d'autres exemples de boîtes noires dans (Charrière, 1995) (Clerc, 2006)).

II. LES DIFFICULTÉS DU DÉPLACEMENT ET LES SOLUTIONS POUR INCITER LES ÉLÈVES À DÉPLACER LES FIGURES

Le déplacement est donc une fonctionnalité centrale de la géométrie dynamique. Les travaux de recherche s'appuient essentiellement sur cette fonctionnalité pour montrer l'intérêt de l'usage de la géométrie pour apprendre. Pourtant, déplacer les points d'une figure n'est pas immédiat et évident, quel que soit le niveau mathématique de l'utilisateur. Nous avons montré que le déplacement n'est pas d'emblée mobilisé par les élèves (Soury-Lavergne, 2006) (Restrepo, 2007) et lorsqu'il l'est, il peut rester limité à un seul point et/ou dans son voisinage immédiat, ne produisant alors pas d'effet significatif. De plus, ce sont les connaissances de l'utilisateur qui vont lui permettre de percevoir et d'interpréter correctement ces effets. Or, les connaissances des élèves ne leur permettent pas toujours d'interpréter les rétroactions produites par le déplacement dans le cadre géométrique. Par exemple, les élèves décrivent l'évolution d'une figure par ses changements de formes, avec des expressions telles que « ça devient petit », « ça s'aplatit » et pas par la conservation ou la perte d'une propriété géométrique.

En conséquence, il est nécessaire d'abord qu'une règle explicite de déplacement des points d'une figure soit mise en place par l'enseignant lorsque les élèves utilisent la géométrie dynamique. Mais cette injonction de l'enseignant doit être relayée par la situation proposée aux élèves.

Ces constats ont amené les participants au projet MAGI à développer deux stratégies complémentaires pour améliorer l'utilisation du déplacement par les élèves : proposer des situations contextualisées qui incitent au déplacement et concevoir une fonctionnalité spécifique dans le logiciel pour déplacer les points de la figure.

1. Utiliser un contexte qui incite au déplacement

Replacer la construction géométrique dans un contexte non mathématique qui évoque un déplacement est un moyen d'inciter les élèves à bouger la figure et à obtenir des rétroactions indépendamment de l'enseignant. Dans l'exemple du « Pajeronde », la voiture représentée doit rouler, (Soury-Lavergne & Maschietto, 2012, initialement présenté à Cabriworld à Rome en 2004, Figure 3). Le problème se comprend aisément par les élèves : il faut ajouter la roue manquante. La connaissance mathématique en jeu n'est pas le cercle, qui est mobilisé très facilement comme modèle d'une roue. Plus précisément, le problème posé par la voiture sans roue est celui de la construction d'un cercle étant donné son diamètre. La connaissance géométrique visée est que le point milieu d'un diamètre est le centre du cercle. Cette connaissance fonctionne comme un outil de résolution du problème dans la situation proposée. Une valeur ajoutée de la géométrie dynamique, en plus de la validation par déplacement, résulte du fait que l'on peut élaborer des situations dans lesquelles la connaissance géométrique fonctionne comme un outil de résolution de problème (Douady, 1986).

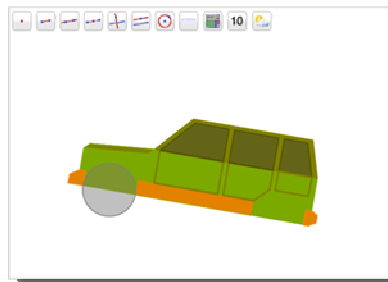


Figure 3. La figure proposée renvoie à un contexte non mathématique qui implique du déplacement. Cela favorise le fait que les élèves valident ou invalident leur construction de la roue manquante en faisant bouger la voiture.

D'autres situations conçues dans le cadre du projet MAGI reposent sur cette idée de plonger un problème mathématique dans un contexte non mathématique impliquant un déplacement. Dans de nombreux cas, il s'est avéré nécessaire de créer un point particulier pour déplacer la figure, afin de produire les rétroactions les plus significatives. C'est le point « tempête » de la situation du « Bateau sans mat » ou le point « leader » de la situation « Patrouille » (Figure 4). En bougeant le point « tempête », le bateau tangue et les mats construits au jugé ne bougent pas de la façon attendue par les élèves. De même, en déplaçant le point « leader », les alignements des avions ne sont plus respectés s'ils ont été faits au jugé.

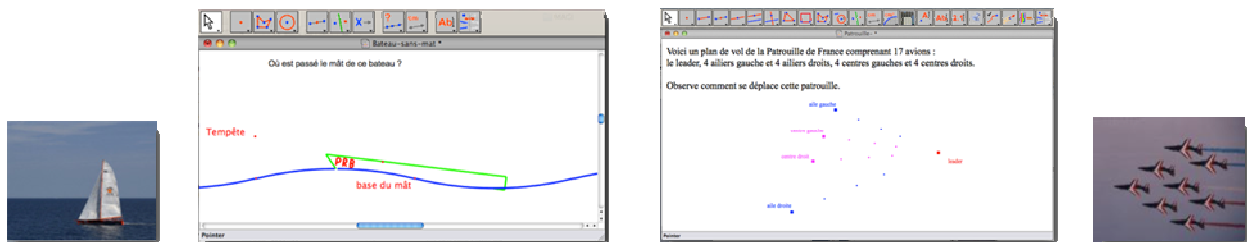


Figure 4. Les situations « Bateau sans mat » ou « Patrouille » renvoient à un contexte non mathématique impliquant un déplacement (celui d'un bateau sur l'eau ou des avions de la patrouille de France).

2. Des outils spécifiques

La mise en évidence, dans une figure, d'un point destiné à être manipulé par l'élève pour valider ou invalider par déplacement sa construction a fait émerger l'idée d'un outil spécifique dans l'environnement dont la fonctionnalité serait justement de déplacer les points de la figure, d'une façon automatique et indépendante de l'utilisateur. Ainsi le « lutin » a été développé dans le cadre du projet MAGI pour Cabri 2+. Mais il n'a pas été introduit dans la version du logiciel actuellement diffusée. De façon analogue, le « monkey » a été créé dans le logiciel CaRMetal. Le bouton « monkey », lorsqu'il est maintenu appuyé, secoue la figure. Lorsque le bouton « monkey » est relâché, les points retrouvent leur position initiale (Figure 5). Cela permet aux élèves d'observer la perte de certaines propriétés géométriques, au cours du mouvement. Cependant, il peut s'avérer difficile de percevoir ces propriétés au cours du mouvement.

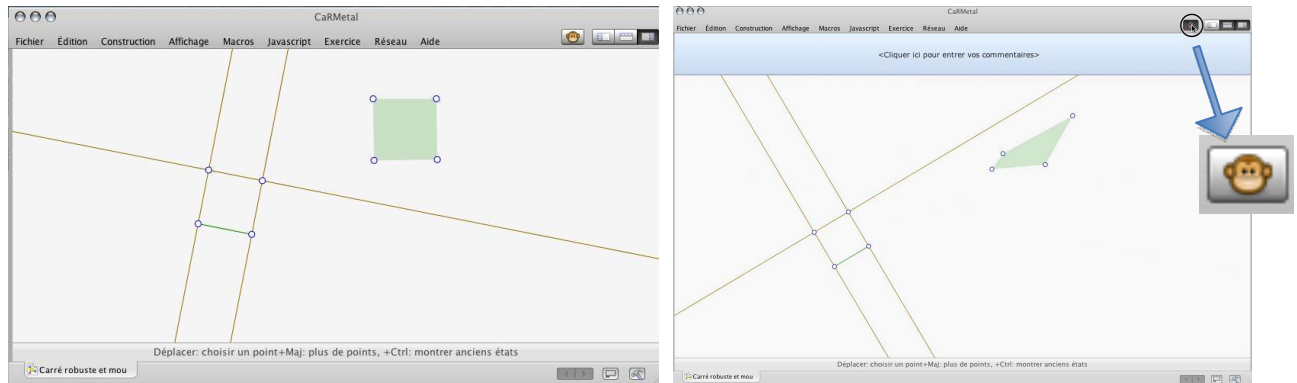


Figure 5. Interface du logiciel de géométrie dynamique CaRMetal avec le bouton « monkey », en haut à droite, qui agite les points de la figure.

3. Conclusion sur l'importance du déplacement et les différents usages possibles

L'intérêt de l'usage de la géométrie dynamique repose principalement sur la possibilité de déplacer les objets des figures construites. Si des solutions sont identifiées pour inciter les élèves à le faire, il est néanmoins toujours important de mettre en place de façon explicite avec les élèves le recours au déplacement pour valider les constructions réalisées.

Cependant, lors des nombreuses expérimentations réalisées à partir de la collection de situations conçues dans le cadre du projet MAGI, nous avons également pu observer d'autres usages spontanés du déplacement. Dans l'exemple des boîtes noires, le déplacement est d'abord utilisé pour explorer la figure, bien avant de valider la reconstruction. Au niveau du collège, Restrepo (2007) a identifié différentes finalités associées au déplacement en géométrie dynamique, tels que l'ajustement ou la recherche de trajectoires. Coutat (2006) a conçu des situations qui exploitent l'idée de construction molle, pour laquelle l'ajustement de la figure avec un contrôle perceptif constitue une partie de la tâche attendue et permet la conceptualisation des propriétés géométriques. Ainsi le déplacement en géométrie dynamique n'est pas seulement un moyen de validation, mais peut jouer d'autres rôles dans la situation didactique, en particulier avec des constructions molles.

C'est sur cette piste que les plus récents développements relatifs à l'utilisation de la géométrie dynamique pour l'école primaire ont été réalisés. Ils ont permis de prendre en compte le point de vue sur le travail géométrique apporté par la déconstruction dimensionnelle des formes de Duval (2005).

III. LA DÉCONSTRUCTION DIMENSIONNELLE DES FORMES

Dans les problèmes évoqués précédemment, l'enjeu de la résolution peut se résumer à construire correctement certains points clefs de la figure. Sur la Figure 1, il s'agit de trouver différentes procédures de construction des sommets d'un rectangle. Dans la boîte noire de la Figure 2, la solution passe par la construction des milieux de milieux des côtés du rectangle initial. Dans « Pajérond », la voiture sans roue (Figure 3), c'est le centre du cercle qui doit être correctement construit. Enfin, ce sont des points qui modélisent les avions de la patrouille de France (Figure 4). De même, le déplacement est pensé essentiellement comme le déplacement des points de la figure.

Cette remarque est valable pour de nombreux problèmes de construction avec la géométrie dynamique. On pourrait résumer la construction d'une figure à la construction de ses points caractéristiques, comme dans la géométrie du compas de Mascheroni (1798). Ces points sont construits soit comme points libres, soit comme point sur objet ou encore intersection d'objets géométriques (droite, segment ou cercle) et/ou milieu. De ce point de vue là, le travail nécessaire avec la géométrie dynamique demande à l'élève de passer d'une appréhension globale de la figure à une appréhension ponctuelle.

La fin de la construction consiste ensuite à utiliser ces points pour créer l'objet voulu, essentiellement avec les outils segment, polygone ou cercle à l'école primaire. Cette partie finale de la construction, qui peut se résumer à relier « correctement » les points construits, n'est pas considérée comme problématique du point de vue du travail géométrique, bien qu'elle le soit, en particulier au niveau primaire.

1. Conceptualisation du point et insuffisance de la distinction entre appréhension globale et appréhension ponctuelle de la figure

Cependant, l'enjeu de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire n'est pas d'amener les élèves à conceptualiser la notion de point. Donc la géométrie dynamique à l'école primaire doit pouvoir proposer des situations qui ne nécessitent pas le passage par un point de vue ponctuel sur les figures. En conséquence, la distinction entre l'appréhension globale et l'appréhension ponctuelle d'une figure n'est pas suffisamment fine pour décrire tout le travail géométrique qu'il doit être possible de faire à l'école primaire. De plus, si on considère les exemples précédents avec cette seule distinction, on ne saisit pas en quoi ces situations sont très difficiles pour les élèves.

Duval (2005) explique que le travail géométrique va à l'encontre des processus spontanés de visualisation des figures. Le travail géométrique consiste en particulier en une déconstruction dimensionnelle des formes, qui passe par l'identification dans la figure d'objets géométriques de plus petite dimension que la figure initiale et des propriétés qui lient ces objets (dimension est entendu au sens de dimension mathématique et pas celui de la taille). Ce processus fondamental du travail géométrique est décrit ainsi : « ... décomposer toute forme, que l'on reconnaît d'emblée dans un ensemble de tracés ou dans n'importe quelle figure de départ, en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions. » (op. cit. p. 16). Ainsi, les unités figurales ne sont pas uniquement celles de dimension zéro, les points. Toutes les unités figurales intermédiaires doivent pouvoir être mobilisées.

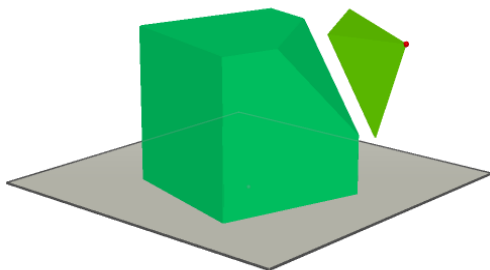


Figure 6. Reconstruction du sommet manquant du cube par un tétraèdre.

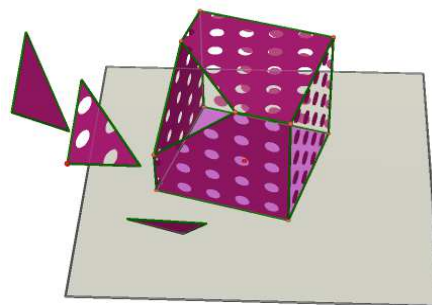


Figure 7. Reconstruction du sommet manquant du cube par les faces

L'exemple d'un cube tronqué en géométrie dans l'espace (Mithalal, 2010) permet d'illustrer comment différentes déconstructions dimensionnelles peuvent être envisagées dans l'analyse a priori d'une situation. La situation, proposée à des lycéens de 2^d, demande de trouver le plus grand nombre de méthodes pour reconstruire le sommet manquant du cube. Cette consigne simple autorise de nombreuses interprétations, notamment sur ce qui constitue le sommet manquant du cube, rendant possibles différentes déconstructions dimensionnelles. Tout d'abord la reconstruction du sommet, au sens du sommet de la montagne, avec le tétraèdre manquant, renvoie à une déconstruction des formes sans changement de dimension, le cube tronqué 3D étant complété par le tétraèdre 3D (Figure 5). Ensuite, en considérant une déconstruction dimensionnelle 3D/2D, c'est à dire du solide aux surfaces, on peut prévoir la reconstruction des parties de faces manquantes, c'est-à-dire la construction des triangles qui complètent les faces carrées (Figure 7). La reconstruction des arêtes, par exemple par prolongement des arêtes existantes implique une déconstruction dimensionnelle 3D/1D (Figure 8). Enfin, la reconstruction du sommet manquant par symétrie d'un sommet présent sur la figure du cube incomplet (par symétrie par rapport au centre d'une face par exemple), mobilise des unités figurales de dimension nulle et correspond à une déconstruction dimensionnelle 3D/0D (Figure 9).

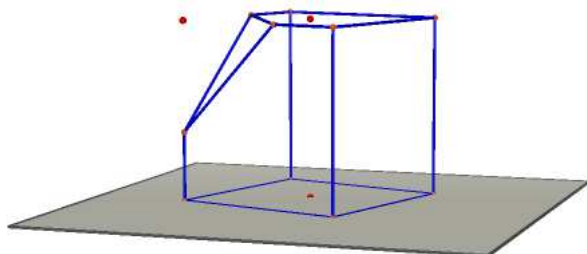


Figure 8. Reconstruction du sommet manquant du cube par construction du point sommet.

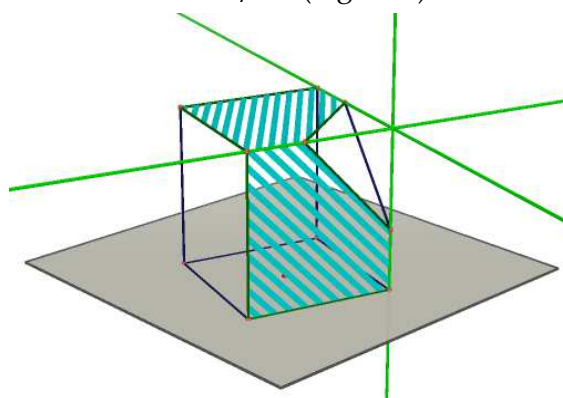


Figure 9. Reconstruction du sommet manquant du cube par prolongement des arêtes.

Cet exemple permet d'illustrer les nombreuses déconstructions dimensionnelles envisageables et dégage des possibilités de travail à l'école primaire autres que les déconstructions dimensionnelles complètes (impliquant les points 0D).

Dans le cas de la géométrie plane, un des objectifs de l'enseignement est alors de faire passer de l'analyse visuelle d'une figure d'un point de vue global, où la figure est considérée comme un assemblage de surfaces, les formes 2D, à un point de vue 1D, pour lequel la figure est considérée comme un assemblage de lignes, les formes 1D (Duval & Godin, 2006).

2. Des exemples dans l'espace et dans le plan

C'est sur cette idée que plusieurs situations pour l'école primaire ont été élaborées avec la géométrie dynamique pour travailler la déconstruction dimensionnelle des formes. Étant donnée la possibilité qu'offre la géométrie dynamique pour la géométrie plane et pour la géométrie de l'espace, nous présentons un exemple dans chaque cas pour montrer les pistes explorées.

Le premier exemple concerne les patrons du cube (Figure 10 et Figure 11). La situation et l'environnement de géométrie dynamique sont présentés en détail dans ces actes, dans le texte de l'atelier « Explorer les patrons du cube : de l'intérêt des représentations à l'aide de logiciels de mathématiques dynamiques » (Calpe, Rabatel, Zucchetta, & Soury-Lavergne, 2014). L'environnement de géométrie dynamique utilisé permet de sélectionner des carrés et de transformer l'assemblage de carrés en un patron de cube qui se replie. La Figure 10 présente les principales étapes de la construction :

sélection de carrés, transformation de l'assemblage de carrés en un patron qui peut se plier et déplier, pliage des faces par rotation autour des arêtes communes, obtention d'un cube.

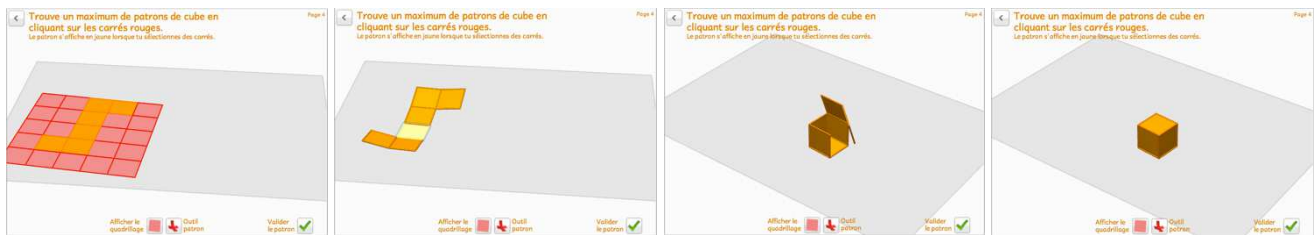


Figure 10. Quatre images écran des étapes de construction d'un cube à partir de son patron, vue 3D.



Figure 11. Les mêmes quatre images écran vues de dessus après changement du point de vue, vue 2D.

Dans la situation proposée, l'articulation 2D-3D est particulièrement complexe. Elle existe finalement à trois niveaux : celui des objets théoriques manipulés, le cube et son patron, celui des représentations de ces objets, avec une représentation 2D d'un objet 3D (le cube à l'écran de l'ordinateur) et enfin celui du point de vue sur la représentation. En effet, dans la même fenêtre, sans rupture et de façon continue, la figure peut être vue en perspective (Figure 10) ou basculée pour être vue du dessus, en 2D (Figure 11). Au delà du changement de point de vue, un autre intérêt de cette situation est qu'elle permet aux élèves de travailler les patrons du cube à partir des faces, sans avoir à construire les côtés des carrés ou les sommets. C'est une déconstruction dimensionnelle 3D/2D qui est ainsi travaillée dans cette situation avec la géométrie dynamique.

Le deuxième exemple est donné par la géométrie 2D et la possibilité de travailler les triangles, avec la géométrie dynamique, sans recourir immédiatement à la construction de sommets par intersection (Figure 12). Le problème travaillé est celui de la construction d'un triangle étant données les mesures de ses trois côtés. La solution visée est la construction du troisième sommet à l'intersection de deux cercles (issu du travail de master de Voltolini (2014), présenté par une communication dans ces actes « A la découverte des triangles : de la manipulation de segments dans un logiciel de mathématiques dynamiques à la construction à la règle et au compas »).

Dans la situation élaborée avec l'environnement Cabri Elem, il s'agit pour les élèves de former des triangles à partir de segments de longueurs données qui peuvent se déplacer ou pas à l'écran. Les manipulations et déplacements des segments qui permettent éventuellement de former un triangle, se décomposent en translation ou rotation. Ces déplacements dans l'environnement de géométrie dynamique sont différents de ceux qui seraient mis en œuvre dans l'espace sensible en ceci qu'ils ne sont pas réalisés simultanément mais successivement. Ainsi, la rotation d'un segment autour d'une de ses extrémités est isolée dans la manipulation et est incontournable pour former le triangle. C'est cette rotation, avec la trace du segment et de son extrémité, qui est ensuite réinvestie dans les procédures de construction à la règle et au compas.

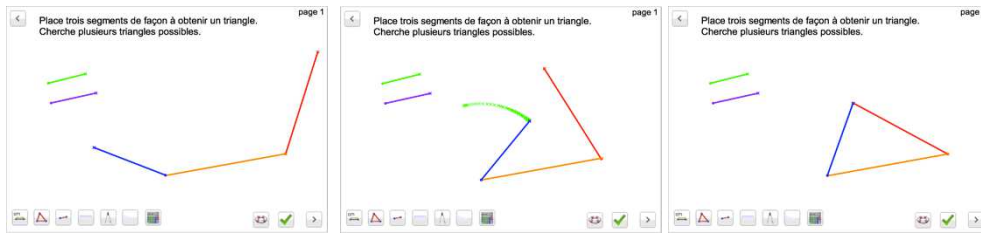


Figure 12. Trois états de la figure lors de la formation d'un triangle à partir de trois segments. L'arc de cercle vert de la figure du milieu a été ajouté pour mettre en évidence, aux yeux du lecteur, la rotation du segment et la trajectoire de son extrémité.

Dans ce travail, la construction du triangle, figure 2D c'est-à-dire surface plane aux yeux d'une majorité d'élèves, est obtenue par la manipulation d'objets 1D, la construction d'une ligne brisée 1D qui en se refermant produit la surface. La déconstruction dimensionnelle ainsi mise en œuvre est 2D/1D. Cela montre comment plusieurs étapes de la construction du triangle peuvent être travaillées avant d'arriver à la construction du troisième sommet (0D) comme intersection de deux arcs de cercle. Au cours de ce travail, l'utilisation d'un compas est introduite pour « faire tourner » les segments et seulement à la fin de la situation, la construction des cercles et de leur intersection est introduite.

IV. L'ESPACE SENSIBLE ET LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

Le dernier aspect du travail mené sur les usages de la géométrie dynamique à l'école primaire concerne l'articulation entre la géométrie dynamique et les autres espaces mobilisés dans le travail géométrique, dont celui des objets tangibles.

Pour caractériser les différents rapports possibles entre la géométrie et le monde réel, auquel appartiennent les objets tangibles, Perrin-Glorian et Salin (2010) puis Perrin-Glorian et al. (2013) mettent en évidence trois espaces en jeu dans le travail géométrique : l'espace sensible, l'espace graphique et l'espace géométrique théorique. La relation entre ces trois espaces et les deux domaines de connaissances, les connaissances spatiales et les connaissances géométriques doit encore être précisée. L'hypothèse que je fais est que la résolution de problème dans les espaces sensibles et graphiques mobilise de façon privilégiée les connaissances spatiales et, seulement dans un deuxième temps, les connaissances géométriques. Inversement, la résolution des problèmes géométriques mobilise prioritairement les connaissances géométriques et dans un deuxième temps les connaissances spatiales. On voit alors se dessiner le rôle clef de l'espace graphique. Dans leur présentation des trois espaces, Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq donnent à cet espace graphique un rôle pivot et différent suivant qu'il est en relation avec l'espace sensible ou l'espace géométrique.

La géométrie dynamique partage de nombreuses caractéristiques avec l'espace graphique des représentations papier-crayon. Il s'agit dans les deux cas d'un micro-espace, dans lequel des représentations d'objets rendent possibles des expérimentations. Coutat (2006) propose de parler de registre graphique animé ou registre graphique-dynamique. Pourtant, la différence est plus importante qu'un enrichissement de l'espace graphique en particulier parce que la géométrie dynamique intègre les outils qui produisent les représentations et aussi parce qu'elle produit des rétroactions qui transforment la nature des expérimentations possibles. Enfin, la géométrie dynamique ne se substitue pas à l'espace graphique du papier-crayon. C'est plutôt en pensant la complémentarité entre le papier-crayon et l'environnement informatique que de nouvelles situations sont élaborées.

C'est le cas de la proposition d'atelier de Bombrun et Thomas dans ces actes (Bombrun & Thomas, 2014). C'est aussi ce qui est développé dans MAGESI (Mieux Apprendre la Géométrie dans des ESpaces Instrumentés, <http://magesi.ens-lyon.fr/> (Rolet, 2003)) une ingénierie qui fait appel à l'utilisation d'espaces de différentes tailles et d'instruments divers. Quatre séquences organisées autour de trois figures géométriques (le carré, le parallélogramme et le losange) et à propos de la symétrie, couvrent le programme de géométrie des classes de CM1 et CM2 du cycle 3. Les séances reposent sur la construction des figures dans trois espaces : celui de la feuille de papier (Figure 14), celui du sol du préau (Figure 13)

et celui de la géométrie dynamique (Figure 15). Ces espaces de production graphique ne sont pas les espaces identifiés par Perrin-Glorian et al. Ils sont caractérisés par les tailles (micro-espace pour le papier-crayon et la géométrie dynamique, meso-espace pour le sol du préau) et les instruments disponibles. Ils correspondent à une déclinaison de l'espace graphique de Perrin-Glorian et al. et partagent aussi des caractéristiques et des contraintes avec l'espace sensible.

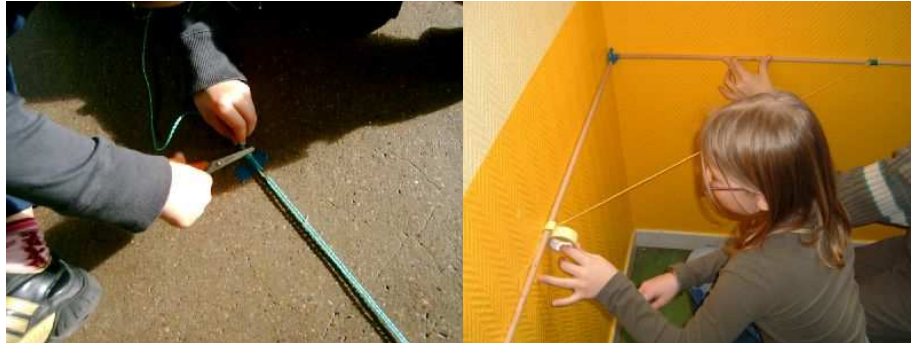


Figure 13. Construction d'un carré dans un meso espace (<http://magesi.ens-lyon.fr/seance.php?Rub=1&Id=3>)

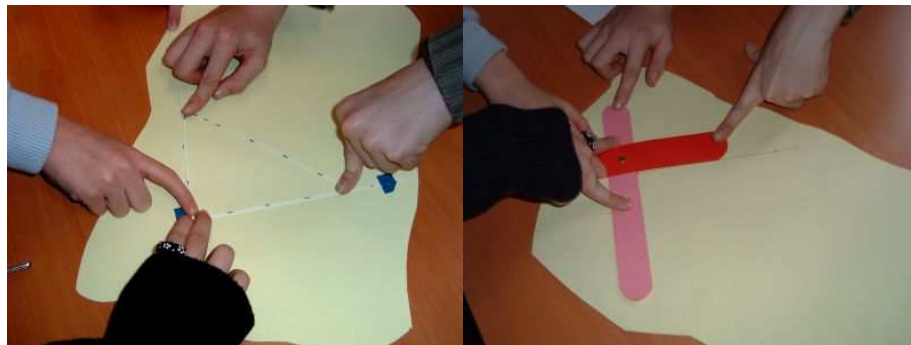


Figure 14. Construction d'un carré sur feuille de papier (<http://magesi.ens-lyon.fr/seance.php?Rub=1&Id=5>)

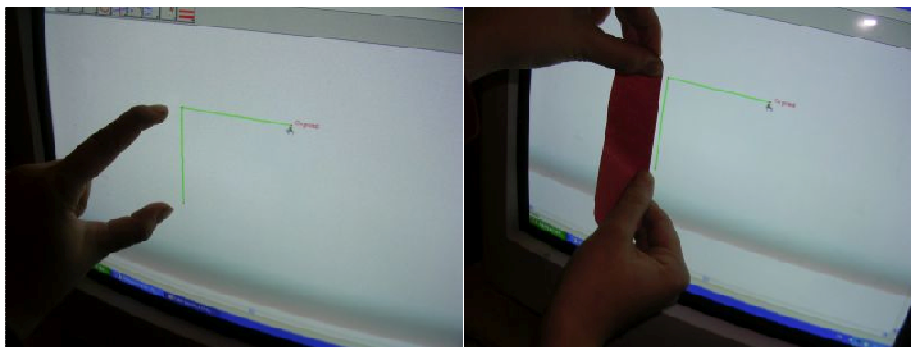


Figure 15. Construction d'un carré avec un logiciel de géométrie dynamique (<http://magesi.ens-lyon.fr/seance.php?Rub=1&Id=22>)

Dans les nouvelles situations conçues avec la technologie Cabri Elem et expérimentées depuis 2011 comme, par exemple, la situation patrons du cube ou la situation triangle, l'articulation entre le travail avec la géométrie dynamique, celui dans l'espace graphique et le recours à des objets de l'espace tangible est à nouveau étudiée. Dans la recherche des patrons du cube, il y a utilisation de matériel tangible, tels que les polydrons ou des cubes et des patrons papier pliables, production de représentations des patrons identifiés et utilisation de ces productions comme mémoire pour travailler avec l'environnement informatique. L'environnement de géométrie dynamique permet de dépasser certaines contraintes de l'espace sensible qui ne sont pas pertinentes du point de vue des connaissances géométriques. Par exemple, dans l'espace sensible, le patron papier doit être légèrement plus grand que le cube en bois si l'on veut pouvoir envelopper correctement le cube avec le patron. Ce n'est plus le cas dans l'environnement informatique. Dans le cas des constructions de triangles étant données les mesures

des trois côtés, la situation dans l'environnement informatique débouche sur des travaux en papier-crayon et sur l'introduction du compas comme instrument de construction du triangle en papier-crayon. Le compas est simulé dans la géométrie dynamique. Il est aussi présent comme outil de production dans l'espace graphique et enfin il est un objet de l'espace sensible qui matérialise entre ses deux pointes un segment de longueur fixe à placer au bon endroit.

Ces travaux illustrent le fait que la géométrie dynamique et plus généralement les environnements informatiques pour l'apprentissage ne remplacent pas les autres espaces mais les complète, l'accent étant mis récemment sur l'articulation avec l'espace sensible.

V. CONCLUSION SUR LES APPORTS DE LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE À LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Pour conclure, les récentes évolutions de l'usage de la géométrie dynamique à l'école primaire décrites ci-dessus sont en partie possibles grâce à l'évolution de la technologie elle-même, qui a pris en compte certaines spécificités de l'école primaire (Mackrell et al., 2013). Ces évolutions concernent :

- Les déconstructions dimensionnelles partielles qui permettent de concevoir des situations riches et accessibles aux élèves, sans passage obligé par la conceptualisation du point et la construction des points d'une figure comme points d'intersection. Les nouveaux environnements de géométrie dynamique permettent de concevoir des situations d'apprentissage donnant lieu à des déconstructions dimensionnelles 3D/2D ou 2D/1D tout à fait productives à l'école primaire.
- La prise en compte, dans les situations et ingénieries proposées, de la mise en relation de la technologie avec d'autres espaces dans lesquels se déroule l'activité mathématique, comme le l'espace sensible des objets et l'espace graphique des représentations papier-crayon.
- Le recours au déplacement d'une figure pour produire les rétroactions intéressantes est toujours central dans l'utilisation de la géométrie dynamique. Mais le déplacement est maintenant mieux compris, les différents types de déplacement sont reconnus et identifiés comme celui pour ajuster perceptivement une figure. De plus, la nécessité de recourir au déplacement est mieux intégrée dans les situations, à l'aide d'un contexte non mathématique ou d'outils spécifiques. L'injonction de l'enseignant est soutenue par la nécessité de la situation elle-même.
- Différents types de rétroactions sont maintenant possibles qui dépassent la seule validation obtenue par la non conservation des propriétés au cours du déplacement (dorénavant bien connue en géométrie dynamique). Les nouvelles rétroactions, déterminées par les concepteurs des situations, sont plus variées que le seul changement de position des objets à l'écran, sous-jacent à la validation par déplacement. Il s'agit par exemple de rétroactions visuelles, statiques ou dynamiques comme l'apparition ou la disparition d'images, ou d'un son ou encore de l'impossibilité de déplacer un objet à un moment donné. Elles peuvent être déclenchées automatiquement ou bien suite à une action de l'élève sur les objets à l'interface. Ces diverses rétroactions permettent de concevoir des aides à la stratégie de résolution mise en œuvre par l'élève ou bien une évaluation de la solution obtenue. Cette validation ou invalidation de la construction de l'élève par le système répond à une attente des utilisateurs.

Ces avancées posent peut-être pour l'instant plus de questions sur les processus d'apprentissage de la géométrie qu'elles n'apportent directement de réponses. Mais elles ouvrent des possibilités que nous, chercheurs, élèves et enseignants, avons beaucoup de plaisir à étudier.

VI. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Assude, T., Grugeon, B., Laborde, C., & Soury-Lavergne, S. (2006). Study of a teacher professional problem: how to take into account the instrumental dimension when using Cabri-geometry? In *Proceedings of the Seventeenth ICMI Study Conference "Technology Revisited"* (pp. 317–325). Hanoi Vietnam. Retrieved from http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/icmi-study-17/ICMI17proceedingsPart2.pdf
- Berthelot, R., & Salin, M.-H. (1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39–56.
- Bombrun, C., & Thomas, R. (2014). GeoGebra entre cour de récréation et feuille de papier : illustration avec le concept de cercle au cycle 3. Presented at the XXXXe colloque de la COPIRELEM, Nantes: IREM des pays de la Loire.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La pensée Sauvage Grenoble,, France.
- Calpe, A., Rabatel, J.-P., Zucchetta, J.-F., & Soury-Lavergne, S. (2014). Explorer les patrons du cube : de l'intérêt des représentations à l'aide de logiciels de mathématique dynamique. In *XXXXe colloque de la COPIRELEM*. Nantes, France: IREM des pays de la Loire.
- Charrière, P.-M. (1995). Boîtes noires, 9. Retrieved from http://icosaweb.ac-reunion.fr/GeomJava/abraCAda/M_abra.htm
- Clerc, B. (2006). Boîte noire en géométrie dynamique. Mise en place et utilisation d'une boîte noire avec Tracenpoche, 2. Retrieved from <http://revue.sesamath.net/spip.php?article13>
- Coutat, S. (2006). *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété*. Université Joseph Fourier.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, 7(2), 5–31.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5–53.
- Duval, R., & Godin, M. (2006). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7–27.
- Laborde, C. (2001). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283–317.
- Laborde, C. (2004). Come la geometria dinamica puo rinnovare i processi di mediazione delle conoscenze matematiche nella scuola primaria. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *La didattica della matematica: una scienza per la scuola* (pp. 19–28). Bologna.
- Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherche En Didactique Des Mathématiques*, 14(1.2), 165–210.
- Mackrell, K., Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). The interaction between task design and technology design in creating tasks with Cabri Elem. In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 81–90). Oxford, Royaume-Uni.
- Mascheroni, L. (1798). *Géométrie du compas*. Paris: Duprat. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-9097>
- Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM*, 45(7), 959–971. doi:10.1007/s11858-013-0533-3
- Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle* (Thèse de doctorat). Joseph Fourier, Grenoble, France. Retrieved

from tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/09/41/PDF/these_mithalal.pdf

Perrin-Glorian, M.-J., Mathe, A.-C., & Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères-IREM*, 90, 5–41.

Perrin-Glorian, M.-J., & Salin, M.-H. (2010). Didactique de la géométrie. Peut-on commencer à faire le point ? (pp. 47–81). Presented at the Séminaire national de didactique des mathématiques Année 2009, Université de Paris Diderot: IREM de Paris.

Restrepo, A. M. (2007). L'instrumentation du déplacement dans un logiciel de géométrie dynamique. In I. B. F. Conne (Ed.), *XII école d'été de l'ARDM*. Sainte Livrade France.

Rolet, C. (2003). Teaching And Learning Plane Geometry In Primary School: Acquisition Of A First Geometrical Thinking. Presented at the CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy. Retrieved from <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/>

Soury-Lavergne, S. (2006). Instrumentation du déplacement dans l'initiation au raisonnement déductif avec Cabri-géomètre. In N. Bednarz (Ed.), *Espace Mathématique Francophone*. Sherbrooke (Quebec): Université de Sherbrooke.

Soury-Lavergne, S. (2011). De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique. *MathemaTICE*, (27). Retrieved from <http://revue.sesamath.net/spip.php?article364>

Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2012). Les stratégies du garagiste. *Cahiers pédagogiques*, (498).

Voltolini, A. (2014). A la découverte des triangles : de la manipulation de segments dans un logiciel de mathématiques dynamiques à la construction à la règle et au compas. In *XXXXe colloque de la copirelem*. Nantes, France: IREM des pays de la Loire.