ACTES du XL^{ème} colloque COPIRELEM

organisé par l'IREM et l'IUFM des Pays de la Loire

Enseignement de la géométrie à l'école

enjeux et perspectives



NANTES

IUFM Launay-Violette

18, 19 et 20 juin 2013

www.colloquecopirelem.fr

ACTES

XLème Colloque international des Professeurs et des Formateurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres

Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspectives

NANTES : Centre IUFM Launay Violette

mardi 18, mercredi 19 et jeudi 20 juin 2013

Liste des ateliers résumés. Les textes complets sont sur le CD.

A11 - Quels types d'activités permettent de développer les connaissances spatiales chez les élèves du primaire? Le cas de la boîte à image.
Patricia MARCHAND, Annette BRACONNE-MICHOUX.

A12 - Math'aqui (1) : Récupérer l'activité mathématique des élèves dans des tâches simples et isolées de construction en géométrie, cela s'apprend ?
Sara ARDITI, Caroline BULF, Valentina CELI.

A13 - La schématisation dans une démarche d'investigation : la place de concepts géométrique dans l'activité de la main à la pâte « Sur les pas d'Ératosthène ».
Bertrand LEBOT.

A14 - Activités géométriques à partir de puzzles et Tangrams à l'école.
Claire BRANSIEC, Romain CLAVIER, Cyril GRASSONE, Sandrine LECLERC, Anne PECORARO-BAILLET.

A15 - Explorer les patrons du cube : de l'intérêt des représentations à l'aide de logiciels de mathématique dynamique.
Anne CALPE. Jean-Pierre RABATEL. Sophie SOURY-LAVERGNE. Jean-François ZUCCHETTA.

A21 - Buts et moyens d'une continuité de l'enseignement de la géométrie.
François BOULE.

A22 - L'enseignement de la symétrie orthogonale à la transition école-collège.
Laurent CARAYON, Alain DESTRIBATS.

A23 - Enrichissement d'une vision non iconique avec un logiciel de géométrie dynamique et prémisses d'une géométrie axiomatique-naturelle (GII).
Sylvia COUTAT.

A24 - Spécificités des apprentissages géométriques et spatiaux dans la scolarité obligatoire : quels enjeux pour la formation initiale des enseignants.
M'hammed ENNASSEF, Patrick GIBEL, Sylvie HENRY.

A25 - Faire de la géométrie au cycle 2 et au cycle 3 avec une corde à 13 nœuds.
Mirène LARGUIER, Brigitte BONNET-PHILIP.

A31 - Agir-parler-penser en géométrie – une analyse de pratiques d'élèves de CM2.
Thomas BARRIER, Christophe HACHE, Anne-Cécile MATHE, Stéphanie MONTIGNY.

A32 - GeoGebra entre cour de récréation et feuille de papier : illustration avec le concept de cercle au cycle 3.
Cécile BOMBRUN, René THOMAS.

A33 - Angle droit à l'articulation entre le cycle 2 et le cycle 3.
Henri-Claude ARGAUD, Gérard GERDIL-MAGUERON, Marie-Paule DUSSUC.

A34 - Math'aqui (2) : Un problème ouvert en géométrie pour la formation des enseignants ?
Carine REYDY, Grégory TRAIN, Patrick URRUTY.

A35 - Analyse d'une ressource pour former à l'enseignement de la géométrie.
Catherine TAVEAU.

QUELS TYPES D'ACTIVITÉS PERMETTENT DE DÉVELOPPER LES CONNAISSANCES SPATIALES CHEZ LES ÉLÈVES DU PRIMAIRE ?

LE CAS DE LA BOITE À IMAGE

Patricia Marchand
Université de Sherbrooke
Centre de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage
des sciences, mathématiques et technologie (CREAS)
patricia.marchand@usherbrooke.ca

Annette Braconne-Michoux
Université de Montréal
annette.braconne-michoux@umontreal.ca

Résumé
L'objectif de cet atelier était de présenter et de soumettre à la discussion une séquence d'activités expérimentée auprès d'élèves de niveau CP et CE1 afin de développer leurs connaissances spatiales et de mettre en exergue une structure génératrice d'activités (SGA), employée pour la conception et l'analyse de ce type de séquences d'activités. Trois questions sont à la source de cette préoccupation du développement des connaissances spatiales. Comment se fait-il que certains élèves possèdent et développent des connaissances spatiales (Berthelot et Salin, 1992 ; Clements et Battista, 1992) et d'autres non? Quels types d'activités permettent ce développement (Braconne-Michoux, 2012)? Comment pouvons-nous outiller les enseignants face à cet apprentissage difficile pour plusieurs élèves (Parzysz, 1988) ? De ce questionnement, a émergé un cadre de référence qui comprend, entre autres, une SGA (Marchand, 2006a) permettant l'analyse et la création d'activités. Grâce à cette structure, nous analyserons la séquence d'activités en lien avec la boîte à image et nous identifierons les paramètres de la situation permettant le développement des connaissances spatiales. Ce recul nous permet d'obtenir un regard longitudinal de ce développement. Pour présenter les fruits de cet atelier, nous présenterons d'abord le déroulement de l'atelier puis chacun des temps de ce dernier sera repris en présentant à la fois ce qui était prévu et les échanges réalisés durant l'atelier.

INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DE L'ATELIER

Les connaissances spatiales se développent tout au long de la vie et surtout à travers diverses expériences scolaires et extrascolaires. La classe de mathématiques n'a donc pas l'emprise sur le développement de ces connaissances, mais il nous apparaît tout de même pertinent de proposer des activités ayant un potentiel pour le développement de ces connaissances étant donné qu'elles sont indissociables des connaissances géométriques (Berthelot et Salin, 1992), et qu'il nous semble que, jusqu'à présent, rares sont les propositions qui vont dans ce sens dans le contexte de la classe de mathématiques. Ainsi, notre questionnement de départ en lien avec le développement des connaissances spatiales et de son enseignement était le suivant : comment se fait-il que certains élèves possèdent et développent des connaissances spatiales (Berthelot et Salin, 1992 ; Clements et Battista, 1992) et d'autres non ? Quels types d'activités permettent ce développement (Braconne-Michoux, 2012) ? Comment pouvons-nous outiller les enseignants face à cet apprentissage difficile pour plusieurs élèves (Parzysz, 1988) ?

Pour aborder ces questions, l'atelier a été divisé en quatre temps. En premier lieu, les grandes lignes d'une séquence d'activités en lien avec la boîte à image (Freudenthal et al., 1976) ont été présentées aux participants. Une version modifiée de cette séquence a été vécue par la suite par les participants. Ce deuxième temps a constitué le cœur de l'atelier en permettant aux participants de se familiariser avec la boîte à image et ses diverses possibilités d'exploitation en classe pour en faire une séquence plus ou moins élaborée, et l'adapter selon le niveau scolaire visé. Dans un troisième temps, les animatrices ont présenté une structure génératrice d'activités (SGA), en cours d'élaboration, servant de point de repère pour l'analyse et l'élaboration de séquences d'activités ayant un potentiel pour le développement des connaissances spatiales. La boîte à image a été retenue ici à titre d'exemple pour concrétiser les diverses pistes d'exploitation de cette SGA. Enfin, le quatrième temps devait être consacré au transfert vers la formation initiale et continue de ce qui avait été présenté dans l'atelier, mais le temps a manqué. Par conséquent, nous y reviendrons dans le texte en identifiant quelques pistes pouvant être exploitées en formation initiale et continue.

Dans le texte qui suit, nous présentons en détails chacun des quatre temps de l'atelier en faisant un parallèle entre ce qui était prévu et ce qui a été vécu par les participants lors de l'atelier.

I - TEMPS 1. AVEC VOS ÉLÈVES

Dans cette partie, nous présentons la séquence telle qu'expérimentée par les animatrices en classes de 1ère et 2ième années primaire au Québec (équivalent au CP et CE1), accompagnée de trois productions d'élèves.

La séquence expérimentée était découpée en quatre séances.

Séance 1 : Construction de la boîte

- Les boîtes à chaussures avec un trou sur l'une des petites faces latérales, ainsi que le matériel de construction des objets (ici la pâte à modeler) ont été préparés préalablement à cette première séance. De plus, une thématique a été choisie par l'enseignant (ex. : les animaux marins).
- La consigne donnée aux élèves a été la suivante : « Imaginez une scène que vous pouvez totalement observer par le trou. Quand vous aurez tous terminé votre construction, il faudra écrire trois indices qui permettront de reconnaître votre boîte parmi toutes les autres de la classe. ». À l'aide de la pâte à modeler, les élèves ont dû construire quatre objets qui respectaient le thème des animaux marins, puis ont dû les disposer dans la boîte afin qu'ils soient tous visibles par le trou.
- Durant la réalisation de cette tâche, l'enseignant a circulé dans la classe pour questionner les élèves : vois-tu les 4 objets par le trou ? Comment dois-tu les placer pour tous les voir ? Utilises-tu tout l'espace de ta boîte ? Pour bien voir un objet par le trou, comment dois-tu le disposer dans la boîte (debout, couché, de côté…) ? Y a-t-il des objets plus difficiles à placer ? Tous tes objets entrent-ils dans la boîte? Qu'y a-t-il à gauche de ton arbre ?....
- Lors du retour en grand groupe, l'enseignant est revenu sur ce qu'il avait observé chez les élèves durant la réalisation (stratégies et difficultés rencontrées).

Voici trois exemples de boîtes construites par les élèves – vues de haut :

Anne	*Maxime*	*Sophie*
		

La majorité des élèves ont construit plus de 4 objets, l'espace n'a pas toujours été utilisé entièrement (les objets ont pu être regroupés vers l'avant ou l'arrière). Maxime est un cas particulier : il a construit son zèbre (brun et noir), son léopard (jaune et noir) et son arbre en pâte à modeler à plat sur la table ; il leur a ensuite mis une base afin qu'ils puissent tenir debout. Les profils des animaux sont donc filiformes. Comme d'autres élèves, Anne et Sophie ont dû faire plusieurs aller-retour entre le positionnement des objets da la boîte et la vérification de la vue de face par le trou. La boîte d'Anne est composée d'un dauphin (le plus gros des deux poissons), d'un poisson, de trois « roches » à l'avant de la scène et de deux algues. Celle de Sophie est composée d'un dauphin (le plus gros des deux poissons), d'un poisson, d'une méduse, d'une tortue et de deux algues.

Séance 2 : Devinettes

- L'enseignant s'est assuré que toutes les boîtes des élèves étaient intactes avant de débuter la séance.
- La consigne de description des boîtes à l'aide de trois indices a alors été donnée. L'objectif de cette description donné dès le départ aux élèves était de permettre une meilleure dévolution du problème pour les élèves et qu'ils anticipent le jeu de devinette qui s'en suit.
- Durant la réalisation de la tâche, l'enseignant a circulé pour vérifier la clarté et la justesse de la description des attributs spatiaux (positionnement des objets dans la boîte et relations avec les autres objets).
- Ensuite, les élèves ont joué au jeu des devinettes. Différentes modalités sont possibles à cette étape. Celle-ci a été utilisée dans l'une des deux classes où a eu lieu l'expérimentation : toutes les boîtes à image ont été disposées sur une table et, à tour de rôle, l'enseignant choisissait trois élèves pour réaliser le jeu de devinettes. Il lisait une description et les trois élèves sélectionnés devaient retrouver la boîte en question. En lisant la description, l'enseignant l'a parfois légèrement modifiée afin d'enrichir le jeu (ex. : au lieu de dire qu'un lion était à droite de l'arbre, l'enseignant a pu dire qu'un animal se trouvait à droite de l'arbre). Lorsque les trois élèves avaient choisi une boîte, ils devaient expliciter les indices qui les avaient guidés. S'il y avait différents choix, une discussion s'en suivait pour analyser les différences entre les choix et déterminer la boîte qui correspondait à la description (En quoi ces boîtes sont-elles différentes ? Est-ce qu'elles correspondent toutes à la description ? La description est-elle assez précise pour retrouver la bonne boîte parmi les autres ? Avons-nous besoin d'autres indices pour retrouver la boîte en question?...) Le jeu fut répété un nombre suffisant de fois pour que tous les élèves aient pu y participer activement.

- Lors du retour, l'enseignant est revenu sur l'étape active des élèves de ce jeu de devinette : la description donnée te permettait-elle d'imaginer la scène ? Arrivais-tu à imaginer toute la scène ? Y avait-il un objet plus difficile à imaginer ? Arrivais-tu à imaginer ce qui était en avant, en arrière, à gauche, à droite…? Maintenant que tu connais la boîte, arrives-tu à revoir la scène dans ta tête sans regarder par le trou ?...

Voici les descriptions respectives des trois élèves :

Anne	***Maxime***	***Sophie***
La roche est devant le dauphin *Le poisson est devant l'algue* *Une des algues est derrière le dauphin*	*Le zèbre est derrière l'herbe* *L'arbre est à côté de l'herbe* *Le léopard est à droite du zèbre*	*Le poisson est à côté de la tortue* *Le dauphin est devant l'algue* *La méduse est à droite*

La description d'Anne ne possède pas de fausses informations, mais elle est centrée sur une relation spatiale particulière entre deux objets, soit devant-derrière. Il n'y a aucune précision sur la latéralité des objets entre eux ou en lien avec leur emplacement dans la boîte. De plus, cette description ne donne aucun indice sur l'orientation de chacun des objets (de face, de profil…).

Celle de Maxime ne possède pas non plus d'informations erronées ; elle est composée de plusieurs relations spatiales, mais toujours entre deux objets. Comme dans la description d'Anne, celle de Maxime manque de précision : quelle algue ? De quel côté ?

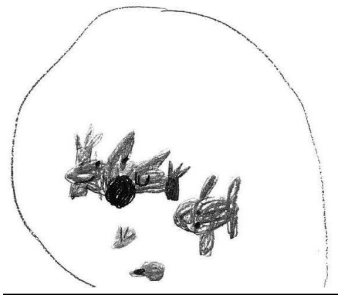
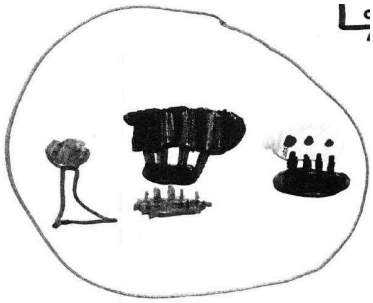
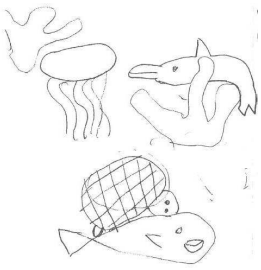
Enfin, la description de Sophie est similaire à celle de Maxime, mais elle comporte une inversion : c'est l'algue qui est devant le dauphin et non l'inverse. Plusieurs élèves ont effectivement eu tendance à inverser les diverses relations entre deux objets, même en ayant accès visuellement à la scène qu'ils avaient construite. Comme il s'agissait d'une première description de leur scène, nous considérons que ces textes représentent un point de départ et qu'ils pourront être précisés par le biais d'activités subséquentes. Par exemple, d'autres boîtes pourraient être construites à partir, cette fois-ci, des mêmes objets, afin de préciser l'utilisation de gauche et droite (la méduse est à ma droite… à la droite de la scène…) et l'orientation de chacun des objets.

Séance 3 : Dessin de la scène

- La consigne qui a été donnée aux élèves pour cette activité était de dessiner, sur une feuille blanche, la scène telle qu'ils la voyaient en l'observant par le trou – comme s'ils en prenaient une photo.
- Durant la réalisation de cette tâche, l'enseignant a circulé pour questionner les élèves sur leur production (Tu as dessiné l'arbre à droite du tigre; est-ce bien ce que tu vois par le trou ? Vérifie. Vois-tu l'arbre au complet lorsque tu regardes par le trou ? Est-ce que cet objet est en avant de la scène ou en arrière ? Est-ce que cet objet touche à l'autre ? Tu as dessiné cet objet en haut sur ta feuille, est-ce qu'il est placé plus haut dans la boîte ?...) Il demandait fréquemment aux élèves d'expliquer leur dessin. Cette phase de verbalisation lui permettait de mieux comprendre ce que l'élève voulait représenter et, du même coup, de mieux comprendre le processus mental lié aux relations spatiales.
- Un deuxième dessin a été réalisé pour la boîte d'un autre camarade de la classe. Une comparaison des deux dessins réalisés pour une même boîte a ensuite été discutée en équipe de deux avec la consigne suivante : quelles sont les ressemblances et divergences entre leurs dessins ?

- En guise de synthèse l'enseignant a donné un dessin à un élève en lui demandant de retrouver la boîte en question parmi toutes les boîtes. Il est également revenu sur les difficultés que certains élèves avaient éprouvées lors des tâches de dessin.

Voici la photo de ce que chacun des élèves voyait par le trou et les dessins respectifs de ces derniers :

Anne	*Maxime*	*Sophie*
 	 	 

Le positionnement des objets est respecté dans le dessin d'Anne, mais il manque un rocher. De plus, l'orientation du dauphin n'est pas très précise, mais le fait qu'il soit placé en diagonale par rapport au plan frontal a pu causer ce manque de précision. Enfin, le poisson est dessiné comme si nous le regardions vu d'en haut et non du trou. Anne a donc réussi à mettre certains objets de sa scène en relation les uns avec les autres, mais pas tous, et il semble y avoir eu un changement de perspective pour au moins l'un d'entre eux.

Maxime a respecté le positionnement et l'orientation de chacun de ses objets toujours dans la vue de face (par le trou), sauf pour l'arbre qu'il a positionné plus à l'avant-scène qu'il ne l'était en réalité (l'arbre devrait être au même niveau ou même un peu plus loin que l'herbe sur le dessin). L'orientation de ses objets était plus simple à gérer que pour Anne, étant donné qu'ils étaient tous dans des plans parallèles au plan frontal, donc de profil quand on regarde par le trou.

Enfin, le dessin de Sophie nous laisse croire qu'elle a procédé par dyade d'objets pour faire son dessin : la tortue et le poisson sont mis en relation, le dauphin et l'algue, et enfin la deuxième algue et la méduse. Mais les relations entre ces dyades ne sont pas respectées. Tout comme Anne, Sophie a dessiné un objet en vue de dessus, la tortue, alors que tous les autres sont dessinés en vue de face.



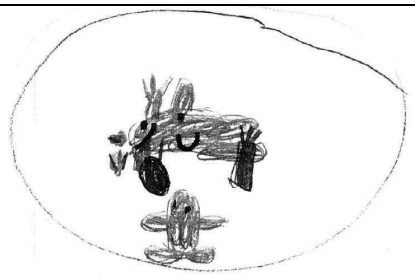
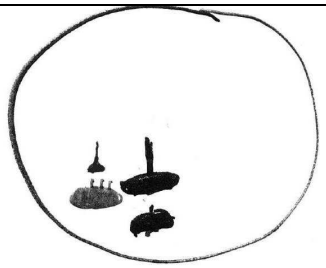
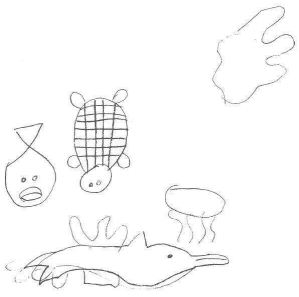
Mais lorsque Sophie a voulu mettre de la couleur à son dessin, elle en a refait un autre et ce dernier ne tenait plus compte des relations spatiales entre les objets. De plus, il y avait toujours une ambiguïté entre la vue de dessus et la vue de face de la scène.

Tout comme nous pouvons le voir avec le premier dessin de Sophie, plusieurs élèves ont eu de la difficulté à dessiner en perspective. Ils ont donc représenté des objets plus hauts que d'autres comme s'ils étaient dans les airs. Dans cette tâche, les élèves devaient apprendre à respecter le positionnement et l'orientation des objets dans la boîte et l'un par rapport à l'autre. Ils devaient dessiner ce qu'ils voyaient et non ce qu'ils savaient de chacun des objets. On retrouve ici le fait que le conflit entre le *su* et le *vu* à l'intérieur de la boîte a été difficile à gérer (Parzysz, 1988). D'une part, le dessin ne saurait refléter des changements de points de vue mais d'autre part, l'éloignement de certains objets et l'effet de perspective, quand on regarde par le trou, ont été difficiles à traduire par le dessin.

Séance 4 : Dessin de la scène vue par un trou imaginaire

- Cette dernière tâche consistait à demander aux élèves de dessiner leur scène comme s'ils la regardaient par un trou du côté droit de la boîte (vue de droite). Mais ils ne pouvaient pas faire ce trou ; ils devaient donc imaginer ce qu'ils verraient. La consigne a été : à quoi ressemblerait ta scène si tu prenais une photo par un trou fait sur le côté droit de la boîte ? (Où seraient les objets dans la boîte et les uns en lien avec les autres ?)
- En circulant, l'enseignant a poursuivi la réflexion en lien avec les relations spatiales en jeu en questionnant les élèves sur ce qu'ils réussissaient à voir ou non dans leur tête et ce qu'ils dessinaient. Il a fallu, à cette étape, aider les élèves dans le développement de stratégies pour qu'ils arrivent à s'imaginer leur scène ou du moins une partie de leur scène dans leur tête et qu'ils puissent anticiper une vue du côté droit de la boîte : par exemple, en leur proposant de prendre d'abord un objet à la fois et ensuite d'en mettre deux en relation l'un avec l'autre, de choisir un point de repère dans la boîte (ex. : balayer de gauche à droite), de tourner la boîte ou de se déplacer pour être du côté droit de la boîte …
- Lors de la mise en commun, l'enseignant est revenu sur les diverses stratégies que les élèves avaient utilisées et qu'ils pouvaient réinvestir lors d'une activité ultérieure.

Voici les productions de nos trois élèves :

Anne	*Maxime*	*Sophie*
		

Le dauphin d'Anne est toujours représenté perpendiculairement par rapport à ce nouveau point de vue. L'orientation du poisson et son positionnement par rapport au dauphin sont respectés, mais pas son point de vue ; il est encore dessiné en vue de haut. Nous avons, de plus, l'impression que le dauphin est au-dessus du poisson alors que les deux sont sur la base de la boîte, donc l'un cache l'autre partiellement. En revanche, elle a correctement mis en relation le dauphin avec d'autres plus petits objets (les rochers et les algues).

Maxime a réussi à produire un dessin respectant l'orientation et le positionnement de chacun de ses objets selon ce nouveau point de vue. Il faut par contre mentionner que les relations entre ses

objets, leur positionnement et orientation dans la boîte étaient simples (perpendiculaires à ce nouveau plan frontal et très minces).

Sophie a su mettre en relation le dauphin et l'algue, mais ce nouveau point de vue ne semble pas avoir été respecté pour les autres objets (qui ont été plutôt dessinés en vue de dessus). Ces dessins devront être retravaillés avec les élèves par le biais d'activités subséquentes afin d'améliorer la prise en compte des relations spatiales dans ce type de tâches.

Cette séquence est prise ici à titre d'exemple, mais il existe une infinité de variantes selon les choix que l'enseignant fera quant aux objectifs d'enseignement et d'apprentissage. Nous pourrions, entre autres, demander aux élèves de construire une boîte à image à partir d'un dessin ou d'une description, ou encore, donner à un élève les objets et une boîte à image vide et lui demander de la reconstituer grâce aux indices qu'un autre élève lui fournirait. Ces deux variantes pourraient permettre aux élèves de préciser leur description, leur dessin ou leur construction d'un point de vue spatial.

II - TEMPS 2 : À VOUS DE JOUER

Lors de l'atelier, les participants ont expérimenté une version un peu modifiée de cette séquence. La variante est ici présentée avec trois exemples de productions du groupe. (Nous voudrions d'ailleurs en profiter pour remercier tous les membres du groupe qui ont joué le jeu – tous les membres ont très bien joué le jeu pendant toute la période !!!)

Temps 1 : construction de la scène

Cette étape a été réalisée avec des figurines pour enfants prédéterminées (ex. : bonhomme, chaise, cheval, fleurs…) et les participants ont eu à les positionner afin qu'ils puissent tous les voir par le trou. Initialement, toutes les équipes devaient avoir les mêmes objets, mais une erreur de manipulation est venue court-circuiter cette variante. Voici trois productions :

Équipe A	*Équipe B*	*Équipe C*
		

Lors de la construction, les équipes ont discuté du positionnement des objets (ex. : ne pas mettre les plus gros en avant), de l'orientation des objets (ex. : debout, couché, de profil…), des limites de l'espace (ex. : nous devons fermer la boîte et donc le cavalier ne doit pas dépasser), des limites du point de vue (tous les objets doivent être visibles en un seul coup d'œil par le trou, comme si nous prenions une photo). Ainsi, tout comme les élèves, les échanges en sous-groupe lors de la construction de la scène ont porté sur les relations spatiales entre les objets.

Temps 2 : description

Chaque équipe devait produire une description de sa boîte en quelques lignes afin qu'une autre équipe puisse l'identifier parmi toutes les autres. Voici trois exemples de descriptions obtenues :

Équipe A	*Équipe B*	*Équipe C*
Le lapin est posé sur la chaise à gauche de la scène. *Le cheval mange les fleurs. Il a un cavalier.* *La femme regarde le cheval et les fleurs, elle est à sa gauche.*	*Je suis le lapin. Je tourne le dos à la fenêtre et je vois toute la scène.* *Devant moi, un bac à fleurs, derrière ce bac à fleurs, à ma droite, un chat me fait face, assis sur une chaise. Un peu plus loin sur ma gauche, un homme sur un cheval. Je vois leurs profils gauches. Une dame debout à gauche du cheval me regarde.*	*Au premier plan à gauche, on voit le bac à fleur sur toute sa longueur.* *Au deuxième plan à droite, on voit le cavalier sur son cheval, parallèle au bac à fleurs, le cheval et le cavalier regardent vers la gauche.* *Au troisième plan à gauche, la femme est assise sur la chaise avec le lapin sur ses genoux. Le lapin a la queue vers sa main droite et la tête vers sa main gauche. La chaise est orientée Nord-Ouest, Sud-Est et fait face à l'observateur.*

Cette étape a duré une dizaine de minutes. Les équipes ont dû choisir leur point de repère (ex : celui de l'observateur ou d'un personnage dans la scène). En classe, les élèves ont tous choisi spontanément le point de vue de l'observateur (à l'extérieur de la boîte). Ensuite, les échanges ont porté sur le choix des mots, leur niveau de précision en lien avec la position des objets dans la boîte, leur orientation et leur relation les uns par rapport aux autres. Les élèves ont réalisé le même type d'échanges selon leurs compétences spatiales.

Temps 3 : devinettes

À cette étape, une animatrice a lu la description de l'équipe A à tout le groupe alors que toutes les boîtes étaient réunies sur le bureau de la salle. Les participants ont été amenés à écouter la description en imaginant la scène (ex. : sans prendre de note). La description a dû être lue à deux reprises. Par la suite, au hasard, chaque équipe a reçu une boîte et a dû déterminer si cette boîte correspondait à la description qui venait d'être lue. Le fait d'avoir inversé certains objets lors de la préparation du matériel a créé des absences ou des intrus dans les boîtes et a permis à certaines équipes d'éliminer rapidement certaines boîtes. Un retour en grand groupe a été fait où nous avons demandé aux participants comment ils avaient procédé. Les principales procédures retenues pour s'imaginer la scène à partir de sa description étaient les suivantes : « dans l'ordre de la description, je me suis demandé quel était le référent ; le fait d'avoir manipulé les objets avant nous a permis d'avoir des images dans notre tête, mais il est difficile de s'imaginer la scène lorsque le point de vue change ; puisque la description ne nous permettait pas de voir les positionnements relatifs, je suis passé à une vue de dessus (sur une seule dimension), je me suis imaginé plusieurs scénarios afin d'avoir une vue d'ensemble de la scène ; je me suis rappelé des informations importantes (recourir à la mémoire si nécessaire) et enfin, la scène était séparée en deux images puisque le description de donnait pas d'indices sur la relation entre ces deux parties de la scène ».

Une deuxième description (équipe B) n'a été lue qu'une seule fois. Tous les participants, contrairement à la première description, semblaient avoir construit une image dès la première lecture. Une discussion s'en est suivie à propos de l'expression « à gauche du lapin » : par rapport à quoi ? À sa gauche, à celle de l'observateur ? Les procédures utilisées par les participants à propos de cette description étaient du type : la scène est construite dans le sens de la lecture et

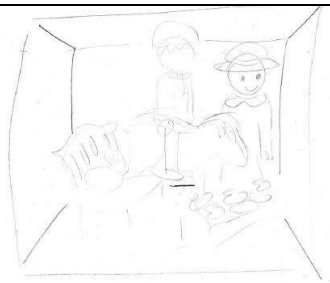
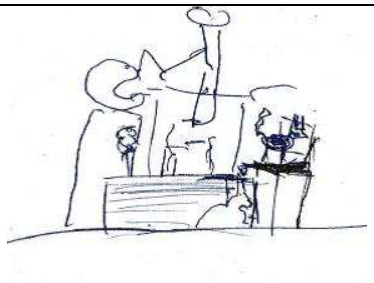
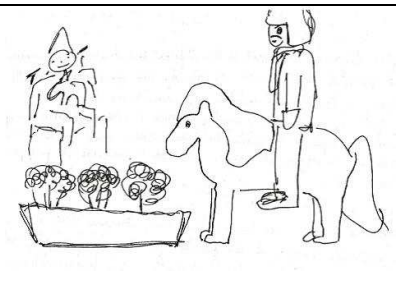
donc j'ai suivi cet ordre ; cette description était plus visuelle, on pouvait facilement se construire la scène… Mais, le point de vue du lapin pris par les auteurs de cette description en a aidé certains et pas d'autres. Lorsqu'ils ont reçu leur boîte, plusieurs équipes ont procédé par élimination selon les indices donnés par la description.

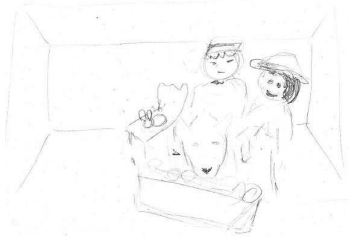
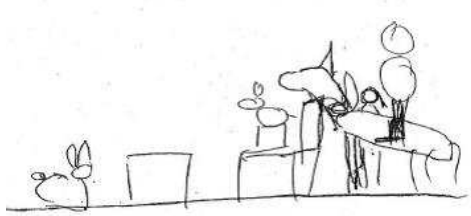
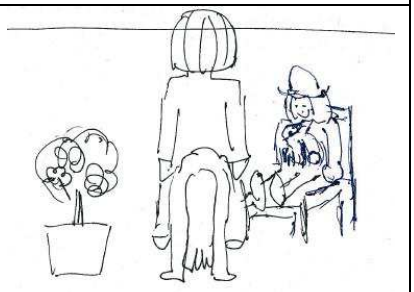
Globalement, certains participants ont mentionné que la première description était plus facile que la seconde parce qu'ils ont considéré que la présence d'un autre référent (le lapin est l'observateur, comme cela a été le cas dans la deuxième description) avait rendu la tâche plus complexe. Dans le même temps, d'autres participants disaient le contraire, affirmant que le changement de référent, ici le lapin observateur, leur avait permis d'entrer plus facilement dans la scène puisqu'ils faisaient à présent partie de cette scène. Les participants ayant trouvé la première plus facile se sentaient contraints par le nouveau point de référence (ex. : « ça choque et cela a changé ma façon de faire »). Des questions ont émergé de cette discussion : et si le lapin était dans un point de vue opposé à l'observateur ? Est-ce que s'approprier un personnage représente une aide ? Enfin, une comparaison entre les deux types de descriptions lues a été réalisée : alors que la première était davantage structurée en deux parties, la deuxième permettait d'entrer en profondeur dans la boîte, plan par plan ; alors que la première ne donnait que peu d'indices sur l'organisation spatiale des éléments les uns en lien avec les autres, la deuxième exposait la scène comme un enchaînement, une histoire, on n'avait pas besoin de revenir en arrière. En classe, les élèves ont également observé des différences dans la formulation des descriptions lues, mais souvent celles-ci étaient orientées vers la précision des informations.

Temps 4 : dessins de la boîte

La consigne qui a été donnée demandait de faire deux dessins : un premier dessin qui illustre la scène que nous pouvons voir par le trou et un deuxième dessin illustrant la scène que nous pourrions voir par un trou imaginaire placé sur la face de droite de la boîte.

Voici des exemples de dessins produits par les trois équipes respectives :

Équipe A	*Équipe B*	*Équipe C*
Dessin selon la vue du trou		
		

Dessins selon la vue de droite		
		

Pour le premier dessin, les échanges ont porté sur la lunette à prendre pour faire le dessin (soit d'un seul coup d'œil soit en balayant la scène) et sur la manière de dessiner les objets cachés par d'autres : faut-il rendre compte de la perspective à l'intérieur de la boîte ou au contraire, dessiner une vue de face de la boîte ? Pour la vue de droite, les échanges à propos de la gestion des informations, du positionnement et de l'orientation des différents objets composant la scène se sont intensifiés : comment sera placé le cheval ? Qu'allons-nous voir du lapin ? Quelle sera la distance entre les objets ? Voici certaines procédures explicitées par des groupes pour la vue de droite : j'ai tourné la boîte, j'ai imaginé une fenêtre à droite et j'ai regardé la scène dans ma tête ; je me suis fixé un point de repère (ex. : tous les objets sont placés parallèlement au trou lorsque je les regarde par le trou existant et donc ils seront perpendiculaires par le trou de droite, j'ai reconstruit la scène plan par plan, tous mes personnages étaient de face initialement et donc par le trou de droite, il seront tous de profil) ; j'ai utilisé la vue du dessus comme perspective intermédiaire ; dans notre équipe chacun a fait un dessin alors que pour la description nous avions collaboré pour la produire, mais nous considérons que les brouillons ont été bénéfiques car ils nous ont permis de voir ce qui était correct et ce qui ne l'était pas. Il semblait difficile ici d'obtenir la vue demandée, certains revenant spontanément à une vue du dessus vue de droite. Le groupe a également mentionné que le but de la réalisation d'un tel dessin doit être clair dès le départ puisque les élèves ne produiront peut-être pas le même type de dessins si c'est pour rejouer au jeu de devinette ou si c'est pour reproduire le plus fidèlement possible leur propre scène. De plus, une question a été soulevée : ferions-nous le même type de dessin si nous dessinions la boîte, vue de droite, d'une autre équipe ? Cette question serait intéressante à explorer. Le conflit *su* et *vu* au sens de Parzysz (1988) a également été soulevé. Mais nous sommes ici dans le cadre des relations spatiales entre différents objets, alors s'agit-il du même *su* et du même *vu* ? La question est à explorer. Enfin, le moyen utilisé pour avoir accès aux connaissances spatiales des élèves, soit le dessin, pourrait être questionné : le dessin peut-il représenter un obstacle supplémentaire pour les élèves ? Serait-il préférable de demander une description verbale (voire orale) de la vue de droite ? Ou encore, aurait-on intérêt à fournir une description d'une scène, vue de face, et demander aux élèves de construire la vue de droite de cette même scène à l'aide du matériel nécessaire (boîte et objets) ? Ces propositions qui sont autant d'interrogations en termes d'apprentissages que d'aides à apporter aux élèves sont apparues au cours de la phase de dessin de la vue de droite.

Temps 5 : description de la vue de droite

Équipe A	*Équipe B*	*Équipe C*
Le lapin est posé sur la chaise à gauche de la scène. *Le cheval mange les fleurs. Il a un cavalier.* *La femme regarde le cheval et les fleurs, elle est à sa gauche.*	*Je suis toujours le lapin. Je suis tout à gauche de la scène et je vous montre mon profil droit.* *Devant moi, un bac à fleurs, derrière ce bac à fleurs, à ma droite, un chat me fait face, assis sur une chaise. Un peu plus loin sur ma gauche, un homme sur un cheval. Je vois leurs profils gauches. Une dame debout à gauche du cheval me regarde.*	*Je suis le cavalier. Je suis sur un cheval et nous tournons tous les deux le dos à la fenêtre (de droite). À ma gauche, un bac à fleurs est placé parallèlement au cheval.* *Au fond à droite, une femme me regarde assis sur une chaise avec un lapin sur les genoux. La tête du lapin est tournée vers sa droite.*

Ce temps est un ajout par rapport à la séquence d'activités expérimentée, considérant que le défi était trop grand pour des élèves d'école primaire (CP et CE_1). Voici, outre les procédures déjà mentionnées pour le temps 2 de la séquence d'activités, quelques commentaires émis par le groupe pour la rédaction de cette description : il faut se choisir un point de repère ; il nous a semblé difficile de prendre le nouveau point de vue de l'observateur et nous ne savions pas si nous devions inscrire des informations au sujet des objets non-visibles depuis ce nouveau point de vue (ex. : un lapin se cache derrière le cheval). Ainsi, pour orienter davantage les élèves plus âgés dans ce type de tâche, nous pourrions leur demander de compléter la phrase suivante : « si je fais un trou ici, à droite de ma boîte, et que j'y regarde, je vois… » . Les élèves pourraient alors poursuive leur description de la scène de la même manière. À la fin de cette étape, une autre question fut posée : quelle pourrait être la validation ? Devrions-nous prévoir des photos préalablement des vues de droite des diverses scènes et demander aux élèves de valider leur dessin avec cette dernière ? Ce type de validation pourrait tout à fait être adapté selon le but fixé par l'enseignant. Lors de l'expérimentation avec les élèves, la validation se faisait davantage au cours du jeu des devinettes, par la reconnaissance du dessin ou de la description avec la scène initiale par les camarades. Nous n'avons pas eu tendance à proposer aux élèves une validation visuelle puisque nous voulions nous centrer sur le développement des connaissances spatiales et donc sur le processus d'intériorisation et de création d'images mentales. Nous ne voulions pas que les élèves demeurent au niveau de constat visuel. Mais, la question de la validation doit être abordée en fonction des objectifs que l'enseignant se donne en proposant ce genre d'activités.

Temps 6 : Devinettes

Nous avons encore fait le choix de distribuer les boîtes à chacune des équipes une fois que la description a été lue par l'animatrice. Même si cette tâche a semblé plus complexe que les premières devinettes, les procédures ont été sensiblement les mêmes, en particulier les procédures par élimination : l'orientation d'un objet n'était pas respecté (le bac à fleurs devait être parallèle, mais il ne l'était pas); il y avait un intrus ou un absent; il y avait 4 plans alors que seulement 3 étaient décrits. Mais certaines équipes ont eu besoin de plus de temps avant de donner une réponse définitive. La description a été relue une fois alors que toutes les équipes avaient leur boîte en main et ont pu vérifier les informations en observant la scène par la vue de face. Certains

participants ont soulevé que dans la description lue, il y avait un mélange entre le vocabulaire utilisé par l'observateur et celui qui s'appuie sur un repère extérieur et ceci a été perturbant. D'autres se sont posé la question de savoir si la description était bonne, c'est-à-dire compatible avec une des scènes des boîtes existantes.

Enfin, une discussion autour de la progression d'apprentissage entourant une telle séquence d'activités en lien avec le développement des connaissances spatiales a émergé. La répétition d'activités comme celles proposées autour de la boîte à image fournit une multiplicité d'occasions pour approfondir les connaissances spatiales (positionnement, orientation et organisation spatiale) en demandant d'une fois à l'autre aux élèves de préciser certains éléments de leurs productions. Par exemple, cinq boîtes différentes peuvent avoir été générées à partir d'une seule description et nous pourrions demander aux élèves comment préciser la description pour en obtenir une qui soit unique et spécifique de la scène initiale. Le travail autour de ces activités permet, parallèlement au processus d'intériorisation des connaissances spatiales, de préciser le vocabulaire en lien avec les différents points de repères, les objets orientés, les repères générés par l'objet ou par l'observateur.

III - TEMPS 3 : À NOUS DE JOUER

Dans cette section, nous présentons quelques éléments théoriques soutenant les enjeux didactiques derrière certains choix critiques qui ont été effectués dans l'adaptation de la séquence d'activités de la boîte à image autant en classe qu'avec les participants à l'atelier.

D'abord, clarifions ce que nous entendons par connaissances spatiales. Notre définition s'inspire fortement de celle énoncée par Berthelot et Salin (1992) : il s'agit de connaissances qui, par le biais des cinq sens, amènent l'apprenant à contrôler, anticiper et communiquer les états, les transformations ou les déformations des données (forme, position, orientation) d'objets relatifs à l'espace (Marchand, 2009). Par exemple, être en mesure d'anticiper la forme, l'apparence, d'un solide d'après son patron relève des connaissances spatiales.

À partir de cette définition, nous avons analysé plusieurs activités, certaines semblant plus riches que d'autres ; nous avons conçu et expérimenté diverses séquences d'activités pour arriver à concevoir une structure théorique, une structure génératrice d'activité, la SGA, nous permettant de porter un regard nouveau sur les activités proposées en classe et, de manière longitudinale, sur des séquences d'activités pouvant être potentiellement plus propices au développement des connaissances spatiales chez les élèves. Cette structure donne des éléments d'analyse des productions des élèves réalisant ses activités. Elle est présentée ici sous forme d'une « marguerite ». Les pétales représentent des variables de la situation déjà énoncées par la littérature actuelle mais que nous considérons comme primordiales dans la planification de séquences d'activités visant le développement des connaissances spatiales. Le centre de la « marguerite » est l'élément que nous considérons incontournable non seulement pour solliciter les connaissances spatiales, mais surtout pour les développer de manière plus transparente en classe de mathématiques (Marchand, 2009; 2006a et b) : l'élève ne doit avoir un temps de réflexion, sans avoir recours à la vue. Rappelons les cinq variables tirées de la littérature, les cinq pétales de la « marguerite ».

Un premier choix que nous devons faire lors de la conception d'une activité, ou plus largement d'une séquence d'activités, est celui de **l'espace** visé. Voulons-nous travailler dans le micro-espace, dans le méso-espace ou le macro-espace (Brousseau, 1983) ? Dans notre cas, l'espace était déjà prédéterminé pour les activités en lien avec la boîte à image, soit le micro-espace. Un deuxième

choix porte sur les **objets** qui seront mis en jeu dans l'activité : quelle sera la dimensionnalité de ces objets ? Ici, ils sont tirés de l'espace en trois dimensions, mais ils pourraient être des objets du plan donc en deux dimensions. Quelles seront leur nature, physique ou géométrique, familier ou non? Ici, nous avons fait le choix de travailler sur des objets physiques tirés du quotidien des élèves. Le mode d'accès à ces objets (représentation prototypique (ou non), construction, ou description) sera une autre variable de situation exploitable. Chronologiquement pour la séquence expérimentée auprès des élèves, ils ont eu accès d'abord aux objets réels, puis les allers-retours entre ce mode d'accès et leurs descriptions ont été valorisé par l'activité des devinettes et enfin un dernier passage a été réalisé grâce aux deux dessins entre les objets eux-mêmes dans la boîte et leur représentation. La quantité et la complexité des objets sont autant de variables didactiques. Pour les élèves, nous avions choisi de leur demander d'utiliser quatre objets et la complexité spatiale de ces derniers pouvait dépendre de leur choix d'animal (ex. : poisson versus hippocampe). Pour des élèves plus âgés nous pourrions choisir des solides (non orientés) au lieu des objets (orientés) et ainsi jouer sur leur niveau de complexité (ex. : pyramide droite ou oblique) et sur leur composition (ex. : construction composée d'un ou plusieurs solides).

Maintenant que ces deux premières variables sont fixées, troisième choix, il faut envisager les **tâches** qui seront demandées aux élèves : devront-ils observer et identifier, décrire, classifier, construire, représenter, chercher ou argumenter (Piaget, 1973)? Chronologiquement dans notre cas, les élèves ont été amenés à construire la boîte, à la décrire et l'identifier et à en proposer deux représentations relevant du dessin, la première en observant ce qu'ils voyaient par le trou et la deuxième en anticipant, en cherchant, la scène selon un autre point de vue, non accessible. Le choix des tâches est important, mais leur ordre l'est d'autant plus : l'inversion de deux tâches peut provoquer un tout autre apprentissage spatial chez les élèves. Par exemple, ici les élèves ont dû construire leur boîte puis la décrire, mais si nous leur avions demandé de décrire leur boîte avant de la construire auraient-ils procédé de la même manière?

Les deux dernières variables découlent des choix précédents. D'abord, quelles sont les **images mentales** mises en jeu dans l'activité (Piaget et Inhelder, 1947; Legendre, 1993; Denis, 1979) : statiques, cinétiques ou transformatrices ? Reproductrices ou anticipatrices ? La boîte à image fait référence à des images mentales statiques, sauf peut-être pour le dessin vue de droite où certains élèves pouvaient mentalement faire tourner les objets dans leur tête pour voir leur nouvelle apparence selon le point de vue de droite. De plus, il s'agit d'images reproductrices sauf, encore une fois, pour la tâche liée au dessin vue de droite où les élèves devaient s'imaginer leurs objets depuis un nouveau point de vue, où l'anticipation était non pas sur les objets eux-mêmes, mais sur leur positionnement dans la boîte et en relation les uns avec les autres. Enfin, à quel niveau du **développement** spatial se situe l'activité? Plusieurs théories peuvent être utilisées pour répondre à cette question. Nous pensons à la théorie des niveaux de pensée en géométrie de Van Hiele (1959, 2002), la théorie des paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak (2000), les différentes rôles de la figure de Duval (2005) et le conflit entre le *su* et le *vu* de Parzysz (1988, 2007). Mais, ce volet de la SGA est encore en construction puisque le développement des connaissances spatiales a été jusqu'à présent traité en parallèle au développement des connaissances géométriques et selon nous, il faudrait proposer un modèle qui soit spécifique au développement du sens spatial, dissocié des connaissances géométriques dans un premier temps pour, dans un second temps, les arrimer à nouveau. Ce travail est à suivre…



Ces cinq variables sont celles que nous avons considérées pour la SGA, mais elles ne sont pas exhaustives, d'autres pourraient s'y greffer éventuellement. Il nous reste une seule variable à décrire pour notre SGA et il s'agit d'une variable novatrice et incontournable pour la valorisation du développement des connaissances spatiales pour l'ensemble des élèves de la classe. Celle-ci a émergé des suites d'une étude doctorale ayant un cadre conceptuel multidisciplinaire et puisant sa source dans d'autres domaines d'apprentissage que les mathématiques, où la valorisation du développement des connaissances spatiales spécifiques, comme le développement des images mentales, a fait l'objet de tout un champ de recherches, soit le domaine sportif (Marchand, 2006b). Ainsi, ce qui a été mis en évidence est que certains élèves peuvent développer leurs connaissances spatiales seulement avec les variables précédemment identifiées ou grâce à des expériences extracurriculaires (ex. : sport, musique ou jeux vidéo), mais pour la majorité des élèves il semble qu'il faut faire davantage. En fait, comme les connaissances spatiales font référence à des composantes de contrôle, d'anticipation et de communication, nous croyons que leur intériorisation est primordiale à leur construction chez l'apprenant. Par conséquent, l'enseignant doit non seulement jouer sur les variables précédentes, mais également planifier des temps d'intériorisation dans le déroulement des tâches qu'il proposera à ses élèves et il devra les questionner sur ce temps pour en savoir davantage sur leur activité en terme de développement du sens spatial. Une des façons simples de provoquer cette intériorisation en géométrie est de limiter le temps d'observation ou encore d'éliminer complètement le recours à la vue comme source de résolution d'une problématique spatiale. Par exemple, pour la boîte à image, nous avons retrouvé ce temps lorsque nous avons demandé aux élèves de dessiner la vue de droite alors qu'ils n'avaient pas accès à cette vue visuellement. La mise en commun gérée par l'enseignant a alors porté essentiellement sur cette intériorisation et sur le passage au dessin. Avec les participants à l'atelier, nous avons ajouté un autre temps où la vue ne pouvait pas être la source de la résolution : lors du jeu des devinettes, les participants n'ont pas eu accès aux boîtes, ils ont dû imaginer la scène « dans leur tête » et comparer cette anticipation par la suite avec la boîte qu'ils avaient reçue, le questionnement des animatrices par la suite portant spécifiquement sur la construction de cette image mentale, sur sa comparaison avec la boîte reçue et sur une seconde devinette.



Lors de l'atelier, une question a été posée :

En quoi cette SGA est-elle spécifique au développement des connaissances spatiales ?

Voici des pistes de réponse : ce qui nous semble être spécifique aux connaissances spatiales sont les problématiques mises en jeu lors du temps d'intériorisation. Ces dernières ne sont pas en lien avec les connaissances géométriques des objets en jeu : par exemple, la question n'est pas de savoir s'il s'agit bien d'un pavé droit pour parler du bac à fleurs, mais quelle est à sa position et son orientation dans la boîte et par rapport aux autres objets de la boîte. L'enjeu est spatial et non géométrique. De plus, cette problématique oriente le questionnement de l'enseignant lors de la mise en commun comme nous l'avons vu plus haut. Il ne pose pas des questions du type : quels sont les solides que vous reconnaissez à travers les objets dans la boîte ? Est-ce bien un pavé ? La boîte est composée de combien d'arêtes ? Comme l'ont remarqué Berthelot et Salin (1993-1994), ce glissement vers les connaissances géométriques à travers les activités proposées en classe, même parmi celles proposées par les manuels scolaires, est très fréquent et représente, selon nous, une des sources principales de la méconnaissance des acquis des élèves du point de vue des connaissances spatiales et du même coup du potentiel de leur développement en classe de mathématiques. Les trois questions essentielles à se poser pour un enseignant s'il veut développer les connaissances spatiales chez ces élèves sont : l'activité met-elle en jeu des problématiques spatiales ? Y a-t-il un temps d'intériorisation durant l'activité ? Et, mon questionnement porte-il explicitement sur ce temps de l'activité ?

Cette description de la SGA en lien avec la séquence d'activités de la boîte à image met en évidence son exploitation possible dans la conception et l'adaptation d'activités déjà existantes, en explicitant les variables qui ont été prises en compte *a priori* pour cette séquence d'activités. Elle pourra également, *a posteriori*, servir de point de repère dans l'analyse de productions des élèves : les élèves semblent-ils bien fonctionner dans le micro-espace ? Quelles tâches semblent difficiles pour eux ? … De plus, elle pourrait être utilisée comme structure génératrice d'activités en jouant sur une ou deux variables pour les activités subséquentes : on pourrait demander aux élèves de

construire une boîte à image avec de nouveaux objets à partir d'une description verbale. Ainsi, en inversant l'ordre des tâches, on y ajouterait une plus grande part d'images anticipatrices en introduisant de nouveaux objets et une disposition de ces derniers encore jamais vue par les élèves. Il s'agit de modifier une des variables identifiées pour générer une nouvelle activité pour les élèves. D'ailleurs, un mode de fonctionnement court et répétitif durant l'année scolaire est propice au développement de ce type de connaissances en opposition avec un mode de fonctionnement plus intensif et long (Marchand, 2006a; 2009). Cette facette du développement des connaissances spatiales a été soulevée par certains participants de l'atelier qui ont mentionné qu'ils pourraient aisément intégrer la séquence d'activités de la boîte à image dans la routine de la classe.

Une deuxième question a été posée :

Cette idée d'une nécessité d'un passage constant entre l'image, sa représentation et sa description existe déjà, alors qu'est-ce qui est novateur dans la SGA ?

Voici des pistes de réponse : en fait, ce que dit la SGA est qu'il faut introduire un temps intermédiaire entre ces passages où la vue des objets (papier ou réelle) ne peut être la source de résolution d'une problématique ici spatiale. De plus, le but de l'enseignant devrait être de questionner les élèves sur ce temps d'intériorisation des relations spatiales en jeu afin d'en prendre connaissance et d'aider les élèves à les construire. Par conséquent, si ce temps n'est pas prévu dans la tâche demandée, sur quoi l'enseignant questionnera les élèves lors de la mise en commun ? Sur des constats visuels ou encore des propriétés géométriques. Dans le premier cas, nous restons au niveau de l'observation et dans le deuxième, nous glissons vers les connaissances géométriques. En affirmant que ce temps d'intériorisation est nécessaire au développement des connaissances spatiales, la SGA sous-entend également que la manipulation (sans intériorisation) peut même nuire ou court-circuiter le développement des connaissances spatiales chez plusieurs élèves (Marchand, 2006b). Un autre exemple que l'on peut tirer de la boîte à image : la construction d'une maison à partir d'une description. Nous pourrions donner une description écrite de la maison (sa base étant un pavé droit et son toit, une pyramide à base rectangulaire…) et ensuite demander aux élèves de construire cette maison à l'aide de pailles à leur disposition en s'assurant que la construction respecte la description. Mais ce type d'activité qui permet le passage entre la description et l'objet et vice-versa ne possède pas de temps d'intériorisation et donc n'a peut-être pas un grand potentiel pour le développement des connaissances spatiales ou du moins elle donne peu d'accès à leur développement chez l'élève. Si nous mentionnons aux élèves qu'ils devront construire leur maison avec des pailles de trois grandeurs différentes (petites, moyennes et grandes) et qu'ils devront venir chercher en une seule fois et avant toute construction le nombre exact de pailles de chacune des trois grandeurs, nous ajoutons un temps d'intériorisation et l'enseignant pourra questionner les élèves sur ce temps lors de la mise en commun (Marchand, 2006b). Nous croyons que ce temps d'intériorisation et le questionnement qui en découle lors du retour collectif constitue un maillon important dans le développement des connaissances spatiales en classe de mathématiques, mais négligé jusqu'à présent.

IV - TEMPS 4 : AVEC VOS ÉTUDIANTS

Nous voulions qu'à l'issue de cet atelier, les participants repartent avec non seulement une séquence d'enseignement valorisant le développement des connaissances spatiales à l'école primaire (celle de la boîte à image), mais aussi qu'ils soient initiés à un outil de création et

d'analyse pour des activités ultérieures sur cet objet d'apprentissage, soit la SGA. Nous pensons que ces objectifs ont été atteints en majeure partie, mais qu'une partie importante reste sans réponse selon le discours des participants. Effectivement, la SGA ouvre plusieurs portes et peut-être même trop pour pouvoir l'exploiter telle quelle en formation initiale ou continue. Il est vrai que la SGA ouvre une panoplie de possibilités et que dans le cadre de la formation initiale, il serait pertinent de canaliser l'information en diminuant le nombre de variables et en proposant des ordres d'ouverture des portes d'entrée à la SGA, un peu comme nous venons de le proposer dans le présent texte. Dans le cadre d'une séance de formation continue, il serait sans doute plus plausible de développer davantage la SGA pour l'analyse ou la création d'une activité favorisant le développement du sens spatial.

V - CONCLUSION

Les participants à l'atelier ont découvert, par l'activité de la boîte à image, la distinction que l'on peut faire entre les connaissances spatiales et les connaissances géométriques. La Structure Génératrice d'Activités (SGA) permet d'analyser ou de créer des activités source d'apprentissage et de développement des connaissances spatiales chez les élèves. La particularité de cette SGA est de mettre en évidence le fait que, dans toute activité liée à l'espace (construction d'une scène, dessins de ces scènes, etc.), l'enseignant doit ménager un temps d'intériorisation entre la dévolution de l'activité et l'action de l'élève, interroger l'élève sur ce temps d'intériorisation pour mettre en évidence ses apprentissages spatiaux éventuels.

Cette activité de la boîte à image telle que proposée à l'atelier s'est révélée très riche (voire trop) et a mené les participants à évoquer les changements de variables, les conditions de mises en œuvre, les apprentissages qui peuvent y être associés, autant de paramètres décrits dans la SGA. Mais cette même SGA est sans doute un support théorique trop complexe pour être présentée telle quelle en formation initiale, faute de temps devant les étudiants. Il faut donc penser à proposer des versions plus segmentées mettant en évidence chaque « pétale de la marguerite » de la SGA pour que les étudiants puissent envisager de l'exploiter rapidement en classe. En revanche, elle pourrait être présentée dans le contexte de la formation continue des enseignants du primaire.

VI - BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1993-1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, **53**, 39-53.

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.

BOLDUC M. (1982). La boîte à image. *Instantanés mathématiques,* mai, 26-30.

BRACONNE-MICHOUX A. (2012) Des tours de D. Valentin aux représentations planes des objets de l'espace, in *Actes du XXXIXe colloque de la COPIRELEM*, Quimper, France.

BROUSSEAU G. (1983). Étude de questions d'enseignement, un exemple de la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique.*

CLEMENTS D. H. & BATTISTA M.T. (1992) Geometry and spatial reasoning, *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Douglas A. et Grouws, Macmillan publishing compagny, New York, Chap. 18, 420-464.

DENIS M. (1979). *Les images mentales*. Presses universitaires de France, Paris.

DUVAL R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et de Sciences cognitives*, 10, 5-53.

FREUDENTHAL H. *et al.* (1976). Five Years IOWO on H. Freudenthal's Retirement form the Directorship of IOWO. Reprinted from *Educational Studies in Mathematics*, Reidel Publishing compagny, Dordrecht, Holland, **7** (3), 197-203.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *Recherches en didactique des mathématiques*, **20/1**. La pensée sauvage : Grenoble.

LEGENDRE R. (1993) *Dictionnaire actuel de l'Éducation. 2e édition*, La collection «Le défi Éducatif», Guérin, Montréal, et ESKA, Paris.

MARCHAND P. (2009). L'enseignement du sens spatial au secondaire : analyse de deux leçons de troisième secondaire. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* (*CJSMTE*), Routledge, Taylor & Francis Group, **9 (1)**, 30-49.

MARCHAND P. (2006a). Comment développer les images mentales reliées à l'apprentissage de l'espace en trois dimensions ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11**, 103-121.

MARCHAND P. (2006b). *La géométrie, tout un sport !* Les Éditions Bande Didactique, *Mathèse*.

PARZYSZ B. (1988) Knowing *vs* Seeing : Problems of the plane Representation of Space Geometry., *Educational Studies in Mathematics*, **19**, 79-92.

PARZYSZ B. (2007). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didactica,* **17**, 121-144.

PIAGET J. (1973) *La géométrie spontanée de l'enfant*, Presses Universitaires de France, Paris.

PIAGET J. & INHELDER B. (1947) *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Presses Universitaires de France, Paris, (ed. 1977).

VAN HIELE P. M. (2002). Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van hiele levels of thinking. *Intelligence, learning and understanding in mathematics. A tribute to Richard Skemp.* D. Tall et M. Thomas (eds), PostPressed: Flaxton, Australia.

VAN HIELE P.M. (1959) La pensée de l'enfant et la géométrie, *Bulletin de l'APMEP*, **198**, 199-205.

RÉCUPÉRER L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES DANS DES TÂCHES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE, CELA S'APPREND ?

Sara ARDITI
sara.arditi@espe-aquitaine.fr

Caroline BULF
caroline.bulf@espe-aquitaine.fr

Valentina CELI
valentina.celi@espe-aquitaine.fr

Lalina COULANGE
lalina.coulange@espe-aquitaine.fr

ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux, LACES, équipe E3D

Résumé.
Cet article a pour objectif d'interroger les stratégies de formation des enseignants du 1er degré concernant l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Nous formulons l'hypothèse que les stratégies de formation insistent sur l'importance des situations d'apprentissage a minima consistantes, et ce peut-être au détriment des situations d'enseignement plus élémentaires, liées pour une part à la réalisation de tâches qui peuvent être considérées comme simples et isolées au sens de Robert (2008). À l'occasion de cet atelier, nous avons voulu partager nos questionnements sur la récupération de l'activité des élèves dans des tâches de construction en géométrie, c'est-à-dire l'exploitation collective d'éléments de cette activité mathématique par l'enseignant (Robert 2008). Nous avons interrogé les pratiques plus spécifiquement liées à la récupération de l'activité d'élèves dans le cas de tâches de construction de droites perpendiculaires. À partir de la mise en regard des pratiques d'une enseignante débutante et d'un enseignant chevronné, avec la complicité des participants, nous avons cherché à caractériser les connaissances didactiques et géométriques nécessaires pour fonder la récupération de l'activité des élèves dans ce type de situations d'enseignement. Enfin, nous avons cherché à préciser dans quelle mesure et de quelle manière il serait possible de prendre en charge la gestion enseignante de ce type de tâches de construction en géométrie, dans la formation.

Ce travail s'inscrit dans la poursuite d'un travail de recherche amorcé par le groupe Math'aqui à l'occasion du XXXVIIème colloque de la Copirelem (2010), sur l'institutionnalisation des savoirs en jeu dans l'activité mathématique des élèves. Nous nous intéressions alors plus spécifiquement à l'institutionnalisation qui peut être conduite autour des savoirs ou savoir-faire dans la résolution de problèmes pour chercher (Bulf, Celi, Coulange, Reydy, Train & Urruty, 2010).

L'objectif de cet atelier peut sembler à première vue s'éloigner de notre problématique de départ ou des travaux conduits par les autres membres du groupe Math'aqui (Reydy, Train, Urruty, dans ce volume). En effet, il s'agissait non plus de considérer des problèmes pour chercher mais des tâches de tracé en géométrie, tâches que l'on pourrait qualifier de simples et isolées au sens de Robert (2008), c'est-à-dire pour lesquelles le travail convoqué consiste en une application directe de connaissances explicitées.

Pour autant, la question de l'institutionnalisation des savoirs et de la récupération de l'activité mathématique, c'est-à-dire l'identification et l'exploitation collective d'éléments de l'activité d'élèves du point de vue des connaissances mises en jeu ou visées, reste au cœur de notre questionnement. Ainsi nous nous posons des questions communes au travail du groupe

Math'aqui : nous nous interrogeons sur ce qui dans les pratiques de l'enseignant serait à même de participer à de tels processus d'institutionnalisation des savoirs ou de récupération de l'activité mathématique des élèves.

Dans un premier temps, au cours de cet atelier, nous avons présenté les éléments d'une analyse *a priori* des deux tâches de construction de droites perpendiculaires, sur lesquels repose une partie du scénario d'enseignement d'une étudiante en M2 alternance MEEF en stage dans une classe de CM1 (surnommée Tilda dans la suite du texte). À l'aide de la vidéo réalisée dans sa classe, nous avons ensuite proposé aux participants de l'atelier une analyse du déroulement associé à ces deux tâches et par conséquent des pratiques d'enseignement de Tilda. Nous avons enrichi cette analyse par l'étude de données complémentaires à même d'éclairer les pratiques de Tilda de manière plus globale (analyse du scénario et du déroulement autour de ces deux tâches par Tilda elle-même, suite de la séance observée, parcours de Tilda en formation, etc.).

Dans un deuxième temps, nous avons présenté aux participants le déroulement observé et filmé dans la classe d'un enseignant chevronné exerçant dans une classe de CE2-CM1-CM2 (surnommé Francis dans la suite du texte). Nous avons ainsi mis en regard les pratiques de Tilda et de Francis autour d'une tâche de construction de deux droites perpendiculaires. Nous avons invité les participants à pointer des différences dans les pratiques enseignantes observables autour de cette tâche de construction : en effet, au-delà d'éléments de contextes différents, il ne faut pas négliger que certaines des singularités observées dans les pratiques de Francis et de Tilda renvoient à des façons contrastées d'identifier et de récupérer l'activité mathématique des élèves dans la réalisation de ces tâches de construction en géométrie.

En guise de conclusion, nous avons formulé quelques hypothèses et perspectives concernant la formation initiale des futurs enseignants et liées à la récupération de l'activité mathématique des élèves dans l'accomplissement de tâches de tracé en géométrie.

I - ANALYSE DES TACHES MATHEMATIQUES MISES EN OEUVRE DANS LA CLASSE DE TILDA

Nous nous sommes appuyées sur une séance filmée dans le cadre d'une visite de formation dans la classe en responsabilité de Tilda (Novembre 2012, Aquitaine).

Les tâches proposées au début de cette séance par l'étudiante sont deux tâches de construction de droites perpendiculaires, qui peuvent être énoncées de la manière suivante :

- *T1 : tracer une droite (d), un point M sur cette droite puis construire la perpendiculaire à (d) passant par M (sur le support d'une ardoise) ;*
- *T2 : tracer un segment [PO], un point Y en dehors de ce segment puis construire la perpendiculaire à [PO] passant par Y (toujours sur le support d'une ardoise).*

Les tâches T1 et T2 sont pensées *a priori* par Tilda comme simples et isolées : il s'agit de réactiver les connaissances des élèves sur les droites perpendiculaires enseignées au préalable (il s'agit de la 3ème séance sur ce thème). De manière cohérente avec son projet d'enseignement sur ce thème, elle envisage dès lors d'y consacrer très peu de temps (cinq ou dix minutes environ), s'agissant pour elle avant tout de tâches de réinvestissement. De fait, l'objectif de la séance projetée par Tilda porte non pas sur la construction des droites perpendiculaires mais sur la reconnaissance instrumentée de couples de droites parallèles : à la suite de T1 et de T2, elle a prévu d'engager rapidement les élèves sur une tâche plus complexe de tri de couples de droites (inspirée d'une situation du manuel *CapMaths CM1*, Hatier 2010).

1 Eléments d'analyse *a priori* des tâches de construction de droites perpendiculaires (classe de Tilda)

Une première discussion a porté sur les nombreuses variables didactiques retenues pour l'accomplissement de ces deux tâches qui sont à même de favoriser l'émergence d'autres procédés de construction :

- le choix du support par l'enseignante : ici, l'ardoise sans autre précision ; d'une part, cela peut conduire à l'usage du quadrillage apparent sur un des deux côtés ; d'autre part, les bords de l'ardoise peuvent gêner l'usage des instruments de géométrie ;
- les marges de manœuvre laissées aux élèves sur :
    - les positions de la droite ou du segment tracés (qui peuvent être tracés de manière horizontale, verticale ou oblique),
    - les positions du point M par rapport à la droite de départ pour T1 ou par rapport au segment tracé initialement pour T2,
    - les codages du point, des droites ou du segment sur le dessin.

Nous avons constaté que ces variables didactiques peuvent occasionner une grande diversité de procédés de construction pour T1 dont certains ne mettraient pas en jeu les connaissances visées par l'enseignante. On peut envisager entre autres, que les élèves tracent « de visu » un couple de droites perpendiculaires horizontale et verticale ou effectuent la construction en s'appuyant sur un support quadrillé, sans utiliser l'équerre ou en l'utilisant de manière « détournée »[1].

En ce qui concerne T2, les variables didactiques identifiées peuvent également conduire à des procédés divers de construction. Certaines de ces variables peuvent également rendre la tâche impossible à accomplir, par exemple, si le point est positionné comme sur la figure 1, par rapport au segment initialement tracé.

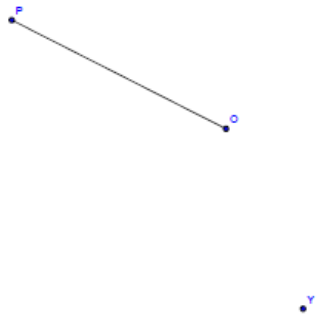


Figure 1. – Un des cas rendant la tâche T2 impossible à accomplir

Ces éléments d'analyse *a priori* nous ont conduit à nous interroger sur une partie des intentions de l'enseignante quant au scénario envisagé lié à ces deux tâches T1 et T2. Notamment, Tilda, a-t-elle anticipé l'impossibilité de certains cas liés à la tâche T2 ? Pourquoi faire tracer un segment plutôt qu'une droite ?

Les résultats de l'analyse *a priori* invitent également à questionner ce qui peut advenir dans le déroulement associé à T1 et T2. Les élèves vont-ils mettre en œuvre les procédures diverses envisagées dans notre analyse pour accomplir T1 et T2 ? Comment l'enseignante va-t-elle le cas échéant prendre en compte cette diversité de procédés de construction ? Notamment, comment va-t-elle gérer les éventuels cas d'impossibilité liés à T2 s'ils surviennent ? De quelle façon va-t-elle exploiter collectivement l'activité mathématique des élèves ? Quels procédés de construction seront explicités, voire invalidés ou validés lors des phases collectives ?

2 Éléments d'analyse du déroulement lié à la réalisation des tâches de construction de droites perpendiculaires (classe de Tilda)

Tout d'abord, on peut constater que le déroulement lié à la réalisation de T1 et de T2 prend beaucoup plus de temps que Tilda ne l'avait prévu : les épisodes concernés durent plus de trente

[1] Les élèves peuvent utiliser l'équerre comme une règle, croyant ainsi répondre aux attentes implicites du contrat didactique.

minutes. Cela semble déjà indiquer la présence d'éléments imprévus dans ce déroulement, par rapport au scénario projeté par l'enseignante.

Avant de prescrire la tâche T1 aux élèves, Tilda rappelle explicitement la définition de deux droites perpendiculaires : *deux droites qui se coupent et qui forment quatre angles droits.* Cela confirme que pour Tilda, T1 correspond bien à une tâche simple et isolée, de réinvestissement de cette connaissance. A la suite de ce rappel, la consigne de la tâche T1 est ainsi formulée par l'enseignante : « *vous allez tracer une droite d, vous allez placer sur cette droite, n'importe où sur cette droite le point M (M est écrit au tableau), et vous allez placer la perpendiculaire à (d) passant par M (Tilda écrit au tableau les termes perpendiculaires passant par M)*». Les élèves travaillent individuellement sur T1. La diversité des procédés de construction rendus prévisibles par notre analyse *a priori* apparaît dans l'activité mathématique effective des élèves. Notamment, nombre d'entre eux semblent ne faire usage que de la règle pour construire deux droites perpendiculaires et ce assez systématiquement dans une position prototypique (verticale et horizontale). Une première élève envoyée au tableau par Tilda construit d'ailleurs deux droites perpendiculaires « à l'œil » uniquement à l'aide de la règle graduée. Tilda explicite alors un critère de reconnaissance de perpendicularité de deux droites : il s'agit de reconnaître des angles droits avec l'équerre. Mais ce critère ne suffisant pas à invalider la construction de l'élève, le discours de l'enseignante - qui s'adresse collectivement à la classe - devient injonctif avec une remarque du type « *il faut utiliser l'équerre* ». Le deuxième élève envoyé au tableau accomplit la construction demandée en utilisant l'équerre mais « comme une règle ». Tilda sollicite un troisième et dernier élève qui construit les deux droites perpendiculaires en utilisant l'équerre de manière conforme, ce qu'elle approuve publiquement : *il faut bien mettre l'équerre (Tilda descend l'équerre sur la droite tracée) il faut bien la poser là sur la droite (Tilda montre la droite d avec le doigt).* Notons aussi que chaque construction effectuée au tableau fait apparaître des droites perpendiculaires en position prototypique (verticale / horizontale) et que Tilda ne pointe pas cette particularité des tracés effectués par les élèves, et ne cherche pas à interroger les élèves sur ce qui pourrait advenir pour des droites tracées en position « oblique ».

Le déroulement associé à la réalisation de la tâche T2 est assez proche de celui observé pour T1. La consigne de la tâche T2 est ainsi formulée par l'enseignante : « *Vous allez tracer un segment [PO]. Hors de ce segment [PO], vous allez tracer sur votre ardoise le point Y. Le point Y ne doit pas être sur [PO]. Vous allez tracer la perpendiculaire à [PO] qui passe par Y.* » Lors de la phase de travail individuel des élèves, Tilda va détourner l'impossibilité dans certains cas de T2 (identifiés *a priori*, cf. figure 1 plus haut) en proposant individuellement aux élèves concernés de prolonger le segment. Elle explicite d'ailleurs oralement cette adaptation avant de passer à la correction collective : « *il fallait prolonger la droite pour qu'on puisse voir* ». Cet épisode semble pouvoir favoriser les confusions entre droite et segment chez les élèves. Après avoir précisé qu'il fallait « prolonger la droite », l'enseignante envoie un élève au tableau et celui-ci trace un segment, un point et une droite perpendiculaire en position prototypique (segment en position horizontale, droite en position verticale passant par un point positionné au dessus, dans une position relativement centrale par rapport au segment) uniquement à l'aide de la règle graduée. Les autres positions possibles du segment et du point, les éventuels cas d'impossibilités liés à T2 (qui ont déjà été « détournés » par la gestion de l'enseignante lors de la phase de travail individuel des élèves) ne seront pas non plus exploités lors de cette deuxième correction collective. En outre, les différences liées au positionnement de l'équerre dans la réalisation de cette deuxième tâche T2 ne sont pas explicitées par l'enseignant : lors de la résolution de la tâche T2 (y compris dans le « cas simple » exposé de manière collective au tableau), il faut opérer à un contrôle simultané des deux bords de l'angle droit de l'équerre avec le segment et le point Y, ce qui rajoute de la complexité dans la manipulation de l'équerre par rapport à la tâche T1.

3 Un éclairage plus global sur les pratiques d'une enseignante débutante en géométrie (Tilda)

L'analyse du déroulement des tâches T1 et T2 nous a conduits à remarquer que Tilda rencontre des difficultés dans la gestion d'imprévus liés à la réalisation de tâches de construction géométrique. Ces difficultés peuvent surprendre au regard de la suite de la séance observée dans la classe de Tilda, centrée sur le parallélisme de deux droites. En effet, Tilda a choisi une situation de classement (inspirée d'une activité du manuel *Cap Maths CM1*, Hatier 2010) pour faire émerger l'intérêt du recours aux instruments pour reconnaître et vérifier que deux droites sont parallèles. Elle semble faire vivre cette situation de classement en classe de manière conforme aux attentes des auteurs du manuel, et permettre aux élèves de réaliser les apprentissages des connaissances visées. Son aisance dans la gestion d'une telle situation d'apprentissage, qui peut paraître pourtant relativement consistante, contraste avec ce que nous savons de sa gestion des tâches plus élémentaires de construction comme T1 et T2.

Les analyses menées nous ont conduits à nous interroger sur les connaissances didactiques et mathématiques qui seraient spécifiques pour une « bonne » gestion enseignante et qui sont liées à la réalisation de tâches de construction en géométrie. En particulier, à partir de l'écrit professionnel rédigé par Tilda sur la séance observée dans sa classe, on constate qu'à ce stade de la formation, des connaissances didactiques et mathématiques lui font encore défaut à ce sujet. Par exemple, dans cet écrit, Tilda ne formalise pas l'importance de certaines variables didactiques comme celle de la position de la droite (horizontale, verticale, oblique). Elle évacue le problème lié à l'impossibilité dans certains cas de T2 (le « segment » initial devient d'ailleurs une « droite » dans son écrit). Il est également intéressant de noter, lorsqu'elle évoque l'usage de l'équerre absent ou « détourné » chez une partie des élèves, le mode injonctif ressurgit.

On peut se dire que c'est normal à ce stade de la formation, Tilda n'ayant pas encore reçu de formation didactique spécifique à l'enseignement et à l'apprentissage de la géométrie. Pour autant, lors d'un entretien postérieur à nos observations dans sa classe (dans le courant du deuxième semestre de formation), Tilda évoquera le fait qu'elle accorde une préférence aux situations de reconnaissance ou de classement (tri, jeu du portrait, etc.) par opposition aux situations de construction en géométrie. Son discours semble d'une part cohérent avec la séance observée, d'autre part illustrer la persistance de difficultés liées à la gestion enseignante de tâches de construction en géométrie. Lors de cet entretien Tilda évoque le fait que ces tâches mettraient « plus facilement les élèves en échec », qu'elle les trouve « plus risquées », etc.

II. DES ELEMENTS DE PRATIQUES D'UN ENSEIGNANT EXPERIMENTÉ ET SA GESTION DES TACHES DE CONSTRUCTION EN GEOMETRIE

L'analyse des pratiques de l'enseignante débutante a révélé des difficultés dans la gestion du déroulement associé à la réalisation de deux tâches de construction. Mais quelles auraient pu être les alternatives envisageables de déroulement, notamment vis-à-vis de la récupération de l'activité mathématique effective des élèves ? Quelles connaissances mathématiques et/ou didactiques pourraient permettre de penser des alternatives enseignantes plus efficaces vis-à-vis des apprentissages visés sur la construction de deux droites perpendiculaires ?

Il est possible de chercher à trouver des éléments de réponse à ces questions *in extenso*, en partant de nos propres analyses *a priori* des tâches et du déroulement associé, filmé dans la classe de Tilda. Mais cela nous a paru intéressant de mettre en regard certains points des pratiques de cette enseignante débutante et des éléments de pratique d'un enseignant chevronné, Francis, attenant à des tâches de construction de droites perpendiculaires relativement proches de celles observées dans la classe de Tilda.

Nous avons ainsi proposé aux participants à l'atelier la vidéo d'une séance menée par Francis, enseignant chevronné, à ses élèves de CE2-CM1-CM2. Le projet d'enseignement de Francis diffère sensiblement de celui de Tilda : il s'agit d'une première séance sur la reconnaissance et la

construction de deux droites perpendiculaires, objet d'enseignement qui est au cœur du projet d'enseignement de Francis. Cet enseignant prescrit une tâche proche de T1 dans sa classe mais elle n'est pas envisagée comme une tâche de réinvestissement de connaissances récemment enseignées. Elle vise un apprentissage de connaissances nouvelles pour ses élèves de CE2 et nécessite la mobilisation de connaissances anciennes pour ses élèves de CM1 et de CM2. Il ne s'agit pas d'ailleurs de comparer les déroulements observés autour des différentes tâches dans les deux classes mais plutôt de pointer certains éléments de pratiques observables dans la pratique de Francis qui nous semblent en quelque sorte faire écho aux difficultés observées dans la pratique de Tilda.

Des éléments de scénario et de déroulement liés à T2 dans la classe de Tilda avaient attiré notre attention. La façon dont l'enseignante propose à certains élèves de « prolonger » le segment pour construire la droite perpendiculaire à ce segment nous a paru à même d'occasionner ou de renforcer les confusions entre les objets théoriques « droite » et « segment », fréquentes chez les élèves (qui n'ont d'ailleurs pas particulièrement contesté l'idée de « prolonger » le segment tracé initialement). Il est intéressant de noter que lors de la séance observée dans sa classe, Francis convoque à plusieurs reprises la notion de segment mais pour pointer la différence entre ces deux objets théoriques et ce, nonobstant leur représentation « dessinée » presque identique. Par exemple, en début de séance, il demande « sérieusement » à une élève de tracer « une droite de 80 cm » à la règle au tableau attendant visiblement de sa part qu'elle explicite l'impossibilité de tracer une droite d'une longueur donnée (ce qu'elle fait d'ailleurs). En fin de séance, lorsqu'un élève évoque le fait de positionner le point bien « au milieu » de la droite déjà tracée au tableau pour pouvoir construire la perpendiculaire à cette droite, passant par ce point, Francis interroge collectivement ses élèves sur l'existence du « milieu d'une droite ». La mise en commun ayant permis de revenir sur la non existence théorique de ce point (*car on ne peut pas mesurer une droite*), l'enseignant évoque le fait qu'on peut « prolonger la droite » autant que l'on veut, afin d'être en mesure de positionner correctement l'équerre. La fonction de ces épisodes semble bien être de distinguer l'objet théorique « droite » de sa représentation dessinée et par là même de lever les confusions possibles entre la droite et le segment que l'on pouvait imaginer favorisées par le déroulement associé à la réalisation de T2 dans la classe de Tilda. Toutefois, notons que cette distinction repose sur des interventions de l'enseignant ou la lecture de ses attentes par les élèves davantage que sur la nature des tâches prescrites aux élèves. Dans une alternative fictive de pratiques, on pourrait imaginer que l'explicitation individuelle puis collective d'un ou plusieurs cas d'impossibilité de construction d'une perpendiculaire lié à T2 aurait permis d'expliciter la distinction entre un segment, une droite et sa représentation.

Nous avions noté que, lors des mises en commun, les droites tracées au tableau par les élèves de Tilda se retrouvaient systématiquement dans des positions prototypiques et qu'à aucun moment l'enseignante débutante n'a cherché à déstabiliser les comportements d'élèves attenants à ce type de positionnement (tracé de deux droites « à l'œil » dans cette position sans utiliser l'équerre, voire conception erronée lorsqu'il est nécessaire que des droites soient positionnées de cette manière pour être perpendiculaires). Lors de la séance observée dans sa classe, Francis prend explicitement en charge cet aspect : il demande aux élèves de CM1-CM2 de proposer une définition de deux droites perpendiculaires. Il rejette assez rapidement plusieurs propositions d'élèves (*il faut qu'elles soient symétriques*, *il faut qu'elles soient pareilles*). Des élèves ayant proposé qu'*il faut qu'elles se croisent,* Francis trace la représentation de deux droites obliques qui se coupent sans former un angle droit, pour les amener à formuler cette nécessité : *il faut qu'elles se coupent en formant un angle droit.* Un élève évoque alors la position prototypique verticale et horizontale des deux droites (en les traçant « en l'air » : *il faut qu'elles soient bien droites*). L'enseignant se saisit explicitement et collectivement de son intervention : il trace la représentation d'une droite oblique au tableau, puis demande à la classe s'il est possible ou non de construire une perpendiculaire à cette droite. Sans vraiment attendre de réponse de la part de ses élèves, Francis en construit lui-même une avec l'équerre puis leur demande si cette dernière est bien perpendiculaire à la droite tracée

initialement. Il envoie un élève au tableau, pour qu'il vérifie avec l'équerre qu'il y a bien un angle droit. Notons que les droites représentées par la suite au tableau sont dans une position oblique.

L'usage de l'équerre et son positionnement semblent rendus davantage nécessaire dans la classe de Francis que dans la classe de Tilda, du fait même que les droites ne sont pas systématiquement représentées de façon prototypique (du moins au tableau). On remarque aussi qu'en distribuant des feuilles blanches aux élèves après leur avoir prescrit une tâche de construction du type de T1, Francis explicite que *la géométrie se fait sur des feuilles blanches ou en tout cas non quadrillées pour ne pas s'aider des lignes.* Enfin quand une élève de CE2 se retrouve en difficulté dans cette tâche de construction car elle ne positionne pas son équerre de façon correcte, il commence comme il l'a fait pour d'autres avant elle par lui demander de désigner l'angle droit sur son équerre. L'élève ne désignant pas le bon angle, il lui demande de comparer son équerre au gabarit d'angle droit obtenu lors d'une activité préalable. L'élève a encore des difficultés à désigner le bon angle. Il rajoute alors au feutre le codage de l'angle droit sur son équerre afin de momentanément la soulager de cette identification dans son usage de l'équerre. Cet épisode et ceux qui ont précédé, mis en regard avec ceux observés dans la classe de Tilda, illustrent le fait que cet enseignant expérimenté anticipe visiblement davantage les difficultés possibles des élèves dans la construction de droites perpendiculaires, notamment celles attenantes à l'usage même de l'instrument « équerre ».

Nous n'avons pas perdu de vue des éléments de contexte à même d'éclairer les situations respectives des deux enseignants et leurs interventions : la séance observée dans la classe de Francis est la première séance d'enseignement liée à la construction de droites perpendiculaires tandis que celle observée dans la classe de Tilda se situe davantage en aval de cet enseignement ; la classe de Francis est en partie composée d'élèves de CE2 pour qui ce savoir s'avère particulièrement nouveau, etc. Toutefois, autant les pratiques de Tilda semblent démunies dans l'anticipation, l'identification et la récupération de l'activité mathématique des élèves dans des tâches de construction de droites perpendiculaires, autant celles de Francis illustrent sa capacité à anticiper les difficultés d'élèves, à en identifier l'origine et sa volonté d'expliciter y compris collectivement un certain nombre d'obstacles didactiques ou mathématiques à l'œuvre dans l'accomplissement de ces tâches.

Dans le cas de ce professeur expérimenté qui n'a pas reçu de formation spécifique en didactique des mathématiques, on pourrait conclure que cette capacité relève en grande partie de « son expérience ». Mais cela pourrait alors inciter à penser que seule l'expérience d'enseignante à venir de Tilda peut également l'outiller à ce sujet, dans un futur plus ou moins proche ou lointain. Mais nous ne sommes pas convaincues, bien évidemment ! D'où l'hypothèse que la formation initiale peut (voire doit) former les pratiques enseignantes dans la gestion de tâches de construction de géométrie à l'école, y compris celles qui paraissent les plus élémentaires (du moins aux yeux des enseignants) comme la construction de deux droites perpendiculaires[2]. Pour autant, la question du « comment » est loin d'être réglée. Nous allons essayer de commencer à l'affronter dans la conclusion qui va suivre.

III. TÂCHES DE CONSTRUCTION EN GEOMETRIE : PRATIQUES ENSEIGNANTES ET FORMATION ?

Il nous paraît d'abord important de revenir sur le statut des tâches proposées et dont la mise en œuvre a été analysée collectivement. Nous sommes parties de l'hypothèse que les tâches T1 et T2 proposées par Tilda correspondaient à des tâches de réinvestissement selon le scénario qu'elle avait prévu, nous les avons ainsi qualifiées de simples et isolées dans le sens où le travail convoqué lors de leur réalisation consiste en une application directe de connaissances explicitées. Toutefois l'analyse *a priori* de ces tâches et l'analyse du déroulement dans la classe Tilda mettent en lumière

[2] Et soit faire « gagner du temps d'expérience » à de futurs jeunes enseignants comme Tilda, voire s'assurer de l'existence future de tels « savoirs d'expérience ».

les difficultés inhérentes aux tâches de construction, ce qui remet en question le fait qu'elles puissent être considérées comme simples et isolées. Même T1 ne peut pas être *a priori* considérée comme une simple application directe de la connaissance mathématique liée à reconnaissance de perpendicularité de deux droites car elle sous-entend la convocation d'autres connaissances liées à la construction géométrique (représentations d'une droite, d'un point, distinction dessin/figure, etc.) et à l'usage de l'équerre (identification de l'angle droit, positionnement de l'équerre) qui ne peuvent être considérées comme totalement disponibles à ce niveau. Les analyses menées permettent de caractériser un certain nombre d'éléments de gestions nécessaires au bon déroulement en classe de tâche telles que T1 et T2.

Afin de gérer au mieux l'activité des élèves et sa récupération dans des tâches de construction en géométrie, y compris celles qui paraissent relativement élémentaires (à l'instar de T1), il s'agirait dès lors pour les enseignants d'identifier les connaissances mathématiques et didactiques relatives à la construction en géométrie : différences entre droite et segment qui renvoient à des distinctions à opérer entre objets représentés (dessin) et théoriques (figure), aspects liés aux codages des points, droites et segments, positions plus ou moins prototypiques des objets représentés et jeux de variables didactiques inhérents à ces positions, aspects matériels mais aussi conceptuels liés à l'usage d'un instrument comme l'équerre, etc. Dans le cas de Francis, ces connaissances mathématiques et didactiques sont de fait convoquées lorsqu'il enseigne la construction de droites perpendiculaires, alors que lorsque Tilda gère des imprévus dans la réalisation de tâches attenantes à cette construction géométriques, tout se passe comme il s'agissait de savoirs transparents au sens de Margolinas et Laparra (2011). On peut alors s'interroger sur la raison de la transparence de ces savoirs pour une enseignante débutante en lien avec la formation qu'elle a reçue. L'exemple de Francis tend à montrer que ces connaissances peuvent s'acquérir en partie par l'expérience. On peut penser qu'à force de rencontrer les difficultés des élèves, on les identifie. Une fois ces obstacles identifiés, il est alors possible de les traiter en jouant notamment sur les variables didactiques. Cependant cela suppose qu'on les identifie et on peut s'interroger sur le fait que l'expérience suffise, notamment en raison des connaissances mathématiques nécessaires à cette fin. Ces connaissances mathématiques et didactiques sont-elles prises en compte dans la formation initiale ? Comment ? Dans quelle mesure, la formation outille-t-elle ou peut-elle outiller les pratiques enseignantes dans la gestion des tâches de construction en géométrie ?

Nous avons formulé l'hypothèse que les stratégies de formation insistent sur l'importance des situations d'apprentissage *a minima* consistantes et ce peut-être, au détriment de la gestion des situations d'enseignement liées à la réalisation de tâches plus élémentaires (quoique non simples et isolées) comme celles que nous avons étudiées lors de cet atelier.

Les échanges qui ont eu lieu nous confortent davantage sur la légitimité des nos questionnements à propos de la formation à apporter aux enseignants pour récupérer l'activité des élèves dans ce type de situations et notamment sur la gestion des imprévus qui y sont liés : comment prendre en compte les objets de savoirs « transparents » qui existent dans ce type de tâches et leur gestion en classe ? Enfin, on peut aussi s'interroger sur l'impact de la formation actuelle sur les pratiques des enseignants et sur certains des écueils rencontrés dans la classe de Tilda. Les exigences de l'épreuve de mathématiques du concours de professeur en géométrie pourraient notamment expliquer pourquoi Tilda propose la tâche T2 à partir d'un segment. Le formalisme et la rigueur d'écriture, qui n'ont pas lieu d'être à l'école primaire et qui sont demandés aux concours, ne réduisent-ils pas - pour les étudiants - la géométrie à une maîtrise du vocabulaire et du formalisme et ne sont-ils pas au moins en partie à l'origine de certaines pratiques observées chez les débutants ?

BIBLIOGRAPHIE

BULF C., CELI V., COULANGE L., REYDY C., TRAIN G., URRUTY P. (2010) La résolution de problèmes en questions : Quels savoirs ou savoir-faire ? Quelle institutionnalisation ? in : *Actes du colloque de la COPIRELEM,* La Grande Motte.

CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M.-P., REYDY C., MADIER D. (2010) *Cap Maths CM1*, Hatier.

REYDY C., TRAIN G., URRUTY P. (2014), dans ce volume.

MARGOLINAS C., LAPPARA M. (2011) Des savoirs transparents dans le travail des professeurs des écoles à l'école primaire In Rochex J.-Y. & Crinon J.. (Eds.) (pp. 19–32) *La construction des inégalités scolaires.* Rennes : Presses universitaires de Rennes.

ROBERT A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed.) (pp. 59–68) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants.* Toulouse : Octarès éditions.

LA SCHÉMATISATION DANS UNE DÉMARCHE D'INVESTIGATION : LA PLACE DE CONCEPTS GÉOMÉTRIQUES DANS L'ACTIVITÉ DE LA MAIN À LA PÂTE « SUR LES PAS D'ÉRATOSTHÈNE »

Bertrand LEBOT
PIUFM, IUFM Poitou Charentes/IREM de Poitiers
bertrand.lebot@univ-poitiers.fr

Résumé
Cet atelier avait comme projet initial de partir de la situation « Sur les pas d'Eratosthène » de l'association « La Main à la Pâte » et de chercher si lors d'une démarche d'investigation, il ne pouvait y avoir une situation déclenchante pertinente pour l'étude de notion(s) mathématique(s).
Dans un premier temps nous nous sommes penchés sur la place des mathématiques dans une situation d'investigation en science physique. Cela a permis de préciser les similitudes entre les constructions des savoirs. La schématisation très présente dans la situation étudiée, laisse une place pour les connaissances mathématiques. Elles ont un rôle important à jouer pour émettre des hypothèses.
La situation s'appuie sur la propagation rectiligne de la lumière. Il s'agit d'étudier des phénomènes de l'optique géométrique. Ainsi l'étude de la situation fait intervenir de nombreux éléments en lien avec les savoirs mathématiques : mesure des angles, propriété angulaire du parallélisme, relation angulaire dans le cercle. Autant de notions qui ne sont pas au programme du primaire. Toutefois la découverte de la trajectoire rectiligne de la lumière est riche pour le cycle 3.
Les participants se sont partagés trois séances devant faire découvrir la forme rectiligne du trajet de la lumière. Les non-dits et les phénomènes ostentatoires ont surpris un groupe de participants. D'autres ont eu du mal à identifier les différents moments du canevas de la démarche d'investigation. Un autre groupe a trouvé que finalement les élèves n'avaient que peu de liberté. Les situations se trouvaient rapidement fermées par les commentaires. Les schémas ont interpellé un dernier groupe. Ils sont omniprésents et pourtant tellement complexes à concevoir.
Nos critiques nous ont interrogés sur notre regard de formateur. La confrontation avec la mise en œuvre filmée montre que nous sommes parfois trop critiques. L'enseignante a su mettre en place une organisation induisant les objets nécessaires au bon fonctionnement de l'étude. Le schéma eut à nouveau une place importante par les tracés qui étaient demandés.
L'atelier s'est terminé par la présentation des différents modes de pensée de Gonseth (1945-1946) qui, associés aux espaces de travail de géométrie, pourraient être un bon prisme pour comprendre la place du schéma dans ce type de situation.
Ce compte rendu d'atelier reprend et complète ce qui a été dit, ajoutant des précisions quant aux interventions des participants.

Cet atelier trouve son origine dans la recherche menée au sein de l'IREM de Poitiers autour des grandeurs au collège. Toute l'année de sixième a été organisée à travers l'étude de six grandeurs. Cette programmation s'inspire des travaux de CLAIRAUT (1765) dans ses « Eléments de Géométrie ». Notre étude initiale s'est faite avec la théorie anthropologique du didactique (TAD) de CHEVALARD (2002) qui permet de voir l'œuvre de CLAIRAUT comme une organisation mathématique autour de problèmes d'arpentage pour permettre au débutant d'entrer dans les savoirs géométriques (BARBIN, 1995). Sa progression se fait autour de Questions à Fort Pouvoir Générateur (QFPG) lui permettant d'avoir une organisation mathématique pertinente.

Dans cet esprit, nous avons donc étudié les différentes grandeurs du programme de sixième en recherchant les problèmes qu'elles permettaient de résoudre. Nous en avons retenu six. Nous

avons construit des organisations mathématiques et didactiques publiées dans les brochures de l'IREM de Poitiers (2009-2012). Elles prennent en compte toutes les connaissances de sixième de façon spiralaire. Les retours des enseignants qui les mettent en place, nous montrent que cette approche répond à une attente du terrain. Est-il alors possible de transposer cette approche à l'école primaire ? La Main à la Pâte propose des situations et du matériel qui pourraient correspondre à cet esprit. L'objectif de cet atelier est de recueillir des avis sur la pertinence de ces situations pour développer des savoirs mathématiques.

Par ailleurs, en tant que formateurs du premier degré, nous devons proposer des solutions pour optimiser les temps d'enseignement. L'une d'elles est de trouver des situations qui permettent de travailler conjointement plusieurs disciplines. Celles-ci peuvent permettre de gagner du temps dans la dévolution des problèmes et la motivation des élèves. Les disciplines connexes aux mathématiques que sont les sciences sont sans doute les plus faciles à étudier. Mais est-il possible qu'une situation déclenchante de mathématiques soit une situation de science ?

La technique d'Eratosthène pour mesurer le diamètre de la terre pourrait être une situation qui vérifie ces différentes conditions. Elle est à l'origine de différentes études tant en mathématiques qu'en sciences (DECAMP et DE HOSSON, 2011). Deux concepts sont en jeu : les rayons lumineux en sciences physiques, les droites parallèles en mathématiques.

Nous analyserons donc les connaissances de sciences de cycle 3 nécessaires en nous aidant des programmes et de l'étude proposée par DECAMP et DE HOSSON (2011).

Par ailleurs, l'association « La Main à la Pâte » propose différentes séquences d'investigation autour de la découverte d'Ératosthène. L'une d'entre elles porte sur la relation entre les ombres et la lumière. Une ressource est en ligne proposant un canevas proche de celui des programmes de sciences du collège. Ce canevas donne une grille de lecture des séances mais aussi permet de mieux comprendre les temps où les mathématiques peuvent trouver une place.

Après cette première étude, nous analyserons trois séances de la première séquence proposée. Elles ont donné lieu à des débats permettant de faire ressortir quelques éléments intéressants comme la place du schéma ou la façon d'aborder un problème en sciences.

Pour finir, nous avons rapidement observé comment une enseignante mettait en place une de ces séances en utilisant différentes ostensions pour arriver à établir la relation entre les ombres et les sources lumineuses. C'est ainsi que furent introduites la notion d'espace de travail géométrique et la question de la place de l'intuition dans ces situations.

I - LA PLACE DES MATHÉMATIQUES DANS LA DÉMARCHE D'INVESTIGATION

1 La relation entre les sciences et les mathématiques : première approche

Dans les problèmes d'arpentage, la question des distances inaccessibles est riche en développements mathématiques et plus particulièrement en ce qui concerne les propriétés angulaires avec le problème de la visée. Dans un travail précédent, j'ai eu l'occasion d'étudier trois situations autour des angles : l'une était extraite du manuel Euromath et reprenait les travaux de BERTHELOT et SALIN (1993-1994), une seconde portait sur l'étude de la transformation au rugby avec la notion d'ouverture d'angle, et enfin la troisième était l'analyse d'une séquence sur les angles en Cycle 3 de MERLE et MUNIER à partir de l'angle mort d'une voiture.

Ce dernier travail a été mené par une didacticienne de physique. Dans les premières situations de la séquence, elle donne une place importante aux schémas. Ils servent à élaborer tout un processus de conceptualisation du champ de vision, délimitant l'angle de vue par des demi-droites. Mais l'introduction des objets mathématiques m'a posé question. J'ai souhaité approfondir ce passage entre les concepts physiques et les mathématiques.

Nous pouvons retrouver cette question de la place des mathématiques dans les sciences dans des questions plus d'actualité. L'Institution affiche une volonté forte de motiver les élèves à suivre des

études scientifiques (MONOD-ANSALDI et PIREU, 2011 ; CHARVET, 2004). Les programmes de primaire et du secondaire insistent sur la place de la culture scientifique que l'on retrouve comme un des éléments des compétences du pilier 3 à côté des éléments de mathématiques. Actuellement l'intégration des mathématiques dans ces dispositifs (TPE, enseignement d'exploration « Méthode et pratiques scientifiques », thèmes de convergence, ...) pose des difficultés aux enseignants ; les raisons pouvant être diverses (crainte de l'hégémonie des mathématiques, représentation des savoirs comme objets abstraits, désintérêt des enseignants de mathématiques, choix des thèmes, …).

La première étape du travail a donc été d'aller chercher où les mathématiques pouvaient trouver une place dans les programmes de sciences expérimentales et technologiques (MEN, 2008-a)

2 Existe-t-il une place pour les mathématiques dans les sciences expérimentales et technologiques de Cycle 3 ?

2.1 Échange autour de l'introduction de ces programmes

L'en-tête nous dit :

> *« Les sciences expérimentales et les technologies ont pour objectif de comprendre et de décrire le monde réel, celui de la nature et celui construit par l'Homme, d'agir sur lui, et de maîtriser les changements induits par l'activité humaine. Leur étude contribue à faire saisir aux élèves la distinction entre faits et hypothèses vérifiables d'une part, opinions et croyances d'autre part.*
>
> *Observation, questionnement, expérimentation et argumentation pratiqués, par exemple, selon l'esprit de la Main à la pâte sont essentiels pour atteindre ces buts ; c'est pourquoi les connaissances et les compétences sont acquises dans le cadre d'une démarche d'investigation qui développe la curiosité, la créativité, l'esprit critique et l'intérêt pour le progrès scientifique et technique. »*

La première remarque que les participants ont faite, c'est que la relation entre les sciences expérimentales et les mathématiques n'est pas explicitée. Est-ce que le lien ne doit pas être établi ? Nous en avons plutôt conclu que les mathématiques seraient des outils de pensée.

Nous pourrions envisager qu'elles entrent dans la notion d'« *hypothèses vérifiables* ». Mais il nous a fallu préciser ce que l'on pouvait mettre derrière cette expression. Nous avons considéré qu'une hypothèse est parfois construite à partir d'un modèle mathématique. Un dispositif mathématique peut permettre sa vérification qui confirme ou ne confirme pas la solidité de la théorie en jeu (mais pas nécessairement sa vérité). On peut l'interpréter comme le principe de réfutabilité de POPPER. Dans sa thèse, MATHÉ (2010 p 29) approfondit cette question de l'hypothèse qui « *s'est retrouvée au centre du débat* ».

Le parallèle avec la démarche du mathématicien est explicité dans le passage qui suit. C'est un extrait qui se trouve dans l'introduction commune aux disciplines scientifiques (MEN, 2008-a p.4 ou MEN, 2008-b p.10).

> *« La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre. »*

Le temps et le thème de l'atelier ne nous ont pas permis de développer ce point de vue qui demande de faire la distinction entre hypothèse/conjecture ainsi qu'entre

explication/preuve/démonstration. Ces dernières ont été caractérisées par BALACHEFF (1988). En poussant la réflexion dans cette direction, sans doute trouverions nous des éléments concomitants entre la démonstration et l'expérience. Un des participants nous a interrogés sur le statut de la démonstration faite par informatique comme ça été le cas pour le théorème des quatre couleurs : est-ce une démonstration ou une preuve expérimentale ?

Nous avons vu deux autres places pour les mathématiques : dans les phases d'argumentation et dans la démarche d'investigation. Là encore nous n'avons pas approfondi le thème de l'argumentation. Il nécessite des compétences plus larges que les simples compétences mathématiques et l'on retrouve pour partie des questions sur la preuve.

Nos discussions nous ont amenés à envisager d'autres lieux où les mathématiques pouvaient prendre place :

- ✓ « *Comprendre et […] décrire le monde réel* » passe parfois par une modélisation nécessaire de la réalité par exemple à l'aide de schémas.
- ✓ Hypothèse et fait vérifiable : ils ne doivent pas être vus comme des oppositions mais comme des compléments. Les faits sont liés à une observation de la réalité sans interprétation alors que les hypothèses marquent une prédiction. Il s'agirait d'événements qui ne sont pas encore intervenus. Il y a la possibilité qu'elles soient fausses. Tous deux sont vérifiables soit directement par l'action comme lorsque l'on constate qu'un stylo tombe si on le lâche, soit après l'élaboration un dispositif. Dans ce cas nous parlerions d'une hypothèse : la réalisation de l'expérience demande une première analyse de l'événement. Mais est-ce que seule l'hypothèse est vérifiable ? Est-ce que le fait peut l'être ?

Dans ce passage, il faut sans doute davantage saisir l'esprit dans lequel doivent s'enseigner les sciences expérimentales et technologiques. L'opposition entre les faits et les hypothèses d'un côté et les croyances et les opinions est spécifique à ces disciplines. Ce n'est pas un point de convergence avec les mathématiques même si, à un certain moment, ce sera une raison de développer un savoir comme lorsque l'on étudie les gestions de données.

2.2 Place des mathématiques dans les contenus de sciences et de technologie

L'histoire nous a appris que l'étude du ciel et de la terre avait fourni des occasions pour développer des théories mathématiques. En cycle 3, les élèves doivent étudier :

> *Le mouvement de la Terre (et des planètes) autour du Soleil, la rotation de la Terre sur elle-même ; la durée du jour et son changement au cours des saisons.*
> *Le mouvement de la Lune autour de la Terre.*
> *Lumières et ombres.*
> *Volcans et séismes, les risques pour les sociétés humaines.*

Seul le dernier point ne laisse pas entrevoir de place pour les mathématiques sauf peut être dans le cadre de la gestion et de l'organisation des données.

Les développements de ces domaines durant l'antiquité ont pour origine les observations faites notamment par les Mésopotamiens et les Égyptiens (PICHOT - 1991) à une époque où l'astronomie et l'astrologie étaient confondues.

Le BO n°1 du 5 janvier 2012 (MEN 2012) propose une progression des apprentissages en sciences sur les différentes années de l'école primaire. Sans préciser les liens entre les disciplines, nous avons une indication sur la progression de la découverte de la relation entre la lumière et les ombres.

Dans le détail du socle, les sciences expérimentales et technologiques se retrouvent dans la même compétence que les mathématiques sous l'étiquette « *principaux éléments de mathématiques et de cultures scientifiques et technologique* » mais restent séparées lorsque les compétences sont listées. La démarche d'investigation se situe dans la partie culture scientifique et technologique :

> *« L'élève est capable de :*
> - *pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner ;*
> - *manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter ;*
> - *mettre à l'essai plusieurs pistes de solutions ;*
> - *exprimer et exploiter les résultats d'une mesure ou d'une recherche en utilisant un vocabulaire scientifique à l'écrit et à l'oral ;*
> - *maîtriser des connaissances dans divers domaines scientifiques ;*
> - *...*

Nous verrons que ces différents points se retrouvent dans le canevas de la Démarche d'Investigation.

2.3 Éclairage sur l'opposition entre opinion et science : La position de de Bachelard

Derrière les échanges que nous avons eus, se trouvent certains éléments développés par BACHELARD (1938, p.9) sur l'opposition faite avec les opinions et les croyances.

> *« L'opinion pense mal ; elle ne pense pas : elle traduit des besoins en connaissances ! En désignant les objets par leur utilité, elle s'interdit de les connaître. On ne peut rien fonder sur l'opinion : il faut d'abord la détruire. »*

Cette opinion est le « *premier obstacle à surmonter […] il faut d'abord la détruire* ». L'esprit scientifique se construit pour répondre à des questions. Ainsi contrairement à l'opinion :

> *« L'esprit scientifique nous interdit d'avoir une opinion sur des questions que nous ne comprenons pas, sur des questions que nous ne savons pas formuler clairement. Avant tout, il faut savoir poser des problèmes. Et quoi qu'on dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. C'est précisément ce sens du problème qui donne la marque du véritable esprit scientifique. Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. »*

Au travers cet extrait, on retrouve la finalité prônée dans l'en-tête des programmes : « [L'] *étude* [des sciences expérimentales et les technologies] *contribue à faire saisir aux élèves la distinction entre faits et hypothèses vérifiables d'une part, opinions et croyances d'autre part.* ».

L'analyse qui suit cet extrait développe la notion d'obstacle épistémologique. La connaissance empirique « *engage l'homme sensible* », perturbe sa raison et bloque l'évolution de son savoir. Il est alors nécessaire de reconstruire le savoir en surmontant ces obstacles.

Bachelard propose d'étudier l'histoire des sciences pas seulement chronologiquement mais en observant l'évolution des concepts à la recherche des contre-pensées et de leurs explications.

Cette approche se retrouve finalement dans certains thèmes du site de la Main à La Pâte (http://www.fondation-lamap.org/fr/projets) comme « *Calendriers, miroirs du ciel et des cultures* », « *Sur les pas d'Ératosthène* » ou encore « *Ma Maison, ma planète … et moi* ». Le premier met en relation les calendriers et établit leur lien avec les observations astronomiques. Le second que nous avons traité dans l'atelier fait découvrir la relation entre les ombres et une source lumineuse. Le soleil sera plus particulièrement étudié pour montrer l'influence des rayons divergents et parallèles. Le dernier sujet est plus éloigné du domaine mathématique. Il reste intéressant à étudier car il montre que le climat et la richesse des pays ont pu influencer l'habitat.

Ainsi ces trois projets sont construits autour de l'adaptation du savoir des hommes aux contraintes environnementales.

3 La démarche d'investigation

3.1 La démarche d'investigation dans les pratiques

Les élèves vont rencontrer ces obstacles en s'appuyant sur la Démarche d'Investigation (DI).

Celle-ci a une grande variabilité dans son application comme le souligne MONOD-ANSALDI et PIREU (2011, p. 8) :

> *« Les séquences d'investigation sont diverses (Morge & Boilevin, 2007). Cette diversité se manifeste à travers les champs disciplinaires mais également à l'intérieur du même domaine. La question cruciale reste celle de la responsabilité de l'élève vis-à-vis du savoir. Dans les propositions didactiques, le constructivisme et le socio-constructivisme sont souvent considérés comme des références épistémologiques à la DI (Calmettes, 2008). D'un point de vue institutionnel, la DI est structurée autour de plusieurs moments-clés. On y trouve, incluse, l'approche hypothético-déductive d'une démarche expérimentale (Triquet & Guillaud, 2011), avec un accent mis sur l'activité des élèves. Le protocole expérimental n'est pas imposé aux élèves par le professeur, il est laissé à leur initiative. Ils le conçoivent et le réalisent pour tester leurs hypothèses (Coquidé et al., 2009). Parallèlement, dans l'étude de (Mathé, Meheut & Hosson, 2008), la DI est identifiée comme une démarche hypothético-déductive exploitant le conflit cognitif. Pour (Larcher & Peterfalvi, 2006), l'investigation met l'accent sur le questionnement et l'important est que l'élève construise ses connaissances. Il s'agit donc de laisser plus d'autonomie aux élèves en proposant des tâches plus ouvertes et des activités de plus haut niveau cognitif (Boilevin & Brandt-Pomares, 2011). »*

L'un des auteurs cité, MATHÉ (2010) étudie l'application de la démarche d'investigation dans les collèges français. Les programmes du collège de 2007 donnent un « *canevas d'une séquence d'investigation* » (annexe 1) : choix d'une situation-problème/appropriation du problème par les élèves/formulation de conjectures, d'hypothèses, explicatives, de protocoles possibles/investigation ou résolution du problème conduite par les élèves/échange argumenté autour des propositions élaborées/acquisition et structuration des connaissances/mobilisation des connaissances. Ce canevas reprend celui proposé par DROUARD (2008).

3.2 Les types de problèmes qui peuvent être traités par la DI

MATHÉ choisit trois auteurs ayant traité de la notion de problème en sciences :

- T. S. KUHN (« *La structure des révolutions scientifiques* ») : Il dissocie les problèmes d'énigmes liés au fonctionnement d'une « *science normale* » et les problèmes liés aux anomalies qui vont correspondre aux révolutions scientifiques.
- L. LAUDANT : il se centre sur la continuité historique et distingue les problèmes empiriques qui concernent « *tout ce qui nécessite une explication* » et les problèmes conceptuels qui émergent de la théorie elle-même lorsque celle-ci a une incohérence interne ou qu'il y a une opposition avec une autre théorie.
- I. HACKING : les problèmes s'organisent autour des finalités de l'activité scientifique : la représentation qui va permettre l'élaboration d'une théorie ou l'interprétation d'un phénomène et l'intervention où le savoir devient un « outil de transformation du monde ».

Dans les programmes, la notion de situation-problème n'est pas présente en primaire où on parle de « *situation de départ* » pour éveiller la curiosité des élèves, les faire se questionner et s'exprimer. Elle apparaît dans ceux du collège et du lycée. On peut penser que le type de problèmes suggéré par le canevas de la démarche d'investigation serait celui de la représentation d'HACKING, ou des problèmes empiriques de LAUDAN. Mais MATHÉ voit surtout les problèmes d'anomalie de

KUHN. L'article de MATHÉ, MÉHEUT & DE HOSSON (2008) en présente une analyse synthétique.

Avec l'extrait du texte de BACHELARD, cette analyse donne une vision plus claire des attentes que peuvent avoir les programmes d'une situation-problème en science expérimentale. Nous avons maintenant des éléments pour déterminer si une situation de science expérimentale est adaptée au développement de connaissances mathématiques tout en gardant sa pertinence.

Ainsi les problèmes d'anomalie sont dans les trois thèmes de la Main à la Pâte. Dans les deux premières, les concepts mathématiques et physiques sont intimement liés dans les notions d'espace et de temps.

4 La place des connaissances mathématiques dans le canevas de la DI

Nous allons maintenant nous interroger sur les moments du canevas où les mathématiques peuvent intervenir.

4.1 Les mathématiques essentiellement des outils

Les premières propositions se sont centrées sur la place des mathématiques comme outil. Lors des moments de modélisation ou de schématisation d'une situation, l'élève ou l'enseignant essaye d'identifier un objet mathématique dont les propriétés sont connues. Celles-ci permettront de déduire une hypothèse ou d'expliquer la réaction d'un système.

Prenons l'exemple de l'étude de la croissance d'une plante. Après avoir trouvé un moyen de mémoriser la taille de la plante chaque jour, les relevés permettent d'analyser l'évolution de la taille. Est-ce régulier ? Est-elle d'abord rapide puis lente ? Est-elle lente puis rapide ? En fonction on peut supposer que la croissance suit une progression affine, logarithmique, exponentielle ou autre.

Dans le cas d'Erathostène, l'utilisation d'objets géométriques dans le schéma représentant la terre et les rayons du soleil permet de trouver l'angle au centre d'un arc à partir d'observation des ombres. Plus globalement, la confrontation du modèle géocentrique du système solaire aux observations a dû être plusieurs fois adaptée pour que celles-ci puissent correspondre aux prévisions. Le passage au modèle héliocentrique a été finalement reconnu comme le plus juste car le plus en adéquation avec les observations. C'est la notion de paradigme de KUHN (1962, p. 71) :

> *« L'étude historique minutieuse d'une spécialité scientifique donnée, à un moment donné, révèle un ensemble d'illustrations répétées et presque standardisées de différentes théories, dans leurs applications conceptuelles, instrumentales et dans celles qui relèvent de l'observation. Ce sont les paradigmes du groupe [...] »*

Comme l'ont souligné les participants, le raisonnement mathématique peut avoir une place dans le paradigme d'une démarche d'investigation. Même si elles sont le cœur de la démarche hypothético-déductive (MATHÉ 2010, p. 31), les étapes 3 et 4 ne sont peut-être pas le meilleur moment pour employer un raisonnement mathématique. Dans ces étapes, le raisonnement expérimental s'appuie soit sur des faits, soit sur des hypothèses. L'utilisation de matériels expérimentaux est source d'erreurs à prendre en compte au moment de l'analyse des résultats. Le raisonnement mathématique s'appuie sur des relations logiques à partir d'hypothèses initialement fixées et considérées comme vérifiées. Il y a une décontextualisation. Les éléments extérieurs n'entrent pas en jeu dans les propriétés déduites.

Les mathématiques ont aussi une place dans la phase hypothético-déductive : elles sont un outil de communication des résultats. Ainsi, le nombre a été dès son origine employé pour conserver des quantités en mémoire. Les mésopotamiens ont pu faire des avancées considérables sur l'observation des astres car ils avaient l'habitude d'établir des listes (PICHOT 1991, p. 150) :

> « *Simplicius rapporte que Callisthène, qui accompagnait Alexandre [Le Grand] dans ses conquêtes, a envoyé à son oncle Aristote une liste des éclipses s'étant produites pendant 1903 ans (ce qui donne la date approximative de 2200 av J.-C. pour le début des observations* »

Cette mathématisation des données est nécessaire lorsque l'expérimentation fait appel à des mesures : il s'agit de « *ne faire varier qu'un facteur à la fois* » et d'obtenir ainsi une relation fonctionnelle entre des données pour en tirer des conclusions. Ce fut une des conclusions de l'atelier de la COPIRELEM 2012 (LEBOT, 2012). Un des participants avait souligné que les mathématiques donnaient des outils de comparaison de résultats expérimentaux et théoriques lors de l'étape 4. Cela est donc plus global car la comparaison a aussi lieu lors du tâtonnement expérimental, de l'exploitation des résultats d'expérience, dans la recherche documentaire où les résultats sont donnés sous formes synthétiques.

Mais dans ces différents moments, les mathématiques restent des outils. Cet usage nécessite que les connaissances aient déjà été des objets d'études ou du moins qu'elles aient acquis le statut d'outils. Si les situations de sciences expérimentales doivent servir à construire les savoirs mathématiques, il nous faut rechercher des situations où ces connaissances seront des sujets d'études. Ces situations pourraient faire appel à des objets mathématiques qui apparaissent de façon intuitive (trajectoire circulaire par exemple). Pour pouvoir trouver des hypothèses, il serait alors nécessaire d'étudier ces objets.

4.2 Une démarche hypothético-déductive

Revenons sur le statut des hypothèses. L'étude de la description des activités de la Main à la Pâte montre que la liberté laissée aux élèves l'est souvent au moment de la formulation des hypothèses. En effet comme le souligne MATHÉ (2010), les programmes de l'école primaire « *réfèrent à l'idée de « situation de départ », censée [*focaliser*] la curiosité des élèves,* [déclencher] *leurs questions et* [leur permettre] *d'exprimer leurs idées préalables » (M.E.N., programmes de l'école primaire, 2007, p. 96)* » (MATHÉ 2010, p. 27). Son analyse de la démarche hypothético-déductive dégage deux types d'hypothèses apparus durant le XXe siècle :

> « *La première correspond à une généralisation dans un processus inductif : de nombreuses observations concordantes permettent la formulation d'une hypothèse généralisatrice. Le second type d'hypothèses s'inscrit dans un processus créatif : il s'agit de créer de nouvelles entités théoriques (neutrinos, trous noirs, etc.) qui ne sont pas directement observables, mais qui sont de nature à permettre une explication plausible de certains faits.* » (MATHE 2010, p. 29)

Elle poursuit en précisant que

> « *Les démarches s'appuyant sur la formulation d'hypothèses visaient, de la même manière que la déduction et l'induction, la recherche d'énoncés ''vrais'', l'hypothèse se trouvant vérifiée ou définitivement écartée par l'expérience. Progressivement, le statut de l'hypothèse change. Ainsi, dans ses premiers écrits, Popper s'oppose-t-il à l'idée de vérification ou même de confirmation d'une hypothèse par l'expérience, mais met en avant la possibilité de sa réfutation (ou falsification)* »

Le point de vue de DUHEM qu'elle décrit est intéressant :

> « *Duhem avance « qu'une expérience de Physique ne peut jamais condamner une hypothèse isolée, mais seulement tout un ensemble théorique » (Duhem, 1906, p. 278), car selon lui, pour déduire une prédiction et pour la soumettre à l'expérience, le physicien fait nécessairement appel à d'autres propositions théoriques. Si le résultat d'une expérience est contradictoire avec l'hypothèse, c'est peut-*

> *être un autre principe de la théorie (une « hypothèse auxiliaire ») qui est en cause, sans que l'expérience ne signale lequel... C'est l'ensemble de ces propositions théoriques qui doit être remis en question, et non seulement l'hypothèse isolée que le physicien veut tester.* »

Cette approche exhibe l'un des points les plus délicats dans la démarche d'investigation qui se trouve sans doute être le moins bien maîtrisé par les enseignants du primaire.

Le bilan des observations menées (MATHÉ, MÉHEUT & DE HOSSON, 2008) est très mitigé sur la mise en place des situations de démarche d'investigation. Sur les étapes 2 à 4 du canevas, elles soulignent que onze fiches sur les vingt-six étudiées

> « *comportaient réellement une demande de formulation d'hypothèses* » (Ibid., p 62) et « *peu d'autonomie est laissée aux élèves dans l'élaboration de protocoles expérimentaux puisque seuls 9 protocoles sur 31 sont entièrement à la charge des élèves. La phase de réalisation de l'expérience est, quant à elle, largement laissée aux élèves (26/31). L'expérimentation paraît alors limitée à une simple phase de manipulation, puisque la plupart des protocoles proposés par les élèves ont été soit corrigés par l'enseignant, soit discutés dans la classe avec l'enseignant pour tendre vers une expérience commune.* »

4.3 Une place pour les mathématiques

Les situations propices à la démarche d'investigation seraient celles qui renvoient à des anomalies d'une théorie. Elles doivent donner des résultats qui vont à l'encontre d'une théorie déjà établie. Les élèves ont une première idée du résultat donnée par une théorie initiale familière. Ils doivent observer la rupture qu'il y a entre ce qu'ils pensaient trouver et le résultat qu'une expérience leur donne. C'est le point de vue de BACHELARD (1934, p. 23). Divers moyens sont possibles pour anticiper le résultat. Les situations intéressantes pour construire des connaissances mathématiques sont celles qui font appel dans cette phase d'hypothèse à des objets mathématiques. Deux types de situations offrent des perspectives : celles qui utilisent des grandeurs et celles qui demandent une schématisation par des objets géométriques. Toutefois les deux peuvent être associées si l'on considère que les objets géométriques sont définis à partir de grandeurs géométriques (angles et longueurs) non nécessairement numérisées.

La modélisation mathématique permet de prévoir les résultats d'une expérience dont toutes les conditions sont fixées et en supposant qu'il n'y ait pas de perturbation liée à des paramètres extérieurs. Ayant développé un modèle mathématique reliant les ombres et le mouvement du soleil et de la terre, cette trajectoire déterminera l'évolution théorique des ombres dans la journée. La comparaison avec les observations déterminera si le modèle est adapté ou non. Il sera possible par exemple de constater que si le mouvement est proche d'une journée sur l'autre, il n'en sera pas de même lorsque les comparaisons se font sur des journées plus éloignées. Le modèle devra être affiné.

La mise en place d'expériences pour valider ces hypothèses sera nécessairement entachée d'erreurs liées aux différents paramètres extérieurs. Afin de pouvoir distinguer les erreurs d'incertitudes et celles liées au modèle, il est nécessaire d'avoir auparavant étudié l'objet mathématique qui servira à la modélisation. La théorie doit être suffisamment robuste pour qu'elle n'induise pas de doute dans les prévisions qu'elle donne. Elle doit être étudiée par les élèves soit en amont soit au moment de cette rencontre.

La situation sur les ombres et la lumière est intéressante de ce point de vue car l'ensemble des observations et des analyses repose sur la connaissance des droites sécantes et parallèles et leurs propriétés angulaires. Mais tout comme la croissance de la plante, nous constaterons que les élèves ont des connaissances empiriques personnelles. Lorsque l'élève pense à la croissance de la plante (ou à la fonte du glaçon), la notion de temps est prégnante mais il ne la formalise pas. Il a l'intuition de la relation fonctionnelle qui va lier le temps et la longueur. En demandant de trouver

une expérience qui permet de vérifier qu'une plante grandit, nous obligeons l'élève à étudier cette relation fonctionnelle en centrant les observations soit sur la durée soit sur la longueur. Cette première phase permet de justifier l'étude d'objets mathématiques. Dans cet exemple, il faut saisir que la croissance est une relation fonctionnelle entre le temps et la longueur et chercher les moyens de montrer cette relation.

On comprend alors que les situations ne sont pas toutes propices au développement de connaissances mathématiques comme l'ont souligné les participants.

II - LA SITUATION D'ERATHOSTÈNE

1 Analyse de la situation par des didacticiens de sciences physiques

DECAMP et DE HOSSON (2011) ont analysé la situation d'Ératosthène sous différents points de vue : historique, scientifique et didactique. Ils relèvent les différents travers observés dans les mises en œuvre puis proposent une nouvelle organisation didactique.

L'étude historique décrit les techniques de l'époque pour observer le déplacement du soleil. Il a pu être observé à l'aide d'un scaphé, demi-sphère dans laquelle un gnomon est planté. L'observation de l'ombre de ce bâton sur la demi-sphère permet de connaître l'angle du rayon du soleil avec la terre grâce à certaines hypothèses qu'Erathostène a posées. Le schéma suivant explicite les relations angulaires :

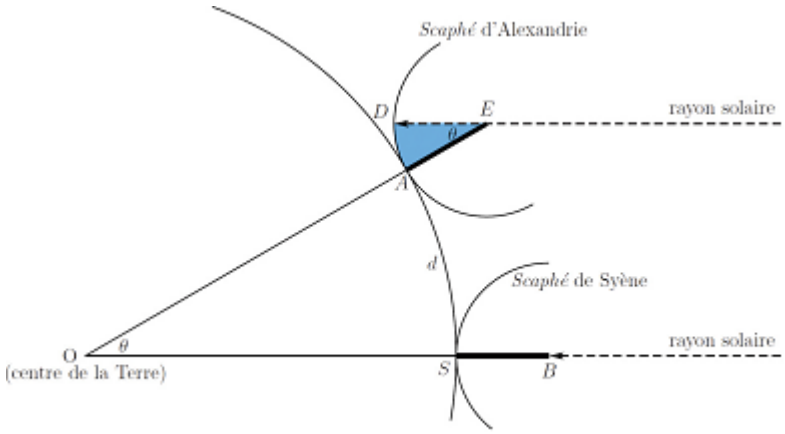


Fig. 1 : Schéma représentant la méthode d'Ératosthène selon le récit de CLÉOMÈDE

DECAMP et DE HOSSON (2011) reprennent les différentes analyses des historiens sur l'usage des instruments et des approximations des mesures. Les travaux de références cités, en particulier ceux de GOLDSTEIN (1984), reviennent sur la naissance de l'unité de mesure des angles. Les erreurs relevées sont liées aux techniques employées pour mesurer la distance de Syène à Alexandrie, ou sur le parallélisme des rayons du soleil. Ils comparent aussi cette méthode à celle de Posseidônios qui reprend une comparaison faite par Cléomède.

Leur analyse didactique des différentes mises en œuvre introduit la notion d'objectif-obstacle définie par Martinand :

> « D*ans la mesure où ces obstacles ont une signification épistémologique profonde, je crois qu'ils fournissent la clé pour formuler les buts les plus essentiels d'une éducation scientifique. Autrement dit, il s'agit d'exprimer les objectifs en termes d'obstacles franchissables, car parmi la diversité des objectifs possibles, les objectifs intéressants sont les objectifs-obstacles. [...] Il nous paraît légitime de faire de leur franchissement les vrais objectifs conceptuels. […]*
> *L'ambition pratique est donc de fournir aux maîtres, avec une liste d'obstacles à franchir par les*

élèves, la description des buts des activités, afin de permettre d'orienter les interventions pédagogiques et l'évaluation. »

Leur constat est le suivant : les élèves qui ont été interrogés (niveau collège) ont une représentation performante de la propagation du soleil (DECAMP et DE HOSSON 2011, pp. 1074-1075) :

« elle permet d'expliquer pourquoi il n'y a pas d'ombre à un endroit et une ombre à un autre endroit de la Terre et pourrait même, dans une certaine mesure, être considérée comme correcte […] Représenter la propagation de la lumière du Soleil en des rayons parallèles n'est pas naturel. Les élèves choisissent spontanément un modèle en rayons divergents et font figurer le Soleil sur la plupart de leurs dessins. Le passage de la divergence au parallélisme nécessite un passage à la limite complexe, un saut conceptuel dont la difficulté ne doit pas être sous-estimée.

Pourtant, la plupart des fiches d'enseignement conçues en référence à la découverte d'Ératosthène se contentent d'énoncer l'hypothèse du parallélisme sans que celle-ci ne soit réellement construite, voire interrogée. Cette hypothèse est parfois posée comme alternative à l'hypothèse des rayons divergents d'Anaxagore, mais en tant que modélisation de la propagation de la lumière du Soleil, elle fait rarement l'objet d'une construction spécifique. »

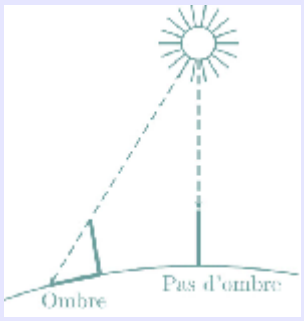


Fig 2 : Dessin prototypique d'élèves à qui l'on demande d'expliquer pourquoi au solstice d'été deux gnomons ne projettent pas la même ombre en deux endroits différents de la Terre situés le long du même méridien [14, 16, 28].

Ainsi pour des didacticiens de la physique, le passage des rayons convergents aux rayons parallèles par un passage à la limite est problématique. Nous trouvons cette difficulté lorsqu'il s'agit de caractériser des droites parallèles : alors qu'à l'école primaire, l'approche par les conservations de l'écart est privilégiée, au niveau du collège, les droites parallèles sont deux droites confondues ou qui ne se coupent pas. En primaire la conservation de l'écart permet de développer une technique de construction. En collège, il s'agit de donner la définition n°35 du livre I des Eléments d'Euclide.

2 Analyse mathématique de la situation

Cette situation sert de support dans de nombreux exercices mathématiques à tous les niveaux.

Les différentes critiques qui vont suivre ont été soulevées par des enseignants du second degré lors de la journée régionale de l'APMEP du Poitou Charentes de 2012.

2.1 La notion de verticalité

Dans le scaphé, il est nécessaire que le gnomon soit en position verticale. Mais que représente la verticale d'un point de vue mathématique ? C'est de cette caractérisation que vont se déduire les relations angulaires. Cette verticalité est portée par la droite passant par le centre de la sphère que nous simplifierons par une projection en un cercle. Or dans notre cas, nous n'avons pas le centre de la Terre. Nous ne connaissons que des points de la surface de la sphère ou du cercle. La direction est portée par la médiatrice du segment joignant ces deux points :

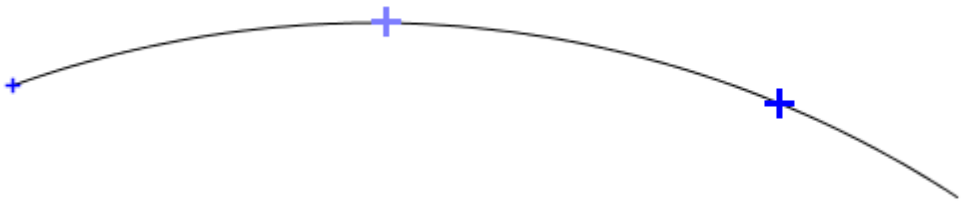


Fig. 3

Cette approche est intéressante car elle s'inscrit dans un cadre théorique plus large. La verticalité est finalement un cas particulier de la normale à une courbe et qui permet de définir l'angle que l'on fait avec la pente d'une montagne pour se tenir à la verticale.

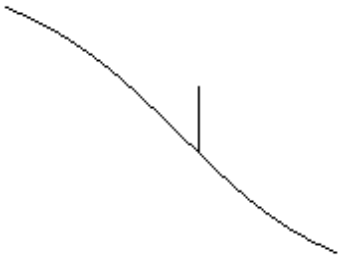


Fig. 4

2.2 Le scaphé

Le scaphé mesurait donc l'angle formé par les rayons du soleil et la verticale. La question qui se pose est de savoir quelle unité employaient les Grecs. GOLDSTEIN (1984) estime qu'il est fort probable que ce soit le douzième ou le vingt quatrième d'angle plein soit des angles de 30° ou de 15°. Le scaphé contient alors des lignes indiquant cette graduation :

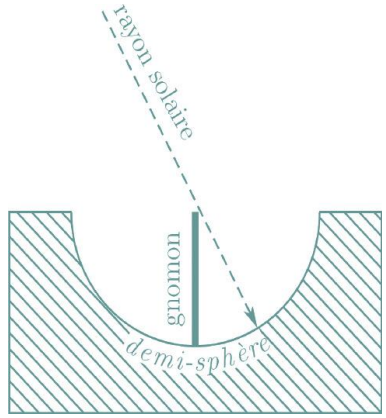


Fig. 5 :Cadran solaire hémisphérique ou scaphé.



Fig. 6 : Hartmann Linge Hartmann. Linge@de.wikipedia (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)

Cette graduation est liée au fractionnement du cercle. Dans les travaux de l'IREM de Poitiers pour l'étude de la grandeur de l'angle en sixième, nous avons essayé de chercher l'origine du partage de l'angle en 360°. Comment cette graduation a-t-elle pu être construite ? Elle fait appel entre autre à la trisection de l'angle. Il est possible de partager en secteur de 15° (1/24 d'angle plein). Il n'est pas possible d'aller plus loin dans le partage. GOLDSTEIN (1984) suppose que les Grecs prenaient comme unité l'angle de 7,1255°. Cet angle correspondrait à la limite de la précision de l'œil.

La recherche de la relation entre l'unité de mesure de l'angle et sa construction est une problématique spécifique aux mathématiques. Elle peut se poser lorsqu'un physicien voudra construire un instrument de mesure. Mais deux alternatives s'offriront à lui : soit s'appuyer sur un étalonnage soit construire un dispositif matériel qui, par des propriétés géométriques, garantit une

homogénéité de la mesure. Dans les différents manuels de science, on constate que cette question n'est pas abordée. Les unités sont introduites comme des normes.

La dernière difficulté que nous allons aborder est d'ordre ontogénique. Il s'agit du problème de la projection. Comme on le voit sur le schéma explicatif, pour bien saisir les relations, la situation a été représentée dans un plan de coupe. Diverses transformations sont employées : les passages du macro-espace au micro-espace, de l'espace au plan déterminé par le gnomon et le centre de la Terre. Ces difficultés sont des questions prégnantes dans l'enseignement des mathématiques. De plus le schéma n'a pas une échelle homogène. Le scaphé ne peut être représenté dans la même proportion que la Terre.

2.3 Mesure de l'angle au centre

DECAMP et DE HOSSON (2011) nous présentent deux techniques pour mesurer l'angle de l'arc de cercle joignant Alexandrie à Syène. Les Grecs obtenaient la circonférence de la Terre en utilisant la proportionnalité entre l'angle au centre et la longueur de l'arc. La première utilise les angles alternes internes. C'est celle employée dans l'activité de la Main à la Pâte. Cette notion est au programme de cinquième. L'étudier en primaire nécessite des adaptations soit par des ostensions soit en s'appuyant sur l'intuition.

Le schéma a un rôle particulier. Il est un instrument de compréhension intéressant à mettre en regard avec le point de vue de BACHELARD (1934) dans son discours préliminaire de « *La formation scientifique* » :

> *« Rendre géométrique la représentation, c'est-à-dire dessiner les phénomènes et ordonner en série les événements décisifs d'une expérience, voilà la tâche première où s'affirme l'esprit scientifique. »*

Nous retrouverons cette position dans l'analyse du tome II de « *La géométrie et problèmes de l'espace* » de GONSETH (1946) lorsqu'il introduit les théâtres des perceptions et des gestes pour caractériser l'intuition. La personne mathématicienne est celle qui raisonne à partir de ces représentations de la réalité.

Le texte de Cléomède

Cléomède commence par poser ses hypothèses et les données qu'il possède. Il reprend la présentation des éléments d'Euclide. C'est aussi celle attendue dans les démonstrations par certains enseignants du secondaire.

DECAMP et DE HOSSON (2011) ont un point de vue de physicien. Ils posent la question de la vraisemblance des mesures choisies et non des hypothèses. Les différentes analyses et critiques de ces mesures sont parfois d'ordre mathématique comme nous l'avons vu pour la mesure des angles.

La distance entre Syène et Alexandrie a pu être évaluée de différentes façons : en utilisant la vitesse moyenne de voyageurs, par triangulation ou en mesurant le long du Nil et en corrigeant les déviations à partir de tables. Derrière ces techniques, on retrouve des niches écologiques qui ont permis le développement des mathématiques et l'élaboration de théories plus complexes.

La méthode de Posseidônios

Elle n'a pas été abordée durant l'atelier. Elle passe par la tangente au cercle qui est obtenue par l'observation d'un point à l'horizon.

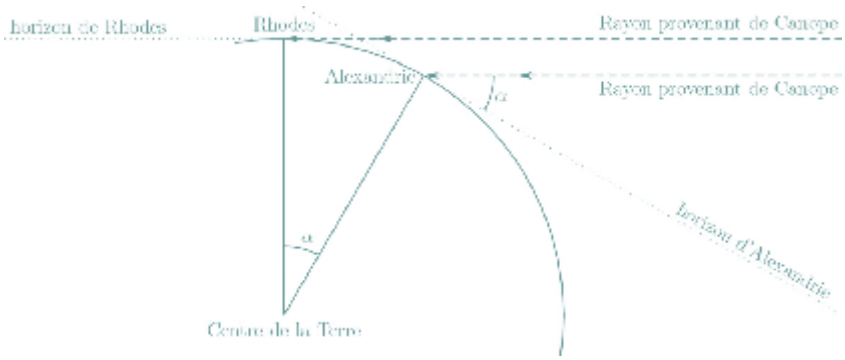


Fig 7

La comparaison des résultats donnés par les deux techniques permet d'apprécier la justesse de la méthode d'Eratosthène. Nous ne développerons pas ce point ici.

Ainsi cette situation se prête à un travail conjoint en mathématique et en sciences même si nous sommes conscients que ces disciplines n'ont pas les mêmes problématiques. Elle est riche mais fait appel à des notions plus complexes en physique : il ne s'agit plus d'observer le soleil mais une étoile, Canopé, qui est à l'horizon à Rhodes et plus haute dans le ciel à Alexandrie. Mais l'observation de l'horizon demande de prendre en compte les phénomènes de réfraction des rayons lumineux. Les mesures sont alors moins précises.

D'un point de vue mathématique, cette situation est pourtant intéressante. Elle permet d'aborder les relations angulaires des tangentes au cercle faisant intervenir diverses propriétés. Mais là encore il est trop précoce de les faire étudier en Cycle 3 : la relation entre l'angle au centre et l'angle de l'horizon n'est pas directe.

3 Analyses didactique et épistémologique

3.1 Articulation mathématiques/sciences expérimentales

Remarques des participants

La trajectoire de la lumière : des approximations nécessaires

Dans les échanges de l'atelier sur la situation, des participants ont été surpris de constater qu'il semblait évident que la trajectoire de la lumière soit rectiligne. Toutes les représentations font cette hypothèse. Or l'atmosphère n'est pas homogène, il y a des phénomènes de réfraction par exemple liés aux différentes particules en suspension. Alors pourquoi ne pas la remettre en cause ? Le document ressource de la Main à la Pâte propose un complément historique (p. 51) que l'on peut approfondir avec l'article de l'Encyclopédie Universalis sur l'optique (http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/optique-principes-physiques)

La notion de cône de lumière lié à une source lumineuse est aussi problématique. Elle supposerait que la source soit ponctuelle. Or mathématiquement, elle ne peut l'être, elle est nécessairement un regroupement de points. Elle donne lieu à la pénombre que les auteurs de la Main à la Pâte soulignent à la page 44 de leur « *guide de l'enseignant* » :

> *« Il est possible que les élèves s'interrogent sur le fait que les contours des ombres apparaissent plus ou moins flous : ils peuvent, par des expériences très simples, être amenés à découvrir que ce flou constitue ce qu'on appelle la pénombre, et que la formation de celle-ci est liée à la dimension, ponctuelle ou non, de la source lumineuse. »*

C'est la notion d'approximation qui est derrière ces observations.

Ces deux difficultés sont évacuées des premières analyses de DECAMP et DE HOSSON (2011). Cela est similaire à ce que l'on peut trouver lors de l'approche de certains concepts mathématiques.

Le temps scolaire ne permet pas d'explorer pleinement les différentes hypothèses. Il est nécessaire de faire des choix et de passer sous silence certaines questions. C'est une forme d'expertise des enseignants de survoler ces obstacles pour aller à leur objectif d'enseignement sans amener de confusion chez les élèves. Ceci est à rapprocher des phénomènes d'ostension de BERTHELOT-SALIN (1993-1994, p. 40).

Le continu physique

La question de l'approximation impose de distinguer le continu physique des sciences appliquées et le continu mathématique. POINCARÉ (1902, p. 51) :

> *« On a observé, par exemple, qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids B ne pouvait non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C. Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes :*
>
> $A = B,$ $B = C,$ $A < C$
>
> *qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique.*
> *Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable, et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraints à inventer le continu mathématique. »*

Cette distinction est intuitive. Elle se confronte à l'expérience. POINCARE y voit une distinction fondamentale entre les mathématiques et les sciences appliquées. Cette distinction peut être vue dans les écrits de BACHELARD (1934, « Discours préliminaire » p. 5) :

> *« Rendre géométrique la représentation, c'est-à-dire dessiner les phénomènes et ordonner en série les événements décisifs d'une expérience, voilà la tâche première où s'affirme l'esprit scientifique. C'est en effet de cette manière qu'on arrive à la quantité figurée, à mi-chemin entre le concret et l'abstrait, dans une zone intermédiaire où l'esprit prétend concilier les mathématiques et l'expérience, les lois et les faits. Cette tâche de géométrisation […] vient toujours à révéler une insuffisance. Tôt ou tard, dans la plupart des domaines, on est forcé de constater que cette première représentation géométrique, fondée sur un réalisme naïf des propriétés spatiales, implique des convenances plus cachées, des lois topologiques moins nettement solidaires des relations métriques immédiatement apparentes, bref des liens essentiels plus profonds que les liens de la représentation géométrique familière. On sent peu à peu le besoin de travailler pour ainsi dire sous l'espace, au niveau des relations essentielles qui soutiennent et l'espace et les phénomènes. La pensée scientifique est alors entraînée vers des « constructions » plus métaphoriques que réelles, vers des « espaces de configuration » dont l'espace sensible n'est, après tout, qu'un pauvre exemple. Le rôle des mathématiques dans la Physique contemporaine dépasse donc singulièrement la simple description géométrique, Le mathématisme est non plus descriptif mais formateur. La science de la réalité ne se contente plus du comment phénoménologique ; elle cherche le pourquoi mathématique. »*

Dans les schémas précédents, le modèle géométrique explique pourquoi au même moment, une ombre est présente à un endroit du globe et pas à un autre. Il donne aussi le moyen de calculer le rayon de la Terre. Les schémas montrent les relations. Ils vont expliquer le pourquoi des observations. La Main à la Pâte (p. 29) propose une séance (première séance de la première séquence) pour confronter deux modèles : le cas où la Terre serait plate et celui où elle serait ronde. Ils s'appuient sur la confrontation entre l'intuition et l'expérience. Le nouveau modèle montrera ses limites plus tard dans la scolarité des élèves. Les remarques précédentes pourront être la source de nouvelles questions remettant en cause le système.

Par exemple, lors de l'expérimentation en classe, l'enseignante a dû expliquer le passage de la feuille courbée à la sphère. Des élèves avaient du mal à comprendre que la figure 2b était une partie du globe.

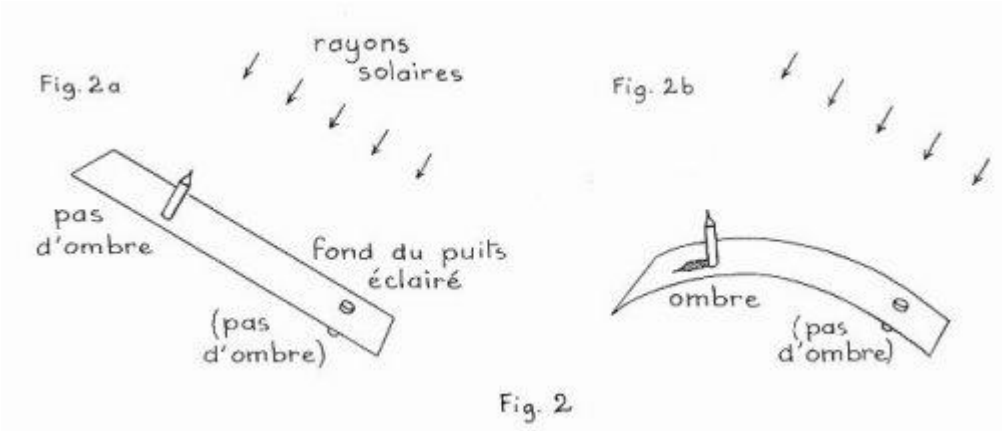


Fig 8

D'autres ont obtenu le résultat en courbant la feuille dans l'autre sens. L'enseignante a dû expliquer l'erreur en faisant référence au globe terrestre.

Physiciens, mathématiciens : deux finalités différentes

La confrontation des échanges et de l'analyse de DECAMP et DE HOSSON (2011) met en évidence que les priorités des physiciens et des mathématiciens ne sont pas la même. En particulier le temps didactique est différent.

Pour les premiers, c'est l'application du modèle pour vérifier les hypothèses qui prime. Il s'agit de confronter le résultat aux hypothèses. Ceci se voit dans la description du déroulement des séances. Elles précisent les hypothèses qui doivent arriver et induisent les dispositifs expérimentaux.

A contrario, en mathématiques, la richesse de la situation va dépendre de la formulation des hypothèses. Leur explicitation induira un modèle. Celui-ci orientera le choix du dispositif expérimental. La confrontation du résultat de l'expérience avec la prédiction faite à partir du modèle permet de confirmer ou de réfuter les hypothèses. Dans les figures précédentes, les propriétés des rayons parallèles permettent d'expliquer pourquoi en 2a il n'y a pas d'ombre et pourquoi en 2b il y en a une.

Cet exemple montre que le modèle utilisé est d'abord intuitif. Il faudrait d'abord l'étudier pour avoir les propriétés qui permettront d'expliquer les observations.

Pour formuler rigoureusement des hypothèses, il est nécessaire d'avoir des objets mathématiques clairement définis. Il faut ensuite avoir un cadre théorique qui donne des propriétés qui vont permettre de faire des prévisions. On retrouve le cadre de la résolution de problèmes.

POINCARÉ (1902, p. 49) nous fournit une explication à ce phénomène :

> *« Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets ; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse. »*

Dans son ouvrage « *La valeur de la science* », il précise la fonction des définitions (p 34) :

> *« Je veux démontrer, par exemple, que telle propriété appartient à tel objet dont la notion me semble d'abord indéfinissable, parce qu'elle est intuitive. J'échoue d'abord ou je dois me contenter de démonstrations par à peu près ; je me décide enfin à donner à un objet une définition précise, ce qui me permet d'établir cette propriété d'une manière irréprochable. »*

Cela explique les remarques lors de l'atelier : il est important pour un mathématicien d'avoir différentes définitions. C'est lors de la démonstration ou de l'expérimentation qu'une définition plus précise et unique pour tous va émerger. L'article de OUVRIER-BUFFET (2012) donne des éléments extrêmement intéressants pour déterminer la pertinence de telles situations. En particulier elle donne une classification des situations impliquant une activité de définition (p. 501).

La notion d'obstacle épistémologique

Reprenons les raisons qui nous ont amenés à étudier cette situation. Historiquement, elle a été le signe d'une avancée des connaissances physiques. Dans sa rédaction, Cléomède reprend une rédaction mathématique, comme s'il voulait démontrer son résultat car il répond à une question complexe : comment mesurer la circonférence de la Terre à partir de l'observation d'ombres ? Ne serait-ce pas un indicateur d'obstacle épistémologique au sens de BACHELARD, tel qu'il le définit dans « *La formation de l'esprit scientifique* » (1934, p. 13) :

> *« Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques. [...]*
>
> *On connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même fait obstacle à la spiritualisation »*

Cette notion a été reprise par BROUSSEAU (1998, p. 124) pour expliquer l'origine d'obstacles didactiques. En les transposant aux problèmes mathématiques, son analyse met en relation les théories de BACHELARD et de PIAGET (BROUSSEAU 1998, pp. 115-160).

L'obstacle est caractéristique d'une situation. Il va permettre d'entrer dans l'apprentissage et de construire le savoir en surmontant les erreurs :

> *« L'obstacle est constitué comme une connaissance, avec des objets, des relations, des méthodes d'appréhension, des prévisions, avec des évidences, des conséquences oubliées, des ramifications imprévues, ... Il va résister au rejet, il tentera, comme il se doit, de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit, suivant un processus d'accommodation bien connu. »*

Celui d'origine épistémologique est un cas particulier :

> *« Les obstacles d'origine épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire qu'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus. »*

La dernière phrase nous incite toutefois à réfléchir sur la pertinence de donner l'étude de cette situation à des élèves.

3.2 Pertinence du choix de cette situation

L'analyse préliminaire de la situation montre la richesse de la situation. Dans la schématisation, le passage du macro espace au micro espace nécessite un saut cognitif important. Elle impose de sélectionner les éléments importants. Nous avons vu que les mathématiques sont un outil prédictif

pour les sciences. La première note du texte de DECAMP et DE HOSSON (2001) indique que cette schématisation était sans doute un problème en son temps :

> *« Selon RUSSO [31], bien que cette méthode semble aujourd'hui facile à comprendre en s'aidant d'un dessin, ce passage d'un dessin à des conclusions valables pour la Terre entière était incompréhensible pour une civilisation préscientifique. »*

L'observation des ombres est un des éléments qui a permis de confirmer la sphéricité de la terre qui avait pu être trouvée par d'autres observations (DECAMP et DE HOSSON 2011, p. 1066). Cette schématisation fait partie de l'activité scientifique : elle permet la formulation d'hypothèses (l'angle au centre de la Terre est le même que celui formé par l'ombre d'Alexandrie) déduites des propriétés angulaires du parallélisme. L'expérience permettra de confirmer ou non ce modèle.

Travail mathématique possible dans la démarche d'investigation

Cette analyse montre que les mathématiques avaient une place dans certaines démarches d'investigation. Essayons de généraliser la caractérisation des situations de démarches d'investigation qui peuvent laisser une place aux mathématiques.

C'est la nécessité de passer par un schéma pour trouver un modèle géométrique qui a permis cette introduction. Les hypothèses ont été déduites des propriétés des objets géométriques employés. La validité du modèle a été obtenue par la confrontation des hypothèses au résultat d'une expérience. Il est donc nécessaire que les déductions tirées de la schématisation aient une bonne assise théorique. Cette théorie est mathématique car reposant sur des objets abstraits : le schéma est une représentation forte en symboles où seuls les éléments nécessaires sont représentés. Il impose d'avoir déjà abstrait la situation. La connaissance mathématique permet de donner une hypothèse "raisonnable". L'expérience pourra dévoiler un conflit entre le jugement initial et la réalité remettant en cause le modèle mathématique employé :

L'approche de CHEVALLARD (2002) dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique donne des éléments pour exploiter ce conflit et développer le savoir mathématique.

> *« La théorie anthropologique du didactique considère que, en dernière instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche τ d'un certain type T, au moyen d'une certaine technique t, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. En bref, toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on peut noter [T/τ/θ/Θ] et qu'on nomme praxéologie, ou organisation praxéologique. Le mot de praxéologie souligne la structure de l'organisation [T/τ/θ/Θ] : le grec praxis, qui signifie « pratique », renvoie au bloc pratico-technique (ou praxique) [T/τ], et le grec logos, qui signifie « raison », « discours raisonné », renvoie au bloc technologico-théorique [θ/Θ]. Ces notions permettent de redéfinir de manière assez réaliste certaines notions courantes : ainsi peut-on considérer que, par savoir-faire, on désigne usuellement un bloc [T/τ], et, par savoir, en un sens restreint, un bloc [θ/Θ] – ou même, mais en un sens large cette fois, une praxéologie [T/τ/θ/Θ] tout entière. »*

Les origines possibles du conflit pourraient être une technologie fausse qui impose de revisiter la théorie associée pour améliorer le modèle. Le schéma évoluera avec une nouvelle sémiotique. Il s'agit alors de construire une théorie plus précise avec des hypothèses plus fines à l'image de la révolution mathématique du XIX^{e} siècle et de son exigence à une plus grande rigueur qui va réorganiser les savoirs mathématiques (BOURBAKI 1984, p. 31).

Ce pourrait être une difficulté technique : le modèle est identifié par l'élève mais les outils mathématiques connus ne sont pas suffisamment développés pour en déduire des hypothèses. Il doit alors être étudié pour développer la technologie et la théorie qui vont ouvrir sur de nouveaux résultats. Notre situation en est un exemple : les rayons du soleil sont parallèles. Mais les élèves

qui ne connaissent pas les propriétés angulaires du parallélisme ne pourront pas établir d'hypothèses pertinentes. Ils devront se contenter d'une approche intuitive.

Enfin les résultats obtenus lors de l'expérience peuvent aller contre l'opinion. Il sera nécessaire de convaincre et construire le savoir contre celle-ci. C'est la demande des programmes et l'exigence de BACHELARD (1934, P. 16) :

> *« Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. »*

On voit se dessiner une articulation entre les situations mathématiques et la démarche d'investigation en sciences expérimentales. Cette dernière pourrait contenir des situations d'approche, de première rencontre avec un savoir. L'étude pourrait avoir comme objectif de développer une théorie, d'élaborer une technique ou encore de travailler sur le discours technologique.

Quels esprits mathématiques dans ces situations ?

Ces situations peuvent donc être des niches écologiques pour des savoirs mathématiques.

Les sciences appliquées étudient des phénomènes. Ils en dégagent des modèles. Les mathématiciens ont alors la mission de les étudier pour faire des hypothèses. Nous sommes dans une praxéologie de mathématiques appliquées.

Les développements des mathématiciens sont donnés par une approche plutôt intuitive : les résultats sont en relation avec la réalité, il est donc possible de s'appuyer sur une approche intuitive ou sensible des conjectures. Elle est liée à l'expérience. Cette approche est-elle pertinente ?

Revenons à la catégorisation des mathématiciens par POINCARÉ (1905, p. 27) :

> *« Il est impossible d'étudier les Œuvres des grands mathématiciens, et même celles des petits, sans remarquer et sans distinguer deux tendances opposées, ou plutôt deux sortes d'esprits entièrement différents. Les uns sont avant tout préoccupés de la logique ; à lire leurs ouvrages, on est tenté de croire qu'ils n'ont avancé que pas à pas, avec la méthode d'un Vauban qui pousse ses travaux d'approche contre une place forte, sans rien abandonner au hasard. Les autres se laissent guider par l'intuition et font du premier coup des conquêtes rapides, mais quelquefois précaires, ainsi que de hardis cavaliers d'avant-garde. »*

La démarche d'investigation semble privilégier l'expérience et l'intuition allant vers une approche de géomètre. Mais comme l'indique POINCARE, il est possible d'avoir un regard de logicien comme cela a été le cas au XIX^{e} avec le souhait d'une plus grande précision. Les remarques faites en 3-1 sur l'aspect rectiligne de la lumière seraient du côté des logiciens.

La schématisation du problème emprunte beaucoup à la vision euclidienne de la géométrie. C'est ainsi que la position des Éléments d'Euclide a été abordée dans l'atelier. Dans le premier livre (PEYRARD 1804, p. 18) une large place est laissée initialement à l'intuition. Les définitions des premiers objets parlent d'« *égalité* », d'« *inclinaison* », de « *ligne qui se touchent* », … D'ailleurs pourrait-il en être autrement ? La notion d'égalité de figure est fortement liée à la notion des superpositions. Mais le point de vue du géomètre n'est pas le seul présent comme nous l'explique POINCARÉ (1905) :

> *« Si nous relisons les œuvres des anciens, nous serons tentés de les classer tous parmi les intuitifs. Et pourtant la nature est toujours la même, il est peu probable qu'elle ait commencé dans ce siècle à créer des esprits amis de la logique.*
>
> *Si nous pouvions nous replacer dans le courant des idées qui régnaient de leur temps, nous reconnaîtrions que beaucoup de ces vieux géomètres étaient analystes par leurs tendances. Euclide,*

> *par exemple, a élevé un échafaudage savant où ses contemporains ne pouvaient trouver de défaut. Dans cette vaste construction, dont chaque pièce, pourtant, est due à l'intuition, nous pouvons encore aujourd'hui sans trop d'efforts reconnaître l'œuvre d'un logicien. Ce ne sont pas les esprits qui ont changé, ce sont les idées ; les esprits intuitifs sont restés les mêmes ; mais leurs lecteurs ont exigé d'eux plus de concessions. »*

La vision du géomètre ou celle du logicien sont sans doute toutes deux présentes dans certaines situations de démarche d'investigation. La place des mathématiques tout comme le travail mathématique pourrait dépendre de l'angle sous lequel on traite ces situations.

3.3 Une situation issue de la réalité

Un problème complexe

Mais partir d'une situation expérimentale reste difficile. D'abord la modélisation fait appel à un processus de schématisation et à la sélection d'éléments pertinents. Ces éléments correspondent à des connaissances mathématiques accessibles aux élèves.

Les problèmes ancrés dans la réalité nécessitent des comparaisons de mesures. Or ces mesures vont être prises sur des objets réels avec toutes les incertitudes et approximations afférentes. La comparaison des résultats expérimentaux et théoriques devra prendre en compte les incertitudes éventuelles.

Ce sont donc des situations complexes. Est-il nécessaire d'aller aussi loin pour étudier des savoirs mathématiques ? Peut-on les considérer comme des problèmes mathématiques ?

Nous avons retenu que les difficultés doivent être liées à la notion d'obstacle épistémologique. L'enseignant doit donc aménager le milieu pour que l'élève y ait accès le plus rapidement possible en contournant les autres difficultés.

Dans les cahiers pédagogiques n° 427, CHARNAY (2004) donne une description du problème qui peut nous aider à faire des choix d'étayage :

> *« La résolution de problèmes, enjeu et moyen principal de l'éducation mathématique : tout le monde est d'accord. Mais, y a-t-il le même consensus autour de ce que désigne le mot problème ? Souvent le problème se confond avec un genre littéraire appelé énoncé de problème. Apprendre à résoudre un problème se confond parfois avec apprendre à lire l'énoncé du problème [...]*
>
> *Or l'énoncé, qui peut être oral aussi bien qu'écrit, n'est que le support permettant de communiquer le problème. Il n'est pas le problème ! [...]*
>
> *Adoptons une définition simple du problème. Un énoncé compris par un élève devient un problème ... si sa résolution fait problème à cet élève. S'il « voit» la solution immédiatement, il est confronté à un exercice utile pour entretenir et valoriser ses connaissances, mais pas à un problème.*
>
> *Bonne question que doit se poser un enseignant : Combien de fois, dans l'année, mes élèves sont-ils confrontés à un problème ? » (ibid., p. 36)*

Ainsi l'élève rencontre le problème une fois que l'élève a compris l'énoncé.

HOUDEMENT (2003 p 11) propose différentes pistes pour favoriser cette compréhension. Ainsi en proposant des représentations des éléments en jeu, il est possible d'induire et de simplifier la situation.

Exemples d'étayage

Lors de l'atelier, c'est dans la géométrie non Euclidienne que des exemples ont été donnés : pour donner un exemple de ce que peut être un triangle non euclidien différentes représentations sont possibles. On peut prendre un globe terrestre, se donner trois points sur celui-ci et les relier par trois segments en les définissants comme les chemins les plus courts. La somme des angles n'est alors plus de 180° (figure ci-contre triangle, trirectangle).

On obtient une figure analogue en découpant un triangle dans une feuille, en l'évidant sur un secteur et en le redécoupant pour obtenir un triangle "courbe".

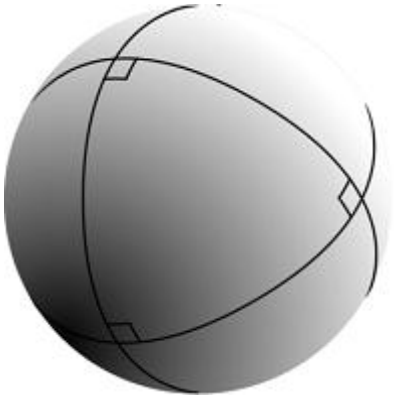


Fig. 9 : Coyau (Own work) [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ces représentations aident à la compréhension. Elles permettent des manipulations mentales ou physiques. Mêmes si celles-ci restent approximatives, elles offrent la possibilité d'aborder les problèmes de façon intuitive alors qu'ils étaient jusqu'alors inaccessibles théoriquement pour une partie des élèves.

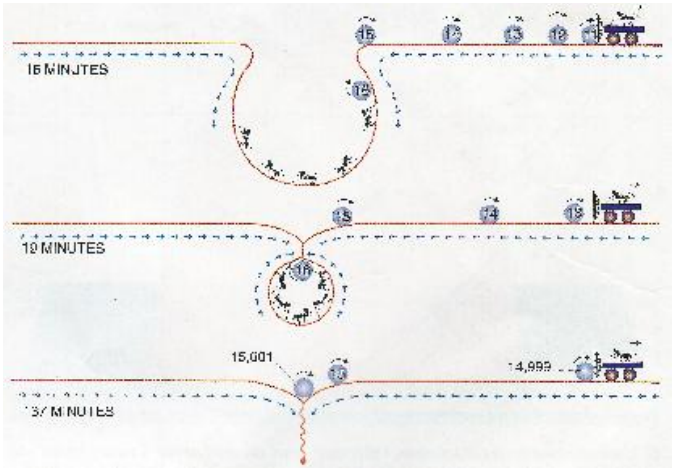


Fig. 10 : « Dossier de Pour La Science » (n°16, 1997 p. 31 illustration 3)

Autre notion complexe présentée dans l'atelier, la notion d'espace-temps a été représentée à plusieurs reprises par des dessins pour aider à la compréhension de la théorie.

Le « *Dossier de Pour La Science* » (n°16, 1997 p. 31 et 32-33) explique la courbure de l'espace-temps et l'horizon d'un trou noir. Une fourmi envoie des balles à intervalles réguliers. Lorsqu'elle arrive à un rayon critique, la dernière balle envoyée à ce moment reste indéfiniment sur place.

BACHELARD (1934, p. 17) nous met en garde quant à cette simplification :

« Une connaissance acquise par un effort scientifique peut-elle-même décliner. La question abstraite et franche s'use : la réponse concrète reste. Dès lors, l'activité spirituelle s'invertit et se bloque. Un obstacle épistémologique s'incruste sur la connaissance non question-née. Des habitudes intellectuelles qui furent utiles et saines peuvent, à la longue, entraver la recherche. « Notre esprit, dit justement M. Bergson a une irrésistible tendance à considérer comme plus claire l'idée qui lui sert le plus souvent ». L'idée gagne ainsi une clarté intrinsèque abusive. À l'usage, les idées se valorisent indûment. Une valeur en soi s'oppose à la circulation des valeurs. »

Ainsi la complexité de la situation peut être étayée par l'enseignant pour que les élèves puissent aborder le problème. Une forme d'étayage de ce type identifiée par les didacticiens est l'ostension.

La notion d'ostension

Dans la situation d'Ératosthène, les droites, les angles et le parallélisme sont omniprésents. La situation demande de changer d'espace et de manier les approximations. Elle reflète les difficultés vues précédemment.

Face à de telles difficultés, nous avons pu observer dans l'expérimentation que les enseignants ou le guide de l'enseignant de la Main à la Pâte utilisaient différentes stratégies pour adapter la situation aux niveaux des élèves. Nous avons alors parlé d'ostension.

Cette notion se réfère à la définition qu'en a donné RATSIMBA-RAJOHN, dans son « Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques » citée et développée par BERTHELOT et SALIN 1992, p. 163) :

> *« Il définit la présentation ostensive comme la donnée par l'enseignant de "tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée". Il précise : "le rapport du sujet et de l'objet nouveau est institué seulement au niveau de la représentation de l'objet présumé indépendant du sujet". »*

En particulier, ils préconisent l'usage d'une ostension assumée seulement dans certains cas :

> - *[si] le savoir officiel est présenté dès l'entrée dans la situation didactique,*
> - *[s']il n'existe pas, au sein de la situation d'enseignement, de situation a-didactique d'apprentissage où l'élève peut se situer en "résolveur de problèmes" grâce à ses interactions avec un milieu de référence effectif.*

Mais leur recherche a fait apparaître des effets d'ostension « *déguisée* » (Ibid. p. 178)

> *« Au lieu de montrer à l'élève ce qui est à voir, le maître le dissimule derrière une fiction: celle que c'est l'élève lui-même qui le découvre sur les figures soumises à son observation. Comme ce savoir à découvrir est un savoir très élaboré, le maître est obligé de "manipuler" le milieu matériel pour rendre la lecture de ses propriétés la plus simple possible; malgré cela, ses interventions sont indispensables, mais au lieu d'être vécues par l'élève comme un apport d'informations dont il ne dispose pas, elles peuvent l'être comme le signe manifeste de son incapacité à voir et comprendre ce qui est si évident pour l'enseignant et une plus grande incitation à décoder les intentions didactiques du maître. Nous retrouvons là l'un des paradoxes étudiés par Brousseau (1986), sous le nom "d'effet Dienes" »*

La complexité des situations n'est un secret pour personne : ni pour les élèves ni pour les enseignants. La frontière entre l'étayage et l'ostension est fine et impose une analyse fine de la situation. L'étayage doit préserver la richesse a-didactique de la situation. L'intérêt de la démarche d'investigation est de permettre des rétroactions en comparant les hypothèses et les résultats expérimentaux. Mais la simplification de la situation pour permettre aux élèves de rentrer dans la résolution de problèmes nécessite d'introduire des éléments mathématiques. C'est à ce niveau que se produisent les phénomènes ostentatoires. Dans son article « *Obtention et dévolution dans l'enseignement des mathématiques* » (2007), SARAZY montre que « *toute explication comporte [...] une dimension ostensive* » et citant WITTGENSTEIN (Ibid., p. 8) :

> *« L'ostension est à la dévolution ce qu'est l'explicitation au contrat : elle désigne toujours un au-delà qui veut être montré mais qui ne peut être vu que par celui qui sait (c'est souvent à ce « vu » que l'on voit que l'élève a appris).[...]*
>
> *''Est-ce que je me soucie de l'intériorité de celui à qui je fais confiance ? Si je ne lui fais pas confiance, je dis « je ne sais pas ce qui se passe en lui » ; mais si je lui fais confiance, je ne dis pas que je ne sais pas ce qui se passe en lui. Si je ne me méfie pas de lui, je ne me soucie pas de ce qui se passe en lui. (Les mots et leur signification.) Dans une conversation normale, je ne me soucie pas de la signification des mots, de ce qu'il y a derrière eux. Les mots coulent et le passage se fait de lui-même entre eux et les actes, entre les actes et eux.'' (Wittgenstein, 1994,§ 602-603) »*

Nous avons pu observer cette pratique dans les classes où ont été filmées les situations. Les enseignantes introduisaient du vocabulaire, sans nécessairement le définir et chose plus

surprenante encore, sans que cela pose de problème dans la compréhension du discours par les élèves.

III - MISE EN ŒUVRE

Malgré la complexité de la situation, sa mise en œuvre existe dans diverses écoles comme l'atteste le site dédié de la Main à la Pâte.

Les trois enseignantes à qui nous avons proposé de mettre en place cette situation ne sont pas de formation scientifique et ne maîtrisaient pas le savoir sous-jacent. Malgré une certaine appréhension, elles ont toutefois su contourner les différents obstacles précédents pour arriver à l'enseignement visé. Durant l'atelier nous avons étudié la mise en œuvre faite par l'une d'entre elles, Sarah, au cours de la séance qui devait amener à la relation entre les rayons du soleil et la longueur de l'ombre du gnomon.

1 Contexte

1.1 Cadrage général

Cette expérience a été réalisée dans un travail interdisciplinaire de l'IUFM de Poitiers regroupant trois enseignantes-chercheuses en science du langage, un enseignant de sciences physiques et deux formateurs en mathématiques. Nous souhaitions observer la reformulation au moment de l'institutionnalisation dans une séance de sciences. Au niveau mathématique, nous nous sommes intéressés à l'introduction des concepts mathématiques dans une situation de sciences et à la façon dont ces conceptss allaient être définis.

Pour les enseignantes, la consigne était floue. Nous leur avons simplement dit que nous souhaitions les filmer durant une séquence de la Main à la Pâte, celle-ci faisant environ 6 séances. Elles ont eu les documents ressources mis à disposition par l'association et après échanges, nous nous sommes mis d'accord sur la période où elles seraient filmées : en seconde période, entre les vacances de la Toussaint et celles de Noël. Pour des raisons de progressions deux d'entre elles, Sophie et Sarah ont choisi la découverte des ombres. Lætitia, la troisième, a choisi la séquence sur le déplacement des ombres dans la journée et dans l'année.

Elles sont toutes les trois parties de l'étude du texte historique (http://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/projet_eratosthene/enseignants/eratos_module.pdf).

Dans l'atelier nous nous sommes restreints à l'étude de la première séquence mise en place par Sarah et Sophie (voir annexes).

1.2 Déroulement de la séquence analysée

Avant de mettre en place la séquence, les élèves de Sarah ont fait le pré-test du guide. Puis ils ont été interrogés sur le texte d'Ératosthène et la carte de l'Égypte. Ils ont alors un schéma de la situation qui servira de point de départ à la séance suivante. Une fiche leur est distribuée sur laquelle il y a un crayon représentant l'obélisque d'Alexandrie et un bouchon pour le puits de Syène. Les élèves vont dans la cour pour chercher le moyen de retrouver les observations d'Ératosthène : une ombre pour le crayon tout en éclairant le fond du puits.

Le bilan est fait en classe et doit amener à la confrontation avec les résultats que l'on obtient lorsque l'on remplace le soleil par une lampe de poche.

Ce sont les trois premières séances.

La quatrième séance est décrochée et reprend l'activité complémentaire mettant en évidence la relation entre l'ombre et la lumière.

2 Etude des séances complémentaires lors de l'atelier

Les groupes se sont réparti les documents ressources des trois séances complémentaires sur la formation de l'ombre (voir annexes). L'objectif était de mettre en perspective l'étude théorique précédente et les propositions de la Main à la Pâte.

2.1 Consignes

Les séances optionnelles de la séquence 1 sont :

- Travail sur la propagation rectiligne de la lumière : groupe 1 (Annexe 2).
- Travail sur les ombres et leurs relations avec la source lumineuse : groupe 4 (Annexe 3).
- Notion de rayons divergents et de rayons parallèles : groupe 2 et 3 (Annexe 4).

Chaque groupe avait à répondre aux questions suivantes :

- Pour chacune des séances, identifiez les différentes étapes de la DI.
- Quels sont le(s) objectif(s)-obstacle(s) de la séance.
- Identifiez ce qui dépend de l'opinion et, ce qui dépend du fait scientifique.

La mise en œuvre de la séance n'est pas l'objectif de l'observation mais émergera assez naturellement de l'étude.

La recherche des phénomènes d'ostension devait conclure l'atelier mais faute de temps, il fut à la charge de l'animateur.

2.2 « Propagation rectiligne de la lumière »

Le terme de propagation

La première séance commence par une enquête préalable. Cette étape est fortement à la charge de l'enseignant.

La dévolution commence par la remarque :

> *« les enfants ne s'interrogent guère sur la propagation de la lumière, qu'il s'agisse de celle du Soleil ou de celle d'une ampoule électrique (celle d'un plafonnier par exemple) : ils ont l'intuition que la lumière se diffuse autour de sa source dans toutes les directions puisqu'ils " baignent " dedans, et cela leur suffit. »*

Cela semble une évidence : les élèves peuvent-ils imaginer que la lumière se propage ? Pour nous, adultes, la conceptualisation est difficile : le terme « propagation » est obscur. Quelle représentation pourraient avoir les élèves pour qu'ils puissent l'évoquer ? Il semble évident que le cadre théorique est celui de l'optique géométrique où les rayons lumineux sont considérés comme rectilignes.

Ce questionnement reste celui du mathématicien qui a le souhait de définir rigoureusement les objets qu'il emploie. Or lors de l'expérimentation, les élèves répondent à cette question sans difficulté particulière, et en faisant plusieurs propositions. Mais au préalable, l'enseignante a induit une représentation rectiligne des rayons lumineux. Elle s'est appuyée sur une gestuelle et une formulation mathématique incitant à avoir cette vision.

La question initiale

Le groupe qui a étudié cette séance, s'est longuement interrogé sur la question initiale. Et ce n'est qu'au travers du scénario qu'ils ont réussi à l'expliciter. Ils ont déduit qu'il devait s'agir de savoir « Comment ça éclaire ? ». Cette absence est d'autant plus surprenante que l'on parle d'une enquête préalable qui serait une discussion collective mais sans qu'un questionnement ne soit formulé.

Cela leur a posé problème car ils ont eu du mal à identifier pour quelle finalité les élèves manipulaient le matériel à leur disposition. C'est la phase d' « expérimentation ». Ces manipulations donnent lieu à des explicitations pour être ensuite schématisées et créer un dispositif expérimental.

Les participants estimaient que le passage de la question initiale « comment ça éclaire ? » à la verbalisation aurait mérité plus de précision. Ils estimaient que des étapes étaient nécessaires. En effet, la mise en œuvre proposée est la suivante :

> *« Un premier moment d'expérimentations – assez court – peut avoir lieu par rotation des groupes : d'une part, dans un endroit ensoleillé de la classe, les enfants, à l'aide de miroirs, "renvoient le soleil" dans une partie plus sombre de la pièce, sur un mur ou au plafond, et observent le déplacement de la tache lumineuse en fonction de l'orientation de leur miroir ; d'autre part, dans une pièce assombrie, les élèves observent la position des objets éclairés avec leur torche par rapport à celle-ci, tout en évaluant la forme et l'étendue de la zone éclairée. Mais ils pourront également expérimenter le "renvoi" de la lumière de la torche avec un miroir. »*

Dans cette description, il y a un cheminement pour passer de la formalisation de l'observation de la lumière provenant du soleil à celle d'une lampe. Il est complexe et peu explicité. Le texte laisse à penser que c'est l'enseignant qui va mettre les élèves dans des situations où l'aspect rectiligne sera mis en évidence. Et il sera exhibé au moment de la phase de verbalisation. Nous pouvons y voir une ostension déguisée. Tout est prévu pour que l'aspect rectiligne de la lumière apparaisse. L'activité commence par demander aux élèves d'anticiper une observation. Ils commencent donc par émettre une hypothèse. Le modèle que nous connaissons en mathématiques est plutôt d'observer d'abord et d'anticiper un résultat ensuite. Sur quoi se fonde donc cette hypothèse ? Si elle n'est pas vérifiée que remet-elle en cause ? Et par conséquent quel est son statut ?

La place de la schématisation

Le schéma se trouve entre l'émission des hypothèses et l'expérimentation. Il doit « montrer » les hypothèses que les élèves viennent de faire. Il sert de support pour la verbalisation. La structuration du savoir émerge de la confrontation entre ces différentes représentations. De ces échanges doit sortir l'aspect rectiligne de la trajectoire de la lumière.

La conception de ligne droite est donc centrale. Alors quelle expérience permet de savoir si la trajectoire est une ligne droite ? On peut imaginer l'utilisation d'un obstacle sur la trajectoire de la lumière. C'est alors la notion d'alignement qui est utilisée. Le lien entre la ligne droite et la représentation physique s'établit : suivant la position où je mets l'obstacle, le faisceau s'arrêtera ou non et l'ombre portée permettra de confirmer ou d'infirmer le modèle. Il faut avoir compris la relation entre l'ombre, la source lumineuse et l'obstacle or c'est l'objet d'étude. Ainsi la schématisation traduit la compréhension de la relation entre l'ombre et la lumière. Elle est entrelacée avec la notion de ligne droite.

Ainsi nous constatons que dans cette séance, certains élèves peuvent avoir compris que la lumière se déplaçait de façon rectiligne sans être capables de le formuler. Le schéma est le moyen d'évaluer l'acquisition du savoir.

2.3 « Relation ombres et sources lumineuses »

Dans cette séance, les élèves partent des représentations qu'ils ont fait dans le pré-test « *d'un bâton au soleil* » (annexe 5). La confrontation des différentes représentations des élèves et de l'observation au soleil doit établir la problématique.

Définir une question

De cette confrontation, les participants ont extrait trois questions qui pouvaient être posées :

- Quelle relation existe entre la longueur de l'ombre et la longueur du bâton ?

- L'ombre et l'objet ont-ils des formes similaires ?
- Quelle relation existe-il entre l'inclinaison des rayons et l'ombre ?

Leur problème était alors de savoir comment l'enseignant peut créer les conditions pour avoir la bonne formulation de ces questions, puis passer à la formulation des hypothèses et aux expérimentations qui doivent les vérifier ?

Le document semble indiquer que les représentations et leurs explicitations doivent permettre d'atteindre cet objectif. Mais les premières représentations s'appuient sur les croyances des élèves. Elles ne sont pas nécessairement raisonnées. Quelle est la responsabilité de chacun dans cette formulation ? Comment la question est-elle amenée ?

La première observation a lieu dans la cour. Les élèves doivent observer leur ombre au soleil. De façon analogue à la première séance, cette activité est présentée sans question. Les élèves sont-ils en train de résoudre un problème ou continuent-ils à chercher à trouver une question ?

Ne s'agit-il pas de définir ce qu'est une ombre ? Ou est-ce la relation entre deux objets que l'on cherche ? Dans ce cas, s'agit-il d'un problème géométrique ou de physique ?

L'absence d'une finalité claire gêne l'analyse de cette séance.

Les ostensions

Le rôle du dessin

Les dessins initialement demandés ont un statut ambigu. Quelle est leur finalité ? La question est ouverte : les élèves doivent « *montrer par des dessins ce qui vient d'être dit* ». Des éléments sont attendus comme les rayons lumineux sous diverses formes. Mais les interventions des enseignants ferment implicitement ces ouvertures :

> *« Leur demander s'ils voient réellement cette partie de leur dessin. Convenir alors avec les élèves que si cela peut les aider, ils peuvent les représenter. Mais comme ils ne se voient pas, on décide de les dessiner en pointillés... »*

De la même façon, les élèves se retrouvent avec peu de choix dans l'expérience : le matériel leur est donné tout comme la tâche à réaliser et le lieu. On ne retrouve pas le sens d'une situation d'investigation.

Mise en œuvre

Cette situation a été mise en place dans l'expérimentation. Pour cela, l'enseignante a intégré une fiche supplémentaire pour obtenir une trace écrite. Cela lui a permis de mettre en évidence la relation entre l'ombre et la source lumineuse pour définir le rayon lumineux. On voit nettement dans la vidéo et dans la fiche élève (annexe 6) que par une évolution progressive du questionnement, la notion de direction se met en place, puis le rayon limite qui passe par le sommet du gnomon et l'extrémité de l'ombre. Elle accompagne les élèves avec ce questionnement, en caractérisant la droite par deux points (premier postulat d'Euclide) et en accompagnant ses questions de gestes indiquant la direction.

Des ostensions déguisées

Ainsi la description de cette séance laisse un flou qui donne l'impression que ce ne sont pas les élèves qui construisent l'expérience mais que cela est à la charge de l'enseignante en particulier la phase où par le raisonnement et leurs connaissances les élèves doivent expliquer leurs opinions et mettre en place l'expérience. Finalement les élèves passent du temps dans des manipulations et l'expérience ne leur est pas dévolue. Cette analyse met en évidence de nombreuses ostensions. Étaient-elles nécessaires ? Si oui, ne pouvaient-elles pas être explicitées et assumées ? Sinon est-ce

qu'elles n'auraient pas pu être évitées en questionnant les observations sous l'angle mathématique ?

La résolution de problème

Les membres du groupe ont trouvé dans ce déroulement une différence avec notre approche mathématique des problèmes. Les élèves ne sont pas dans ce que l'on appelle une résolution de problème, présente dans la pensée bachelarienne. Or celle-ci est pensée pour les sciences expérimentales et c'est une des raisons qui a poussé BROUSSEAU à développer sa théorie des situations didactiques pour l'adapter à l'enseignement des mathématiques (BROUSSEAU 1998, p. 119).

Posons-nous la question des raisons qui amènent aux écarts observés dans cette transposition.

La difficulté est-elle liée au format du média comme pour les manuels ? Un participant met cela en écho avec l'atelier de Stéphane Fabre et Brigitte Grugeon-Allys « *Etude comparative de deux situations sur les triangles particuliers au Cycle 3* ». Ils ont comparé l'approche d'un manuel et d'une activité de manipulation.

Ce détournement peut aussi s'expliquer par le sujet d'étude qui est mathématique. Nous sommes finalement dans une géométrie naturelle (HOUDEMENT et KUZNIACK, 2006) difficilement reconnue comme rigoureuse.

La place du dessin

Pour chercher à aménager cette situation, la réflexion s'est déplacée sur les croquis.

Cette séance repose sur la première représentation et rejoint la difficulté que nous avons de faire passer les élèves du croquis au schéma. La différence entre ces représentations vient du degré d'abstraction qu'elles ont, de leur valeur sémiotique. Le schéma sera plus épuré, ne contenant que les éléments qui sont pertinents à l'étude de la situation. Christine Choquet a donné un exemple qu'elle a observé pour sa thèse. Dans le cadre d'une résolution de problème, des élèves de CM2 avaient à schématiser un chien attaché à un poteau pour représenter la zone où l'animal pouvait se déplacer. Les dessins représentaient des détails des objets et les enseignantes ont eu du mal à les faire évoluer pour arriver à un schéma. Elles ont dû passer par des conduites ostentatoires pour n'obtenir que l'essentiel. Ce travail a été d'autant plus complexe que la situation est attachée à une chronologie. Dans cette expérience, partir de schémas de quelques élèves n'a pas été efficace, même pour un réinvestissement plus tardif. Lorsque l'enseignante présentait le schéma, lors du réinvestissement suivant les élèves restaient à nouveau sur des représentations imagées. Une des explications possibles serait que les élèves ne voient pas l'intérêt de supprimer les détails pour obtenir un schéma.

La discussion s'est poursuivie sur la place de la représentation en géométrie. Ainsi les connaissances sur les triangles sont essentiellement l'étude des figures et leur construction. On demande parfois aux élèves de reconnaître une forme. En primaire, sa caractérisation et sa définition sont problématiques. La définition est d'abord donnée de façon simple et sera complétée au fur et à mesure des rencontres avec des monstres ou des exceptions (OUVRIER-BUFFET 2012).

Définition des objets géométriques

La discussion s'est poursuivie sur la définition du polygone. Elle dépend du point de vue choisi : peut-il être défini à partir de ses faces ? De ses sommets ? De ses arêtes ? Des barycentres ? Cela dépendra du cadre géométrique choisi.

Que peut-on donner en primaire ou en formation initiale des Professeurs des Écoles ? Il est possible de partir de manipulations de polyèdres. Les polygones sont alors des faces de polyèdres. Une face est une partie de l'enveloppe du solide sur lequel il peut reposer sur une table sans laisser d'espace. C'est une approche similaire à celle proposée dans la communication de FABRE-GRUGEON. La situation donnée en référence utilisait des pailles. La Main à la Pâte, propose une approche plus sensible et intuitive liée à la perception qu'ont les élèves des objets. En termes de

genèse, la première approche est plutôt expérimentale alors que la seconde est plutôt intuitive. En termes d'espace de travail géométrique, ce sont deux genèses différentes qui sont employées : la première est intuitive et la seconde instrumentale. Leur confrontation peut permettre par le discours de construire la définition.

La place des faits et des hypothèses

Un groupe a été surpris par l'amorce de la situation qui ne correspond pas au canevas de la démarche d'investigation. Celui-ci met les observations après que les hypothèses ont été formulées. Or dans la situation étudiée, le croquis anticipe des observations qui seront vérifiées à l'extérieur. La suite est alors plus classique.

Toutefois, ce que les élèves ont à vérifier est explicité et reste de l'ordre du constat. L'observation semble guidée. Finalement il s'agit de confronter un modèle mathématique non explicité avec la réalité des observations. Mais ont-ils les connaissances nécessaires pour sortir du simple constat ? De quel prérequis ont-ils besoin ? Peuvent-ils faire ces hypothèses ?

Notre analyse critique se fait du point de vue de la didactique des mathématiques avec nos outils et notre évaluation des connaissances mathématiques des élèves. Or la description de cette mise en œuvre et l'articulation des hypothèses et des faits s'appuient sans doute sur les contraintes et les conditions liées au terrain et à la discipline.

Une analyse conjointe avec d'autres disciplines serait enrichissante : il y a tout au long de cette étude une forte présence de verbalisation et d'explicitation. Les interconnexions peuvent justifier le choix de leurs importances et la façon dont sont présentés les faits.

2.4 Aparté : échos avec le mémoire de CAFIPEMF d'une des participantes

Une démarche d'investigation

Cet atelier a fait écho au mémoire de CAFIPEMF d'une participante. Elle avait proposé à ses élèves de réaliser la maquette d'un système solaire. C'est un projet qui s'est montré motivant à la fois pour elle et pour ses élèves. Il a demandé de développer de nombreuses connaissances mathématiques :

- La question de l'échelle

La demande était de faire rentrer la maquette dans la classe. Il fallut donc choisir une échelle adaptée mais cela pose le problème du rapport entre les rayons des planètes et du soleil. Il fallut choisir deux échelles distinctes.

- La découverte de nouvelles connaissances

Pour réaliser les planètes, les élèves sont allés chercher des informations à la fois sur celles- ci et sur les connaissances mathématiques pour construire les sphères qui devaient les représenter. En particulier Saturne et ses anneaux ont imposé d'expliciter les relations entre le rayon et la circonférence. C'est par une recherche documentaire que les élèves ont pu répondre à cette difficulté. Ils étaient ainsi dans une démarche d'investigation.

Problème complexe et structuration des savoirs

La participante a tiré comme bilan de cette expérience d'avoir vu des élèves dans une véritable activité de recherche mathématique. Ils ont acquis plus d'autonomie. La complexité du problème a été gérée en fractionnant les différentes étapes en temps d'études plus spécifiques sur certains objets. Le projet s'est donc étalé sur une longue période.

Cette succession de problèmes mathématiques amène à la question de la structuration du savoir. Dans ce projet, les savoirs s'organisent autour d'une question pratique. Les connaissances sur le cercle se retrouvent à côté de la proportionnalité. Cela n'a semble-t-il pas posé de problème pour les élèves.

Serait-il possible d'avoir des situations analogues adaptées à une organisation du savoir respectant les grandes structures des champs mathématiques ?

La liberté des élèves d'explorer différentes pistes, bonnes ou mauvaises, est la richesse à préserver de ce projet. Elle permet de construire des « Proof generated definition » (OUVRIER-BUFFET 2012).

C'est un exemple de ce que pourrait être la construction de savoirs mathématiques par la démarche d'investigation. Mais les connaissances mises en place seront vouées à évoluer et à se réorganiser au fur et à mesure des problèmes rencontrés. Les notions mathématiques développées doivent pouvoir être transférables dans d'autres cadres, soit en tant qu'outils soit en tant qu'objets. L'organisation mathématique des savoirs doit permettre cette flexibilité. C'est pourquoi celle-ci doit prendre en compte les grandes structures mathématiques.

3 Retour sur les analyses

Après ces analyses nous avons pris le temps de faire une synthèse de ce qui a été dit dans les différents groupes.

3.1 Le regard du formateur en mathématiques sur les situations expérimentales

Notre regard reste toujours critique. Il est le même que celui que nous avons lorsque l'on observe des situations d'enseignement mathématique.

Mais cette critique ne doit pas occulter les autres regards des didactiques des disciplines. La théorie des situations didactiques de BROUSSEAU n'est pas nécessairement transposable à toutes les disciplines. Un participant a fait la remarque sur la place de la résolution de problèmes en histoire géographie qui ne peut avoir le même sens. Malgré tout ASTOLFI (1992) et BACHELARD (1934) représentent un courant de l'éducation des sciences. Ainsi lorsqu'ASTOLFI propose d'« *apprendre par franchissement d'obstacle* », présentant la notion d'objectif-obstacle cité par DECAMP et DE HOSSON (2011), il s'appuie sur deux exemples (le sèche-cheveux et la falaise) pour expliquer cette notion qu'il prend dans les sciences expérimentales. Le canevas proposé pour la démarche d'investigation et repris dans les programmes du collège est le témoin de la persistance de cette approche. Cela se retrouve dans les programmes de cycle 3 (MEN 2007) : « *les connaissances et les compétences sont acquises dans le cadre d'une démarche d'investigation qui développe la curiosité, la créativité, l'esprit critique et l'intérêt pour le progrès scientifique et technique.* »

Si le principe est le même entre les sciences expérimentales et les mathématiques, l'analyse critique que nous en avons faite peut nous interroger. Sans parler d'hégémonie des mathématiques sur les disciplines, notre discours critique doit nous amener à réfléchir sur la relation avec les disciplines connexes. Cette vision critique se retrouve dans le regard que nous portons sur les différentes théories didactiques de mathématiques et sur leurs applications comme lors des débats entre les tenants de la théorie de situations didactiques et ceux de la théorie anthropologique du didactique.

3.2 Distinction entre l'approche des sciences expérimentales et des mathématiques

Les programmes du collège (MEN 2008) indiquent que :

> « *La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre.* »

Nous pouvons nous questionner sur ces différentes approches. Nous avons vu comment BACHELARD (1934) conçoit la construction de la science contre l'opinion. Nos questions ont finalement porté sur la façon dont cette confrontation était mise en place comme nous l'observons pour des séances de mathématiques. Un même dogmatisme finit par émerger des séances de

mathématiques où l'opinion des élèves ne porte plus sur l'objet d'étude mais sur la parole de l'enseignant. Dans une situation où l'élève ne perçoit pas les finalités d'un apprentissage, il considère que le savoir est le bon parce qu'il vient de l'enseignant et non parce qu'il a été convaincu par raison.

3.3 Retour sur la séquence

La dévolution

Le groupe qui a étudié la situation « *Travail sur la propagation rectiligne de la lumière* » (Annexe 2) n'a pas réussi à identifier la situation déclenchante du problème, la question que les élèves doivent se poser. Elle commence par une enquête sans qu'il y ait d'enrôlement apparent de l'élève.

Il y a un certain nombre de concepts nécessaires pour comprendre la situation d'Ératosthène dont l'appropriation se trouve forcée par la situation. Cette approche se fait de façon plus ou moins expérimentale mais les relations avec le maître et la place des notions mathématiques ne sont pas explicites.

Ce problème du questionnement ne se retrouve pas dans la deuxième situation « *Travail sur les ombres et leurs relations avec la source lumineuse* » (Annexe 3) où la dévolution a pu être identifiée.

La place du dessin

Dans les deux premières situations, le dessin tient une place primordiale : il est un moyen de connaître la compréhension des élèves et permet une première abstraction du phénomène. Il tient lieu de formulation des hypothèses que l'expérience validera ou non.

Lorsque les hypothèses sont formulées par les élèves, il est nécessaire qu'ils aient auparavant trouvé les mots les plus justes pour garder une trace écrite. Or lorsqu'il s'agit d'un nouveau savoir, le vocabulaire se trouve limité.

Nous pensons que le dessin permet de juxtaposer et de comparer plus facilement des hypothèses. Les différences sont plus apparentes. Mais la schématisation présuppose l'association d'objets physiques à des formes géométriques et d'actions à des relations géométriques. Pour justifier qu'une ligne droite représente un faisceau lumineux, il faut que l'analogie soit déjà présente chez l'élève.

Mais ils ont acquis des représentations à travers différents médias. Dans les dessins animés, les rayons lumineux peuvent être représentés par des traits droits, tout comme dans les albums de jeunesse. Et c'est ainsi que l'enseignante filmée a introduit la notion de rayon lumineux à partir des deux photos suivantes.



fig 11



fig 12

Il semble que le dessin fasse partie du contrat didactique de l'école primaire en sciences : lorsqu'il y a une observation à faire, les élèves doivent la représenter.

Ainsi nous en avons déduit que dans un cas, on parle d'une imprégnation culturelle alors que dans l'autre, il a une valeur didactique. Finalement ces dessins n'ont pas la même valeur sémiotique.

3.4 Situation filmée

L'observation en classe

L'extrait présenté montre comment les élèves font leur exploration pour répondre à la troisième question de la fiche (annexe 6) :

« **Je pose un crayon debout, verticalement, sur le bureau et j'oriente la lumière de ma lampe vers le crayon.**
Qu'est-ce que j'observe sur le bureau ? Pourquoi ? »

Dans la phase de manipulation, on voit les élèves déplacer leur lampe et constater que l'ombre se déplace en opposition du déplacement de la lampe. Ils établissent une relation entre la source lumineuse et l'objet. On peut le voir comme la mise en place du concept d'alignement entre la source lumineuse, l'objet et son ombre. Cette relation est matérialisée lorsque l'enseignante passe dans les groupes. Elle fige le mouvement en tenant la main de l'élève puis elle insiste sur des éléments particuliers, induisant des invariants qui définiront le rayon lumineux. Les élèves finissent par suivre du doigt la trajectoire que doit suivre la lumière matérialisant la relation entre ces points. Le discours qui accompagne le questionnement induit lui aussi l'aspect rectiligne : « *Elle vient d'où ce...* » « *Mais ils vont où ces rayons* ? ».

Cette ostension avait commencé en début de séance avec les deux photos présentées ci-dessus au vidéoprojecteur. Elles induisent une vision rectiligne de la lumière. D'ailleurs lorsque les élèves les décrivent ce sont ces éléments qui vont être relevés et attendus.

Dans l'entretien qui a suivi cette séance, Sarah a justifié ce choix par la complexité du concept : elle estime qu'il faut que les élèves aient une représentation pour pouvoir réfléchir.

Du point de vue des sciences cela peut être problématique mais pour nous enseignants de mathématiques, est-ce problématique ? Ne doit-on pas proposer ou induire des modèles qui pourraient être confrontés avec une vision empirique ou une opinion ?

La propagation rectiligne est une représentation coutumière de la propagation de la lumière. Elle fait appel à un objet mathématique dont les propriétés vont permettre de développer une théorie, l'optique géométrique qui permet d'expliquer de nombreux phénomènes lumineux. L'étude des droites d'un point de vue abstrait permet de dégager des propriétés qui pourront être confrontées à des expériences. Cette situation est finalement une bonne situation déclenchante pour étudier les propriétés liées à l'alignement.

Pouvait-on se passer des ostensions ? Certaines personnes de l'atelier pensent que oui en jouant sur les obstacles positionnés sur la trajectoire.

Passage du croquis au schéma

Un groupe s'était interrogé sur le passage du dessin du pré-test au schéma au tableau. Dans sa correction, nous avons pu voir que l'enseignante a finalement utilisé différents procédés ostentatoires pour amener les élèves à une représentation conventionnelle. Quelle signification va alors avoir ce dessin ? Est-ce que les propriétés qu'il engage sont perçues par les élèves ?

Les représentations des questions suivantes peuvent nous interpeller. L'alignement ne semble pas poser de problème lorsque l'on observe les élèves tracer les rayons aux questions 3, 4 et 5. Ils prennent leur règle et s'appliquent à tracer des segments passant par la pointe du gnomon et l'extrémité de l'ombre.

Alors est-ce que l'on ne se trompe pas d'objectif d'apprentissage ? Le premier postulat d'Euclide est finalement très intuitif et détermine notre géométrie. Il ne pose pas de problème.

Le second objectif apparaît dans la réponse à la question 3 : on voit apparaître des rayons parallèles. Voici trois productions d'élèves recopiées du tableau :

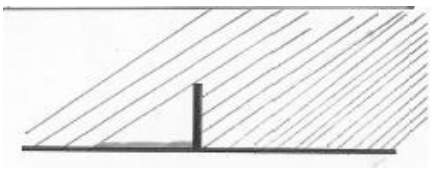


Fig. 14

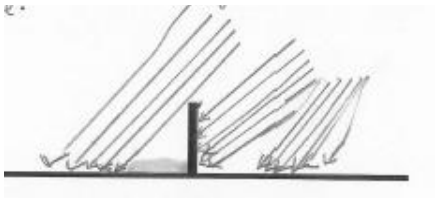


Fig. 15

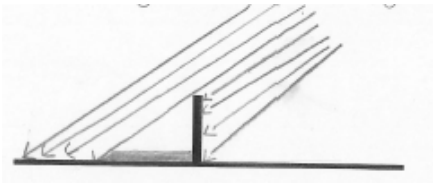


Fig. 16

On voit que le parallélisme est présent sur chacune même si le tracé reste problématique. Leur comparaison doit pouvoir amener à définir le concept. On voit intuitivement que certains tracés sont "plus justes" que d'autres. Est-ce que l'explicitation de ces différences ne peut pas permettre de définir le parallélisme ? La recherche d'une technique de tracé permettrait ensuite de justifier la recherche de propriétés.

Mais cette représentation du parallélisme peut rentrer en opposition avec d'autres représentations comme celles que l'on peut trouver dans la perspective en point de fuite.

Toutefois cette représentation traduit un parti-pris fixé par les hypothèses initiales lors des premières représentations. Le choix d'une trajectoire rectiligne est de permettre de comprendre les premiers phénomènes d'optique. Choisir comme schéma une projection dans le plan perpendiculaire, c'est déjà vouloir attirer l'attention des élèves sur les relations géométriques.

Ainsi la place des mathématiques dans ce type de situation d'investigation se trouve bien dans la réalisation des schémas. Ces schémas sont porteurs de sens pour l'enseignante qui va pouvoir amener les élèves à comprendre pourquoi il y a une ombre à Alexandrie et pas à Syène.

Mais est-ce que les élèves ont saisi l'enjeu d'apprentissage ? Est-ce que cela va les aider dans la structuration de leurs savoirs ?

Perspective

Nous avons déjà parlé des Espace de Travail Géométrique d'HOUDEMENT et KUZNIAK (2006).

Ils permettent de mettre dans une même perspective les différents modes de pensée de GONSETH (1945), le plan cognitif des élèves et le plan épistémologique de l'enseignant.

GONSETH en a exhibé trois pour la géométrique : l'intuition, l'expérience, la déduction. Ces trois modes sont consécutifs. On aborde une notion d'abord de façon intuitive puis on la développe autour d'expériences et on finit sa construction par la déduction.

Dans cette étude, je souhaitais montrer comme la déduction pouvait venir de la confrontation des approches intuitives et expérimentales comme nous l'avons expliqué précédemment pour le tracé des rayons parallèles.

L'ensemble des productions des élèves (Annexe 7) montre des rayons ayant la même direction mais des tracés pas tous justes. Ces tracés se sont faits de façon intuitive : aucune technique n'avait été vue avant. Or l'observation des techniques employées au tableau et par les élèves a permis de constater qu'une grande majorité faisait glisser leur règle. Est-ce que cette technique reflète la perception qu'ont les élèves des droites parallèles ? Est-ce qu'elle s'appuie sur une connaissance empirique ? La justification de ces techniques par rapport au regard intuitif va permettre de développer la technologie. La question de la précision devra permettre de construire le référentiel théorique qui se détachera de la réalité.

Cette approche correspond à celle définie par GONSETH (1945).

Pour expliquer l'intuition géométrique, il utilise la métaphore des poupées russes. L'action de l'homme sur le monde se partage en deux secteurs : la prise d'informations sur le monde réel obtenues à partir de ces perceptions et l'action sur celui-ci réalisée par les gestes. On pourrait imaginer deux tables de registres P et G, la première contenant les perceptions que l'homme peut

avoir, la seconde contiendrait les gestes qu'il peut effectuer. Pour faire correspondre ces deux registres, GONSETH imagine plusieurs niveaux où tout ce qui peut être automatisé serait confié à des robots. Ainsi l'action réflexe consistant à mettre en relation une perception et une action peut être confiée à un robot. Mais à un certain niveau, les perceptions demandent une interprétation (par exemple reconnaître un triangle) et le robot ne peut plus seul en avoir la charge. C'est alors l'homme mathématique ou mu qui prend le relais. Il n'a pas accès directement au monde réel, il n'a accès qu'à un théâtre de perception où la réalité est représentée. Il ne peut pas non plus agir directement. Il passe par le théâtre des gestes : il donne les actions à mener dans la réalité. Et ce sont les robots qui vont mettre en relation la réalité extérieure et ces deux théâtres.

Ainsi les mathématiques ne s'appliquent pas directement au monde mais à la représentation que l'on s'en fait. Les schémas sont une forme de représentation du théâtre des perceptions.

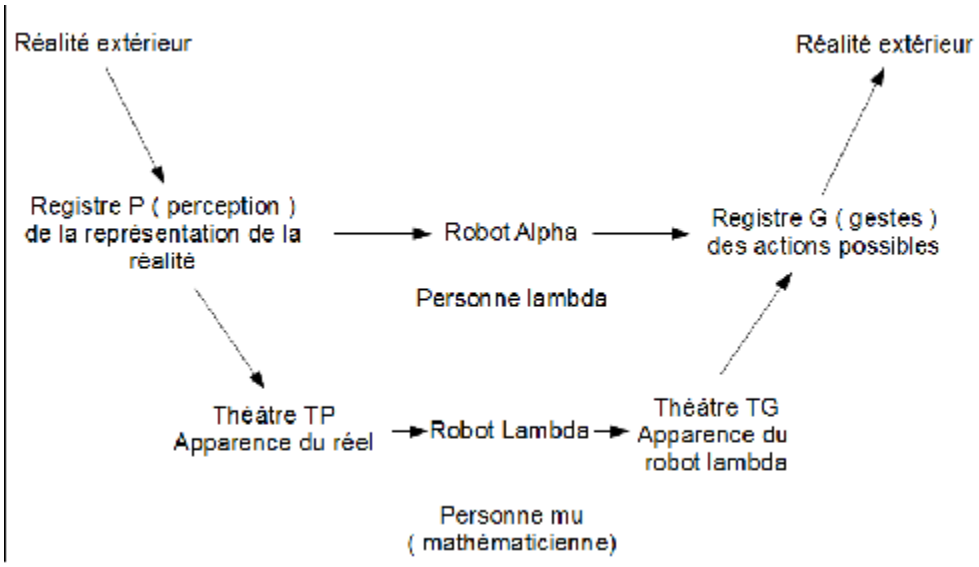


Fig. 13 : personage mu

Dans cette schématisation on peut voir une inspiration de l'analyse de POINCARÉ lorsqu'il distingue le continu physique et mathématique. Le continu physique se fait à partir des perceptions alors que le continu mathématique est une interprétation de nos perceptions. C'est à partir de l'intuition que se construit le continu mathématique et de l'expérience celui du continu physique.

Pour répondre à la nécessité d'ostension, GONSETH (1945, Tome I p. 57) définit le principe d'idonéité :

> *« Le passage à une nouvelle perspective, à une nouvelle façon de penser est marqué par l'intervention du mot « idoine ».[...] il signifie qui convient, qui tient compte des conditions, qui répond aux exigences, qui est conforme aux fins et aux intentions, approprié à sa fonction, etc.*
>
> *[…]*
>
> *C'est naturellement un principe de simple bon sens car, si l'on ne peut réaliser une perfection en quelque sorte automatique, il reste la faculté de répondre au mieux, compte tenu de toutes les exigences et de toute l'information du moment. Il se trouve d'ailleurs, quant aux questions analogues à celles que nous traitons, que le chemin à suivre n'est guère douteux, que les décisions à prendre ne sont guère problématiques, si l'on ne veut pas faire moins bien qu'il n'est possible. »*

Ainsi lorsque Sarah induit la forme rectiligne, elle met en place un environnement idoine, prenant en compte différents paramètres et qui suffit pour ce qui est attendu des élèves. La propagation rectiligne répond au mieux au problème posé. Mais cette vision n'est pas figée.

IV - BIBLIOGRAPHIE

ASTOLFI J.-P. (1992). Apprendre par franchissement d'obstacles ? *Repères n°5*

BACHELARD G. (1934). *La formation de l'esprit scientifique.* Vrin

BALACHEFF N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves du Collège*. ***Thèse de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I***

BARBIN E. (1991). Les éléments de géométrie de Clairault : une géométrie problématisée, *Repère IREM* , n°4, p 119

BERTHELOT R. et SALIN M.-H. (1993-1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire – *Grand N* n°53

BERTHELOT R. et SALIN M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université de Bordeaux

BOURBAKI N. (1984). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Masson

BROUSSEAU G. (1998). *La Théorie des Situation Didactiques*. La pensée sauvage

CHARNAY R. (2004). L'école primaire, première étape de la culture mathématique des élèves. *Cahiers pédagogiques, n° 427.*

CHARVET J. (2004). *Les jeunes et les études scientifiques dans l'académie d'Orléans-Tours* - Académie Orléans-Tours

CHEVALLARD Y. (2002). *Organiser l'étude 1 : Structures et fonctions.* Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques - version électronique

CLAIRAULT (1765). Eléments de géométrie.

DECAMP N. et DE HOSSON C. (2011). Quelques éléments historiques et didactiques sur l'expérience d'Ératosthène, *Le Bup*, n°937, 1065-1082

DROUARD F. (2008). La démarche d'investigation dans l'enseignement des sciences. *Grand N* n°82

GOLDSTEIN B., R. (1984). Eratosthenes on the "Measurement" of the Earth - *Historia Mathematica*, n°11, 411-416.

GONSETH F. (1945-1946). *La géométrie et le problème de l'espace – Tomes I et II*. Édition du Griffon

HOUDEMENT C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N n°71*

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 11, 175 – 193

IREM Poitiers (2009 à 2012). *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs T1 à 6*– IREM de Poitiers

KUHN T. S. (1962). *La structure des révolutions scientifiques*. **Champs Sciences**

LA MAIN À LA PÂTE - Guide enseignant (http://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/astep/PDF/guideenseignant_fr.pdf)

LEBOT B. (2012). La place des mathématiques dans une situation expérimentale : étude de la fonte d'un glaçon cycle 2, *Acte colloque copirelem 2012*

MATHÉ S. (2010). *La "démarche d'investigation" dans les collèges français - Élaboration d'un dispositif de formation et étude de l'appropriation de cette nouvelle méthode d'enseignement par les enseignants*, Thèse de l'Université de Paris Diderot

MATHÉ S., MÉHEUT M. et DE HOSSON C. (2008). Démarche d'investigation au collège : quels enjeux ? *Didaskalia* n°32

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2007). Programmes de l'école primaire – *Bulletin officiel HS* n°3

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2008-a). Programmes du collège : Programmes de l'enseignement de physique-chimie – *Bulletin officiel* n°6

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2008-b). *Mathématiques : classe de sixièmes, cinquième, quatrième, troisième* – CNDP

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2012). Ecole primaire : Programmes d'enseignement : modification – *Bulletin officiel* n°1

MONOD-ANSALDI R. et PIREU M. (2011). *Démarches d'investigation dans le secondaire : représentation des enseignants de mathématiques, SPC, SVT et technologie*, IFE

OUVRIER-BUFFET C. (2012). L'activité de définition vers un mode de pensée spécifique ? *In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement Des Mathématiques et Contrat Social : Enjeux et Défis pour le 21e Siècle, Actes du Colloque EMF2012 (*GT3*, pp. 492–503)*. http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

PEYRARD F. (1804). *Les éléments de Géométrie d'Euclide*. Ed F. Louis

PICHOT A. (1991). *La naissance de la science T1 : Mésopotamie – Égypte*. Folio essais

POINCARE H. (1902). *La science et l'hypothèse*, Champs Sciences

POINCARE H. (1905). *La valeur de la science*, Champs Sciences

V - ANNEXE

Annexe 1

LA DÉMARCHE D'INVESTIGATION RAISONNÉE DANS L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES

1 À partir d'une situation fonctionnelle ou d'une situation de départ fortuite ou provoquée

Etonnement, curiosité, questionnement

Formulation d'un problème à résoudre

2 Par le raisonnement et en utilisant ces connaissances

Explications possibles, réponses possibles, représentations de la solution

Formulation des hypothèses à tester ou le cas échéant à vérifier dans de la documentation

3 Selon la nature du problème et des hypothèses, établissement d'un protocole ou de plusieurs protocoles avec au choix :

Expérimentation	Tâtonnement expérimental	Modélisation	Observation	Recherche documentaire
Prévoir le dispositif ; ne faire varier qu'un facteur à la fois ; recueillir les résultats par l'observation ou la mesure	Prévoir divers essais ; comparer les résultats	Raisonner par analogie, vérifier en construisant un modèle	Ou exploitation de documents (images, données, résultats d'expériences)	Par la lecture de documents papiers ou électroniques ou par l'interview de personnes compétentes

Réalisation des protocoles

4 Constatation des résultats et comparaison avec les hypothèses testées

Validation ou non de l'hypothèse ou de certaines des hypothèses

5 Synthèse de l'ensemble des hypothèses validées et invalidées

Structuration du savoir construit en réponse au problème posé

6 Confrontation au savoir établi

7 Réinvestissement dans une nouvelle situation en classe ou de la vie courante

Annexe 2

Travail sur la propagation rectiligne de la lumière

Durée :

1 séance d'une heure, ou deux séances de 40 min, selon l'entraînement des élèves.

Lieu :

D'une part une pièce partiellement ensoleillée, d'autre part, une pièce pouvant s'assombrir.

Matériel :

Pour chaque groupe de 3 à 5 élèves :
deux petits miroirs,
une lampe-torche,
un crayon noir,
une feuille de papier blanc.
Prévoir ensuite un projecteur de diapos et un chiffon contenant de la poussière de craie.

Enquête préalable.

En général, les enfants ne s'interrogent guère sur la propagation de la lumière, qu'il s'agisse de celle du Soleil ou de celle d'une ampoule électrique (celle d'un plafonnier par exemple) : ils ont l'intuition que la lumière se diffuse autour de sa source dans toutes les directions puisqu'ils "baignent" dedans, et cela leur suffit. Par contre, ils reconnaissent qu'avec une lampe-torche, c'est différent, cela à cause du réflecteur « *qui n'envoie sa lumière que vers l'objet que l'on veut éclairer* » : ils précisent alors que sa lumière « *part tout droit* » vers l'objet en question. D'autre part, si vous les interrogez sur la possibilité d'envoyer « *tout droit* » la lumière du Soleil quelque part, certains penseront sûrement aux jeux utilisant un petit miroir : « *on peut envoyer comme ça le soleil dans l'œil d'un copain !* »

Dessins avant expérimentations.

Proposez aux élèves de montrer par des dessins ce qui vient d'être dit.

Certains auront peut-être l'idée de représenter leurs rayons lumineux (rectilignes ou non, fléchés ou non). Leur demander s'ils voient réellement cette partie de leur dessin. Convenir alors avec les élèves que si cela peut les aider, ils peuvent les représenter. Mais comme ils ne se voient pas, on décide de les dessiner en pointillés...

Adopter ensuite systématiquement la même représentation.

Si les élèves représentent massivement les rayons de manière rectiligne, il faut alors leur demander s'ils en sont sûrs... Si les avis sont partagés, il faut de toute façon chercher à savoir qui a raison. Cela introduit la problématique du paragraphe suivant.

Expérimentations

Un premier moment d'expérimentations – assez court – peut avoir lieu par rotation des groupes : d'une part, dans un endroit ensoleillé de la classe, les enfants, à l'aide de miroirs, " renvoient le soleil " dans une partie plus sombre de la pièce, sur un mur ou au plafond, et observent le déplacement de la tache lumineuse en fonction de l'orientation de leur miroir ; d'autre part, dans une pièce assombrie, les élèves observent la position des objets éclairés avec leur torche par rapport à celle-ci, tout en évaluant la forme et l'étendue de la zone éclairée. Mais ils pourront également expérimenter le " renvoi " de la lumière de la torche avec un miroir.

Les rapporteurs de chaque groupe viendront sans doute confirmer que la lumière a bien quelque chose à voir avec des trajets rectilignes. Mais comment faire pour essayer de vérifier cela, par exemple avec les torches ?

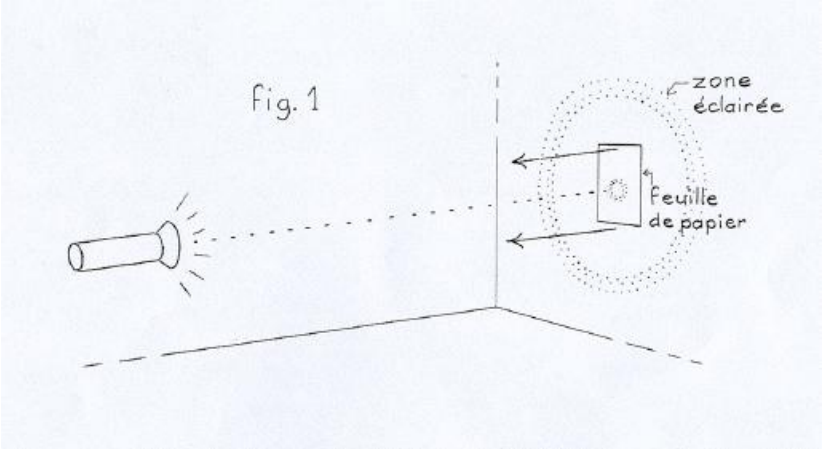


Photo Huguette Farges (Compiègne)

Deuxième moment d'expérimentation : les élèves qui ont une idée se chargent de l'exécuter après avoir rassemblé le matériel nécessaire. Pour les autres, proposez une feuille de papier blanc, à tenir d'abord contre un mur, dans la partie éclairée par une torche, de façon à ce que le petit " rond " central très lumineux - dont on va tracer le contour au crayon sur la feuille - se trouve au centre de celle-ci (figure 1). Il s'agit ensuite de ramener lentement la feuille vers la torche (immobile !) en maintenant le petit rond lumineux dans le tracé : les élèves remarquent que c'est par un mouvement rectiligne vers la source lumineuse que l'on peut obtenir cela.

Dessins après expérimentations.

Les élèves font de nouveaux dessins, lesquels seront sans doute plus complets et plus précis que les premiers. Ils les accompagnent d'une courte légende explicative.

Pour aller plus loin.

Les enfants auront constaté que les rayons lumineux à la sortie des torches ne sont pas visibles : il faut qu'un objet s'interpose devant, et donc " coupe " leur trajet, pour que l'œil voie l'objet éclairé, ce dernier renvoyant la lumière dans notre œil (l'idéal serait de refaire la " manip " dans un local très vaste et dans l'obscurité complète). Il s'agira alors de faire appel à la mémoire des élèves pour qu'ils recherchent dans quelles occasions ils ont pu percevoir un ou plusieurs faisceaux lumineux : rais de lumière passant par un trou de volet dans une pièce où de fines poussières se trouvent en suspension, rais de soleil à travers des feuillages par temps de brume, phares de voiture par temps de brouillard, fumée de cigarette dans le faisceau d'un projecteur… : on leur fera remarquer qu'à chaque fois il y avait la présence de fines particules : en effet, celles-ci reçoivent la lumière de la source et réémettent de la lumière de tous côtés (comme la Lune) : on dit que ces particules diffusent la lumière. On peut mettre cela en évidence dans un endroit très sombre : on produit par exemple un petit nuage de poussière de craie en secouant un chiffon à tableau au-dessus du faisceau d'un projecteur de diapos.

Annexe 3

Travail sur les ombres et leurs relations avec la source lumineuse

Durée :

plusieurs moments d'observation à l'extérieur, en fonction de la météo ; une séance de 20 min de tracés d'ombres à l'extérieur ; une autre pour des simulations à l'intérieur.

Lieu :

endroit ensoleillé avec sol bitumé ; lieu pouvant s'assombrir.

Matériel :

Pour chaque groupe de 3 à 5 élèves :
bâton de craie,
ruban de couturière ou mètre à enrouleur,
calculette,
lampe de poche,
crayon ou objet allongé,
pâte à modeler,
feuille blanche,
crayon,
papier millimétré

Enquête préalable

Après l'avoir exprimé par le dessin "d'un bâton au soleil" (dans le questionnaire-test), les élèves disent ce qu'ils savent des ombres en général et de la façon dont elles se forment. On leur propose ensuite de se dessiner eux-mêmes "au soleil", à côté d'un arbre et d'une maison, selon leur propre opinion par rapport à ce qui vient d'être dit.

Confrontation des dessins

Les élèves, lors du pré-test, ont produit des dessins qui, nécessairement, comporteront des divergences.

L'enseignant reproduit ceux qui présentent des caractéristiques contradictoires et demande d'abord aux élèves, en groupes, de réfléchir aux erreurs qu'ils comportent.

L'observation du paragraphe suivant est davantage problématisée.

Observations

Celles-ci se font par temps ensoleillé mais aussi quand le Soleil est légèrement voilé, de façon à pouvoir constater que les ombres sont plus ou moins nettes, plus ou moins contrastées, et qu'elles peuvent bien sûr disparaître dès qu'un nuage passe devant le Soleil. Leur forme est mise en relation avec la forme de l'objet lui-même selon la face présentée au Soleil (face, profil, trois-quarts, dessus…).

Expériences

Les enfants vont découvrir que l'ombre, en réalité, ne se borne pas aux deux dimensions qu'on lui attribue généralement : en passant leur main derrière un objet placé au soleil, ou mieux, derrière un camarade, ils constatent que leur main s'assombrit et cela, quelle que soit sa distance entre l'enfant-objet et l'écran sur lequel se projette son ombre (mur ou sol) : ils réalisent que l'ombre a en réalité trois dimensions mais qu'elle n'a pas de consistance propre , c'est une région de l'espace dans laquelle la lumière venant du Soleil n'arrive pas. Quand un objet s'interpose entre une source

de lumière et un écran, on voit alors sur l'écran une "ombre" que l'on appelle ombre portée. (Comme il ne sera question que de cette dernière dans toutes les activités qui vont suivre, il ne sera plus nécessaire d'apporter cette précision).

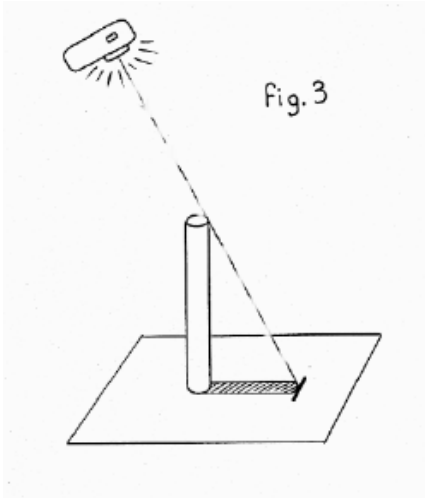
Interprétation de tracés d'ombre.

Des élèves s'aperçoivent que leur ombre n'a pas la même " grandeur " qu'eux-mêmes : comment le vérifier ? En effectuant des comparaisons à l'aide de mesures de tracés. Les enfants se mettent en binôme :

tandis que l'un se présente de face par rapport au Soleil, l'autre trace le contour de son ombre à la craie sur un sol bitumé, cela, en incluant les pieds puisque nous "marchons" sur notre ombre.

Comment vérifier maintenant si les tracés sont de taille identique, supérieure ou inférieure à la stature des élèves ?. Chaque binôme choisit son procédé et l'exécute (le plus simple étant de s'allonger sur son propre tracé !).

Expérimentations avec une lampe électrique



Entre temps, les élèves se seront interrogés sur la cause de cette différence entre leur stature et la longueur de leur ombre, et ils auront compris que la hauteur du Soleil au dessus de l'horizon y était pour quelque chose. Afin de pouvoir maîtriser le phénomène, ils vont effectuer des simulations par petits groupes, avec une lampe électrique et un objet quelconque (un crayon planté sur une boule de pâte à modeler étant l'idéal) : ils auront tôt fait de constater le lien existant entre la hauteur de la lampe et la longueur de l'ombre de l'objet.

Mais il se peut qu'un petit malin fasse une trouvaille venant contredire ce fait : il va mettre au défi ses camarades de trouver le moyen d'abaisser ou d'élever leur lampe sans que l'ombre obtenue au départ varie en longueur (on tracera un repère sur une feuille de papier supportant l'objet).

La figure 3 montre que l'angle formé par le faisceau lumineux et la feuille-support doit rester constant : pour cela, la lampe doit être abaissée, dans un mouvement rectiligne, vers le sommet de l'objet (le plus simple étant, bien sûr, que cet angle soit égal à 90° : dans ce cas, la lampe, durant sa descente, reste à l'aplomb de l'objet dont l'ombre " disparaît " alors, comme dans l'histoire d'Ératosthène !

Et il se peut fort également que d'autres élèves découvrent que, lorsque la lampe est déplacée latéralement, l'ombre fait de même « *mais à l'envers !* » Ils retrouveront cela un peu plus tard…

Dessins avec légendes

Les élèves consignent leurs observations liées à cette partie par des croquis accompagnés de légendes. On peut leur demander aussi de reproduire à l'échelle de 1/10ème, sur du papier millimétré, un personnage vu de profil ayant leur stature, avec son ombre devant lui (donc apparaissant à gauche ou à droite comme sur la figure 3), et dont la longueur correspondra à leur propre relevé ; ils chercheront comment placer le Soleil de la façon la plus exacte possible : certains penseront à tracer le rayon solaire oblique passant par le haut de la tête et aboutissant à l'extrémité de l'ombre, et ils le prolongeront vers le haut pour y placer le Soleil.

Note : Si les élèves représentent les rayons, il faudrait qu'ils le fassent en pointillés...

Pour aller plus loin

Il est possible que les élèves s'interrogent sur le fait que les contours des ombres apparaissent plus ou moins flous : ils peuvent, par des expériences très simples, être amenés à découvrir que ce flou

constitue ce qu'on appelle la pénombre, et que la formation de celle-ci est liée à la dimension, ponctuelle ou non, de la source lumineuse. Nous ne détaillerons pas ici ces expériences puisque le phénomène impliqué n'intervient pas – ou très peu – dans le projet Ératosthène. Pour les enseignants intéressés néanmoins, signalons qu'ils trouveront tous les détails nécessaires dans le dossier Éclipses du site, séquence s'initier à l'éclipse de Lune et séquence faire apparaître la pénombre.

Évaluation intermédiaire

On peut prévoir une évaluation intermédiaire, complètement formative, pour voir si, à ce stade, les élèves ont acquis les notions sur lesquelles il faudra s'appuyer plus tard.

L'enseignant peut leur proposer un dessin très simple.

1. En coupe, une chaussée bordée de deux trottoirs et un poteau électrique sur un des trottoirs (NE PAS DESSINER LE SOLEIL !).

Question : Positionne le Soleil pour que l'ombre du poteau atteigne le trottoir d'en face ?

Annexe 4

Notion de rayons divergents et de rayons parallèles

Durée :

simulation de 15 min environ ; expérimentations et mesures en extérieur de 20mn.

Lieu :

local pouvant s'assombrir ; endroit ensoleillé à l'extérieur.

Matériel :

Pour chaque groupe de 3 à 5 élèves :
une lampe de poche,
trois ou quatre crayons,
de la pâte à modeler,
une grande feuille de papier,
une règle graduée,
de la ficelle fine,
du papier calque.

Simulation

L'enseignant expose la situation : plusieurs crayons vont être dressés en ligne sur la table et une lampe de poche va les éclairer par derrière, puis demande aux élèves d'anticiper : que va-t-il se passer lorsque vous allumerez la lampe ? (les lampes n'ont pas encore été distribuées).

Note : Ce moment d'anticipation permet au maître d'évaluer où en sont ses élèves du point de vue de la propagation rectiligne, et aux élèves de bien prendre conscience de leur manière de raisonner. Si, après vérification, l'expérience invalide la prévision, les élèves comprendront sans doute mieux l'origine de leur erreur.

On distribue à chaque groupe d'élèves les lampes de poche. Cette fois, avec leur lampe électrique, les élèves éclairent plusieurs crayons installés comme sur la figure 4 mais sur une grande feuille de papier. Ils notent ce qu'ils remarquent de particulier : les enfants qui ont à peu près aligné leurs crayons, en les écartant plus ou moins et en les éclairant par derrière, notent tout de suite que les ombres « *s'écartent vers le bout* », cela d'autant plus que la lampe se rapproche des crayons (figure 4a). Ils voient aussi qu'en éloignant la lampe, les ombres " se redressent " mais sans pouvoir " y arriver tout à fait, parce que la lampe n'est pas assez forte et qu'on n'a pas assez de place pour reculer encore ". Demandez-leur quelle source de lumière pourrait être assez puissante et assez éloignée pour vérifier si les ombres vont pouvoir se « *redresser tout à fait* » : il y en aura bien un qui finira par penser au Soleil !

Note: *Il est possible (mais pas certain) que les élèves remarquent qu'en éloignant la lampe, les ombres se redressent. De la même manière, on peut demander aux élèves s'il est possible d'obtenir des ombres parallèles. Là encore, une phase d'anticipation est intéressante avant expérimentation (il faudrait momentanément retirer les lampes de poche).*

Si l'idée du Soleil apparaît, tant mieux, mais ne pas la valider. La garder comme hypothèse. « Certains pensent qu'avec le Soleil, on obtiendra des ombres parallèles, qu'en pensent les autres ?... » Si l'idée n'apparaît pas, le maître posera la question : « comment pensez-vous que seront les ombres avec le Soleil ? ». Cela permettra d'introduire l'expérimentation suivante.

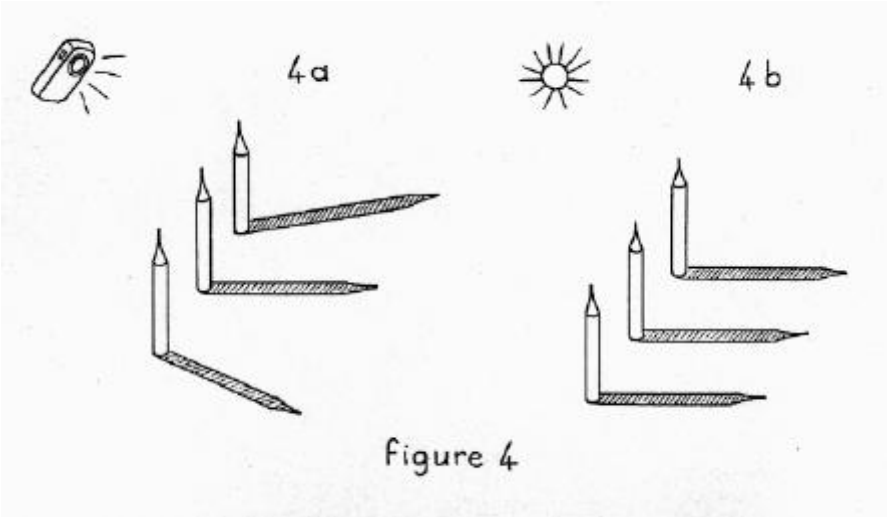


Figure 4

Expérimentation à l'extérieur

Les élèves réinstallent leurs crayons au soleil. A condition que les objets soient quasiment parallèles entre eux (mais pas forcément verticaux), et que le sol soit plan à cet endroit (mais pas forcément horizontal) ils constatent que les ombres ont l'air de s'être « *tout à fait redressées* » (figue 4b). Les enfants ayant bien répondu à la question n°4 du questionnaire-test se souviendront peut-être du mot " parallèle ". Comment vérifier ce parallélisme ? Certains proposeront de mesurer l'écartement des ombres à leur base et à leur extrémité, « *mais seulement si les crayons ont bien la même hauteur* », conditions que l'on cherchera à obtenir du mieux possible, de même que le parallélisme des crayons entre eux. L'installation se fera sur une grande feuille de papier sur laquelle on tracera soigneusement l'ombre des crayons, afin de procéder aux mesures une fois revenus en classe.

Mesures et interprétations

Les mesures une fois effectuées et comparées, en admettant des différences n'excédant pas le demi-centimètre par excès ou par défaut, les élèves concluront au parallélisme probable des ombres. Avant qu'ils ne puissent en déduire le parallélisme des rayons solaires, ils devront faire certaines observations lors de deux autres simulations, d'abord avec une lampe électrique, puis au soleil.

Nouvelles observations

Tout d'abord, comment voir pourquoi les ombres divergent avec une lampe électrique ? Se souvenant du croquis exécuté sur le papier millimétré, des élèves proposeront sans doute de matérialiser avec de la ficelle le trajet des rayons lumineux partant de la lampe, passant sur la pointe de chaque crayon, et aboutissant à l'extrémité de leur ombre (côté pratique, il faudra chercher le moyen de réduire au minimum les ombres parasites créées par les ficelles au niveau du verre de la lampe et à l'extrémité des ombres). Les enfants constateront que « *c'est parce que les ficelles s'écartent que les ombres s'écartent aussi* » (figure 5a).

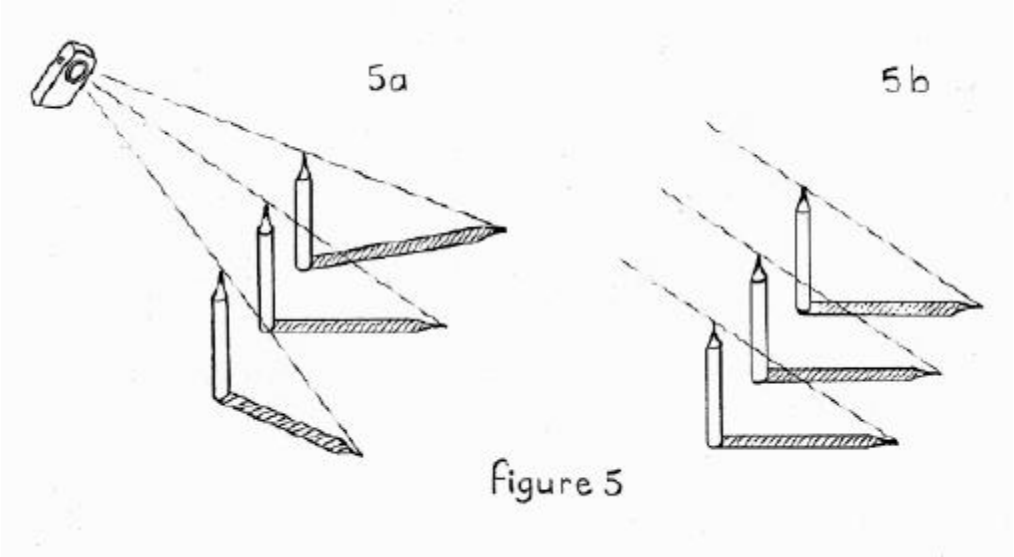


Figure 5

Des petits malins ajouteront certainement : « *Mais alors, avec le Soleil, les ficelles devraient être parallèles !* » (figure 5b). Ils iront bien sûr vérifier cela sur place et en déduiront que les rayons solaires doivent eux-mêmes être parallèles.

Traces écrites

Les enfants illustreront ces dernières trouvailles par des dessins et des légendes..

Pour aller plus loin

L'enseignant propose d'essayer de tracer des droites les plus parallèles possible, à vue d'œil, puis de vérifier leur parallélisme de différentes manières, dont celles-ci :

Les élèves reproduisent sur du papier calque un réseau de droites réellement parallèles, cela grâce aux réglures de feuilles de copies : ce réseau, assez serré, est posé ensuite sur les droites prétendues parallèles : en faisant coïncider l'une de celles-ci avec l'une du réseau, cela permet de vérifier le parallélisme de toutes les autres (figure 6a)

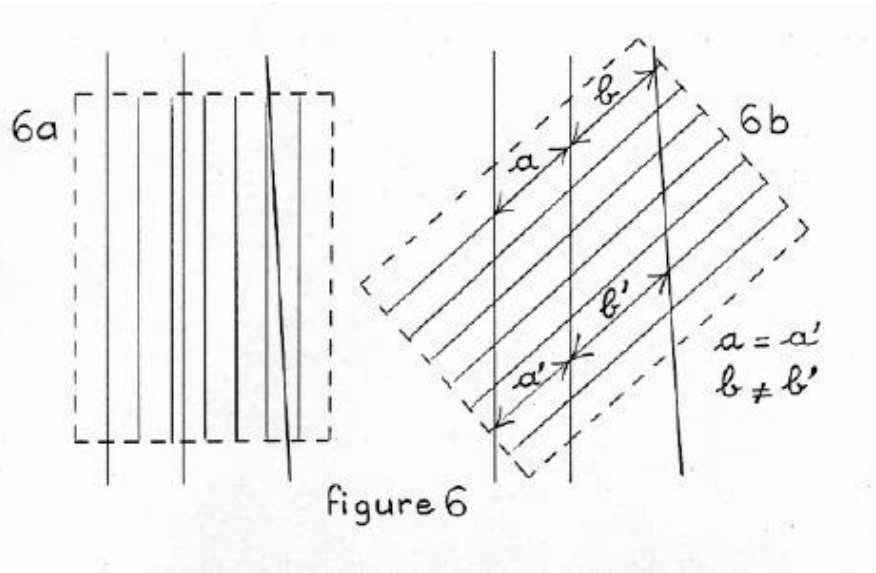


Figure 6

En posant ce réseau, mais cette fois de façon quelconque sur les droites en questions, puis en procédant pour chacune à la mesure d'un couple de segments obtenus, ils comparent les résultats (figure 6b).

D'autre part, les élèves verront qu'il est facile de tracer des parallèles obliques sur du papier quadrillé.

Annexe 5

1.2 1°) Mettons-nous à l'ombre !

As-tu déjà observé des ombres ? Essaie de dessiner l'ombre d' un bâton au soleil (ce bâton est planté dans le sol).

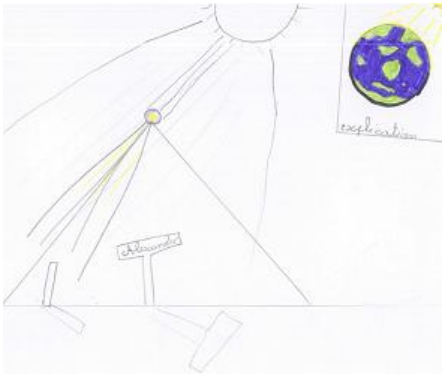
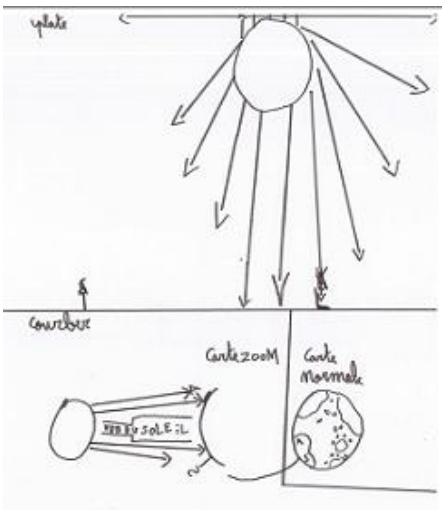
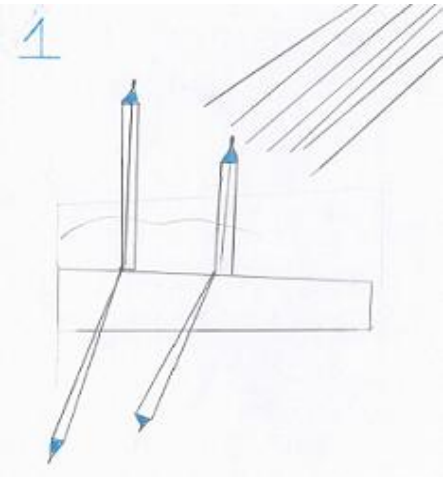
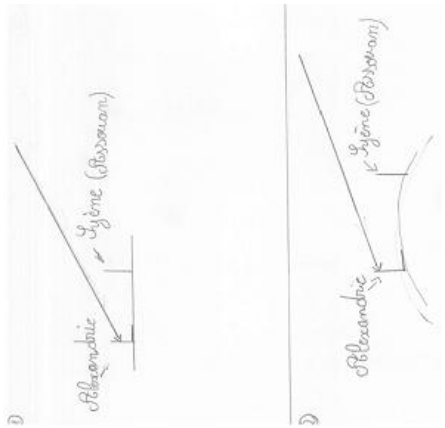
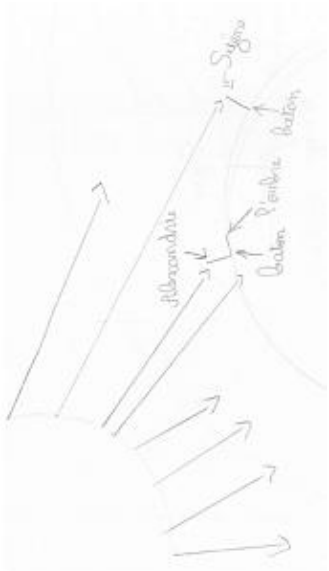
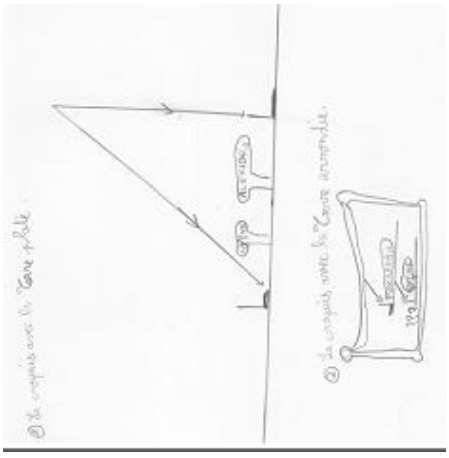
Fais de même ensuite, pour trois bâtons assez écartés les uns des autres.

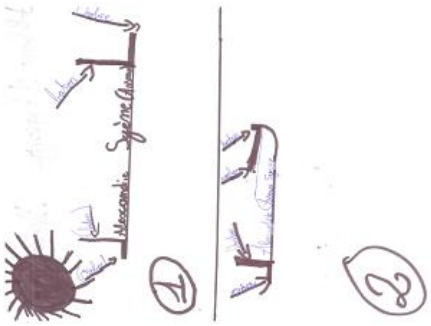
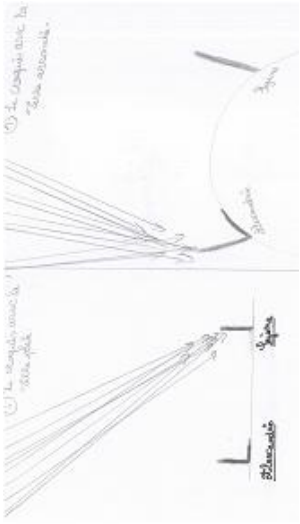
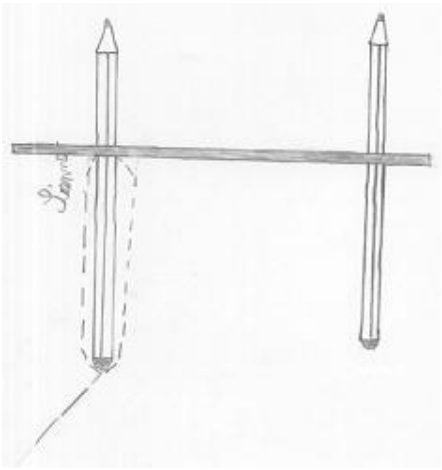
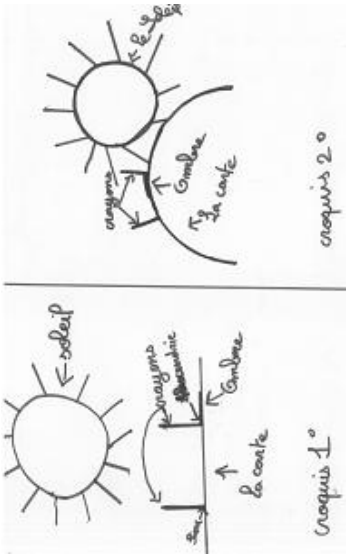
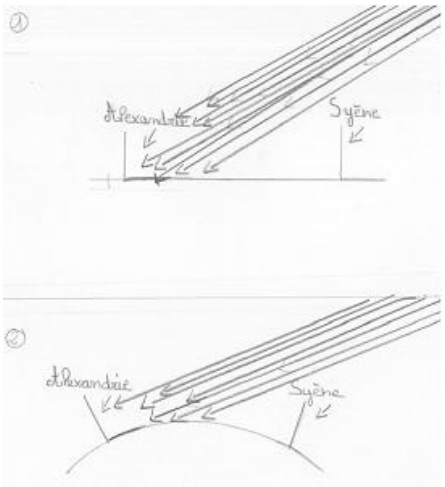
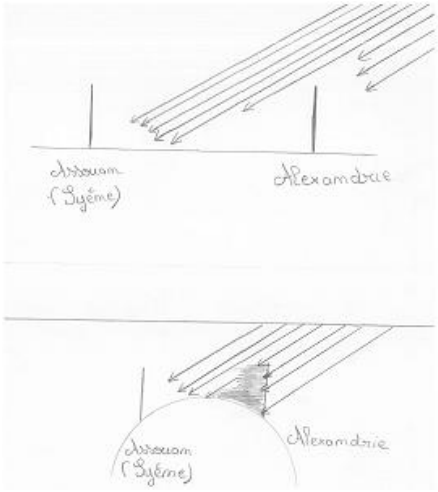
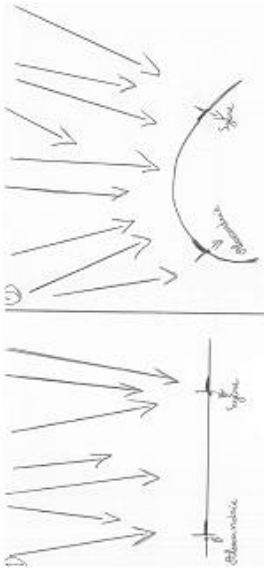
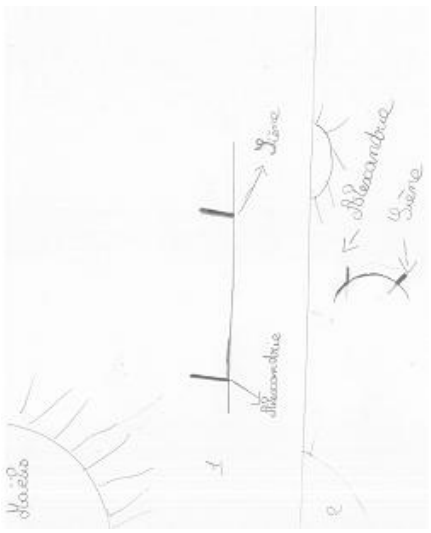
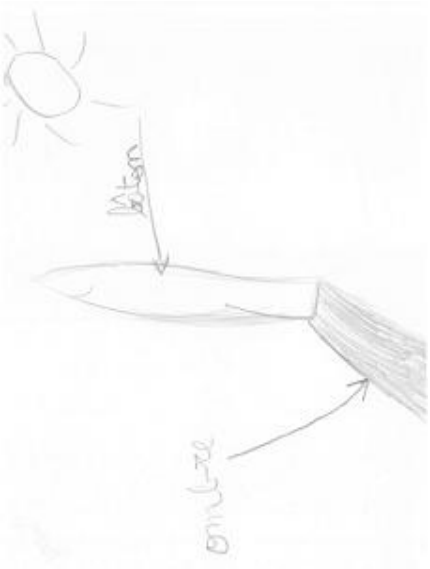
1.3 7°) Encore des bâtons !

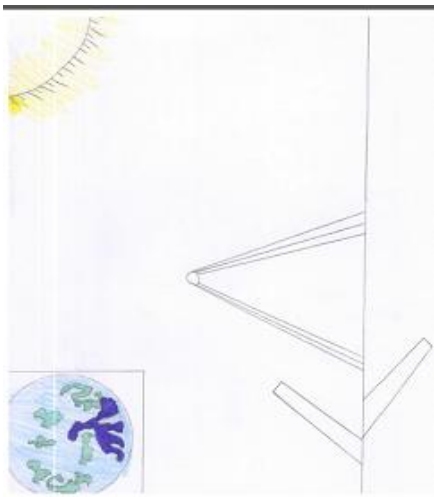
Reprends le dessin de la Terre que tu viens de faire, et ajoute, sur le pourtour, trois petits bâtons plantés dans le sol comme des piquets, mais très éloignés les uns des autres.

1.4 8°) La Terre s'est mise au soleil

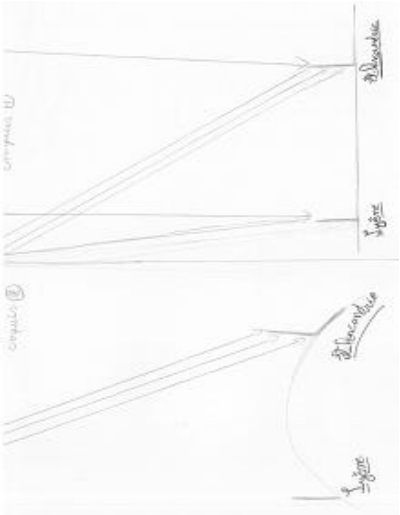
Dessine la Terre comme tu imagines qu'on peut la voir dans l'espace, avec des continents par exemple, mais aussi avec le Soleil qui l'éclaire. Si tu veux montrer qu'il fait nuit quelque part sur ta planète, colorie soigneusement cette partie en noir.

		
---	--2	003
		
Ariel (CM2)	Elia (CM2)	Garion (CM2)

		
Héléna (CM1)	Hichame (CM2)	Hugo (CM1)
		
Ines (CM2)	Jeanne (CM2)	Juliette (CM 2)
		
Léo (CM1)	Maelis (CM2)	Marcel (CM2)



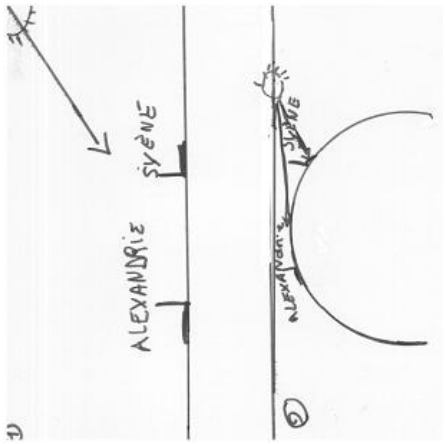
Maria (CM2)



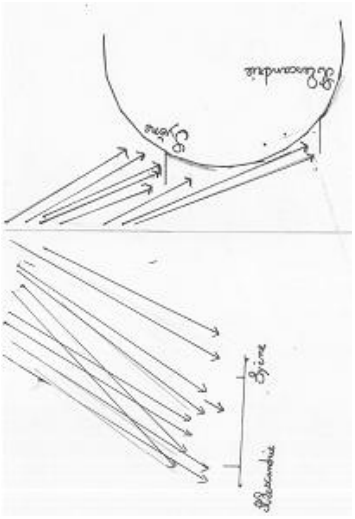
Marine (CM2)



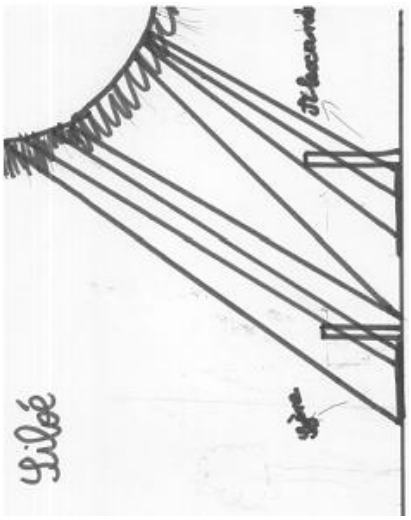
Nell (CM2)



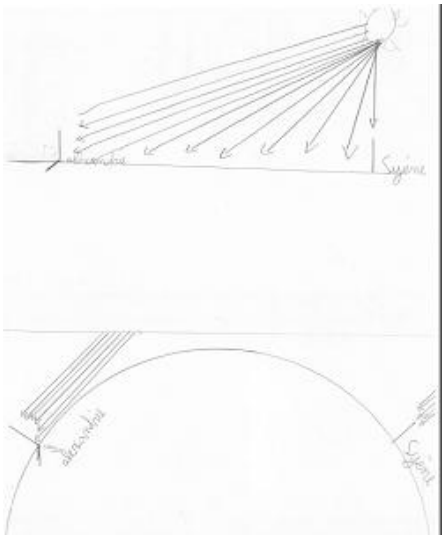
Orane (CM1)



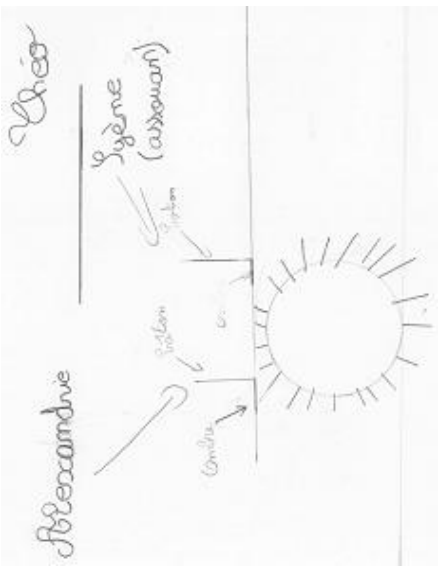
Pierre (CM2)



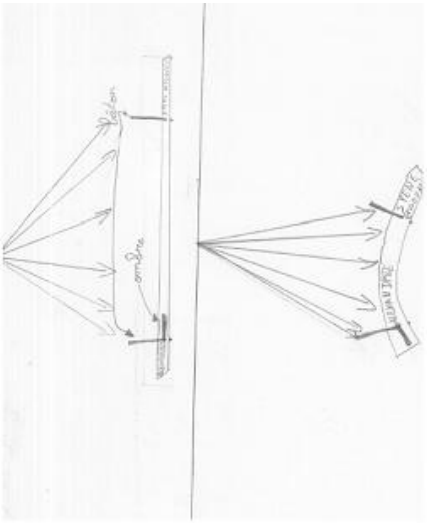
Siloe (CM2)



Simon (CM2)



Théo (CM2)



Zoe (CM1)

Annexe 6



Petit recueil d'observations sur les ombres



1) **En observant des photos de lumières émises par des lasers ou des rayons de soleil à travers les arbres.**

Qu'est-ce que je peux dire sur la façon dont se déplace la lumière?

2) **J'oriente la lumière de ma lampe sur le bureau.**

Qu'est-ce que j'observe?

3) **Je pose un crayon debout, verticalement, sur le bureau et j'oriente la lumière de ma lampe vers le crayon.**

Qu'est-ce que j'observe sur le bureau?

Pourquoi?



4) **Je regarde mon crayon. Je veux que l'ombre soit projetée vers la droite du crayon.**

Où vais-je placer ma lampe?



5) **Je regarde mon crayon. Je veux que l'ombre soit projetée vers la gauche du crayon.**

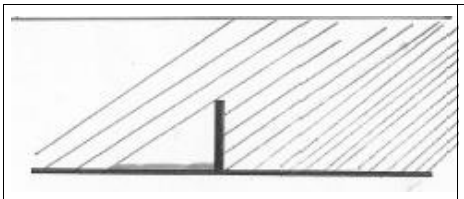
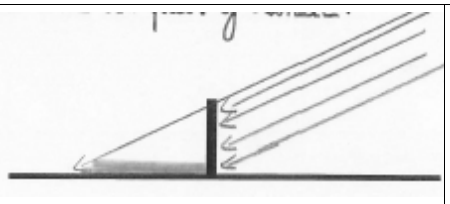
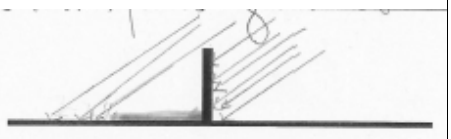
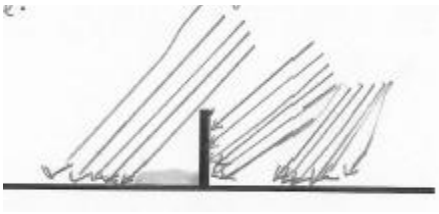
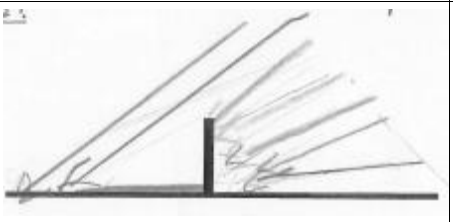
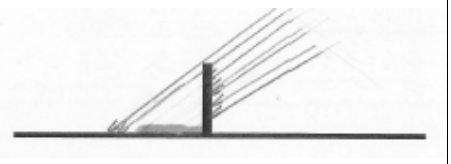
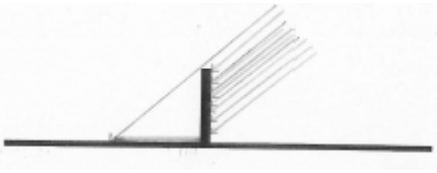
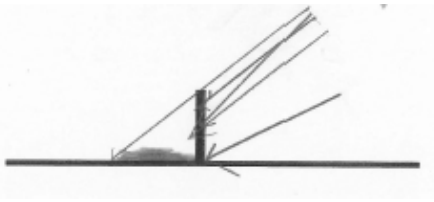
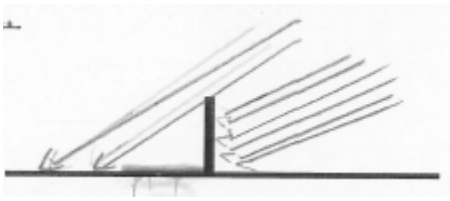
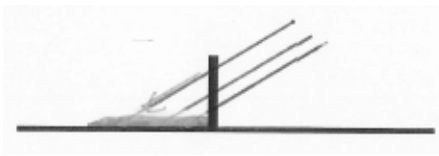
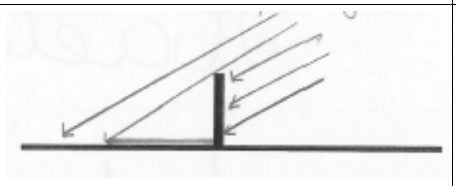
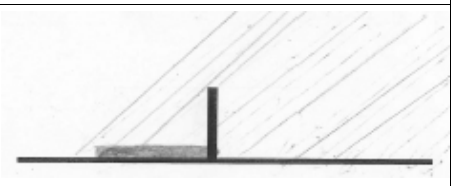
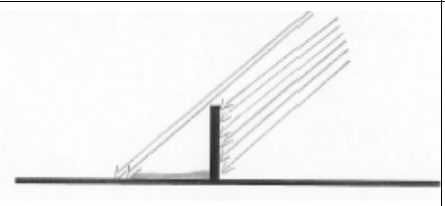
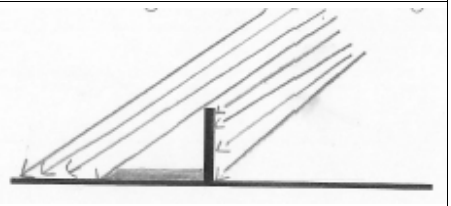
Où vais-je placer ma lampe?

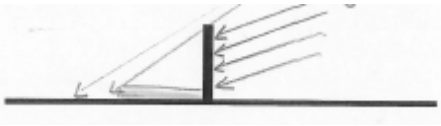
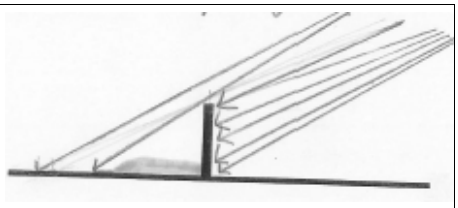
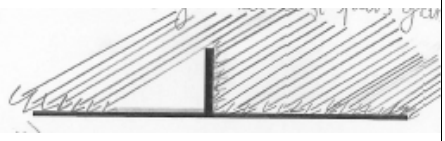
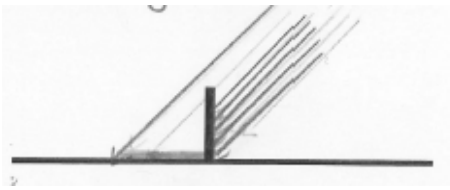
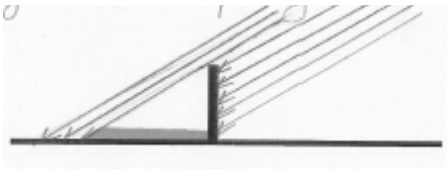


6) **Mon crayon est toujours posé verticalement sur mon bureau. Je veux faire disparaître l'ombre au maximum,** *comment dois-je placer ma lampe?*



Annexe 7

 Adrien (CM1)	 Ariel (CM2)	 Elia (CM2)
 Garion (CM2)	 Héléna (CM1)	 Hychame (CM2)
Hugo (CM1)	 Ines (CM2)	 Jeanne (CM2)
 Juliette (CM2)	 Kelian (CM2)	 Léo (CM1)
 Lucile (CM1)	 Maelis (CM2)	 Marcel (CM2)
Maria (CM2)	 Marine (CM2)	 Mathéo (CM1)

 Nell (CM2)	 Orane (CM1)	 Pierre (CM2)
Siloe (CM2)	 Simon(CM2)	 Théo (CM2)
 Zoe (CM1)		

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES À PARTIR DE PUZZLES ET TANGRAM À L'ÉCOLE

Groupe IREM Premier degré de Draguignan[1]
IREM de Nice

Résumé
Dans cet article, nous présentons des séquences de géométrie dont l'objectif est de travailler sur la capacité à décomposer des figures planes en sous-figures, réalisées à partir d'un matériel facilement accessible (puzzle ou tangram) et proposées dans des niveaux différents, voire même dans des cycles différents. De plus, nous avons établi des progressions intégrant ces activités et prenant en compte les spécificités du travail géométrique de chaque classe. Celles-ci, qui portent notamment sur les compétences mathématiques, sur les procédures d'élèves et sur la place du matériel, nous ont conduits à créer des liens entre les différentes progressions établies pour mettre en place une différenciation pédagogique.

Depuis 2010, le travail du groupe IREM Premier degré de Draguignan porte sur la géométrie plane et plus particulièrement sur des activités de reproduction de figures dans les trois cycles de l'école primaire.

La première partie de cet article présente les choix théoriques et pédagogiques sur lesquels nous nous sommes appuyés, puis la partie 2 explicite le déroulement de l'atelier. Les différentes séquences de la progression font ensuite l'objet des parties ultérieures.

I - NOS CHOIX THÉORIQUES ET PÉDAGOGIQUES

1 Notre cadre théorique

Dans notre projet de travail, nous reprenons l'hypothèse de Duval, Godin et Perrin-Glorian selon laquelle la manière de regarder ce que les figures donnent à voir « *est un point clé dans le rapport des élèves à la géométrie* » (Duval, Godin et Perrin-Glorian, 2005, p.9). Notre approche se place ainsi du point de vue cognitif et sémiotique sur le rapport aux figures développé par Duval, notamment sur la notion d'unité figurale (Duval, 1995 et 2003), sur les niveaux d'appréhension des figures géométriques (Duval, 1995), et plus particulièrement sur l'appréhension opératoire des modifications possibles d'une figure (Duval, 1988 et 1995). Nous présentons rapidement dans ce qui suit ces différents éléments théoriques.

La notion d'unité figurale

Les objets mathématiques tels que les figures planes sont des objets idéaux qui n'existent pas dans la réalité et qu'il n'est possible d'aborder que par le biais de leurs représentations. Selon Duval, la représentation sémiotique est le signe, c'est-à-dire le graphique, des mots, voire le geste, d'un objet auquel on n'a pas accès autrement : « *les représentations sémiotiques sont constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement* » (Duval, 1993, p.39). En géométrie, les registres de représentation sollicités sont le

[1] Claire BRANSIEC - Professeur des Écoles, Ecole maternelle, La Bastide, Claire.Bransiec1@ac-nice.fr
Romain CLAVIER - Professeur des Écoles, Ecole Jean Moulin, Aups, romain.clavier@ac-nice.fr
Cyril GRASSONE - Professeur des Écoles, Ecole des Salles/Verdon, Cyril.grassone@ac-nice.fr
Sandrine LECLERC - Professeur des Écoles, de St Blaise, sand.leclerc@sfr.fr
Anne PECORARO-BAILLET - Professeur des Écoles, Ecole Jean Moulin, St Maximin, anne.pecoraro-baillet@ac-nice.fr

langage ainsi que les figures et les dessins, à la fois en tant que tracés et que signes représentant un objet.

Dans notre travail, nous nous sommes plus particulièrement intéressés au registre figural. Pour celui-ci, les unités figurales élémentaires dans le plan permettent de représenter une figure géométrique et sont définies par Duval (Duval, 1995) comme suit :

- le point est la seule unité figurale de dimension 0 ;
- les lignes et les courbes, ouvertes ou fermées, sont les unités figurales de dimension 1 ;
- les surfaces et les intersections de lignes ouvertes ou fermées sont des unités figurales de dimension 2.

Cette terminologie est utilisée dans la suite de l'article.

L'appréhension des figures géométriques

Duval identifie plusieurs niveaux dans l'appréhension des figures géométriques. Nous nous intéressons aux deux premiers[2].

L'appréhension perceptive correspond à « *un premier niveau où s'opère la reconnaissance des différentes unités figurales qui sont discernables dans une figure donnée* » (Duval, 1995, p.181). Elle est immédiate et indépendante de la tâche demandée. Plus précisément, Duval note qu'il existe une prédominance perceptive stable des unités figurales 2D sur les unités figurales 1D expliquée par la loi gestaltiste de clôture et de continuité : lorsqu'un stimulus possède un contour simple et fermé, il se détache comme formant un tout. Par conséquent, les unités figurales 2D sont toujours plus facilement perçues que les unités figurales 1D. Ainsi le premier travail géométrique s'opère-t-il dès la maternelle sur des unités figurales 2D, alors que les relations entre les unités figurales 1D (parallélisme, perpendicularité) ne sont abordées qu'en cycle 3. Par ailleurs, la reconnaissance des unités figurales 2D ne soulève aucune difficulté lorsque celles-ci sont séparées, le temps de reconnaissance étant plus ou moins long selon leur orientation visuelle typique ou non. Ce n'est plus le cas lorsque les unités figurales sont intégrées à une configuration : certaines unités figurales 2D prédominent sur d'autres.

L'appréhension opératoire correspond alors à un deuxième niveau, elle est centrée sur les modifications figurales d'une figure, et par suite sur les modifications perceptives que ces modifications entraînent. Duval identifie trois sortes de modifications :

- une modification méréologique d'une figure se fait « *en fonction de la relation entre partie et tout* » (Duval, 1988, p.61) et consiste « *soit* [à] *la partager en plusieurs parties qui sont comme autant de sous-figures* (…) *soit* [à] *l'inclure dans une autre figure dont elle devient alors une sous-figure* » (ibid), soit « *à réorganiser une ou plusieurs sous-figures différentes d'une figure donnée en une autre figure* » (Duval, 1995, p.184) ;
- une modification optique consiste en un agrandissement, une réduction, ou une déformation d'une figure ;
- une modification positionnelle consiste en un déplacement ou une rotation d'une figure.

De plus, la décomposition méréologique « *peut s'opérer matériellement (par découpage et réassemblage des pièces obtenues comme pour un puzzle), graphiquement (…) ou même simplement du regard (et non pas « mentalement »)* » (Duval, 2005, p.22). Or, pour Duval, la décomposition de toute forme en une configuration d'unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions constitue le « *geste réflexe pour faire de la géométrie* » (Duval, 2005, p.16).

Ainsi nous avons choisi de proposer des activités à partir de matériels facilement accessibles (différents puzzles et tangrams) dans l'objectif principal de travailler sur la capacité à savoir décomposer une figure en figures simples, avec le questionnement un peu général suivant : Quelle

[2] Le troisième correspond à l'appréhension discursive, déterminée par des propriétés données comme hypothèses, qui peut amener à changer le regard sur la figure.

place la manipulation prend-elle dans les apprentissages ? Aide-t-elle à l'acquisition de compétences géométriques des élèves ? Et si oui, comment ?

2 Nos choix pédagogiques

Selon les documents d'application des programmes 2002, à l'école primaire, « *les activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais des connaissances fonctionnelles* » (Document d'application des programmes 2002, cycle 3, p.30). De plus, « *les activités proposées doivent être finalisées et avoir un but clairement identifié par les élèves en particulier dans des problèmes où il s'agit de comparer, reproduire, construire, identifier ou décrire des objets géométriques* » (Documents d'application des programmes 2002 cycle 2, p.24). Nous nous sommes ainsi intéressés à des activités utilisant du matériel de géométrie en privilégiant une entrée par la résolution de problèmes.

Dans un premier temps, nous avons choisi de préparer des séquences à partir de puzzles et tangrams, et d'en réaliser des adaptations pour pouvoir les proposer à tous les niveaux de l'école primaire. Dans un deuxième temps, nous avons établi des progressions intégrant ces activités. Les spécificités des différents niveaux nous ont conduits à créer des liens entre les différentes progressions établies pour mettre en place une différenciation pédagogique.

II - DÉROULEMENT DE L'ATELIER

L'atelier présenté a été voulu comme un petit aperçu de nos expérimentations en classe et de nos résultats. Les différentes phases de l'atelier se sont déroulées de manière identique :

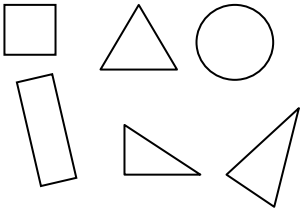
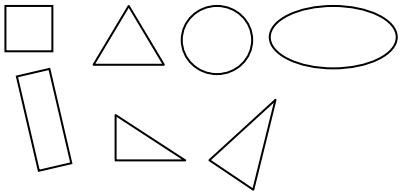
- résolution par les participants des problèmes posés aux élèves et mettant en jeu le matériel utilisé dans nos expérimentations ;
- présentation de nos travaux réalisés en classe ;
- discussion alimentée par le vécu des participants.

Lors de l'atelier, nous avons fait le choix de commencer par le cycle 3 afin de montrer la finalité de notre projet. Puis nous nous sommes attachés à présenter les travaux menés en maternelle. Enfin, nous avons proposé des pistes de remédiation issues d'activités du cycle 1 adaptées pour le cycle 3.

Dans les paragraphes suivants, nous proposons la progression remise dans l'ordre chronologique : activités de maternelle, activités du cycle 3 et pistes de remédiation, ainsi que des constats et analyses à l'issue des mises en œuvre.

III - RECTANGRAM, TRIANGRAM ET TANGRAM EN MATERNELLE

Les programmes 2008 nous indiquent qu'à la fin de l'école maternelle, « *l'enfant est capable* (…) *de dessiner un rond, un carré, un triangle* » ainsi que « *reconnaître, nommer, décrire, comparer, ranger et classer des objets selon leurs qualités et leurs usages* » (BOEN 3/06/2008). Les documents d'accompagnement des programmes 2002 précisent ces compétences en proposant une progression générale présentée ci-dessous sous forme de tableau :

PS	MS	GS
Les enfants commencent à différencier globalement des formes figuratives et des formes simples par la vue et par le toucher. *Les activités sont l'occasion pour le maître d'utiliser du vocabulaire et de vérifier sa compréhension: « rond, arrondi, pointu, plat, droit… ».* 	*Le nombre de formes différentes augmente et elles sont plus souvent présentées dans différentes positions.* 	*Les enfants peuvent différencier des formes en énonçant, dans leur langage, certaines de leurs propriétés mathématiques (« bord droit, bord courbe… ») .* *Les sommets ou « coins » des figures sont perçus et touchés du doigt, les côtés ou « bords » sont suivis avec le doigt.* 

Dans la vie quotidienne, les élèves côtoient majoritairement des formes rectangulaires (porte, fenêtre, table….) et circulaires (balle, verre, bouchon, tête humaine,…). De plus, « *dès les petites classes, au cours d'activités quotidiennes, les enfants sont familiarisés avec un vocabulaire qui leur permettra, à terme, de caractériser les propriétés d'objets qu'ils auront à décrire, à reconnaître, à reproduire, à construire* » (Document d'accompagnement des programmes 2002, p.25).

Notre progression se divise en trois séquences présentant trois jeux avec du matériel différent mais selon une même approche. Ainsi l'élève est placé dans des conditions connues, ce qui facilite la dévolution du problème. Dans cette progression, nous faisons jouer les variables suivantes : familiarité avec les formes proposées et diversité des formes assemblées. Cette progression part en effet du carré et du rectangle (première séquence) pour aller vers des formes moins habituelles : la deuxième séquence fait uniquement intervenir des triangles (isocèles rectangles), la troisième propose différentes formes (triangles (isocèles rectangles), carré et trapèze).

1 La séquence du « Rectangram »

Nous avons choisi de commencer la progression par le « Rectangram » en raison d'une certaine familiarité des élèves face aux carrés et aux rectangles. Nous nommons « *Rectangram* » le tangram représenté Figure 1 formé par un carré découpé en rectangles et en carrés. Le premier grand rectangle est obtenu par pliage du grand carré en deux parties superposables. Le carré intermédiaire est obtenu par pliage du rectangle en deux parties superposables…Le « Rectangram » est proposé aux élèves découpé et plastifié au format 18 cm x 18 cm.

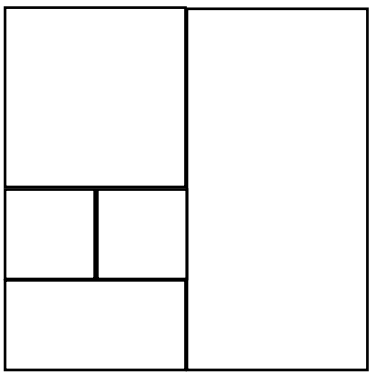


Figure 1

Description

Les séances se déroulent sous forme d'ateliers.

Séance 1

Cette séance débute par une phase d'appropriation du matériel, sous forme de manipulation libre des formes (petits/grands carrés et petits/grands rectangles). Elle se poursuit par le pavage du

grand rectangle du jeu en deux temps : pavage libre puis pavage avec contraintes « numériques » (« avec le plus de pièces possible », « avec le moins de pièces possible », « avec un nombre donné de pièces ») et/ou géométriques.

Des exemples de pavages sont présentés Figure 2[3].

Tout au long de la séance, les élèves sont incités à dire ce qu'ils font : « *l'utilisation du langage vient en appui de l'action et la complète. (…). Les mots, nécessaires pour construire du sens, permettent une mise à distance par rapport à l'action elle-même et contribuent progressivement à fixer la connaissance* » (Document d'accompagnement 2002, p.25).

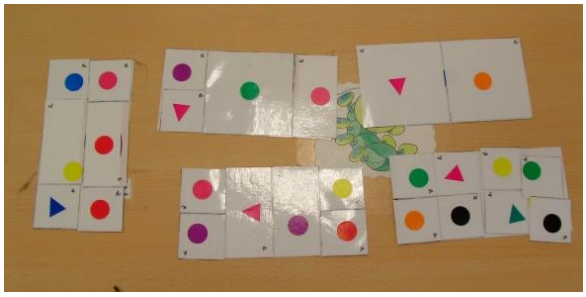


Figure 2

Séance 2

Dans cette séance et dans les suivantes, les élèves ont à leur disposition l'ensemble des pièces d'une dizaine de « Rectangram ».

Elle concerne le pavage d'un gabarit carré, que nous avons appelé « maxi carré ». Elle se déroule en deux temps : d'abord pavage libre (un exemple de pavage est donné Figure 3), puis pavage avec contraintes « numériques » (« avec le plus de pièces possible », « avec le moins de pièces possible », « avec un nombre donné de pièces »), et/ou géométriques .

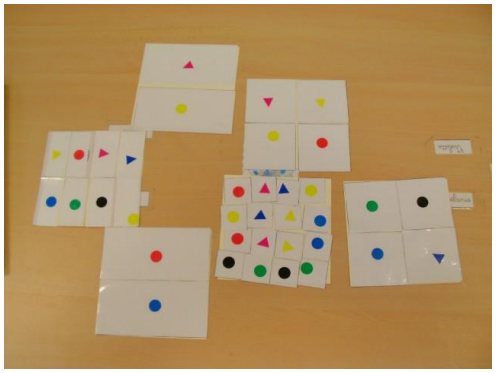
Figure 3



Séance 3

Dans cette séance, il s'agit de reconstituer le « maxi carré » *sans son gabarit*. Des exemples de productions d'élèves sont présentés Figure 4.

Figure 4



[3] Les pastilles de couleur ont une utilité pratique : elles permettent d'identifier les différents jeux de « Rectangram ». Elles ne semblent pas avoir d'incidence sur le déroulement de l'activité.

Séance 4

On demande de construire le plus grand rectangle possible en utilisant le plus de formes. Faire varier le support sur lequel on travaille (table, sol, …), induit des productions différentes (voir Figure 5 des productions sur différents supports) : au sol, le rectangle a tendance à s'allonger, alors que sur une petite table, il s'élargit plutôt (volonté d'occuper l'espace ?) .



Figure 5

Séance 5

Cette séance a pour objet la fabrication du « Rectangram » par pliage d'une feuille de papier de forme carrée. L'enseignant montre successivement chaque pliage aux élèves. À chaque étape, il fait repasser à la craie grasse la forme obtenue, le pliage de l'étape suivante consistant alors à « faire disparaître la couleur ». Des exemples de productions d'élèves « dépliées » sont présentés en Figure 6.

Figure 6



Eléments d'analyse et constats à l'issue des mises en œuvre

Dans la séquence « Rectangram », la difficulté principale constatée a concerné le principe de pavage d'une forme, c'est-à-dire le fait de prendre en compte que la forme doit être recouverte exactement par les différentes pièces. Pour que l'élève visualise bien son action, nous avons choisi de faire un contraste entre le gabarit et les pièces du jeu.

L'égalité des longueurs des côtés opposés dans un rectangle a été mise en évidence et utilisée par les élèves dès la réalisation du plus grand rectangle possible (séance 4).

Lors de la dernière séance, le pliage à réaliser pour « cacher la couleur » a conduit certains élèves à anticiper la forme qui allait être obtenue : un carré plié en deux donne un rectangle puis un rectangle plié en deux donne un carré. En dépliant les productions, des décompositions méréologiques du carré en sous-figures rectangulaires et carrées apparaissent et peuvent alors être soulignées par l'enseignant.

2 La séquence du « Triangram »[4]

Le « *Triangram* » est le tangram représenté Figure 7, formé par un carré découpé en triangles rectangles isocèles. Le premier triangle est obtenu par pliage du carré en deux parties superposables selon une diagonale. Les triangles plus petits sont obtenus de proche en proche par pliage du triangle précédent en deux parties superposables selon la médiane issue de son sommet principal.

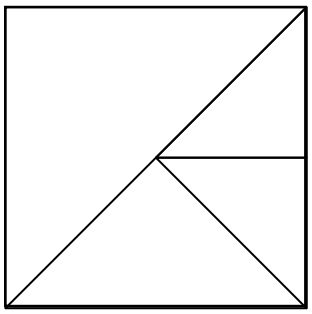


Figure 7

Description

Séance 1

La première séance a pour objet la découverte du « Triangram ».
Elle se fait par pliage, en tenant compte de la particularité d'obtention de ce matériel. Les élèves doivent tout d'abord plier une feuille de papier de forme carrée selon sa diagonale (l'enseignant montre l'exemple) ; le triangle ainsi obtenu est colorié. Ils doivent ensuite plier ce triangle en deux parties superposables de manière à « cacher la couleur »[5]. Ces deux opérations (colorier, plier) sont alors recommencées avec le nouveau triangle.

Séance 2

Dans cette séance, et dans les suivantes, les élèves disposent des pièces de plusieurs « Triangrams ».

Les élèves s'approprient le matériel par manipulation libre des petits, moyens et grands triangles, puis sont invités à paver le grand triangle du jeu d'abord avec les formes de leur choix, puis avec un nombre donné de formes (contraintes numériques).

Quelques exemples de productions sont présentés Figure 8.



Figure 8

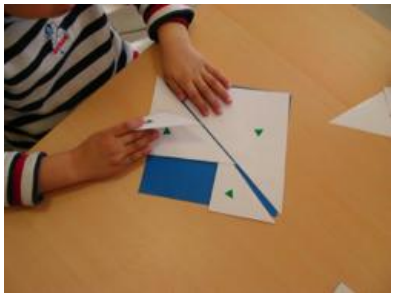


Figure 9

Séance 3

Elle est consacrée au pavage du « maxi carré ».

Dans cette séance, le gabarit du carré est donné. Dans un premier temps, les élèves ont le choix des formes du jeu du « Triangram ». Dans un deuxième temps, des contraintes numériques et/ou géométriques sont imposées. La Figure 9 montre un élève en activité.

---

[4] Ce matériel a également été utilisé dans des activités de maternelle (Grelier, 2009, pp. 30-39, 92-97 & 115), et de cycle 2 (Vergnes, 2003, pp.67-69) portant sur des classements, des frises, des pavages, des mosaïques, ainsi que des activités de cycle 3 portant sur le périmètre (Eysseric, 2003, pp. 162-163).

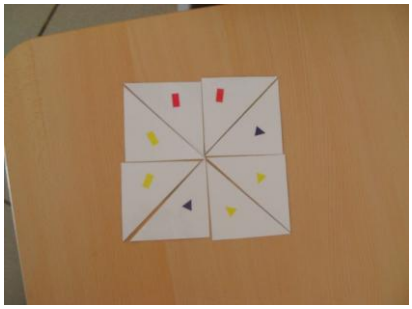
[5] Contrairement à (Vergnes, 2003) qui faisait découper *après* pliage.

Séance 4

Les élèves doivent reconstituer le « maxi carré » sans son gabarit avec les pièces de plusieurs « Triangrams ».

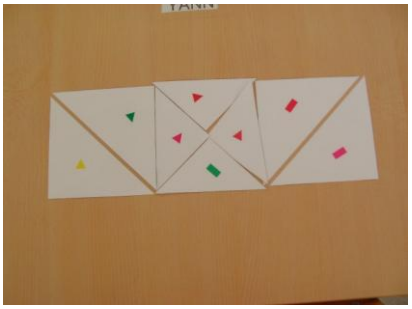
Séance 5

Dans cette dernière séance, les élèves doivent construire par groupe le plus grand rectangle possible en utilisant le plus de formes possibles ; comme dans la séquence précédente, on pourra faire varier le support sur lequel on travaille (table, sol, …).



Le « maxi-carré »

Figure 10



Le plus grand rectangle possible

Eléments d'analyse et constats à l'issue des mises en œuvre

Entre la séquence du « Rectangram » et celle du « Triangram », la répétition des activités avec une seule évolution de variable – la forme des sous-figues - a limité le nombre d'élèves mis en échec.

Nous avons constaté que l'apprentissage de la reconnaissance du triangle est plus long que celui du carré et du rectangle. Cependant les élèves mettent assez facilement en évidence la caractéristique principale du triangle : il possède trois côtés.

Le principe de pavage ne pose plus de problème à ce stade de la progression. Lors des activités de pavage, les élèves ont spontanément cherché à assembler les triangles par leur hypoténuse : ceci nécessite une rotation de la forme qui peut s'avérer problématique.

En l'absence de gabarit, la reconstitution du carré avec des triangles nécessite une représentation mentale de la forme carrée tout en faisant abstraction de la forme triangulaire. Cette activité est donc assez difficile pour les élèves.

Cette deuxième séquence met en évidence la décomposition du carré en sous-figures (triangles de différentes tailles).

3 La séquence du « Méli-Mélo»

Le « *Méli-Mélo* » (voir Figure 11) est un Tangram plus connu que les car il se rapproche du Tangram « classique », tout en proposant uniquement des formes « simples » : carrés, triangles rectangles isocèles, trapèze rectangle[6].

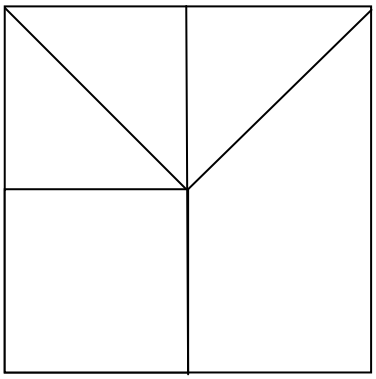


Figure 11

Description

Le début de la séquence reprend le déroulement des précédentes. Après une phase d'appropriation du matériel par manipulation libre des formes (séance 1), les élèves sont invités à paver le « maxi-carré » avec les pièces de plusieurs « Méli-Mélo », d'abord avec l'aide du

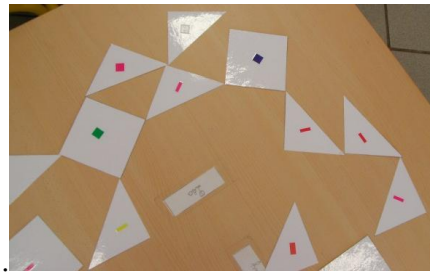
[6] Il est d'ailleurs utilisé en activité de remédiation pour le cycle 2 dans (Berdonneau, 2007). Pour trouver des formes à réaliser avec le Méli-Mélo, on peut également aller sur le site de J-L. Sigrist : http://www.jlsigrist.com/meli.html

gabarit du « maxi-carré » (séance 2), puis sans (séance 3). Il s'agit ensuite de constituer le plus grand rectangle (séance 4) : deux productions d'élèves sont présentées Figure 12.

Figure 12



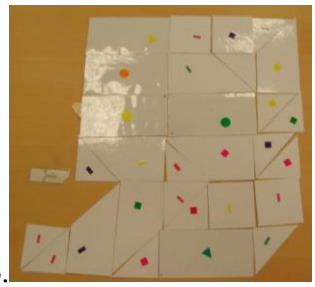
La séquence se poursuit avec un nouveau type d'activité « assembler les formes », qui se décline en trois temps : assembler par les sommets ; assembler par les côtés ; assembler par côtés de même longueur. La production de chaque élève est validée par le groupe (certaines productions sont présentées Figure 13).

1. 

1. Assemblage par les sommets

2. 

2. Assemblage par les côtés

3. 

3. Assemblage par les côtés de même longueur

Figure 13

Lors d'activités en autonomie les élèves doivent paver des formes figuratives données en utilisant les pièces du « Méli-Mélo » (voir les modèles Annexe 1). Plusieurs étapes peuvent être proposées en progression, en fonction des performances des élèves[7] :

- avec gabarit comprenant le contour de chaque élément de la décomposition ;
- avec gabarit sans décomposition ;
- avec gabarit, le modèle étant présenté à échelle réduite (moitié) sur le plan horizontal et faisant apparaître le contour de chaque élément de la décomposition ;
- sans gabarit le modèle étant présenté à échelle réduite (moitié) sur le plan horizontal et ne faisant pas apparaître la décomposition ;
- avec gabarit, le modèle étant présenté à échelle réduite (moitié) sur le plan vertical et faisant apparaître le contour de chaque élément de la décomposition ;
- sans gabarit le modèle étant présenté à échelle réduite (moitié) sur le plan vertical et ne faisant pas apparaître la décomposition.

La séquence se termine par une séance de construction du « Méli-Mélo » par pliage d'un carré, selon les étapes suivantes :

1. Le carré est plié pour obtenir un rectangle, qui est alors hachuré.

[7] Pour réaliser cette progression, nous nous sommes appuyés sur le travail de Martin (Martin, 2003, pp.104-106).

2. Le rectangle est plié de manière à « cacher la couleur » pour obtenir un carré, qui est alors hachuré.
3. Le nouveau carré est alors plié pour obtenir un triangle.
4. On fait constater que toutes les formes du « Méli-Mélo » n'apparaissent pas. En effet, le dépliage met en évidence un rectangle qui ne fait pas partie du « Méli-Mélo », ainsi que toutes les formes du « Méli-Mélo » à l'exception du trapèze et d'un triangle rectangle isocèle. On marque le contour de ces formes, puis les élèves sont invités à identifier le trapèze et le triangle rectangle isocèle restants à « l'intérieur » du rectangle.

Eléments d'analyse et constats à l'issue des mises en œuvre

Dans le « Méli-Mélo », une nouvelle figure apparaît : c'est le trapèze. L'appropriation de ce vocabulaire ne pose aucun problème aux élèves, dès la fin de la séance 1.

Les activités de pavage du « maxi-carré » avec et sans gabarit ont été correctement réalisées, car faisant suite à celles menées dans les séquences « Rectangram » et « Triangram ».

Le sommet chez l'élève de maternelle est vu comme le « bout qui pique », et sa reconnaissance n'engendre pas de difficulté. L'association par sommets met en évidence des objets géométriques de dimension 0, alors que celle par côtés des objets de dimension 1. La notion de côté de même longueur est mise en avant de manière explicite avec ce matériel alors qu'elle n'était que sous-jacente (mais utilisée) lors des activités utilisant « Rectangram » ou « Triangram ».

Lors de la construction du « Méli-Mélo » par pliage, les pliages des carrés et du rectangle ont été correctement réalisés : il s'agissait de réinvestir les connaissances portant sur des relations entre rectangle, carré, triangle rectangle isocèle qui avaient été mises en évidence dans les deux séquences précédentes. D'autre part une grande partie des élèves (en MS et GS) a repéré aussi bien les formes présentes que celles manquantes : « *On n'a pas le trapèze ! On a un rectangle qu'il n'y a pas, il manque un triangle* ». Enfin, lors de la dernière étape, la reconnaissance du trapèze comme composition d'un carré et d'un triangle rectangle isocèle a été difficile pour les élèves : la vision de sous-figures dans une figure complexe est compliquée à l'école maternelle (et même au-delà !), cependant la manipulation (ici le pavage du trapèze par les autres pièces), a permis de pallier la difficulté.

Lors de l'atelier, les adultes non entraînés lors de l'activité ont eu du mal à effectuer certaines tâches que les élèves entraînés n'ont eu aucun problème à réaliser. Ceci montre que l'on peut mettre en place des procédures de recherche par tâtonnement dès la maternelle visant l'efficacité. A force de répétition et de complexification, les élèves cherchent la manière experte de réussir et ce dans un temps le plus court possible. La compétition sous-jacente (inhérente aux trois séquences) est un moteur d'activité.

Par ailleurs, la verbalisation des actions des élèves a permis une meilleure imprégnation des tâches à accomplir ainsi que l'acquisition de propriétés (égalité de longueur, et complémentarité de certains angles).

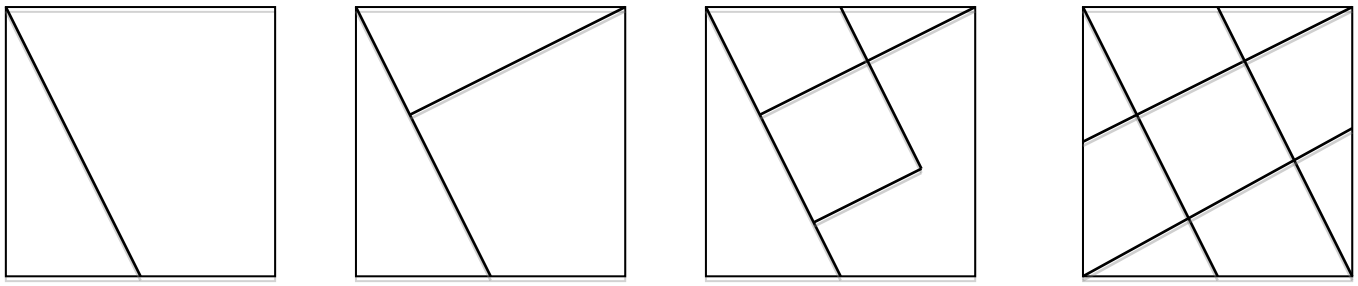
IV - FAMILLE DE PUZZLES EN CYCLE 3

1 Présentation de la situation

En cycle 3 (CE2-CM1-CM2), nous nous sommes intéressés à la situation « *Famille de puzzles* » (APMEP, 2005, p. 3-4 et 9-10).

Dans cette situation, il s'agit pour les élèves de construire différentes figures planes (carré, parallélogramme, trapèze isocèle, triangle rectangle, quadrilatère non parallélogramme, …), à partir de puzzles de plus en plus complexes comprenant de deux à neuf pièces et présentés Figure 14[8].

[8] Les points qui interviennent dans la construction de ces différents puzzles sont les sommets du carré ainsi que les milieux des côtés du carré.



Puzzle à 2 pièces | Puzzle à 3 pièces | Puzzle à 5 pièces | Puzzle à 9 pièces

Figure 14

En nous appuyant sur le travail de (Huguet, 2003, pp. 248-251), nous présentons les variables didactiques de la situation :

- fournir les modèles des figures (soit « à la taille », soit « à une autre échelle »), ou ne pas fournir de modèle ;
- le choix des supports : le papier permet des procédures par pliages, pas le carton ;
- l'organisation pédagogique : « travail individuel » ou « en petits groupes » ;
- le nombre de pièces du puzzle.

L'objectif principal de la séquence est de « *savoir reconnaître et réaliser des figures géométriques « simples » en résolvant un problème d'agencement* » (Huguet, 2003, p. 248).

Les compétences travaillées au cours de la séquence sont :

- connaître/reconnaître des « figures simples (carré, triangle rectangle, parallélogramme, rectangle, trapèze rectangle ou isocèle) ;
- nommer les « figures simples » ;
- repérer un angle droit ;
- approcher la définition du milieu d'un segment.

Les différentes étapes de la progression sont présentées dans ce qui suit. En fonction du niveau de la classe, toutes ne sont pas proposées. Le tableau ci-dessous en propose une programmation.

	CE2	**CM1**	**CM2**
Puzzles retenus	Puzzles à 2, 3 et 5 pièces	Puzzles à 2, 3 et 5	Puzzles à 2, 3, 5 et 9 pièces
Propriétés mises en évidence	Propriétés des figures Egalité de longueurs	Conversation des aires Repérage d'alignement Repérage des milieux Perpendicularité	
Construction de puzzles sur papier		Puzzle à 2 pièces	Puzzles à 2, 3 et 5 pièces

Phase 1 : Le puzzle à deux pièces

Description

Les élèves possèdent chacun un puzzle à deux pièces en carton bicolore de 15 cm x 15 cm.

Etape 1 : réalisation de figures à partir des pièces du puzzle

Les deux pièces du puzzle (trapèze rectangle et triangle rectangle), sont présentées et nommées aux élèves, certaines de leurs propriétés (angles droits) sont explicitées.

A partir de ces deux pièces, les élèves doivent réaliser successivement : un carré, un parallélogramme, un trapèze isocèle, un triangle rectangle et enfin un quadrilatère quelconque (non parallélogramme)[9], sans que les modèles de ces figures ne soient affichés.

Pour chacune des figures à réaliser, le déroulement est identique :

- La figure à réaliser est nommée.
- Elle est ensuite réalisée par les élèves.
- La (ou les) procédures conduisant à cette figure sont explicitées lors d'une mise en commun. Ce temps de verbalisation conduit à rendre explicite les actions (rotation/retournement d'une pièce), ainsi que certaines propriétés implicitement mises en œuvre au moment de l'action (égalité de longueur, présence d'angles droits, complémentarité de certains angles).
- Puis la figure est refaite au tableau et ses propriétés sont explicitées (égalité de longueur des côtés, des diagonales, droites perpendiculaires ou parallèles, …).

Etape 2 : entraînement

Cette étape est plus « dynamique » : avec les deux pièces du puzzle, les élèves doivent réaliser une figure nommée et énoncer ses propriétés (notamment lorsqu'il s'agit du carré, du parallélogramme, ou du trapèze). Le travail se poursuit sous deux formes :

- Une activité papier-crayon : après avoir tracé le contour de chacune des cinq figures réalisées (les pièces du puzzle servant de gabarit), les élèves représentent la décomposition de ces figures.
  Ceci s'accompagne d'un affichage dans la classe : chaque figure « simple » est représentée sur feuille A3.
- Des activités de type « géométrie mentale » (temps collectif rapide) portant sur le vocabulaire : une figure « simple » est nommée (respectivement présentée) par l'enseignant, les élèves doivent la présenter (respectivement la nommer).

Etape 3 : reproduction du puzzle à deux pièces sur papier blanc

Dans un premier temps, il faut refaire le puzzle à deux pièces à partir d'un carré vide, sans montrer le puzzle de départ[10]. Il s'agit donc pour les élèves de tracer le trait qui partage le carré en deux pièces. La validation s'effectue par découpage et en réalisant effectivement les différentes figures (notamment le triangle rectangle).

A l'issue de ce temps, on dresse le constat suivant : pour que « ça marche », il faut que les deux côtés s'ajustent c'est-à-dire qu'ils aient la même longueur ; autrement dit la longueur du « petit côté » du triangle doit être égale à celle du « petit côté » du trapèze rectangle.

L'enseignant relance alors l'activité par la question suivante : Comment faire pour que les côtés aient la même longueur ? Il s'agit d'identifier les deux points de départ et d'arrivée du trait de coupe : un sommet du carré et le milieu du côté opposé. On est ainsi amenés à définir le milieu d'un segment comme le point qui coupe le segment en deux parties de même longueur. Ceci fait l'objet d'une institutionnalisation locale.

Eléments d'analyse et constats à l'issue des mises en œuvre

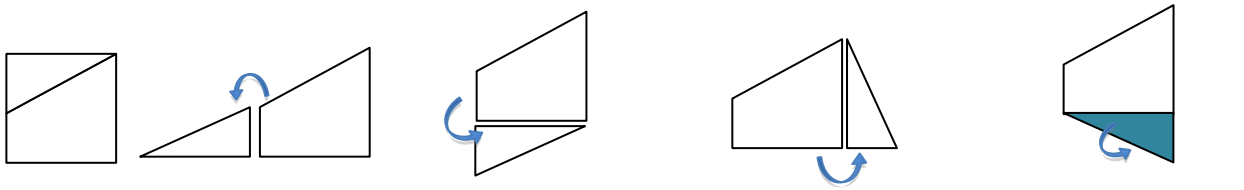
La présence du matériel a permis une entrée facile dans l'activité, et ce jeu a motivé les élèves qui ont cherché toutes les solutions possibles de réalisation de figures.

Lors de l'étape 1, la réalisation de certaines figures nécessite le déplacement d'une forme, alors que celle du trapèze nécessite le retournement du « grand » triangle (voir Figure 15). Pendant la phase

[9] Nous avons choisi de ne pas demander cette dernière figure en classe de CE2.

[10] Les affichages des assemblages obtenus lors de la partie précédente peuvent cependant être conservés sur le mur.

de recherche, nous avons pu constater, comme (Huguet, 2003), que certains élèves ne pensent pas à retourner cette pièce pour pouvoir réaliser le trapèze. L'utilisation d'un matériel bicolore, ainsi que l'observation des camarades ont permis de surmonter cette difficulté. Lors de nos expérimentations, la mise en évidence de cette procédure a conduit à une systématisation de son utilisation au sein de la classe



Carr

Triangle nécessitant un déplacement du

Parallélogramme nécessitant un déplacement du triangle

Quadrilatère quelconque nécessitant

Trapèze nécessitant un retournement du triangle rectangle.

Figure 15

L'étape 2 d'entraînement s'avère nécessaire puisqu'elle permet aux élèves de s'approprier les différents agencements possibles des pièces ainsi que certaines décompositions de figures « simples » (carré, triangle rectangle, parallélogramme, trapèze rectangle). Elle prépare ainsi le travail papier-crayon qui suit. D'autre part, elle facilite la validation à l'issue de la dernière étape.

Lors de l'étape 3, la validation par construction effective du triangle rectangle à partir des deux pièces fait apparaître la nécessité d'égalité de longueur des deux segments issus du partage du côté du carré. La verbalisation de ce fait conduit à définir le milieu du côté comme le point partageant le côté en deux segments de même longueur. Deux procédures sont alors envisageables pour obtenir le milieu : par pliage du carré en deux parties superposables ou par mesurage en utilisant la règle graduée (ce qui est faisable en prenant un carré de 8 cm de côté, mais non obligatoire).

2 Phase 2 : Le puzzle à trois pièces[11]

Description

Etape 1 : réalisation de figures à partir des pièces du puzzle

Après une présentation des trois figures composant le puzzle et de leurs propriétés, les élèves doivent réaliser successivement les cinq figures précédentes (un carré, un parallélogramme, un trapèze isocèle, un triangle rectangle, un quadrilatère quelconque) ainsi qu'un rectangle, sans présence des modèles.

Pour chaque figure, nous avons choisi le déroulement semblable suivant, identique à celui de la phase 1 :

- présentation de la figure.
- temps d'action.
- explicitation des procédures et des propriétés ;
- entraînement.

Etape 2 : reproduction du puzzle à trois pièces

Cette étape se décompose en deux temps.

Dans un premier temps la reproduction s'effectue sur un papier blanc sur lequel est tracé le puzzle à deux pièces. Les élèves ont à leur disposition le matériel de géométrie. A l'issue de l'activité, la mise en commun fait émerger les différentes procédures. Celles-ci sont justifiées pour rendre

[11] Une analyse approfondie de la situation avec 3 pièces est présentée sous le nom de « Trio infernal » dans (Huguet, 2003).

explicites les propriétés utilisées (présence d'un angle droit, droites perpendiculaires, angles superposables éventuellement).

Dans un deuxième temps, les élèves sont invités à construire un puzzle de trois pièces sur papier quadrillé à partir d'un carré déjà tracé.

Eléments d'analyse et constats à l'issue des mises en œuvre

La première étape permet une appropriation du matériel, ainsi qu'une mise en évidence des propriétés des figures en jeu.

Lors du passage du puzzle à deux pièces à celui à trois pièces, une procédure d'association de figures peut émerger. En effet lors de nos expérimentations, certains élèves ont repéré les similitudes entre les deux puzzles : une pièce du puzzle à deux a été coupée en deux. En associant ces deux pièces, ils se plaçaient alors dans la configuration du puzzle à deux pièces (pour toutes les figures demandées sauf le rectangle), et n'avaient qu'à traiter une pièce par rapport à une autre et non deux pièces par rapport à une troisième …La Figure 16 illustre cette procédure.

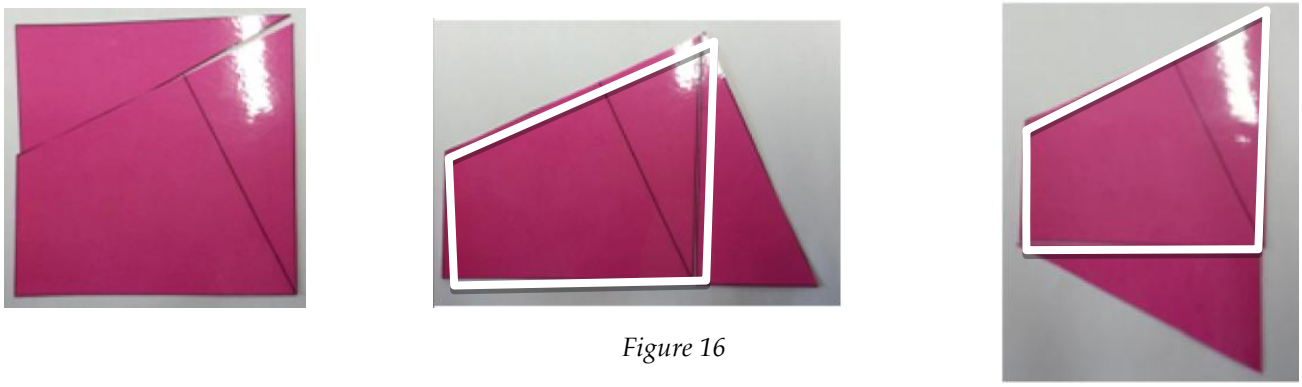
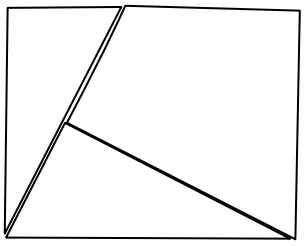


Figure 16

La réalisation du rectangle à partir du puzzle à trois pièces semble la plus difficile car elle nécessite le déplacement des trois pièces (voir Figure 17). C'est en effet celle qui a posé le plus de problème aux élèves.

Figure 17



Dans l'étape 2, lors de la reproduction du puzzle à trois pièces à partir du puzzle à deux pièces sur papier blanc, plusieurs procédures sont envisageables et ont été constatées. Après avoir préalablement découpé le triangle rectangle du puzzle à deux pièces, la troisième pièce se réalise :

- En remarquant que le nouveau triangle à construire est rectangle et en utilisant la pièce découpée comme gabarit d'angle droit (Figure 18-a);
- En remarquant que le nouveau triangle à construire possède un angle droit, ce qui peut conduire à tracer une droite perpendiculaire à (ID) passant par C, notamment en repliant la droite (DI) sur elle-même et en ajustant le pli pour qu'il contienne C (Figure 18-b) : cette procédure est possible parce que le support est en papier ;
- En remarquant que le nouveau triangle correspond à une partie de la pièce découpée (égalité des angles), et en ajustant les hypoténuses (Figure 18-c) ainsi que C avec le sommet correspondant.

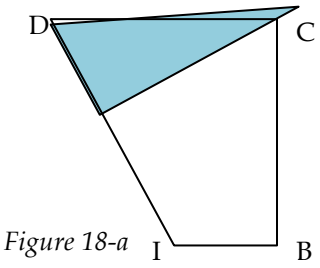


Figure 18-a

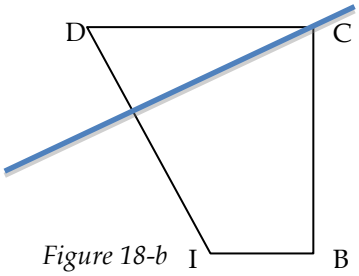


Figure 18-b

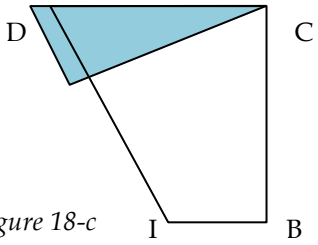


Figure 18-c

Sur papier quadrillé, les élèves construisent le triangle rectangle du puzzle à deux pièces en utilisant le fait que le sommet de l'angle droit correspond au milieu d'un côté du carré (travaillé lors de la phase 1). La construction de la dernière pièce est plus délicate. Elle nécessite :

- soit d'utiliser la perpendicularité mise en évidence dans l'étape précédente (procédure très peu utilisée) ;
- soit le fait que le troisième côté à construire se prolonge et coupe un côté du carré en son milieu.

3 Le puzzle à cinq pièces

Description

Etape 1 : réalisation de figures à partir des pièces du puzzle

Le même cheminement que le précédent est retenu. Après avoir présenté les cinq figures du puzzle et leurs propriétés, les élèves sont invités à reproduire les six figures précédentes (un carré, un parallélogramme, un trapèze isocèle, un triangle rectangle, un quadrilatère quelconque, un rectangle) ainsi qu'une croix qui est présentée et analysée. Un temps d'entraînement est prévu.

Etape 2 : reproduction du puzzle à cinq pièces

Cette étape se décompose en plusieurs temps :

- Dans un premier temps, il faut partir du puzzle à trois pièces.
- Dans un deuxième temps, il faut partir du puzzle à deux pièces.
- Dans un troisième temps, il faut partir d'un carré.

Eléments d'analyse et constats à l'issue des mises en œuvre

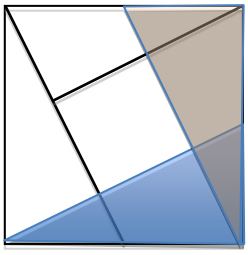
Le changement de puzzle conduit à proposer de nouveaux problèmes, en s'appuyant sur les connaissances et habiletés développées dans ce qui précède, tout en maintenant l'attention des élèves.

La progression proposée dans l'étape 2 est établie en fonction du nombre croissant d'opérations à effectuer. Cependant, chaque nouvelle consigne correspond à un prolongement de la précédente.

Pour réaliser le puzzle à cinq pièces à partir de celui à trois pièces plusieurs procédures sont envisageables. Nous en présentons deux s'appuyant sur des objets géométriques différents :

- Une première procédure peut s'appuyer sur la présence supplémentaire de deux grands triangles rectangles (grisés sur la Figure 19) :

Figure 19



- Une autre procédure peut s'appuyer sur la reconnaissance du carré central (bien qu'en position non prototypique), dont la longueur du côté correspond à la moitié d'un côté du petit triangle rectangle du puzzle à trois pièces.
- Enfin, la procédure présentée Figure 20 s'appuie sur la perpendicularité, sur des égalités de longueurs de segments ainsi que sur la notion de milieu. Cependant, nous avons constaté que l'emploi des perpendiculaires n'est pas perçu comme moyen de construction de ce puzzle par les élèves.

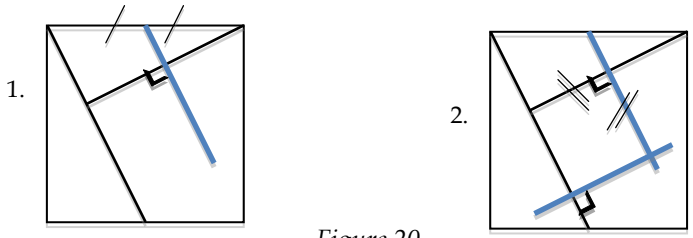


Figure 20

4 Commentaires et compléments d'analyse

Lors des discussions avec les participants de l'atelier, plusieurs points ont été abordés. Ils sont présentés ci-dessous.

La tâche de reproduction de figure avec des pièces de puzzle

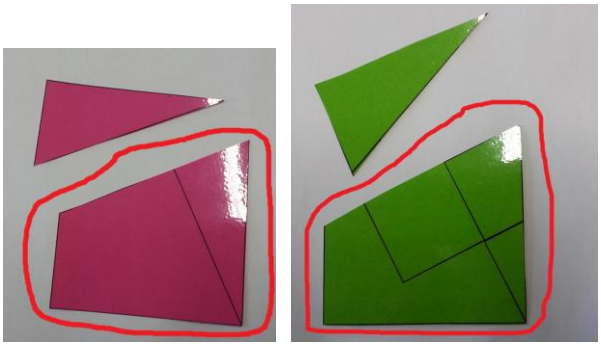
Il est apparu que les élèves entraient facilement dans toutes les activités proposées dans la séquence.

La complexité de la tâche de reproduction de figure est liée à deux facteurs :

- le nombre de pièces : les évaluations que nous avons menées dans les classes montrent ainsi une quasi-réussite du puzzle à deux pièces, et une diminution progressive des réussites inversement proportionnelle à l'augmentation du nombre de pièces ;
- le type de transformation à effectuer sur les pièces : la reproduction de figures nécessitant un retournement reste plus complexe que celles qui nécessitent une rotation.

Dans les activités de reproduction de figure, un aller-retour avec les puzzles de niveaux inférieurs est nécessaire pour dépasser les difficultés de l'augmentation du nombre de pièces. Les élèves perçoivent ainsi qu'il s'agit du même puzzle de départ, si ce n'est que les deux premières pièces sont coupées en d'autres pièces. Ceci est illustré Figure 21.

Figure 21



Le rôle de la manipulation

La manipulation par les élèves ou l'enseignant a mis en avant les formes dans des positions non prototypiques, favorisant la reconnaissance de figures particulières quelle que soit leur orientation sur la feuille.

La manipulation a facilité la verbalisation des actions demandant à l'élève de donner du sens à son action plutôt que d'appliquer un mécanisme. Ceci a conduit à utiliser en situation le vocabulaire spatial (au-dessus, à droite, …) et géométrique (carré, rectangle, parallélogramme, trapèze, triangle, mais aussi côté, sommet, milieu).

Comme pour les activités de maternelle, les élèves manipulent des formes de dimension 2 tout en réfléchissant sur les associations : côtés de même longueur (objets géométriques de dimension 1) et sommets contre sommets (objets géométriques de dimension 0). Le fait que les élèves puissent toucher les formes et vérifier les propriétés de figures (angles droits, égalités de longueurs) a facilité l'acquisition de ces propriétés.

De plus, l'évolution du matériel a balisé une progression permettant de mettre en place chez les élèves une méthodologie de travail.

Le regard sur les figures

Le travail sur « Famille de puzzles » a favorisé l'appréhension opératoire des figures, et tout d'abord les modifications méréologiques. En effet l'observation de sous-figures dans une figure complexe s'est accrue avec la compréhension qu'il y a découpage des figures initiales en sous-figures et réciproquement, les élèves ont pris conscience que l'assemblage de différentes figures conduisait à une nouvelle figure. D'autre part, la reconnaissance des figures dans n'importe quelle position induit à terme des modifications positionnelles.

La construction du puzzle dès la fin de la phase 1 a demandé une reconnaissance du milieu d'un segment du triangle rectangle, donc la prise en compte d'unités figurales de dimensions inférieures. Cette notion reste la plus difficile pour les élèves malgré sa verbalisation et sa visualisation.

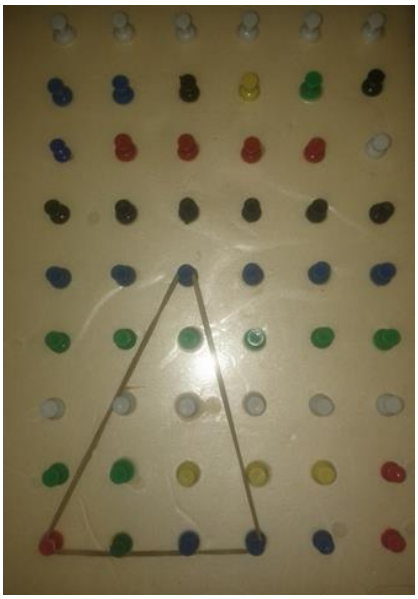
De plus, si des angles droits sont bien identifiés, en revanche la perpendicularité n'a pas été utilisée par les élèves pour la construction des puzzles.

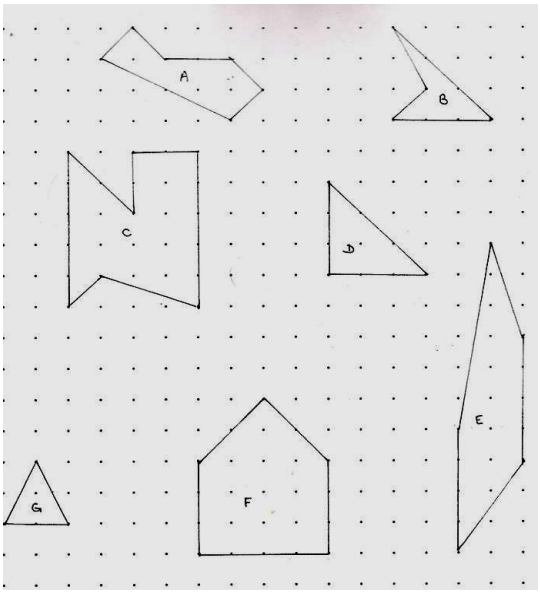
V - ACTIVITÉS DE REMÉDIATION EN CYCLE 3

Devant des élèves de cycle 3 en très grandes difficultés scolaires, nous avons adapté les jeux de maternelle afin de leur permettre d'acquérir les notions du programme du cycle 3.

- Création de « cartes flash » portant sur du vocabulaire géométrique (côté, sommet, carré, cercle,…). L'enseignant ou un élève nomme une des « cartes flash », les autres élèves doivent alors la présenter le plus rapidement possible.
- Les activités du « Méli- Mélo » proposées pour la maternelle, ont été utilisées (mais en accéléré !) pour revoir la notion de sommet, de côté et de côté de même longueur.
- Une activité sur le « Géoplan » avec transfert sur le papier pointé a été proposée. Dans une première séance, il est proposé de réaliser les pièces du « Méli-Mélo » sur le « Géoplan ». Dans la séance suivante, des figures sur papier pointé sont représentées, il faut les réaliser sur le « Géoplan ».

Figure 22





Cette activité a permis d'offrir un autre contexte pour une reprise des notions précédentes. En effet, le « Géoplan » utilisé étant de fabrication artisanale, nous avons pu enlever les punaises qui ne correspondaient pas aux sommets des figures proposées, ne laissant ainsi sur le support que ceux nécessaires à la réalisation de la figure. Les élèves ont pu toucher les sommets (physiquement représentés par les punaises) et verbaliser : « trois sommets, trois côtés ». De plus, durant toutes ces séances, les élèves verbalisaient le nom de la figure si elle était connue, le nombre de sommets et de côtés. Si cela était possible, on associait le tactile à la parole, ce qui permettait d'associer une image à un mot.

Suite à des difficultés constatées en cycle 3 dans le domaine de la géométrie, la manipulation a été réintroduite et s'est avérée nécessaire voire indispensable. Celle-ci a favorisée la verbalisation des connaissances notamment pour les élèves en difficulté avec l'écrit. Dans un temps scolaire court, les élèves ont pu rattraper leur retard concernant les compétences géométriques nécessaires au travail en cycle 3.

VI - CONCLUSION

L'activité géométrique est une activité complexe. A ce propos, Duval écrit : « *Parmi tous les domaines de connaissances dans lesquels les élèves doivent entrer, la géométrie est celui qui exige l'activité cognitive la plus complète, puisqu'elle sollicite le geste, le langage et le regard* ». Ce dernier aspect est d'ailleurs repris dans les programmes de 2008 : « *les problèmes de reproduction ou de construction de configurations géométriques diverses mobilisent la connaissance de figures usuelles [et] sont l'occasion d'utiliser à bon escient le vocabulaire spécifique et les démarches de mesurage et de tracé* » (BOEN 3/06/2008). Mais l'activité géométrique est également complexe pour l'enseignant qui peut se trouver démuni face au choix de situations à proposer aux élèves. L'Inspection Générale de l'Éducation Nationale note d'ailleurs dans un rapport de 2006 qu'« *un certain nombre d'activités sont estimées trop simples et peu propices à la construction des notions géométriques visées* » (MEN-IGEN, 2006, p.33).

Dans cet atelier, nous avons présenté un matériel facilement accessible permettant de concevoir une progression sur les trois cycles de l'école primaire. Nous pensons que l'usage de ce matériel est susceptible de faciliter le travail des enseignants qui peuvent ainsi installer des habitudes de travail avec leurs élèves et s'approprier des séances selon un même déroulement tout en les adaptant à ses objectifs par un jeu sur les variables didactiques.

Testée dans nos classes, cette progression a permis de travailler les compétences des programmes propres à chaque cycle :

- en maternelle : reconnaissance de quelques formes « simples » et de quelques unes de leurs propriétés, notion de côté de sommet ;
- en cycle 2 : reconnaître, nommer et décrire un carré, un rectangle, un triangle ; percevoir et reconnaître quelques relations et propriétés géométriques ;
- en cycle 3 : reconnaître, décrire, nommer, reproduire et tracer des figures géométriques ; utiliser le vocabulaire côté, sommet, milieu en situation.

En particulier le matériel choisi a permis aux élèves de reconnaître différentes figures planes (le carré, le rectangle, le triangle, le trapèze notamment), dans des situations non prototypiques. Il a permis de mettre en évidence des décompositions de figures en sous-figures, ainsi que certaines de leurs propriétés. Il a été un support pertinent pour travailler la notion de milieu en cycle 3.

Enfin, du côté des élèves, nous avons pu constater au cours de nos expérimentations que la manipulation favorisait l'appréhension opératoire et donc perceptive des figures ainsi que la verbalisation organisée lors des mises en commun qui a conduit à développer le vocabulaire géométrique et/ou spatial. D'autre part, la verbalisation des actions et des propriétés a permis de les rendre explicites, renforçant appréhension perceptive et opératoire. Le passage par la manipulation a également permis de développer chez les élèves le goût de la recherche.

Cependant, cette progression ne touche qu'une partie des compétences à développer chez les élèves concernant le travail sur le changement de regard sur les figures. En effet, en maternelle, les figures ont été réalisées par assemblage mais non par superposition[12], et aux cycles 2 et 3, la décomposition de formes en une configuration d'unités figurales d'un nombre inférieur de dimensions n'a pas été réellement abordée. Le travail reste à poursuivre.

BIBLIOGRAPHIE

A.P.M.E.P. (2005) *JEUX 7 : Des activités mathématiques pour la classe*. APMEP, **169**.

BERDONNEAU C. (2007) *Aider les élèves en difficultés en mathématiques en CP/CE1 (t.2)*. Hachette Education.

DUVAL R. (1988) Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **1**, 57-74.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **5**, 37-65.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang. Berne.

DUVAL R. (2003) Décrire, visualiser ou raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ?, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **8**, 13-62.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développeme,t de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **10**, 5-53.

DUVAL R, GODIN M., PERRIN-GLORIAN M-J. (2005) Reproduction de figures à l'école élémentaire, in Castela et Houdement (Ed.) (2005), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2004*, 5-89, Irem Paris 7.

EYSSERIC P. (2003) Vivre un atelier de recherche en mathématiques, 159-168, in *Concertum t.1*, ARPEME.

GRELIER J-F. (2009) *Devenir élève par les apprentissages géométriques au cycle 1*. Scéren-CRDP Midi-Pyrénées.

HUGUET F. (2003) Expériences en classes multi-niveaux, 248-251, in *Concertum t.1*, ARPEME.

MARTIN F. (2003) *Apprentissages mathématiques : jeux en maternelle*. Scéren CRDP Aquitaine.

[12] Des activités en ce sens et avec des puzzles sont proposées dans (Jore, Jore, 2012).

JORE F., JORE N. (2012) *Géométrie au cycle 2 : étude de figures*. IUFM Nord-Pas-de-Calais. http://lille.iufm.fr/IMG/pdf/Geometrie_au_cycle_2.pdf

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE. (2005) *Documents d'accompagnement des programmes : Mathématiques*. Scéren CNDP.

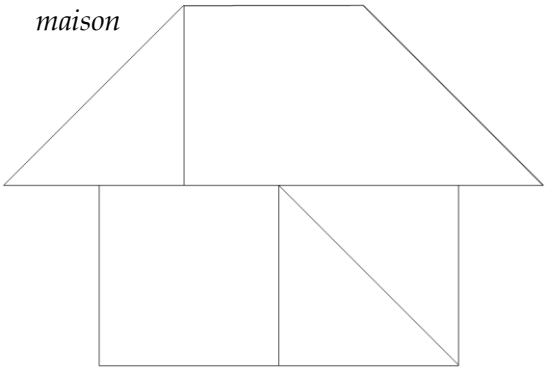
MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE. (2006) *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*. MEN-IGEN. http://www.education.gouv.fr/cid4172/l-enseignement-des-mathematiques-au-cycle-3-de-l-ecole-primaire.html

VERGNES D. (2003) Quelles mathématiques pour le cycle des apprentissages premiers ?, 67-76, in *Concertum t.1*, ARPEME.

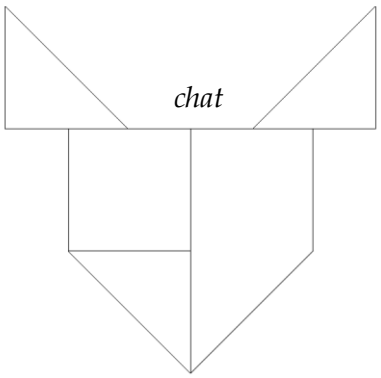
VII - ANNEXE (MODÈLES DE FORMES FIGURATIVES POUR LE « MÉLI-MÉLO »)

Les constats effectués suite aux expérimentations nous ont amenés à proposer les modèles suivant un ordre de difficulté croissant : maison, chat, bateau, poisson, tête de renard, rectangle.

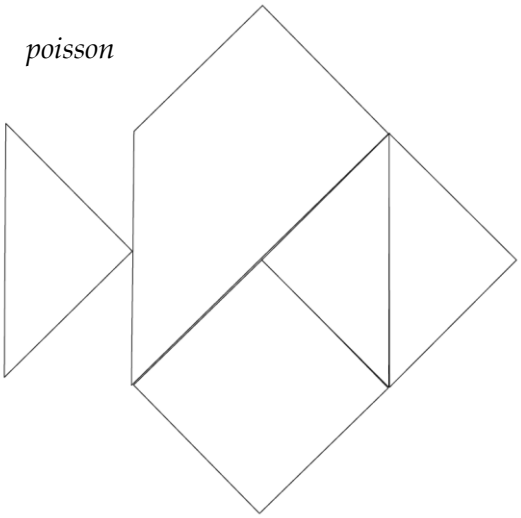
maison



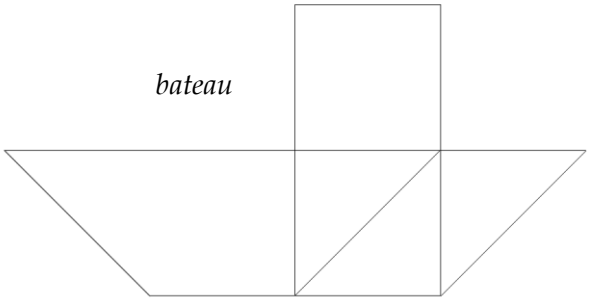
chat



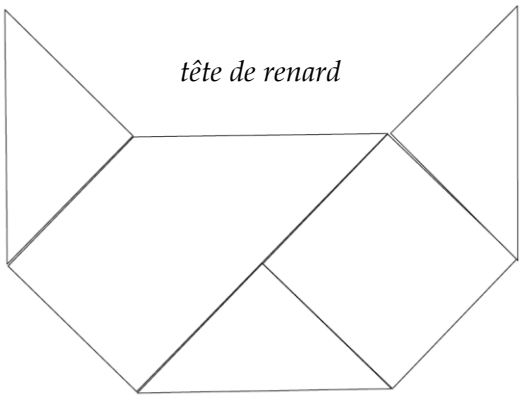
poisson



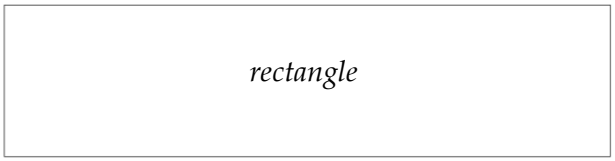
bateau



tête de renard



rectangle



EXPLORER LES PATRONS DU CUBE : DE L'INTÉRÊT DES REPRÉSENTATIONS À L'AIDE DE LOGICIELS DE MATHÉMATIQUE DYNAMIQUE

Anne CALPE
Enseignante, collège Gaston Baty
Institut Français de l'Éducation
anne.calpe@ac-lyon.fr

Jean-Pierre RABATEL
Professeur des écoles, Maître formateur, école Jean Moulin CALUIRE
jeanpierre.rabatel@laposte.net

Jean-François ZUCCHETTA
Formateur, ESPé de Lyon
jean-francois.zucchetta@univ-lyon1.fr

Sophie SOURY-LAVERGNE
Enseignant-chercheur, Institut français de l'Éducation
sophie.soury-lavergne@ens-lyon.fr

Résumé
Nous avons présenté un travail sur l'utilisation des technologies pour l'apprentissage de la géométrie dans l'espace réalisé dans le cadre du projet MaDyP (Mathématiques Dynamiques au Primaire) de l'Institut Français de l'Éducation. L'atelier a permis aux participants de découvrir des cahiers informatisés créés avec le logiciel Cabri Elem pour travailler la notion de patron du cube. Ils ont exploré ces cahiers et ont pu les analyser du point de vue des variables didactiques et des différents types de rétroactions que permet le logiciel dans le but d'en dégager les potentialités didactiques.
Les usages en classe que nous avons expérimentés en classe de CM2 et de 6ème associent l'utilisation des cahiers informatisés à celle de matériels tangibles. Notre hypothèse, confortée par les observations, est que les environnements sont complémentaires pour l'apprentissage des élèves ; les différentes caractéristiques d'un patron de cube (forme et agencement des faces) ne faisant pas l'objet des mêmes contraintes sur l'action des élèves dans les deux environnements. Le débat dans l'atelier a porté sur les caractéristiques du travail proposé aux élèves, sur les conditions du réinvestissement de connaissances par les élèves dans les différents environnements et sur les apports de ce type de travail dans l'appropriation des ressources mathématiques et informatiques par les enseignants du primaire.

Au cours de l'atelier, les participants ont pu étudier différentes activités relatives aux patrons du cube en explorant du matériel et des logiciels mis à leur disposition. La discussion a porté sur les questions relatives aux aspects didactiques, pédagogiques et techniques des logiciels que nous avons conçus, ces logiciels étant présentés sous la forme de cahiers d'activité informatisés, puis sur les expérimentations réalisées avec deux classes, une classe de CM2 et une classe de 6ème, et enfin sur les apports et les difficultés de l'utilisation de ce type de ressources.

I - LES CAHIERS CABRI ELEM

L'équipe du projet MaDyP (Mathématiques Dynamiques au Primaire) regroupe des enseignants du primaire et du secondaire et une didacticienne des mathématiques de l'IFÉ (Soury-Lavergne & Calpe 2012). Nous concevons des ressources informatisées pour l'enseignement des mathématiques au primaire. Nous utilisons la technologie Cabri Elem, qui est mise à notre disposition par la société Cabrilog, pour concevoir les cahiers d'activité informatisés (comme par exemple dans Soury-Lavergne & Maschietto 2013), car cette technologie nous permet d'élaborer des ressources informatiques et de les modifier au fur et à mesure de nos analyses et expérimentations.

1. Deux environnements : l'un pour les concepteurs de ressources, l'autre pour les élèves

Cabri Elem se présente sous la forme de deux environnements complémentaires. Cabri Elem Creator permet aux auteurs, enseignants ou chercheurs, de concevoir leurs propres ressources et de les adapter à leurs besoins. Cabri Elem Player permet aux élèves de réaliser les activités dans un environnement simplifié, doté d'une ergonomie adaptée. Les ressources pour les élèves sont appelées « cahiers d'activité informatisés », car elles se présentent sous la forme d'une succession de « pages » informatisées, regroupant des activités autour d'un même thème, en fait une suite d'écrans sur lesquels les élèves peuvent interagir.

Le travail de conception de cahiers avec le logiciel Cabri Elem Creator demande un certain degré de maîtrise des outils de géométrie dynamique, en plus d'un travail de réflexion sur les actions prévues et supposées des élèves avec le logiciel. Le but est de proposer aux élèves des tâches et des rétroactions qui leur permettent de s'impliquer dans la recherche d'une solution au problème posé. Dans notre équipe, si chacun s'est essayé à la partie que l'on pourrait appeler « programmation » pour comprendre l'outil de création, nous avons finalement évolué vers une répartition des rôles. Les enseignants du secondaire, professeurs de mathématiques ayant une expérience des logiciels de mathématiques dynamiques, ont pris en charge le développement informatique des ressources. Les enseignants du primaire ont pris en charge la proposition de problèmes, l'analyse *a priori* des cahiers au fur et à mesure de leur développement, les propositions pour faire évoluer les cahiers et les situations, la mise en place d'une méthodologie pour effectuer des tests avec les élèves et enfin la conduite des tests en classe.

Un point clé qui fait l'intérêt du travail avec le logiciel Cabri Elem Creator est la maîtrise constante du contenu des cahiers conçus et la possibilité de les faire évoluer et de les adapter sans avoir recours à des équipes d'ingénieurs en informatique.

Nous avons commencé le développement de plusieurs cahiers pour les élèves du cycle 3. Seuls certains de nos projets ont abouti à un produit qui a pu être testé en classe (voir un autre exemple sur les triangles dans la contribution d'A. Voltolini dans ces mêmes actes). Le fonctionnement des cahiers repose sur la manipulation de représentations d'objets mathématiques, la construction d'objets géométriques, mais aussi la manipulation d'images et l'écriture de textes. Quand les élèves estiment que le travail est accompli, ils peuvent en demander l'évaluation.

Les concepteurs des cahiers doivent créer toutes les commandes nécessaires à l'activité, depuis les outils de navigation de page en page, jusqu'aux possibilités d'évaluation de l'activité de l'élève. En particulier, les concepteurs décident des diverses rétroactions encourageant les élèves à poursuivre leurs recherches et à modifier leurs démarches pour résoudre le problème.

2 Patrons du cube

2.1 Les choix initiaux

Le logiciel Cabri Elem permet un passage continu entre les représentations 2D comme vues de dessus ou comme patrons) et 3D des objets (perspective et objet pouvant pivoter par rapport à l'observateur) (Laborde et Marchetteau 2009). Nous avons donc décidé d'étudier l'apport que

pouvait constituer cette fonctionnalité du logiciel pour les apprentissages dans le domaine de la géométrie dans l'espace (Douaire, Emprin & Rajain 2009). Une des activités classiques avec les élèves de cours moyen est la construction de patrons de solides dessinés sur du papier que l'on découpe puis replie pour assurer la validation. Une variante existe avec du matériel solide, les Polydron, qui permet l'assemblage à plat de surfaces articulées puis le pliage en vue de reconstituer des polyèdres (figure 1).

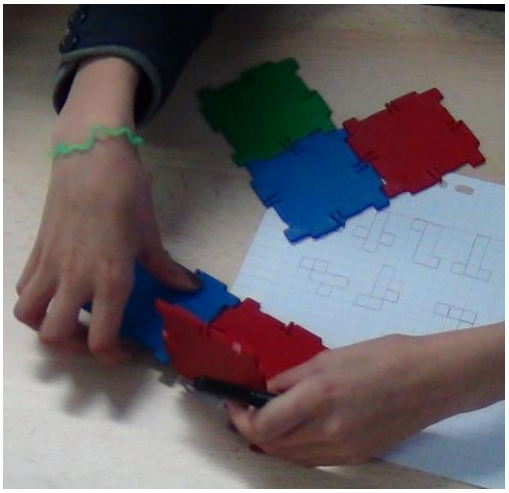


Figure 1. Manipulation de surfaces de plastique rigides appelées « Polydron »

Nous avons imaginé de compléter ces activités par un cahier Cabri Elem qui permettrait à l'élève de fabriquer différents patrons de cubes, de les plier et déplier à volonté et qui validerait ou invaliderait les réalisations de l'élève. Nous avions fait le constat que l'activité papier-crayon était chronophage et que, bien souvent dans les classes, la construction d'un seul patron était réalisée (principalement celui en forme de croix latine). Nous souhaitions compléter cette activité avec une situation qui permettrait à l'élève d'explorer et de manipuler d'autres combinaisons de polygones et donc d'autres patrons afin qu'il puisse identifier les caractéristiques d'un patron du cube : assemblage de six carrés, seuls certains assemblages étant possibles (11 sur les 35 possibles). Pour cela, nous avons cherché à exploiter le fait que la réalisation d'un patron dans l'environnement informatique ne soulève pas les mêmes difficultés que dans une situation papier-crayon. Notre objectif a donc été d'étudier ce qu'il était possible de faire avec un cahier informatisé relatif à la notion de patron du cube, en complément de l'usage d'autres matériels pédagogiques.

Nous avons finalement opté pour la situation de recherche des onze patrons du cube qui nécessite l'assemblage et l'exploration systématique de différents éventuels patrons de cube (possibles et impossibles). L'exhaustivité n'est pas un objectif d'apprentissage pour les élèves de cycle 3, mais la recherche d'un maximum de patrons du cube est une façon de finaliser l'activité de recherche des patrons, d'amener les élèves à construire, plier et déplier un maximum d'assemblages, corrects ou pas, et ainsi de construire les critères qui permettent d'identifier les bons patrons.

2.2 Les éléments clés des cahiers « Patrons du cube »

Notre première ébauche d'activité informatisée proposait un « distributeur » de carrés que l'on pouvait assembler (figure 2). Au moment de l'assemblage, lorsque l'utilisateur approche un carré d'un autre carré de même taille, les deux carrés s'assemblent automatiquement selon un côté commun en faisant coïncider les deux sommets. Ce n'est donc pas l'utilisateur qui contrôle cet aspect. L'outil « patron » du logiciel, appliqué à n'importe quel assemblage plan de carrés, permet ensuite de le transformer en un éventuel solide en 3D qui commence à se replier (figure 3).

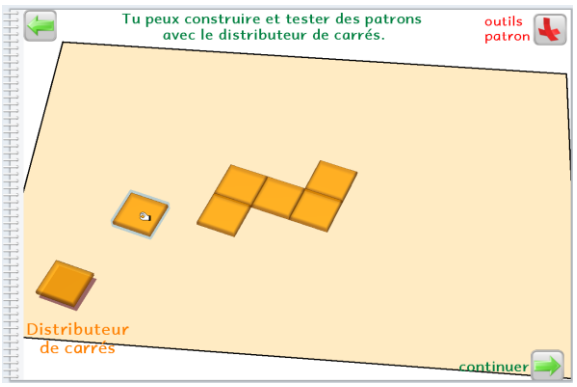


Figure 2. Image écran de la page 2 d'un cahier patron présentant un début d'assemblage de carrés.

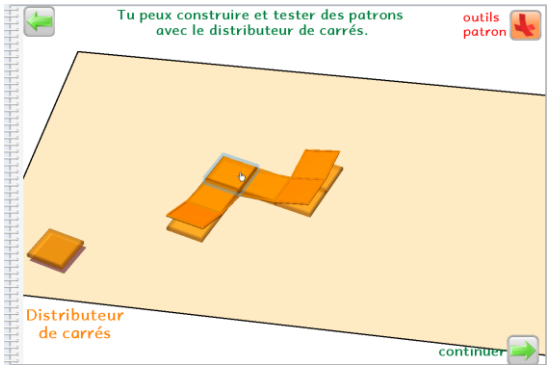


Figure 3. Image écran de la page 2 d'un cahier patron présentant un assemblage de carrés qui commence à se replier.

Cet assemblage peut ensuite être replié, face par face, pour obtenir le cube, ou pas si l'assemblage de carrés n'est pas un patron. Chaque carré de l'assemblage ou face du solide est manipulable séparément avec la souris, elle pivote autour de l'arête commune avec un autre carré/face et s'ajuste automatiquement selon les arêtes. Seul un carré n'est pas manipulable. Il s'agit de celui qui est désigné par la souris au moment de la transformation en patron. Il constituera la face qui reste « collée » dans le plan d'origine du patron et fournit ainsi un repère stable autour duquel les faces sont repliées. Le développement actuel de l'environnement Cabri Elem Creator n'intègre pas de fonctionnalité qui permette de valider automatiquement un éventuel patron à partir du solide reconstitué, dans notre cas un cube. C'est l'utilisateur qui doit décider s'il a formé ou pas le solide voulu en l'examinant et en changeant de point de vue (en faisant pivoter l'objet).

La question de la validation de l'assemblage de carrés, éventuel patron du cube, complémentaire à celle faite par l'utilisateur, s'est donc immédiatement posée. En effet, l'attente de l'utilisateur, en particulier l'élève, est que l'environnement informatique reconnaisse s'il a réussi ou pas. Même si l'on peut avoir un autre point de vue sur l'intérêt didactique de l'évaluation par l'environnement, un cahier informatisé, qui ne le ferait pas, serait considéré comme inabouti par les utilisateurs, élèves comme enseignants.

Dans le cas des patrons obtenus par un assemblage de carrés générés pas un distributeur, comme expliqué ci-dessus, seul l'enseignant peut confirmer à l'élève que l'assemblage de carrés proposé est correct (cube fermé sans faces excédentaires). Nos objectifs d'autonomie pour l'élève n'étaient donc pas atteints. En effet, de notre point de vue, l'autonomie de l'élève résulte d'une activité où il peut, indépendamment du professeur, choisir le moment de la validation et interpréter correctement la rétroaction de l'environnement qu'il s'agisse de validation ou d'invalidation. En cas d'invalidation, l'élève doit être capable d'analyser la rétroaction du logiciel pour poursuivre sa recherche et progresser vers une solution.

Pour surmonter cet obstacle lié à l'environnement de conception du cahier, nous avons élaboré un quadrillage à mailles carrées dans lequel l'élève peut sélectionner les carrés un à un pour constituer un patron. Dans ce cas, une validation par le logiciel est possible. Elle repose sur le fait d'associer à chaque sous-ensemble de carrés du quadrillage un nombre unique obtenu à l'aide d'une écriture binaire (figure 4). Le patron est validé si le nombre correspondant à la sélection de carrés par l'élève est dans la liste des réponses possibles pour un patron du cube. Un recensement pour chacun des onze patrons a donc été nécessaire, tenant compte des différentes positions possibles d'un même assemblage de carrés dans le

0	0	1	0	0
1	1	1	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

1000111100100
4580 (base 10)

Figure 4. Pavage de carrés codés par 0 (carré non sélectionné) ou 1 (carré sélectionné). Exemple avec la croix latine positionnée en haut à gauche qui correspond au nombre 4580 en base 10.

quadrillage. Ainsi, un même patron de cube (par exemple celui en forme de T) placé sur le quadrillage est associé à plusieurs nombres (figure 5). Pour un quadrillage de quatre carrés par quatre carrés (4 x 4), il faut établir une liste de plusieurs centaines de nombres pour pouvoir recenser la totalité des positions possibles des différents patrons.

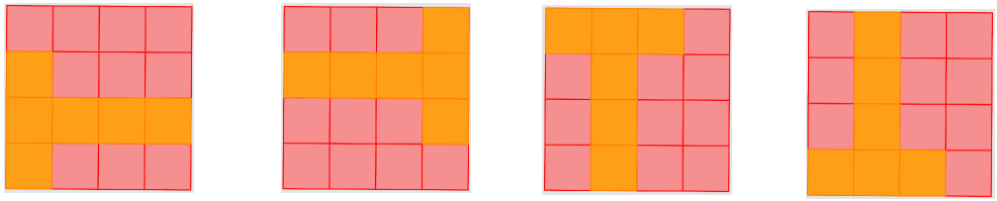


Figure 5. Différentes positions d'un même patron dans une grille 4x4.

L'idée du travail sur un quadrillage à mailles carrées étant posée, plusieurs versions du cahier ont été construites tout au long de l'année 2012, utilisant des dimensions de quadrillage différentes, la complexité augmentant avec la dimension.

2.3 Description d'un cahier « Patrons du cube »

Le cahier « Patrons du cube » basé sur un quadrillage de dimension 4 x 4 de carrés est constitué de deux pages de travail principales et de dix pages supplémentaires présentant chacune l'un des dix patrons du cube constructibles dans le quadrillage 4 x 4.

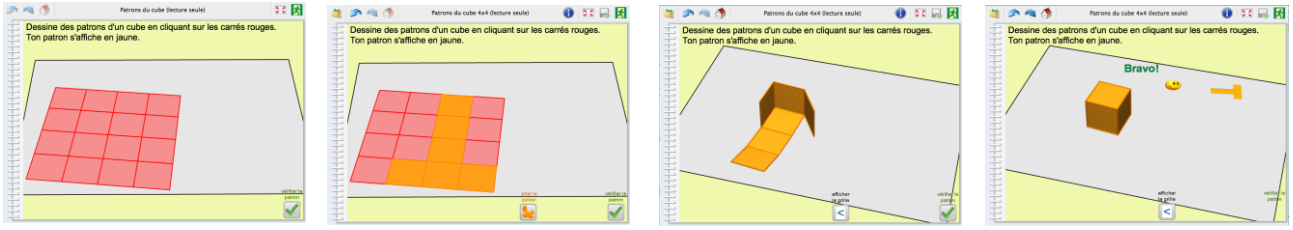


Figure 6. Construction et pliage d'un patron de cube à partir d'un quadrillage à mailles carrées de dimension 4 x 4.

La première page de travail présente le quadrillage et invite l'élève à sélectionner des carrés pour constituer un patron de cube (figure 6, à gauche). L'élève crée un assemblage en sélectionnant des carrés (figure 6, deuxième en partant de la gauche), puis commande le pliage virtuel en utilisant le bouton « patron ». Sa sélection plane de carrés est alors transformée en une surface en 3D dont chaque face carrée peut être « déplacée dans l'espace », en pivotant autour d'une de ses arêtes et ajustée aux autres faces (figure 6, troisième en partant de la gauche). Lorsque l'élève demande l'évaluation, si l'assemblage construit constitue un patron, un smiley s'affiche et le patron plan, en taille réduite, s'affiche en tournant (figure 6, à droite). Chaque patron identifié par l'élève reste affiché à l'écran et permet d'accéder à une page de travail dédiée à cette forme de patron. Plusieurs manipulations différentes du patron sont alors possibles, notamment sa reconstruction à partir de carrés que l'élève assemble (figure 7).

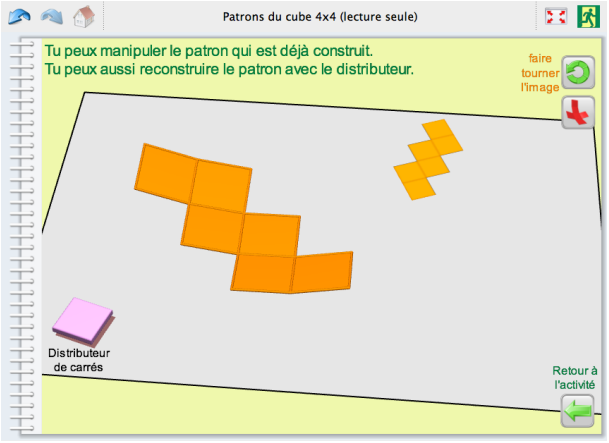


Figure 7. Page du patron en escalier qui permet à l'élève de faire tourner le patron, de le replier et de le reconstruire à partir de carrés. Cette page n'est accessible que lorsque l'élève a construit une première fois ce patron dans la première page.

Une dernière page du cahier propose l'outil patron et un distributeur de carrés (de la même taille que les mailles du quadrillage, figures 2 et 3) que l'on peut assembler librement pour faire un patron. Il n'y a pas de contrainte liée au quadrillage ni de validation de patron dans cette page.

Seuls dix des onze patrons sont manipulables dans ce cahier. Le patron formé de deux rangées de trois carrés nécessite un quadrillage d'au moins 5 x 4 mailles carrées.

II - LES UTILISATIONS EN CLASSE

1. Le test dans une classe de CM2

Nous avons mené le premier test du cahier « Patrons du cube » dans la classe de CM2 de Jean-Pierre Rabatel, en février 2013. Nous avons utilisé la version du cahier précédemment décrite. Notre objectif n'était pas que les élèves apprennent ce qu'est un patron, ni de construire la notion de patron d'un polyèdre. La notion de patron est un pré-requis. L'enjeu était de faire apparaître les caractéristiques d'un patron du cube : nombre et nature des faces et les différents agencements possibles des faces, ce qui repose sur la possibilité de plier et déplier concrètement ou mentalement les assemblages. Les élèves de cette classe avaient déjà utilisé la géométrie dynamique et étaient habitués à l'utilisation des ordinateurs.

1.1 Organisation

Nous avons construit la séance pour étudier l'articulation entre le travail papier-crayon, l'utilisation des Polydron et celle du cahier Cabri Elem. L'enseignant a débuté la séance en classe entière par une discussion orale sur les patrons du cube destinée à raviver les connaissances antérieures. Sans représentations, dessins ou autres objets, l'enseignant a demandé aux élèves s'ils savaient ce qu'est un patron du cube ; les élèves ont acquiescé, puis il a posé la question : « Combien pouvez-vous trouver de patrons du cube ? ». La classe a alors été partagée en deux groupes qui ont travaillé alternativement en salle informatique avec le cahier (figure 8) et en salle de classe avec les Polydron (figure 9), sans bilan ni validation par l'enseignant entre les deux phases.

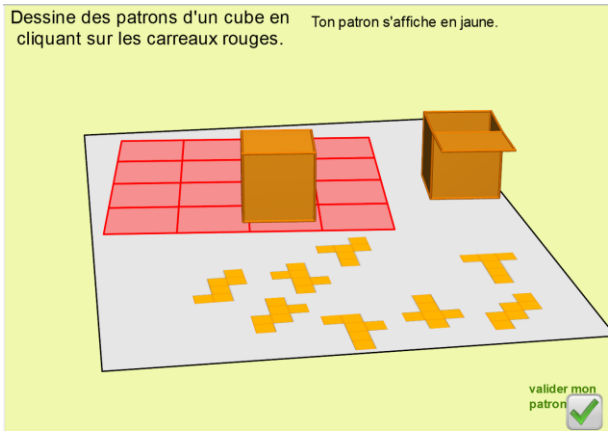


Figure 8. Image écran de la page 1 du cahier au cours de l'activité de l'élève.



Figure 9. Elève construisant un patron de cube avec des Polydron.

Les deux outils n'étaient pas disponibles simultanément afin de pouvoir observer les changements provoqués par l'un des environnements sur les procédures mises en œuvre et les résultats établis avec l'autre environnement. Pour terminer, un temps de bilan sur les différents patrons du cube et les caractéristiques d'un assemblage constituant un patron du cube (six faces, des faces carrées, des assemblages particuliers de faces) en classe entière a été réalisé.

Chaque élève du groupe qui a commencé par le cahier « Patrons du cube » disposait d'un ordinateur et avait pour objectif de construire plusieurs patrons du cube (des patrons différents). Les élèves de l'autre groupe travaillaient en binômes, avec des pièces carrées et rectangulaires du matériel Polydron mises à leur disposition dont ils pouvaient choisir librement le nombre et la forme. Leur objectif était de trouver plusieurs patrons du cube à l'aide des pièces du matériel Polydron mais aussi de les représenter sur une feuille format A4 de papier quadrillé, ce qui n'était pas demandé pour le groupe travaillant avec l'outil informatique. L'intérêt d'une représentation papier des patrons identifiés à l'aide des Polydron est de pouvoir ensuite les construire dans l'environnement informatique, de les replier et déplier à nouveau et de constater qu'ils sont éventuellement identiques à une transformation près (symétrie orthogonale ou rotation). Le document papier permet de garder l'information relative aux patrons, telle que le nombre de carrés, le type d'assemblage et l'orientation dans la feuille. Il n'a pas été fait de bilan ou de mise en commun après la première phase de travail et avant que les deux groupes ne passent à l'autre phase (les élèves ayant travaillé avec les Polydron utilisent ensuite le cahier d'activité informatisé « Patrons » et ceux ayant utilisé le cahier « Patrons » travaillent alors avec les Polydron).

Nous avons fait l'hypothèse que l'ordre dans lequel était effectué le travail, d'abord le cahier informatisé puis les Polydron ou le contraire, allait provoquer un travail différent chez les élèves.

Les élèves qui commencent par le cahier informatisé n'ont pas à prendre en compte la forme des faces car elle est donnée par l'environnement informatique. Cela entraîne que cette caractéristique des patrons du cube ne pourra être identifiée qu'au moment du travail sur les Polydron. En revanche, ils auront rencontré la question des patrons identiques mais dans différentes positions. Enfin, ils n'auront pas pu construire tous les patrons du cube. Cependant, comme ils ne connaissent pas le nombre de patrons du cube, cela ne devrait pas être pris en compte par ces élèves.

Les élèves qui commencent par le matériel Polydron auront, quant à eux, identifié la nécessité de choisir des faces carrées, car les assemblages utilisant des faces rectangulaires auront été invalidés soit lors de l'assemblage, soit lors du pliage. En revanche, ils auront pu construire et reproduire des patrons identiques dans des positions différentes sans que cela soit invalidé. Ils auront également ainsi pu obtenir plus de onze patrons. Au moment de l'utilisation du cahier informatisé, ils pourront alors déterminer quels sont les patrons identiques et questionner l'existence du onzième patron. En effet, lorsqu'un patron déjà construit et déjà validé est à nouveau reconstruit

par l'élève, la rétroaction du cahier consiste à mettre en évidence le patron en question, affiché en taille réduite sur la droite (cf. figure 6 à droite) et à le faire pivoter. En cliquant sur cette image de patron, l'élève accède à une page dédiée à ce patron. Il peut le construire, le replier et obtenir le cube puis le déplier à sa convenance. Il peut à nouveau construire les deux versions qu'il pensait distinctes, notamment les versions symétriques. L'intérêt de faire prendre conscience à l'élève qu'il s'agit de deux patrons considérés comme identiques, réside dans le pliage et dépliage mental que doit effectuer l'élève et qu'il peut accompagner d'un pliage et dépliage à l'écran.

Nous nous étions donné comme tâche de repérer les difficultés relatives à la prise en main des fonctionnalités de Cabri Elem, telles que l'usage de l'outil patron, mais aussi les réactions ou attitudes des élèves face aux rétroactions de l'environnement. Lors de la mise en route de la situation, le patron en forme de croix latine a été proposé par les élèves comme étant le patron connu du cube. Pour certains d'entre eux c'était d'ailleurs le seul.

1.2 Observations du groupe débutant avec le cahier « Patrons du cube »

Les élèves, travaillant d'abord sur le cahier « Patrons du cube », ont rencontré très rapidement des problèmes liés à la mise en œuvre des fonctionnalités de l'environnement :

- face à la lenteur de réaction des postes informatiques en réponse aux actions des élèves, ces derniers ont multiplié les clics, provoquant des rétroactions incohérentes ;
- les difficultés de manipulation des outils disponibles sur la page du cahier ont été nombreuses et nous ont fait prendre conscience qu'une prise en main des fonctionnalités du cahier, préalable à l'activité, était nécessaire pour pouvoir ensuite aborder la situation des patrons ;
- l'interprétation de certaines manipulations réalisées à l'interface a laissé les élèves perplexes comme les enseignants. Par exemple, il était possible de transformer l'ensemble du quadrillage à mailles carrées 4 x 4 en un assemblage et c'est alors le quadrillage entier qui commençait à se replier. Pour sortir de cette situation, il aurait fallu supprimer le quadrillage complet, ce que n'ont pas osé faire les élèves et les enseignants. Ils ont préféré relancer le cahier quitte à perdre le travail déjà accompli.

Ces dysfonctionnements ont rendu nécessaire de retravailler la conception de certains objets dans l'environnement Cabri Elem, ce qui nous a donné l'occasion d'optimiser le fonctionnement du cahier pour les ordinateurs peu puissants qui constituent l'essentiel de l'équipement des écoles.

En ce qui concerne les rétroactions fournies par l'environnement informatique, l'identification des patrons identiques mais présentés et positionnés différemment dans le quadrillage à mailles carrées 4 x 4 a été facilitée par les rétroactions du logiciel. Cela constitue un apport très net pour les élèves. C'est particulièrement visible dans le cas des élèves ayant commencé avec le matériel Polydron. Dans la phase avec le matériel, ils ont trouvé différents patrons qui s'avèrent être les mêmes (figure 10). Ils ne s'en sont rendus compte qu'au moment de l'utilisation du cahier informatisé et ont alors rectifié leur proposition de patrons.

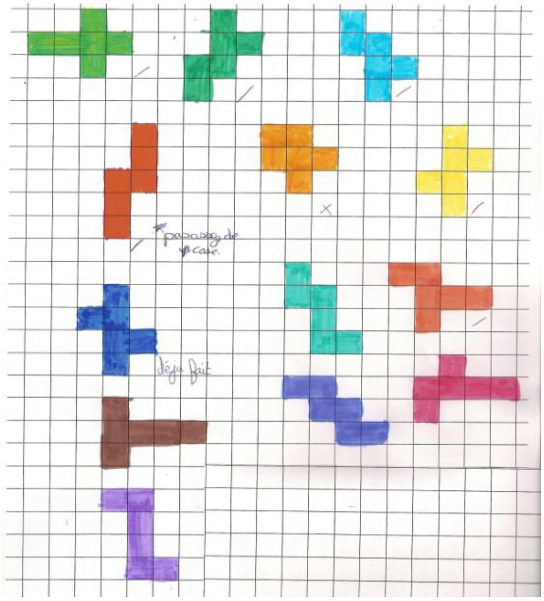


Figure 10. Production d'élève : treize assemblages de six carrés sont dessinés, deux correspondent à un même patron et un n'est pas un patron.

Comme prévu, la question de la forme des faces des patrons du cube ne s'est pas posée pour les élèves travaillant d'abord avec le cahier informatisé. En effet le choix de travailler sur un quadrillage à mailles carrées ou avec un distributeur de carrés ne permet pas de poser le problème de la forme des faces du cube. L'enjeu du travail est la nature de l'assemblage des carrés et la forme globale des patrons. En ce qui concerne le nombre de faces carrées, égal à six, nous avons pu observer que ce n'était pas un critère disponible chez les élèves au début de la séance. Cependant, il a nécessairement très vite émergé pour tous les élèves travaillant sur le cahier informatisé. En effet, le cahier produit des rétroactions indiquant qu'il y a « trop » ou « pas assez » de carrés dans la proposition de l'élève.

Lors de l'utilisation du matériel Polydron par les élèves ayant débuté avec le cahier informatisé, nous avons vu qu'ils observaient attentivement les assemblages plans de pièces tout en les faisant pivoter, ce qui n'était pas le cas des élèves ayant débuté avec ce matériel. Il semble donc qu'ils se réfèrent à leurs manipulations sur le cahier « Patrons du cube ». À noter, que le retournement, non réalisé par le logiciel, ne pose pas de problème non plus.

1.3 Observations du groupe débutant avec le matériel Polydron

Pour le groupe d'élèves ayant commencé par le matériel Polydron, nous avons pu observer deux types de procédures initiales :

- les procédures qui prennent en compte le critère du nombre de faces : certains élèves ont pris une poignée de faces et d'autres n'en ont pris systématiquement que six ;
- les procédures qui prennent en compte la forme des faces : la plupart des élèves ont pris des faces carrées et rectangulaires, seules ces deux formes étant disponibles.

Avec le matériel Polydron, les élèves ont rencontré des difficultés dans la construction du cube. En particulier, le matériel invalidait certains assemblages mais ne permettait pas à l'élève de savoir ce qui posait problème : la nature des faces ou la façon dont elles étaient assemblées. Lorsqu'un patron était obtenu, les élèves devaient en garder une trace écrite et le représenter à main levée sur une feuille quadrillée. Nous avons alors constaté que, la plupart du temps, les doublons correspondant à des patrons identiques mais dans une position différente sur la feuille n'ont pas été repérés et ont été considérés par les élèves comme des patrons différents.

Au cours de cette phase de travail, l'enseignant a proposé à certains élèves de partir d'un cube fabriqué avec le matériel Polydron assemblé devant eux pour l'ouvrir en déclipsant les faces, le mettre à plat et obtenir un patron. Cette démarche n'est pas possible avec le cahier « Patrons du cube » tel qu'il est conçu actuellement.

Chaque binôme du groupe débutant avec le matériel Polydron a représenté environ neuf patrons dont cinq à six différents. Sur l'ensemble des élèves de ce groupe, les onze patrons du cube ont été trouvés. Lors du passage de ce groupe sur le cahier informatisé, les élèves ont rencontré les mêmes difficultés liées à la manipulation et au logiciel que les élèves de l'autre groupe. Ils ont utilisé le cahier d'abord pour vérifier les patrons dessinés sur leur feuille (à partir des constructions qu'ils avaient réalisées avec le matériel Polydron) et se sont alors rendus compte des doublons qu'ils ont éliminés. La question du nombre de faces semble une question réglée pour le groupe à l'issue du travail avec le matériel Polydron avant la deuxième phase de travail. Il apparaît donc que l'utilisation du cahier informatisé permette de stabiliser la connaissance du nombre de faces du cube.

Du point de vue des difficultés d'instrumentation de l'environnement, on observe que quelques élèves se contorsionnent, tournent la tête ou se penchent pour mieux voir, alors que le logiciel leur permet de faire tourner l'image du cube pour en voir les différentes faces. Il est donc nécessaire de prendre en charge explicitement la présentation de cette fonctionnalité, en même temps que l'usage de l'outil « patron ».

L'impossibilité de réaliser le patron constitué de deux rangées de trois carrés a beaucoup perturbé les élèves qui l'avaient identifié avec le matériel Polydron. Nous les avons incités à utiliser la page présentant le distributeur de carrés pour qu'ils puissent construire ce patron et le valider au moins perceptivement.

L'enjeu représenté par ce onzième patron a pris une place importante dans le temps collectif de retour avec la classe entière. L'utilisation de la page avec le distributeur de carrés a permis de construire, plier et valider ce dernier patron pour toute la classe.

1.4 Conclusion sur les modifications qu'il faut apporter au cahier

Notre hypothèse sur l'utilisation complémentaire des deux environnements de travail pour la construction des critères qui font qu'un assemblage de carrés est un patron du cube paraît être validée.

Cette première mise en situation du cahier « Patrons du cube » et son utilisation avec une classe a permis de mettre en évidence les modifications à apporter tant du point de vue technique que pédagogique. C'est ainsi qu'il est apparu comme indispensable de prévoir une première page d'accueil avec laquelle l'élève puisse découvrir le fonctionnement des outils mis à sa disposition pour ensuite aborder spécifiquement l'activité.

2. Le test dans une classe de 6ème

Nous avons réalisé un second test du cahier « Patrons du cube » dans la classe de sixième d'Anne Calpe en mai 2013. Nous avons utilisé une nouvelle version du cahier prenant en compte les améliorations identifiées comme étant nécessaires après le test précédent. Les élèves de sixième, comme les élèves de CM2, avaient déjà utilisé un logiciel de géométrie dynamique. Ils avaient aussi l'habitude de la vidéo-projection sur TBI des figures manipulées par le professeur ou les élèves devant le groupe classe.

2.1 Les modifications du cahier

Nous avons construit une version du cahier « Patrons du cube » sur un quadrillage de dimension 5 x 5 qui permet aux élèves de créer et manipuler les onze patrons. Nous avons aussi construit une page d'accueil (figure 11) qui présente le cahier et met à disposition l'outil « patron ». Cette page permet de tester les manipulations possibles avec l'outil patron sans pour autant proposer la tâche à résoudre qui n'apparaît qu'à la page suivante. Cette page est utilisable par le professeur ou bien

par les élèves seuls. Elle a servi à la présentation du logiciel lors de cet atelier. Le rôle de cette page est de permettre à l'utilisateur d'initier la genèse instrumentale de l'outil « patron » (Rabardel 1995).

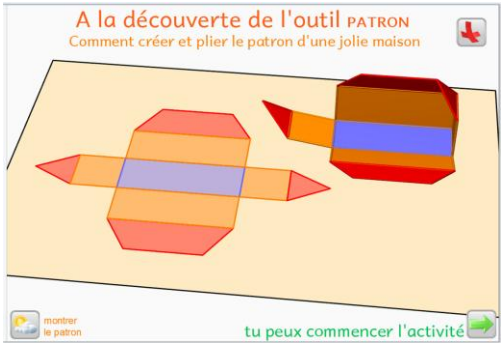


Figure 11. Page d'accueil du cahier « Patrons du cube » qui propose un patron à replier. Il ne s'agit pas d'un patron de cube.

2.2 Modification du déroulement de la séance

Pour cette expérimentation en classe de sixième, un travail préalable sur les pré-requis avait été proposé à faire à la maison. Il s'agissait de construire un dé en utilisant une feuille A4 blanche. Sans utiliser le mot patron, l'enseignant a demandé à ses élèves de tracer une figure et de la découper avec l'objectif de la replier une fois de retour en classe afin d'obtenir le dé. Les élèves pouvaient replier leur patron mais avaient le conseil de le remettre à plat pour le transporter facilement.

Pendant la séance observée, les élèves ont travaillé en groupe de cinq ou six sur un espace constitué d'un regroupement de tables. Chaque groupe disposait d'une collection de pièces du matériel Polydron et d'un ordinateur portable avec le cahier « Patrons du cube ». Le groupe avait pour tâche de recenser les différents patrons du cube en les dessinant sur une seule feuille de synthèse.

2.3 Observations

Le travail préliminaire confirme que la croix latine est le seul patron envisagé par la plupart des élèves. Lors de la collecte des patrons de dés, une seule élève avait proposé un autre patron (en forme de T, figure 12).



Figure 12. Présentation au tableau des patrons de dé fabriqués par les élèves en préparation à la séance de travail sur les patrons du cube. En bas sur la droite, le seul patron en forme de T.

La validation des patrons s'est faite par pliage. La proposition en T a permis de renvoyer à la classe la question des différents patrons possibles et les élèves se sont investis dans le problème proposé (notons que l'enseignant avait apporté également un patron de dé différent de la croix latine, qu'il n'a pas eu besoin d'utiliser).

2.4 Utilisation simultanée des pièces du matériel Polydron et du cahier d'activité informatisé

Nous avons émis l'hypothèse que l'utilisation consécutive ou complémentaire du matériel Polydron et du cahier « Patrons du cube » contribue à l'identification des caractéristiques d'un patron de cube par les élèves. Cette hypothèse a également été validée lors du test en sixième, pour lequel les élèves avaient à disposition simultanément les pièces du matériel Polydron et le cahier « Patrons du cube » (figures 13 et 14).





Figures 13 et 14. Travail de groupe des élèves de sixième. Ils utilisent simultanément le cahier Cabri Elem et les pièces du matériel Polydron.

D'une façon semblable dans tous les groupes, ils ont d'abord collaboré en se partageant le travail. Certains élèves ont exploré le problème avec le matériel Polydron, tandis que d'autres ont utilisé le cahier « Patrons du cube » pendant qu'un dernier élève recensait les différents patrons obtenus et les dessinait sur la feuille de synthèse. Assez rapidement, les patrons obtenus avec le matériel Polydron ont été testés avec le cahier pour vérifier s'ils n'étaient pas déjà identifiés (élimination des doublons). De fait, dans tous les groupes, les élèves ont rapidement délégué au cahier « Patrons du cube » un rôle de validation.

III - L'ATELIER ET LES DÉBATS

Les participants à l'atelier ont tout d'abord utilisé le cahier « Patrons du cube » dans sa version avec le quadrillage 5 x 5 et la page d'accueil (figure 11), celle de notre test avec les élèves de sixième. Cela leur a permis de prendre en main les outils nécessaires, en particulier l'outil patron. Les difficultés d'instrumentation rencontrées avec les élèves ont également été vécues par les participants. Par exemple, lors de l'utilisation de l'outil patron qui permet de replier dans l'espace un assemblage plan de carrés, l'utilisateur ne perçoit pas immédiatement que la position de la souris sur l'une des faces de l'assemblage au moment de la « transformation en solide » détermine la face qui restera dans le plan. De même, lorsque l'utilisateur saisit le patron, s'il place sa souris au milieu d'une face, il fait pivoter la face autour de son arête, mais s'il place sa souris sur un côté du patron, il translate tout le patron dans la page.

Après cette phase de découverte, l'analyse des ressources a porté sur les différentes manipulations de patrons possibles, les variables didactiques de la situation et les rétroactions implémentées.

1 Les différentes manipulations d'un patron du cube permises par le cahier

La question posée aux participants était : quelles différentes façons de travailler sur les patrons du cube pouvez-vous identifier dans ce cahier ? Plus précisément pour produire un patron, pour le manipuler etc.

Différentes façons de travailler sur les patrons sont possibles dans le cahier. L'utilisateur peut construire un patron de deux façons différentes :

- soit en cliquant sur des carrés du quadrillage pour les sélectionner et pour obtenir un assemblage plat, le patron est alors un certain sous-ensemble de carrés dans une grille ;
- soit en assemblant les carrés issus d'un distributeur.

L'utilisateur peut visualiser le passage 2D à 3D et plier et déplier les patrons obtenus, ce qui constitue un apport particulier du logiciel Cabri Elem par rapport à d'autres environnements

informatiques. Dans ce cahier, l'utilisateur peut faire tourner les patrons en faisant pivoter le plan qui les porte, c'est-à-dire modifier son point de vue sur le patron. Par ailleurs, les images des patrons déjà trouvés tournent automatiquement. L'utilisateur peut faire se superposer deux patrons. En revanche, il ne peut pas obtenir directement la transformation par symétrie axiale d'un patron (retournement) ou bien compléter un patron qu'il a déjà commencé à replier (il doit détruire le patron et recommencer). Ces impossibilités résultent du croisement des contraintes et potentialités de l'environnement et de nos exigences en terme de validation. Par exemple, il serait facilement possible d'obtenir le symétrique d'un patron, mais alors pour l'instant impossible de valider ou invalider ce nouveau patron. Ces différentes façons de travailler les patrons dans le cahier participent à l'enrichissement des représentations que se font les élèves de l'objet patron.

Lors de leurs manipulations des patrons dans le logiciel, les participants ont remarqué que dans le cas d'un assemblage de carrés ne correspondant pas à un patron parce qu'ayant des faces en double, les faces se superposent parfaitement à l'écran quand on les replie. Cela peut amener un élève à ne pas invalider un assemblage incorrect. Ce comportement des faces du patron dans le logiciel ne semblait pas « réaliste » pour les participants à l'atelier. La discussion a permis de considérer que les comportements lors du pliage et dépliage d'un patron, correct ou pas, sont différents suivant que le patron est découpé sur papier ou réalisé avec des pièces du matériel Polydron ou assemblé dans le logiciel. Avec le papier, les faces et les arêtes peuvent se déformer (ne pas rester planes ou rectilignes), ne pas s'agencer parfaitement arête contre arête, les sommets ne pas être bien unifiés et les deux carrés d'une face doublée peuvent être superposés. Le papier a une épaisseur et une couleur qui ne sont pas des propriétés d'un patron et, lors du pliage et dépliage, du scotch et des ciseaux sont nécessaires. Avec les pièces de Polydron, les arêtes ne sont pas rectilignes, les faces ont une épaisseur de quelques millimètres et les sommets sont difficiles à localiser. Lors du pliage, la superposition de deux faces n'est pas possible mécaniquement (cela provoque le déboîtement des faces). Une fois le cube formé, il peut être déplié pour obtenir un autre patron que celui de départ (comme avec le papier si l'on utilise ciseau et scotch). Avec le logiciel, les faces n'ont pas d'épaisseur contrairement aux arêtes, les agencements des arêtes et des sommets sont perceptivement parfaits. Aucun de ces patrons n'étant « réaliste », la question « Qu'est-ce que la réalité d'un patron ? » a donc été débattue. Il semble important que les élèves, comme les enseignants, manipulent différentes représentations d'un objet, chaque représentation ayant ses propres caractéristiques, certaines cohérentes avec les propriétés mathématiques en jeu, d'autres non, comme le traduit l'idée de domaine de fonctionnement d'une représentation de Laborde et Capponi (1994). Il est alors nécessaire d'aider les élèves à mobiliser différentes représentations d'un même objet mathématique. De ce point de vue, le logiciel présenté dans l'atelier a un grand intérêt car il propose une représentation complémentaire et différente des objets en 3D. Le logiciel semble être une passerelle entre la manipulation concrète, celle d'un geste sur un objet réel, et la manipulation abstraite, celle d'un geste de la pensée sur un objet immatériel ou virtuel, conduisant à l'abstraction.

2 À propos de la variable didactique « taille du quadrillage »

La conception du cahier dans l'environnement Cabri Elem et le choix de pouvoir valider les propositions de patrons des élèves nous ont conduit à introduire un quadrillage. Il est clairement apparu que la « taille du quadrillage » est une variable didactique. En effet, le changement de la taille influence les stratégies de résolution : tous les patrons sont possibles ou pas, plusieurs positions d'un même patron sont possibles ou pas, etc. Ces différentes valeurs induisent des scénarios pédagogiques différents à la disposition de l'enseignant.

Mais il n'était pas évident de mettre en relation les valeurs de cette variable didactique et la nature des apprentissages relatifs aux patrons qui pourraient en découler.

Notre premier choix a été celui d'un quadrillage à mailles carrées de 4 x 4 mailles (quadrillage carré) afin de ne pas induire une « orientation » des patrons chez les élèves. En effet, un quadrillage 3 x 5 serait plus économique du point de vue informatique, car c'est le plus petit qui permette de construire tous les patrons. Mais il restreint beaucoup les explorations des élèves

relatives à l'orientation du patron dans le quadrillage. Nous avons donc conçu le premier cahier à partir d'un quadrillage 4 x 4 qui permettait, pour nous, en tant que concepteurs, d'explorer la complexité du travail à réaliser et de faire des premiers tests avec les élèves. Nous avons alors observé que le travail sur un quadrillage 4 x 4 conduit les élèves à imaginer des stratégies différentes que la réalisation du patron pour identifier le onzième patron, celui que le quadrillage ne permet pas de construire. De l'avis des participants à l'atelier, l'objectif d'identification des onze patrons n'est pas forcément souhaitable pour les écoliers, ainsi le quadrillage 5 x 5 permettant l'exhaustivité n'est pas en soi une nécessité pour l'école primaire. Nous avons réalisé le cahier à partir du quadrillage 5 x 5, sur lequel tous les patrons sont réalisables mais il n'a pas encore été expérimenté avec des élèves.

Nous souhaitions aussi, à l'origine, pouvoir faire travailler les élèves sur un quadrillage 6 x 6, voire plus grand, car ce sont ceux qui autorisent tous les assemblages possibles des six carrés, y compris les six carrés en ligne. Mais ces choix se heurtent à des contraintes techniques que nous avons choisi de ne pas résoudre tant que l'analyse didactique ne nous en montrait pas la nécessité. Cette question de l'intérêt didactique d'un quadrillage 6 x 6 n'a pas été reprise par les participants à l'atelier.

Une dernière proposition était celle d'une paramétrisation des dimensions de la grille au choix de l'élève ou de l'enseignant. Cette idée nous permet d'imaginer d'autres versions de cahiers à développer sur le même thème des patrons de solides, différentes paramétrisations pouvant aller jusqu'à un travail sur les polyèdres.

3 À propos des rétroactions

La troisième question posée aux participants à l'atelier à propos de l'analyse du cahier a concerné les rétroactions : quelles différentes rétroactions identifiez-vous ?

Nous avons voulu attirer l'attention des participants sur le fait que l'environnement de conception Cabri Elem Creator donne aux concepteurs du cahier un choix important au niveau des rétroactions, même si tout n'est pas possible. Or le choix de rétroactions est primordial pour l'apprentissage. En effet, dans la théorie des situations (Brousseau 1998), une rétroaction est construite à partir de ce que renvoie l'environnement à l'action des utilisateurs.

On peut identifier trois types de rétroactions lorsqu'un élève utilise un cahier Cabri Elem, par exemple le cahier « Patrons du cube » :

- les rétroactions liées à la manipulation directe : le changement de couleur des carrés sélectionnés, l'affichage d'un nouveau point de vue sur la figure lors du changement d'orientation du plan de travail, la transformation en patron, le pliage et dépliage d'un patron, l'agencement précis des faces (lorsque deux arêtes de même longueur sont suffisamment proches l'une de l'autre, elles s'associent automatiquement en faisant correspondre leurs extrémités comme si elles étaient aimantées), le déplacement des patrons dans la fenêtre. De fait, tous les effets graphiques (statiques ou dynamiques) ou sonores en retour de l'action de l'utilisateur sont des rétroactions à partir desquelles les deux autres types de rétroactions sont construits.
- les rétroactions relatives à la stratégie : ce sont les rétroactions que renvoie le système à propos de la stratégie de résolution du problème mise en œuvre par l'élève. Par exemple les messages « trop de carrés » ou « pas assez » ou « mal positionnés » ou encore le message « tu as déjà trouvé ce patron ». Ces messages sont déterminants pour l'évolution des stratégies de résolution des élèves.
- les rétroactions d'évaluation qui indiquent si une solution a été atteinte ou pas. Par exemple le message « ce n'est pas un patron » ou bien le message « bravo », ou encore l'affichage d'une image du patron qui tourne.

Des débats au sein de l'atelier à propos des rétroactions ont d'abord concerné les messages à propos du nombre de carrés sélectionnés par l'élève. Sont-ils à retirer ou modifier ? Il s'agit d'une rétroaction liée à la stratégie mise en œuvre par l'élève. Cette question mérite d'être posée car nous

avons observé que lorsqu'une erreur relative au nombre de faces dans le patron est commise, la rétroaction conduit les élèves à ne pas terminer l'action en cours. Ils font confiance au logiciel, comme ils feraient confiance au professeur, et par conséquent ils ne vérifient pas grâce au pliage de l'assemblage ainsi créé si le nombre de faces choisi convient ou pas. Ils choisissent rapidement des carrés jusqu'à obtenir la validation comme ils pourraient le faire avec un jeu sur une console. Ces messages semblent ainsi favoriser une stratégie de choix des carrés rapide et aléatoire, ce qui n'est évidement pas le but recherché. Les participants de l'atelier ont suggéré qu'il fallait faire une rétroaction moins précise, telle que « tu n'as pas choisi le bon nombre de carrés » qui aurait un rôle stimulant pour la recherche de l'élève sans trop la réduire. Nous implémenterons cette proposition dans les futures versions du cahier.

Notre choix d'afficher le message final « Bravo, tu as trouvé les 11 patrons du cube » a également été discuté. Il rejoint la question de la recherche d'exhaustivité. Si ce n'est pas l'objectif d'apprentissage pour les élèves, mais le moyen de finaliser la réalisation, le pliage et le dépliage de plusieurs patrons, cet objectif est intéressant et la rétroaction justifiée. Cependant, nous nous interrogeons sur la façon dont cela pourra être compris par les enseignants.

L'un des souhaits exprimés par plusieurs participants a été de pouvoir suspendre l'action de l'élève pour l'obliger à entrer dans un processus d'anticipation. C'est une caractéristique des situations didactiques nécessaire à l'apprentissage. C'est par ailleurs un de nos objectifs lors de la conception des cahiers informatisés. Nous essayons d'organiser les cahiers, pour que, dans une première phase de travail, l'élève puisse mettre en œuvre facilement tout type de stratégies, y compris des successions d'essais-erreurs peu coûteuses ; puis dans une deuxième phase de travail, l'environnement oblige l'élève à anticiper sur l'action avant de pouvoir la réaliser et valider ou invalider le résultat. Cependant, si nous avons pu implémenter ce principe dans d'autres cahiers, pour d'autres thèmes, nous n'avons pas encore réussi à le faire à propos des patrons de cube. Cela fait partie des objectifs d'évolution des cahiers.

4 Diffusion du cahier et prolongements envisagés

La complexité de la conception des cahiers Cabri Elem et le temps de travail nécessaire à la production d'un cahier finalisé sont apparus clairement comme un frein à ce que les enseignants s'emparent du logiciel pour produire des activités telles que celle proposée. L'orientation actuelle du projet MaDyP est d'identifier quelle est la part du processus de conception qu'il serait possible et acceptable pour un enseignant de prendre en charge, avec quels outils pour l'assister et lui permettre de modifier et d'adapter le cahier à ses propres contraintes d'enseignement (idée de genèse documentaire de l'enseignant (Poisard, Bueno-Ravel et Gueudet 2011)).

Ces difficultés ont également des conséquences sur l'utilisation du cahier « Patrons du cube » finalisé. En effet, il semble peu probable que les enseignants se lancent avec leurs élèves dans l'utilisation de ce cahier et investissent du temps dans la prise en main de l'environnement s'ils ne peuvent pas poursuivre avec d'autres activités utilisant le même logiciel. Il faut donc produire un ensemble de ressources suffisamment riche et complet pour que les enseignants puissent s'engager.

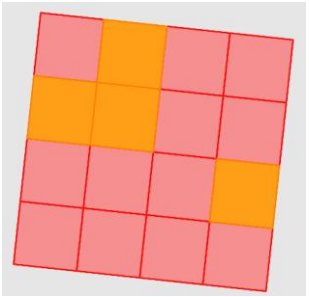


Figure 15. Un début de patron à compléter.

Plusieurs autres cahiers pourraient compléter le travail sur la notion de patron. Par exemple, durant les tests nous avons observé que la forme carrée des faces n'est pas une évidence pour tous les élèves lorsqu'ils utilisent des pièces du matériel Polydron. Pour approfondir ce point, il serait intéressant de proposer un cahier qui offre sur une même page des distributeurs de carrés et de rectangles, voire d'autres polygones. Ce cahier constituerait également un prolongement vers d'autres patrons que ceux du cube, en particulier ceux du pavé droit. Nous avons aussi l'idée d'un cahier qui propose des grilles avec

certains des carrés déjà sélectionnés (figure 15), la tâche de l'élève étant de compléter la sélection afin d'obtenir le patron d'un cube.

Les participants ont également fait des propositions :

- choisir des couleurs différentes pour les faces parallèles du cube : ce n'est pas réalisable pour le moment du point de vue logiciel, de plus cette possibilité existe déjà et fonctionne de façon assez satisfaisante avec d'autres matériels (papier-crayon ou Polydron). L'idée n'est pas poursuivie pour le moment, l'apport du logiciel n'étant pas immédiatement visible.
- créer un compteur du nombre de demandes d'évaluation : cette proposition semble être une piste intéressante pour induire un contrôle sur le processus « essai-erreur ». Nous envisageons de l'implémenter rapidement.
- obliger l'élève à passer en 3D et à replier le patron avant d'en demander l'évaluation : cela semble en effet souhaitable mais nous n'avons pas de solution technique en vue dans l'immédiat. Une suggestion est de lancer des vidéos montrant différentes façons de plier le patron lorsque l'évaluation est demandée (si le patron est correct la vidéo montrerait comment fermer le patron et avec différentes façons de le faire, si le patron est incorrect, la vidéo montrerait les faces qui se superposent ou les trous).

IV - CONCLUSION

Un des objectifs du projet MaDyP est de créer des ressources utilisant les technologies numériques pour permettre aux élèves d'explorer les objets mathématiques, de les manipuler, les construire et de valider leur travail.

Le logiciel Cabri Elem offre la possibilité de représenter des objets géométriques en 2D et en 3D, avec un passage continu de l'un à l'autre. Nous avons voulu étudier les potentialités de ces fonctionnalités pour le domaine de la géométrie dans l'espace et la question des patrons des solides figurant dans les programmes officiels. La conception de cahiers d'activité informatisés « Patrons du cube » et leurs tests en classe ont permis d'étudier les apports et les limites de la technologie pour le travail de cette notion. La possibilité de manipuler un grand nombre de patrons, de les plier et les déplier, est effectivement utilisée par les élèves. Cependant, l'existence d'une validation des patrons construits, par le système, conduit certains élèves à ne plus réaliser les pliages. Une évolution des cahiers pour inciter les élèves à effectuer les pliages ou à ne plus le faire lorsqu'ils sont capables d'anticiper le résultat du pliage s'avère nécessaire.

Cependant, utilisé en articulation avec du matériel Polydron, le cahier « Patrons du cube » a montré qu'il pouvait constituer une transition entre la manipulation concrète d'objets et la manipulation plus abstraite de représentations, favorisant les processus de conceptualisation. Les observations des usages en classe montrent que les apports de l'une et de l'autre de ces activités lors d'une utilisation consécutive ou simultanée contribuent à la construction de connaissances relatives aux patrons du cube chez les élèves.

Ce cahier « Patrons du cube » peut être utilisé de diverses manières par les enseignants qui peuvent l'intégrer dans leur enseignement à la fois comme une activité de découverte et de recherche ou bien comme une activité de réinvestissement.

V - BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU, G. (1998). Le contrat didactique, l'enseignant, l'élève, le milieu. In G. Brousseau & N. Balacheff (Eds.), *Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques, 1970-1990*. Grenoble : La pensée sauvage.

DOUAIRE, J., EMPRIN, F., & RAJAIN, C. (2009). L'apprentissage du 3D à l'école, Des situations d'apprentissage à la formation des enseignants. *Repères IREM*, n°77, 23-52.

LABORDE, C., & CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1.2), p.165-210.

LABORDE, C., & MARCHETTEAU, A. (2009) L'incontro tra reale e virtuale in Cabri Elem per attività matematiche nella scuola primaria, *La matematica e la sua didattica,* 23, n°1, 19-34.

POISARD, C., BUENO-RAVEL, L., & GUEUDET, G. (2011). Comprendre l'intégration de ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 151-189.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies : une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

SOURY-LAVERGNE, S. & CALPE, A. (2012) Mathématiques dynamiques pour l'école primaire et mallettes de ressources, in Aldon G. et al. (eds.) *Actes des Journées Mathématiques de l'IFÉ*, juin 2012.

SOURY-LAVERGNE, S., MASCHIETTO, M. (2013), À la découverte de la "pascaline" pour l'apprentissage de la numération décimale, in *Actes du XXXIX^{ème} Colloque de la COPIRELEM*, Quimper juin 2012.

BUTS & MOYENS D'UNE CONTINUITÉ DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMETRIE

François BOULE
MdC retraité
francois.boule@neuf.fr

Résumé
L'enseignement de la géométrie, dans l'enseignement français, est en déclin depuis les années 70. Il s'agit de retrouver l'intérêt, le sens et une pédagogie, d'une part pour les élèves, d'autre part pour les futurs enseignants. Des réflexions anciennes (Clairaut, Méray…) ou plus récentes permettre de reconstruire des éléments significatifs d'une culture géométrique et de les dérouler de l'école au collège et au lycée. Quelques-uns de ces thèmes sont proposés à la discussion : les aires, les pliages, les isométries, l'étude conjointe de l'espace et du plan, la perspective …

I - INTRODUCTION HISTORIQUE

L'objet de cet atelier n'est en aucune façon une nostalgie de la « vieille géométrie », à la mémoire de Ménélaüs et du bon vieux temps. La réforme « des mathématiques modernes » en 1970 a fait d'incontestables dégâts dont les brèches sont loin d'être colmatées (on dira sans doute dans dix ou vingt ans la même chose de la « réforme » de la formation des maîtres du quinquennat précédent).

Cela vaut une brève analyse.

Pour l'école primaire, en 1970, il s'est agi d'intégrer les travaux de Piaget ; les conséquences ont été un étalement de l'apprentissage du calcul, la fréquentation de structures logiques à l'école maternelle, un recul du calcul mental et un retrait de la géométrie (Piaget s'est beaucoup intéressé à la construction de l'espace, peu à la géométrie et confondait le plus souvent les deux termes).

Dans l'enseignement secondaire, le moteur n'est pas le même, quoiqu'on puisse trouver une origine commune aux deux (rencontre entre Piaget et Dieudonné en 1952). Il s'est agi de formaliser l'enseignement, d'ajouter un supplément de rigueur, de favoriser les structures (programme d'Erlangen) aux dépens des figures… Toutes choses qui ont un sens, mais qui témoignent en même temps d'une méconnaissance pédagogique et psychologique.

Ce que l'on se propose de chercher ici, ce n'est pas un retour aux sources, ni un sens de l'histoire, mais une façon d'enseigner. Enseigner la géométrie, ce n'est pas ouvrir un traité.

Qu'apporte la géométrie à l'éducation du citoyen ? Comment aborder les choses pour qu'elles aient un sens ? Tout apprentissage procède par paliers et réorganisation. Pas nécessairement du simple (point, ligne, surface…) au complexe, et probablement par approximation : la perception n'est pas immédiate, la rigueur est un cheminement, le plus souvent en va-et-vient (Gonseth, 1936).

La meilleure référence me semble être le chapitre du rapport Kahane (2002) sur l'enseignement des mathématiques, que j'approuve sans restriction, mais dont je ne suis pas sûr que ses conclusions aient bien inspiré les auteurs de programme. D'ailleurs il ne s'agit pas de suggérer (encore) des modifications de programme, mais d'abord d'inspirer un enseignement.

Ces questions ne sont pas nouvelles, et nous allons retrouver des analyses anciennes, augmentées de plus récentes.

1 Critiques de Clairaut sur l'enseignement de la géométrie

La critique vient de loin.

CLAIRAUT (1741) : « Il faut avouer que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'appliquer [à la Géométrie] viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée. On y

débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, et de principes préliminaires qui semblent ne promettre rien que de sec. […] Qu'Euclide se donne la peine de démontrer que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il est enfermé, on n'en sera pas surpris. Ce géomètre avait à convaincre des sophistes obstinés, qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes : il fallait donc qu'alors la géométrie eut comme la logique, le secours des raisonnements en forme pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. »

« La mesure des terrains m'a toujours paru ce qu'il y avait de plus propice à faire naître les premières propositions de géométrie […] Il m'a paru à propos d'occuper continuellement le lecteur à résoudre des problèmes, c'est-à-dire à chercher les moyens de faire quelque opération, ou de découvrir quelque vérité inconnue […] En suivant cette voie, les commençants aperçoivent à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'inventeur, et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention. »

2 Critiques de Laisant sur l'enseignement de la géométrie

LAISANT (1915) : « Pas plus en mathématiques qu'ailleurs, l'instruction ne fait des savants ; et il ne s'agit pas d'en faire ; mais il existe en toutes matières un fonds général de connaissances utiles, nécessaires même à tout le monde, et d'une acquisition facile […]. Tout enfant peut, qu'il soit doué ou non, s'assimiler l'ensemble de ces connaissances ; s'il a le goût inné des mathématiques, il en fera ensuite de lui-même. L'enseignement n'a jamais fait de savants ni d'artistes ; son but devrait être de préparer des hommes […].

Notre enseignement primaire est passable ; l'enseignement primaire supérieur serait le moins mauvais de tous […]. Quant à l'enseignement secondaire, je me bornerai à citer un très court passage d'une étude de M. Ascoli : « ce que l'on s'est proposé en augmentant l'importance des sciences, c'est de leur attribuer la large part qui doit leur revenir dans la formation des esprits. Jusqu'ici ce rôle était dévolu aux lettres, tandis que les sciences étaient surtout des matières d'examen, dénuées de tout caractère éducateur ». Traduisez : jusqu'ici notre enseignement secondaire a eu pour mission d'abrutir la jeunesse, tandis que dans l'avenir, il en sera de même.

Il y a plus de trente années, un savant de haute valeur, M. Charles Meray, publia « Nouveaux éléments de géométrie », un livre tout à fait remarquable, menant de front l'étude du plan et de l'espace, et mettant en évidence les vérités d'ordre expérimental que la méthode classique dissimule avec hypocrisie. L'administration universitaire fut prise de fureur. […] La nouvelle méthode s'est introduite dans un grand nombre d'écoles…Partout elle donne des résultats remarquables. Mais l'enseignement secondaire reste fermé jusqu'ici, comme les oreilles d'un sourd qui ne veut pas entendre. »

II - QUELLE PROBLÉMATIQUE POUR L'ATELIER ?

Les programmes, en particulier à l'école, et singulièrement les derniers insistent sur la nomenclature, mentionnent quelques propriétés, et —à bon droit— l'usage des instruments. Mais d'une part, cela ne suffit pas pour donner du sens, et d'autre part la formation des maîtres ne saurait s'en tenir aux courtes perspectives proposées aux élèves. L'enseignant doit prendre de la hauteur, et en particulier apercevoir une cohérence dans la suite de l'enseignement, au-delà de l'école et même du collège. Ce qui ne veut pas dire adopter un point de vue savant sur la géométrie, celui des traités.

Les principes suivants pourraient être acceptés comme points de départ :

1. La géométrie enseignée (école, collège) doit dépendre des capacités d'apprentissage et de représentation des élèves, et non, comme il est arrivé, d'une conception « moderne » de la

géométrie (réduction des représentations, axiomatisation, etc.), ce qui convient à des étudiants, mais non à un apprentissage premier.

2. L'enseignement de la géométrie à l'école a certes une visée concrète (établir des savoir-faire et des représentations) mais s'inscrit dans une organisation des connaissances. Il est donc concevable de faire fréquenter des procédures (simples) qui ne seront complètement justifiées que plus tard. Partir d'objets familiers (feuille, boîte, ballon…) plutôt que « simples » et d'évidences sensibles.
Une pratique concrète établira des représentations, qui faciliteront ultérieurement l'ancrage en mémoire et le raisonnement spéculatif. Exemples : équi-partage d'un segment, gabarit à 60°, tracés à la règle, etc.

3. La formation des enseignants doit s'élever résolument au-dessus du savoir enseigné aux enfants, de façon à en saisir l'organisation présente et ultérieure. Il ne s'agit pas d'un retour aux programmes des années 50 (Menelaüs, coniques, inversion...), mais d'aborder quelques domaines dont les applications peuvent être mises à profit dès l'école, de façon à construire un capital d'expériences : ainsi le choix de Clairaut (1741) de s'appuyer largement sur la manipulation des aires [Annexe 1] ou celui de Méray (1974) de tenir compte des déplacements et de joindre géométrie 2D et 3D ; Aires, Déplacements, Homothétie, constructions, et pourquoi pas un peu de projective ?

Ce qui est proposé maintenant à la discussion c'est d'intégrer quelques perspectives pédagogiques qui, à la fois, ont du sens pour l'apprentissage (et pas seulement en vue d'une géométrie « pure »), et de les dérouler à l'école et au-delà, au collège, voire au lycée. C'est développer (et enseigner en formation) une culture géométrique qui tienne compte de l'accès à la connaissance pour les jeunes élèves, et pas seulement de convier les futurs professeurs d'école, quelle que soit leur spécialité à un retour vers la géométrie du collège.

III - THEMES ABORDÉS

1 Les aires

L'annexe 1 schématise ce que l'on peut tirer, dès le cycle 2 et jusqu'en fin de collège, de deux principes : à partir de l'aire du rectangle, par décomposition et grâce à l'invariance par recomposition, on peut obtenir l'aire de nombreuses autres surfaces (triangles, parallélogramme, trapèze, …). En prenant pour unité l'aire d'un carré de côté unité, on obtient facilement l'aire d'un rectangle de longueur entière a et de largeur entière b. Le principe d'associer à l'aire d'un rectangle le produit longueur × largeur est d'autant plus facilement admis par les élèves que c'est généralement ainsi que l'on représente le produit de deux entiers (quadrillage rectangulaire). Mais il importe de souligner, pour les futurs professeurs, ce que dissimule cette acceptation. La notation a x b représente d'abord un « produit de longueurs » qu'un abus d'écriture fait noter de la même façon qu'un produit numérique (mesures de longueur). Cependant cette confusion n'a pas lieu d'être examinée à l'école et répond à une intuition qui fonctionne bien. La seconde difficulté ainsi camouflée, est celle du passage d'une mesure entière (carreaux) à une mesure décimale ou réelle ; la démonstration classique du Théorème de Thalès (que n'éludent ni Clairaut (1741), ni Méray (1974)) fait appel à un passage à la limite que l'on a renoncé à enseigner depuis longtemps en Troisième.

2 Les pliages

Le premier principe admis est celui de l'égalité par superposition. Les pliages permettent une étude concrète de la symétrie axiale, à partir d'objets aussi simples qu'une feuille de papier rectangulaire (annexe 2a). Les nouvelles notions abordées sont : angle droit, perpendicularité, parallélisme, axe de symétrie, médiatrice, bissectrice, partage régulier, … Les figures géométriques rencontrées : carré, triangle isocèle, équilatéral, pentagone, hexagone, octogone réguliers. Il s'agit

ainsi de construire des outils (gabarits, figures régulières, partage régulier) qui peuvent utilement fonctionner à l'école avant d'être complètement justifiés. L'explication ultérieure s'adossera ainsi à un capital d'expériences.

La composition de symétries axiales (annexe 2b) permet d'aborder naturellement la rotation et la translation, et de structurer ainsi l'ensemble des isométries, voire d'aborder les problèmes de décomposition en symétries axiales, qui ont déserté les programmes du Secondaire depuis longtemps.

3 Espace et Plan

Méray (1974) insistait sur le va et vient entre géométries du plan et de l'espace. On retient de ce choix le principe pédagogique suivant : partir plutôt d'objets familiers que d'une hiérarchie « pure » (point, ligne, surface, volume). Par exemple partir d'un pavage de l'espace par des cubes, ou de l'observation et la déconstruction de boîtes que de « figures géométriques planes » sans rapport évident avec l'environnement de l'enfant. L'annexe 3 propose quelques problèmes de géométrie plane dont une solution fait intervenir l'espace ou réciproquement, des solutions d'un problème spatial par « rabattement » ou troncature.

4 Perspective

L'annexe 4, trop rapidement évoquée lors de l'atelier propose d'aborder (au collège) un champ historiquement et culturellement riche : celui de la construction de la perspective.

5 Birapport, faisceau harmonique

L'annexe 5, trop rapidement évoquée elle aussi, concerne quelques éléments de géométrie projective, et une application possible aux constructions à la règle seule.

Plusieurs chapitres n'ont pas été abordés lors de l'atelier, mais pourraient entrer dans le champ d'un Guide de Formation en Mathématiques destiné aux futurs professeurs du premier ou du second degré, et organisé autour de quelques nœuds fondamentaux. Par exemple :

- Un nœud concernant le cercle, associant figures géométriques, constructions, relations métriques, et approche de π.
- Un nœud qui associe homothétie, théorème de Thalès et proportionnalité.
- Une progression concernant les instruments de la géométrie et les constructions : papier quadrillé, règle simple, gabarits, équerre, disque, compas.

Ce guide aurait pour triple fonction :

- d'une part d'assurer une cohérence longitudinale dans l'enseignement ;

- d'autre part de pointer les éléments les plus significatifs des Programmes de Géométrie et de leur donner du sens ;

- enfin de permettre de rafraîchir pour les uns, d'établir pour les autres, un fond commun de culture géométrique, sans réveiller de possibles anciennes réticences.

BIBLIOGRAPHIE

BOULE F. (2001) Questions sur la géométrie et son enseignement, Nathan

BRAHEM J-L. (2011) Histoires de géomètres et de géométrie, Le Pommier

CLAIRAUT A-C. (1741) Eléments de géométrie

GONSETH F. (1936) Les Mathématiques et la Réalité, (rééd. Blanchard 1974)

KAHANE J-P. (dir) (2002) Rapport sur l'enseignement des sciences mathématiques, CNDP/Odile Jacob

LAISANT C-A. (1915) Initiation mathématiques (« ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance »), Hachette

MERAY C. (1974) Nouveaux Eléments de géométrie, Jobard, Dijon, (rééd 1903)

WITTMANN E-C. (1998) Géométrie élémentaire et réalité, Didier-Hatier

IV - ANNEXES

Annexe 1 – De l'aire

Définition

a

b aire d'un rectangle : a × b

Conséquence 1

Aire d'un triangle rectangle : $\frac{a \times b}{2}$

Conséquence 2

Aire d'un triangle quelconque : $\frac{h(a'+a'')}{2} = \frac{h \times a}{2}$

Aire d'un triangle : $\frac{\text{hauteur} \times \text{base}}{2}$

A hauteur égale, les aires sont proportionnelles aux bases : $\frac{S}{S'} = \frac{BC}{CD}$

AA' // BC alors ABC et A'BC : même hauteur & même base, donc même aire

Réciproquement : si ABC et A'BC ont même aire alors AA' // BC

segment des milieux

aire BB'C = aire ABC / 2
aire BC'C = aire ABC / 2
De même A'C' // AB
Donc B'C'A'B parallélogramme

Donc B'C' // BC

BC = 2 B'C'

ABC triangle quelconque et son cercle inscrit.
S = ra + rb + rc
S = r (a + b + c)

$p = \frac{a+b+c}{2}$

S = p × r

BB' et AA' sont les médianes
AA' // AB
donc aire AGB' = aire BGA

Posons aire A'B'C = 3
A'B' médiane de AA'C
donc x+y = 3 et aire BGA = x+3

$\frac{GA}{GA'} = \frac{y}{x} = \frac{x+3}{y}$

$\Rightarrow y^2 = x^2 + 3x$ mais $y^2 = 9 - 6x + x^2$

Donc $x = 1$, $y = 2$ $\Rightarrow \frac{GA}{GA'} = 2$

Le Centre de gravité est situé au 2/3 de la médiane en partant du sommet

	x	y
x	x^2	xy
y	xy	y^2

$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

de même

$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

ABC triangle rectangle :

$S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2}$

AH × BC = AB × AC

Triangle rectangle

On assemble quatre exemplaires.
La figure extérieure est un carré de côté a
La figure centrale un carré de côté (c–b)

$a^2 = 4\left(\frac{bc}{2}\right) + (c-b)^2 = 2bc + c^2 + b^2 - 2bc$

$a^2 = b^2 + c^2$ THEOREME DE PYTHAGORE

réciproque : $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ ABC triangle rectangle

B'C' // BC

$\frac{\text{aire BB'C}}{\text{aire BAC}} = \frac{BB'}{AB}$ $\frac{\text{aire BC'C}}{\text{aire BAC}} = \frac{CC'}{AC}$

Or aire BB'C = aire BC'C

Donc $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$

THEOREME DE THALES

ou : **$\frac{AB}{AC} = \frac{BB'}{CC'}$**

réciproque : $\frac{AB}{AC} = \frac{BB'}{CC'} \Rightarrow$ B'C' // BC

Annexe 2a – Pliages

La géométrie plane a pour point de départ la manipulation d'objets concrets. A partir de là, il s'agit d'observer, de construire, de représenter. Cet ensemble d'expériences conduit à découvrir des objets géométriques nouveaux, à les mettre en relation les uns avec les autres. L'enfant élabore des représentations à partir de son expérience, et construit ainsi un savoir nouveau, qui est une « géométrie concrète» ». Après quoi, ces notions trouveront un cadre plus général et conduiront à des énoncés de *définitions*, de *propriétés* et de *procédures*. Mais ceux-ci n'auront de sens que pour autant qu'ils renverront à une expérience sensible antérieure.

Par conséquent :

- Les objets *nouveaux* sont définis à partir d'objets familiers connus.
- La **pluralité** des approches est importante :: un objet géométrique n'a pas une définition unique; il résulte de la synthèse de plusieurs approches possibles.
- La connaissance d'un objet géométrique n'est pas seulement *déclarative* : elle intègre également ce que l'on *sait faire* avec cet objet, ou bien ce qu'il *permet de faire*.
- L'usage des instruments (ou la construction des instruments) fait partie de la géométrie : un instrument condense du savoir. Le choix pertinent d'un instrument, le soin dans son usage sont des compétences importantes.

Le choix qui est fait dans les pages qui suivent est d'utiliser le minimum d'instrument nouveau, et de partir des figures les plus répandues dans l'environnement quotidien : le **rectangle** (*feuille de papier*, dalle, vitre, porte, mur, …) et le **cercle** (trace d'un verre ou d'une assiette). La seule opération utilisée pour l'instant est le **pliage**, ou la **superposition**.

RECTANGLE

Une feuille de papier donne l'image d'un rectangle (fig.1.a)



Fig. 1.a

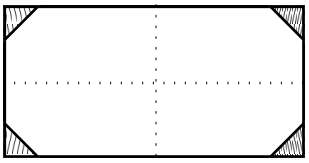


Fig. 1.b

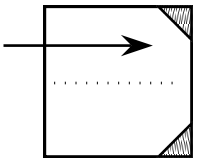


Fig. 1. c

Par pliages bord sur bord (fig. 1.b), on fait apparaître deux axes de symétrie (médianes du rectangle). Ces pliages permettent de superposer deux à deux les coins du rectangle (fig.1.c). Ces angles sont donc tous égaux. Chaque angle du rectangle est donc égal à un quart de tour, c'est à dire un ANGLE DROIT. La rencontre des axes de symétrie est le CENTRE du rectangle.

Il est possible de faire apparaître les diagonales par pliage.

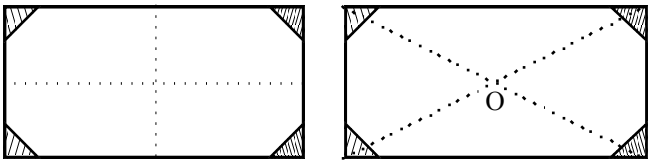


Fig. 2

Mais ces diagonales ne sont *en général* pas des axes de symétrie. Si elles le sont, la longueur et la largeur du rectangle sont superposables : il s'agit d'un CARRE.

Ces diagonales se rencontrent au centre du rectangle. Chacune découpe le rectangle en deux TRIANGLES RECTANGLES. Les quatre triangles rectangles que l'on peut ainsi obtenir sont superposables par décalque, ou par rotation.

CARRE

L'observation précédente fournit le moyen d'obtenir un carré à partir d'une feuille rectangulaire.

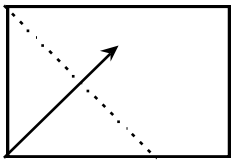


Fig. 3.a

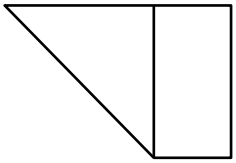


Fig. 3.b

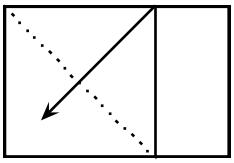


Fig. 3.c

On plie largeur sur longueur (fig.3.a). Puis on plie selon le bord obtenu (fig. 3.b). Enfin, on déplie (fig. 3.c). La surface obtenue possède quatre axes de symétrie (les médianes et les diagonales) qui se rencontrent tous au centre du carré.

ANGLE DROIT. EQUERRE

Les coins du rectangle donnent une bonne image de l'angle droit. En voici une autre, obtenue par double pliage :

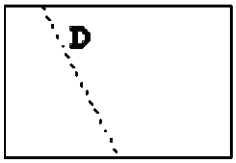


fig. 4.a

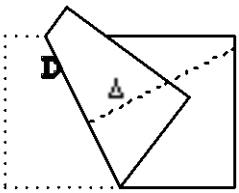


fig.4.b

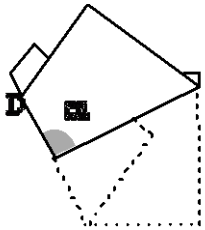


fig. 4.c

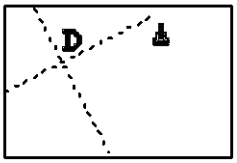


fig. 4.d

On plie une feuille (fig.4.a) selon un premier pli (D), puis on replie ce pli bord sur bord (fig.4.c). On détermine ainsi un second pli (Δ), qui est *par définition* perpendiculaire au premier. Le coin (a) ainsi obtenu est un **angle droit**. C'est un moyen simple de construire une **équerre**.

Il en résulte par pliage, la construction simple d'un gabarit à 45°.

PARALLELISME

Une En opérant une nouvelle fois le second pliage précédent (fig 5.a), on obtient un pli (Δ') lui aussi perpendiculaire à (D). *Par définition*, les plis (Δ) et (Δ') sont parallèles (deux plis perpendiculaires à un troisième).

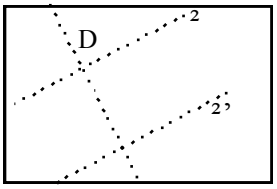


fig. 5.a

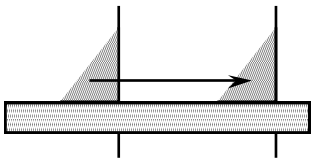


fig. 5.b

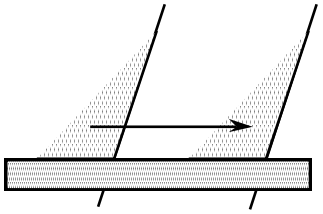


fig. 5.c

Cette construction en justifie une autre, obtenue en faisant glisser une équerre le long d'une règle (fig. 5.b), ou plus généralement celle qui consiste à faire glisser un gabarit le long d'une règle (fig. 5.c).

TRIANGLE EQUILATERAL

Construction à partir d'un rectangle.

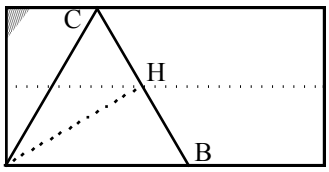


fig. 6.a

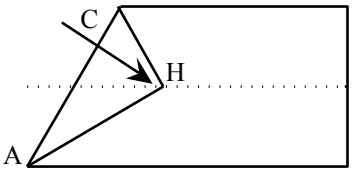


fig.6.b

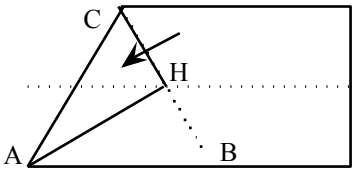


fig. 6.c

On cherche à obtenir le triangle ABC (fig. 6.a). Le pli médian va rencontrer le côté BC en son milieu. AH sera médiane, et doit être aussi hauteur. Pour obtenir H, il suffit de plier le coin marqué sur le pli médian (pli passant par A, fig. 6.b). Un second pliage autour de CH fait apparaître le côté BC. On s'aperçoit également que la longueur du rectangle va coïncider avec le côté AC. On a ainsi partagé l'angle plat en trois angles superposables : leur mesure est donc de 60°.

Il résulte de ceci la construction simple d'un gabarit à 60°.

Construction à partir d'un disque

Analyse de la figure

On obtient un cercle en prenant la trace d'un objet rond, puis on découpe le disque (fig. 7.a). On fait apparaître un diamètre par un premier pliage, puis le centre O du disque par un second pliage autour d'un diamètre perpendiculaire au premier (fig. 7.b).

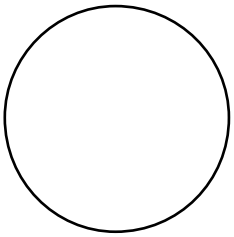


fig. 7.a

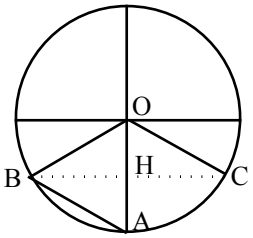


fig. 7.b

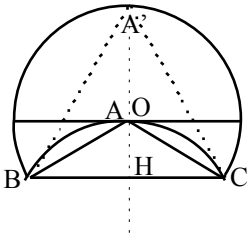


fig. 7.c

REMARQUE : le disque possède une *infinité* d'axes de symétrie passant tous par le centre, ce sont les diamètres.

Soit H le milieu de [OA] et BC la perpendiculaire en H; c'est la médiatrice de [OH].

Donc OA = OB = BA. Le triangle OBA est équilatéral ; donc l'angle BOA mesure 60°.

Par conséquent BOC mesure 120°.

Construction : en pliant A sur O (fig. 7.c), on fait apparaître le pli (BC). Il reste à plier autour de BA', puis de CA' pour obtenir le triangle équilatéral BCA'. On constate que les trois arcs de cercle passent tous par le centre O.

PENTAGONE REGULIER

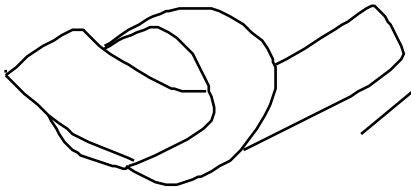


fig.8.a

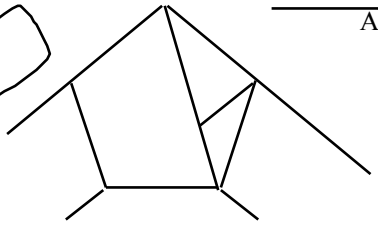


fig. 8.b

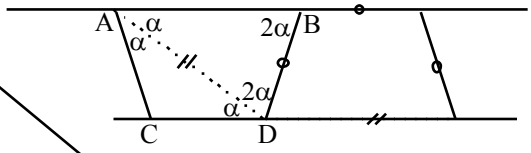


fig. 8.c

Construction : on utilise une bande rectangulaire assez longue, à laquelle on fait subir un nœud (fig.8.a). Serrer ce nœud et l'aplatir de telle façon que les sommets soient bien marqués. On obtient un pentagone régulier (fig. 8.b). Cette construction est exacte.

Justification : déplier la bande. La trace des plis (fig. 8.c) déterminent une suite de trapèzes. En remarquant les parties qui viennent d'être superposées, on constate que : les diagonales sont égales à la grande base (donc BAD est isocèle) ; les côtés obliques sont égaux à la petite base (donc ACD est isocèle).

Soit α l'angle CAD. Il en résulte que CDA = α. Mais comme les bases sont parallèles, DAB = α.

Mais ABD = BAC = 2α. Comme BAD est isocèle : ADB = 2 α. Par suite l'angle plat = 5 α. Donc α = 36° et ACD = CDB qui sont les angles du pentagones mesurent 108°. Le pentagone est bien régulier.

HEXAGONE REGULIER

On peut l'obtenir de plusieurs façons :

- soit à l'aide de six triangles équilatéraux (fig. 9.a)
- soit à partir du disque utilisé (fig. 9.c) : une fois réalisé le triangle équilatéral, on plie selon les trois diamètres axes de symétrie (fig. 9.b). On obtient les sommets de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle.

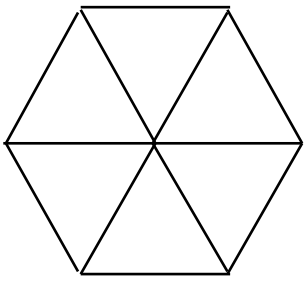


fig. 9.a

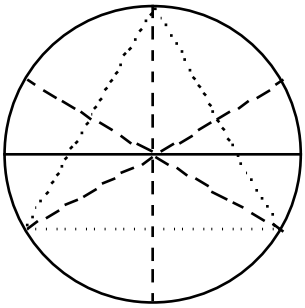


fig. 9.b

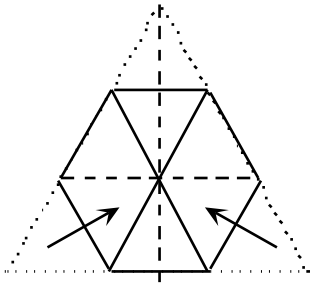


fig. 9.c

- soit enfin en pliant tous les sommets du triangle équilatéral sur le centre du triangle (fig. 9.c) : on obtient ainsi un hexagone régulier.

OCTOGONE REGULIER

- A partir d'un disque, il suffit de faire apparaître des diamètres perpendiculaires, puis les bissectrices de ces angles : on obtient les sommets de l'octogone régulier (fig. 10.a).
- A partir de deux carrés superposables (fig. 10.b) : marquer les diagonales de l'un et les médianes de l'autre. Puis les placer l'un sur l'autre, les médianes de l'un superposées aux diagonales de l'autre (fig. 10.c). Enfin découper tous les triangles qui dépassent. On obtient ainsi deux octogones réguliers superposés.

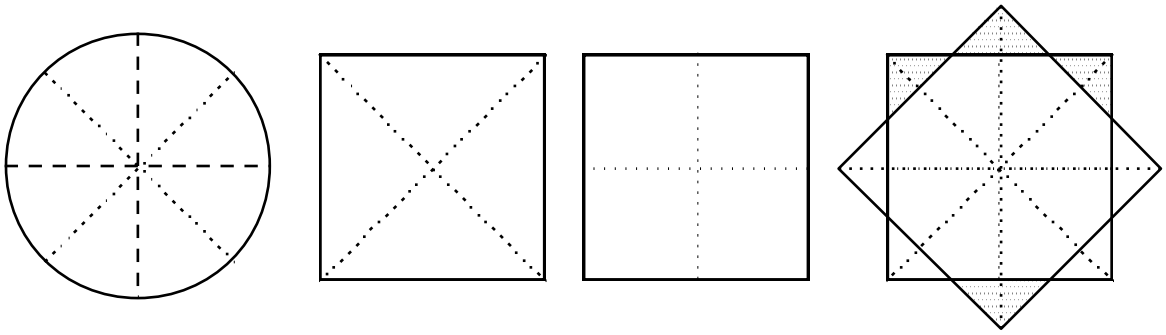


fig. 10.a *fig. 10.b* *fig. 10.c*

Remarque : On peut très bien imaginer de poursuivre cette procédure. En décalant les deux polygones de 1/16° de tour, puis en découpant les triangles débordant, on obtient deux polygones réguliers de 16 côtés, etc. On obtient ainsi une **approximation polygonale du cercle** inscrit dans les carrés initiaux. C'est une méthode (à vrai dire peu précise) pour obtenir une valeur approchée du nombre π (rapport de la circonférence au diamètre).

MEDIATRICE ET BISSECTRICES

La médiatrice de [MN] est **le pli** qui applique M sur N (fig. 12a).

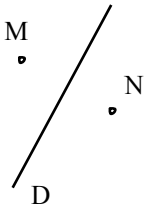


fig. 11. a

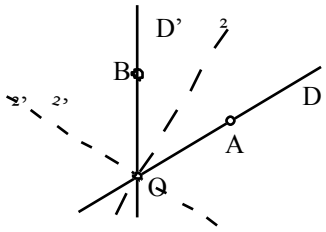


fig. 11.b

Les plis (D) et (D') étant concourantes en O (fig. 11.b), il existe deux pliages qui appliquent (D) sur (D'); l'un autour de (Δ), qui applique B sur A, l'autre autour de (Δ'). Ce sont les **deux bissectrices** de l'angle (D, D'). *Elles sont perpendiculaires.*

TRIANGLE QUELCONQUE : hauteurs, somme des angles.

Soit un triangle quelconque A, B, C découpé (ou reproduit sur calque).

Le pli passant par A, qui applique (BC) sur elle-même (fig. 12.b) fait apparaître un angle droit. AH est une hauteur du triangle (fig. 12.c)

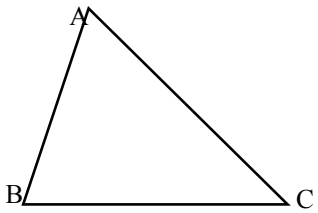


fig. 12.a

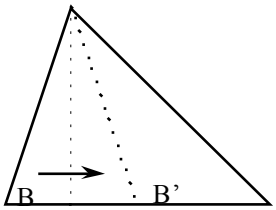


fig. 12.b

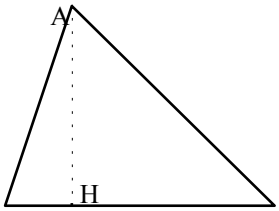


fig.12.c

Ce point H étant obtenu, replier les trois sommets A, B, C en ce point (fig. 13.a) ; on obtient un rectangle (fig. 13.b).

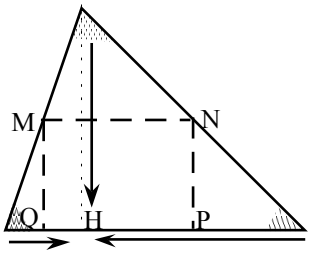


fig. 13.a

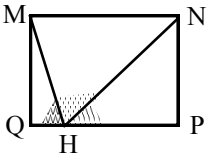


fig. 13.b

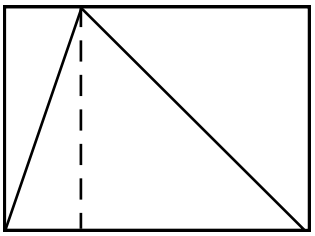


fig. 13.c

Il en résulte deux observations :

• Tous les angles du triangle se trouvent juxtaposés en H. *La somme des angles d'un triangle est un angle plat.*

• L'aire du triangle est double de celle du rectangle. Or celui-ci a pour hauteur la moitié de la hauteur du triangle, et pour longueur la moitié de la base correspondante. Donc l'aire du triangle est $S = \frac{1}{2}\ h \times \text{base}$

PARTAGE D'UNE FEUILLE ou d'un SEGMENT en 3, ou en 5 parties égales



fig. 14.a

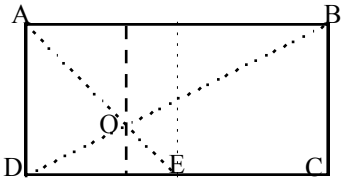


fig. 14.b

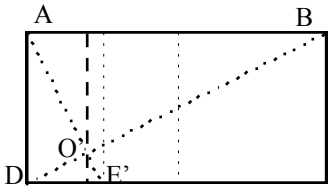


fig. 14.c

Il s'agit de partager un rectangle (fig. 14.a) en rectangles de même largeur et dont la longueur soit le tiers de la longueur initiale.

Construction : faire apparaître le pli médian passant par E, puis joindre AE et BD, qui se rencontrent en O. Le pli parallèle à la largeur passant par O divise la longueur au tiers.

De la même façon (fig.14.c), pour obtenir un partage au cinquième, plier la feuille en quatre selon la longueur, puis joindre AE' et BD. Le pli passant par le point de rencontre O' partage la longueur en son cinquième. C'est une application simple du théorème de Thalès.

Prolongements :

COMPOSITION DE DEUX PLIAGES (ou davantage) : voir l'annexe sur les transformations

Annexe 2b – Transformations

Les transformations géométriques ont été évoquées à plusieurs reprises dans les chapitres précédents. Elles peuvent en effet aisément donner lieu à des manipulations concrètes et des observations dès l'école élémentaire. Mais l'étude de leurs propriétés est étendue dans les programmes du collège jusqu'à la spécialité « math » de terminale scientifique. Ce qui rend difficile d'en avoir une vue synthétique et d'apprécier la fécondité de ces concepts. L'objet de ce chapitre est de présenter une rapide synthèse relative aux transformations géométriques, aux principaux résultats qui les concernent, et à quelques exemples de problèmes.

Les symétries axiales et les rotations

Les pliages ont mis en jeu des symétries axiales. Le pliage autour de D envoie le point M sur le point M' (et réciproquement).

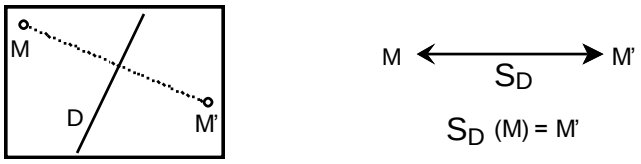


fig. 1

Une symétrie est entièrement déterminée par un point M et son image M' (si elle est distincte de lui) : l'axe est la médiatrice de MM'. L'image d'une droite est une droite (fig. 2). Si cette droite rencontre l'axe de symétrie (pli), le point de rencontre est invariant. Si cette droite est parallèle à l'axe, son image aussi (fig. 3) ; si la droite est perpendiculaire, elle est « globalement invariante » c'est à dire que l'image de cette droite est elle-même, mais un seul de ses points est invariant.

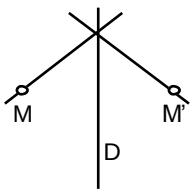


fig. 2

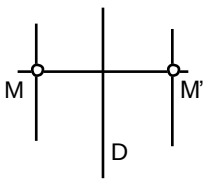


fig. 3

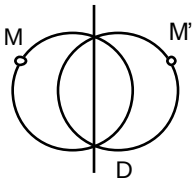
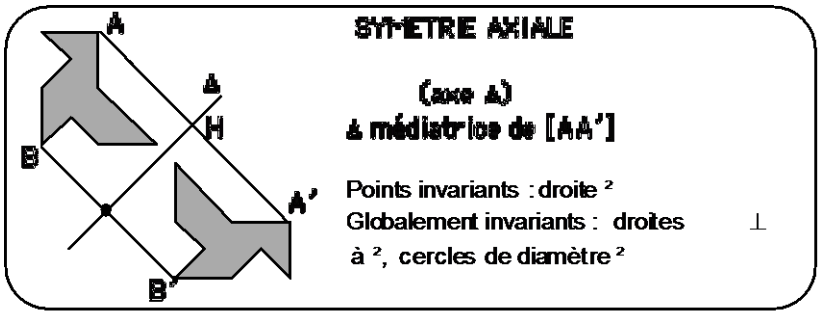


fig. 4

L'image d'un cercle est un cercle ; si le cercle rencontre l'axe, les deux points de rencontre sont invariants. Si l'axe est un diamètre du cercle, le cercle est « globalement invariant ».



Composition de deux symétries axiales

Notation :

Lorsque l'on effectue successivement les symétries S_D puis $S_{D'}$ le point M donne M' par la première transformation et ce dernier donne M" par la seconde :

$$M \xrightarrow[S_D]{} M' \xrightarrow[S_{D'}]{} M'' \qquad S_D(M) = M' \text{ et } S_D(M') = M''$$

On note $S_{D'} \circ S_D$ cette nouvelle transformation : $S_{D'} \circ S_D(M) = M''$

Plusieurs cas se présentent :

1. Deux symétries de même axe : M —> M' —> M

On appelle IDENTITE cette correspondance : $S_D \circ S_D = I_d$

2. *Les deux axes sont parallèles* (fig. 5) : la composition est une **translation**. Une translation est déterminée par la connaissance d'un point M et de son image M'.

$\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{HM'}$ et $\overrightarrow{M'M''} = 2\,\overrightarrow{M'H'}$. Donc $\overrightarrow{MM''} = 2\,\overrightarrow{HH'}$

La translation est dirigée perpendiculairement à D et D', et le déplacement est *le double* de la distance de D à D'.

Il n'est pas équivalent de composer S_D puis $S_{D'}$ ou bien $S_{D'}$ puis S_D. Dans le premier cas, la translation est dirigée de D vers D', dans le second de D' vers D.

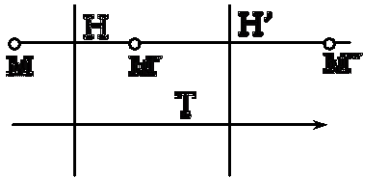


fig. 5

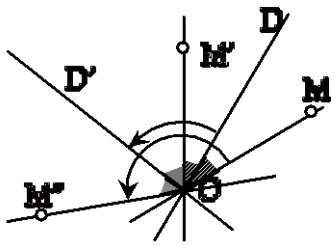


fig. 6

3. *Les axes sont concourants* (fig.6)

La première symétrie associe M et M' (OM = OM'), la seconde M' et M" (OM' = OM"). L'angle (OM, OM") est *le double* de l'angle (D, D').

La composition est une rotation de centre O et dont l'angle est double de l'angle (D, D').

Il n'est pas équivalent de composer S_D puis $S_{D'}$ ou bien $S_{D'}$ puis S_D : La seconde rotation est réciproque de la première.

En résumé : Si les axes sont parallèles : la composée est une **translation** (cas particulier : axes confondus, il s'agit de l'Identité)

Si les axes sont concourants : la composée est une **rotation** (cas particulier : axes perpendiculaires, il s'agit d'un demi-tour).

Ces résultats sont facilement observables à l'école, à l'aide d'un simple papier calque.

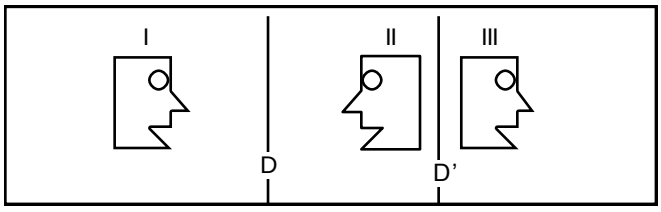


fig. 7

Une figure (I) est dessinée sur un calque. Après pliage autour de D, on la décalque en (II), puis après pliage autour de D', cette dernière en (III).

On recopie de nouveau (I) sur un fragment de calque, et l'on constate qu'en faisant glisser le long d'une règle, on amène ce dessin sur (III).

Lorsque les plis sont concourants, on opère de la même façon (fig. 8).

Le décalque de (I) donne (II) après pliage autour de D, et ce dernier donne (III) après pliage autour de D'. Après avoir reproduit (I) sur un fragment de calque, on épingle ce fragment en Ω, et on fait tourner autour de Ω, jusqu'à amener en coïncidence avec (III).

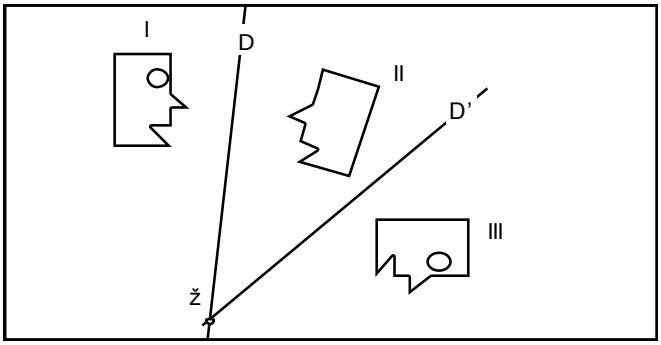


fig. 8

Les résultats réciproques sont intéressants :

– *Il est possible de décomposer une* ***translation*** *en deux symétries dont les axes sont perpendiculaires à la direction de la translation. L'un des axes peut être choisi arbitrairement (sous cette condition).*

– *Il est possible de décomposer une* ***rotation*** *de centre O en deux symétries dont les axes passent par O. L'un des axes peut être choisi arbitrairement (sous cette condition).*

Ces résultats donnent lieu à l'activité suivante :

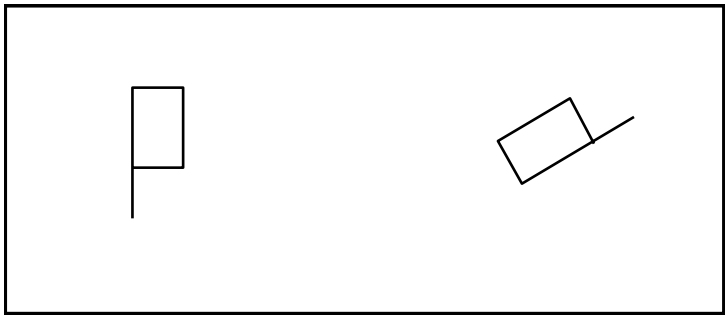


fig. 9

On décalque une figure sur une feuille, en deux emplacements quelconques, mais sans la retourner (fig.9).

Peut-on passer de la première figure à la seconde par une rotation ? autour de quel centre ? de quel angle ?

Voici une solution (fig. 10) : il est possible, par pliage, d'amener le point A sur le point B. Soit D ce pli, l'image de la première figure est représentée en pointillés. Un second pliage permet d'amener cette figure-ci sur la dernière, et C sur D. On passe donc de la première figure à la dernière par la composition de ces deux pliages : c'est une ROTATION de centre Ω, et dont l'angle est le double de l'angle (D, D').

Bien entendu, si les figures décalquées sont en *translation* l'une par rapport à l'autre, les deux axes D et D' seront parallèles.

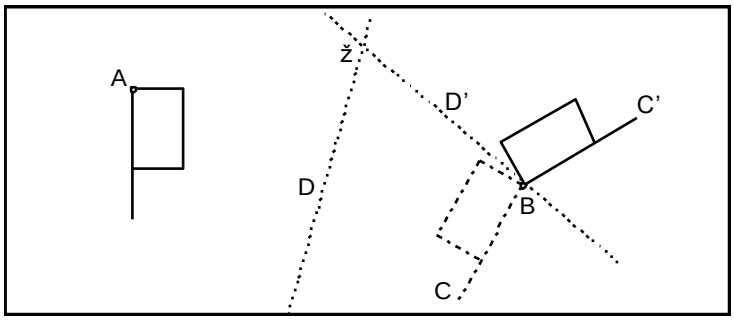


fig. 10

Ces résultats connaissent une généralisation supplémentaire.

Les translations et les rotations sont appelés des DEPLACEMENTS : une figure du plan est par elles déplacée, mais non retournée. Que se passe-t-il lorsque l'on compose deux déplacements ?

Il y a trois cas à envisager : translation et translation, rotation et rotation, translation et rotation. La décomposition en symétries facilite la résolution de cette question.

Translation puis translation

La composée de deux translations est une translation.

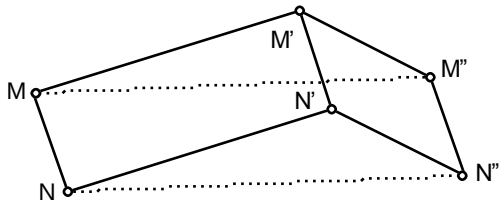


fig. 11

Translation et rotation

La rotation peut être décomposée en deux symétries dont les axes passent par le centre de rotation O ; une translation peut être décomposée en deux symétries dont les axes sont perpendiculaires à la direction de translation. Il est possible de choisir que l'un de ces axes passe par O, et que l'un des axes composant la rotation soit aussi celui-ci (fig. 12). Ainsi :

Translation : symétrie d'axe D, puis symétrie d'axe D'.

Rotation : symétrie d'axe D', puis symétrie d'axe D".

La succession des deux symétries d'axe D' est l'Identité.

Par conséquent la composition des deux transformations se réduit à la succession : symétrie d'axe D, puis symétrie d'axe D" : c'est une rotation de même angle que la première, et de centre Ω

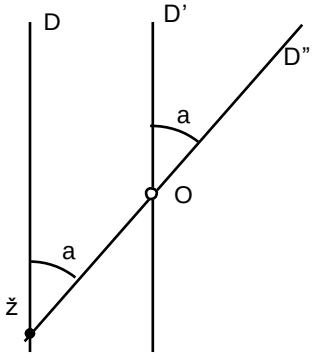


fig. 12

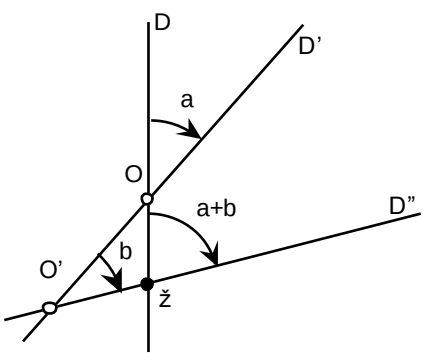


fig. 13

Rotation puis rotation

La première rotation est décomposable en deux symétries passant par O ; on peut choisir que l'axe de la seconde symétrie passe aussi par O', et que la première symétrie composant la seconde rotation soit ce même axe (fig. 13). Ainsi :

Première rotation : symétrie d'axe D puis symétrie d'axe D'.

Seconde rotation : symétrie d'axe D' puis symétrie d'axe D".

La composition des deux symétries d'axes D' est l'Identité.

Il en résulte que la composition des deux rotations est une rotation de centre Ω et dont l'angle est la somme des angles des deux rotations.

Remarque 1 : il s'agit de somme algébrique, les rotations pouvant être de sens contraire.

Remarque 2 : dans le cas où cette somme est nulle (rotations réciproques l'une de l'autre), les axes D et D" seront parallèles, la composition est une translation.

Remarque 3 : ces compositions ne sont pas **commutatives**.

Il résulte de ce qui précède que Rot (O, 2a) o T = Rot (Ω, 2a)

La composition T o Rot (O, 2a) est une rotation d'angle a, mais dont le centre n'est pas Ω. De même Rot (O', 2b) o Rot (O, 2a) ≠ Rot (O, 2a) o Rot (O', 2b)

En conclusion, la composée de deux déplacements (rotation ou translation) est un déplacement. En d'autres termes : une succession d'un nombre pair de symétries axiales peut être réduit à deux symétries.

Cette formulation invite à s'interroger sur la réduction possible d'un nombre impair de symétries axiales. Il suffit d'examiner ce qui se passe pour trois symétries. Deux cas de figures peuvent se présenter :

Les trois axes sont concourants (fig. 14)

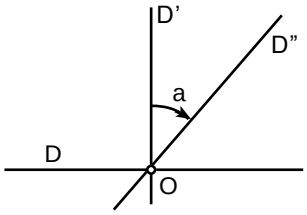


fig. 14

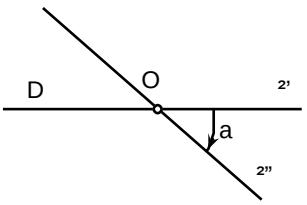


fig. 15

On effectue les symétries d'axe D, puis D', puis D". Les deux dernières équivalent à une rotation de centre O et d'angle 2a, que l'on peut remplacer par deux symétries dont les axes passent par O et qui font le même angle, comme Δ' (confondu avec D) et Δ" (fig. 15). Mais alors la succession des symétries d'axes D, Δ', Δ" équivaut à la seule symétrie d'axe Δ".

Les trois axes ne sont pas concourants (fig. 16)

On effectue les symétries d'axes D, puis D', puis D". Mais les deux dernières équivalent à une rotation de centre O, que l'on peut remplacer par les symétries d'axes Δ' (parallèle à D), puis Δ" (fig. 17). La succession des symétries d'axes D, puis Δ', puis Δ" équivaut donc à une translation suivie de la symétrie d'axe Δ".

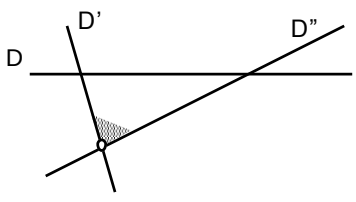


fig. 16

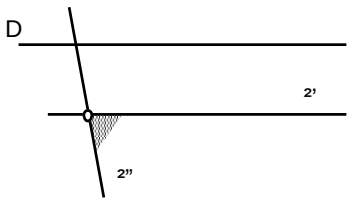


fig. 17

En résumé, on peut réduire une succession de trois symétries axiales (et par suite un nombre impair

quelconque de symétries axiales) soit à une seule symétrie, soit à la composition d'une translation et d'une symétrie.

Ce résultat permet de résoudre le problème suivant : on reproduit une figure sur une feuille, puis la même figure après retournement (fig. 18). Comment peut-on passer de la première à la seconde ?

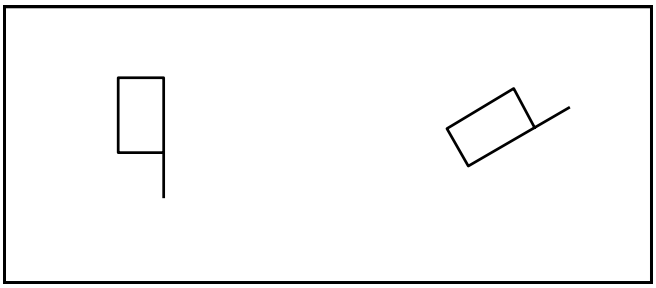
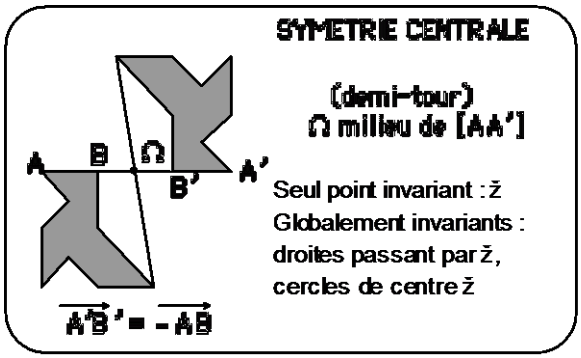
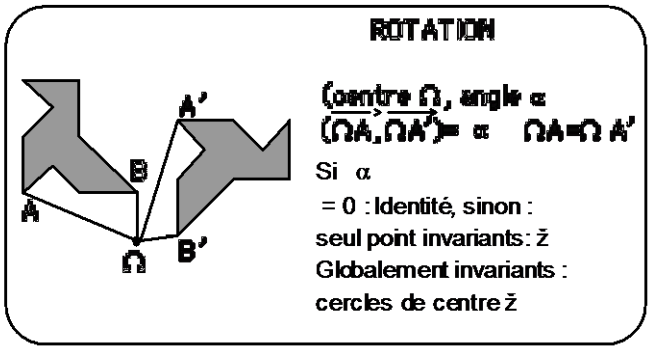


fig. 18

La réponse est : ou bien ces figures se correspondent dans une symétrie, ou bien on peut les faire correspondre par une translation, puis une symétrie ("symétrie glissée").





Annexe 3 – Espace et plan : Les choix de Charles Meray

La géométrie d'Euclide fait intervenir le mouvement (cas d'égalité, superposition…) mais l'exclut en même temps (prescription de Platon). Distinguer une géométrie « pure » d'une géométrie « physique ». Ambiguïté de la question. Le XX° siècle exclut le mouvement (et le temps) : les transformations ponctuelles deviennent des « correspondances » (évacuation de t). Le problème pédagogique n'est pas le même.

C'est sans doute la préoccupation de Méray : restituer les mouvements, qui sont constitutifs des représentations. L'objet n'est plus alors un souci de rigueur ou d'histoire (cf justification des Maths Modernes), mais une préoccupation didactique : la construction de représentations et de schémas fait partie de la construction conceptuelle, par laquelle TOUS les mathématiciens sont passés, même ceux qui ont, ensuite, évacué le mouvement. Pas de contradiction avec le programme de Klein. Mais on n'arrive pas en géométrie par parachutage, ni par intuition immédiate.

L'évacuation de t est rendue possible par la distinction du mouvement (ou t intervient, cf. cinématique) et du *déplacement* (qui répond à une intention familière). Mais une autre question intéressante est ici soulevée : la superposition d'une figure plane à une autre est déterminée par la **possibilité** d'un déplacement (translation, rotation) et définit l'égalité. En conséquence, deux figures symétriques ne sont pas égales. Ce qui est contesté semble-t-il par Leibniz et Kant (exemple des deux mains). Car il existe un déplacement qui applique l'une sur l'autre : la rotation dans l'espace, qui est un déplacement ! Mais qui maintient distincts deux solides symétriques…

L'autre intérêt des déplacements, c'est de définir des solides par engendrement : pavé par translation d'une rectangle, cylindre par « révolution » d'un rectangle, ou sphère (ou d'un tore) par révolution un cercle. Mais psychologiquement, il semble plus accessible à l'intuition d'admettre l'existence d'une boîte ou d'un ballon. Ce qui peut faire admettre le point de vue de Méray, sans souscrire à la genèse de sa démarche.

Ce qui est posé (et se passe de définition) : l'espace (illimité), le repos / le mouvement, la notion de figure ou de corps (« figure solide »). Un **déplacement** est un mouvement entre une position initiale et une position finale [on élude ainsi le **temps**, et l'aspect cinématique].

Deux corps sont **superposés** (donc **égaux**) si on peut amener l'un dans la position exacte de l'autre.

Eléments **homologues** : qui se superposent dans la superposition des corps qui les contiennent.

En mouvement, un point **décrit** une ligne ; une ligne **engendre** une surface.

DROITE et PLAN

On admet la connaissance intuitive de droite et plan ; le rappel de propriétés tient lieu d'axiomatique. Ainsi « on peut faire coïncider 2 droites par un déplacement. Un segment [AB] de l'un se superposant à un segment [A'B'] de l'autre sont **égaux**.

Par 2 points, il existe une seule droite. Par un point une infinité de droites.

Il existe une infinité de façon de faire glisser une droite sur une autre. Ceci définit une **translation**.

Le parallélisme est défini par une translation :

DROITES // : il existe une translation qui amène l'une sur l'autre.

Par un point M, on peut faire passer une seule droite // à une autre donnée.

Droite D // plan P : il existe une translation qui amène D sur une droite Δ de P.

D //Δ —> Tout plan // à D est // à Δ.

PLANS // : il existe une **translation** amenant l'un sur l'autre.

P // P' —> toute droite D //P est // à P'

Toutes les droites passant par M et parallèles à P constituent le plan P' //P

PERPENDICULAIRE

P glisse sur P' de façon qu'un point O soit fixe. c'est une **rotation**. Il existe d'autres points invariants de l'espace : la droite passant par O et **perpendiculaire** à P (fig. 1).

P ⊥ D, P//P' et Δ // D alors P' est ⊥ Δ (fig. 2)

D ⊥ P et D ⊥ P' alors P //P' (fig. 3)

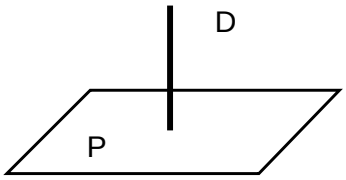


fig. 1

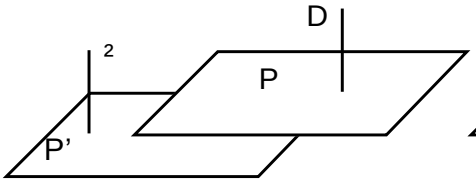


fig. 2

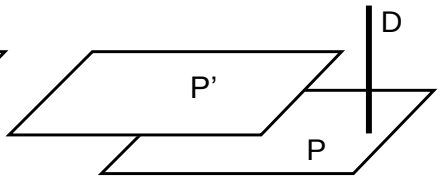


fig. 3

DROITES PERPENDICULAIRES

P ⊥ D alors Δ appartenant à P est à ⊥ D (fig. 4)

D et Δ **orthogonales** ⇔chacune appartient à un plan ⊥ à l'autre (fig. 5).

PLANS PERPENDICULAIRES

si une droite D du plan P est ⊥ P' alors P est ⊥ P' (fig. 6).

D ⊥ P ⇔ D ⊥ 2 droites non parallèles du plan (fig. 7).

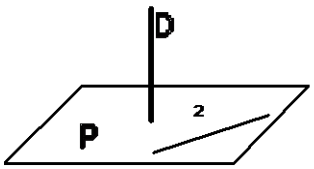


fig. 4

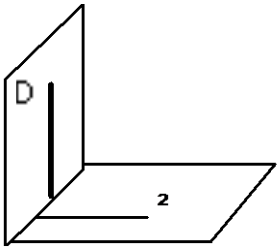


fig. 5

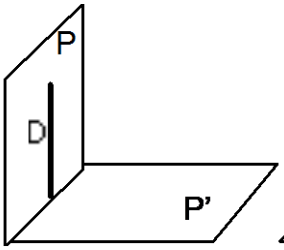


fig. 6

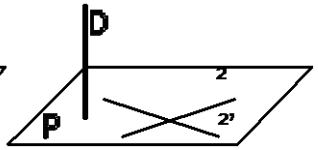


fig. 7

MESURE

Deux segments [AB] et [A'B'] sont **égaux** s'il existe une translation [AB] —> [A'B']

Le rapport de 2 segments est m/N si m fois l'un = n fois l'autre.

A partir de là, et du choix d'une unité, on peut définir une **mesure algébrique**.

Si D // Δ alors [AB[—> [A'B'] par translation donc AA' = BB' (fig. 8).

Si D non // Δ : cas de « bandes » parallèles de même largeur : AA'/BB' = A'A"/B'B" (fig. 9).

bandes parallèles de largeur différentes : AA'/BB' = A'A" / B'B" (fig. 10)

Ce qui établit le théorème de Thalès. Tout le reste s'en suit.

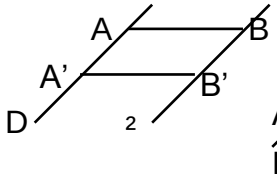


fig. 8

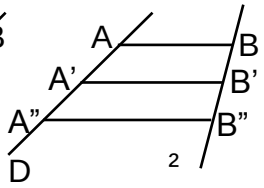


fig. 9

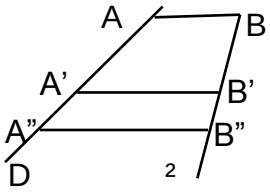


fig. 10

Annexe 4 – Perspective

La représentation en perspective n'est pas aussi simple que l'on peut croire, et elle peut présenter des pièges. Il est faux de croire qu'elle est simple et "naturelle" ; si c'était le cas, elle serait apparue dans la représentation picturale bien avant la Renaissance. Mais comme on l'a souvent rappelé, il y a un écart considérable entre la **reconnaissance** et la **reconstruction**. Identifier une représentation en perspective peut sembler simple, en réaliser une ne l'est pas, comme l'ont analysé Dolle, Bataillard, et Guyon (1974) dont nous résumons l'étude.

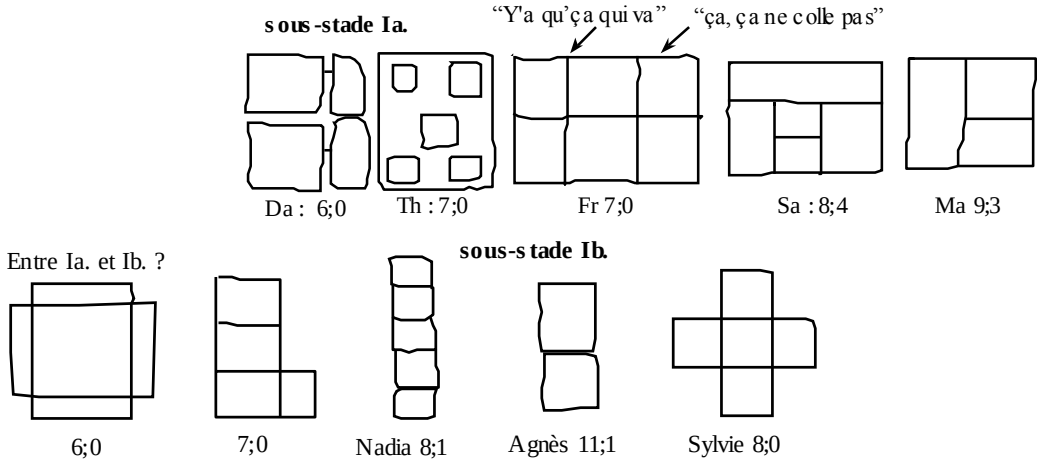
Conditions expérimentales : on a proposé aux enfants des cubes en carton de 8 cm d'arête, en les invitant à l'observation de ce qui est visible, puis on leur a demandé de dessiner tout ce qu'on verrait si le cube était en verre. Le procédé d'interrogation est inspiré de la méthode clinique de Piaget. 56 enfants ont été interrogés, de 6 à 15 ans, dans la région de Besançon. Le résultat escompté est la représentation "standard".

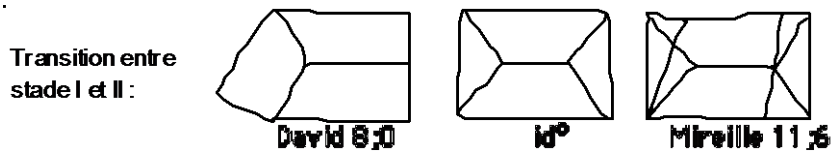


Résultats généraux

Stade I : absence de perspective (de 6 à 9 ans)

«[…] les enfants ne procèdent pas par dépliement, mais par rabattement […]. Le caractère entièrement plan des figures réalisées permet de constater l'absence complète de tout élément de perspective. »

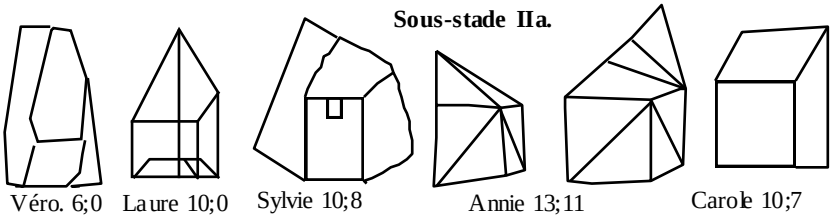


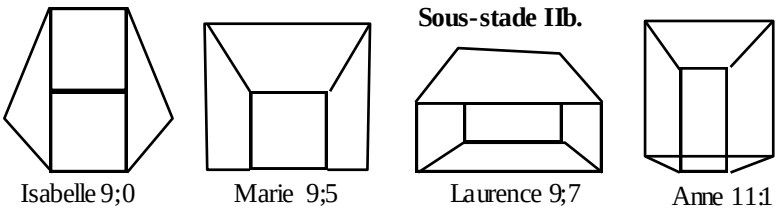


La construction du cube en perspective nécessite la présence de structures logiques complexes. Au *stade I*, les enfants se contentent d'une énumération, négligeant généralement la face de repos. ("*C'est un carré, avec des carrés autour*".) Il s'agit donc d'une description assez typiquement topologique. «*Les enfants paraissent encore proches de l'imitation sensori-motrice. Il leur est plus facile de fabriquer un cube que d'en dessiner un. […] Ils n'ont pas encore constitué une représentation qu'ils seraient capables de donner graphiquement.*»

Stade II : perspective empirique (9 à 12 ans)

Apparition d'une oblique. « *L'apparition de l'oblique paraît marquer l'entrée dans l'espace graphique à trois dimensions* » Mais il s'agit d'une perspective centrée en rapport avec le point de vue propre.



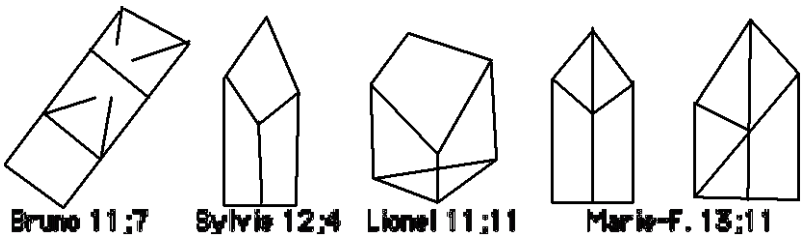


Au stade II, la figuration plane est abandonnée ; l'artifice de l'oblique oriente vers la superposition de deux plans. Il a pour origine l'apparente fuite en biais d'une face latérale du cube.

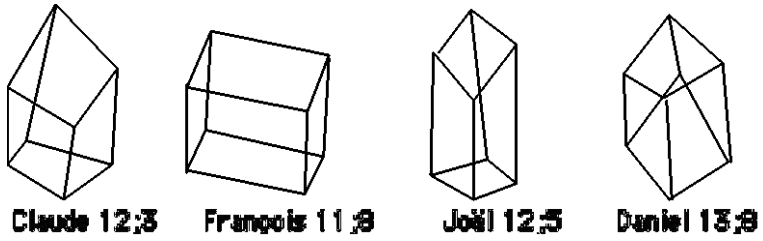
Stade III : accès à la perspective cavalière (après 12 ans)

Elle est réalisée en moyenne par tous les enfants à partir de 12 ans, pour un cube présenté de front. Ce n'est qu'au stade III que « *les procédés de construction présenteront un caractère systématique reposant sur le parallélisme des côtés opposés coordonné aux trois dimensions et répondant à une combinatoire.*»

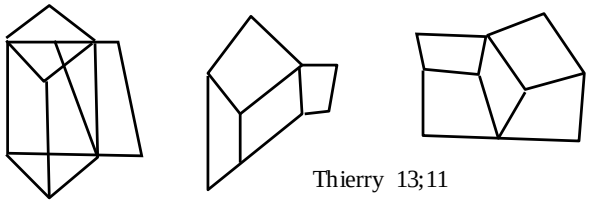
Sous-stade III.a : réalisation correcte du cube en présentation de front.



Sous-stade IIIb : représentation du cube en position trois quarts (de biais par rapport au cadre) avec coordination des arêtes opposées (parallélisme).



Sous-stade IIIc : de plus, la représentation du cube présenté sur une arête est correcte.



Thierry 13;11

La représentation du cube sur un angle a été impossible pour tous les sujets étudiés.

A partir de 12 ans, les enfants entrent spontanément dans la perspective cavalière, à condition que le cube soit en position frontale. Ils n'y parviennent pas encore dans les autres cas.

Si le cube pouvait être représenté graphiquement en perspective cavalière à partir de la seule activité perceptive, il est à peu près certain que les enfants en donneraient un dessin parfaitement correct beaucoup plus tôt.

Les élèves du *stade I* possèdent le schéma du carré ; c'est donc lui qu'ils dessinent en premier ; ils ramènent les autres faces (à cause de ce qu'ils savent) à ce schéma.

Au *stade 2*, on observe un début de coordination des différentes centrations, de proche en proche ; le *volume* n'est donc pas encore construit. Au *stade 3* (niveau formel), l'enfant a établi une structure de représentation du volume (parallélisme des arêtes opposées, etc.). Alors pourquoi les *sous-stades IIIa,b,c* ? Les enfants se rendent compte que leur dessin n'est pas satisfaisant ("ça ressemble pas tellement"), et acceptent parfaitement une perspective cavalière qu'on leur propose ("Ah! J'avais pas pensé à ça"). Il y a donc une grande distance entre d'une part le cube perçu et le cube représenté mentalement, d'autre part ce denier et la production graphique. En résumé, on peut avancer « *que dans les conduites spontanées les enfants révèlent les structures définitivement acquises, alors que en situation d'apprentissage, ils révèlent celles qu'ils sont en train d'acquérir* ».

Ce qui frappe le plus dans les présentations non frontales « *c'est que l'on a l'impression d'assister à une régression à des stades antérieurs. Il est en réalité très difficile de discerner si un enfant trace un cube en perspective cavalière grâce à un procédé graphique appris ou s'il le trace en mettant en œuvre les structures correspondantes* ».

La perspective cavalière

La représentation en perspective la plus habituelle, pour des objets de petites dimensions, est la perspective cavalière.

Pour représenter l'espace (3 dimensions) sur un plan (2 dimensions), on utilise une projection sur ce plan (que l'on désigne par "plan de figure") parallèlement à une droite.

Quels sont les paramètres utilisés ?

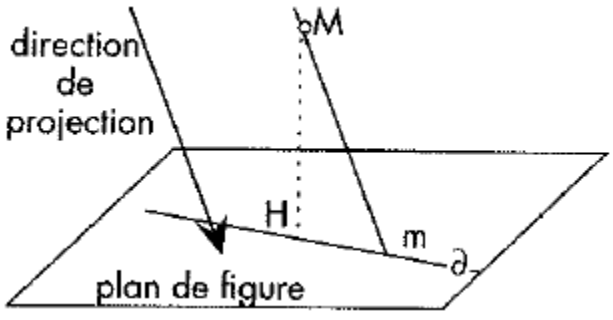


fig. 1a

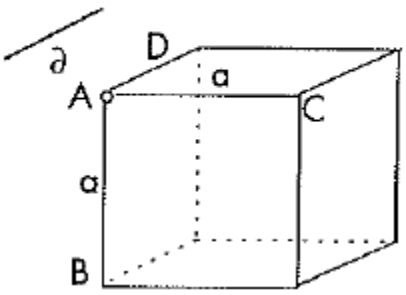


fig. 1b

Le plan de projection est appelé "plan de figure". Le point M se projette en **m**. Soit H le projeté orthogonal de M. Hm/Mm = k est appelé le coefficient de réduction (on le choisit souvent égal à 1/2). La projection est ainsi déterminée par deux paramètres : la **pente de la droite,** et le **rapport de projection**.

Exemple : la représentation du cube [fig.1b]. Le plan de figure est parallèle à la face grisée. ∂ est la direction des perpendiculaires au plan de figure. Selon cette direction, les longueurs sont réduites de moitié. L'arête AD, perpendiculaire au plan de figure est représentée dans la direction ∂ avec une longueur moitié de celle des arêtes AC ou AB qui sont parallèles au plan de figure.

Changement de plan de figure

Sur la première représentation (fig.2 a), choisissons un plan vertical diagonal ACC'A' pour nouveau plan de figure, tout en conservant la même direction de projection ∂ et le même rapport de réduction.

Le rectangle ACC'A' étant dans le nouveau plan de figure est donc représenté en vraie grandeur (fig.2 b) ; ainsi AI=a√2/2. En revanche IB et ID sont perpendiculaires au plan de figure : IB et ID sont projetés dans la direction ∂ et selon la longueur a√2/4.

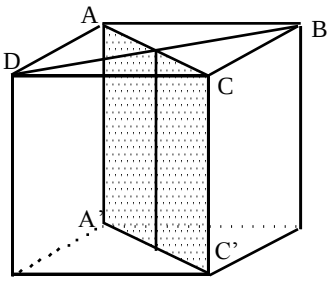


fig. 2a

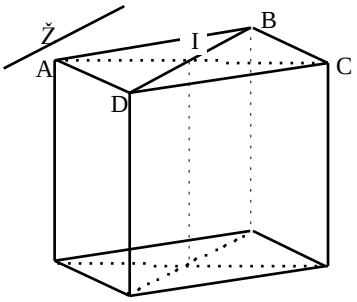


fig. 2b

Représentation d'un tétraèdre régulier

On choisit pour plan de figure le plan vertical de symétrie contenant A et I. Le centre de ABC est le projeté du sommet S. Le triangle AIS est isocèle (AI=IS=a√3/2) dans le plan de figure, donc en vraie grandeur. La direction BC est perpendiculaire au plan de figure, donc IB=IC ramené à a/4 (fig.16 et 17).

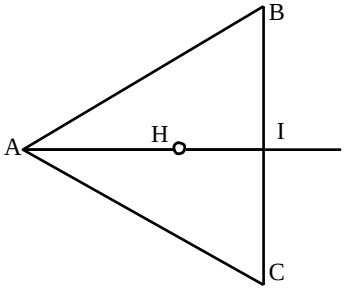


fig. 3

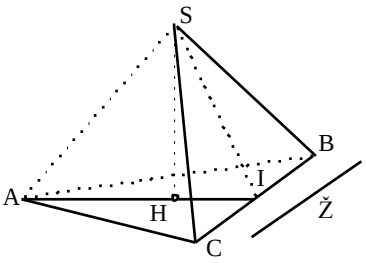


fig. 4

Perspective d'un cercle

Inscrivons un cercle sur chacune des faces d'un cube (fig. 5). Quelle est en la représentation en perspective ? On obtient par le théorème des milieux les images des milieux des arêtes (c'est à dire des points de contact du cercle). L'image par affinité d'un cercle est une ellipse, dont on voit que les axes de symétrie ne sont **ni les diagonales, ni les médianes** du parallélogramme OCB'A' (fig. 6).

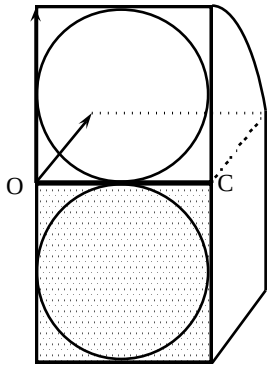


fig. 5

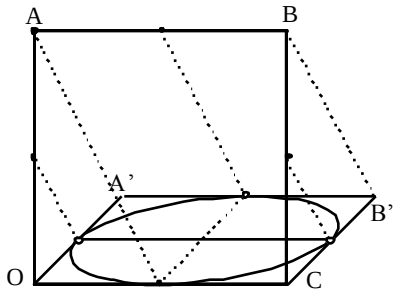


fig.6

Perspective d'une sphère

Considérons maintenant la sphère inscrite dans le cube. Le cube est représenté (fig. 7) avec ses plans médiateurs principaux. Dans chacun des carrés, on inscrit l'ellipse qui est la trace de la sphère (fig. 8).

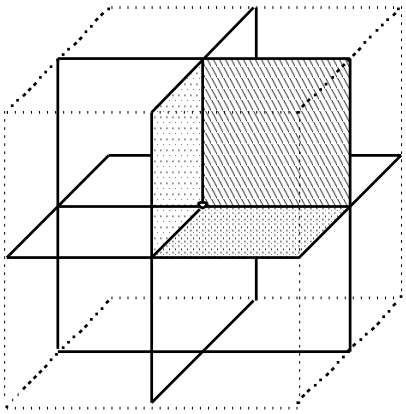


fig. 7

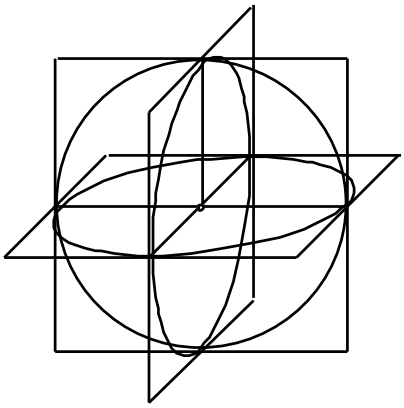


fig. 8

Le contour apparent extérieur de la sphère est l'enveloppe de tous les cercles méridiens. C'est une **ellipse** qui contient le **cercle méridien** parallèle au plan de figure.

Perspective avec point de fuite (Alberti 1435)

La perspective […] doit être mise au premier rang de toutes les sciences et disciplines humaines car elle couronne tant la mathématique que les sciences naturelles

Léonard de V.

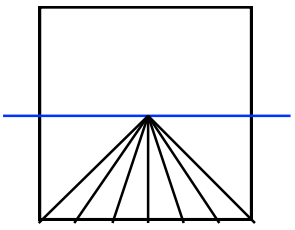


fig. 1

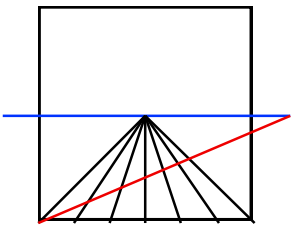


fig. 2

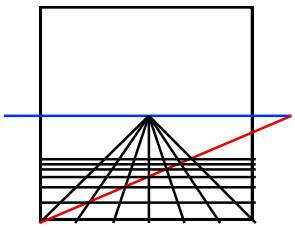


fig.3

Des droites parallèles et horizontales ont un point de fuite sur l'horizon (fig. 1). Ces droites sont équidistantes. Elles sont coupées par une diagonale rouge (fig. 2). Les rectangles déterminés par les diagonales semblent égaux (fig. 3).

Les diagonales BD et BF sont parallèles : elles ont donc le même point de fuite B. Ceci permet de

régler la profondeur (fig. 4).

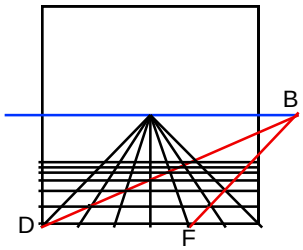


fig. 4

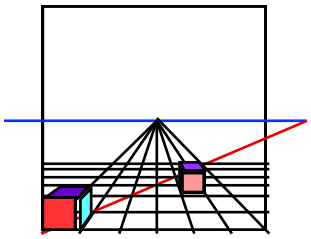


fig. 5

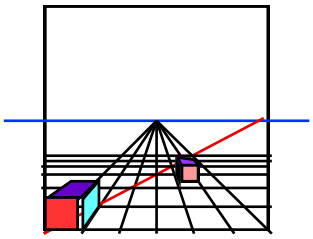
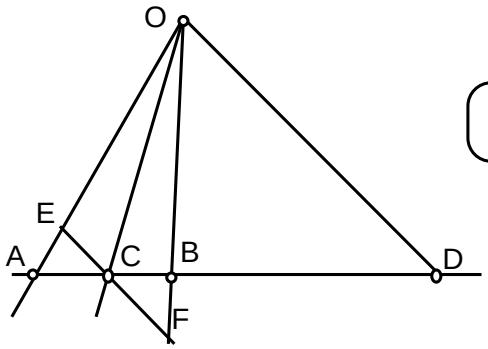


fig. 6

Le choix du point de fuite B sur la ligne d'horizon règle la distance de l'observateur au plan du cadre : en [6], le point de fuite est plus proche du centre, ce qui donne l'impression que l'observateur est plus proche du cadre.

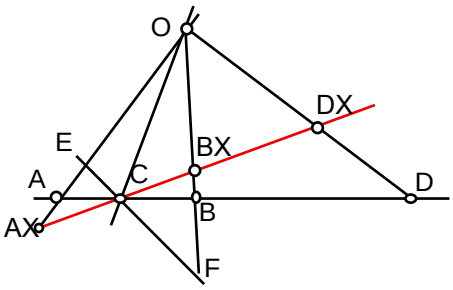
Annexe 5 – Birapport, faisceau harmonique



(A, B, C, D) harmonique $\Leftrightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$

EF // OD [AEC] et [AOD] homothétiques
[BCF] et BOD] homothétiques

AE/AO = AC/AD = EC/OD
BC/BD = BF/BO = CF/OD → CE = CF



Généralisation : $\frac{CA}{CB}$ c $\frac{DA}{DB}$ d c/d = § (birapport)

Mêmes triangles: $\frac{CE}{CF}$ c/d = §

Sur une autre sécante : CAX/CBX = cX DXAX/DXBX = dX

Calcul analogue cX/bX = c/b = § **le birapport est invariant**

Deux faisceaux harmoniques particuliers (birapport = –1) :

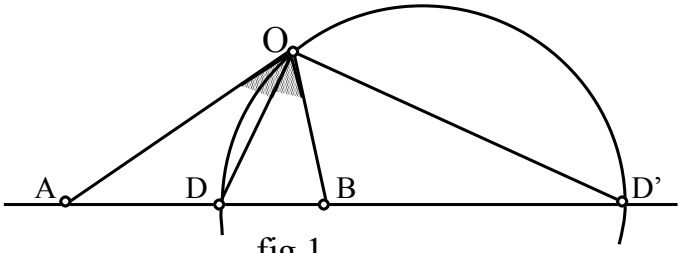


fig.1

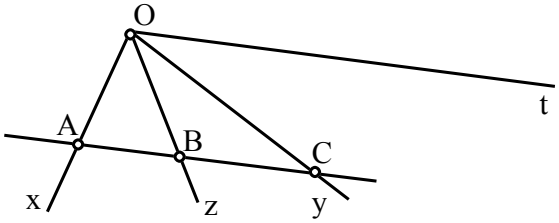


fig.2

- Un angle et ses bissectrices (fig.1) car DA/DB = CA/CB.
- Un triangle avec une médiane et une demi-droite parallèle à la base (relative à cette médiane).

Pôle et polaire :

Soit une division harmonique (A, B, C, D) et les droites Ox et Oy. Une autre sécante passant par A ; M est le **conjugué** de A. L'ensemble des conjugués est la droite (OM) [fig.1]. C'est la **polaire** de A par rapport à Ox, Oy. Réciproquement tous les **pôles** de (OA) sont sur (OB).

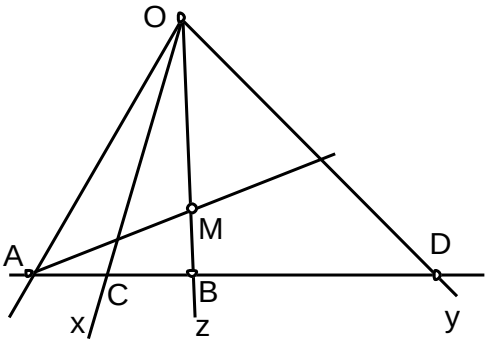


fig. 1

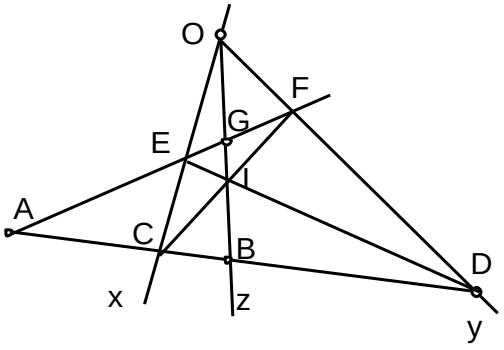


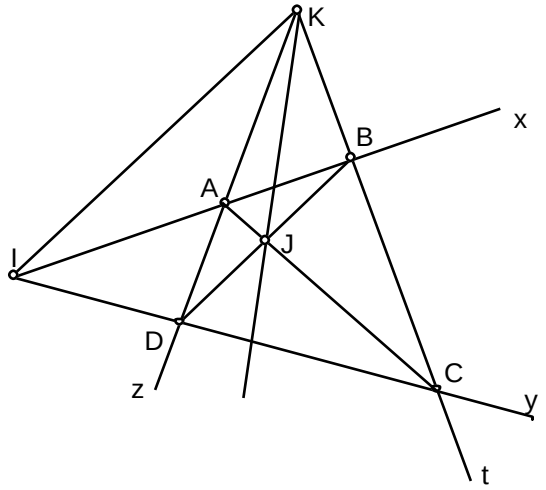
fig. 2

Construction de la polaire (fig. 2)

Soient 2 sécantes passant par A. Les divisions (ABCD) et (AGEF) sont harmoniques.

Soit I l'intersection de CF et ED. Le faisceau (I, ABCD) est harmonique ; donc I appartient à la polaire de A. Donc les points O, G, I, B sont alignés.

Construction : les diagonales du quadrilatère CDFE se coupent en I, (OI) est la polaire de A.



Un quadrilatère complet est formé de 4 droites :
Ix, Iy, Kz, Kt. Ses diagonales sont : IK, AC, BD.

Le faisceau (KI, KJ, KA, KB est harmonique) :

Toute diagonale d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les côtés et les autres diagonales

Exemples, applications

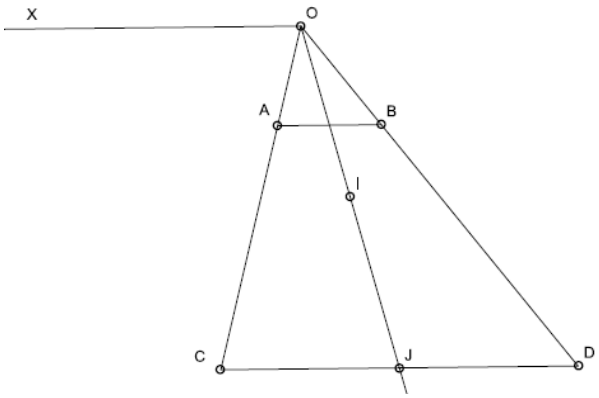


fig 1

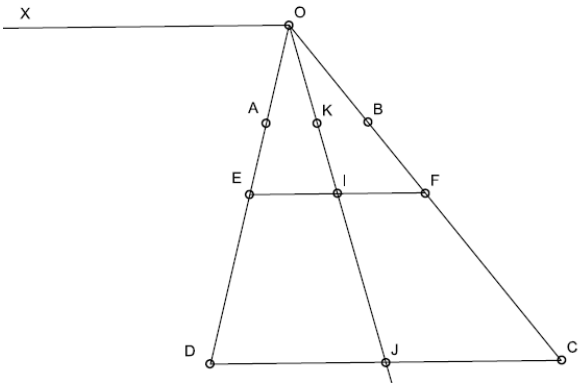


fig. 2

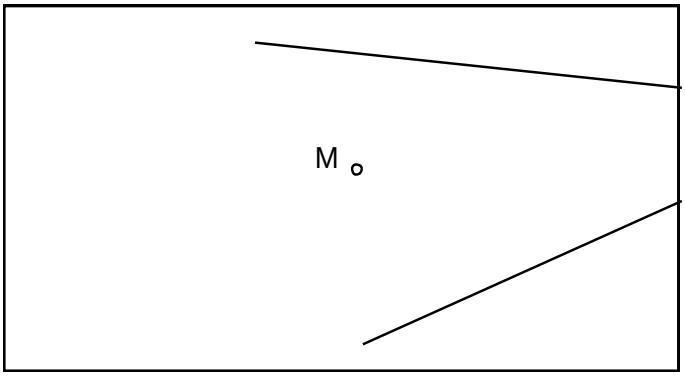
AB // CD // Ox. Le faisceau (O, Ox, OJ, OA, OB) est harmonique. Donc K milieu de AB et J milieu de CD.

Théorème du trapèze (fig. 2). Trapèze ABCD, Ox // bases. Même faisceau harmonique. EF passant par I, parallèle aux bases. Alors I est le milieu de EF.

Problème :

Deux droites D et Δ sont sécantes hors des limites de la feuille. Soit Ω leur point d'intersection.

Construire, avec la règle seule, la droite MΩ



L'ENSEIGNEMENT DE LA SYMÉTRIE ORTHOGONALE À LA TRANSITION ÉCOLE-COLLÈGE

Groupe IREM Transition école-collège[1]
IREM de Montpellier, Université Montpellier 2
aurelie.chesnais@um2.fr

Résumé
Cet atelier propose de questionner la continuité des enseignements entre l'école et le collège en géométrie. Nous nous appuyons pour cela sur le travail mené au sein du groupe IREM de Montpellier « transition école-collège ». Le groupe a notamment travaillé sur l'enseignement de la symétrie orthogonale, notion emblématique des difficultés qui se posent à cette transition. Nous clarifions tout d'abord les enjeux d'enseignement de cette notion en cycle 3 et en sixième, compte tenu des programmes et d'éléments didactiques. Nous présentons ensuite des situations de classe qui ont été élaborées par le groupe et testées dans des classes de CM2 et de sixième. L'analyse de la mise en œuvre de ces situations dans des classes et de réponses d'élèves permet d'en présenter les enjeux, les difficultés et les marges de manœuvre qui s'offrent aux enseignants pour leur mise en œuvre.

Cet atelier vise à présenter le travail du groupe IREM « transition école-collège » de Montpellier, créé en septembre 2012. Le groupe associe des enseignants de cycle 3 et des enseignants de mathématiques de sixième et a fait le choix de travailler sur l'enseignement de la géométrie. Le travail a porté, pour cette première année, sur l'enseignement de la symétrie axiale. Le travail proposé aux participants de l'atelier consiste à étudier deux des premières situations de classes conçues par le groupe (une situation pour le CM2 et une situation pour la sixième) ainsi que des vidéos de séances de classes durant lesquelles ces situations ont été mises en œuvre. L'objectif est ainsi d'obtenir un retour critique sur les réalisations du groupe pour alimenter la suite du travail. Le contenu des échanges durant l'atelier a ainsi nourri l'écriture de ce texte.

Ce choix a été guidé par le fait qu'il s'agit d'une notion emblématique du programme de géométrie qui mobilise de nombreux objets mathématiques ; elle a été déjà largement étudiée, y compris en relation avec des questions de continuité entre école et collège (Perrin-Glorian et al. 2013, Chesnais 2012). Elle est commune aux programmes du cycle 3 et de sixième – comme la plupart des notions de géométrie – avec des contenus quasiment identiques, mais les enjeux se situent dans le changement de perspective nécessaire sur la notion, comme nous le détaillerons plus loin. La question de la continuité est donc particulièrement aigüe à propos de cette notion.

Nous proposons de préciser les enjeux d'apprentissage fondamentaux en ce qui concerne la symétrie axiale puis nous montrons, à travers un exercice pour le cycle 3 et un exercice pour la sixième, comment nous déclinons ces enjeux dans une progression d'apprentissage. L'analyse *a posteriori* de vidéos de séances de classes, durant lesquelles ces exercices ont été mis en œuvre, permet ensuite de mettre en évidence les activités que les élèves peuvent développer sur ces exercices (« tout ce que les élèves font, disent, pensent », cf. Robert 2008), les difficultés des élèves et les conditions de mise en œuvre dans la classe, en particulier en ce qui concerne l'accompagnement de l'activité des élèves par l'enseignant.

[1] Le groupe IREM Transition école-collège de Montpellier est composé de : Fabrice Bonicel (CLG J. Vallès, Nîmes), Laurent Carayon (PEMF, Ecole Boulloche, IUFM, Montpellier), Aurélie Chesnais (MCF, laboratoire LIRDEF, Université Montpellier 2), Damien Delorme (Ecole J. Moulin, Nîmes), Aurélien Destribats (CLG M. Pagnol, Sérignan), Marie Francis (CLG Rabelais, Montpellier), Céline Mathieu (PEMF, Ecole E. Pottier, Montpellier).

I - CONTEXTE DE TRAVAIL

1 Les travaux existants sur lesquels nous nous appuyons

Les travaux de didactique existants sur la symétrie orthogonale à la fin du primaire ou au début du secondaire ont mis en évidence les principaux enjeux et difficultés de son apprentissage.

Ainsi, les principales conceptions erronées de la notion ont été répertoriées par Grenier (1988), puis reprises par d'autres auteurs. Nous retenons les mêmes que dans Chesnais (2012), à savoir la confusion avec d'autres transformations (notamment la translation et la symétrie centrale, mais aussi la rotation), la prégnance des axes horizontaux et surtout verticaux, ainsi que la transformation d'un demi-plan dans un autre, le plus souvent dans une seule direction, en privilégiant les directions de haut en bas et de gauche à droite.

L'enseignement de la symétrie axiale est aussi en prise avec les enjeux plus larges de l'apprentissage de la géométrie. Ainsi, Perrin-Glorian et al. (2013) pointent l'importance de travailler sur des tâches de restauration de figures incluant des contraintes sur l'usage des instruments à la fois pour faire émerger des propriétés de la symétrie (conservation des alignements, le fait que le symétrique d'un point de l'axe est lui-même, etc.) et plus largement la déconstruction dimensionnelle des figures (Duval, 2005). Les programmes d'enseignement de 1985 avaient en outre fait de la symétrie axiale, le pilier de l'axiomatisation de la géométrie du collège et, même si cette logique s'est progressivement perdue dans les programmes suivants (Chesnais, 2012), la symétrie axiale n'en reste pas moins un des supports privilégiés pour l'initiation au raisonnement déductif en sixième.

Le fait qu'il s'agisse d'une transformation géométrique suppose qu'elle caractérise des relations entre figures et non seulement des propriétés de figures, avec toutes les difficultés langagières associées comme l'avait pointé Vergnaud (1991). Nous choisissons, à la suite de Chesnais (2012), de distinguer d'une part, ce qui se rapporte aux axes de symétrie de figures, c'est-à-dire à la symétrie comme propriété d'une figure, que nous qualifions d'aspect statique de la symétrie ; d'autre part, ce qui se rapporte à la transformation comme relation entre deux ensembles de points, que nous qualifions d'aspect dynamique de la symétrie. Notons que l'entrée dans la symétrie, y compris du point de vue purement perceptif et quotidien, se fait en général par la notion d'axe de symétrie, tandis que du point de vue mathématique, l'axe de symétrie correspond au cas particulier de la transformation où la figure et sa symétrique sont confondues.

2 Les enjeux fondamentaux que nous avons retenus

Les différents éléments issus des recherches en didactique des mathématiques et résumés ci-dessus, ainsi que les programmes, nous ont permis de dégager ce qui nous semble être les enjeux fondamentaux de l'apprentissage de la notion de symétrie axiale de l'école au collège. Notons que ceux-ci ne sont évidemment pas indépendants les uns des autres :

- dépasser les conceptions erronées (transformation d'un demi-plan dans un autre, confusion avec d'autres transformations notamment translation, symétrie centrale et rotation, prégnance des axes horizontaux et verticaux) ;

- concevoir la symétrie comme relation entre trois objets, c'est-à-dire en particulier tenir compte du rôle de l'axe dans l'aspect dynamique (et ne pas la voir seulement comme relation entre deux figures), ainsi que concevoir l'axe de symétrie comme étant le résultat du fait que la figure est sa propre symétrique (et non pas seulement comme « droite coupant une figure au milieu »). Cet enjeu est fortement lié à celui qui suit :

- relier les aspects statique et dynamique de la symétrie, c'est-à-dire être capable de relier l'idée d'axe de symétrie d'une figure à celle de symétrique d'une figure par rapport à un axe ;

- acquérir certaines propriétés de la transformation : d'une part, celles correspondant à la définition du symétrique d'un point (orthogonalité de l'axe avec le segment joignant un point et son

symétrique, équidistance à l'axe des deux points) et conservation des mesures et des formes. Cet apprentissage des propriétés est inscrit dans une initiation au raisonnement déductif ;

- maîtriser certains éléments langagiers permettant de verbaliser sur les tâches et les procédures : connaissance des expressions « symétrique (de) », « symétrie (axiale, orthogonale) » et « par rapport à ».

Nous avons ensuite tenté d'élaborer, relativement à chacun de ces objectifs, une progression des apprentissages, du cycle 3 à la sixième.

En particulier, il nous semble qu'un objectif essentiel du CM2 est le dépassement des conceptions erronées, du moins dans les cas les plus évidents, car on sait à quel point elles résistent et peuvent ressortir dès que les élèves sont confrontés à une difficulté nouvelle (Grenier, 1988). Grenier avait également identifié que ces conceptions se manifestent essentiellement lors du travail sur les figures perçues globalement (qui relève davantage du CM2), plus que dans le travail sur les points (qui occupera une large place en sixième).

En ce qui concerne les propriétés citées, il nous semble qu'elles doivent être perçues globalement en CM2, tout en commençant à considérer des points de vue plus locaux (par exemple identifier que les différences de taille de figures, perçues globalement, correspondent à des différences de longueurs de segments correspondants, notamment dans le cas de figures polygonales, ou encore considérer des sommets correspondants de figures polygonales pour préciser la notion de distance à l'axe, etc.), mais que leur formalisation relève de la sixième. Le travail sur les propriétés est alors un moyen de travailler sur la déconstruction dimensionnelle des figures, c'est-à-dire permettre aux élèves d'articuler la vision globale de la figure et des considérations portant sur des éléments de dimension 1 ou 2. De même, en ce qui concerne les éléments langagiers, les élèves doivent y être familiarisés en CM2, mais leur usage rigoureux par les élèves relève de la sixième. Le fait de considérer la symétrie comme relation entre trois objets et de relier les aspects statique et dynamique de la symétrie ne pourront qu'être abordés en CM2, notamment par la variété des tâches réalisées (par exemple en faisant rechercher des axes de symétrie de figures formées par deux sous-figures identifiables par les élèves ou en travaillant des tâches du type « compléter la figure pour qu'elle admette un axe de symétrie », notamment sur quadrillage, ou encore éventuellement en permettant aux élèves d'identifier que les figures qui possèdent un axe de symétrie se superposent à elles-mêmes lorsqu'on retourne un calque par rotation dans l'espace autour de l'axe). Toutefois, l'idée d'invariance globale d'une figure ne pourra être formalisée en CM2, ni complètement maîtrisée en sixième. Enfin, la conception erronée de transformation d'un demi-plan dans un autre – éventuellement dans un seul sens – peut aussi être remise en cause à l'occasion de ces tâches, elle est également en jeu dès que l'axe coupe une figure.

II - EXERCICES TESTÉS

1 Exercices de CM2

L'exercice que nous présentons ici s'inscrit dans une série de cinq exercices (prévus pour être traités en trois à cinq séances) élaborée par le groupe. Pour permettre de mieux comprendre le contexte, nous donnons quelques éléments sur l'organisation de cette séquence.

Dans les deux premiers exercices, les élèves doivent observer l'emplacement de l'empreinte d'une tache de peinture après pliage, puis anticiper l'emplacement et la forme de l'empreinte d'une figure en forme de « L » après le pliage d'une feuille, selon différents cas (variation de la distance de la figure à l'axe, de l'orientation de l'axe et de l'orientation de la figure par rapport à l'axe). À travers cette première phase, nous visons à institutionnaliser le fait que deux figures symétriques sont superposables par pliage le long de l'axe. Outre le fait d'apporter aux élèves une représentation mentale commune – et vérifiable en acte – de la symétrie axiale, ces exercices sont aussi l'occasion de mettre en évidence certaines conceptions erronées, ainsi qu'un certain nombre de propriétés : si une figure est « loin du pli » (resp. « près du pli »), alors son empreinte aussi ; une

figure et son empreinte ont la même forme et la même taille, mais sont retournées l'une par rapport à l'autre. Notons que le vocabulaire utilisé ici participe des enjeux langagiers d'apprentissage mentionnés plus haut. Dans les deux exercices suivants, les élèves doivent identifier si des couples de figures (toujours en forme de « L ») sont ou non symétriques par rapport à l'axe proposé, puis retrouver l'axe dans le cas de couples de figures symétriques l'une de l'autre. L'objectif est également le travail sur les conceptions erronées et les propriétés identifiées lors des premiers exercices. Les derniers exercices sont consacrés à la construction de symétriques de figures sur quadrillage.

L'exercice que nous faisons le choix d'analyser plus précisément dans cet atelier est le troisième de la séquence. La fiche élève est présentée en annexe 1.

1.1 Analyse a priori

Les objectifs de cet exercice se relient aux enjeux identifiés plus haut : il s'agit essentiellement de faire émerger les conceptions erronées afin de permettre aux élèves de les remettre en question et de travailler les propriétés de la symétrie axiale de manière globale (distance à l'axe, conservation des mesures, « retournement » de la symétrique par rapport à la figure initiale). Notons que la propriété d'orthogonalité à l'axe a été volontairement écartée (notamment, aucun cas de symétrie glissée n'est présenté) dans la mesure où nous considérons que le travail sur cette propriété relève de la sixième puisqu'il est associé au passage à la transformation ponctuelle. L'objectif est de développer les images mentales globales que les élèves se font de figures symétriques l'une de l'autre. Notons que l'exercice permet aussi de relier les aspects statique et dynamique de la symétrie car il s'agit à la fois de considérer une transformation qui permet de « passer d'une figure à l'autre » et de trouver l'axe de symétrie d'une figure formée par un couple de sous-figures.

L'émergence des conceptions erronées et leur remise en cause sont assurées par les modalités d'organisation de l'exercice. Celui-ci est prévu pour être traité tout d'abord sans calque, ni pliage, ni instrument de mesure, afin de travailler l'anticipation. Le travail de groupes devrait permettre la mobilisation d'argumentations et d'éléments langagiers. L'usage d'un calque ou du pliage est réservé comme moyen de validation et est l'occasion de remobiliser la définition de figures symétriques comme étant superposables par pliage.

Présentons les caractéristiques et objectifs de chacun des dix cas proposés en fonction des valeurs des variables didactiques retenues :

- **Cas n° 1 :** mettre en jeu la conception erronée « confusion avec la translation », c'est-à-dire qu'il est attendu des élèves qu'ils identifient que l'une des figures n'est pas retournée par rapport à l'autre ou encore qu'on l'a seulement fait « glisser ».
- **Cas n° 2 :** travailler un cas où l'axe est oblique et où la figure « touche » l'axe.
- **Cas n° 3 :** travailler essentiellement l'idée de retournement de la figure et la propriété de conservation de la distance à l'axe.
- **Cas n° 4 :** travailler sur les axes obliques et identifier que l'orientation « horizontale-verticale » d'une figure n'est pas conservée. Toutefois, une difficulté de mise en page a inséré un petit espace entre la figure située en-dessous de l'axe et l'axe, ce qui peut être utilisé comme argument pour invalider la symétrie.
- **Cas n° 5 :** travailler sur les axes obliques et la confusion avec la symétrie centrale : distinguer le retournement de la figure du demi-tour.
- **Cas n° 6 :** remettre en question la prégnance des axes verticaux et travailler le fait que la symétrie est une relation entre trois objets, incluant l'axe. Ce cas peut également être l'occasion d'introduire des expressions comme « les figures ne sont pas symétriques l'une de l'autre **« par rapport à »** l'axe représenté, mais sont symétriques par rapport à un axe vertical ».

- **Cas n° 7 :** mettre en évidence la conservation des mesures. Cela peut être l'occasion de relier la perception globale de taille de la surface avec la mesure d'éléments de dimension 1.
- **Cas n° 8 :** remettre en question la confusion avec la rotation et la translation en mettant en évidence le fait que les figures doivent être retournées l'une par rapport à l'autre.
- **Cas n° 9 :** l'objectif est ici que les élèves rencontrent des cas où la figure est coupée par l'axe. En effet, même si l'on peut décomposer la figure en deux morceaux situés chacun d'un côté de l'axe, on peut supposer que certains élèves reconnaissent la forme « L » et considèrent le symétrique d'une figure coupée par l'axe.
- **Cas n° 10 :** comme dans le cas n° 6, il s'agit de mettre en évidence des figures symétriques l'une de l'autre mais pas par rapport à l'axe tracé. En l'occurrence, la remise en question de la prégnance des axes horizontaux est également visée.

Même s'il ne s'agit pas des enjeux principaux de ces cas, notons que la propriété de conservation de la distance à l'axe peut aussi être mobilisée dans les cas 5, 6, 8 et 10, à condition de considérer des « parties de figures » (par exemple le « coin » ou « la petite branche du L ») ou des sommets : cela peut ainsi être l'occasion de travailler la déconstruction dimensionnelle des figures.

L'institutionnalisation visée porte sur les propriétés de la symétrie axiale déjà identifiées ainsi que sur les moyens d'invalider une proposition (l'invalidation d'une seule propriété suffit pour affirmer que les figures ne sont pas symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe proposé).

1.2 Analyse a posteriori

L'exercice a été mis en œuvre et filmé dans la classe de Clémentine, maître formateur dans une école d'application associée à l'IUFM de Montpellier. La classe compte 22 élèves et le public est hétérogène. La séance a été réalisée au mois de mai.

Repères pour la vidéo

Dans un premier temps, Clémentine reprend les propriétés et les procédures de vérification observées lors des exercices de la tache d'encre et de l'anticipation du « L » sous forme d'un dialogue entre les élèves. Clémentine insiste sur les propriétés de conservation de la symétrie et sur le retournement. Le tableau proposé en annexe 2 rend compte des différents temps et mots clés dans les échanges entre Clémentine et la classe.

Le travail des élèves s'organise ensuite par une réflexion individuelle débattue au sein de leur groupe, puis par une correction collective où les élèves sont amenés à donner leur réponse et justification.

Lors du bilan, Clémentine invite les élèves à s'exprimer sur les différents cas en validant ou invalidant les réponses tout en répertoriant les différentes procédures rencontrées. Le tableau suivant rend compte de ce bilan et des arguments retenus par Clémentine.

Début	Cas n° 1	Non Lorsque tu plies, il n'y a pas superposition. L'image doit être retournée par rapport à la figure de départ
1'40''	Cas n° 2	Oui La figure de départ qui touche le pli Même forme, taille L'image est bien retournée
3'40	Cas n° 3	Oui Même distance, taille et forme L'image est retournée

5'00 -	Cas n° 4	Oui La distance entre la figure et le pli
7'00	Cas n° 6	Non Distance à l'axe Possibilité du oui avec un axe vertical
8'25 9'30	Cas n° 5	Non Image à l'envers, non retournée. Pour avoir une figure correcte, sens de lecture du bas vers le haut
10'35	Cas n° 7	Non, Il est plus gros, la taille n'est pas respectée
11'40	Cas n° 8	Non Difficulté de justification, insistance sur la distance à l'axe Figure devrait être retournée
13'20	Cas n° 9	Oui Cas des figures symétriques chevauchées, identifier le L Rappel de la méthode du calque
16'40	Cas n° 10	Non Pas le même écart
17'27	Bilan	Pourquoi la symétrie **axiale** ? L'axe, c'est le pli L'empreinte, c'est l'image, de l'autre côté.
18'50	Deuxième exercice	Formulation de la consigne
20'50 – 25'36		Institutionnalisation par Clémentine *Quand on fabrique une nouvelle figure (image) en pliant le long d'une droite (axe), on fait une symétrie.* *L'image a la même forme, même taille et séparée de la même distance de l'axe que la figure de départ. L'image est retournée.*

Synthèse sur la séance

Certaines spécificités de la symétrie axiale peuvent être explorées au travers des différents usages du papier calque. On peut recenser deux principales procédures : soit par retournement complet des deux figures décalquées, soit par retournement (le long de l'axe) d'un unique demi-plan dans l'autre. Les deux mouvements conduisent ensuite à la vérification de la superposition. La première est liée à une transformation complète du plan, tandis que la seconde véhicule l'image un demi-plan dans l'autre. Ces deux types d'usage renforcent une rupture entre les aspects statique et dynamique dans la symétrie, alors que nous visons davantage une réunification des deux. Clémentine rappelle ces procédures de vérification mais en limite l'usage lors de la validation pour favoriser l'utilisation des propriétés de la symétrie par les élèves, conformément aux objectifs de l'exercice.

Le déroulement de la séance filmée informe sur la prégnance des conceptions des élèves, comme la propriété d'équidistance à l'axe d'une figure et de son symétrique. A ce stade d'apprentissage, cette notion reste encore perçue globalement par les élèves : la caractérisation mathématique formelle de la distance à l'axe est encore inconnue des élèves et suppose une certaine déconstruction dimensionnelle des figures (Duval, 2005). Un autre argument qui apparaît souvent dans la séance consiste en une formulation vague des propriétés : « elles [les figures] sont identiques », « c'est les mêmes », etc. Cette difficulté d'identification et/ou de formulation des

propriétés, outre le fait qu'elle traduit une perception globale, souligne également les notions langagières en cours de construction et le lien étroit qui existe entre l'utilisation d'un vocabulaire adapté et la reconnaissance des propriétés visées. En marge de ce travail de justification, quelques remarques d'élèves indiquent une conception dynamique de la symétrie par le sens de lecture qu'ils utilisent (de gauche à droite ou de haut en bas et inversement), notamment dans le cas n° 5 où certains ont un sens de lecture du bas vers le haut et considèrent que c'est la figure du haut qui ne convient pas. Notons que c'est l'occasion pour Clémentine de mentionner la symétrie de la relation de symétrie : elle fonctionne « dans les deux sens ». L'aspect dynamique de la symétrie axiale ne semble pas faire obstacle dans le cas n° 9 (figure coupée par l'axe) qui pourtant favorise une perception statique.

L'action de l'enseignante se concentre sur le repérage du travail des élèves, qui permet d'orienter la synthèse et de fixer le niveau de justification. Clémentine s'emploie à rectifier constamment les maladresses des élèves dans leur vocabulaire afin d'introduire les propriétés spécifiques à la symétrie axiale et les compétences langagières pour les dire. Les questions posées par l'enseignante dans chaque cas tournent autour de l'anticipation des raisons pour lesquelles les deux figures ne peuvent se superposer, attendant des élèves qu'ils précisent la propriété particulière qui fait défaut. L'enseignante fait l'inventaire des propriétés rencontrées[2] (équidistance à l'axe, figure retournée, même taille, même forme) et l'institutionnalise en précisant son usage, dans chaque cas, par un travail de reformulation des réponses des élèves.

Afin de travailler l'anticipation, la représentation mentale de la symétrie et ses propriétés globales (notamment le retournement, les conceptions erronées, etc.), l'enseignante ne doit utiliser le calque ou le pliage qu'en dernier recours. Cette contrainte forte entraîne une difficulté pour l'enseignant, lors du bilan, consistant à prendre en compte et à hiérarchiser l'ensemble des arguments des élèves sans délaisser un aspect plutôt qu'un autre. Par exemple, le cas n° 8 peut être argumenté perceptivement selon la distance à l'axe, alors que l'argument principal de l'enseignant peut reposer sur le retournement. L'argument d'équidistance, délicat du fait d'une impossibilité de définition rigoureuse, devient pertinent seulement lorsque les deux figures sont symétriques par rapport à un autre axe que celui tracé. Cette notion reste problématique pour l'enseignant qui doit néanmoins rendre accessible cette connaissance aux élèves. Plus généralement, l'exercice peut être l'occasion d'un travail sur la déconstruction dimensionnelle des figures, passant d'une perception en termes de surfaces délimitées par un contour à un travail sur des éléments 1D (les côtés), voire 0D (les points).

Dans un objectif de travail en continuité entre le cycle 3 et la sixième, ayant privilégié comme objectif le dépassement de conceptions erronées en cycle 3, il nous est apparu important de travailler essentiellement l'aspect global, tout en mobilisant ponctuellement des éléments de dimension 1 ou 0, pour dévoluer à la classe de sixième le travail des propriétés à l'échelle des points.

2 Exercice d'introduction en sixième

Le groupe s'est parallèlement questionné sur la symétrie axiale en sixième, devenant, selon les programmes, la symétrie orthogonale. La ressource (cf. fiche élève en annexe 3) constitue une première ébauche de notre travail à ce niveau. Elle a été élaborée à partir d'un document proposé par un membre du groupe et retravaillé par le groupe.

La diversité des enseignements de cette notion au cycle 3 accentue les écarts entre les connaissances des élèves et il appartient à l'enseignant de faire émerger cet ensemble disparate de

[2] Notons que la propriété d'orthogonalité n'est pas mentionnée à ce niveau, même si elle est implicite dans la définition de la symétrie à partir du pliage. Nous considérons en effet qu'elle ne relève pas du cycle 3, sauf pour évoquer la conception erronée de confusion entre la symétrie orthogonale et la symétrie glissée, mais celle-ci n'est pas apparue très prégnante chez les élèves dans des travaux antérieurs (Chesnais, 2012). C'est pourquoi cet enjeu n'est pas pris en charge dans la séquence proposée.

connaissances et procédures, de les unifier et de les retravailler dans l'optique du passage de la géométrie de l'école à la géométrie fondée sur les propriétés des figures (passage de la géométrie 1 à la géométrie 2, Houdement et Kuzniak, 2000). Notre questionnement porte sur la phase de remobilisation des connaissances et du vocabulaire des élèves lors de l'introduction de la notion de symétrie axiale. Il s'agit donc d'élaborer une situation d'introduction de la symétrie axiale servant également de diagnostic des connaissances.

Les objectifs de l'exercice

- Harmoniser le vocabulaire mobilisé par les élèves et systématiser l'emploi de l'expression complexe « … symétrique de … par rapport à … ».
- Caractériser des figures symétriques par rapport à un axe comme superposables par pliage le long de l'axe.

2.1 Analyse a priori

Spécificités de l'exercice

Il s'agit de reconnaître une propriété de symétrie (ou non) dans des couples de figures. Ce type de tâche permet de travailler la symétrie à la fois dans son aspect statique et dans son aspect dynamique en créant un lien entre les deux. En effet, il s'agit de trouver si deux figures sont symétriques l'une de l'autre, c'est-à-dire s'il existe un axe de symétrie pour le dessin constitué des deux parties. Nous travaillons ainsi dans la continuité du CM2 avec une approche globale de la symétrie, et en reprenant l'idée de relation entre deux figures, présentée ici comme propriété d'un couple de figures. Notons que le choix de cette introduction « mixte » de la symétrie est largement partagé dans les manuels scolaires (Chesnais, 2012).

Il comporte plusieurs spécificités qui nous semblent pertinentes pour une situation d'introduction :

- Aucune indication sur les attentes de la symétrie axiale n'est présente dans la consigne, pour éviter les effets de contrat et travailler la disponibilité des connaissances, c'est-à-dire la capacité des élèves à les mobiliser alors qu'elles ne sont pas indiquées (Robert, 2008). Le choix de parler de « situations » vise à inciter les élèves à rechercher des relations entre les éléments des couples de figures plus que des propriétés de figures.

- Une utilisation libre des instruments et du calque, laissant s'exprimer toutes les connaissances spontanées des élèves.

- L'éventail des procédures de justification peut permettre l'émergence des propriétés de conservation de la symétrie axiale.

Certains choix volontaires, comme l'absence de l'axe, la composition de figures doubles ou leur nature même, comportent quelques caractéristiques à prendre en compte. Les figures doubles véhiculent l'idée de déplacement d'une figure ce qui peut permettre une première appréhension de la symétrie comme transformation (aspect dynamique) même si cette idée de déplacement peut poser problème plus tard, notamment pour concevoir l'idée de transformation du plan. L'absence de l'axe tend *a priori* à affaiblir le lien entre les trois objets d'une symétrie axiale, mais l'objectif est bien de le mettre au centre de l'institutionnalisation de la symétrie comme superposition par pliage le long d'un axe.

La formulation de la consigne comporte une marge d'interprétation que l'enseignant devra maîtriser pour atteindre les objectifs fixés. Le sous-entendu d'exactement quatre situations (et pas plus) peut passer inaperçu chez les élèves qui peuvent exhiber six situations (ce qui est mieux que quatre !) partageant un point commun (par exemple : « On a reproduit une figure »). Les mots « propriété » et « figure » sont aussi sources de confusion. Que désigne le mot figure ? Dans les situations 5 et 6, on peut légitimement penser que les élèves perçoivent l'ensemble comme une seule figure (pour clarifier, nous considérerons par la suite que chaque situation est composée de

deux figures). Le mot « propriété » peut aussi être discuté : Que dire d'un élève qui recherche des propriétés dans les figures, comme les angles, le parallélisme, etc., et non pas entre les figures ?

Enfin, le matériel autorisé permet une grande diversité dans les manipulations et les observables sous-jacents (longueurs, angles, parallélisme). En particulier, le papier calque est une incitation forte pour la superposition des figures, et donc une incitation à mobiliser la symétrie.

Les 6 situations révèlent des choix de valeurs de variables didactiques que nous décrivons brièvement :

- Situation 1 : axe vertical, figures par assemblage de triangles, un côté parallèle à l'axe,

- Situation 2 : axe oblique, aucun côté ni parallèle à l'axe ni horizontal ou vertical.

- Situation 3 : cas d'une translation (direction horizontale) : symétrie avec un « axe vertical » suggérée par l'aspect général de la figure (un côté parallèle au bord de la feuille, qui semble posée à la verticale).

- Situation 4 : symétrie centrale avec des côtés verticaux. Possible confusion avec un « axe oblique ».

- Situation 5 : axe oblique, figure simple coupée par l'axe. On s'attend à deux types de procédures : soit on observe deux triangles qui se chevauchent et laissent apparaître l'axe, soit on considère les deux triangles comme composants d'une seule figure globale possédant un axe de symétrie.

- Situation 6 : axe horizontal avec deux côtés de la figure parallèles à l'axe ; les figures se touchent en un point.

Par rapport à nos enjeux

- Cette tâche permet le travail sur les conceptions erronées par la confusion possible avec d'autres transformations du plan (symétrie axiale et translation), et comporte un équilibre entre axe vertical/horizontal et oblique.

- Enjeux sur la conception de la symétrie et la transition avec le cycle 3 : (ré-)expliciter le fait que deux figures symétriques sont deux figures qui se superposent par pliage le long d'un axe et le fait que dans ce cas, une figure est retournée par rapport à son image.

- Aspect dynamique/statique en travaillant sur une tâche « mixte » : en cherchant un axe de symétrie dans les situations (aspect statique), la particularité des « figures doubles » fait que la transformation (aspect dynamique) est présente et qu'on peut le faire émerger (nécessaire pour la définition que l'on vise).

- Les situations portent des figures doubles et ne privilégient pas un sens de lecture gauche/droite ou haut/bas, ni une transformation d'un demi-plan dans un autre.

- Propriétés de la symétrie : conservation des mesures et des formes, mais peu la conservation de la distance à l'axe, sauf si on cherche à caractériser la position de l'axe dans les situations 1, 2 et éventuellement 6. On retrouve ici le cadre de travail en cycle 3, laissant volontairement de côté la propriété d'orthogonalité.

- Compte tenu de la possible richesse des recherches des élèves, les compétences langagières, et leur usage pour rendre compte des procédures et objets conceptuels manipulés, constituent un enjeu fort. On peut notamment imaginer, en lien avec la symétrie, la mobilisation d'un lexique composé des mots : *symétrie, axiale, axe, figure, superposable, pliage*, éventuellement *transformation*, etc. ainsi que celle d'expressions permettant de signaler le rôle de l'axe : pliage *le long de* l'axe, symétrique de … *par rapport à* …

- L'enjeu de l'axe (relation entre 3 éléments) : l'exercice introduit l'axe comme pli. À noter que la superposition du calque par retournement du couple de figures pour chaque situation fonctionne et masque le rôle de l'axe et du pli. L'usage du calque, compte tenu des objectifs visés, peut donc constituer un obstacle.

2.2 Analyse a posteriori

Description synthétique de la séance filmée

La séance a été filmée dans la classe de Fabien, enseignant expérimenté exerçant dans un établissement à recrutement « mixte ». La classe compte 20 élèves. La séance a été filmée au mois de décembre.

1ère phase : Consignes de l'exercice

- Lecture individuelle puis « collective » de l'énoncé par un élève.
- Reformulation par l'enseignant de l'expression « propriété commune » : « particularité commune » / « point commun ».
- Reformulation de la consigne par l'enseignant qui insiste sur deux points : l'identification des quatre situations parmi les six et la nécessité de justifier. L'enseignant rappelle également le matériel disponible.

2ème phase : Recherche individuelle

L'enseignant circule et recueille les procédures des élèves dans le but d'organiser la phase suivante.

3ème phase : Débat / Bilan

L'ordre des propositions est choisi par l'enseignant selon ses observations. Le dialogue est piloté par l'enseignant.

- Proposition 1 : Angles droits.
  Rejetée (par vérification à l'équerre) car la propriété n'est pas commune à quatre situations.
- Proposition 2 : Toutes les longueurs sont égales (comparaison des « doubles figures »)
  Rejetée car la propriété est commune aux six situations.
- Proposition 3 : Superposition des « doubles figures ».
  Rejetée car la propriété est commune aux six situations.
- Proposition 4 : Superposition par pliage.
  Validée par l'utilisation du papier calque. Le mot « symétrique » est introduit par un élève lors de cette phase.

Analyse des copies d'élèves

Sur 15 productions analysées[3], 7 élèves identifient la propriété de symétrie (5 élèves ont identifié la bonne propriété et les bonnes configurations, 2 élèves ont identifié la bonne propriété et trois situations sur les quatre – sauf la situation 5) et 8 élèves n'identifient pas la propriété ou l'identifient mal.

Analyse du déroulement

Lors de la première phase, l'enseignant a œuvré sur la consigne afin de clarifier ses attentes pour la phase de recherche en renforçant l'investigation des élèves sur une caractéristique commune partagée par quatre situations parmi les six. Le sous-entendu du « exactement » quatre situations reste un point difficile à percevoir pour les élèves, malgré le pilotage de l'enseignant.

Malgré la formulation de la consigne, de nombreux élèves cherchent des propriétés des figures (prégnance forte de la mesure et des angles droits) et peu se tournent spontanément vers la

[3] Les autres se sont révélées illisibles.

symétrie, alors que la suggestion du papier calque laisse penser que cela pourrait induire des effets de contrat.

La phase bilan de l'exercice, dirigée par l'enseignant, laisse percevoir les différentes procédures des élèves qui, selon le matériel utilisé, mobilisent un grand nombre de connaissances, généralement liées aux mesures et aux propriétés locales des figures (leur perception des figures a manifestement évolué depuis le cycle 3). Si ces propriétés, comme celles portant sur les angles, les longueurs, les aires, etc., ne sont pas directement liées à la symétrie, elles n'y sont néanmoins pas étrangères. Il appartient à l'enseignant de les raccrocher aux propriétés de la symétrie (même forme, même taille, etc.).

La gestion du bilan est complexe, du fait de l'objectif de viser la propriété « les figures sont superposables par pliage le long d'un axe ». Alors que le retournement du calque entraine en effet une autre caractérisation de la symétrie, tout aussi pertinent dans la résolution de cet exercice, mais que l'enseignant choisit d'écarter. Il s'appuie sur les élèves qui décalquent les deux figures et essaient de plier pour qu'elles se superposent, ou ceux qui en décalquent une et qui essaient de superposer sur l'autre, mais sans forcément retourner.

Un autre enjeu qui apparaît lors du bilan est la formulation de la propriété : certains élèves évoquent la superposition des deux figures, mais sans préciser davantage. Or certaines interventions laissent penser que, pour certains élèves, cela sous-entend « par pliage », tandis que pour d'autres, ce n'est pas le cas. L'enseignant précise la nuance et insiste sur le rôle de l'axe, notamment à l'aide des situations 3 et 4.

Durant le débat, les enjeux langagiers portent sur les aspects privilégiés par l'enseignant, que ce soit ceux des propriétés de la transformation ou ceux des relations entre les objets dans le cas d'une symétrie axiale.

Synthèse de la séance

L'analyse de ce type de tâche et l'observation d'un déroulement effectif renseignent sur les enjeux fondamentaux d'apprentissage de la symétrie axiale. Cependant, certains nœuds dans le déroulement reflètent les choix réalisés par l'enseignant : il oriente le travail vers une conception de la symétrie par action de pliage le long d'un axe, renforçant ainsi la relation entre les trois éléments. Cette introduction de la symétrie comme transformation repose sur l'utilisation d'un vocabulaire spécifique lié aux conceptions visées, dont l'enseignant est une nouvelle fois le garant. Le fil conducteur du travail offre l'avantage de rester dans une perception globale de la symétrie, cohérente avec l'approche du cycle 3, tout en permettant de mobiliser une conception des figures plus élaborée que celle du cycle 3. En revanche, ces mêmes choix induisent de mettre en avant l'aspect dynamique de la symétrie axiale, au détriment d'un aspect statique qui pourrait être davantage exploité. Cela permettrait notamment d'expliquer les difficultés des élèves à identifier la propriété de symétrie dans la situation 5.

III - CONCLUSION

La continuité de l'enseignement de la symétrie axiale entre le cycle 3 et la sixième tient donc selon nous à l'explicitation des enjeux spécifiques de chaque niveau, qui n'est pas suffisamment prise en compte dans les programmes, ainsi qu'à la déclinaison progressive des enjeux communs aux deux niveaux.

Ainsi, nous pensons qu'un des objectifs principaux du cycle 3 est le dépassement de conceptions erronées, très prégnantes chez les élèves (confusion avec translation ou symétrie centrale, prégnance des axes horizontaux et verticaux, transformation d'un demi-plan dans un autre) ; il appartient aussi à l'école de travailler l'usage effectif du pliage et du calque pour la validation et la construction de figures symétriques, notamment dans l'objectif de caractérisation de couples de figures symétriques par rapport à un axe comme étant superposables par pliage le long de cet axe. La classe de sixième doit être l'occasion de consolider ces acquis, tout en les approfondissant : le

travail sur les conceptions erronées reste à consolider (et doit être poursuivi en cinquième en particulier lors du travail sur la symétrie centrale) et la référence au pliage et au calque doit être retravaillée (rappelons que les programmes préconisent de s'appuyer sur des manipulations effectives). Certains enjeux relèvent des deux niveaux, tout en étant déclinés de façon différente : le travail sur les propriétés de la symétrie (conservation des mesures, de la forme, de la distance à l'axe, retournement) reste non formalisé et plus global au cycle 3, même s'il peut aussi être l'occasion d'un travail sur la déconstruction dimensionnelle des figures, par exemple en évoquant des mesures de segments etc. La classe de sixième est le lieu d'une formalisation des propriétés, de leur caractérisation en termes de points, ainsi que de la rencontre avec la propriété d'orthogonalité à l'axe. De même, le caractère ternaire de la relation de symétrie, incluant le rôle de l'axe doit être rencontré explicitement au cycle 3, par exemple en rencontrant des figures qui sont symétriques mais pas par rapport à l'axe tracé, et doit être poursuivi en sixième. Enfin, un enjeu important est aussi, à terme, l'articulation des aspects statique et dynamique de la symétrie, ce qui est visé étant que l'existence d'un axe de symétrie est le corollaire de l'existence d'une symétrie conservant globalement la figure. Dans cet optique, il nous semble fondamental de travailler les deux aspects de la symétrie (l'existence d'axes de symétrie de figures et la transformation symétrie) ainsi que leur articulation dès le cycle 3. Certains des exercices mentionnés dans cet atelier visent cet objectif.

Des enjeux concernant des compétences langagières sont dialectiquement liées à ces enjeux conceptuels : la formulation de relations entre objets mathématiques, en particulier de relations ternaires présente des difficultés non négligeables ; ainsi, l'usage d'expressions comme « la figure F est la symétrique de la figure G par rapport à la droite (d) » ou d'autres formulations équivalentes doit faire l'objet d'un enseignement explicite en sixième, mais il nous semble qu'il devrait être rencontré au cycle 3.

Toutefois, l'analyse de la mise en œuvre en classe de certains des exercices élaborés par le groupe montre que la complexité de la notion et la multiplicité des enjeux impliquent une certaine complexité de la gestion des phases de travail en classe. Une bonne gestion passe par la clarification, tant pour le professeur que pour les élèves, des enjeux d'apprentissage, du travail sur les formulations, de l'explicitation des raisonnements. Un élément clé nous semble être l'importance de la maîtrise des enjeux d'apprentissage de la notion par l'enseignant pour une analyse efficace en temps réel des procédures et des connaissances mobilisées par les élèves, afin d'ajuster les déroulements aux objectifs visés.

IV - BIBLIOGRAPHIE

CHESNAIS A. (2012). L'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième : des contraintes, des ressources et des choix. *Recherches en didactique des mathématiques,* 32(2), 229-278.

DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et sciences cognitives,* vol 10, pp. 5-53.

GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de l'université Joseph-Fourier, Grenoble 1.Perrin

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques* 20(1), pp. 89–116.

PERRIN-GLORIAN M.J., MATHÉ A.C. & LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments, *Repères IREM,* 90, pp. 5-41.

ROBERT A. (2008) Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 33-44). Toulouse : Octarès.

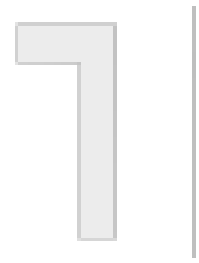
VERGNAUD G. (1991) Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques, Revue Française de Pédagogie, vol. 96, pp. 79-86.

V - ANNEXE 1 EXERCICE DE CM2

Consigne : Dans chaque cas, a-t-on fait une symétrie axiale par rapport à la droite tracée ?

Entourer *oui* ou *non* selon les cas.

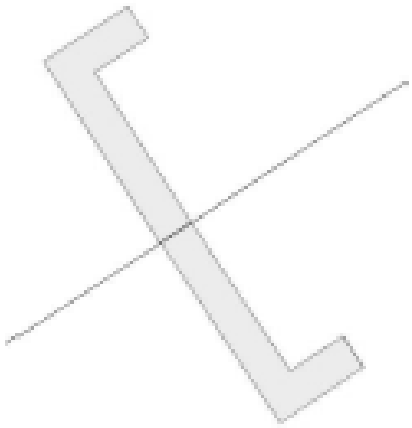
Cas n°1 :



Oui Non

Correction Oui Non

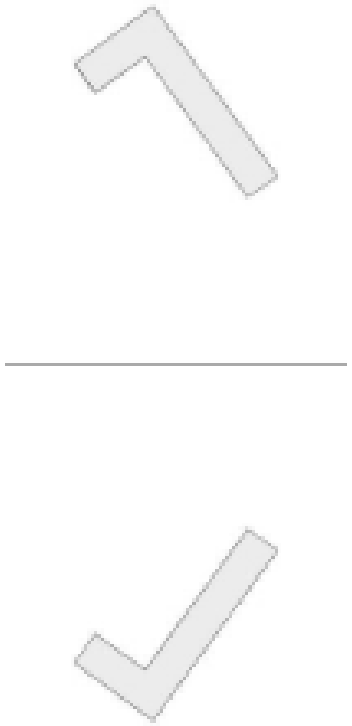
Cas n°2 :



Oui Non

Correction

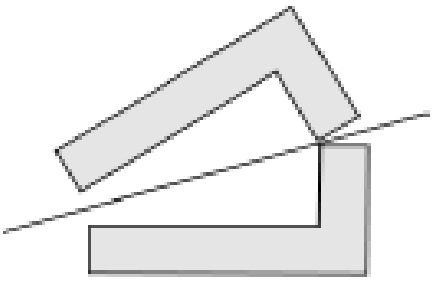
Cas n°3 :



Oui Non

Correction

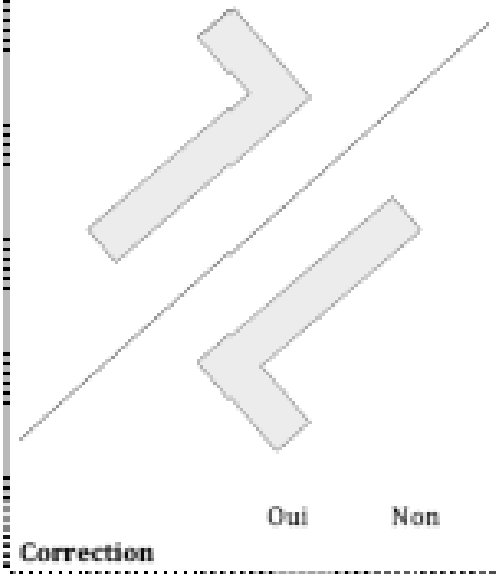
Cas n°4 :



Oui Non

Correction

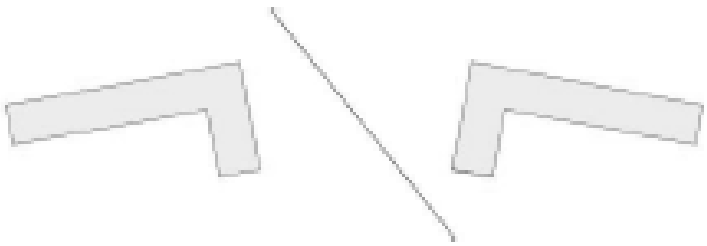
Cas n°5 :



Oui Non

Correction

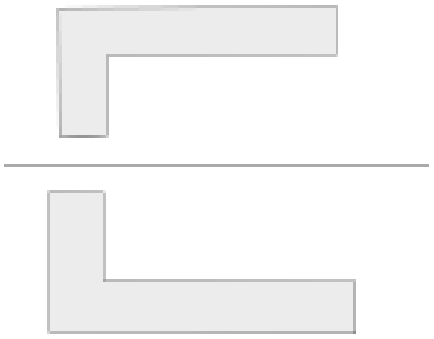
Cas n°6 :



Oui Non

Correction

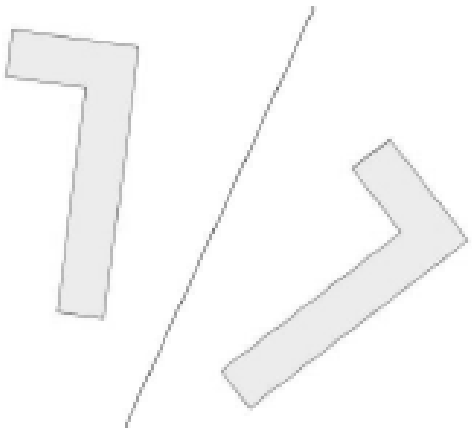
Cas n°7 :



Oui Non

Correction

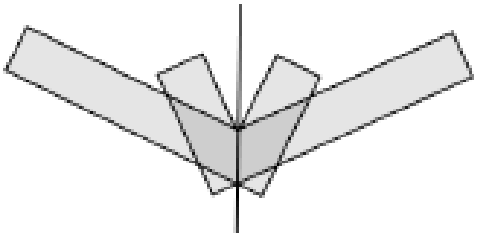
Cas n°8 :



Oui Non

Correction

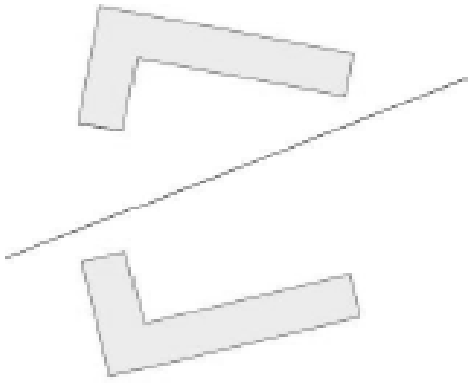
Cas n°9 :



Oui Non

Correction

Cas n°10 :



Oui Non

Correction

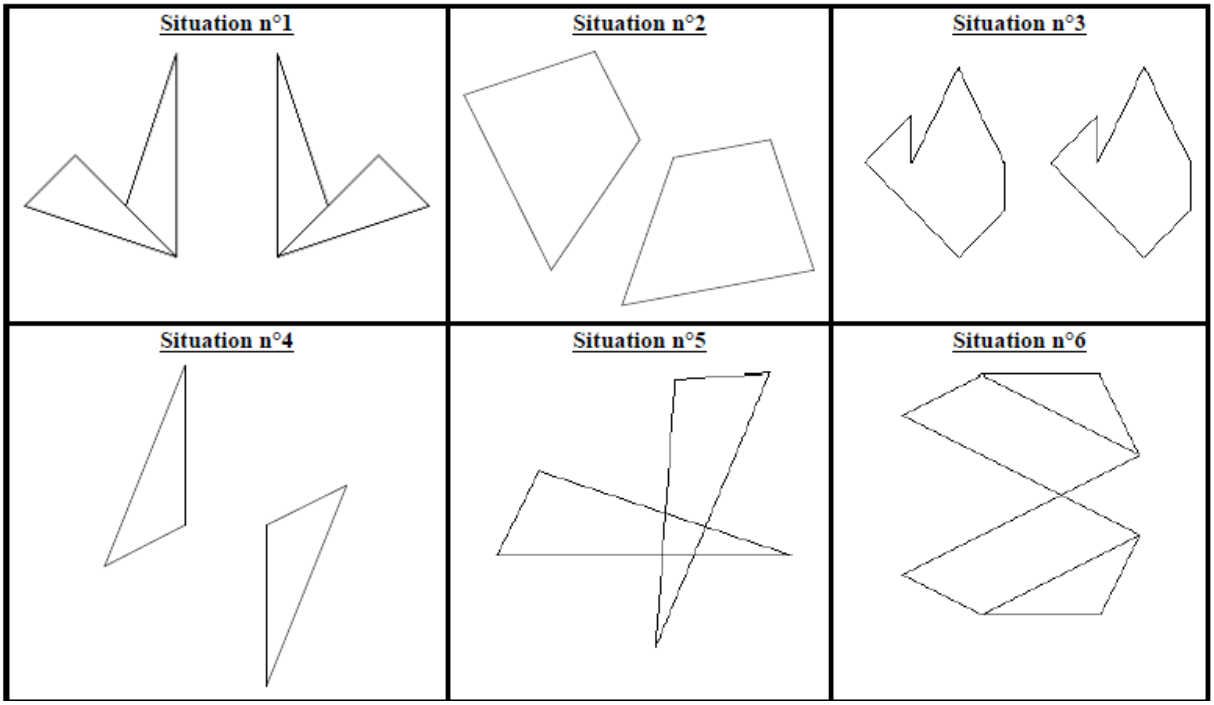
VI - ANNEXE 2 DÉBUT DE LA SÉANCE – CLASSE DE CLÉMENTINE

Début 1'00	Quelles conclusions sur l'image, l'empreinte et le pli lors de la séance précédente ?
1'45	Le mot symétrique.
2'00	Empreinte dans l'autre sens… retournée.
2'40	Aussi proche, même écart par rapport au pli.
3'30	Identique ; Même forme, même taille.
4'50	Consigne sur l'exercice à faire et questionnement sur les moyens disponibles pour vérifier une symétrie ?
6'00	Par pliage puis transparence ; Usage du calque. Consigne spécifique : Interdiction de plier directement ou d'utiliser le calque pour répondre, ou d'utiliser un papier calque.

VII - ANNEXE 3 EXERCICE DE SIXIÈME

Parmi les 6 situations ci-dessous, 4 d'entre-elles représentent des figures qui ont une propriété commune. Lesquelles ? Quelle est cette propriété commune ? Expliquer de manière détaillée votre réponse.

Matériel disponible : Instruments de géométrie / papier calque



ENRICHISSEMENT D'UNE VISION NON ICONIQUE AVEC UN LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE ET PRÉMISSES D'UNE GÉOMÉTRIE AXIOMATIQUE-NATURELLE (GII)

Sylvia COUTAT
Maître assistante, Université de Genève
Equipe DiMaGe
Sylvia.Coutat@unige.ch

Résumé
Cet atelier s'inscrit dans la continuité de l'atelier B1 animé par S. Coutat et R. Falcade lors du précédent colloque COPIRELEM (Coutat, Falcade 2013). Nous avions orienté ce précédent atelier sur l'étude de l'enseignant dans la mise en œuvre d'une séquence de géométrie utilisant un logiciel de géométrie dynamique en fin de primaire. Nous reprenons de nombreux éléments dans ce présent atelier en nous intéressant plus particulièrement aux connaissances des élèves en jeu dans des activités utilisant un logiciel de géométrie dynamique. La géométrie du cycle 3, orientée vers les propriétés, est le support des activités travaillées en classe, les enjeux de cette géométrie sont précisés dans une première partie à travers les travaux de Braconne Michoux (2008) alliés aux travaux de Houdement et Kuzniak (1998) et de van Hiele (1958). Nous présentons ensuite les travaux de Duval et Godin (2005), et ceux de Offre, Perrin et Verbaere (2006) sur l'évolution du regard des figures géométriques avec l'usage des instruments. Dans une deuxième partie nous analysons deux activités issues d'une ingénierie didactique sur l'introduction d'un Logiciel de Géométrie Dynamique au début du cycle 3. Cette introduction du dynamisme dans l'apprentissage de la géométrie vise une évolution de la réflexion des élèves vers la prise en compte des propriétés. L'utilisation d'un Logiciel de Géométrie Dynamique s'accompagne de l'introduction d'une nouvelle règle de contrat didactique : *une construction est valide si elle conserve ses propriétés au cours du déplacement*. Dans la troisième partie l'analyse de deux élèves démontre à la fois la difficulté dans le changement de regard souhaité chez les élèves et l'évolution positive de la réflexion de ces derniers. Un bref compte-rendu du travail des participants est présenté dans la quatrième partie. La dernière partie expose quelques éléments de conclusion.

I - QUELQUES ÉLÉMENTS THÉORIQUES

1 Paradigmes géométriques et niveaux de van Hiele

La pratique de la géométrie évolue avec la scolarité. Afin d'identifier quels types d'activités et de raisonnements peuvent être traités à l'école primaire, nous utilisons les paradigmes géométriques développés par Houdement et Kuzniak (1998). Ils identifient trois paradigmes géométriques. Le paradigme G1, la *géométrie naturelle*, ce paradigme a pour source de validation la réalité et le sensible, la déduction s'appuie sur la manipulation d'objets réels et l'utilisation d'instruments. Le paradigme G2, la *géométrie axiomatique naturelle*, s'éloigne de la réalité il aspire à être un schéma de la réalité. La validation s'appuie sur une axiomatique et la mise en œuvre de démonstration. Le paradigme G3, la *géométrie axiomatique formaliste*, se détache complètement de la réalité. L'axiomatique n'est plus inspirée du sensible mais de la logique formelle. Le paradigme G3 étant plutôt associé à la géométrie pratiquée au post obligatoire (lycée et plus), nous nous limitons aux paradigmes G1 et G2 et à leur articulation. Afin d'ajouter une certaine finesse dans la distinction et d'éventuelles relations entre ces deux paradigmes nous utilisons les travaux de Braconne Michoux (2008) qui elle-même s'appuie sur les travaux de van Hiele (1958). Van Hiele définit cinq niveaux de pensées géométriques dans l'évolution des connaissances géométriques. Au niveau 0 (N0),

appelé niveau de *visualisation*, les objets géométriques sont identifiés par leur forme globale. Au niveau 1 (N1), niveau *d'analyse*, des propriétés sont associées aux objets géométriques. Cependant, ces propriétés ne sont pas reliées entre elles. Ces liaisons apparaissent au niveau 2 (N2), appelé *déduction informelle*, mais elles ne permettent pas encore de relier les objets entre eux. Dans le niveau 3 (N3), *déduction formelle,* les liaisons se forment et s'organisent certaines déductions formelles. Le dernier niveau (N4), *niveau de rigueur*, correspondrait à l'état des connaissances du mathématicien expert. En utilisant les travaux de van Hiele (1958) Braconne Michoux (2008) complète les paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak (1998) et l'articulation G1/G2 : elle montre que le niveau *d'analyse* (N1) peut être envisagé comme une « zone de tuilage » entre les paradigmes G1 et G2. Le niveau d'analyse est partagé en deux niveaux : G1-N1 et G2-N1. Braconne-Michoux ajoute que le paradigme G1 est partagé en 2 : G1-N0 et G1-N1. On peut déduire que ces deux sous-paradigmes utilisent une validation perceptive ou instrumentée (G1) avec pour G1-N0 une vision des figures par leur forme (N0), alors que pour G1-N1 la vision des figures s'appuie sur les propriétés (N1).

2 Les instruments en géométrie

2.1 Les instruments du papier-crayon (Duval)

Les travaux de Duval et Godin (2005) d'une part sur la décomposition dimensionnelle des formes et, d'autre part, ceux de Offre, Perrin et Verbaere (2006) sur l'usage des instruments de géométrie constituent des outils d'analyses pertinents pour identifier dans quel paradigme se situe la réflexion d'un élève. Duval et Godin (2005) identifient différents rapport aux figures géométriques. Ainsi une figure peut être identifiée par sa forme, un élément global de dimension 2, un élément 2D, c'est aussi une vision iconique. Cette réflexion se situe au niveau N0 de van Hiele. Cependant une figure peut aussi être vue par les éléments qui la composent, les droites, éléments de dimensions 1, 1D, et les points, éléments de dimension 0, 0D. Offre, Perrin et Verbaere (2006) complètent cette évolution du regard de la figure en utilisant les instruments de géométrie. Ils défendent que l'utilisation des instruments de géométrie permet de travailler cette décomposition dimensionnelle et la prise en compte des propriétés entre les sous éléments de la figure. Ainsi une telle réflexion serait plutôt du niveau N1 de van Hiele. Cependant l'utilisation des instruments ne va pas de soi et doit être prise en charge dans la séquence d'apprentissage. La prise en compte des connaissances instrumentales en lien avec les connaissances conceptuelles apparait à travers la genèse instrumentale, processus de construction d'un instrument par un sujet. Rabardel (1995) définit cette genèse comme une composée de deux processus. Le *processus d'instrumentalisation*, relatif à l'émergence et à l'évolution des composantes de l'artefact, et le *processus d'instrumentation*, portant sur l'émergence et l'évolution des schèmes sociaux d'utilisation. Ainsi les artefacts ou outils de construction, sont les entités matérielles qui deviennent des instruments lorsqu'ils sont associés à une finalité dans la résolution d'une tâche.

2.2 Les instruments des Logiciels de Géométrie Dynamique

Dans le contexte d'un Logiciel de Géométrie Dynamique (LGD pour la suite), Laborde et Capponi (1994) ont analysé l'utilisation du déplacement dans la validation de constructions géométriques. L'outil déplacement est utilisé pour identifier des invariants, c'est-à-dire des configurations du dessin qui perdurent quelques soient les déplacements réalisés. Ces invariants correspondent aux propriétés géométriques associées aux constructions, propriétés embarquées explicitement dans les Cabri-dessins[1] et assurées valides par le logiciel lui-même. Une vision plus fine des différents instruments déplacement est introduite par Restrepo (2008). Nous n'utiliserons pas toutes les distinctions présentées dans son travail, nous retiendrons seulement que le déplacement peut être utilisé pour identifier des invariants d'un Cabri-dessin, c'est-à-dire ses propriétés géométriques. Le

[1] Nous reprenons la définition de Laborde-Capponi 1994 : *une représentation graphique sur l'écran de Cabri-géomètre*.

déplacement peut aussi être utilisé pour valider une construction (instrument utilisé par Laborde et Capponi 1994), c'est-à-dire que les propriétés désirées au cours de la construction sont effectivement des propriétés de la construction, et les invariants identifiables par le déplacement.

3 Nos objectifs d'apprentissage

À partir des travaux de Duval et Godin (2005) nous précisions les trois sous-paradigmes de Braconne-Michoux :

- G1-N0 dans lequel la validation est sensible, (perceptive ou instrumentée), elle est associée à une vision iconique (vision 2D), qui s'appuie sur les formes.
- G1-N1 dans lequel la validation est sensible, (perceptive ou instrumentée), elle est associée à une vision non iconique (vision 0D, 1D et 2D), qui s'appuie sur les propriétés des figures.
- G2-N1 dans lequel la validation n'est plus uniquement sensible, ne s'appuie pas encore sur les lois hypothético-déductives, elle est associée à une vision non-iconique qui s'appuie sur les propriétés des figures.

Notre objectif est d'enrichir les connaissances des élèves de début de cycle 3 en travaillant sur des propriétés simples afin de solliciter une réflexion de niveau G1-N1 et non plus seulement de niveau G1-N0. Pour cela nous reprenons les travaux de Duval et Godin (2005) sur la décomposition dimensionnelle, c'est-à-dire l'évolution du regard sur les figures pour considérer les éléments de dimension 1, les droites et les éléments de dimension 0, les points. Nous reprenons aussi les travaux de Offre, Perrin et Verbaere (2006) sur la reproduction de figures avec des instruments spécifiques. Nous avons choisi de travailler autour d'activité de reproduction dans un LGD, où les propriétés à reproduire sont identifiables par la mise en œuvre du déplacement associée à la décomposition dimensionnelle des formes. Cependant l'utilisation du déplacement tel que nous l'envisageons passe par l'acquisition d'une nouvelle règle du contrat didactique pour le LGD : *une construction est valide si elle conserve ses propriétés au cours du déplacement*. Ainsi les reproductions des élèves ne doivent pas être uniquement des copies superposables et perceptivement identiques au modèle (G1-N0), mais elles doivent avoir les mêmes propriétés que le modèle, les mêmes invariants que le modèle (G1-N1).

II - LES ACTIVITÉS PROPOSÉES

L'ingénierie didactique mise en place utilise le logiciel Cabri Elem, un logiciel de la société Cabrilog, inspiré du logiciel Cabri II Plus. Ce logiciel permet de construire un cahier numérique interactif où les différentes pages du cahier sont personnalisables par l'auteur (chercheur ou enseignant). Sur chaque page on retrouve la page blanche de travail du Cabri II Plus, l'auteur du cahier choisit ensuite les outils de construction qu'il souhaite éventuellement mettre à disposition de l'élève (point, droite, perpendiculaire, symétrie axiale …). Lorsque l'auteur crée son activité il peut à chaque page programmer des rétroactions et interactions qu'il souhaite. Ces rétroactions peuvent être spécifiques à certaines procédures et elles peuvent soutenir l'élève au cours de sa résolution par des indices en lien avec ses difficultés. D'autres rétroactions peuvent informer l'élève sur la validité de sa réponse. Enfin l'élève peut utiliser les rétroactions liées à la manipulation directe des objets de l'environnement dynamique.

La séquence mise en place comprend cinq regroupements. Chaque regroupement contient un cahier Cabri Elem réalisé par la classe en 50 mn environ, des moments de travail en binôme et des moments d'échanges collectifs. Une séance en papier-crayon est associée à chaque séance de travail sur un cahier Cabri Elem. Une description de la séquence est présentée en annexe.

Les deux activités que nous présentons sont issues de deux cahiers différents. La première activité « Le parcours des petites bêtes » est issue du deuxième cahier. La deuxième activité « La maison

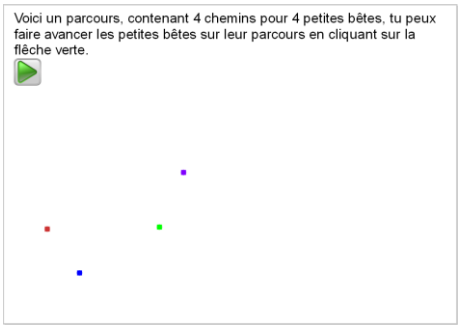
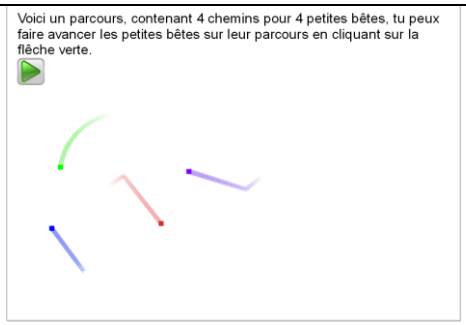
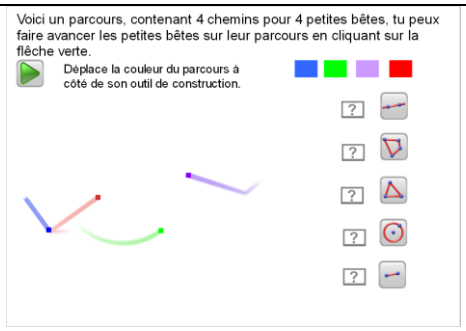
des petites bêtes » est issue du quatrième cahier « Evaluation géométrie » sur la reconnaissance de formes géométriques.

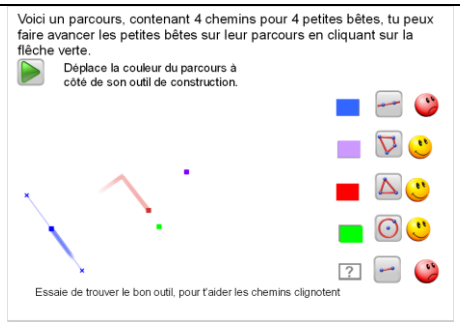
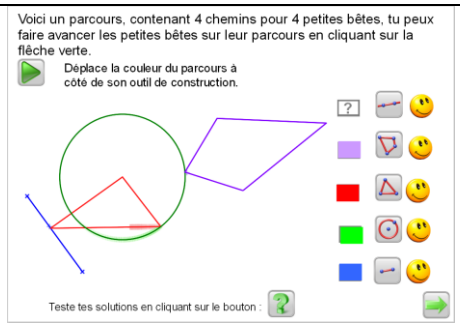
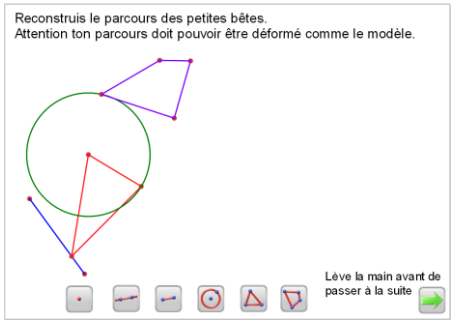
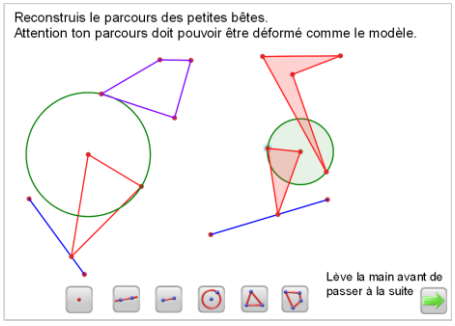
1 Activité : Le parcours des petites bêtes

Cette activité est composée de deux parties. La première partie a pour but de travailler la reconnaissance de formes simples à partir d'une vision morcelée des formes. C'est-à-dire que la forme n'est jamais visible dans sa globalité. Ensuite l'objectif est que les élèves associent un outil de construction à une forme géométrique, ici l'outil quadrilatère à la forme quadrilatère, l'outil cercle à la forme cercle, l'outil triangle à la forme triangle, l'outil segment à la forme segment.

La deuxième partie du cahier a pour but de travailler la mise en place d'une nouvelle règle du contrat didactique liée à l'utilisation du LGD : *une construction est valide si elle conserve ses propriétés au cours du déplacement*.

Voici une description de la première activité. Un film disponible sur internet peut aider à la compréhension : http://www.youtube.com/watch?v=n9fT1yQLln0

	La première page présente une consigne quatre points et une flèche. Les points symbolisent quatre petites bêtes. Lorsqu'on clique sur la flèche, le point bleu commence à se déplacer sur son chemin. Une fois que le point bleu est proche du point rouge, il s'arrête et c'est le point rouge qui se déplace. Une fois que le point rouge est proche du point vert, le point rouge s'arrête et le point vert se déplace. Il s'arrête lorsqu'il s'approche du point violet qui commence son déplacement. Lorsque le point violet revient à sa position initiale, il s'arrête et le point vert reprend son déplacement. Ainsi de suite jusqu'au point bleu qui réinitialise l'enchainement des déplacements.
	Chaque point se déplace sur un chemin en laissant une trace. Les chemins, liés entre eux, forment un parcours. Le point bleu se déplace sur un segment, le point rouge sur un triangle, le point vert sur un cercle et le point violet sur un quadrilatère.
	Une fois la première boucle des déplacements réalisée, les élèves doivent associer chaque couleur de parcours à son outil de construction c'est à dire déplacer le rectangle de couleur à côté de l'icône outil correspondant. Une fois que tous les rectangles couleurs sont positionnés, il peut valider sa solution.

	Si sa solution contient des erreurs, la ou les erreurs sont signalées par une icône rouge et le ou les chemin(s) correspondant à l'erreur clignote(nt). L'élève a une visibilité globale du ou des chemin(s) relatif(s) à ses erreurs et peut alors modifier sa solution.
	Une fois la solution correcte tous les chemins s'affichent. L'élève peut passer à la suite.
	Dans la deuxième partie de l'activité les élèves doivent reproduire le parcours, une forme complexe, c'est-à-dire une figure composée de sous-figures simples. Ces sous-figures simples sont reliées entre elles. Le segment est défini par deux points libres, tout comme le cercle. Le triangle a un sommet sur le segment, un sommet qui est le centre du cercle, son dernier sommet est le point qui définit le rayon du cercle. Enfin, un sommet du quadrilatère est un point du cercle et les trois autres sommets sont des points libres.
	Voici une solution, sa validité ne peut être prouvée que par la comparaison entre le déplacement de tous les points de la reproduction et le déplacement des points correspondants du modèle. Les extrémités du segment doivent pouvoir être déplacées dans le plan, tout comme trois des sommets du quadrilatère, le centre du cercle et le sommet du triangle qui apparaît sur le cercle. Le quatrième côté du quadrilatère doit se déplacer sur le cercle et le troisième côté du triangle doit se déplacer sur le segment.

Analysons cette activité en termes de propriétés à identifier et paradigme suffisant pour la résolution.

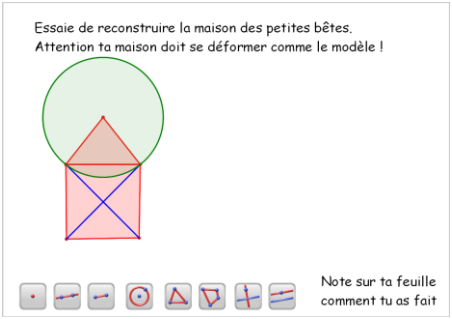
Dans la première partie de l'activité, il s'agit de reconnaître des formes simples en ne percevant qu'une partie de ces formes à travers la trace laissée par les points. Ici, les propriétés des figures concernées n'ont pas besoin d'être mobilisées. Lorsqu'il s'agit d'associer chaque trace à un outil de construction, là encore une réflexion sur la forme globale est suffisante, mais celle-ci est mise en difficulté car la forme n'est pas accessible dans sa globalité. La vision mobilisée pour cette

première partie de l'activité est une vision 2D. Ainsi, le paradigme de résolution de la première partie est le paradigme GI-N0.

La seconde partie consiste à reproduire une figure complexe, composée de figures simples. Les sous-figures ont été identifiées dans la page précédente. Pour pouvoir reproduire la figure et non seulement la forme complexe, c'est-à-dire pour reproduire la forme avec les relations entre ses sous éléments qui la composent, il faut utiliser le déplacement pour identifier les invariants. La difficulté de cette activité repose sur la consigne « ton parcours doit pouvoir être déformé comme le modèle ». Jusqu'à présent, dans une pratique statique de la géométrie en papier-crayon, une telle consigne n'a pas de sens. Cette consigne s'appuie sur une règle spécifique du contrat didactique lié à l'utilisation d'un LGD : *une construction est valide si elle conserve ses propriétés au cours du déplacement*. Les élèves doivent donc travailler sur les propriétés de la figure à reproduire, c'est-à-dire qu'un sommet du triangle est défini comme un point du segment. Le centre du cercle est aussi un sommet du triangle, le dernier sommet du triangle définit aussi le rayon du cercle. Enfin, un sommet du quadrilatère est un point du cercle. La figure modèle contient deux points avec une propriété topologique d'appartenance soit à un cercle, soit à un segment et deux points ont un double statut, centre d'un cercle et sommet d'un triangle ; définition du rayon du cercle et sommet d'un triangle. Pour identifier ces propriétés portant sur des points, le déplacement des points doit être utilisé conjointement à une vision portant sur les points, c'est-à-dire une réflexion sur des éléments 0D. La résolution de l'activité utilise la déconstruction dimensionnelle pour identifier les propriétés d'une figure, elle nécessite le paradigme GI-N1. Une reproduction qui ne prend pas en compte ses relations et se contente d'une reproduction perceptivement à l'identique, c'est-à-dire une reproduction superposable au modèle mais non déformable comme le modèle, est une résolution qui utilise une vision de la forme, une vision 2D. Le paradigme associé est le paradigme GI-N0.

2 Activité : la maison des petites bêtes

Nous analysons la dernière page du cahier 4 dont voici l'énoncé http://www.youtube.com/watch?v=wQ4ccQn12Nw

Essaie de reconstruire la maison des petites bêtes. Attention ta maison doit se déformer comme la maison modèle ! 	La figure est composée d'un triangle quelconque, d'un quadrilatère avec ses deux diagonales et d'un cercle. Le triangle n'est pas un triangle isocèle mais un triangle quelconque. Le cercle a pour centre un sommet du triangle et passe par un seul sommet du triangle commun au sommet du quadrilatère.

Cette activité se rapproche de la page 2 de l'activité que nous venons d'analyser. L'utilisation du déplacement avant toute construction permet d'identifier les propriétés de la figure, c'est à dire que le triangle n'est pas isocèle mais quelconque, et donc que le cercle ne passe que par un sommet du triangle. Les propriétés à identifier concernent là encore des points qui ont un double voire triple statut. Le centre du cercle est aussi un sommet du triangle, les deux autres sommets du triangle sont aussi des sommets du quadrilatère, enfin un de ces deux sommets définit aussi le rayon du cercle. Une construction correcte doit contenir toutes ces relations entre le cercle, le triangle et le quadrilatère. Pour résoudre cette activité, la perception seule et une vision globale de

la forme complexe ne suffisent pas. Les élèves doivent décomposer la figure en figures simples, puis identifier les relations entre ces figures simples qui reposent sur des propriétés des points. Le paradigme GI-N0 n'est pas suffisant. Une procédure qui utilise le paradigme GI-N0 aboutirait par exemple à construire un cercle qui ne passe pas par un sommet du triangle. Une autre construction pourrait dans un premier temps considérer les trois sous-figures, un triangle, un cercle, un quadrilatère et ses diagonales, indépendamment les unes des autres. Dans un second temps, les sous-figures sont regroupées et placées dans la configuration de la figure modèle, mais sans être liées les unes aux autres. La mobilisation du paradigme GI-N1 est nécessaire.

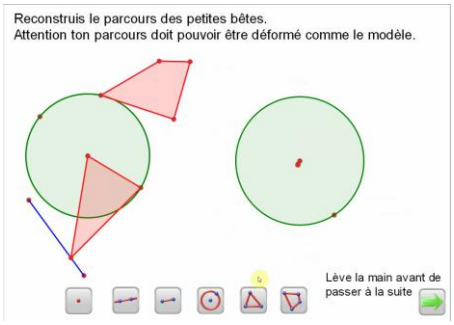
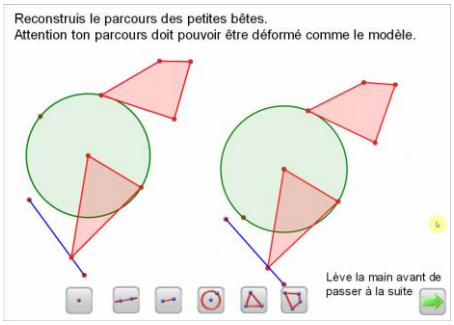
III - ANALYSE A POSTERIORI DE DEUX ÉLÈVES

Nous analysons deux élèves qui ont travaillé en binôme pour l'activité « Le parcours des petites bêtes » et individuellement pour l'activité « La maison des petites bêtes ». Pour chaque activité nous nous interrogeons sur les relations que les élèves ont identifiées, comment ils ont identifié ces relations et comment ils les ont reproduites. Cela nous renseignera sur la vision que les élèves mettent en œuvre et le paradigme qu'ils utilisent pour la résolution de l'activité.

1 Parcours des petites bêtes

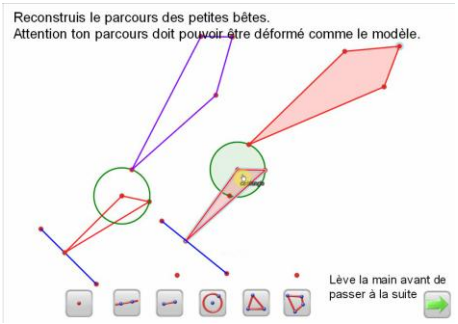
La première partie de l'activité n'a pas posé de problème pour les élèves. Ils ont facilement reconnu les différentes formes et les ont associées aux outils de construction. Ils maitrisent le paradigme GI-N0.

La deuxième partie a été résolue en environ 36 mn avec de nombreux échanges avec l'enseignante. Nous analysons plus finement trois extraits de leur procédure de résolution.

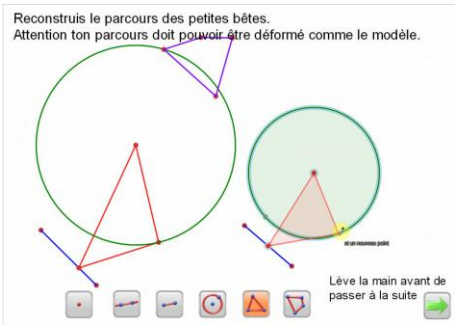
	Dans le premier extrait (http://www.youtube.com/watch?v=EnMyG_q6Eu8), les élèves commencent à construire le cercle à côté du modèle. Rapidement, ils changent leur procédure et reproduisent les différents éléments de la figure sur le modèle. Ainsi, leur reproduction est superposée au modèle. L'enseignante précise que la construction des élèves doit être faite à côté du modèle et non pas dessus.
	Dans le deuxième extrait (http://www.youtube.com/watch?v=c0oaXXQl6MM), les élèves commencent par construire le cercle, puis le triangle avec un sommet comme étant le centre du cercle, un sommet sur le cercle et un sommet libre. Puis, ils construisent le quadrilatère avec un sommet sur le cercle et trois sommets comme des points libres. Enfin, le segment est construit avec deux points libres. Les élèves prennent soin de positionner chaque forme comme le modèle. Ainsi, bien que leur construction soit à côté du modèle, elle pourrait être superposable au modèle.

Dans ces deux extraits, les élèves se placent dans le contrat classique et opérationnel du papier-crayon : dans une activité de reproduction, la reproduction doit être superposable au modèle. Les élèves n'utilisent pas le déplacement pour identifier les relations entre les sous-figures. De plus, leurs contrôles considèrent les formes et non les points. La vision des élèves se porte sur les éléments 2D et non les éléments de dimensions inférieures. Ils restent dans un paradigme de résolution GI-N0.

Le troisième extrait (http://www.youtube.com/watch?v=awPi4MAhzFU) a lieu après 30mn d'essais et d'invalidations avec l'enseignante. En effet, après chaque essai, l'enseignante déplace les points et demandent aux élèves s'ils considèrent leur solution correcte. A chaque fois, les élèves invalident leur solution avec l'enseignante. Progressivement, les élèves commencent à valider par eux-mêmes leur construction en utilisant le déplacement.

	Les élèves commencent par construire le cercle, le triangle puis le segment. Ils terminent par le quadrilatère. Le cercle est construit à l'aide de deux points libres. Le triangle utilise le centre du cercle comme sommet, un point libre et un point sur le cercle. Le segment est positionné de façon à ce qu'il passe par-dessus le sommet du triangle. Enfin, le quadrilatère a un sommet sur le cercle et trois sommets libres. La reproduction des élèves est encore très proche du modèle par sa forme, sa taille et son orientation. Lorsque l'enseignante intervient pour valider leur construction, elle déplace le sommet du triangle qui doit être sur le segment, et le centre du cercle.

Afin d'amener les élèves à modifier leur vision de la figure, l'enseignant revient sur les petites bêtes introduites dans le cahier 1 pour modéliser les points. Elle reprend le déplacement de la petite bête point sur segment. Les élèves reprennent la construction d'un point sur segment travaillée lors du cahier précédent. Ensuite, l'enseignante revient sur la construction du cercle et de son rayon en demandant aux élèves ce qui définit le centre et le rayon du cercle. Les élèves reprennent seuls la construction. Ils commencent par le cercle puis le triangle en utilisant le centre et le rayon du cercle. Cependant, lorsqu'ils doivent construire le segment, Mattéo dit « il fallait faire la petite bête avant » puis « c'est faux, bouge le triangle ». Hamed efface toute la construction et Mattéo donne les instructions de construction à Hamed :

	*7 :22* *Mattéo : Tu fais la ligne, tu mets le petit point dessus* *Hamed : je fais le triangle* *Mattéo : non le petit point* *Une fois le point construit sur le segment, (Hamed déplace le point)* *Mattéo : voilà tu fais le rond, voilà tu prends le triangle tu l'accroches là (centre du cercle) tu vas l'accrocher là (point sur segment) et (Hamed dirige le curseur à l'opposé du point définissant le rayon du cercle, comme sur le modèle, cf image ci-contre) non ensuite tu l'accroches là le petit point là (point du cercle définissant le rayon)*

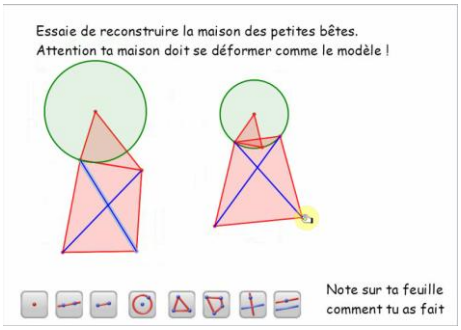
Une fois tous les éléments de la construction reproduits, les élèves déplacent les points et les objets de leur construction et du modèle afin de s'assurer que les comportements au cours du déplacement sont effectivement les mêmes.

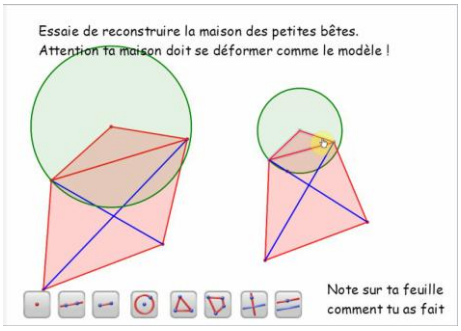
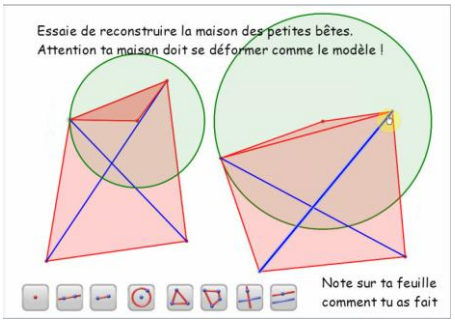
Ce troisième extrait montre que Mattéo a adapté son paradigme à l'activité, il ne considère plus uniquement les formes dans l'activité de reproduction mais aussi les relations entre les sous éléments. Sa vision de la figure s'appuie sur les points et les propriétés topologiques de ces points, son paradigme de résolution est le GI-N1. Cette adaptation de paradigme passe par de nombreuses interactions avec l'enseignant et la prise en compte de la nouvelle règle de contrat didactique : une construction est valide si elle conserve ses propriétés au cours du déplacement. Il semble que Hamed n'ait pas changé de paradigme, on voit bien dans la dernière partie du dialogue que Hamed cherche toujours à reproduire une forme qui ressemblera au modèle par son orientation par exemple, il cherche à construire un rectangle qui aura la même orientation que le modèle. Le paradigme de résolution de Hamed est le paradigme GI-N0.

2 La maison des petites bêtes

2.1 Procédure de Hamed

Comme pour l'activité présentée précédemment, nous avons découpé la résolution de Hamed en trois épisodes.

	Dans le premier épisode (http://www.youtube.com/watch?v=JJGjKXVUlE4), Hamed prend en compte les points dans la figure à reproduire, mais en s'appuyant sur la configuration initiale du modèle et non sur les multiples statuts des points. Ainsi, il essaie de placer les deux sommets du triangle commun aux sommets du quadrilatère sur le cercle comme dans la configuration initiale, alors que la nouvelle configuration ne respecte plus cette configuration. Il invalide cependant sa construction en utilisant le déplacement.

	Dans le deuxième épisode (http://www.youtube.com/watch?v=K0dbJlsRS-k), Hamed s'appuie encore sur une vision 2D du modèle pour sa construction. Il construit tout d'abord le cercle, puis le triangle avec un sommet sur le cercle et un sommet dans le cercle, puis le quadrilatère avec deux sommets libres et deux sommets superposés aux sommets du triangle. Il invalide seul sa construction en utilisant le déplacement sur tous les points de sa reproduction. Il compare les déformations de sa construction et du modèle en déplaçant tous les points. En invalidant sa construction de la sorte, nous pouvons supposer que la règle du contrat didactique liée à l'utilisation du LGD est prise en compte par Hamed.
	Le dernier épisode (http://www.youtube.com/watch?v=inAntG-qSlE) ne débouche pas sur une reproduction valide, mais elle démontre tout de même une évolution pertinente dans la réflexion de Hamed. La production est en effet non valide car le troisième sommet du triangle qui doit être un point libre est construit comme un point à l'intérieur du cercle et non un point libre du plan. Le déplacement permet de prendre conscience rapidement de l'origine de l'erreur. Le modèle ne ressemble plus à la configuration initiale. La reproduction finale de Hamed est différente visuellement du modèle par sa forme, taille et orientation, tout en étant différente de la configuration initiale. Ainsi, on peut conclure que Hamed a su se détacher d'une vision s'appuyant uniquement sur la forme et les éléments 2D pour prendre en compte les éléments 1D et surtout 0D (points) dans sa reproduction.

A la fin de la résolution de l'activité « Le parcours des petites bêtes » Hamed était toujours dans le paradigme GI-N0. Les premiers essais de Hamed dans la résolution de l'activité « La maison des petites bête » appartiennent encore au paradigme GI-N0. Pourtant, à force d'essais et d'invalidations par le déplacement, Hamed finit par faire évoluer sa vision, il apporte moins d'importance à la forme et s'attache plus aux multiples statuts des points dans sa reproduction. Ainsi, on peut considérer que Hamed a fait évoluer son paradigme pour finalement utiliser le paradigme GI-N1 dans la résolution de cette activité.

2.2 Procédure de Mattéo

Mattéo (http://www.youtube.com/watch?v=_i5wLLuXwNs) a su mobiliser le paradigme GI-N1 dans la résolution de l'activité « Le parcours des petites bêtes ». Dans cette nouvelle activité, Mattéo ne déforme pas le modèle, il ne peut donc pas identifier les multiples statuts des points. Sa procédure de résolution s'appuie donc uniquement sur la perception de la forme. Pourtant, il parvient à une reproduction correcte. Pour valider sa construction, il déplace plusieurs sommets, et sous éléments de sa construction puis du modèle. Ainsi, dans la validation de sa construction, il

mobilise une vision qui prend en compte les sous éléments de la figure. On peut supposer que Mattéo s'est appuyé sur le paradigme GI-N0 dans la mise en œuvre de sa construction, et a mobilisé le paradigme GI-N1 dans la validation de celle-ci.

IV - BREF COMPTE-RENDU DE L'ATELIER

L'atelier a commencé par une introduction des outils théoriques avec la présentation des travaux de Houdement et Kuzniak sur les paradigmes géométriques, ceux de van Hiele sur les niveaux de résolution et ceux de Braconne Michoux pour relier les paradigmes géométriques aux niveaux de van Hiele. La présentation théorique s'est poursuivie par les éléments relatifs aux instruments et à l'évolution de la vision des figures géométriques pour aboutir à la reproduction de figures. Les participants ont été confronté au logiciel CabriElem tout d'abord par une présentation de différentes activités mettant en valeur les spécificités de l'environnement à travers les rétroactions « programmables » au préalable. Cette première présentation du LGD a permis l'introduction et la définition du déplacement pour identifier des invariants et/ou pour valider une construction.

Une fois que les participants se sont appropriés les éléments théoriques et l'environnement dynamique, nous avons présenté la problématique : en quoi le travail des propriétés avec un LGD permet-il de mobiliser le niveau 1 d'analyse dans le paradigme G1 ?

Pour répondre à cette question les participants ont travaillé sur les deux cahiers : « Le parcours des petites bêtes » et « Evaluation géométrie » d'où est extraite l'activité « La maison des petites bêtes ». Pour chaque cahier, les participants devaient répondre aux questions suivantes :

- Quelles sont les relations à identifier ?
- Quel est le niveau de van Hiele suffisant pour la résoudre.
- Quelle(s) procédure(s) relève(nt) du G1-N0, du G1-N1 ?

L'analyse de ces cahiers a permis aux participants de s'approprier encore davantage le logiciel. La consigne « Ton parcours doit pouvoir être déformé comme le modèle » a suscité de nombreux échanges autour de sa formulation : remplacer « déformé » par « modifié », « bougé » … Ces échanges ont démontré que cette consigne provoquait une difficulté et que sa compréhension était au cœur même de notre problématique et du passage au niveau 1 d'analyse par la déconstruction dimensionnelle des formes.

- Après l'analyse a priori par les participants des cahiers, nous avons travaillé sur les vidéos des élèves. Pour chaque vidéo, l'analyse des participants était guidée par les questions suivantes : Quel(s) procédure(s) l'élève a-t-il mis en œuvre?
  - Quelles relations a-t-il identifiées ?
  - Comment les a-t-il identifiées ?
  - Comment les a-t-il reproduites?
- Dans quel paradigme/niveau se place-t-il ?

La synthèse de l'atelier a été rapide car les échanges des participants au cours des analyses ont été particulièrement riches.

V - CONCLUSION

Cet atelier avait pour but d'identifier dans quelle mesure une réflexion dans le paradigme G1-N1 est possible au début du cycle 3 avec un Logiciel de Géométrie Dynamique. Afin de distinguer des procédures du paradigme G1-N0 de celles du paradigme G1-N1, nous avons utilisé les travaux de Duval et Godin (2006) sur l'évolution du regard sur les figures géométriques et déplacement, instrument spécifique d'un LGD. Nous avons analysé deux activités de reproduction. Ces activités de reproduction s'appuient sur une nouvelle règle du contrat didactique, spécifique au LGD : *une construction est valide si elle conserve ses propriétés au cours du déplacement*. Cette nouvelle règle de

contrat didactique oblige les élèves à investir le déplacement pour identifier les propriétés et à les reproduire dans leur construction. Ainsi, la réflexion des élèves ne considère plus uniquement la forme, la taille et l'orientation de la forme à reproduire, mais elle s'appuie aussi sur les propriétés de celles-ci. Les propriétés travaillées ici sont des propriétés autour des points. Les analyses des deux élèves ont montré que cette réflexion sur les propriétés dans une activité de reproduction n'est pas évidente chez les élèves. En effet, leurs actions premières visent une reproduction à l'identique en utilisant une vision iconique, basée sur la forme. L'appropriation du déplacement pour identifier les propriétés est aussi difficile, là encore parce que les élèves mobilisent tout d'abord une vision 2D. Cependant dans la deuxième activité étudiée, l'analyse des actions des élèves démontre une évolution de la vision de la figure et une prise en compte des propriétés.

L'appropriation du déplacement pour identifier des invariants, permet une évolution du regard sur les figures. Cependant il serait illusoire de penser que le déplacement seul permet l'évolution jusqu'au paradigme G2 voire G2-N1. Les connaissances instrumentales s'allient aux connaissances visuelles mais aussi aux connaissances liées à la validation et à la preuve. Coutat (2014) présente l'analyse d'une séquence d'enseignement proche de la séquence travaillée dans cet atelier, avec des élèves de fin de primaire. Cette étude distingue deux instruments déplacement : le déplacement pour identifier un invariant, mobilisé pour explorer une figure et le déplacement pour valider, utilisé pour valider une construction. Ces deux instruments mobilisent des connaissances géométriques et instrumentales différentes. Cette recherche démontre qu'il est nécessaire que les élèves établissent des relations et connexions entre les connaissances liées à la vision des figures, les connaissances liées à l'appropriation des instruments et les connaissances liées à la validation et la preuve pour entrer dans une réflexion de niveau G2-N1.

VI - BIBLIOGRAPHIE

BRACONNE MICHOUX A. (2008) *Evolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves : paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2- 6ième*, Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot.

COUTAT S. (2014) Quel Espace de Travail Géométrique pour l'apprentissage des propriétés au primaire ? *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa* (à paraître).

COUTAT S. (2012) Vers une évolution de la vision en géométrie au primaire avec un logiciel de géométrie dynamique, *Math-Ecole, **218***, 50-55.

COUTAT S. FALCADE R. (2013) Le rôle de l'enseignant dans une séquence de géométrie utilisant deux environnements, dynamique et statique au cycle 3, *Actes du 39ième colloque international de la COPIRELEM*, IREM de Brest.

DUVAL R., GODIN M. (2005) Changement de regard nécessaire sur les figures, *Grand N,* **76**, 7-27.

HOUDEMENT C. KUZNIAK A. (1998) Réflexion sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres, *Grand N,* **64**, 65-78.

LABORDE C. CAPPONI B. (1994) Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherche en didactique des mathématiques*, **14 n°1.2**, 165-210.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.-J. VERBAERE O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N*, **77**, 7-34.

RESTREPO A. (2008) *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ième,* Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier, Grenoble.

VAN HIELE P.M. (1959) La pensée de l'enfant et la géométrie. *Bulletin de l'APMEP,* **198**, 199-205.

VII - ANNEXE

1 Description de la séquence didactique proposée

- Regroupement 1 : Les petites bêtes
  - Séance 1 – cahier 1 : avec Cabri Elem, introduction à l'environnement dynamique et des outils de construction de base (point, droite, segment, cercle, triangle, quadrilatère)
  - Séance 2 : avec papier-crayon, introduction de la feuille de liaison (LGD – papier-crayon)
- Regroupement 2 : Parcours des petites bêtes
  - Séance 1 – cahier 2 : avec Cabri, reconnaissances de sous-figures simples, reconstruction d'une figure complexe composée de figures simples
  - Séance 2 : avec papier-crayon l'élaboration d'un programme de construction
- Cahiers 3 : Planche à clous
  - Séance 1 – cahier 3 : avec Cabri, apprentissage et réinvestissement des instruments Parallèle et Perpendiculaire
  - Séance 2 : avec papier-crayon transposition des règles du logiciel dans le papier-crayon (codage) (pour plus d'informations Coutat Falcade (2013))
- Cahier 4 : C'est quoi ces formes ?
  - Séance 1 – cahier 4 : avec Cabri, évaluation sur la reconnaissance des figures (carré, losange, rectangle, parallélogramme), reconstruction d'une figure complexe composée de figures simples.
  - Séance 2 : avec papier-crayon, transcription d'invariants du LGD vers le papier-crayon.
- Cahier 5 : Lequel est-ce ?
  - Séance 1 – cahier 5 : avec Cabri, activité d'échanges de messages de reconnaissance de Cabri-dessin dans le papier-crayon

SPÉCIFICITÉS DES APPRENTISSAGES GÉOMÉTRIQUES ET SPATIAUX DANS LA SCOLARITÉ OBLIGATOIRE : QUELS ENJEUX POUR LA FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS ?

Mhammed ENNASSEF
PRAG, IUFM D'AQUITAINE-UNIVERSITÉ BORDEAUX IV
Laboratoire LACES, équipe E3D
Université de Bordeaux
Mhammed.Ennassef@iufm.u-bordeaux4.fr

Patrick GIBEL
MCF, IUFM D'AQUITAINE-UNIVERSITE BORDEAUX IV
Laboratoire LACES
Université de Bordeaux
Patrick.Gibel@iufm.u-bordeaux4.fr

Sylvie HENRY
PRCE, IUFM D'AQUITAINE-UNIVERSITE BORDEAUX IV
Laboratoire LACES, équipe E3D
Université de Bordeaux
Sylvie.Henry@iufm.u-bordeaux4.fr

Résumé
Dans un premier temps nous présenterons et analyserons des situations d'enseignement et d'apprentissage qui nous semblent constituer des supports privilégiés pour sensibiliser les étudiants de M1, Master SMEEF[1], aux différents types de géométrie et aux contrats didactiques spécifiques qui les sous-tendent. Il s'agira de montrer comment nous négocions avec les étudiants de M1 le passage de la géométrie G1 à la géométrie G2 (Houdement & Kuzniak, 2006).
Puis, à partir de vidéos, nous effectuerons avec les participants l'analyse en Théorie des Situations Didactiques de séquences expérimentées en cycles 2 et 3, supports privilégiés pour faire prendre conscience aux étudiants de M2 des enjeux didactiques spécifiques liés à l'apprentissage de la géométrie. Pour chacune de ces séquences, nous expliciterons et justifierons en quoi la dévolution de situations d'action et de formulation permet aux élèves de privilégier l'expérimentation et l'élaboration de raisonnements géométriques.

I - INTRODUCTION

Ce compte-rendu d'atelier a trois fonctions distinctes, d'une part formuler les principaux éléments théoriques qui nous ont servi de référence pour préciser les concepts de base de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) sur lesquels repose notre démarche de réflexion, d'autre part exposer les éléments résultant des mises en commun des présentations de travaux réalisés par les participants et ensuite mettre en lumière et analyser a posteriori certains travaux d'élèves que nous n'avons pas eu le temps de présenter lors de l'atelier. Ces derniers ont été produits lors de l'activité de reproduction de losanges dans le méso-espace, expérimentée dans une classe ordinaire de CM1-CM2, durant l'année scolaire 2012-2013, nous ne présenterons dans la dernière partie que les productions qui nous paraissent les plus représentatives.

[1] Master SMEEF, Master « Sciences pour les Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation » dispensé à l'IUFM d'Aquitaine.

II - OUTILS DE LA THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES POUR L'ÉLABORATION ET L'ANALYSE DES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

1 Notion de situation

Les conditions d'une utilisation particulière d'une connaissance mathématique sont considérées comme formant un système appelé "situation".

A chaque objet de savoir mathématique, on peut associer un ensemble de situations dont la résolution nécessite la mise en œuvre de cet objet de savoir.

2 Caractérisation d'une situation adidactique

Reprenons les caractéristiques d'une situation adidactique.

« Les situations adidactiques sont les situations d'apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses intentions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances » (Brousseau, 1998).

Parmi les situations adidactiques (action, formulation, validation) l'une d'elles nous intéresse plus particulièrement c'est la dialectique de l'action qui consiste à placer l'enfant devant une situation, appelée situation d'action, telle :

- qu'elle pose à l'élève un problème dont la meilleure solution, dans les conditions proposées, est la connaissance à enseigner
- qu'il puisse agir sur elle et qu'elle lui renvoie de l'information sur son action.

Lors d'une situation d'action, un véritable dialogue s'instaure entre l'enfant et la situation. Cette dialectique de l'action lui permet donc de se créer un modèle implicite, c'est-à-dire d'avoir des réactions qu'il ne peut pas encore formuler, ni encore organiser en théorie.

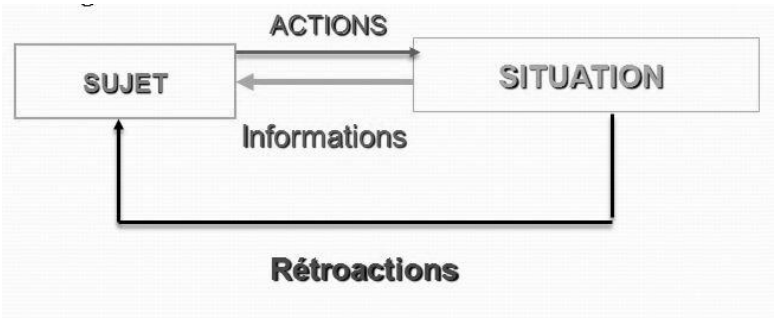


Figure 1 : schéma de la structuration du milieu

Explicitons à présent les interactions avec le *milieu* dans le cadre d'une situation d'action.

« Dans une situation d'action, on appelle "milieu" tout ce qui agit sur l'élève ou/et ce sur quoi l'élève agit. L'actant est « ce » qui dans le modèle agit sur le milieu de façon rationnelle et économique dans le cadre des règles de la situation. En tant que modèle d'un élève ou plus généralement d'un sujet, il agit en fonction de son répertoire de connaissances. » (Brousseau, 2000)

3 Dialectique d'institutionnalisation

Les situations d'institutionnalisation sont celles par lesquelles l'enseignant fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir.

Une fois construite et validée, la nouvelle connaissance va faire partie du *répertoire didactique* de la classe. Après cette dernière dialectique, la connaissance est étiquetée comme quelque chose que tous les élèves sont censés savoir et peuvent appliquer. Des exercices de fonctionnement sont alors proposés.

Nous proposons une classification générale des situations selon différents critères qu'il nous paraît important de spécifier.

- Les « types » de situations d'apprentissages : didactiques, adidactiques, non didactiques ;
- Les formes de la connaissance mobilisée en situation : connaissance implicite, langage, savoir pratique,…
- La forme sous laquelle *la connaissance* se manifeste : décision, message, assertion, convention, référence,…
- Les rapports que le sujet établit avec son milieu : action, communication, justification, institutionnalisation, …

4 Notion de répertoire didactique de la classe

L'ensemble des moyens que le professeur pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue le répertoire didactique de la classe. Par conséquent l'enseignant identifie un répertoire qu'il juge légitime d'utiliser dans la relation didactique compte tenu des institutionnalisations antérieures, afin de produire la solution ou la réponse attendue (Gibel, 2004).

Le répertoire didactique de la classe désigne aussi l'ensemble des moyens qui vont permettre à l'élève de générer de nouvelles connaissances à partir de ses connaissances antérieures.

III - SPÉCIFICITÉS DES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE DANS LE DOMAINE DE L'ESPACE ET DE LA GÉOMÉTRIE

1 Répertoire de représentations

Le répertoire de représentations, défini dans Gibel (2008) et dans Bloch & Gibel (2011), est une composante du répertoire didactique essentielle dans la construction des connaissances géométriques et spatiales.

Un répertoire de représentations est, par définition, un ensemble de moyens, connus ou donnés, dont l'élève est censé disposer, pour répondre à la situation. Il est constitué d'énoncés, de signes, de schémas, de symboles, de figures, de dessins ; nous y incluons également les outils (règle, équerre, compas, gabarit d'angle,...) et leur(s) usage(s).

2 Classification des différents espaces en TSD

Selon l'espace avec lequel le sujet est en interaction, ce dernier développe des modèles conceptuels différents qui définissent trois types d'espaces : le micro-espace, le méso-espace et le macro-espace.

Nous allons à présent caractériser chaque type d'espace.

2.1 Le micro-espace

L'enfant construit ses premières connaissances spatiales dans la manipulation de petits objets. Par le toucher avec ses mains ou sa bouche autant que par la vue, par les mouvements qu'il leur fait subir, il identifie leur consistance, leur forme solide, leurs positions relatives, et leurs propriétés.

Le micro-espace est le milieu de l'élaboration de la conception du mouvement des objets autres que l'observateur. Il s'agit de conception, non pas de taille objective des objets. En effet un pilote d'hélicoptère peut interpréter le sol à ses pieds à l'aide de sa conception micro-spatiale.

2.2 Le méso-espace

Les situations où l'enfant doit concevoir ses propres déplacements dans un territoire placé sous le contrôle de sa vue, sont l'occasion de développer des représentations différentes de celles du micro-espace et qui préfigurent celles qui seront nécessaires dans le macro-espace.

2.3 Le macro-espace

Les situations où un sujet doit prendre des décisions relatives à un territoire beaucoup trop grand pour qu'il puisse l'embrasser d'un regard, lui posent des problèmes, entre autres de recollement de cartes et d'incrustation.

Pour identifier et retrouver un lieu, établir un trajet, déterminer la forme d'un territoire etc. il est nécessaire de développer des concepts et des moyens spécifiques.

2.4 Des conceptions différentes selon les espaces

Pour des raisons ergonomiques et à cause des techniques différentes qu'elles imposent, la conception des objets de la géométrie est différente dans chacun de ces milieux.

Par exemple la "droite" (ou le segment de droite) peut être déterminée :

-dans le micro-espace par le glissement qu'elle permet ou par l'intersection de deux plans

-dans le méso-espace, par un alignement visuel,

-dans le macro-espace, par le prolongement à l'aide d'un angle plat…

IV - LES DIFFÉRENTS TYPES D'ACTIVITÉS EN LIEN AVEC LES DIFFÉRENTS TYPES DE GÉOMÉTRIE

1 Les différents types de géométrie dans la scolarité obligatoire

Dans ce paragraphe nous présenterons une classification des différents types de géométrie et nous nous référerons principalement aux travaux de recherche de Houdement & Kuzniak (2006). La Géométrie I ou géométrie naturelle : La géométrie I a pour source de validation la réalité et le monde sensible. Elle agit sur les objets et se base sur des expériences comme le pliage, le découpage et recomposition, le pavage effectif,…la confusion entre le modèle et la réalité est grande et tous les arguments sont permis pour justifier.

La Géométrie II ou géométrie axiomatique naturelle : Dans cette géométrie la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives, dans un système axiomatique aussi précis que possible. Elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux, d'où sa relation avec la réalité. Son modèle est la géométrie euclidienne classique.

La Géométrie III ou axiomatique formaliste : c'est une géométrie où les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la réalité. Elle se base sur la logique et le formel.

	Géométrie naturelle ou Géométrie I	**Géométrie axiomatique naturelle ou Géométrie II**	**Géométrie axiomatique formaliste ou Géométrie III**
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur des axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien

Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Support du raisonnement et "figural concept"	Schéma d'un objet théorique, outil heuristique
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration et lien entre les objets.

2 Organisation de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et au collège

À l'école maternelle c'est la dimension perceptive qui est privilégiée. Les élèves doivent être capables de différencier et de classer des objets en fonction de caractéristiques liées à leur forme, de reconnaître, de classer, de nommer et de dessiner des formes simples (carré, triangle, rond), et de reproduire un assemblage d'objets de formes simples à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides).

À l'école élémentaire c'est la dimension instrumentée qui est déterminante. L'enseignement élémentaire vise des compétences de repérage sur le plan ou dans l'espace, la connaissance des objets géométriques de base du plan et de l'espace et de leurs propriétés les plus importantes ; les élèves doivent pouvoir contrôler les propriétés géométriques d'une figure à l'aide des instruments.

Ils doivent aussi être capables de tracer des figures planes simples ou complexes en utilisant les instruments adaptés, sur papier uni ou quadrillé, à partir d'un modèle, d'une description ou d'un programme de construction. Ils utilisent un vocabulaire spécifique (solides de l'espace et figure planes).

Au collège, la dimension déductive est privilégiée du point de vue des raisonnements. Les objectifs du collège sont d'une part l'enrichissement des savoirs concernant les figures élémentaires et leurs relations ainsi que leur hiérarchisation et leur structuration : propriétés d'incidence, des propriétés fondamentales des triangles, des quadrilatères et des cercles, des théorèmes de Thalès et de Pythagore ainsi que des formules trigonométriques permettant ainsi de calculer des mesures de longueur ou d'angle. Quelques connaissances concernant les isométries du plan (symétrie orthogonale et symétrie centrale) sont également visées.

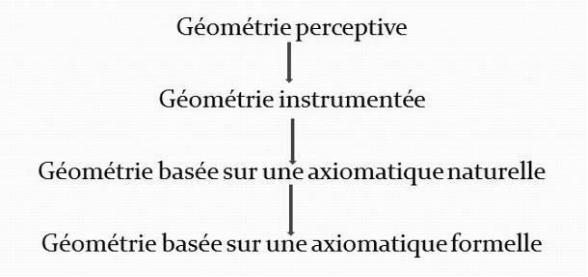


Figure 2

Les différents types de géométrie

Le diagramme ci-dessus précise les différents types de géométrie auxquels l'élève est confronté au cours de sa scolarité, de l'enseignement primaire à l'enseignement secondaire. Si le contrat didactique est spécifique à chacun des types de géométrie, les connaissances et les savoirs inhérents au « précèdent » type de géométrie, occupent une place importante et jouent un rôle essentiel lors de l'élaboration du répertoire de représentation associé au nouveau type de géométrie objet d'étude.

3 Analyse des difficultés des étudiants de M1 lors de la résolution d'activités géométriques

Nous avons proposé, durant l'année universitaire 2012-2013, à nos étudiants de première année de master SMEEF, Sciences pour les Métiers de l'Enseignement de l'Education et de la Formation,

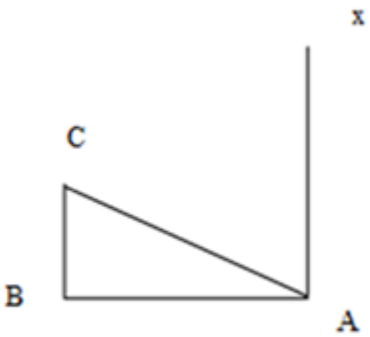
option enseignement auprès des enfants, le problème de géométrie ci-dessous (Extrait du CRPE[2] Amiens 2000). Ces étudiants de M1 se destinent à enseigner les mathématiques et d'autres disciplines à des enfants de l'école primaire âgés de 3 à 11 ans. La plupart de ces futurs enseignants du primaire ne sont pas issus de filières scientifiques.

Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à l'analyse des réponses produites par les étudiants à la dernière question du problème de géométrie objet de notre étude.

Notre objectif est l'analyse des difficultés des étudiants à passer de la géométrie GI à la géométrie GII plus précisément à répondre aux attentes du contrat didactique en proposant une procédure de type GII de manière à apporter une réponse argumentée idoine.

On donne le triangle ABC rectangle en B tel que AB = 4 cm et BC = 2 cm. La demi-droite [Ax) est perpendiculaire à la droite (AB). M est un point de la demi-droite [Ax).

Le but de ce problème est d'obtenir des configurations particulières du triangle AMC.



5) On note C' le symétrique du point C par rapport à la droite (AB).

a) Le triangle ACC' est-il équilatéral ? Justifiez.

b) Existe-t-il un point M tel que le triangle ACM soit équilatéral ? Justifiez.

Analyse des réponses des étudiants M1 :

L'analyse didactique des travaux des étudiants conduit à classer les réponses produites selon trois catégories dans le cadre de la classification proposée par Houdement & Kuzniak (2006).

1) Les réponses qui élaborent une procédure expérimentale de non existence du triangle s'appuyant exclusivement sur la réalisation d'une construction (GI)

Pour illustrer cette première catégorie examinons les réponses de deux étudiants (e1) et (e2) à la question 5 b respectivement 5a et 5b suite à la réalisation de la construction :

(e1) "Non. L'intersection du cercle de centre A et du cercle de centre C, de diamètre AC correspond au point M de manière à avoir AC=AM=CM. Le point d'intersection M n'est pas situé sur la droite [Ax). "

Pour certains étudiants, l'utilisation des instruments, comme le compas, résout par la négative le problème c'est-à-dire conduit l'étudiant à établir la non existence du triangle équilatéral. Mais dans le cadre du contrat didactique inhérent à la géométrie déductive, la construction permet seulement d'établir une conjecture mais elle ne constitue en aucun cas une preuve acceptable du point de vue du contrat didactique.

Un autre étudiant (e2) ayant réalisé la construction rédige sur sa copie le raisonnement suivant :

"Si AMC est équilatéral alors ACM=CMA=MAC ou AC=AM=CM.

Si AM est équilatéral, il est nécessairement isocèle en A. On reporte donc la longueur [AC] sur la demi-droite [Ax) de telle sorte que CA=AM.

On trace le triangle CAM et on remarque que CM≠CA."

Ces deux productions contribuent véritablement à illustrer des productions qui relèvent de cette première catégorie.

2) Les réponses qui relèvent de l'élaboration d'un raisonnement hypothético-déductif qui s'appuie sur des propriétés géométriques (GII).

[2] Concours de Recrutement de Professeurs des Ecoles

3) Les réponses qui relèvent d'un raisonnement s'appuyant tour à tour sur des arguments qui se réfèrent à GI et des pas de raisonnements hypothético-déductifs relevant de GII.

Mise en activité des participants

La mise en activité des participants repose sur l'analyse didactique de productions d'étudiants de M1 notées respectivement Production 2, Production 3, Production 4, Production 8, Production 11 (Annexe 1)

La consigne donnée aux participants est la suivante : Dans une première partie, pour chacune des productions numérotées proposées (2, 3, 4, 8) respectivement (2, 3, 8, 11) analyser les connaissances et les savoirs mobilisés par les étudiants lors de la résolution de 5a) et de 5b). En déduire à quel(s) type(s) de géométrie peut-être rattachée chaque étape des raisonnements produits.

Dans une seconde partie, expliciter quels usages vous feriez de ces productions d'étudiants en formation initiale ?

Première partie : analyse des connaissances, savoirs et raisonnements mobilisés

Production 2 : La production « de rêve » selon certains participants.

Question d'un participant : « Des étudiants ont-ils déduit des questions précédentes la réponse à la question 5b ? »

Réponse : oui. Plusieurs étudiants ont appuyé leur raisonnement sur la conclusion d'une question précédente.

Production 3 : Des participants parlent de « pseudo-paradigme ». L'étudiant est persuadé qu'il est en GII car il utilise les racines carrées et des instruments pour illustrer des propriétés mathématiques.

Il y a un effet de contrat : quand on demande de donner un contre-exemple, la production d'une figure suffit souvent. L'étudiant cherche peut-être à produire un contre-exemple.

L'étudiant éprouve des difficultés à se positionner. Il écrit « M' » et la configuration est telle que visuellement M' n'appartient pas à la demi-droite [A,x). Les participants se demandent quelle aurait été la conclusion de l'étudiant si le point M' avait été plus proche de cette demi-droite.

Les participants utilisent le terme « d'allers et retours » entre GI et GII.

On peut noter que les étudiants ont posé cette question lors de la « correction » de ce devoir : « A partir de quel « écart[3] » est-il nécessaire de produire une démonstration ? ». Pour eux il y aurait continuité et non pas rupture entre les deux types de géométrie. On démontre quand la précision des instruments ne permet pas de « lire » le résultat sur la figure. Ils ne font pas la distinction entre la figure mathématique et sa représentation.

Production 4 : Mesure des angles au rapporteur. L'étudiant est clairement en GI.

Production 8 : Idem production 3.

Production 11 : L'étudiant se situe en GI. Il compare les trois longueurs mais ne produit pas un « contre-exemple » comme les autres étudiants.

En conclusion, les réponses de classification des productions sont conformes à nos attentes et peuvent se résumer dans un tableau de synthèse :

- Elaboration d'une procédure expérimentale de non existence du triangle s'appuyant exclusivement sur la réalisation d'une construction (GI)
- Les réponses qui relèvent d'un raisonnement hypothético-déductif qui s'appuie sur des propriétés géométriques (GII)

[3] Il faudrait comprendre tolérance

- Production s'appuyant tour à tour sur des arguments qui se réfèrent à GI et des pas de raisonnements hypothético-déductifs relevant de GII.

	Question 5b	**Connaissances et savoirs mobilisés**	**Type de géométrie**
P_2	Utilisation de la question précédente pour montrer qu'un angle ne peut pas avoir une mesure de 60°.	Propriétés des triangles particuliers et de la symétrie axiale.	GII
P_3	Essai de justification. Cite les propriétés que devrait vérifier le triangle puis conclut avec une lecture sur la figure.	Propriétés du triangle équilatéral.	Les raisonnements produits relèvent de GI et GII.
P_4	Lecture d'un angle à l'aide du rapporteur	Somme des angles d'un triangle.	GI
P_8	Par essai de construction et lecture sur la figure	Egalité de longueur des côtés d'un triangle équilatéral	Les raisonnements produits relèvent de GI et GII.
P_{11}	Comparaison des longueurs sur la figure. Cite le compas comme outil pour le report des longueurs.	Egalité de longueur des côtés d'un triangle équilatéral	GI

Classification des productions proposées par les participants à l'atelier

<u>Deuxième partie</u> : exploitation possible en formation initiale

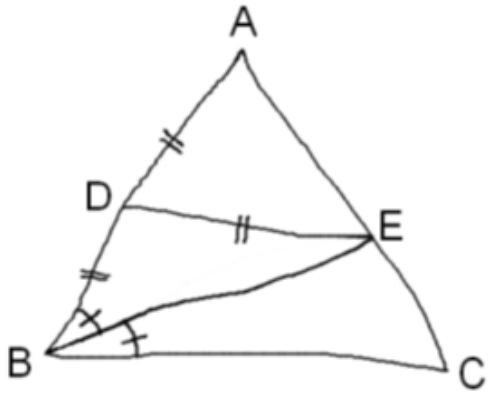
Ce type de travaux aide à l'analyse de productions d'élèves. On peut par exemple projeter les différentes productions et demander aux étudiants de les comparer. La confrontation des analyses des étudiants peut amener un débat qui fera évoluer leurs conceptions. Ces productions peuvent permettre d'expliciter les attendus du concours et de clarifier les règles du contrat.

La question du statut de la figure est alors un élément de débat émanant de participants. Est-elle toujours identifiée comme relevant exclusivement de G1 quels que soient les instruments et outils utilisés ? Les étudiants de M1 découvrent pendant la formation les constructions à la règle et au compas. Ne leurs donnent-elles pas un statut privilégié en leurs faisant jouer le rôle de démonstration? Après discussion entre les participants la réponse apportée est oui. Des participants font remarquer que dans ce cas une figure à main levée suffit et qu'elle permet plus facilement aux étudiants d'accéder à la nécessité d'une démonstration.

Exemple : Sujet de concours blanc –IUFM d'Aquitaine (mai 2013)

Dans la figure ci-contre effectuée à main levée, les points A, D, B sont alignés ainsi que les points A, E et C.

Affirmation 5 : E est le milieu de [AC].
Vraie/fausse. Justifier votre réponse

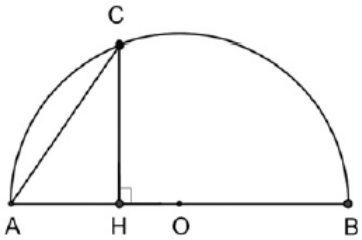


Il appartient donc aux formateurs d'être vigilants aux énoncés proposés qui peuvent être ambigus et entretenir la confusion entre GI et GII. Quand la construction d'une figure précise à la règle et au compas est demandée en début d'exercice le programme de construction qui permet de l'obtenir relève de GII (analyse des propriétés de la figure, raisonnement et prise de décision pour établir une chronologie des tracés) mais la figure produite est en GI et ne pourra pas servir d'appui pour une démonstration en GII.

Les exemples sont nombreux de difficultés induites par les formulations des sujets d'examen et de concours.

Exemple 1 : CRPE 2012 groupement 3

Sur la figure ci-dessous, C est un point du demi-cercle de diamètre [AB].



Affirmation 7 : Si $AB = n$ et $AH = 1$, alors $AC = \sqrt{n}$.

L'énoncé ne dit pas que le point H appartient au segment [AB], cette information est « lue » sur la figure Au-delà de cette nécessaire attention portée aux énoncés il nous semble indispensable d'amener les étudiants à une distinction des différents types de géométrie dès les premières heures d'étude de ce domaine. Les apports théoriques seront appuyés par un travail systématique sur la validité des preuves produites en référence à un niveau de géométrie donné.

V - ANALYSES DIDACTIQUES D'ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUEPROPOSÉES DANS LE MICRO-ESPACE ET DANS LE MÉSO-ESPACE

1 Quelques points de repères inhérents au dispositif de formation en deuxième année de Master SMEEF dans le domaine espace et géométrie

Dans cette dernière partie nous nous intéresserons plus particulièrement aux apprentissages géométriques tels qu'ils sont étudiés dans le cadre de la deuxième année de Master SMEEF.

A l'IUFM d'Aquitaine, les apprentissages spatiaux et géométriques entrent dans le cadre de l'UE4.2, Spécificités du métier, programmation des apprentissages en mathématiques. Le volume horaire qui leur est consacré est 10h de travaux dirigés (soit 5TD de 2 h) et 1 Cours Magistral sur le thème Espace et géométrie (de 2h).

- Dans le domaine Grandeurs et Mesure/Espace et Géométrie

Cycle 1 : Géométrie Formes et grandeurs, géométrie perceptive, activités dans le micro et méso-espace. Dimension langagière.

Cycle 2 : Géométrie/Grandeurs et mesure

Utilisation des instruments de mesure (règle, équerre) et de géométrie

Géométrie les activités de reproduction (papier quadrillé) travaux sur l'alignement de points, notion de perpendicularité. *Spécificité du contrat didactique en géométrie*. Analyse des procédures de construction (rapport à la figure/utilisation des instruments/nature des situations/analyse des processus de vérification/ analyse des difficultés/place du langage)

- Mesure et mesurage. Les enjeux du mesurage dans le méso-espace.

Cycle 3

La construction d'un triangle à partir de 3 segments matérialisés (situation d'action) dans le micro-espace.

Caractérisation des losanges par mise en place de situation de communication dans le micro-espace.

Reconnaissance de droites parallèles, construction de droites parallèles.

Caractérisation des quadrilatères

Description de figures complexes (assemblage de figures)

2 Etude d'une situation de reproduction de figures dans le méso-espace

2.1 Mise en activité des participants

Nous avons fait le choix de prendre comme objet d'étude la reproduction de figures dans le méso-espace et pour cela de confronter les participants à une mise en situation. Ceci dans le but de prendre conscience des connaissances et des savoirs susceptibles d'être mobilisés dans la cadre de l'activité mais également de faciliter le travail des participants lors de l'élaboration de l'analyse a priori de cette même situation qui a été proposée à des élèves de CM1-CM2.

La consigne donnée est la suivante:

Consigne : Nous vous proposons de travailler dans le méso-espace, vous allez devoir reproduire sur le sol une figure géométrique, à l'aide d'instruments mis à votre disposition. L'espace est partagé en deux, d'une part celui dans lequel se trouve chacune des figures à reproduire, d'autre part l'espace dans lequel vous devrez effectuer le tracé au sol. La figure modèle doit être conservée dans l'espace qui lui est dévolu.

Nous considérerons que la reproduction est correcte si "l'écart" entre le tracé et la figure-modèle n'excède pas 1 cm.

Nous souhaiterions que vous rédigiez sur une feuille de paperboard les étapes de la construction afin de confronter les procédures utilisées.

Les instruments et outils mis à disposition sont : ficelles, tasseaux de bois, équerre en carton, feutres, craies.

Les figures données en modèle ont pour dimensions

Figure	A, H	B	C	D	E	F
Côté (cm)	68	68	75	68	75	68
Angle aigu (degré)	60	70	70	60	70	70

Voici dans le tableau ci-dessous l'analyse des procédures mises en œuvre par les différents groupes de participants

Groupe	**Vérification de la nature de la figure**	**(1) Prise d'information et décision à partir de la figure modèle** **(2) Technique de tracé**	**Outils utilisés**	**Analyse de la figure**
A	Double pliage selon les axes de symétrie supposés. Conclusion : la figure est un losange.	(1) Après le double-pliage, mesure des longueurs des côtés du triangle rectangle obtenu. (2) Construction de ce triangle. Tracé des symétriques de ce triangle par rapport à ses côtés perpendiculaires. Vérification des longueurs des côtés.	Ficelle Gabarit angle droit Tasseau	Losange vu comme assemblage de 4 triangles rectangles isométriques.
B	Double pliage pour comparer les longueurs des 4 côtés. Puis comparaison de la longueur d'une diagonale et des côtés pour savoir si le losange est constitué de deux triangles équilatéraux. Conclusion : la figure est un losange qui est constitué de deux triangles isocèles non équilatéraux.	(2) Tracé d'une diagonale Tracé de deux triangles isocèles de base commune cette diagonale. Ficelle utilisée comme compas.	Ficelle Tasseau	Losange vu comme deux triangles isocèles isométriques et symétriques par rapport à une diagonale.

C	Idem A	(1) Mesure d'une diagonale, repérage du milieu (cf. pliage précédent) (2) Tracé de cette diagonale, de son milieu. Tracé de la perpendiculaire passant par le milieu (1) Mesure de la deuxième diagonale, repérage du milieu (2) Tracé de la deuxième diagonale. Tracé des côtés.	Gabarit d'angle droit pour tracer les diagonales perpendiculaires.	Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.
D	Idem A	(2) Idem B puis Vérification de la longueur de la deuxième diagonale.	Ficelle Tasseau	Idem B
E	Idem A	Idem C	Tasseau pour reporter les longueurs et tracer les droites. Gabarit d'angle droit pour tracer les diagonales perpendiculaires.	Idem C
F	Idem A	(1) Longueur des deux demi-diagonales à l'aide de la ficelle. (2) Tracé d'une demi-diagonale puis de son symétrique par rapport à l'une de ses extrémités. Même procédé pour la deuxième diagonale afin que ces diagonales soient perpendiculaires et se coupent en leur milieu.		Idem C
G	Idem A	Idem C	Ficelle	Idem C
H	Idem A	Idem C	Idem C	Idem C

Analyse des procédures mises en œuvre par les participants de l'atelier

2.2 Présentation et analyse a priori de la situation de reproduction dévolue aux élèves d'une classe de CM1-CM2

Présentation de la situation dévolue aux élèves

Consigne donnée aux élèves : « Le travail que vous allez réaliser va se passer sous le préau. Vous allez travailler par groupes. Chaque groupe aura une figure géométrique qui sera collée sur le mur du préau. Il devra la reproduire sur le sol du préau le plus précisément possible. Pour réussir, l'écart entre la figure modèle et la figure reproduite ne devra pas excéder 1 cm. Chaque groupe devra tracer la figure dans l'endroit qui lui est réservé. Les figures à reproduire peuvent être détachées du mur mais ne doivent pas quitter l'espace initial délimité par des bancs. »

Les instruments et outils mis à disposition des élèves sont : ficelles, tasseaux de 2 m, équerres en carton, feutres, craies, brosses pour effacer (ces outils et instruments sont similaires à ceux dont les participants ont disposé lors de la mise en situation).

Les différentes phases du déroulement de la séquence

Phase 1 : Dévolution de l'activité
Phase 2 : Mise en situation d'action
Phase 3 : Regroupement. Validation et formulation des procédures

Matériel utilisé

Losange	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Côté (cm)	68	68	75	68	75	68
Mesure des angles aigus (en degré)	60	70	70	60	70	70

Analyse a priori de la situation d'apprentissage

A. Sur le plan mathématique

- La réponse attendue est :
  - La vérification de la nature de la figure modèle.
  - L'organisation des prises d'informations et tracés et la réalisation de la figure demandée conformément au contrat didactique.
  - La formulation des étapes de construction avec l'explicitation et la justification des procédures utilisées.
- Procédures attendues (idoines) présentées de façon détaillée et construites à partir du répertoire didactique de la classe :

Première partie : procédures attendues pour les prises d'informations sur la figure initiale.

Report ou comparaison de longueurs : utilisation de la ficelle ou du tasseau, pliage.

Report d'angle : fabrication d'un gabarit d'angle.

Détermination du milieu des diagonales : pliage de la figure modèle, tracé de ses diagonales ou utilisation de la ficelle pliée en deux.

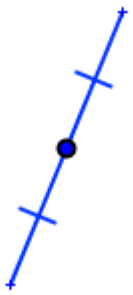
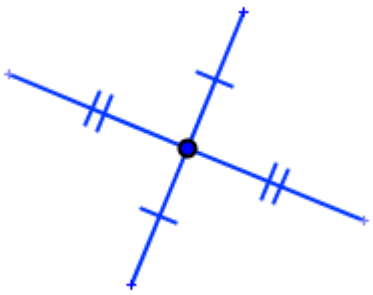
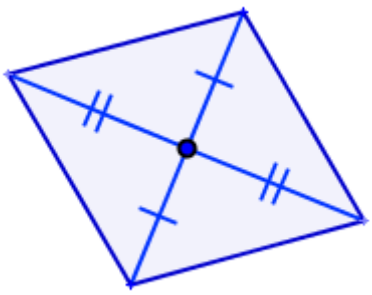
Deuxième partie : procédure attendue pour vérifier la nature de la figure

Comparaison des longueurs des côtés du quadrilatère à l'aide de la ficelle, du tasseau ou par double pliage.

Troisième partie: procédures attendues pour l'organisation du tracé.

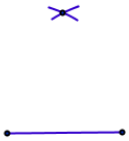
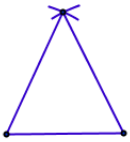
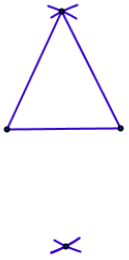
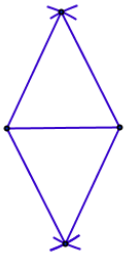
Procédure 1 : par utilisation en acte des propriétés des diagonales d'un losange.

- Tracé d'une diagonale et de son milieu.
- Tracé de la deuxième diagonale perpendiculaire et de même milieu.
- Tracé des côtés du losange.

		
Etape 1	Etape 2	Etape 3

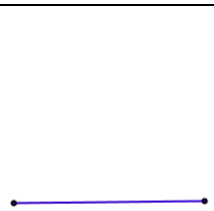
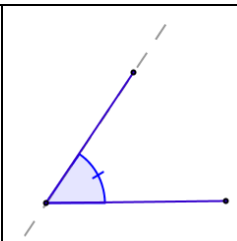
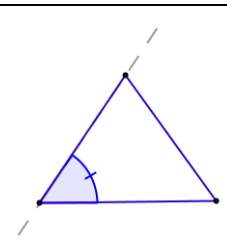
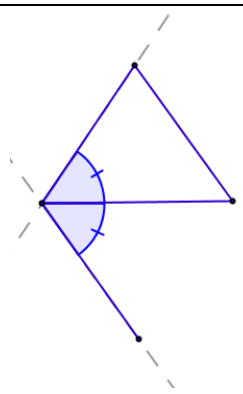
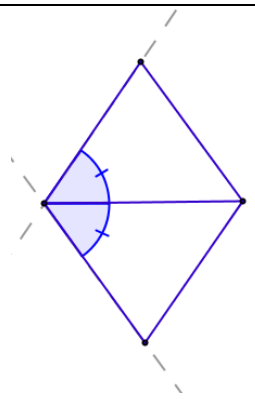
Procédure 2 : décomposition du losange en deux triangles isocèles isométriques de même base et report de longueurs.

- Tracé d'une diagonale
- Tracé d'un triangle isocèle ayant cette diagonale pour base en utilisant la ficelle pour reporter les longueurs.

				
Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5

Procédure 2 bis : décomposition du losange en deux triangles isocèles isométriques de même base et report d'un angle.

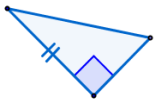
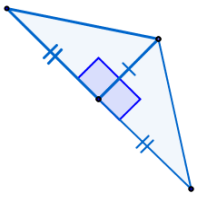
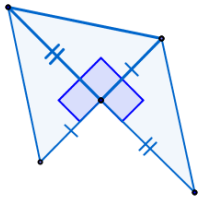
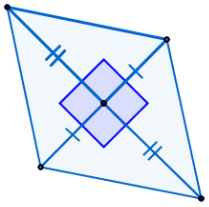
- Tracé d'un côté d'un des deux triangles isocèles.
- Tracé d'un second côté par report d'un angle.

				
Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5

- Tracé du troisième côté de ce triangle.

Procédure 2 ter : décomposition du losange en deux triangles équilatéraux ayant un côté commun (dans le cas d'un losange dont les angles aigus ont pour mesure 60°)

Procédure 3 : décomposition du losange en quatre triangles rectangles

			
Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4

B. Sur le plan didactique

a) Les élève sont confrontés initialement à une situation d'action permettant différents niveaux de rétroaction et ensuite lors de la mise en commun à une situation de communication visant à formuler la démarche de réalisation.

b) Les principales variables didactiques sont :

- Les dimensions des losanges à reproduire : d'une part la longueur des côtés et d'autre part la mesure des angles.
- La nature du support qui permet ou non d'avoir recours à une procédure de pliage. Nous avons fait le choix d'une matière (tissu) qui permet d'effectuer des pliages et d'en conserver la trace.
- Les outils mis à disposition des élèves et en particulier le rapport entre la longueur des tasseaux et la longueur des diagonales, le type de gabarit d'angle droit fourni (équerre « cassée », feuille de papier à plier…).
- La présence ou non d'une trace de pli (axe de symétrie) sur les figures à reproduire.

c) Scénario envisagé : dans cette situation les élèves travaillent en groupes hétérogènes, mixtes (CM1/CM2) de 3 à 4 élèves.

- Dévolution de l'activité : en classe le maître donne la consigne, la fait reformuler et présente le matériel qui n'est pas familier en le nommant (les tasseaux). Il précise la composition des groupes qui est affichée au tableau.
- Mise en situation d'action : sous le préau les élèves sont répartis par groupes. Chaque groupe prend connaissance de la figure à reproduire et de l'espace attribué à cet effet. Les instruments et outils sont mis à disposition de tous les élèves. Après reformulation de la consigne les groupes sont mis en activité pour une durée de 20 minutes.
- Mise en commun et validation : à l'issue de la phase d'action chaque groupe présente son tracé à l'ensemble de la classe et explicite sa démarche en précisant les étapes de construction et les outils utilisés. Le groupe valide ensuite en effectuant la superposition avec la figure modèle. Si l'écart entre la figure modèle et le tracé réalisé est inférieur à 1cm la production est déclarée valide par l'ensemble de la classe.
- Institutionnalisation : de retour dans la classe une synthèse est faite des différentes procédures utilisées et du rôle de chaque outil.

d) Les difficultés prévisibles sont :

- le maniement des tasseaux auquel les élèves ne sont pas familiarisés.
- La gestion des repères sur le tasseau (oubli de l'origine, confusion entre les différentes marques inscrites sur le tasseau)
- Le manque de précision dans le report des longueurs, en particulier lors de l'usage de la ficelle.
- La nécessité d'effectuer de nombreux allers retours entre le modèle et la figure reproduite par manque d'anticipation et d'organisation de l'action. La durée de l'activité étant limitée.
- Le non transfert des connaissances acquises dans le micro-espace dans un espace de travail nouveau.
- Le manque de coordination au sein du groupe pour organiser les prises d'information et les tracés.
- La difficulté à prendre des décisions quant aux choix des informations à prendre sur la figure modèle.

e) Aides et différenciations envisagées

- La figure en papier peut avoir été pliée pour marquer une ou les deux diagonales.
- Des questions peuvent être posées aux groupes en difficulté : de quelle information avez-vous besoin ? Quel outil pourrait vous être utile ?
- Si un groupe a terminé son tracé avant les autres il sera invité à rédiger par écrit les procédures utilisées pour la reproduction de la figure.

f) La validation est faite par les élèves par superposition de la figure modèle sur la figure reproduite.

2.3 Analyse a posteriori de certaines productions d'élèves

Groupes	Groupe 1	Groupe 2
Outils et instruments utilisés	Ficelle pour reporter des longueurs Ficelle pour trouver le milieu d'une diagonale Gabarit d'angle Tasseau pour tracer des droites	Tasseau, équerre
Prise d'information	Report de la longueur d'un côté. Report de l'angle entre ce côté et la diagonale à partir d'un gabarit d'angle construit par les élèves. Utilisation de la ficelle pour obtenir le milieu de la petite diagonale.	Pliage selon la grande diagonale afin d'obtenir le milieu. Utilisation du tasseau pour reporter la grande diagonale.
Raisonnements et décisions	Tracé d'un côté du losange par report de longueur avec la ficelle. Essai de tracé d'une diagonale. Nécessité de connaître l'angle formé par le côté et la diagonale : Report de l'angle entre ce côté et une diagonale à partir du « gabarit » d'angle produit. Tracé de la petite diagonale. Tracé du troisième côté du triangle. Tracé de la hauteur du triangle. Puis tracé du symétrique par prolongement de la « droite » et report de la longueur. La figure est ensuite codée et les points sont nommés.	Pliage de la figure en deux pour marquer le milieu d'une diagonale. Report puis tracé de la grande diagonale, report puis tracé de la petite diagonale perpendiculairement et de même milieu.
Connaissances et savoirs mobilisés	Construction d'un triangle connaissant les longueurs de deux côtés et l'angle qu'ils forment. Axe de symétrie du losange Construction du symétrique d'un point par rapport à une droite.	Axes de symétrie du losange. Les diagonales du losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

Groupe	Groupe 3	Groupe 4
Outils et instruments utilisés	Tasseau, équerre	Tasseau, équerre
Prise d'informations	Pliage de la figure modèle selon la petite diagonale Mesure grande diagonale à l'aide du tasseau (marque). Mesure de la petite diagonale à l'aide du tasseau (marque) Pliage de la figure selon la grande diagonale. Identification du milieu, intersection des diagonales. Report de la petite diagonale et du milieu sur le tasseau identification par marquage de couleur.	Pliage de la figure modèle selon la petite diagonale. Mesure petite diagonale, marque sur tasseau. Utilisation du tasseau pour déterminer le point d'intersection des diagonales sur la figure, marquage de ce point sur la figure initiale. Difficultés pour identifier les marques sur le tasseau.
Décisions et raisonnements	Tracé de la grande diagonale par report de mesure sur le tasseau. Tentative de tracé de la hauteur d'un triangle sur la figure. Double pliage selon les diagonales pour déterminer le milieu. Tracé de la seconde diagonale	Multiples tentatives de mesurage des diagonales à l'aide du côté de l'équerre. Tracé de la petite diagonale. Repérage du milieu. Tracé de segments perpendiculaires à l'aide de l'équerre. Tracé de la grande diagonale.
Connaissances et savoirs mobilisés	Les diagonales sont perpendiculaires entre elles. Les triangles qui forment le losange sont isocèles. Les diagonales se coupent en leurs milieux.	Les diagonales se coupent en leurs milieux. Les diagonales sont perpendiculaires entre elles.

Analyse des connaissances et des savoirs mobilisés par les élèves

2.4 La conception des objets et de leurs propriétés dans les différents espaces

Pour des raisons ergonomiques et à cause des techniques différentes qu'elles imposent, la conception des objets de la géométrie est différente dans chacun de ces milieux. La mise en situation des participants visait principalement à une prise de conscience de la spécificité et de la richesse (du point de vue des apprentissages) des activités géométriques dans le méso-espace. Cet

atelier a permis de mettre en lumière la diversité des procédures mises en œuvre, de plus la richesse des techniques utilisées reflète la variété des représentations que les participants ont d'une même figure.

Les propriétés géométriques, la propriété d'alignement, la propriété de perpendicularité, la conservation des distances (transformations isométriques : symétrie axiale, rotation) conduisent à la mise en œuvre de raisonnements distincts selon l'espace dans lequel les tâches doivent être réalisées mais aussi selon les instruments et outils mis à disposition des élèves.

«Dans le micro-espace, les tâches de tracé - droites, cercles- sont effectuées avec des instruments qui prennent en charge le travail et le contrôle sans que l'élève ait à investir des connaissances pour effectuer ou vérifier; dans le méso-espace, la cour par exemple, le tracé d'une droite, d'un angle droit ou d'un cercle nécessite la mise en œuvre de connaissances géométriques » (Bloch & Salin, 2004)

VI - CONCLUSION

L'analyse des productions d'étudiants de la partie III illustre la difficulté des étudiants à identifier le type de géométrie auquel ils doivent se référer. Pour les aider dans cette différenciation il appartient au formateur d'établir un contrat didactique clair, sans ambiguïté et d'être vigilant au statut de la figure qui peut prêter à confusion. Ainsi des constructions produites avec rigueur et précision en utilisant les instruments idoines peuvent donner l'illusion aux étudiants de travailler dans GII. Le recours aux figures à main levé est préconisé pour éviter cet écueil.

Il résulte, des analyses didactiques présentées dans la partie précédente (partie IV), que l'élaboration du répertoire de représentation nécessite de faire dévolution aux élèves de situations adidactiques permettant de favoriser la mise en œuvre de raisonnements et ainsi d'accéder aux raisons de l'apprentissage du savoir visé. Cette mise en situation adidactique est nécessaire mais n'est pas suffisante, en effet il convient de réfléchir aux « formes » d'institutionnalisation des savoirs spatiaux et géométriques autrement dit à la manière d'élaborer et de structurer le répertoire didactique en aval de la situation adidactique dévolue aux élèves.

La construction de connaissances et de savoirs dans le domaine spatial et géométrique nécessite de privilégier les situations favorisant la prise de décisions, l'utilisation des instruments et la schématisation mais aussi d'intégrer au dispositif des modes de validation des productions en proposant des situations d'action qui permettent à l'élève d'obtenir des rétroactions significatives afin de prendre conscience de la pertinence de son raisonnement et ainsi percevoir le domaine de validité de sa procédure.

Les phases de formulation des démarches contribuent à conjuguer la pluralité des raisonnements et par là-même à une confrontation des représentations conduisant à un enrichissement du répertoire de représentation.

Les activités spatiales et géométriques doivent être proposées tour à tour dans le micro-espace et dans le méso-espace afin de pouvoir accéder aux différents sens des connaissances et des savoirs en les reliant aux situations adidactiques, dévolues dans les différents espaces, ayant eu un rôle déterminant et significatif dans l'élaboration du répertoire.

VII - BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (2001) L'enseignement de la géométrie au début collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ?, Petit x, **56**, 5-34.

Bloch I. & Gibel P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, Recherche en Didactique des Mathématiques, 31-2, 191-228, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH I. & OSEL C. (2009) L'apprentissage de la géométrie à l'école primaire : analyse d'une progression centrée sur les problèmes spatio-géométriques et leurs représentations. Actes du XXXVIème Colloque COPIRELEM, IREM de Toulouse.

BLOCH I. & SALIN M.H. (2004) Espace et géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège. Actes du XXXème colloque COPIRELEM IREM de Marseille

BRACONNE-MICHOUX A. (2008) *Evolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves: paradigmes et niveaux de Van Hiele à l'articulation CM2 - 6ème*, Thèse de l'Université Paris7-Diderot.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (2000) Espace et géométrie. Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques du Département des Sciences de l'éducation de l'Université de Crète à Réthymnon.

BROUSSEAU G. & GIBEL P. (2005*)* Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations, *Educational Studies in Mathematics* **59**, 13-58.

GIBEL P. (2004) *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement en clases de mathématiques à l'école primaire*, Thèse soutenue à l'université Bordeaux 2-Victor Segalen.

GIBEL P. (2008) Analyse en Théorie des Situations Didactiques d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **13**, 5-39.

GOBERT S. (2001) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de la géométrie à l'école élémentaire*, Thèse université Paris7-Denis Diderot.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, p. 175-193.

PERRIN-GLORIAN M.J. ET AL. (2013), Comment peut-on penser l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans? Repère-IREM **90**, 5-41.

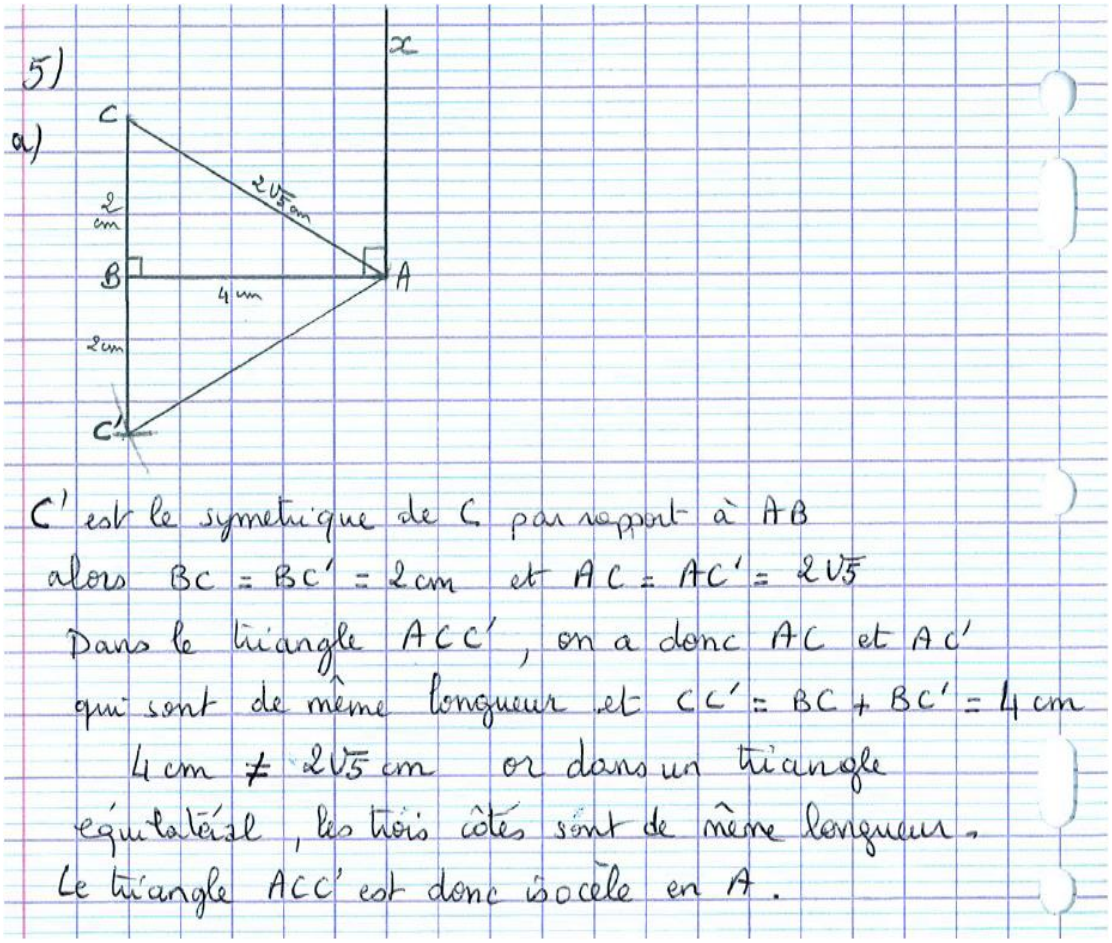
VIII - ANNEXES

Annexe 1 Productions des étudiants de M1

5) a La droite (AB) est axe de symétrie pour le triangle ACC' donc AC = AC', soit AC' = $2\sqrt{5}$.
De plus, B est le milieu de [CC'] donc CC' = 2BC, soit CC' = 4.
Un triangle équilatéral a ses trois côtés de même longueur.
Comme AC' ≠ CC', le triangle ACC' n'est pas équilatéral.

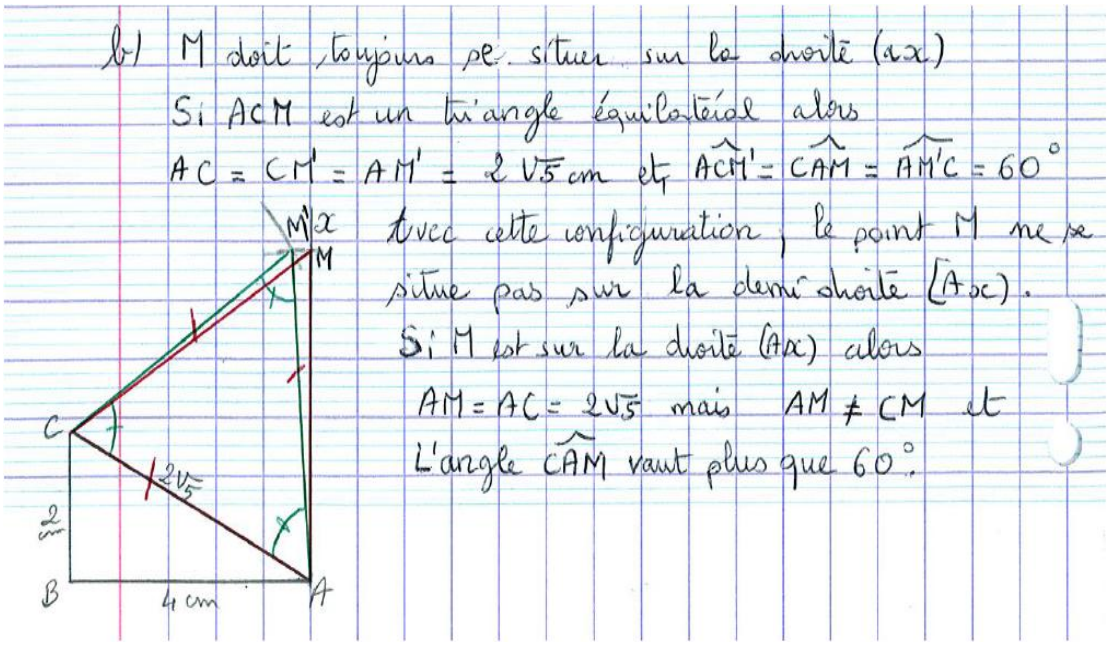
b Le triangle ACC' est isocèle (AC = AC') avec (AB) comme axe de symétrie et non équilatéral, l'angle $\widehat{BAC}$ ne mesure pas 30°.
Or l'angle $\widehat{BAM}$ mesure 90° car M est sur [Ax), donc l'angle $\widehat{CAM}$ ne mesure pas 60° quel que soit le point M sur (Ax).
Un triangle équilatéral a trois angles qui mesurent 60° donc il n'existe pas de point M tel que ACM soit équilatéral.

Production 2 (5a et 5b)

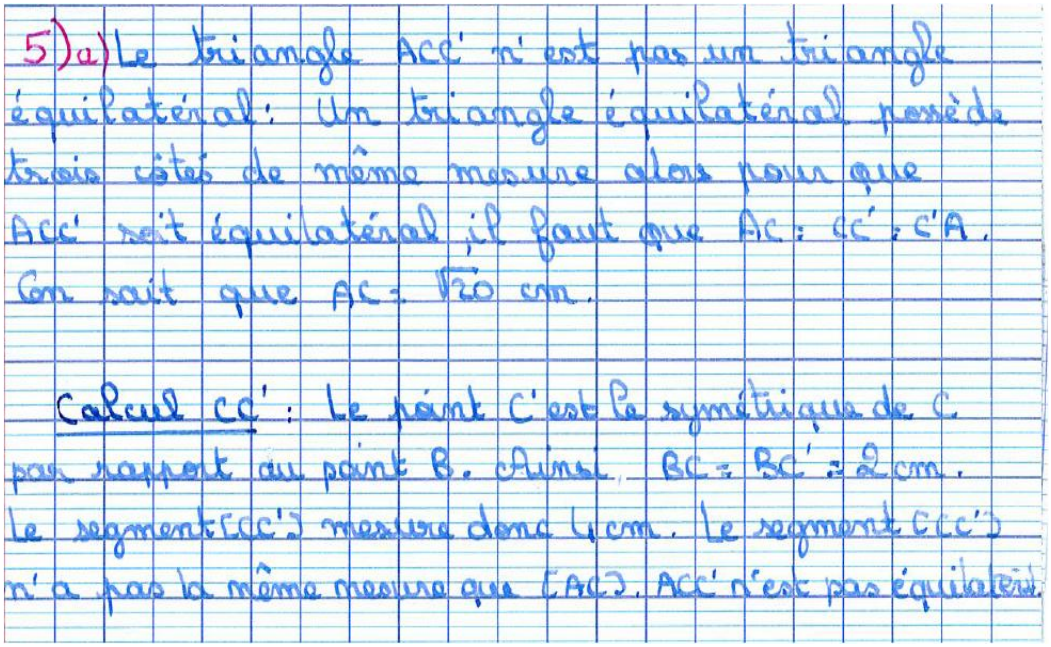


C' est le symétrique de C par rapport à AB
alors BC = BC' = 2 cm et AC = AC' = $2\sqrt{5}$
Dans le triangle ACC', on a donc AC et AC' qui sont de même longueur et CC' = BC + BC' = 4 cm
4 cm ≠ $2\sqrt{5}$ cm or dans un triangle équilatéral, les trois côtés sont de même longueur.
Le triangle ACC' est donc isocèle en A.

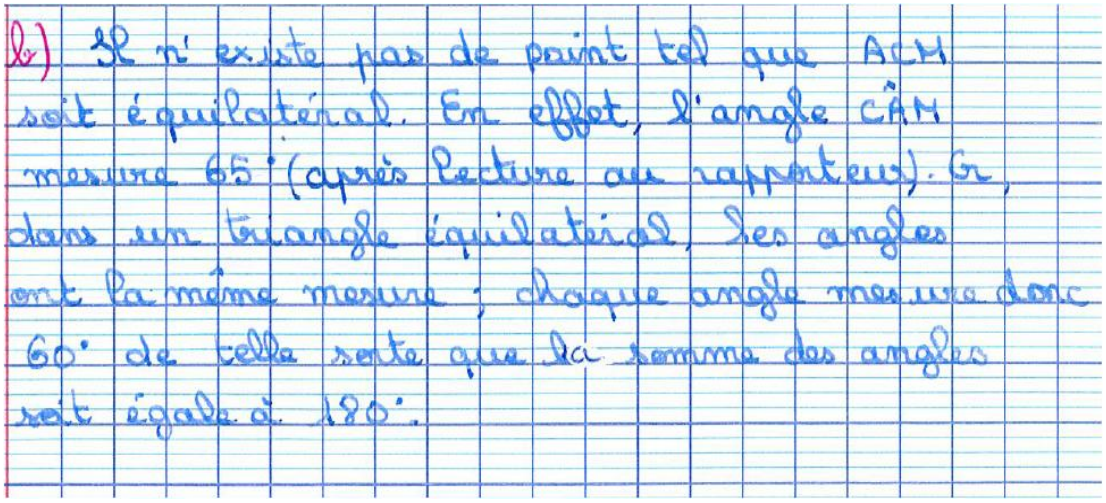
Production 3 (5a)



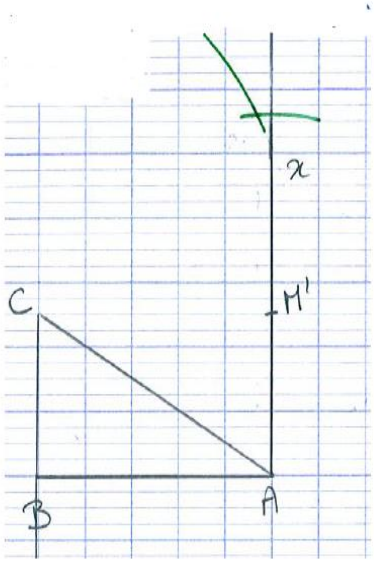
Production 3 (5b)



Production 4 (5a)


b) Il n'existe pas de point tel que ACM soit équilatéral. En effet, l'angle CÂM mesure 65° (après lecture au rapporteur). Or, dans un triangle équilatéral, les angles ont la même mesure ; chaque angle mesure donc 60° de telle sorte que la somme des angles soit égale à 180°.

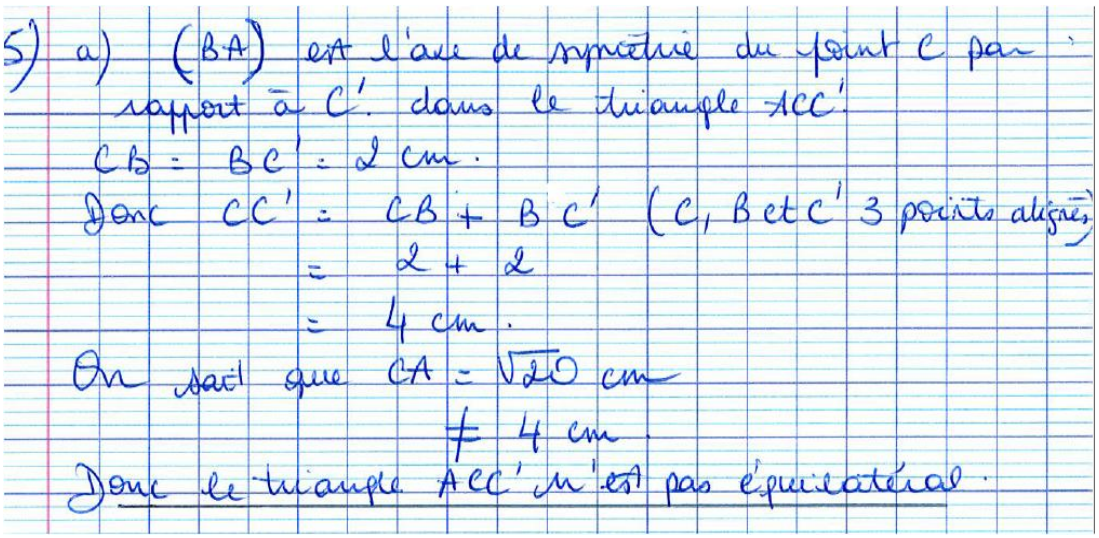
Production 4 (5b)

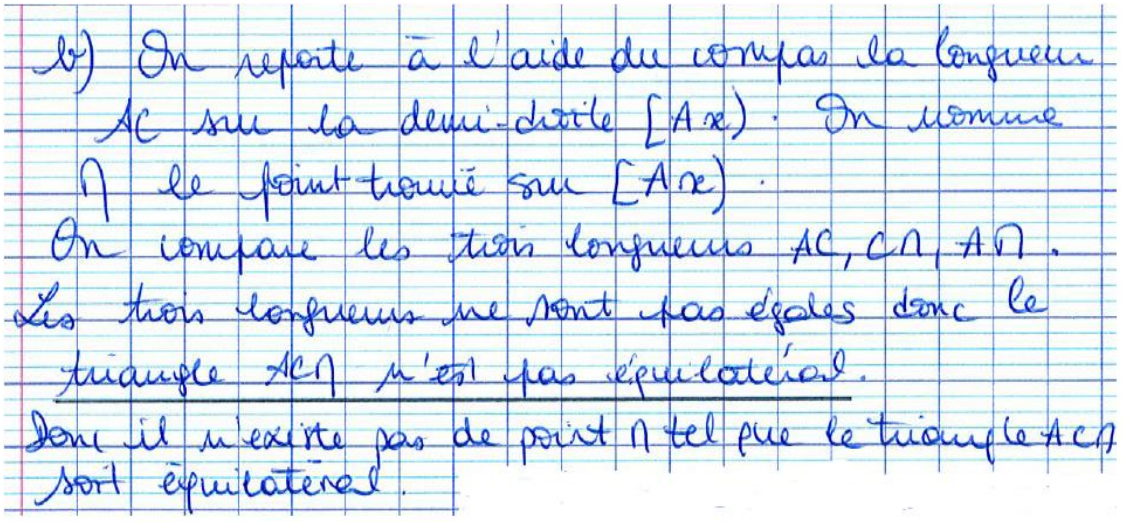


5)a. Avec C' symétrique de C par rapport à (AB) alors B est milieu de CC' et BC = 2 cm = BC'
donc CC' = BC + BC' = 2 + 2 = 4 cm.
On a AC = $2\sqrt{5}$ cm d'après question 1).
Donc le triangle ACC' n'est pas un triangle équilatéral, c'est un triangle isocèle en A.

b. Il n'existe pas de point M situé sur [Ax) qui soit à $2\sqrt{5}$ cm de A et de C donc il n'existe pas de point M tel que ACM soit équilatéral.
(voir sur la construction traits verts)
Le point n'est pas situé sur [Ax).

Production 8 (5a et 5b)


5) a) (BA) est l'axe de symétrie du point C par rapport à C'. dans le triangle ACC'
CB = BC' = 2 cm.
Donc CC' = CB + BC' (C, B et C' 3 points alignés)
= 2 + 2
= 4 cm.
On sait que CA = $\sqrt{20}$ cm
≠ 4 cm.
Donc le triangle ACC' n'est pas équilatéral.


b) On reporte à l'aide du compas la longueur AC sur la demi-droite [Ax). On nomme N le point tracé sur [Ax).
On compare les trois longueurs AC, CN, AN.
Les trois longueurs ne sont pas égales donc le triangle ACN n'est pas équilatéral.
Donc il n'existe pas de point N tel que le triangle ACN soit équilatéral.

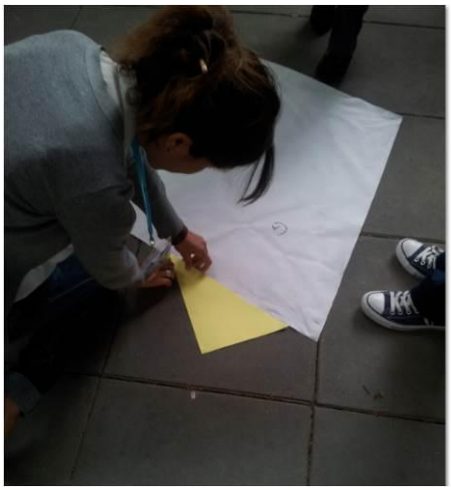
Production 11 (5a et 5b)

ANNEXE 2

Eléments relatifs à la progression de l'enseignant

1. Tracés de figures. Utilisation du compas pour reporter une longueur
2. Notion de droites parallèles. Activités axées sur la construction. P1 et P2
3. Cercles et compas P1
4. Angles
5. Notion de « bande » constituée de deux droites parallèles.
6. Introduction du parallélogramme comme intersection de deux « bandes » (de couleurs différentes pour mieux visualiser…). Les diagonales sont tracées et leurs propriétés sont « vues » à partir de ces tracés. P2
7. Idem pour le carré, le rectangle puis le losange dans cet ordre. Le losange est introduit comme intersection de deux bandes de même largeur. Dans une deuxième séance le maître présente la construction au compas (voir cahier de leçons).P3
8. Les triangles sont étudiés en commençant par les triangles particuliers. Les élèves cherchent à les tracer par eux-mêmes puis au moment de la correction les différentes méthodes sont exposées. Certains ont utilisé le compas. Cette méthode est reprise par le maître. P3
9. Hauteurs d'un triangle P3-P4
10. Symétrie axiale
11. Situation de communication les losanges micro-espace
12. Reproduction de losanges dans le méso-espace
13. Programmes de construction

ANNEXE 3 Quelques photographies des participants confrontés à la tâche de reproduction de losange dans le méso-espace













FAIRE DE LA GÉOMÉTRIE AU CYCLE 3 À PARTIR D'UNE CORDE À 13 NŒUDS

Mirène LARGUIER
Maître de conférences, IUFM DE Montpellier
Laboratoire LIRDEF
miren.larguier@gmail.com

Brigitte BONNET-PHILIP
Conseillère pédagogique, circonscription de Montpellier ouest
brigitte.bonnet-philip@ac-montpellier.fr

Résumé

La corde à 13 nœuds est un outil qui a perduré jusqu'au moyen-âge et dont les multiples usages permettent de faire rencontrer aux élèves des notions comme l'alignement, l'orthogonalité, le parallélisme, les polygones, mais aussi des notions du domaine des grandeurs et mesures comme longueur, périmètre et aire.

Les questions posées a priori aux participants de l'atelier sans leur dévoiler les possibilités de l'outil « corde à treize nœuds » sont les suivantes :

- le point de départ de l'enseignement de la géométrie en cycle 3 étant la corde à 13 nœuds, quelles notions peuvent être abordées dans le méso puis le micro espace ?

- quelles progressions mettre en place pour élaborer des séquences d'enseignement en lien avec les notions précédentes ?

Le groupe premier degré de l'IREM de Montpellier expérimente depuis l'année scolaire 2011- 2012 des séquences d'enseignement ayant pour point de départ la découverte de la corde à13 nœuds. Lors de l'atelier, les séquences élaborées seront proposées aux participants pour qu'elles soient analysées.

I - L'INTÉRÊT DU GROUPE IREM POUR LA CORDE À 13 NŒUDS

Le groupe premier degré de l'IREM de Montpellier est à l'origine du travail que nous allons présenter. Ce groupe est constitué depuis une quinzaine d'années par douze professeurs des écoles titulaires dont certains sont maîtres formateurs et il est piloté par un enseignant chercheur de l'IUFM de Montpellier, actuellement Mirène Larguier, et un conseiller pédagogique représentant la direction académique, actuellement Brigitte Bonnet-Philip. Le travail de ce groupe est inscrit au plan de formation du premier degré, les enseignants sont donc remplacés par des titulaires de la brigade départementale. La durée du stage de 6 jours jusqu'en 2012, a été réduite pour l'année 2012-2013 à 4 jours pour des raisons budgétaires. Le groupe élabore des séquences de classe, les expérimente et diffuse des ressources pour les enseignants.

Nous avons été intéressés par le potentiel d'un outil utilisé pendant des siècles qui semblait a priori permettre l'enseignement de nombreuses notions du programme de mathématiques dans des classes de cycle 2 et de cycle 3. Cet outil était utilisé en Égypte 2000 ans avant Jésus Christ, il était également l'un des outils essentiels des bâtisseurs du Moyen Âge. À Guédelon[1], en France, ces anciennes techniques moyenâgeuses sont reprises actuellement pour construire un château, la corde à 13 nœuds figure parmi ces outils.

[1] www.**guedelon**.fr

Voir aussi : http://matoumatheux.ac-rennes.fr/accueil.htm

http://education.francetv.fr/videos/111097-envoyer-ami-v111097

Le fait de pouvoir relier des contenus mathématiques figurant dans le savoir à enseigner à des aspects historiques a augmenté notre motivation pour nous lancer dans l'exploitation de cet outil traditionnel mais nouveau pour les élèves comme pour les professeurs. Cependant l'aspect historique a été un élément moteur pour les enseignants curieux de savoir comment utiliser cet outil mais n'a pas été exploité avec les élèves. Un développement de cette dimension historique reste une piste intéressante à explorer en classe. Des séquences ont ainsi été élaborées et expérimentées en cycle 2 et en cycle 3 entre septembre 2011 et juin 2013, du CP au CM2. Dans cet atelier, nous nous limitons à la séquence pour le cycle 3, cependant de nombreux éléments peuvent être repris en cycle 2.

II - DES APPUIS THÉORIQUES POUR FONDER CE TRAVAIL

1 Étude de l'espace et de la géométrie

L'usage d'une véritable corde à 13 nœuds situe d'emblée les tâches données aux élèves dans le monde réel, ce qui pose des problèmes spatiaux qui vont être modélisés dans le domaine mathématique de la géométrie. Nous différencions ainsi les problèmes spatiaux et les problèmes géométriques dans une acception précisée ainsi par Guy Brousseau (2000) :

> Il est assez commun de justifier l'enseignement de la géométrie par le fait qu'elle est la science de l'espace, le décor essentiel de toutes nos actions et la matrice de toutes nos conceptions. […] La géométrie peut être définie comme la collection des connaissances spécifiques du **contrôle de la consistance des énoncés sur l'espace**.

Cette disjonction nous apparait essentielle pour le travail mené à partir d'un objet réel qui va être manipulé pour évoquer des objets idéaux qui seront définis géométriquement. Brousseau (ibid) définit trois fonctions de la géométrie :

- science de l'espace ;
- moyen pour représenter et modéliser l'espace ;
- modèle de l'activité mathématique en tant qu'initiation à une théorie mathématique.

Dans le contexte de cet atelier, nous ne retenons que les deux premières fonctions qui nécessitent déjà, pour un élève de l'école primaire, un travail d'abstraction important. Ce processus est nécessaire pour comprendre quels seront les véritables objets au sujet desquels s'élaboreront, au collège, des démonstrations en géométrie.

Nous reprenons la définition donnée par Guy Brousseau (2000) relative aux trois espaces : macro-espace, méso-espace et micro-espace pour ne garder dans ce contexte que le méso-espace et le micro-espace. Brousseau (ibid) souligne que ces trois dimensions impliquent des conceptions de l'espace et des milieux spatiaux différents. Une variable importante du milieu objectif est relative au matériel manipulé. Dans le méso-espace, ou espace qui peut être embrassé par un sujet par un regard circulaire, il s'agit d'une corde similaire à celle utilisée historiquement d'une longueur d'environ 6m. Dans le micro-espace, espace constitué par l'environnement proche d'un sujet qui peut être vu et touché sans avoir à se déplacer, cette grande corde est remplacée par deux outils différents :

- une cordelette fermée d'une longueur d'environs 20 cm ;
- une corde-paille fermée constituée par 12 pailles de même longueur dans lesquelles passe une ficelle.

Par ailleurs dans ce dernier espace, les élèves disposent également des instruments usuels de géométrie.

2 L'influence du milieu objectif sur les apprentissages des élèves

Nous empruntons à Perrin-Glorian et al. (2006) la question suivante :

> Quelle articulation entre l'usage des instruments de géométrie et le développement de connaissances géométriques incorporés dans des schèmes d'action ?

Si cette question a été étudiée pour des instruments usuels, nous la transposons dans le cadre de ce travail pour la grande corde, la cordelette et la corde-paille. Il est intéressant de se poser la question à priori du potentiel mathématique porté par ces instruments, ce qui revient à poser la question des conceptions sous-jacentes en lien avec des milieux et des espaces différents. Par ailleurs, nous partageons l'hypothèse des auteurs (ibid) :

> Pour notre part, nous faisons l'hypothèse que les concepts géométriques, le vocabulaire, la maîtrise des instruments s'acquièrent et s'évaluent dans des activités qui les mettent en jeu simultanément et en imbrication avec des connaissances liées à la reconnaissance des propriétés visuelles des figures.

3 Les paradigmes de la géométrie

Houdement et Kuzniak (2006), définissent trois paradigmes géométriques relativement à trois dimensions jouant des rôles différents pour le statut de la preuve : l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif. Le travail que nous proposons s'inscrit dans la Géométrie I ou « géométrie naturelle » :

> La Géométrie I a pour source de validation la réalité, le sensible. Le qualificatif de « naturelle » que nous lui avons attribué à la suite de Gonseth veut refléter l'existence d'une relation au réel, mais en aucun cas il ne comporte de référence à l'idée de nature opposée à celle de culture. La Géométrie I correspond déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets s'ils sont matériels ou les traduit en schémas.

Ainsi les élèves vont être amenés à sélectionner certains éléments de la corde à 13 nœuds et à en négliger d'autres comme la nature de la corde ou sa grosseur. Ils vont être amenés également à conserver la mémoire des réalisations avec la grande corde à travers des schémas où ne devront figurer que les éléments suffisants et nécessaires pour pouvoir retrouver une réalisation avec la corde d'après un schéma. Cette relation entre le méso-espace avec la grande corde et le micro-espace avec le schéma, est un fondement pour élaborer les objets de la géométrie qui seront ceux de la géométrie II dite « géométrie axiomatique naturelle » pour laquelle :

> La relation avec la réalité subsiste encore dans cette Géométrie, dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux.
>
> L'axiomatisation proposée est certes une formalisation, mais elle n'est pas formelle car ici la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité. D'où la conservation du qualificatif de « naturelle ». (Houdement et Kuzniak, 2006)

Nous reviendrons plus loin sur cette dimension sémantique dont l'évolution rend compte de la dynamique de modélisation qui s'amorce dans l'espace et permet l'entrée dans la géométrie.

4 Distinction dessin/figure/pré-figure

Nous reprenons la distinction depuis longtemps retenue dans des recherches en didactique des mathématiques entre dessin et figure (Parzysz, 1988). Le dessin est un objet du monde réel qui est une représentation sémiotique dans le registre graphique au sens de Raymond Duval[2] (1993). Ce dessin représente soit un objet du monde réel, il représente la corde par exemple, soit un objet idéal de la géométrie. C'est cet objet théorique des mathématiques du domaine de la géométrie que nous appelons alors figure. La figure s'inscrit ainsi dans la théorie avec une dénomination, une définition, des propriétés, etc. Dès l'antiquité, cette distinction est apparue[3] et elle est fondamentale pour établir la première théorie axiomatique des mathématiques, préfiguration de la Géométrie II.

[2] Duval lui-même ne fait pas la distinction entre les termes de dessin et de figure et parle notamment des appréhensions des figures (1997) là où d'autres auteurs parleraient d'appréhensions des dessins. .

[3] Platon mettait en garde pour ne pas confondre un objet et son reflet dans l'eau, il s'agit donc de ne pas confondre l'objet et l'une de ses représentations.

Nous avons éprouvé le besoin, pour cet atelier, d'un terme spécifique pour désigner les formes réalisées avec la corde. Nous utilisons le terme de pré-figure. Ainsi, avec la grande corde, les élèves peuvent réaliser la pré-figure d'un losange puis en faire le dessin. Cela permettra dans le meso-espace, de réunir tous les dessins correspondant à un quadrilatère dont tous les côtés ont la même longueur, soit 3 fois la distance entre deux nœuds consécutifs. Tous ces dessins correspondent à une figure appelée losange définie par le fait d'être un quadrilatère ayant quatre côtés de la même longueur.

5 Analyse du discours et des formulations

Le passage du monde réel au cadre géométrique s'accompagne d'une transformation conceptuelle qui va de pair avec une évolution du langage dans un processus de *secondarisation des genres* (Rebière, 2002, 2013). Ainsi dans un premier temps, la situation dans le méso-espace utilisant la grande corde suscitera vraisemblablement un langage renvoyant au milieu matériel objectif : corde, nœud, intervalle, écart, tenir un nœud avec une main, tendre la corde entre le premier nœud et le quatrième nœud, etc. Le passage au dessin pour garder la mémoire de la pré-figure devrait faire évoluer ce discours vers les formulations suivantes : pointe, point, sommet, trait droit, côté, forme, triangle, quadrilatère, rectangle, etc. Une dernière étape du processus sera de parvenir à dégager et institutionnaliser un objet géométrique dont les caractéristiques appartiennent au cadre géométrique avec les termes spécifiques : point, sommet, segment, côté, milieu, triangle, quadrilatère, longueur, etc… Cette transformation conceptuelle et langagière s'inscrit dans une première phase d'un processus de modélisation, ce qui reprend l'une des fonctions de la géométrie soulignée par Brousseau.

6 Synthèse des soubassements théoriques

Le tableau de la figure 1 met en parallèle les différentes références théoriques et montre l'évolution du début de la séquence dans le méso-espace avec la grande corde jusqu'au micro-espace où implicitement ce sont les figures de la géométrie GII qui sont appréhendées. C'est le collège qui rendra explicite ce concept en acte de figure géométrique qui est à différencier du dessin qui la représente.

Nature de l'espace	Méso-espace	Micro-espace	Micro-espace	Micro-espace
Les objets du milieu	Objets réels : corde à 13 nœuds	Objets réels : cordelette et corde-paille	Représentations sémiotiques dans le registre des dessins : dessins comme mémoire des réalisations avec les 3 types de cordes	Figure géométrique : de façon implicite le dessin est une représentation de la figure comme objet idéal de la géométrie
Type d'activité	Expérimentation	Expérimentation	Première étape de la modélisation	Modélisation
Type de géométrie	GI	GI	GI	GII
Langage	Décrit les objets réels	Décrit les objets réels	Décrit les objets réels et intègre des éléments langagiers géométriques	Langage spécifique de la géométrie

Tableau 1 : synthèse des éléments théoriques

III - LA SÉQUENCE EN CYCLE 3 ÉLABORÉE PAR LE GROUPE IREM

1 Les programmes dans lesquels s'inscrivent les séances

Nous donnons ci-dessous des extraits des programmes de 2008 en vigueur au moment de l'atelier concernant le domaine géométrique à enseigner au cycle 3 (BO n°3 du 19 juin 2008).

Géométrie

Utiliser en situation le vocabulaire géométrique : points alignés, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, segment, milieu, angle, axe de symétrie, centre d'un cercle, rayon, diamètre.

Percevoir et reconnaître parallèles et perpendiculaires

Vérifier la nature d'une figure plane simple en ayant recours aux instruments

Décrire une figure en vue de l'identifier parmi d'autres figures ou de la faire reproduire.

Grandeurs et mesures

Utiliser des instruments pour mesurer des longueurs…

Vérifier qu'un angle est droit en utilisant l'équerre ou un gabarit

2 La séquence du cycle 3 et le descriptif des séances proposées

Nous présentons tout d'abord globalement la structure de la séquence élaborée pour le cycle 3 et testée dans des classes. Nous détaillerons ensuite les différentes séances.

NUMÉRO DE SÉANCE	TITRE	OBJECTIFS SPÉCIFIQUES
1 dans le meso-espace	Découverte de l'outil corde à 13 nœuds	Décrire la corde, repérer ses caractéristiques (nombre de nœuds, intervalle entre 2 nœuds successifs) et préciser les termes de la description. Rechercher des formes géométriques (les pré-figures).
2 dans le meso et le micro-espace	Corde à 13 nœuds et dessins des pré-figures	Tracer des dessins représentant les pré-figures obtenues avec la corde. Établir un répertoire des dessins avec des lignes ouvertes ou fermées.
3 dans le micro-espace	Avec les cordelettes	Construire des pré-figures avec les cordelettes à partir de photos prises en séance 2.
4 dans le micro-espace	Avec les cordes-pailles	Écrire des programmes de construction. Construire des figures de dimensions données.

Tableau 2 : description globale de la séquence corde à 13 nœuds

2.1 Séance 1 : découverte de l'outil corde à treize nœuds

Étape 1 : Dans le méso-espace, dans la cour ou dans un gymnase, répartir les élèves en 3 ou 4 groupes, chaque groupe dispose d'une corde à 13 nœuds de 6m de long.

Laisser un temps d'observation aux élèves puis recueillir les commentaires, faire décrire l'outil proposé.

On attend le nombre de nœuds, la notion d'intervalle ou d'écart entre deux nœuds consécutifs, l'observation de la régularité des positions des nœuds et de la longueur des intervalles. On attend aussi quelques propositions d'utilisation éventuellement non mathématiques : jouer, sauter …

Étape 2 : Préciser le cadre disciplinaire mathématique de l'activité à venir et demander aux élèves comment on pourrait utiliser cette corde pour faire de la géométrie.

Matériel mis à disposition : crayon, craie, ardoise, appareil photo…

Dans les groupes, les rôles sont répartis entre les élèves : acteurs ou observateurs.

Les acteurs doivent tester ce qu'ils ont imaginé, les observateurs doivent garder la mémoire des différentes positions de la corde.

Inverser les rôles après quelques minutes.

Étape 3 : Réaliser une affiche collective rendant compte des productions des élèves dans les différents groupes.

Étape 4 : Débattre à partir de l'affiche pour repérer les éléments nécessaires à la représentation ainsi que leurs dénominations.



Figure 1 : séance 1 étape 2

Cette première séance permet d'installer le milieu matériel dans l'espace réel vécu, de définir le cadre de travail, celui de la géométrie, et d'enrichir le milieu de termes partagés dans la classe pour décrire la corde, expliciter les façons de la tenir pour créer des pré-figures. Par ailleurs, une première évolution d'un problème de l'espace vers un problème de géométrie est amorcée en mobilisant la géométrie comme « science de l'espace » (Brousseau, 2000).

2.2 Séance 2 : corde à 13 nœuds et dessins des pré-figures

Étape 1 : Rappel de la séance précédente et reprise des affiches.

Étape 2 : Mise en situation

On dispose de 3 ou 4 cordes, la classe est séparée en 3 ou 4 groupes afin de favoriser la manipulation.

Comme à la séance précédente, les élèves vont jouer successivement deux rôles distincts au sein des groupes : acteurs (3 élèves par corde et un traceur) ou observateurs (les autres membres du groupe).

Mettre à disposition du matériel : papier, crayon, craie, ardoise, appareil photo…

Consigne :

« *Réalisez toutes les formes géométriques possibles* ***corde tendue et fermée en tenant un seul nœud d'une main.*** *Dans chaque groupe, testez ce que vous avez imaginé. Les observateurs doivent garder la mémoire des différentes positions de la corde.* »

La corde est posée sur le sol pour que le traceur puisse matérialiser la forme produite.

Laisser les élèves agir avec la corde puis inverser les rôles.

Reprendre la même consigne avec :

- 4 élèves par corde et un traceur ;

- 5 élèves par corde et un traceur.

Étape 3 : Retour en classe, observer les réalisations et trier les figures. Expliciter les critères de tri.

Dans la figure 2 nous donnons quelques exemples des dessins obtenus à la deuxième étape.

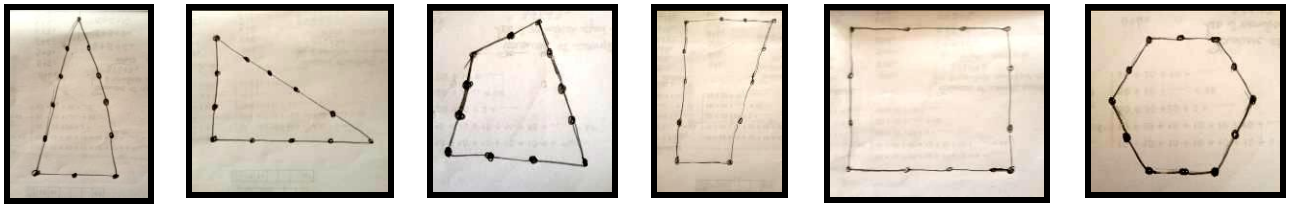


Figure 2 : exemples de dessins produits en séance 2

La séance 2 sollicite la géométrie comme « moyen pour représenter et modéliser l'espace ». Le potentiel géométrique de l'objet réel « corde à treize nœuds » est mis au jour dans la phase où les élèves ont à dessiner les pré-figures obtenues. Lors de la troisième étape, l'analyse de l'affiche collective amène les élèves à classer les dessins en triangles, quadrilatères, etc… en mobilisant des connaissances géométriques qui s'expriment par le langage spécifique de la géométrie. Des termes comme côté et sommet viennent alors remplacer les termes comme intervalle et nœud qui décrivent l'objet réel « corde » dans un processus de secondarisation des genres (Rebière, 2002, 2013).

2.3 Séance 3 : avec les cordelettes

Matériel : Cordelettes à 13 nœuds individuelles préalablement construites par les élèves ou par le professeur (Cf. annexe 1).

Photos prises lors de la séance 2 imprimées et plastifiées.

Un support pour 2 élèves pour fixer les cordelettes : un couvercle en carton de ramette de papier A4 ou une boîte à pizza, par exemple. Clous ou punaises à tableau. Feuille A4 et outils de traçage.



Figure 3 : le matériel de la séance 3

Étape 1 : Reprise collective de la séance précédente et de l'utilisation du vocabulaire spécifique lié aux productions des élèves.

Étape 2 : Consigne : « *Par groupes de 3, avec la cordelette à 13 nœuds, reproduisez à partir des photos quelques figures réalisées dans la cour.* »

Étape 3 : La cordelette est fixée, avec des petits clous, par ses «nœuds sommets » sur un support en carton recouvert de 2 feuilles A4 superposées.

Consigne : « *Tracez les figures (ou quelques figures) sur le papier.* »

Étape 4 : Faire énoncer par les élèves la technique utilisée pour les tracés.

Les procédés reprennent ceux utilisés dans la cour (comme le suivi de la corde avec le crayon, c'est la technique 1). Il est possible que certains aient simplement relié les sommets matérialisés par les trous laissés par les clous (c'est la technique 2).

Étape 5 : Si la technique 2 n'émerge pas, travailler avec la deuxième feuille où n'apparaissent que les trous correspondant aux sommets.

Demander de reproduire la figure, avec les outils de traçage et laisser les élèves chercher d'autres figures.

Étape 6 : Mise en commun de toutes les figures obtenues

2.4 Séance 4 : avec les cordes-pailles

Dans cette séance, apparaît la nécessité de mettre au point une dénomination pour identifier les différents polygones obtenus en laissant cette responsabilité aux élèves, dans un premier temps. Nous proposons une notation possible, mais elle n'est pas unique. Nous notons par exemple 2-4-1-5 un quadrilatère ABCD constitué par les longueurs suivantes :

AB = 2u BC = 4u CD = u DA = 5u

u étant l'unité de longueur qui corresponde à la longueur entre 2 nœuds consécutifs sur la corde tendue.

Des problèmes peuvent alors être posés :

- est-ce que les pré-figures obtenues avec les codages 1-5-2-4 et 4-5-1-2 sont les mêmes qu'avec le codage 2-4-1-5 ?
- est-ce que toute somme égale à 12 d'au moins 3 nombres permet de déterminer un polygone ?

Matériel : Affiche réalisée à l'issue de la séance 3.

Cordes-pailles avec alternance de 2 couleurs au moins.

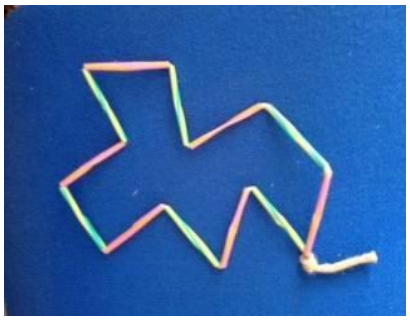


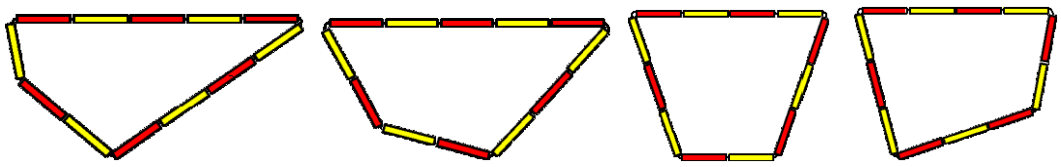
Figure 4 : corde-paille bicolore

Étape 1 : Distribuer un nouvel outil, la corde-paille et demander aux élèves de reconstruire avec cette corde-paille quelques figures de l'affiche.

Étape 2 : Représenter sur une feuille les différentes figures réalisées avec les pailles et faire apparaître les couleurs.

Étape 3 : Qui suis-je ?

Première phase : Afficher au tableau les dessins des quadrilatères ci-dessous :



Un élève choisit dans sa tête une figure, les autres doivent la découvrir en posant des questions auxquelles l'élève répondra uniquement par oui ou non.

Deuxième phase : Répertorier les informations utilisées pour identifier la figure avant de proposer le codage. Exemple : le codage du premier dessin est 5-4-2-1.

Troisième phase : refaire le jeu du « qui suis-je » avec l'utilisation de ce codage.

Étape 4 : Institutionnalisation. Une affiche est réalisée avec les différentes sortes de triangles.

Étape 5 : Faire réaliser aux élèves un répertoire de tous les polygones en indiquant le codage associé.

Prolongements:

Rechercher avec la corde-paille tous les triangles possibles que l'on peut former et écrire leur codage.

Faire l'inventaire des propositions.

Nommer ces triangles et leurs propriétés : 2-5-5 isocèle ; 3-4-5 rectangle ; 4-4-4 équilatéral.

Faire rechercher toutes les propriétés des quadrilatères (parallélisme, symétrie axiale, angles droits, etc.)

IV - QUESTIONS DE L'ATELIER ET ÉLÉMENTS DE RÉPONSE

Avant la présentation des séances menées par les enseignants du groupe IREM de Montpellier, les participants de l'atelier ont cherché, par groupes, les usages didactiques de la corde à 13 nœuds en cycle 3 en lien avec les programmes officiels dans le méso et le micro espace. Ils ont élaboré un scénario de séquence utilisant ce matériel en commençant dans le méso espace et en poursuivant dans le micro espace, et ont précisé les objets et les concepts travaillés dans les différentes séances. Nous présentons de façon synthétique des propositions des participants à l'issue de cette recherche en groupes.

Dans le méso espace

- Travailler avec les cordes entières ou pas.
- Réaliser des cercles concentriques.
- Vérifier l'orthogonalité de 2 plans.
- Placer un élève à un endroit en tenant un nœud, c'est le 1er sommet d'un carré, demander à d'autres élèves de se positionner pour obtenir le carré.

Dans le micro espace avec les cordelettes

- Tracer un cercle de rayon donné (ex : le rayon fait 2 espaces ou comprend « 3 nœuds »).
- Tracer deux diamètres perpendiculaires (utiliser la corde en « 3-4-5 ») et relier les sommets. Qu'obtient-on ? Reprendre cette activité avec les instruments usuels.
- Situation des triangles :
  - Construire un triangle avec une cordelette.
  - Écrire un message pour le faire construire par d'autres élèves.
  - Réaliser une trace (dessin) du triangle.
  - Rechercher d'autres triangles. La recherche est exhaustive et permet le repérage de triangles impossibles. Une difficulté avec le triangle 2-4-6 qui est possible à réaliser dans le réel mais qui n'existe pas dans la géométrie plane (sauf à être un triangle aplati, ce qui est difficile à concevoir en cycle 3).
- Avec les cordes-pailles : donner un dessin réalisé à l'échelle 1 (1 dessin différent par groupe), sans faire apparaître « les morceaux de paille », c'est à dire sans faire apparaître les détails du tracé. Faire rechercher le périmètre des figures en unités paille, montrer

qu'elles ont le même périmètre mais qu'elles sont de formes différentes. Un prolongement est possible avec un travail similaire relatif aux aires.

Des remarques intéressantes issues des débats de l'atelier

- Un nœud est à égale distance des 2 autres les plus proches.
- La comparaison d'une corde avec douze espacements réguliers et une corde avec 12 espacements irréguliers permet de souligner l'importance des espacements réguliers.
- Avec les cordes-pailles : les pailles mises bout à bout, formant une ligne droite, matérialisent un côté de la figure, le point de contact entre deux pailles ne formant pas une ligne droite peut devenir un sommet.

V - EN SYNTHÈSE

1 Potentiel de la grande corde à 13 nœuds

La corde n'est au départ, lorsqu'elle est présentée aux élèves, qu'un artefact (Rabardel, 1995) qui peut se transformer en corde à sauter par exemple. C'est donc dans un processus de genèse instrumentale qu'elle va devenir un instrument pour la discipline des mathématiques en lien avec des schèmes d'utilisation. Rabardel (Ibid) précise que :

> Un instrument est donc formé de deux composantes :
>
> – d'une part, un artefact, matériel ou symbolique, produit par le sujet ou par d'autres ;
>
> – d'autre part, un ou des schèmes d'utilisation associés, résultant d'une construction propre du sujet, autonome ou résultant d'une appropriation de schèmes sociaux d'utilisation (SSU).

Cet instrument va permettre de travailler les concepts suivants avec l'élaboration de schèmes d'utilisation spécifiques :

- dans le domaine de la géométrie : figure plane, figure dans l'espace, alignement, segment, droite, cercle, orthogonalité, parallélisme, polygones, symétrie, milieu ;
- dans le domaine des grandeurs et mesures : longueur, périmètre, aire, existence d'un polygone de dimensions données (inégalité triangulaire) ;
- dans le domaine numérique : décomposition additive du nombre 12, comparaison de nombres.

Le travail sur le cercle proposé par plusieurs participants à l'atelier n'a pas été exploré dans la séquence élaborée par le groupe IREM de Montpellier. C'est bien évidemment une piste intéressante à explorer. De même le domaine numérique n'a pas été abordé. Le potentiel de la corde à treize nœuds n'a donc pas été totalement pris en compte.

Dans le cadre de la géométrie, l'introduction de la corde à 13 nœuds dans le milieu matériel de la situation d'action, mobilise les connaissances suivantes en tant que concepts en actes ou théorèmes en acte (Vergnaud, 1990), préparant l'avènement de connaissances du domaine de la géométrie et du domaine des grandeurs géométriques :

- Concepts en acte :
  - distinction entre figure plane et dans l'espace ;
  - concept de polygone, côté, sommet, figure concave ou convexe ;
  - définition d'un polygone par le nombre de ses sommets ou bien par la longueur de ses côtés ;
  - périmètre de la pré-figure égal à 12 unités, l'unité étant la distance entre 2 nœuds consécutifs lorsque la corde est droite ;
  - distinction entre pré-figures indéformables (comme 3-4-5) ou bien déformables (comme 3-3-3-3) ce qui permet l'image mentale d'une pré-figure dynamique qui

objective la différence entre le dessin et la figure (il existe un losange de côté 3 unités et il existe une infinité de dessins différents de ce losange).

- Théorèmes en acte :
  - impossibilité de construire certains triangles comme 7-3-2 ;
  - il est possible de trouver différents polygones de même périmètre et d'aires différentes ;
  - il existe différents polygones de même périmètre et de formes différentes.
- Dans le méso-espace, la corde à 13 nœuds sert d'instrument de vérification et de tracé, et nous retrouvons là son usage en tant qu'outil des bâtisseurs utilisé jusqu'au moyen âge :
  - tracer des dessins géométriques à partir des pré-figures ;
  - réaliser des traits droits ;
  - réaliser ou vérifier un alignement ;
  - comparer des longueurs ou réaliser une longueur multiple d'une autre ;
  - réaliser ou vérifier l'orthogonalité ;
  - réaliser ou vérifier un parallélisme.

Concernant le travail relatif au parallélisme, nous avons remarqué qu'il est peu fréquent dans les classes observées alors que la réalisation de la pré-figure d'un parallélogramme comme 2-4-2-4 donne une forme déformable tout à fait pertinente pour réaliser ou vérifier le parallélisme. L'image mentale d'un parallélogramme « dynamique » est une conception intéressante qui porte en germe une définition du parallélogramme.

2 Potentiels comparés des différentes cordes

Le travail avec la grande corde et avec la cordelette permettent de changer d'espace, du méso au micro. Ce changement d'espace favorise le basculement vers la modélisation géométrique. Ce sont essentiellement les nœuds qui sont retenus comme éléments essentiels pour décrire les pré-figures. La modélisation géométrique d'un nœud est alors un point en tant que sommet d'un polygone. Les figures obtenues sont donc plutôt pensées en dimension zéro (Duval et Godin, 2005). La corde-paille, en revanche, introduit un changement conceptuel important. Les éléments caractéristiques essentiels à retenir pour la corde-paille sont les morceaux de paille qui constituent les côtés des pré-figures. Leur modélisation est un segment et cela amène davantage à se préoccuper des grandeurs géométriques comme la notion de longueur. Les figures correspondantes sont donc davantage conçues comme des objets de dimension 1 (Ibid). La dimension 2 sera nécessaire pour travailler les notions d'aires, ce qui amène encore un nouveau regard sur le dessin et sur la figure.

3 Signifiants langagiers

Les transformations opérées dans le processus de modélisation du monde réel vers la géométrie se traduisent dans un phénomène de secondarisation des genres (Rebière, 2002, 2013) au niveau langagier. Le tableau suivant résume quelques-unes de ces évolutions en lien avec le travail relatif aux polygones.

Monde réel (corde de 6m, cordelette, corde-paille)	**Dessin (objet matériel, trace sur un papier)**	**Figure (objet idéal des mathématiques)**
Nœud Pointe Trou dans le papier	Point, extrémité d'un trait	Point (dans tous les cas) Sommet (parfois)
Écart ou espace entre 2 nœuds consécutifs	Trait droit	Segment ou distance entre 2 points

Écartement entre 2 nœuds consécutifs Corde tendue entre 2 nœuds consécutifs		ou longueur du segment reliant 2 points
Corde tendue entre 2 « nœuds-sommets »	Trait droit	Côté du polygone (en tant que segment et en tant que longueur)
Morceau de paille	Trait droit	Segment ou unité de longueur
Plusieurs morceaux « alignés »	Trait droit	Segment ou côté

4 Pour conclure

Dans le groupe de l'IREM premier degré de Montpellier, nous avions anticipé une grande richesse didactique en élaborant cette séquence mais son potentiel a dépassé nos attentes. Nous pouvons souligner que l'essentiel de l'intérêt de l'outil « corde à treize nœuds » réside dans les aspects suivants :

- la motivation des enseignants comme des élèves, née de la curiosité pour cet outil nouveau dans les pratiques scolaires actuelles mais pourtant historiquement très ancien ;
- la possibilité de relier connaissances dans l'espace réel et modélisation par la géométrie ;
- la différenciation implicite entre dessin et figure, fondamentale pour la géométrie II.

Nous avons également développé une séquence en cycle 2 dont l'expérimentation a prouvé l'intérêt en termes d'apprentissages géométriques. D'autres développements sont possibles, notamment pour explorer des connaissances liées au cercle ou encore des connaissances du domaine numérique. L'intérêt historique est également non négligeable pour que les élèves puissent percevoir le long cheminement de la construction des connaissances, en lien notamment avec les outils dont dispose une communauté à un moment donné de son histoire.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire, Séminaire de Didactique des Mathématiques, Rethymon

http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/51/51/10/PDF/Les_proprietes_didactiques_de_la_geometrie_elementaire.pdf

Duval R. et Godin M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, Grand N n°76

Houdement C. & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, Annales de didactiques et de sciences cognitives, 11, 175 – 193, IREM de Strasbourg.

Offre, B., Perrin-Glorian, M.-J. et Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, Grand N, 77, 7- 34.

Parzysz B. (1988). Voir et savoir – la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace. Bulletin de l'APMEP. Num. 364. p. 339-350.

Rabardel P. (1995). *Qu'est-ce qu'un instrument* ? Le mathématicien, le physicien et le psychologue, CNDP-DIE, p. 61-65.

Rebière M. (2002). Quelques remarques pour réfléchir au rôle des pratiques langagières dans les apprentissages en mathématiques, actes du 29e colloque Inter Irem, COPIRELEM

Rebière M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? Présentation de quelques concepts développés par le groupe de didacticiens du français de Bordeaux, In A. Bronner (Ed.), Actes de la 16e école d'été de didactique des mathématiques, Carcassonne, 2011. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 10 – 2–3 pp. 133-170

VII - ANNEXE 1 : FABRICATION DE LA CORDELETTE

Construire la corde à 13 noeuds...



1- Choisir une corde de 40 cm de longueur (environ)



2- Faire un nœud à une extrémité et une boucle à l'autre



3- Fermer la corde, la plier en 2, tracer une marque au milieu, puis faire un nœud sur la marque.



4. Prendre une moitié de la corde et la plier en 3. Marquer les 2 plis, faire un nœud sur chacun d'entre eux.



5- Faire la même chose sur l'autre moitié. La corde comporte à présent 7 nœuds et 6 intervalles.



6. Faire un noeud au milieu de chaque intervalle. Ta corde comporte à présent 13 nœuds.

Attention, il faut que les espaces entre les noeuds soient les plus réguliers possible !

DÉCRIRE L'ACTIVITÉ GÉOMÉTRIQUE DES ÉLÈVES : INSTRUMENTS – REGARDS – LANGAGE

Thomas BARRIER
IUFM Nord Pas de Calais, Université d'Artois
LML
thomas.barrier@espe-lnf.fr

Christophe HACHE
Université Paris Diderot
IREM de Paris, LDAR
christophe.hache@irem.univ-paris-diderot.fr

Anne-Cécile MATHÉ
IUFM Nord Pas de Calais, Université d'Artois
LML
acecile.mathe@espe-lnf.fr

Stéphanie MONTIGNY
IUFM Nord Pas de Calais, Université d'Artois
stephanie.montigny@lille.iufm.fr

Résumé

Cet atelier est issu d'un travail collectif réunissant des formatrices et formateurs de l'IUFM Nord Pas de Calais, dont une professeure des écoles à temps partagé, et des enseignants-chercheurs en didactique des mathématiques. Il prend appui sur une expérimentation de plusieurs mois dans une classe de CM2, autour de questions liées à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie au cycle 3.

Dans le prolongement de travaux menés par un groupe de recherche lillois, dirigé par Marie-Jeanne Perrin-Glorian depuis plus de dix ans (Duval, Godin & Perrin-Glorian (2005), Duval & Godin (2005)), notre travail vise dans un premier temps à interroger la possibilité d'insertion de problèmes de *restauration de figures* (Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013) au sein de pratiques déjà existantes.

Par ailleurs, notre travail expérimental vise également à mieux comprendre la manière dont il est possible de saisir et faire évoluer l'activité géométrique des élèves. Les situations de restauration de figures, comme beaucoup de situations proposées en classe de géométrie, reposent sur une réflexion sur la façon dont certaines contraintes sur l'action matérielle des élèves sont susceptibles de faire évoluer les manières de voir les figures géométriques (Duval & al. 2005, Perrin-Glorian & al. 2013)). De façon complémentaire, en appui sur l'observation de classes, nous proposons également dans cet atelier d'interroger la dimension langagière de l'activité géométrique des élèves en situation. Quels liens les pratiques langagières autour des actions matérielles entretiennent-elles avec le regard porté sur les figures, avec les techniques instrumentées de restauration ? Quel rôle les interactions verbales qui se développent dans la classe jouent-elles dans l'évolution de l'activité géométrique des élèves ? Notre positionnement théorique inclut ainsi également une attention particulière à la dimension langagière des pratiques géométriques (Barrier, Hache & Mathé, à paraître, Hache, 2013).

Le travail sur lequel s'appuie cet atelier est à la croisée de différentes recherches. Il est d'une part fortement influencé par les travaux du groupe lillois autour de l'enseignement de la géométrie à l'école, dirigé par Marie-Jeanne Perrin-Gloian depuis plus de dix ans[1] (Duval, Godin & Perrin-Glorian (2005), Duval & Godin (2005)), groupe auquel participe Anne-Cécile Mathé depuis six ans maintenant. Une partie des travaux de ce groupe a fait l'objet d'une conférence lors de ce colloque de la COPIRELEM, vous en trouverez le texte dans ces actes. L'expérimentation présentée constitue également un objet de travail du projet LEMME[2], réuni autour de questions liées aux pratiques langagières en classe de mathématiques. Enfin, ce travail est né d'une rencontre entre collègues de l'IUFM Nord Pas de Calais et, en particulier, d'une collaboration menée dans la classe de CM2 de Stéphanie Montigny, formatrice à l'IUFM Nord Pas de Calais et professeure des écoles à temps partagé. De façon relativement succincte, nous proposons dans une introduction d'expliciter les points de départ et ancrages théoriques de notre travail, fruits de l'articulation des positionnements de ces différents groupes de travail. Nous préciserons également les questions que nous avons souhaité explorer à travers cet atelier et les supports proposés. La suite de ce texte est consacrée au compte-rendu des éléments d'analyse dégagés durant l'atelier à propos de deux premières séances d'une progression autour de la notion de droites perpendiculaires, expérimentées en classe.

I. INTRODUCTION

1 Points de départ et questions initiales

1.1 Regards sur les figures et problèmes de restauration

En premier lieu, notre approche de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie au cycle 3 repose sur l'idée selon laquelle, spontanément, les élèves entrent dans les problèmes géométriques en adoptant une vision des figures en termes de surfaces – juxtapositions et / ou superpositions de surfaces – comme nous le faisons en dehors du champ des mathématiques. Or, même si cette vision est importante pour l'appréhension globale des figures (lors de la mise en place d'une preuve par exemple), la plupart des concepts géométriques visés au cycle 3 puis au collège reposent sur des relations entre des lignes et / ou des points (droites perpendiculaires, parallèles, égalités de longueur de segments, milieu d'un segment, etc.). Percevoir ces concepts et les utiliser dans les diverses tâches géométriques nécessitent donc la capacité à faire émerger des relations entre des sous-éléments des figures, de dimensions 2, 1 voire 0 (*déconstruction dimensionnelle*, Duval & Godin (2005)).

Depuis plus de dix ans, les travaux du groupe de Lille[3] se sont centrés sur l'élaboration de situations pour la classe visant à accompagner les élèves dans cette mobilité du regard sur les figures et la construction d'un regard géométrique mobilisant des propriétés et relations diverses, enjeux d'apprentissage à l'école (perpendicularité, alignement, symétrie axiale, etc.). La reproduction de figures est un type de tâches central dans les propositions du groupe de Lille. Le travail de ce groupe repose aussi sur l'idée qu'il existe un lien direct entre les instruments utilisés pour reproduire une figure et le regard que l'on porte sur cette figure. On peut par exemple utiliser

[1] Participent ou ont participé à ce groupe Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Marc Godin, Raymond Duval, Jean-Robert Delplace, Claire Gaudeul, Bachir Keskessa, Régis Leclercq, Christine Mangiante, Anne-Cécile Mathé, Odile Verbaere.

[2] Langage dans l'Enseignement et l'apprentissage des MathéMatiquEs. Participent à ce groupe Thomas Barrier, Caroline Bulf, Aurélie Chesnais, Christophe Hache, Anne-Cécile Mathé et Joris Mithalal

[3] Pour plus de détails concernant ces travaux, nous vous renvoyons à Duval, Godin & Perrin-Glorian (2005), Duval et Godin (2006), Offre, Perrin-Glorian & Verbaere (2007), Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq (2013) ou encore au texte de Perrin-Glorian et Mangiante figurant dans ces actes.

des instruments 2D permettant de tracer ou reproduire des surfaces (gabarits de polygones divers, gabarits d'angles, etc.) ou des instruments 1D permettant de tracer des lignes (la règle par exemple). Il existe aussi bien évidemment un lien direct entre les instruments utilisés et les propriétés géométriques identifiées sur la figure et mobilisées pour la tâche de reproduction. L'idée consiste ainsi à faire de l'usage des instruments une variable-clé permettant de favoriser l'enrichissement du regard des élèves sur les figures et la mobilisation de propriétés géométriques visées. Par ailleurs, ce groupe fait l'hypothèse que l'approche des figures en utilisant des grandeurs sans mesure facilite l'entrée des élèves dans une problématique géométrique. Les travaux du groupe privilégient ainsi l'utilisation de règle dite « informable », bandes de papier sur lesquelles on peut inscrire des marques pour reporter des longueurs.

Cette réflexion a donné lieu à la conception de problèmes de reproduction de figures (ou de restauration de figures, c'est-à-dire de reproduction d'une figure modèle à partir d'une amorce de la figure, à la même échelle ou non) en laissant aux élèves un large choix d'instruments, mais en intégrant un système de coûts à l'usage de ces instruments. Pour chaque problème de restauration, ce système de coûts est choisi au regard des objectifs d'apprentissage, en fonction des relations entre sous-éléments de la figure que l'on souhaite que les élèves utilisent comme outils pour la restauration.

Dans le prolongement de ces travaux, l'objectif initial de l'expérimentation, support de cet atelier, consistait à explorer les possibilités d'insertion de tels problèmes dans des progressions aux objectifs divers dans une classe de CM2.

1.2 Et les pratiques langagières en classe de géométrie ?

Les recherches évoquées ci-dessus s'appuient sur une réflexion concernant les liens qu'entretiennent les actions matérielles (problèmes de restauration, usage des instruments…) et la manière de voir et de penser les figures géométriques. Elles permettent la prise de conscience de la mobilité du regard sur les figures comme condition nécessaire à l'entrée des élèves dans la géométrie et ouvrent de nouvelles perspectives pour penser l'enseignement de la géométrie dans une continuité, du cycle 1 au collège. Cependant, la question de la description de l'activité géométrique des élèves et des conditions susceptibles de la faire évoluer est encore loin d'être résolue. Amener les élèves à modifier leurs manières d'agir suffit-il à la construction des connaissances géométriques ? Comment appréhender la complexité de l'activité géométrique des élèves ? Quels sont les moteurs de la construction de connaissances géométriques lors de la mise en œuvre de situations de reproduction ou de restauration de figures ?

Nos diverses expérimentations en classe, les diverses recherches dans lesquelles nous nous sommes impliqués (Barrier, Hache & Mathé, à paraître ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2011; Mathé, 2012 ; Hache, 2013) nous ont amenés à porter une attention particulière au fait qu'il se passe des choses fondamentales, d'un point de vue cognitif, au sein des interactions langagières orales qui se développent autour de la résolution matérielle des problèmes proposés en classe de géométrie. Toutefois, nous ne disposons que de peu d'outils pour comprendre finement ce qui se joue au sein de ces échanges verbaux. La dimension langagière de l'activité géométrique n'est encore qu'insuffisamment prise en compte lors de l'analyse de ces situations, rarement anticipée dans des analyses *a priori* et le plus souvent ignorée en formation.

Initié depuis trois ans maintenant, le projet LEMME tente d'avancer dans l'exploration de la prise en compte de l'activité et des pratiques langagières en classe de mathématiques. Notre approche consiste à penser l'activité géométrique des élèves, à l'instar de toute activité humaine, comme relevant, de façon indissociable, d'une dimension matérielle (*l'agir*) et d'une dimension langagière (*le parler)*, inscrites dans une certaine façon de *penser* le monde, un *agir-penser-parler* au sens de Jaubert, Rebière, Bernié (2003). Le langage verbal est donc pour nous partie prenante de l'activité géométrique des élèves, au même titre que leurs actions matérielles, plus classiquement analysées en didactique des mathématiques. De manière complémentaire aux travaux engagés dans le groupe lillois, nous appréhendons le processus d'apprentissage en classe de géométrie comme une

acculturation vers une pratique géométrique spécifique, admettant une dimension matérielle mais aussi une dimension langagière. Pour nous, cette acculturation s'opère à la fois par interactions des élèves avec une situation problématique mais également au sein des interactions sociales au sein de la classe. Dans ce cadre, lors des analyses *a priori* et *a posteriori* de situations d'apprentissage, nous nous efforçons d'interroger les liens qu'entretiennent activités matérielles et activités langagières des élèves, dans une situation donnée. Nous souhaitons également explorer la manière dont ces deux dimensions de l'activité géométrique des élèves interagissent pour évoluer vers des pratiques géométriques idoines.

L'expérimentation présentée dans cet atelier avait également pour objectif d'avancer dans l'élaboration d'outils permettant de saisir plus finement l'activité géométrique des élèves et les conditions de son évolution. Quels liens les interactions langagières verbales qui se développent autour de la résolution matérielle des problèmes proposés entretiennent-elles avec le regard porté par les élèves sur les figures, avec les techniques instrumentées de restauration ? Comment contribuent-elles à l'émergence des objets géométriques ?

2 Présentation globale de l'expérimentation, travail et supports proposés dans cet atelier

Durant les quelques mois d'expérimentation dans la classe de CM2 de Stéphanie Montigny, notre travail a consisté en l'élaboration collective puis la mise en œuvre de séances et de séquences de classe autour de notion diverses : l'alignement, les droites perpendiculaires, les quadrilatères et triangles particuliers à partir de l'étude de polyèdres, les programmes de construction et les caractérisations du cercle. Toutes ces séances ont été observées et filmées. Nos questions de recherche portant essentiellement sur l'activité des élèves, nous nous sommes en particulier efforcés de recueillir le maximum de traces matérielles et vidéos de productions d'élèves au cours de chaque phase de travail, n'hésitant pas parfois à demander à certains élèves d'expliciter la procédure qu'ils venaient de mettre en place. Le corpus ainsi obtenu est constitué de deux films par séance ainsi que des enregistrements audio de l'intégralité du discours de l'enseignante, par micro et dictaphone.

Pour cet atelier, nous avons choisi pour support de travail les deux premières séances d'une séquence de quatre séances portant sur la notion de droites perpendiculaires. D'après les programmes de 2008 (Bulletin Officiel n°3 du 19 juin 2008), la notion d'angle droit est abordée en CE1. Les élèves y apprennent à « décrire, reproduire, tracer un carré, un rectangle, un triangle rectangle ; utiliser des instruments pour réaliser des tracés : règle, *équerre ou gabarit de l'angle droit* ; percevoir et reconnaître quelques relations et propriétés géométriques : alignement, *angle droit*, axe de symétrie, égalité de longueurs. ». La notion de droites perpendiculaires apparaît dans les programmes du CM1 : « utiliser en situation le vocabulaire géométrique : points alignés, droite, *droites perpendiculaires*, droites parallèles, segment, milieu, angle, axe de symétrie, centre d'un cercle, rayon, diamètre. » Rien n'est formulé dans les programmes du CM2 à propos des notions de droites perpendiculaires ou d'angle droit. Les enjeux d'apprentissage formulés par ces programmes autour de la notion de droites perpendiculaires au cycle 3 ne sont donc pas très clairs. Le concept de droites perpendiculaires nous semblant toutefois constituer un enjeu d'apprentissage important dans le cadre d'un enseignement de la géométrie, pensé dans une continuité de l'école au collège, nous avons tout de même choisi de reprendre en CM2 un travail sur ce thème. Notre séquence articule un premier problème, visant à introduire la notion de droites perpendiculaires, à partir des conceptions des élèves sur l'angle droit, puis deux problèmes de restauration de figure. Son objectif est d'amener les élèves à reconnaître et tracer des droites perpendiculaires ou pour être plus précis tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point, appartenant ou non à cette droite. L'insertion de problèmes de restauration dans la progression nous permet également un travail sur des enjeux d'apprentissage en géométrie un peu plus larges, nous le verrons dans la suite de ce texte.

Après avoir présenté l'expérimentation et nos questions de recherche, l'atelier se déroule en deux temps, correspondant chacun à la présentation, l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*, en appui sur des extraits vidéos et des transcriptions, des deux premières séances de la séquence. Ce texte suit ce déroulement.

II - UNE PREMIÈRE SÉANCE PROPOSÉE AUTOUR DE LA NOTION DE DROITES PERPENDICULAIRES

Cette première partie prend appui sur la première séance de la progression autour de la notion de droites perpendiculaires mise en place par Stéphanie Montigny dans sa classe de CM2, une séance ayant pour finalité de travailler le passage du concept d'angle droit à celui de droites perpendiculaires. Notre objectif est de proposer et de mettre à l'épreuve une méthodologie de description de l'activité géométrique des élèves. Lors de l'atelier, cette méthodologie a été présentée aux participants puis mise à l'épreuve à partir d'un corpus de vidéos, photos, descriptions et transcriptions recueilli lors de cette première séance. Nous reprenons ici cette organisation.

1 Méthodologie d'analyse

Comme nous l'avons signalé en introduction, notre observation de l'activité géométrique repose sur trois dimensions solidaires : une dimension matérielle (ce qui est fait), une dimension visuelle (ce qui est regardé, vu) et une dimension verbale (ce qui est prononcé, dit). La méthodologie que nous allons présenter vise à rechercher la manière dont ces différentes facettes s'organisent au sein d'une même activité. Nous reprenons ici une problématique formulée par Radford autour de la notion de cognition sensible (*sensuous cognition*) :

"D'un point de vue méthodologique, le problème est de comprendre comment les divers canaux sensitifs et signes sémiotiques (linguistique, symboles écrits, diagrammes, etc.) sont mis en relation, coordonnés, et subsumés dans une nouvelle unité de pensée, une nouvelle unité psychologique" (Radford, 2013, p. 65, notre traduction de l'anglais)

Dans ce texte, nous utiliserons le terme *activité* en référence à cette unité de pensée, nous la qualifions d'activité géométrique lorsqu'elle s'inscrit dans le cadre d'une problématique géométrique. Précisons que pour nous, réaliser une action matérielle, éventuellement instrumentée, produire des signes verbaux ou graphiques ou porter un regard particulier sur une figure relèvent d'un acte de pensée générateur de significations. La difficulté que nous proposons d'explorer ici est d'en saisir l'unité. Pour y parvenir, notre principal outil sera une analyse logique élémentaire des concepts mathématiques en jeu (Barrier, Hache & Mathé, à paraître).

À l'école, l'angle droit est le plus souvent introduit comme un secteur angulaire particulier, c'est-à-dire un élément de surface vérifiant une propriété spécifique. Par exemple, vérifier si un angle est droit consiste dans de nombreuses tâches à vérifier si un gabarit d'angle droit donné (équerre ou autre) se superpose ou non avec le secteur angulaire concerné. En cas de superposition, l'objet secteur angulaire est qualifié d'angle droit. Sur le plan logique, on dira que le prédicat "être droit" s'applique à l'objet considéré, le concept d'angle droit s'analyse comme une *propriété* d'objet. Le concept de droites perpendiculaires met en jeu des objets différents en nature et en nombre. Percevoir une perpendicularité nécessite l'identification d'une relation particulière entre deux objets rectilignes. Le concept de droites perpendiculaires s'analyse donc comme une *relation binaire* entre deux objets. Il s'agit maintenant de montrer comment cette distinction élémentaire, mais pour nous fondamentale, permet de se doter d'un arrière-plan unificateur dans l'analyse des trois dimensions retenues pour la description de l'activité géométrique des élèves dans le contexte du passage du concept d'angle droit à celui de droites perpendiculaires.

Les trois dimensions de l'activité géométrique

Commençons par la dimension matérielle de l'activité géométrique. Nous l'avons dit plus haut, contrôler si un angle est un angle droit consiste, dans une approche instrumentée, à superposer un gabarit d'angle droit avec le secteur angulaire concerné. Le geste associé nécessite la prise en compte d'une double contrainte : il faut superposer un côté et un sommet du gabarit avec les éléments correspondants du secteur angulaire. Nous considérons néanmoins qu'il s'agit d'une unique contrainte, puisque le geste associé de superposition peut le plus souvent être accompli d'un seul mouvement. Du point de vue du tracé, la situation est similaire. Lorsqu'il s'agit par exemple de compléter un carré dont un côté est donné (cf. partie 2), le geste consiste à positionner le gabarit ou l'équerre le long du segment de manière à ce que le sommet de l'angle droit du gabarit coïncide avec l'extrémité du côté. Il s'agit là aussi d'*une* contrainte (double). En revanche, lors d'un tracé d'une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite par exemple, le geste du tracé est soumis à *deux* contraintes *successives*. Il est nécessaire dans un premier temps de positionner le côté du gabarit le long de la droite donnée puis d'ajuster le second côté de l'angle droit du gabarit pour qu'il se positionne au niveau du point extérieur à la droite. Ces deux contraintes sont bien distinctes dans la mesure où elles mettent en jeu deux éléments spatialement différenciés de l'instrument. La distinction logique entre propriété (relation *unaire*) et relation *binaire* s'exprime ici à travers le nombre de contraintes matérielles pesant sur l'utilisation de l'instrument. Sur le plan méthodologique, l'observation de l'activité géométrique passera donc par la recherche du nombre de contraintes prises en considération par les élèves dans leurs actions matérielles.

Nous nous intéressons maintenant à la dimension verbale de l'activité. La verbalisation d'une propriété d'objet nécessite la présence dans le langage d'un nom d'objet, dont la référence pourra ou non être qualifiée d'angle droit. Ce nom d'objet peut être partiellement décontextualisé, si l'on se donne des moyens de désignation par exemple en utilisant un codage ou un vocabulaire spécifique ("les angles d'un carré sont des angles droits", "dans le quadrilatère ABCD, l'angle formé par les côtés [AB] et [BC] est droit"), ou au contraire très fortement lié au contexte spécifique d'énonciation ("cet angle est droit"; "ici, c'est un angle droit"). Le point de vue des droites perpendiculaires nécessite le recours à deux noms d'objets afin de verbaliser une relation distinguant explicitement chacune des droites en jeu. Comme pour la verbalisation des angles droits, les noms d'objets peuvent relever d'unités linguistiques de natures diverses. Dans le contexte de cet atelier, les verbalisations étudiées ont été presque exclusivement orales, résultant le plus souvent d'interpellations spontanées par les expérimentateurs ou par l'enseignante et d'échanges au sein de groupes d'élèves. Nous avons donc proposé aux participants à l'atelier de prendre tout particulièrement en compte les déictiques, c'est-à-dire les unités linguistiques dont le sens ne peut être saisi qu'en relation avec le contexte d'énonciation (les démonstratifs, les adverbes de lieu, les articles définis, etc.). Sur le plan méthodologique, cela suppose d'accompagner les transcriptions d'éléments de contexte, notamment de vidéos ou de photos afin d'être en mesure d'en interpréter le sens. De la même manière que les objets mathématiques peuvent être des appuis pour l'action matérielle (générant une ou deux contraintes), ils peuvent aussi être des références pour l'activité verbale des élèves. L'analyse logique précédente nous invite à rechercher la nature et le nombre des objets faisant partie du domaine d'interprétation du langage verbal utilisé par les élèves.

Sur le plan de la dimension visuelle, nous avons réinvesti l'approche du groupe de géométrie de Lille, décrite en introduction. Comme nous l'avons dit plus haut, le concept d'angle droit fait référence à des éléments de surface, qui sont vus comme tels. Le passage aux droites perpendiculaires nécessite une domestication des sens, pour reprendre une expression de Radford (2013), une éducation vers un regard plus théorique consistant à appréhender les formes 2D à partir de sous éléments 1D ou 0D (et réciproquement). Il s'agit cette fois de concevoir la relation des élèves aux objets mathématiques par le canal visuel, en s'interrogeant sur le support du regard géométrique en construction, comme nous proposons de le faire pour les autres dimensions de

l'activité géométrique. Les observables associés sont cette fois les mouvements oculaires des élèves, et d'une manière plus générale, l'ensemble des gestes ostensifs par lesquels les élèves montrent, typiquement lorsqu'un élève pointe quelque chose de l'index.

2 Description de la séance et analyse *a priori*

Nous poursuivons l'atelier par la présentation de la séance au cours de laquelle le corpus qui a servi de support à la mise à l'épreuve de la méthodologie de description a été recueilli. Il s'agit de la première séance du travail collectif engagé entre collègues de l'IUFM Nord – Pas de Calais, ayant donné lieu à des mises en œuvre dans la classe de CM2. Cette séance vise, entre autres, à travailler avec les élèves le passage des angles droits aux droites perpendiculaires. Il s'agit de la première séance visant cet objectif. Elle est organisée autour d'une tâche générique empruntée au manuel de géométrie ERMEL cycle 3 (« Rectangle à terminer 2 » pp. 221-229). Une pièce est découpée dans un rectangle (figure 1).

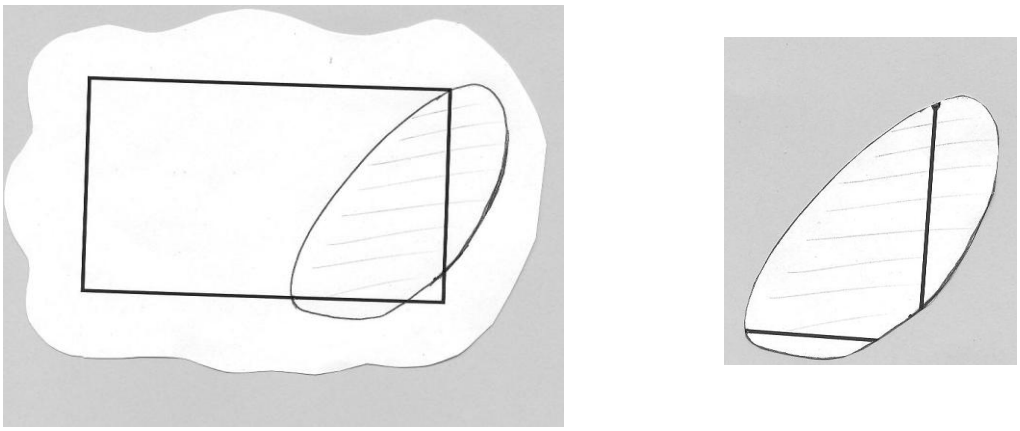


Figure 1

Une version de cette pièce découpée est donnée aux élèves placés en binôme (une pièce découpée par binôme), version dans laquelle un des deux traits présents sur la pièce initiale a été effacé à l'exception de son extrémité correspondant à un sommet d'angle droit du rectangle (figure 2). Le rectangle est affiché au tableau et la tâche générique pour les élèves est de reproduire le trait manquant sur leur pièce de manière à pourvoir, par superposition, "compléter le rectangle".

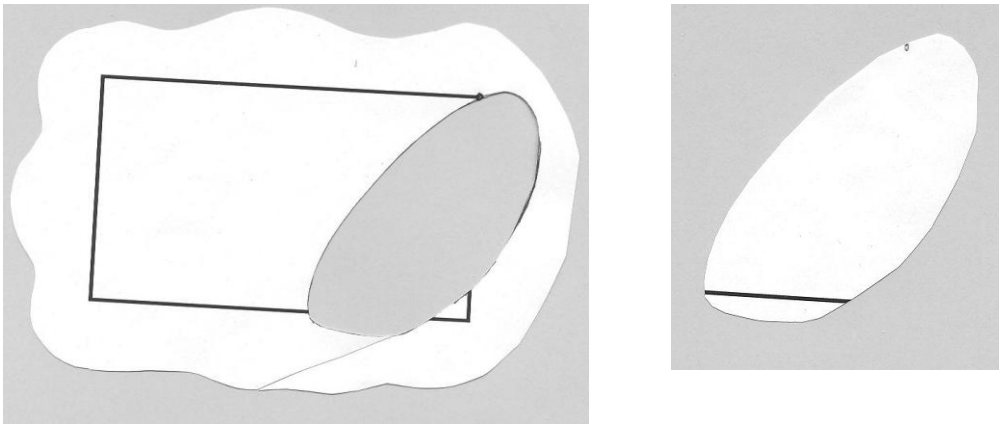


Figure 2

Le travail des élèves est organisé en trois tâches successives par un jeu sur deux variables didactiques de la situation : les instruments à disposition et les positions relatives de l'extrémité restée visible du trait effacé et de l'autre trait. Pour les deux premières tâches, une malle contenant des gabarits d'angles droits de différentes formes et tailles, dont des équerres, est à disposition des élèves. Ils disposent aussi de règles. Pour la troisième tâche, les seuls des gabarits de petite taille sont laissés à disposition, avec des règles. Concernant le positionnement du point et du segment, la situation de la première tâche est celle représentée par la figure 2 (positionner une équerre peut suffire à tracer le segment manquant). Pour les tâches suivantes, le segment est plus éloigné du point (figure 3, les gabarits proposés sont trop petits pour pouvoir être utilisés directement, il est d'abord nécessaire de prolonger un ou plusieurs des traits).

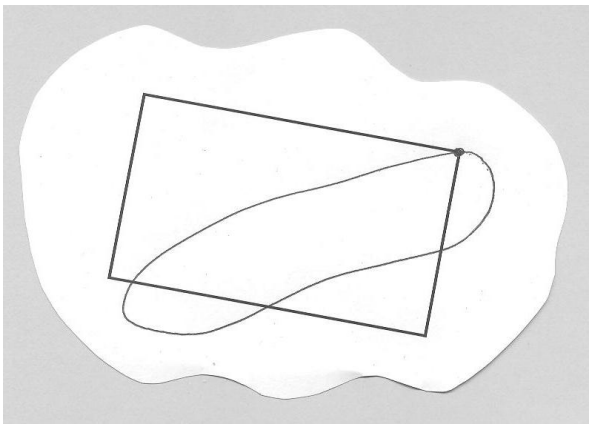


Figure 3

Le jeu sur ces variables didactiques a pour finalité de rendre nécessaires des prolongements du segment donné et/ou des côtés du gabarit utilisé. Chacune de ces tâches donne lieu à une phase de recherche autonome des binômes, suivie d'une phase collective au cours de laquelle les binômes valident leur production au tableau, lesquelles sont ensuite classées en deux colonnes, une pour les productions satisfaisantes et une pour les autres. Cette validation est accompagnée d'une explicitation de la procédure utilisée. La séance se termine par une synthèse pilotée par l'enseignante.

La séance a été filmée à l'aide de deux caméras. Le recueil s'est concentré sur l'activité des élèves, c'est-à-dire qu'en dehors des phases collectives, qui ont bien sûr été filmées, les expérimentateurs ont cherché à recueillir ce que faisaient, disaient, regardaient les élèves en naviguant de binôme en binôme, n'hésitant pas à interpeller les élèves pour qu'ils décrivent leur procédure, quitte à perturber le fonctionnement ordinaire de la classe. Lors de l'atelier, nous avons proposé aux participants une analyse *a priori* succincte en nous concentrant sur les aspects génériques la tâche, c'est-à-dire sans prendre en compte le jeu sur les variables didactiques présenté plus haut, puisqu'il n'est pas central pour notre propos dans ce texte. Nous présentons ici une synthèse de cette analyse *a priori*, ayant permis aux participants de cerner les enjeux de la situation et qui nous servira de grille d'analyse pour la description de l'activité géométrique effective de quelques élèves.

Une première procédure, qu'il est possible d'envisager, est une procédure par essai-erreur. On peut envisager des tracés à l'œil, ajustés par validations successives. On peut aussi envisager des stratégies visant à utiliser l'extrémité apparente comme sommet d'un angle droit du rectangle à restaurer. Cette procédure pourrait conduire à positionner le sommet de l'angle droit du gabarit (ou de l'équerre) sur cette extrémité et à produire un tracé sans autre précaution. Il est important de relever qu'en l'absence de côté dont ce point pourrait être une extrémité, seule une contrainte, un seul point d'appui, est disponible pour positionner l'instrument. Le geste associé se rapproche alors de ce que nous avons décrit comme relevant d'un tracé d'angle droit. Notons également que

ce point est le seul sommet potentiel d'un angle droit sur la pièce à disposition des élèves. Du côté de la dimension verbale de l'activité, si l'on se positionne dans une telle approche de la tâche par les angles droits, nous pourrions faire l'hypothèse d'une absence de référence au segment dans le discours des élèves, d'une caractérisation du tracé sans relation avec ce deuxième objet, c'est-à-dire ne mobilisant que les seules propriétés de l'objet construit (par exemple : le trait tracé est trop penché). Sur le plan du rapport à la figure, il se pourrait que la vision des élèves soit focalisée sur cette seule partie de la pièce découpée.

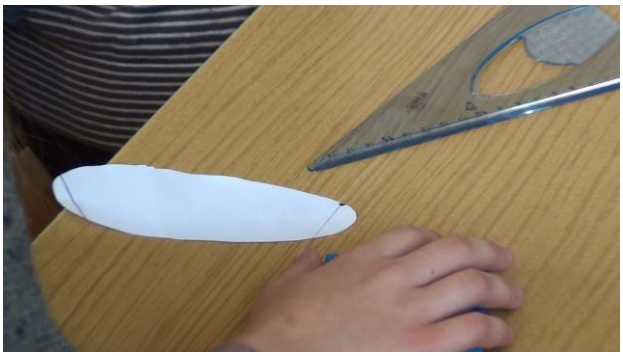
À l'opposé d'une approche relevant strictement des angles droits, il est possible d'envisager une approche par les droites perpendiculaires. Celle-ci consisterait à positionner successivement son gabarit le long du segment donné puis à faire glisser le gabarit jusqu'à atteindre l'extrémité restée visible du segment effacé. Ce tracé serait accompagné d'une verbalisation explicite faisant référence aux deux objets représentés sur la pièce découpée et d'aller-retour du regard entre ces deux éléments.

Cette méthodologie nous livre ainsi une grille d'analyse pour décrire l'activité géométrique supposée des élèves dans la situation, à partir de traces prenant en compte les diverses dimensions de cette activité. Il nous semble néanmoins nécessaire de garder en tête que les trois dimensions de l'activité peuvent ne pas être nécessairement strictement convergentes, à tout moment dans le travail des binômes. Des procédures intermédiaires pour chacune de ces approches sont susceptibles d'apparaître. Nous pouvons par exemple, envisager un tracé que nous rattacherions davantage à une procédure « angle droit » accompagné d'une verbalisation et/ou d'une vision prenant en compte les deux éléments de la pièce à disposition des élèves. Cela pourrait être notamment le cas pour des binômes ne parvenant pas à matérialiser au travers de l'usage des instruments la relation perçue et/ou verbalisée entre le segment donné et le point. Un binôme pourrait également très bien parvenir à une procédure matérielle adéquate, mobilisant la relation binaire entre les deux segments perpendiculaires, sans pour autant parvenir par exemple, à verbaliser la relation matérialisée par le tracé.

3 Analyse *a posteriori* : mise à l'épreuve de la méthodologie de description présentée

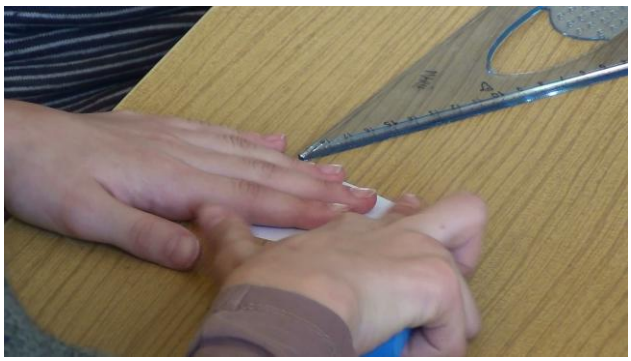
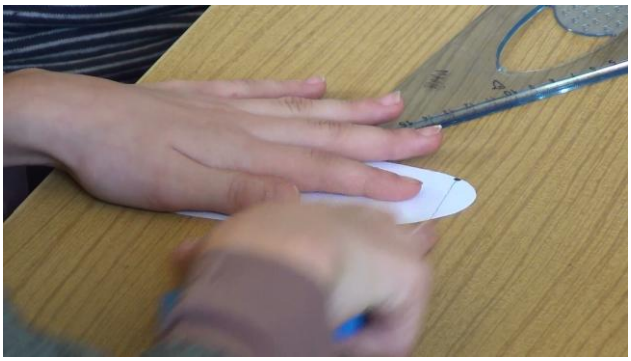
Le document de travail, que nous avons proposé aux participants à l'atelier afin de mettre à l'épreuve les outils méthodologiques présentés plus haut, consiste en une reconstitution des parcours de plusieurs binômes d'élèves à partir du recueil vidéo réalisé. Les données concernant les trois phases collectives faisant suite à chacune des tâches, disponibles pour presque tous les binômes, ont été complétées par des extraits de phases de recherche et d'interactions avec les expérimentateurs. Le document final est constitué d'une alternance de description, de photographies et de transcription, conformément à notre approche tridimensionnelle de l'activité. Dans ce texte, nous nous concentrons sur le parcours de deux binômes.

Nous commençons par un premier binôme composé de Louise et Benoît. Lors de la première tâche, Louise commence par positionner un des angles droits de son gabarit (de forme carrée) sur le point visible sur la pièce et trace un premier trait (photos 1 et 2).

Photos 1 et 2

Son index pointe ensuite vers le point. Il s'ensuit deux mouvements rectilignes pendant lesquels son autre main maintient la pièce tout en cachant le segment initialement tracé (photos 3 et 4).

Photos 3 et 4

La recherche du binôme se poursuit, le binôme trace alors un nouveau trait selon les mêmes modalités. Les dimensions matérielle et visuelle de l'activité de ce binôme semblent convergentes : Louise ne prend en compte qu'une seule contrainte lors de son tracé et ne tient pas compte du segment lors de l'analyse de son tracé. Pour ce qui est de la verbalisation associée à cette première tâche, nous disposons d'éléments provenant de la phase de mise en commun collective. Benoît se rend au tableau et constate, par superposition, que leur production ne permet pas de fermer le rectangle. Nous proposons ci-dessous un extrait de transcription des échanges suivant cette validation :

1. Stéphanie : Alors le premier, vous avez fait quoi pour tracer le premier ? Qu'est-ce que vous vous êtes dit pour tracer le premier trait ?
2. Benoît : [silence]
3. Stéphanie : Tu sais pas ? Vous avez juste posé l'équerre comme ça ?
4. Benoît : [silence]
5. Stéphanie : Ben c'est oui ou c'est non ?
6. Benoît : C'est elle [Louise] qui a…
7. Stéphanie : Alors Louise ?
8. Louise : Au début, on a cru qu'il fallait faire tout droit.
9. Stéphanie : D'accord.
10. Louise : Mais après, on s'est dit tout droit ça n'allait pas parce que… Au début, on a voulu faire comme le premier parce qu'au début, on a cru que tout était droit et après on a fait l'autre et on a posé l'équerre euh… La pointe vers le point. Et après, on a tracé.
11. S : D'accord. Alors, est-ce que c'est bon ?
12. D'autres élèves : Non.

On peut relever dans cet extrait la référence exclusive au point (10). Le discours concernant le tracé effectué utilise essentiellement le terme « droit » (8 et 10), ce qui peut s'interpréter, d'un point de vue logique, par une caractérisation du tracé par ses propriétés propres, plutôt que par ses relations avec les autres éléments de la figure. Bien sûr, caractériser ce qui ne va pas dans la production par les seules propriétés du segment qui vient d'être tracé est un exercice délicat dans une situation dont les contraintes sont conçues pour rendre nécessaire la prise en compte des relations entre deux côtés consécutifs du rectangle. Cela contribue à expliquer les difficultés rencontrées par ce binôme quant à la verbalisation de leur procédure. On retrouve d'ailleurs le même type de difficultés de verbalisation chez un autre binôme ayant utilisé la même procédure de tracé (angle droit de l'équerre sur le point) :

13. Stéphanie : Alors vas-y remets dedans. Alors à ton avis, qu'est-ce qui ne va pas ?
14. Émile : C'est trop sur le côté
15. Stéphanie : D'accord
16. Émile : Enfin c'est trop...

17. Stéphanie : C'est trop à l'intérieur effectivement. Donc on met dans oui ou dans non ?
18. Émile : Dans non.

Là aussi, l'expression utilisée (« trop sur le côté ») ne tient compte que du tracé qui vient d'être effectué, de manière isolée par rapport à l'autre trait figurant sur la pièce.

Nous poursuivons avec la phase de recherche correspondant à la deuxième tâche proposée aux élèves. Notons qu'une feuille blanche A3 a été distribuée aux élèves afin de permettre de réaliser des prolongements effectifs. Cette décision n'avait pas été anticipée par les expérimentateurs. Elle a eu des conséquences importantes chez d'autres binômes, lesquels se sont servis de l'angle droit de cette feuille comme un (grand) gabarit. Le binôme commence par tâtonner, Benoît pointe le segment donné de l'index, puis Louise pointe sur le point (photos 5 et 6).




Photo 5 et 6

Il semble donc cette fois que ce binôme ait perçu les deux éléments à mettre en relation. Néanmoins, il commence par envisager un tracé à l'œil, à l'aide de la règle, puis un tracé à l'équerre, son angle droit étant positionné sur le point. La recherche se termine par des tracés successifs, suivis de gommage, sans prise en compte d'une éventuelle relation entre les deux éléments préalablement pointés du doigt. Signalons au passage que d'autres binômes, ayant également repéré chacun des deux éléments (et par ailleurs verbalisé en faisant référence à chacun des deux éléments), ont aussi rencontré des difficultés à mettre en œuvre sur le plan matériel la relation de perpendicularité par un tracé adéquat. La phase de validation collective de ce binôme a lieu après que plusieurs autres binôme soient allés au tableau et aient présenté une procédure, mathématiquement adéquate, consistant à utiliser la feuille blanche A3 comme un grand gabarit d'angle droit. Le binôme Louise-Benoît réinvestit cette stratégie lors de leur propre passage. Louise ajuste le segment qui vient d'être tracé, puis le segment initialement donné sur la pièce découpée dans le rectangle, son attention étant successivement focalisée sur chacun des deux segments. Le binôme superpose ensuite la pièce dans le rectangle à restaurer, le deuxième tracé est validé. Il n'y a néanmoins pas de verbalisation associée à la procédure lors de ce passage. On peut penser que le binôme procède essentiellement par imitation, sans qu'une conceptualisation avancée de la notion de droites perpendiculaires ne soit mobilisée. Nous passons maintenant à la troisième tâche de cette séance. Cette fois, les binômes ne disposent plus que d'un gabarit d'angle droit de petite taille et de règles, les autres instruments ayant été retirés et l'usage de la feuille A3 ayant été proscrit. Le binôme ne semble pas être en mesure d'utiliser le petit gabarit, lequel reste à distance tout au long de la recherche. Le binôme plie la pièce à restaurer, puis s'appuie sur les traces du pliage pour réaliser un tracé à la règle. Constatant l'impasse dans laquelle se trouvent les élèves, un expérimentateur intervient et demande au binôme : « il est où le rectangle ? ». Louise pointe alors le point de l'index puis décrit une forme dont le bord passe nettement en dessous du segment initialement donné, qui ne semble pas pris en considération (photos 7, 8 et 9).





Photos 7, 8 et 9

Ce passage nous paraît significatif d'une perception visuelle ne mettant pas en relation les deux éléments constitutifs de la pièce découpée. Les compétences mises en œuvre lors de la deuxième tâche n'ont pas pu être réinvesties dans ce nouveau contexte instrumental. L'absence de verbalisation aura peut-être été un signe d'une conceptualisation de la notion de droites perpendiculaires incomplète ou tout du moins insuffisante pour cette nouvelle tâche.

Nous terminons cette analyse *a posteriori* avec un autre binôme composé de Joseph et Emma[4]. Ce binôme a été choisi de manière à contraster avec le précédent. La première tâche ne lui a pas posé de problème. Il utilise l'équerre de manière adéquate et verbalise en faisant référence aux deux éléments :

Joseph : En fait, j'ai mis mon équerre *face au trait*, et ensuite je me suis aidé *du trait* pour tracer *là*.

La phase de recherche de la deuxième tâche a donné lieu à un tracé apparemment correct (les données recueillies ne permettent pas d'en connaître l'origine). Le binôme est alors sollicité par une expérimentatrice pour qu'il explicite sa stratégie :

Joseph : On a pris une équerre, on l'a mis là (photo 10). Comme on savait ben que c'était perpendiculaire ben, on a continué avec ça… et… on était allé jusque là-bas mais je sais plus… On avait réussi à aller jusque-là et on avait tracé mais je sais plus comment on avait fait (photo 11]).




Photo 10 et 11

Ce qui nous semble intéressant ici est que, bien que Joseph ne retrouve pas sa technique de tracé, celui-ci soit en mesure de verbaliser des contraintes qu'il perçoit bien (« on l'a mis là », « on était allé jusque là-bas », …), ce qui suppose une forme de conceptualisation avancée. Plus tard, lors de la phase de validation et de mise en commun, une forme de reprise publique de cette épisode,

[4] Cette dernière n'ayant pas rendu le document, concernant le droit à l'image, n'a pas été filmée. Elle est par ailleurs plutôt en retrait dans le travail du binôme.

Joseph commence par positionner son équerre « à l'envers », c'est-à-dire avec l'angle droit du « mauvais côté » (photo 12). On peut alors observer un jeu de regards entre le segment initialement donné et le segment tracé par le binôme significatif de la prise en compte perceptive progressive de la deuxième contrainte. Joseph repositionne ensuite son équerre et parvient à retrouver la technique de tracé utilisée. Cette technique est originale, elle consiste à agrandir l'équerre en utilisant implicitement le parallélisme des côtés opposés d'un parallélogramme (photo 13).





Photos 12 et 13

L'analyse de la transcription montre, à l'image des extraits proposés plus haut, une verbalisation complète faisant référence aux deux objets en jeu. Ce même binôme sera un des quelques binômes à être parvenu à réussir la dernière tâche : il a commencé par prolonger le segment donné en positionnant une première règle le long de ce segment, il a ensuite positionné le petit gabarit d'angle droit sur cette règle pour enfin contrôler son positionnement en prolongeant un côté jusqu'au point à l'aide d'une deuxième règle et tracer le deuxième segment. Bien sûr, aucune de deux techniques « opératoires » utilisées lors des deuxième et troisième tâches n'est la technique experte visée par l'institution. De la même manière, certains binômes n'ont pas utilisé le vocabulaire géométrique de manière suffisamment précise. Signalons, pour éviter tout malentendu, que ce n'était pas l'objectif principal de cette séance. La réduction de l'enseignement de la géométrie à ces aspects dans de nombreuses classes, au détriment de la conceptualisation, a été l'un des points particulièrement discutés lors du colloque. Nous espérons avoir contribué à montrer au travers ces analyses que les enjeux langagiers et matériels dépassent de loin la question du vocabulaire et de l'enseignement de techniques opératoires de tracé.

4 Conclusion

Il est évident que l'intérêt que l'on pourrait trouver à ces outils méthodologiques, visant la description de l'activité géométrique des élèves, dépend des questions que chacun se pose. Pour notre part, il nous semble que cette démarche permet une approche relativement fine de l'activité des élèves, ce qui est certainement nécessaire si l'on souhaite être en mesure de saisir son évolution, de saisir les conditions de possibilité d'une éventuelle acculturation vers des pratiques géométriques stabilisées porteuses de savoirs. Au fondement de ce travail à dimension méthodologique, nous nous sommes aidés d'une analyse logique des concepts en jeu. Cette analyse logique a fonctionné comme un élément unificateur pour penser la conceptualisation de la notion de droites perpendiculaires et la distinguer de celle de l'angle droit. Nos analyses nous ont alors permis de décrire l'activité géométrique de quelques élèves, dans une dialectique entre les concepts d'angle droit et de droites perpendiculaires, selon trois dimensions – un faire, un voir et un dire – en nous aidant de l'analyse logique des concepts comme arrière-plan structurant.

Nous poursuivons l'exploration de ce corpus par une présentation et une analyse de la deuxième séance de cette séquence. Notre attention est cette fois davantage tournée vers la situation, son potentiel didactique, plutôt que sur la méthodologie elle-même.

III - BIBLIOGRAPHIE

BARRIER T., HACHE C. & MATHÉ A.C. (à paraître) Seeing – acting – speaking in geometry: a case study, in *Proceedings of CERME 8*, 2013, Antalya, Turkey.

BULF C., MATHÉ A.C, MITHALAL J. (2011) Language in geometry classroom, in *Proceeding of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 7, 2011, Rzeszow, Poland).

CHARNAY R., DOUAIRE J. & AL. (2006) Apprentissages géométriques et résolution de problèmes, cycle 3, Ermel, Hatier.

DUVAL R., GODIN M., PERRIN-GLORIAN M.-J. (2005) Reproduction de figures à l'école élémentaire, 5-89, *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2004*, IREM de Paris.

DUVAL R. & GODIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76**, 7-27.

HACHE C. (2013) Langage mathématique à la transition primaire-collège, in *Actes du colloque COPIRELEM 2012*, Quimper.

IREM DE LILLE (2000) Travaux géométriques – Apprendre à résoudre des problèmes au cycle 3, CRPD Nord Pas-de-Calais.

JAUBERT M., REBIÈRE M., BERNIÉ J.P. (2003) L'hypothèse « communauté discursive » : d'où vient-elle ? Où va-t-elle ? *Cahiers Théodile*, 4, 51-80.

MATHÉ A.C. (2012) Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie*, Recherches en Didactique des Mathématiques*, **32.2**, La Pensée Sauvage édition.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.-J. & VERBAERE O. (2007) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N*, **77**, 7-34.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHÉ A.C., LECLERC R. (2013) Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM,* **90**, 7-41.

RADFORD L. (2013) Perceiving with the eyes and with the hands. *REPIME*, 3(1), 56-77.

GEOGEBRA ENTRE COUR DE RÉCRÉATION ET FEUILLE DE PAPIER : ILLUSTRATION AVEC LE CONCEPT DE CERCLE AU CYCLE 3

Cécile BOMBRUN-NIGON
Formatrice permanente,
IUFM LYON, centre de Saint-Etienne
Cecile.bombrun@univ-lyon1.fr

René THOMAS
Formateur permanent, irem de Lyon
IUFM LYON, centre de Saint-Etienne
rené.thomas@univ-lyon1.fr

Résumé
L'article présente une expérimentation réalisée en classe de CM1. Celle-ci a pour objectif d'étudier en quoi le travail sur le cercle dans les différents espaces (Artigue, 1982) et en particulier dans le méso-espace et dans l'environnement informatique, permet aux élèves de modifier leur regard sur une figure et de favoriser ainsi la déconstruction dimensionnelle des formes (Duval, Godin, 2005). La construction du concept de cercle a servi de support à cette expérimentation. Afin de mieux comprendre l'apport des notions de robustesse et de mouvement liées à l'utilisation du logiciel, qui sont deux éléments importants dans notre expérimentation, les participants sont, dans un premier temps, invités à chercher une situation de type boite noire. Dans un second temps, le visionnage de vidéos réalisées à l'école des Ovides à Saint-Etienne, permettra un échange avec les participants afin de repérer en quoi l'utilisation de GeoGebra participe à la construction d'une vision non-iconique du cercle (Duval, 2005).

« Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspective. » : le thème de ce colloque résume les interrogations que nous avons eues lorsque nous avons décidé de mener cette expérimentation.

En effet, nous avons constaté en formation initiale que certains étudiants ont des difficultés en géométrie car ils n'ont pas de vision des figures géométriques ce qui occasionne des blocages lorsqu'ils doivent faire les liens avec les propriétés mathématiques sous-jacentes. L'exemple que nous pouvons prendre est celui du cercle. La vision du cercle comme ensemble des points à égale distance du centre n'est souvent pas mobilisable par ces étudiants. Ils ont une vision iconique du cercle : c'est un rond. Or la déconstruction géométrique des formes est un enjeu de l'école primaire (Duval, Godin, 2005).

De plus, dans la perspective de « l'entrée de l'école dans l'ère numérique », nous nous sommes questionnés sur la place d'un logiciel de géométrie dynamique. Quel rôle peut avoir un logiciel de géométrie dynamique dans l'apprentissage des objets géométriques théoriques pour des élèves de cycle 3 ? Comment l'intégrer dans une progression en articulant des activités dans différents espaces ?

Dans cet article nous décrirons, dans une première partie, la mise en situation des participants en explicitant nos choix en lien avec nos interrogations et nous rapporterons les réactions suscitées par les activités proposées. Dans une deuxième partie, nous rapporterons les échanges découlant des vidéos que nous avons présentées. Enfin nous conclurons en présentant les expérimentations que nous souhaitons mener à la rentrée 2013 : en CM1 en tenant compte des propositions qui nous

ont été faites lors de l'atelier, en CM2 en prolongement de ce qui a été fait cette année, avec les mêmes élèves.

I - INTRODUCTION

De nombreux travaux de recherche ont montré la complexité des apprentissages en géométrie. Ils ont permis l'élaboration de cadres théoriques qui favorisent l'étude des processus d'enseignement et d'apprentissage des compétences mathématiques.

Nous nous sommes en particulier référés aux travaux de Houdement et Kuzniak (1999) qui définissent les paradigmes géométriques qui permettent de situer le niveau de résolution d'un exercice. Ils précisent : « *Notre étude de la géométrie semble se limiter au micro espace (la feuille de papier, l'écran d'ordinateur) décrit par G. Brousseau et son équipe. C'est effectivement celui dans lequel il est le plus usuel de « faire de la géométrie ». Mais cet espace est un espace de travail, celui dans lequel on peut ramener tous les autres espaces, moyennant une transformation dont bien sûr il faut maîtriser les invariants et une modélisation adaptée au traitement de la question qui s'y rapporte.* ***Pour nous, faire de la géométrie revient à travailler dans un modèle****, dont la feuille de papier fournit un support* **».**

Dans notre expérimentation, nous avons fait le choix de travailler une même question dans le méso-espace et dans le micro-espace, le support choisi dans cet espace étant l'écran d'ordinateur. L'objectif est d'amener les élèves à passer « du rond » de la géométrie G1 au cercle de la géométrie G2.

Nous nous sommes interrogés sur la complémentarité des activités dans ces différents espaces. Dans le méso-espace les instruments de géométrie utilisés dans le micro-espace ne sont pas adaptés. Les élèves doivent mettre en œuvre d'autres procédures pour résoudre le problème posé. Ce changement de procédure favorise-t-il le passage d'une vision surface à une vision ligne ? Dans l'environnement informatique, deux aspects nous semblent intéressants à observer : la possibilité de faire des essais et d'ajuster sans avoir à recommencer entièrement la figure et le mouvement lié à la possibilité de déplacer des points manuellement ou automatiquement. Ce deuxième aspect conduit à l'élaboration d'un nouveau contrat avec l'élève : la construction est juste si la figure est robuste. Ces deux dimensions du logiciel participent-ils à la construction d'une vision non-iconique des figures géométriques ?

Afin d'illustrer les spécificités du travail dans un environnement informatique, nous avons choisi, dans notre atelier, de mettre les participants en activité avec le logiciel GeoGebra.

II - MISE EN SITUATION

« *L'environnement informatique est un environnement nouveau pour manipuler les objets et les relations géométriques, en complément de la feuille de papier et de la cour de récréation* » (Soury-Lavergne, 2011).

La possibilité de manipuler la figure facilite l'exploration qui permet de mettre en évidence les propriétés de la figure afin de produire la solution du problème posé. Le mouvement permet d'obtenir des rétroactions porteuses d'informations pour la résolution, pour la validité de la stratégie sans l'intervention de l'enseignant. Ceci favorise l'autonomie de l'élève dans la recherche du problème.

Dans cet atelier, nous avons choisi deux activités de mise en situation pour les participants. Elles pouvaient être mise en œuvre avec n'importe lequel des logiciels de géométrie dynamique en usage dans le secondaire. Le choix de GeoGebra pour cet atelier s'est fait en cohérence avec l'expérimentation présentée en CM1. Dès nos premiers échanges avec l'enseignante, Geogebra

s'était imposé en tant que logiciel libre (des familles ont pu installer le logiciel à la maison) et multi-plateforme (la maîtresse utilise régulièrement son MacBook dans la classe). L'enseignante s'était déjà intéressée à la version GeoGebraPrim adaptée à un usage à l'école qui était à l'époque téléchargeable sur le site www.geogebra.org ; l'information avait été diffusée dans certaines circonscriptions. Ainsi les élèves ont commencé leur travail avec cette version allégée. Le passage à la version complète GeoGebra 4… s'est fait en cours du deuxième trimestre sans difficulté pour les élèves qui n'ont pas été perturbés par l'excès de fonctionnalités.

1 Analyse de la situation

Dans des activités de type boite noire, les compétences listées ci-dessus sont mises en œuvre. Comme nous ne connaissions pas le niveau des participants dans la maîtrise du logiciel de géométrie dynamique nous avons préparé deux activités.

1.1 Le cercle, les cercles

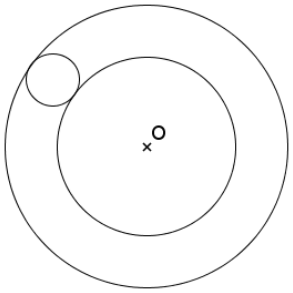
La première, pour les débutants, est la situation que nous avons proposée aux élèves de CM1 et qui est une adaptation de la situation « Le cercle et les cercles » extraite de l'ouvrage ERMEL apprentissages géométriques au cycle 3.

Ci-dessous, nous présentons la situation proposée dans l'ouvrage :

SITUATION « LE CERCLE ET LES CERCLES » en CM2

ERMEL - Cycle 3 - Apprentissages géométriques et résolutions de problèmes –

HATIER – p 453 / 459



PHASE 1 :

CONSIGNE : « Sur la feuille sont tracés deux cercles de même centre.

Vous devez tracer un autre cercle qui touche les deux premiers ».

COMMENTAIRES :

Dans deux classes de CM2 (47 élèves), dans la très grande majorité on n'observe aucun tracé à la règle. On voit ainsi à quel point une solution acceptable peut être obtenue par tâtonnement.

PHASE 2 :

CONSIGNES :

ETAPE 1 : « même défi mais d'abord vous rangez les compas, vous allez réfléchir à la manière de faire le dessin correctement mais sans vous servir de votre compas. Vous devez :

- sur la feuille écrire quel écartement vous choisirez pour votre compas et expliquer votre choix
- sur le dessin placer le centre du cercle que vous tracerez expliquer où vous l'avez placé ».

ETAPE 2 : « avec votre cercle, tracez le cercle en utilisant la méthode que vous avez décrite ».

COMMENTAIRES :

Quasiment tous les élèves proposent un rayon correct et placent correctement le centre (à 1 mm près). Mais les justifications sont presque toujours imprécises. Elles font souvent référence à un segment qui joint le « petit cercle » au « grand cercle ». Or ce segment prolongé passe rarement par O, ils proposent néanmoins un rayon correct.

PHASE 3 : « figures téléphonées », les élèves sont par binômes

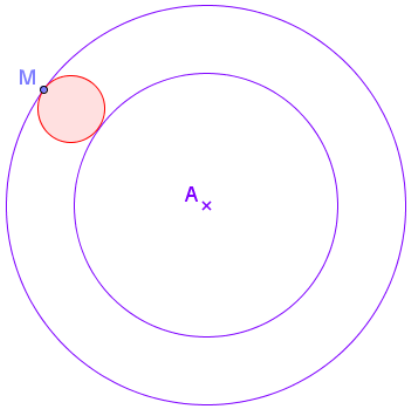
CONSIGNE :

ETAPE 1 : « sur la feuille est écrite une réponse… si on fait comme il dit, est-on sûr de réussir ? »

L'élève n'a pas précisé que les points choisis sur le cercle doivent être alignés avec le centre. Dans la discussion apparaît… « il faut que le segment soit en ligne droite avec le centre »

ETAPE 2 : idem avec 1 et 8 pour rayon, l'information est la distance à O de O', une procédure non utilisée par les élèves. Des réponses « oui » apparaissent mais non argumentées.

Nous avons choisi de proposer cette situation dans l'environnement informatique et nous l'avons présentée sous la forme suivante :



Lancer une animation automatique sur le point M.

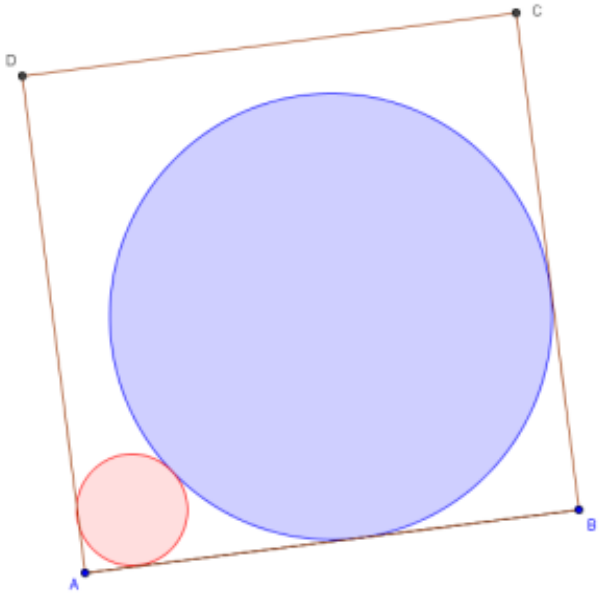
- *Observer*
- *Construire une figure qui se « comporte pareil »*

L'apport du logiciel de géométrique dynamique est double : il contraint les élèves à réfléchir sur la construction de la figure à partir de ses propriétés car sinon « elle ne se comporte pas pareil » et il permet de contourner l'obstacle de la production d'un texte par les élèves.

La commande « animer » de la dernière version du logiciel GeoGebra nous semble particulièrement intéressante dans cette activité car elle apporte une motivation supplémentaire pour les élèves. En effet ils voient tourner le petit disque dans la couronne, ils s'attachent alors à vouloir reproduire cette situation, à résoudre un problème authentique à leurs yeux, c'est un défi qui les a visiblement passionnés.

1.2 Sangaku

La situation choisie pour les utilisateurs chevronnés de GeoGebra est une activité que nous avons imaginée pour l'atelier donc nous ne l'avions pas encore testée. En voici l'énoncé :



Le rayon du grand cercle est quatre fois plus grand que celui du petit.

Les deux cercles sont tangents entre eux et tangents au côté du carré.

Déplacer A ou B, observer.

Construire une figure qui se comporte pareil.

Cette activité a un intérêt particulier pour notre problématique. Si on reste dans une vision 2D de la figure ou vision surface comme l'a définie Marie-Jeanne Perrin (à paraître) lors de la deuxième conférence de ce colloque : « Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres », nous observons deux ronds et un carré. Cette figure semble simple et ne pose pas de difficulté d'identification des sous-figures. Par contre, si l'on souhaite reproduire cette figure, la tâche se complique. Dans un environnement papier crayon, la contrainte sur les rayons complexifie la procédure par essais/ajustements mais on peut supposer que des élèves puissent mettre en œuvre la procédure suivante : chercher en utilisant le compas les centres des cercles, tracer les diagonales du carré et observer que ces centres semblent être situés sur chacune des diagonales, mesurer le côté du carré puis les rayons des deux cercles, mesurer la distance d'un sommet du carré au centre du cercle puis à l'aide de ces informations, reproduire la figure.

Dans un environnement informatique, la tâche est plus complexe car le côté du carré étant variable, la mesure des rayons des cercles ne peut pas être obtenue. Nous ne proposerions bien évidemment pas cette activité à des élèves de l'école primaire. L'objectif était de proposer un défi suffisamment résistant aux participants afin d'illustrer l'obligation d'un travail sur les propriétés des figures si l'on veut respecter le contrat induit par la nécessité de robustesse de la figure.

2 Déroulement de l'atelier

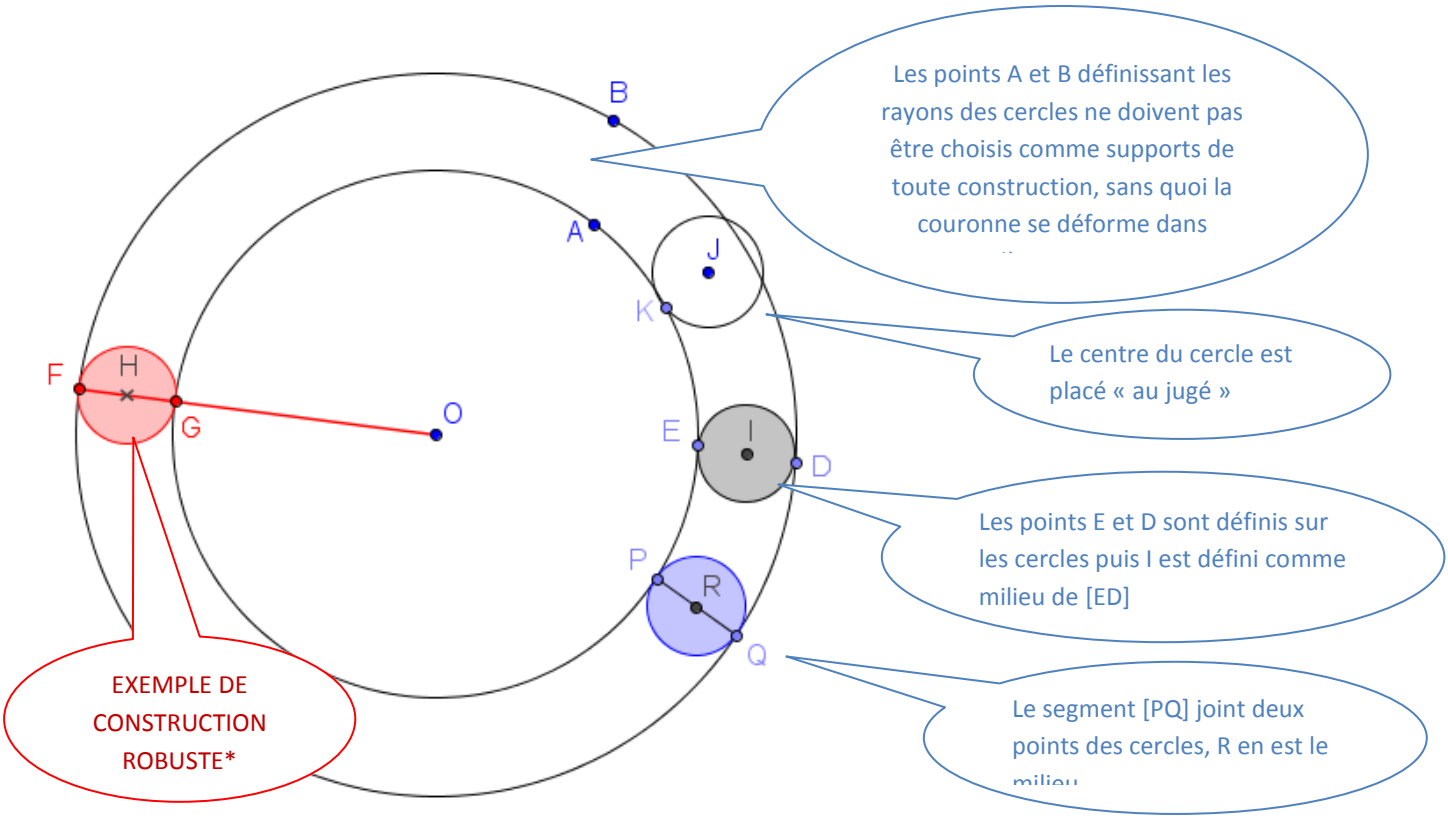
2.1 Descriptif du déroulement

L'atelier s'est déroulé en salle informatique. Chaque participant avait son ordinateur. Nous avons laissé à chacun le choix de l'activité selon son niveau ou sa préférence. Nous avions déposé au préalable dans l'espace commun un fichier dans lequel nous avions neutralisé certaines commandes du logiciel afin que les participants n'aient pas accès aux étapes de construction de la figure. Ils pouvaient observer l'animation automatique pour la première activité et manipuler les points pour la deuxième. À partir du constat des invariants, ils devaient être capable de construire une figure « qui se comporte pareil ».

Nous avons laissé du temps pour explorer, essayer, recommencer. Nous avons répondu aux questions d'ordre technique sur l'utilisation du logiciel mais nous n'avons donné aucune piste de résolution.

2.2 Productions et réactions des participants

Pour l'activité « Le cercle et les cercles », nous avons constaté les erreurs que l'on avait anticipées et que nous avons également retrouvées, comme nous le détaillerons plus loin, dans les productions des élèves de CM1, elles sont représentées dans la partie droite.



**Protocole de la construction robuste :*

1	Point O	
2	Point A	
3	Cercle c	Cercle de centre O passant par A
4	Point B	
5	Cercle d	Cercle de centre O passant par B
6	Point F	Point sur d
7	Segment a	Segment [FO]
8	Point G	Point d'intersection de c et a
9	Point H	Milieu de [FG]
10	Cercle f	Cercle de centre H passant par F

Tout comme les élèves les plus rapides, certains participants ont approfondi l'activité en animant simultanément plusieurs points de la figure afin que plusieurs cercles tournent en même temps dans la couronne. Ce qui laisse à penser que la commande « animer » ne plait pas seulement aux enfants !

Pour la deuxième activité, des participants ont eux-aussi proposé des variantes de l'activité. En particulier, Yves Thomas a proposé plusieurs améliorations de boites noires avec curseur qui permet de faire varier le côté du carré mais aussi le rapport entre les deux rayons des cercles et Anne Calpe a animé un sommet du carré.

Une présentation de la solution de ce problème se trouve en annexe 5.

Cette situation d'introduction a permis à chacun de se familiariser avec GeoGebra et de se confronter à la contrainte de la robustesse des figures liée l'utilisation de l'environnement numérique. Une autre adaptation de la situation « Le cercle et les cercles »dans un environnement numérique avait déjà été expérimentée dans l'académie de la réunion :

http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/spip.php?article391

Isabelle Payet qui était présente à notre atelier avait participé à cette expérimentation. Elle a été intéressée par notre approche et notamment par la place de la commande « animer » et s'est dit décidée à expérimenter de nouveau cette situation.

Il nous a semblé important de faire ce premier temps en position d'élèves. La confrontation au logiciel permet une prise de conscience des enjeux de l'utilisation de cet outil. Nous pensons ainsi faciliter une observation critique du travail des élèves dans l'environnement informatique lors de la présentation des videos dans le deuxième temps.

III - COMPTE RENDU DE L'EXPÉRIMENTATION

Tout d'abord, nous allons préciser le cadre dans lequel s'est déroulée notre expérimentation. Nous avons été sollicités par une maitresse formatrice à la suite d'une intervention en formation continue sur le thème de la géométrie au cycle 3 qui s'était déroulée au mois d'octobre 2012. Elle a proposé un travail avec le logiciel tout au long de l'année. Elle avait en charge, cette année, une classe de CM1 de 26 élèves de niveau hétérogène. Elle disposait dans la classe :

- du vidéo-projecteur de l'école qu'elle réservait pour les séances, couplé à son portable,
- de quatre ordinateurs fixes au fond de la salle de classe et de deux ordinateurs portables.



Le travail se déroulait en binôme dans le cadre d'ateliers sur la semaine et sur des temps collectifs de mise en commun ou de recherche. La durée des séances était de 40 à 45 minutes.

En début d'année, les élèves ont commencé à travailler avec la version GeoGebraPrim qu'ils pouvaient utiliser en « libre service » dans la classe lorsqu'ils avaient fini un travail ou sur le temps de l'étude. Certains parents ont fait la demande d'installer le logiciel à la maison.

Voici la progression établie par la professeure des écoles, responsable de la classe :

Objectifs et compétences travaillés lors des ateliers mis en place sur la période de fin octobre à fin décembre :

- S'approprier un logiciel de géométrie dynamique
- **Faire évoluer les représentations mentales** des élèves
- Comprendre l'intérêt de hiérarchiser ses constructions
- **Utiliser, comprendre, réinvestir** le vocabulaire géométrique vu en classe : polygone, quadrilatères (carré, rectangle...), triangles, segment, droite, droite perpendiculaire, droite parallèle, angle droit, milieu d'un segment....
- **Tracer** des droites perpendiculaires et parallèles ; une figure simple à partir de consignes ou d'un programme ou protocole de construction
- **Reproduire** une figure complexe en utilisant les propriétés et les relations
- **Construire un programme ou protocole de construction** à partir d'une figure imposée en utilisant le vocabulaire adapté, en ordonnant les étapes.

Nous avons décidé de mettre en place une expérimentation dans sa classe. Nous avons donc choisi trois activités que nous sommes allés expérimenter. Nous avons filmé les élèves lors des deux premières. La dernière étant une activité de recherche, elle s'est déroulée sur plusieurs séances. Nous avons récupéré le compte rendu de l'enseignante et les productions des élèves.

1 Présentation et analyse des situations retenues

La première activité se déroule dans la cour avec un retour réflexif en classe et les deux autres dans l'environnement informatique. La première expérimentation (dans la cour de l'école) s'est déroulée le mardi 2 avril. La deuxième (le 18 avril) était une reprise de ce qui a été fait dans la cour mais sur l'écran d'ordinateur. La dernière est la situation que nous avons proposée en introduction à l'atelier, « Le cercle et les cercles ». Nous n'avons pas fait d'activité dans le micro-espace avec comme support la feuille de papier. En effet la professeure a été remplacée par une étudiante M2 au mois de mars. Celle-ci a fait une leçon sur le cercle. Un affichage était présent dans lequel était défini le vocabulaire lié au cercle et la propriété « ensemble des points à égale distance du centre ». L'étudiante a proposé des situations papier/crayon.

1.1 Dans la cour

Nous avons choisi une situation volontairement ouverte pour laisser aux élèves l'initiative de la méthode de résolution.

1ère expérimentation :

Lieu : dans le méso-espace, cour de récréation.

Matériel : une balise. Matériel caché dans un sac : ficelle, craie, décamètre.

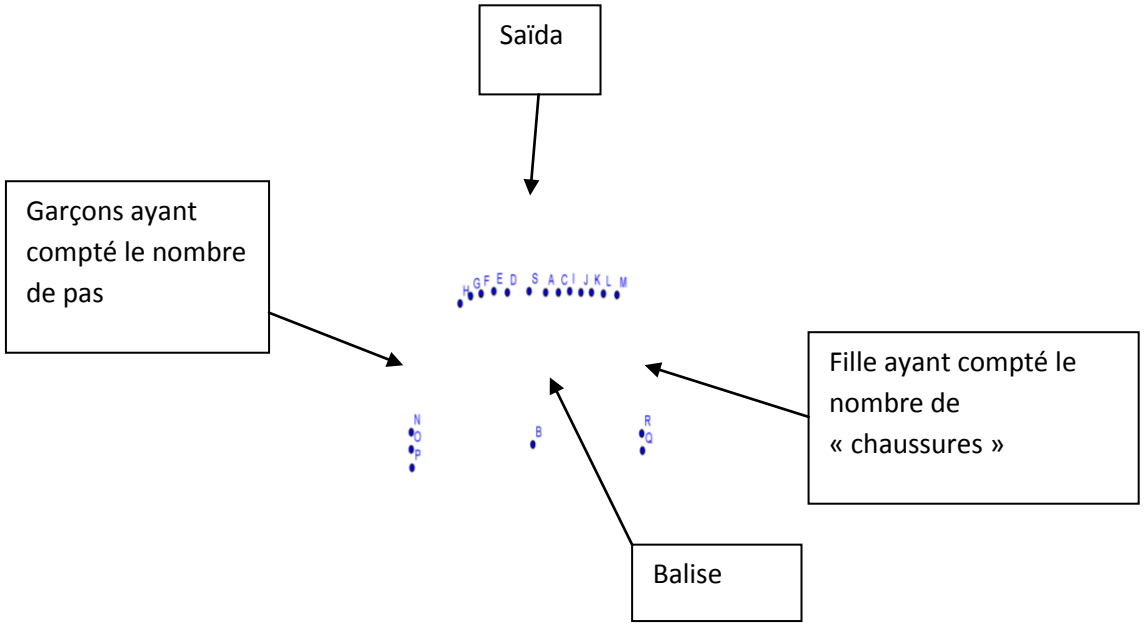
Déroulement : nous plaçons la balise à un endroit quelconque de la cour. Nous demandons à une

élève, Saïda, de se placer à une distance pas trop éloignée de la balise.

Consigne pour les autres élèves : « vous devez vous placer à la même distance de la balise que Saïda ».

L'objectif était d'observer si les élèves étaient capables de mobiliser la propriété qu'ils avaient énoncée trois semaines plus tôt dans un nouvel espace de travail. Nous pensions qu'une majorité se placerait en ligne droite à côté de Saïda. Autre placement possible : aux quatre points cardinaux relativement à Saïda.

Les élèves se dispersent. Certains vont directement se placer à côté de Saïda. D'autres comptent le nombre de pas entre Saïda et la balise et se placent malgré tout à côté d'elle mais trois élèves vont se placer différemment. Enfin une élève compte le nombre de fois où elle met ses chaussures bout à bout et va se placer diamétralement opposé au groupe de trois garçons. Ci-dessous une schématisation des placements :





Nous constatons que les placements anticipés se sont retrouvés sur le terrain. On peut cependant noter que tous les élèves se sont placés dans le demi-plan contenant Saïda.

Nous avons ensuite interrogé certains élèves :

Un élève placé dans la position K de la schématisation n'a pas su expliquer pourquoi il s'était placé à cet endroit et pensait malgré tout que O,N ET P était eux aussi bien placés

Un élève placé dans la position K de la schématisation à répondu : « je me suis un peu arrondi parce si on se met tous en ligne et bien par exemple si on se met là bas (il montre du doigt une position sur la ligne mais éloignée de Saïda) ça fera 31 pas alors que Saïda ça fait 6 pas » un élève à côté complète : « il faut faire un cercle »

Un élève placé dans la position N de la schématisation : « si on se met sur la ligne ça va pas, normalement ça fait un rond autour »

On peut donc conclure que certains élèves comprennent que la droite ne peut pas convenir mais qu'ils hésitent à se placer à un endroit quelconque même si celui-ci se trouve bien à la même distance. Ceci peut peut-être s'expliquer que dans les activités papier/crayon les directions horizontale et verticale sont très présentes et influencées par les quadrillages de la feuille.

Après cette première mise en commun, nous leur avons demandé de retourner vers la balise et de se mettre de nouveau à la même distance que Saïda en s'espaçant le plus régulièrement possible.



Nous leur avons demandé ensuite comment vérifier si tout le monde est à la même distance de la balise que Saïda. Voici les différentes propositions des élèves :

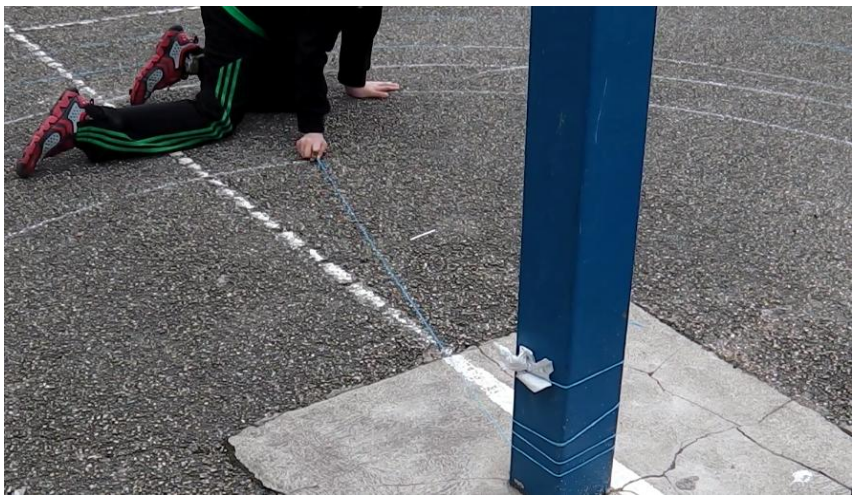
- Un grand compas comme en classe
- Une grande forme ronde.
- Mettre des règles de tableau bout à bout pour mesurer. Cette proposition a engendré la suivante.
- Un décamètre. Nous pensions que l'élève allait mesurer la distance entre les élèves et la balise mais il a fait le tour de ces camarades avec le décamètre pour voir si la forme obtenue était ronde. Le décamètre s'est révélé trop court pour faire le tour de tout le monde (décamètre déroulé sur le sol visible sur la photo précédente)
- Un autre élève a proposé d'utiliser le décamètre autrement et a commencé à mesurer la distance entre chaque enfant et la balise mais la procédure lui a semblé trop longue.

- Un autre élève a demandé de la ficelle. Il a fait le tour de ces camarades avec la ficelle. Nous lui avons demandé si maintenant on pouvait être sur d'être bien positionné. Les autres ont répondu non car le cercle n'était pas rond !
- Un élève a alors proposé d'attacher le ficelle à la balise de tendre la ficelle jusqu'à Saïda et de tourner autour de la balise pour vérifier si tout le monde était bien à la bonne distance. Nous lui avons ensuite proposé de mettre une craie au bout de sa ficelle pour garder la trace de son déplacement.

Une fois le cercle tracé, nous avons demandé aux élèves de revenir vers la balise et de se mettre à nouveau à la même distance de Saïda le lus rapidement possible. Certains élèves ont encore mesuré les pas mais d'autres sont allés se placer directement sur le cercle tracé à la craie.

Pour terminer cette séance dans la cour, nous avons séparé la classe en trois groupes. Chaque groupe devait tracer un cercle autour d'un poteau de basket puis dans un deuxième temps, bloquer la ficelle tourner autour du poteau en traçant au sol la forme obtenu dans ce déplacement. Les élèves ont pu observer qu'ils obtenaient un escargot que l'on a appelé spirale. Quand on leur a demandé pourquoi on n'obtenait pas de cercle, les élèves ont dit que la ficelle était bloquée. Ils sont restés sur la cause matérielle. Nous avons du nous même précisé que si la ficelle était bloquée cela entrainait une diminution de sa longueur à chaque tour et donc que la distance entre le poteau et la craie diminuait donc à chaque tour la craie n'était pas à la même distance du centre.

Cette dernière activité a posé des problèmes d'interprétation et il faudra envisager une autre mise en œuvre l'année prochaine. Nous verrons dans les écrits produits lors du retour en classe ce que les élèves en ont retenu.



La séance a duré de 13h30 à 15h00.

1.2 Retour réflexif

Après la récréation, la professeure leur a demandé :
Est-ce que la séance dans la cour vous a plu ?
Est-ce que vous pensez avoir fait des mathématiques ?
Écrire ce que vous avez retenu de la séance dans la cour.

Tous sauf un ont aimé la séance dans la cour. Tous ont dit avoir fait des mathématiques.

Pour le dernier point, certains ont fait des schémas, d'autre des textes.

Les schémas peuvent être classés en trois groupes :

- Les élèves qui ont essayé de représenté la réalité (annexe 1)
- Les élèves qui ont schématisé la réalité (annexe 2)
- Les élèves qui ont utilisé des instruments de géométrie pour schématiser la réalité. (annexe 3)

Les textes produits décrivent ce qui a été fait concrètement dans la cour (annexe 4).

On peut noter que pour la dernière activité, aucune production n'explique pourquoi on a obtenu une spirale, ce qui confirme le fait d'envisager une autre mise en œuvre l'année prochaine.

1.3 1ère activité avec GeoGebra

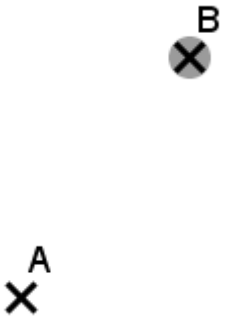
Les élèves sont répartis en trois groupes qui passeront à tour de rôle, par binômes, sur les ordinateurs. L'énoncé que nous avons choisi est très proche de celui choisi dans le méso-espace. La propriété mathématique visée était la même.

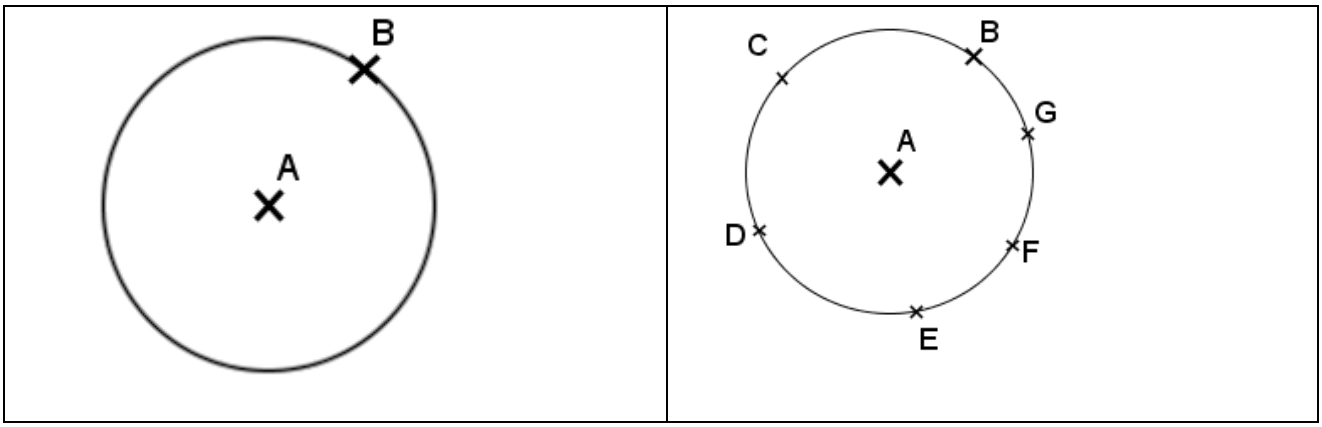
Consigne pour les binômes :
- placer un point A à peu près au centre de l'écran.
- Placer un point B n'importe où sur l'écran.
- Placer 5 points qui soient tous à la même distance de A que le point B. Lorsque vous pensez avoir réussi, vous enregistrer votre travail et vous vous préparer à exposer votre méthode à la classe.

Nous avions anticipé plusieurs procédures :

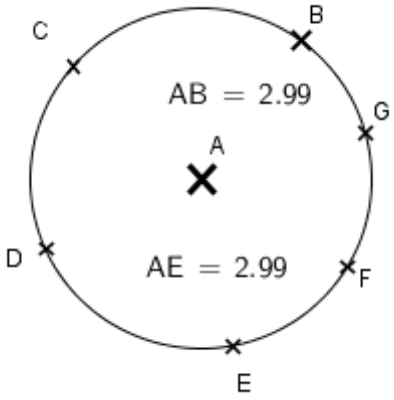
- Les élèves placent visuellement des points qui semblent à la même distance.
- Les élèves font afficher la distance AB puis placent un point C, font afficher la distance AC et ajustent en déplaçant le point. Nous ne pensons pas que les élèves vont effacer le point s'il n'est pas à la bonne distance et recommencer avec un autre point, la professeure ayant constaté que les élèves ont bien intégré la notion de déplacement.
- Les élèves tracent le cercle de centre B passant par A puis placent cinq points sur ce cercle.
- Les élèves tracent le cercle de centre A passant par B et placent cinq points sur ce cercle.

Nous avons constaté avec étonnement que tous les binômes sauf un ont produit la procédure suivante :

1ère étape 	2ème étape 
3ème étape	4ème étape



Certains élèves ont senti le besoin de vérifier et ont fait afficher la distance du centre aux points



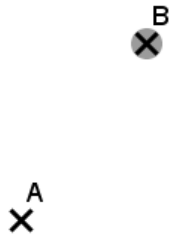
On peut se demander s'ils avaient des doutes sur leur procédure ou s'ils voulaient montrer qu'ils connaissaient d'autres commandes du logiciel.

Un seul binôme a procédé de la façon suivante :

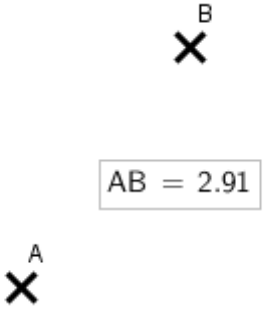
1ère étape



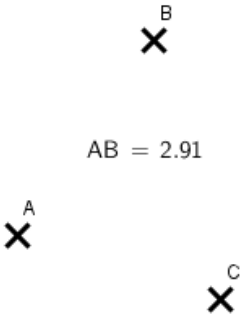
2ème étape

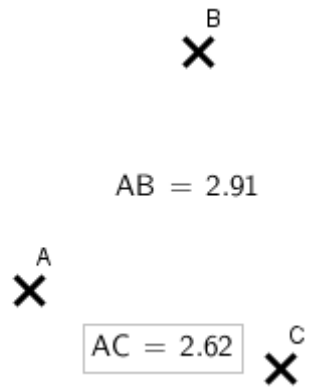
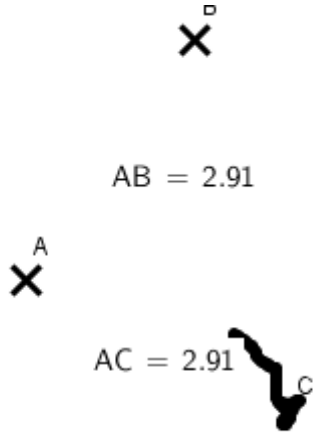


3ème étape



4ème étape



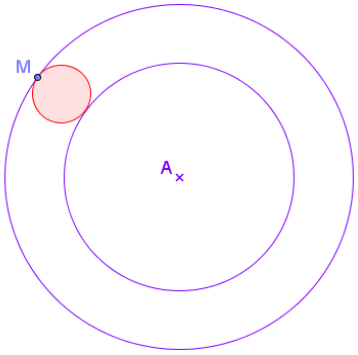
5ème étape	6ème étape
	

Sans le vouloir, lors de la mise en commun, un élève a activité le mode « trace » du point qu'il déplace. Cela a permis de garder la trace de la procédure utilisée. Il fait cette même démarche pour les quatre autres points. Une élève fait la remarque que c'est comme dans la cour (on ajuste sa position). Lorsque la professeure propose de tracer le cercle de centre A passant par B pour retrouver la procédure des autres binômes, les autres élèves commentent : « ça va forcément marcher ». Tous semblent convaincus que les points, puisqu'ils sont à la même distance de A que le point B, seront sur le cercle de centre A passant par B. Nous pensons que nous pouvons voir dans ce commentaire la trace d'un apprentissage car les élèves sont capables de faire le lien entre être à la même distance de A et être sur le cercle de centre A

La professeure fait remarquer que ce n'est pas la procédure la plus rapide et que ce n'est pas une figure robuste par contre l'élève a bien placé 5 points à la même distance de A que le point B.

1.4 2ème activité avec GeoGebra

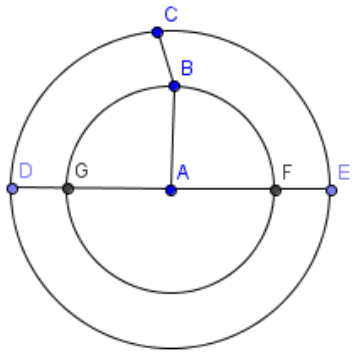
La maîtresse projette la figure animée, avec le disque de couleur qui tourne tourne dans la couronne en lançant une animation sur le point M. Elle annonce que nous leur avons préparé un défi ce qui mobilise aussitôt les élèves.



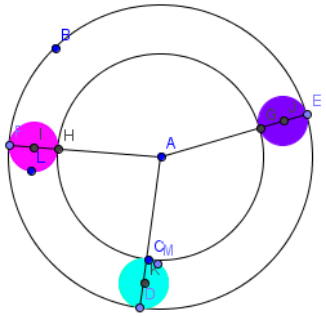
Cette activité était proposée en CM2 dans l'ouvrage ERMEL. Le descriptif de la situation d'origine est celui détaillé dans la partie II. L'objectif de ce problème pour chercher était de vérifier si les élèves restaient sur une vision 2D de la figure et s'ils étaient capables de mettre en œuvre une procédure de résolution basée sur la recherche des propriétés de la figure. Nous avons pu observer les mêmes erreurs que celles présentées dans la situation d'introduction. Nous n'avons pas pu être

présents aux séances mais quand nous avons rencontré la maîtresse nous avons pu ouvrir les fichiers des élèves et constater l'avancement des projets. Certains pas encore terminés (1), d'autres très aboutis (2).

(1)



(2)



2 Réactions des participants

Pour la première activité les participants ont proposé de faire varier la position de Saïda et de demander aux élèves d'anticiper l'endroit où il faudrait se placer afin de voir s'ils ont vision statique ou dynamique de la situation.

Pour la spirale, il faudrait trouver une activité GeoGebra accessible à des élèves de CM1 qui permettrait d'évaluer ce qui a été retenu de l'activité dans le méso-espace.

Pour la première activité avec GeoGebra, la consigne très proche de la consigne dans la cour a peut-être influencé les élèves et explique le nombre important de binômes qui ont pensé au cercle. De plus la formulation de la consigne « place un point A à peu près au centre de l'écran » a orienté les élèves vers le tracé du cercle de centre A.

Les participants se sont demandé si la professeure n'était pas en difficulté pour répondre aux attentes des élèves lors des séances avec GeoGebra. La professeure ne semble pas en difficulté, elle prend le temps de reprendre toutes les étapes de la démarche avec les élèves, elle organise régulièrement des mises en commun où les binômes viennent exposés leur démarche. La validation est soumise à la classe. Les élèves et la professeure progressent en même temps dans la maitrise du logiciel. Les élèves ont du temps pour faire des essais, pour explorer. La professeure trouve très porteur pour l'enseignement le fait que les élèves puissent valider par eux même en testant la robustesse de leur figure.

Un participant fait remarquer que les élèves manipulent ce que ne permettent pas les activités papier/crayon.

Un autre participant fait remarquer que l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique nécessite l'apprentissage de geste spécifique à cet environnement, les boutons sont inducteurs de conduites propres à l'environnement informatique.

Enfin un autre participant se demande si le transfert sur papier/crayon restera un enjeu dans les années à venir !

Nous n'avons pas tranché sur la question que nous nous posions en termes d'apprentissage. Certes l'utilisation du logiciel est un facteur motivant pour les élèves, la géométrie devient leur atelier préféré mais qu'en est-il des apprentissages ? La réussite de certains binômes dans l'activité « le

cercle et les cercles » montre que les élèves ont été capables de travailler sur les propriétés de la figure, ce qui était l'enjeu de notre expérimentation.

IV - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

1 Conclusion

Cette expérimentation a permis de montrer que le travail dans différents espaces permettait de construire des éléments de géométrie qui prennent du sens pour les élèves. Ceux-ci ont été capables de faire le lien entre ce qu'ils ont vécu dans la cour et la première activité avec le logiciel de géométrie dynamique. Dans la deuxième activité avec GeoGebra les élèves ont expérimenté, testé, validé leur procédure sans l'intervention de l'enseignante. C'est dans la pratique de classe de se donner du temps, de laisser aux élèves le temps de rentrer dans les apprentissages. Les moments de mise en commun avec le vidéoprojecteur sont des moments importants pour faire le point sur ce qui a été trouvé et pour relancer la recherche. Nous pouvons donc nous positionner pour une intégration de la géométrie dynamique pour proposer une géométrie non statique libérée de l'angoisse de la figure bien faite pointée lors de la conférence d'ouverture et de la leçon bien structurée que l'on affiche dans la classe.

Il faut également pointer la motivation qu'apporte l'utilisation du logiciel. Les élèves ont envie de faire de la géométrie. Certains ont installé le logiciel chez eux, d'autres l'utilisent pendant l'étude. Cela peut donner envie aux élèves d'apprendre de nouvelles connaissances en géométrie pour enrichir les activités que l'on peut faire avec GeoGebra. Pour la deuxième activité avec le logiciel, les élèves ont utilisé la version complète de GeoGebra à la place de GeoGebraprim. Ils ont exploré des outils nouveaux. Un élève a trouvé la commande « polygone régulier » et a construit le carré ! L'utilisation de l'ordinateur est familière aux élèves, ils ont l'habitude de le manipuler. La prise en main du logiciel n'est pas un obstacle pour eux.

Pour terminer nous pouvons ajouter que GeoGebra est devenu un outil disponible dans la classe qui est utilisé pour d'autres projets liés aux arts visuels ou à la technologie. Parallèlement aux séances de mathématiques, les élèves ont utilisé GeoGebra pour différentes réalisations : un tableau à la manière de Delaunay et le monogramme de la classe qui était un projet d'école. La richesse de la palette de couleur du logiciel et la précision des tracés permet des productions de qualité.

2 Perspectives

Pour clôturer sa séquence sur le cercle, l'enseignante a fait faire un projet de figure sur l'ordinateur qu'ils devaient ensuite aller reproduire dans la cour ce qui n'a pu être réalisé en fin d'année.

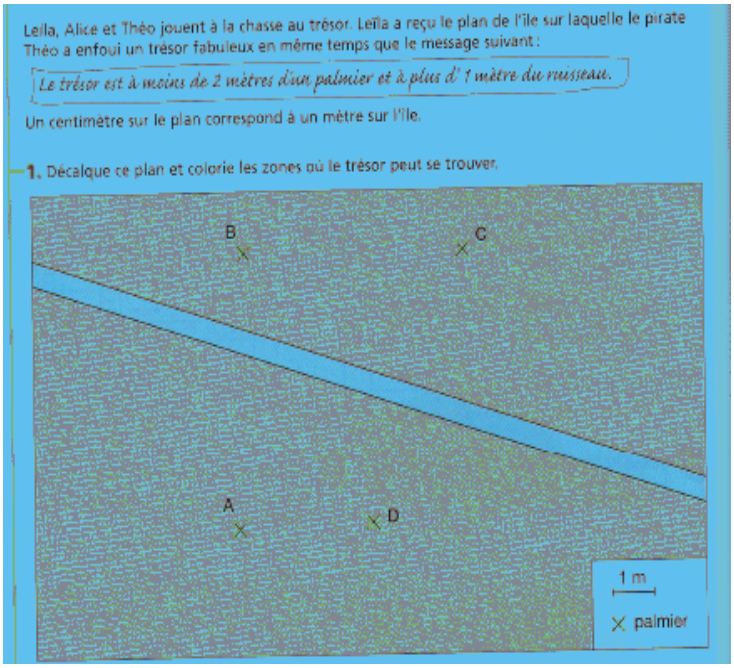
Un autre enseignant de CM1 a souhaité s'intégrer au projet pour l'année prochaine. Nous tiendrons compte des remarques qui nous ont été faite lors de l'atelier pour faire évoluer nos expérimentations.

Enfin, nous espérons pouvoir travailler avec les maitres de CM2. Nous souhaiterions travailler sur la construction d'un triangle dont ont connait les trois dimensions pour voir si les élèves sont capables de faire le lien avec le cercle et ainsi donner du sens à cette construction qui est comme nous l'avons dit en introduction un automatisme dépourvu de sens.

En CM1, comme en CM2 un réinvestissement du logiciel se fera naturellement dans des activités de reproduction de figures, l'enseignante pourra s'inspirer des modèles de la brochure de l'IREM

Paris Nord « *Papiers Crayons - aborder la géométrie par le dessin* » et des fichiers GeoGebra installés en accompagnement sur le site http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/spip.php?rubrique48.

L'actualité s'oriente vers la géométrie dynamique sur tablette, nous suivons l'évolution des premiers logiciels. Nous avons fait quelques essais prometteurs avec le logiciel DGPAD (voir les sites http://www.dgpad.net et http://revue.sesamath.net/spip.php?article509). L'extrême simplicité du tactile, l'enregistrement automatisé (un historique garde la trace de toutes les sessions), la mobilité de l'outil qui peut être utilisé dans la cour (par exemple pour réaliser un projet) sont des éléments à prendre en compte. Un lot de tablette est en cours d'achat à l'iufm de Lyon et l'enseignante est partante pour une expérimentation. Nous pourrions, par exemple, adapter, dans la cour et sur l'écran, une activité comme celle figurant dans Euromaths CM2 :



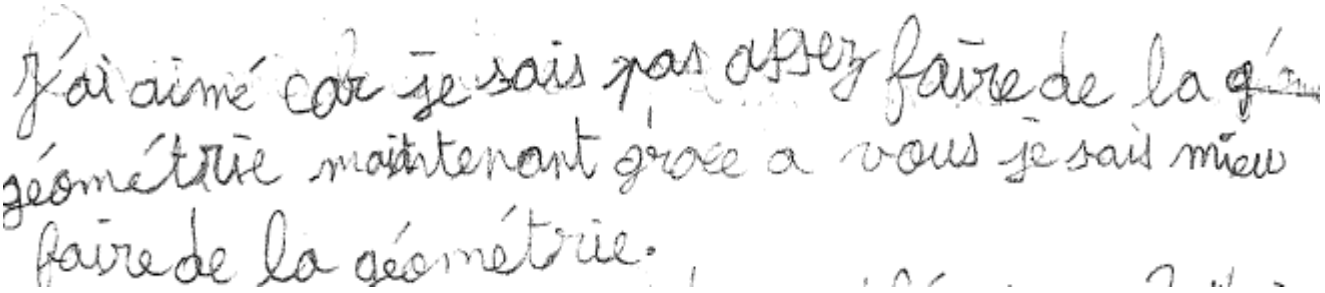
Nous terminons en laissant la parole :

… à la maîtresse à propos de la 2è activité GeoGebra :

« ils sont à fond, maintenant l'atelier de géométrie, c'est « ouhaaa ! »

… aux enfants à propos de la séance dans la cour :

- On n'est tous ensemble et on devait trouver une solution



V - BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M. (1982) A propos des conceptions du cercle. Présentation des situations de classes privilégiant certaines conceptions (CE2 et CM), *Grand N*, **27**, 45-72.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements, *Annales de didactique et sciences cognitives*, 5-53.

DUVAL R., GODIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76**, 7-27.

ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes*, éditions Hatier

HOUDEMENT C., KUZNIAC A. (1999) Réflexions sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maitres, *Grand N*, **64**, 65-78.

PERRIN M-J. (2014) *Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres, actes de la Copirelem*

SOURY-LAVERGNE S. (2011) De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique, *MathémaTICE n°* 27 http://revue.sesamath.net/spip.php?article364

VI - ANNEXE

Annexe 1 : production d'élève lors du retour réflexif

Annexe 2 : production d'élève lors du retour réflexif

Annexe 3 : production d'élève lors du retour réflexif

Annexe 4 : production d'élève lors du retour réflexif

Annexe 5 : solution de la situation d'introduction

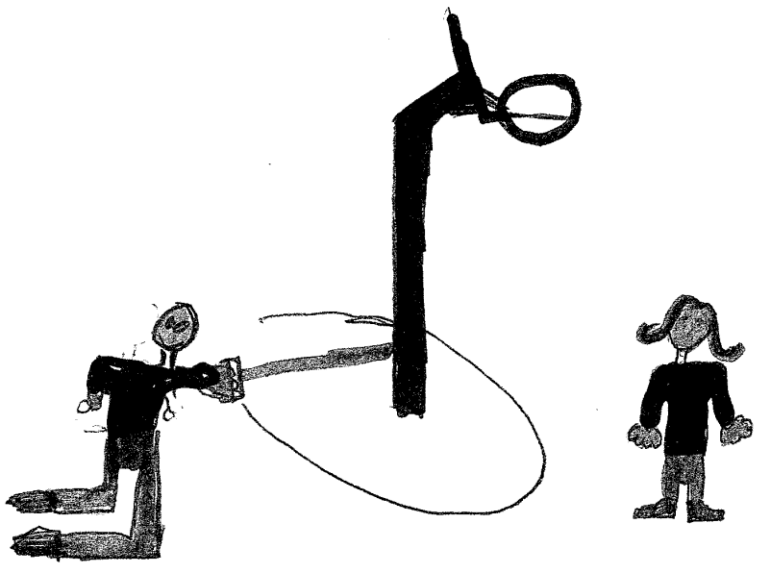
Annexe 1

J'ai bien aimé cette activité

Oui pour Moi ce qu'on a fait c'est de la géométrie.

La premier activités c'est était de se metre a la même distance de Laïda. Pas gagné!!

La deuxième activités

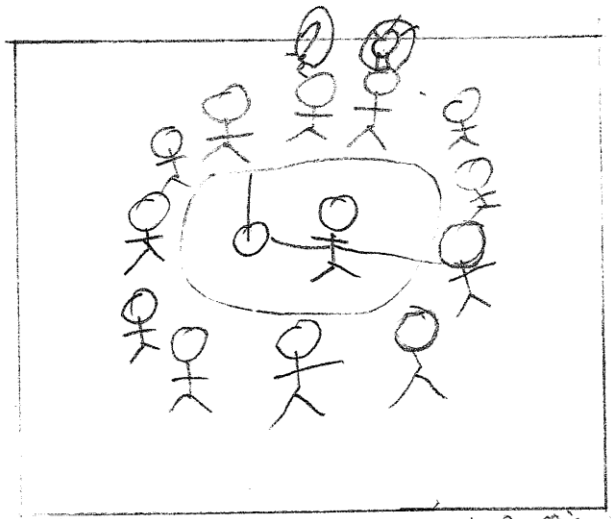


Troisième activités :
la corde s'en enroulé au tour du poteau. a la fin le cerde reste.

Annexe 2

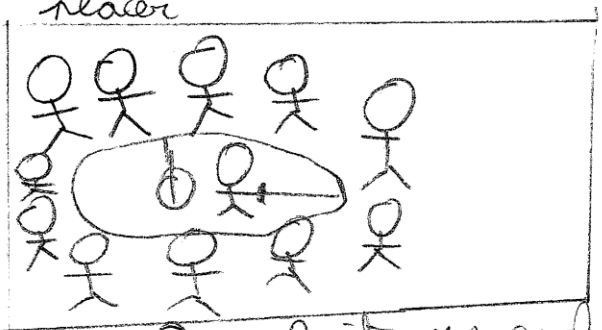
J'ai aimé car je sais pas assez faire de la géométrie maintenant grâce à vous je sais mieux faire de la géométrie.
est-ce que vous avez fait des mathématiques? Moi j'ai fait on a mesurer ...

① on a

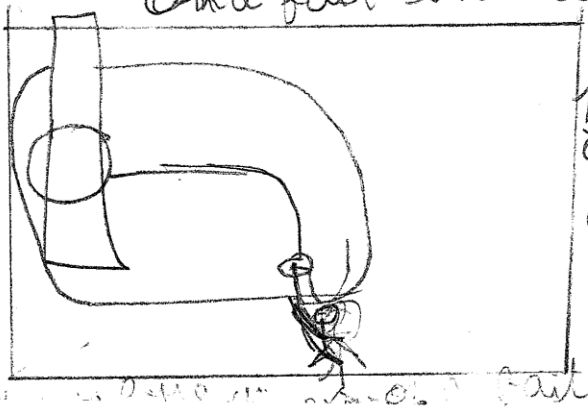


trouver une pour savoir si on arrive à bien placer

②



On a fait un cercle

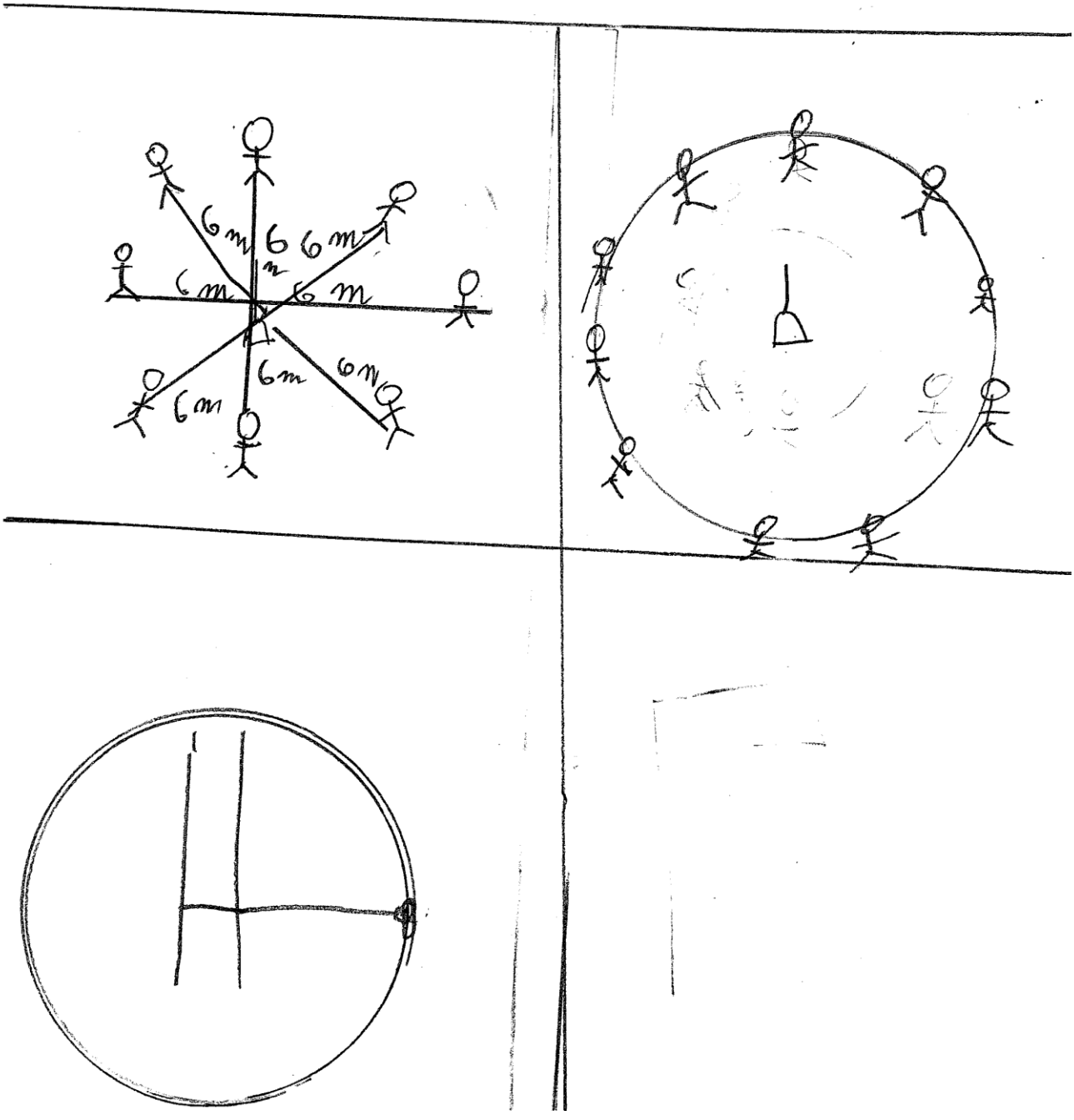


il fallait faire plein de cercle et à la fin sa doit donner un escargot

fait plein cercle pour

Annexe 3

J'ai aimé car on a été ensemble et on n'a tous participé
On a fait de mathématique
on a fait une activité on devait être a même distance de la valise. La 2ème était de trouvé un long cercle.
la troisième était de faire plusieur cercle amenet a un escargot.



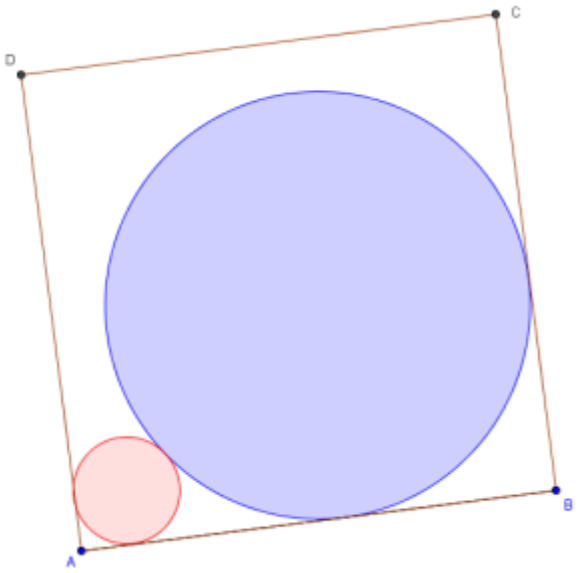
Annexe 4

J'ai aimé travailler de bord, c'était amusant.
Nous avons fait des mathématiques (géométrie)

La première activité qu'au début René a
mit une balise jaune, ensuite nous avons mit
Saïda en face de la balise jaune. Cécile a
débalée le matériel et nous avons commencé.
Nous avons utilisé plusieurs méthode mais elles
étaient toutes fausses sauf la dernière, nous
avons pris du fil et une craie, nous avons
attaché la craie au bout du fil et le fil à la
balise. Ça a fait un compas. Nous avons
tracé un cercle partant de Saïda et nous
nous sommes mit dessus le cercle et nous étions
sur d'être à la même distance.
Ça y est nous avons mit un fil autour du
panier de basket et nous avons accroché
une craie bleu et un cercle. Ça y est ont a aussi
mit un fil autour mais de façon à que le fil ne
surne pas, ça a fait une spirale.

Annexe 5

LE PROBLEME : inspiré du Sangaku « Wasan », proposé sous forme de « boîte noire »



Le rayon du grand cercle est quatre fois celui du petit

Les deux cercles sont tangents entre eux et tangents au côté du carré.

Construire une figure qui se comporte pareil

Explorer le rapport entre les rayons des cercles : 4 *

Pour cela on peut tracer les centres O et O' et les points de tangences T et U.

Explorer le rapport entre le rayon du petit cercle et AB : 9

Ce rapport peut être calculé en raisonnant dans le triangle rectangle OO'K. En effet, si r et 4r sont les rayons respectifs des deux cercles, la relation de tangence implique OO'= 5r.

Dans le triangle rectangle OO'K on a OO'=5r et O'K=3r, on en déduit OK=4r.

On a donc AB = AT + TU + UB = r + 4r + 4r = 9r.

La construction : on trace respectivement

- le segment [AB], le carré ABCD

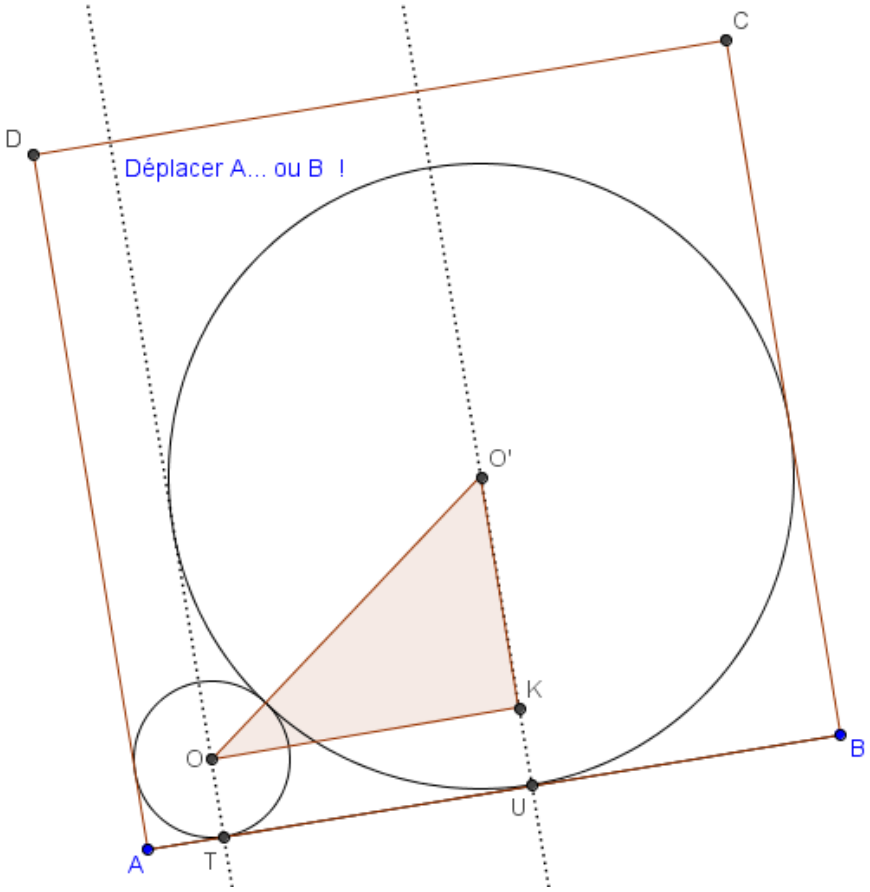
- le point T en fractionnant en 9 parties égales le segment [AB] (théorème de Thalès)

- le point U milieu de [TB]

- les centres O et O' (on peut par exemple utiliser le fait qu'ils appartiennent respectivement aux diagonales [AC] et [BD])

- les deux cercles !

* C'est une donnée de ce modèle de Sangaku qu'on peut choisir d'afficher avec le problème de même que la relation de tangence des deux cercles.


C
D
Déplacer A... ou B !
O'
K
O
B
U
A
T

ANGLE DROIT À L'ARTICULATION ENTRE LE CYCLE 2 ET LE CYCLE 3

Equipe ERMEL[1]
IFÉ

Résumé
Au cycle 2, comme au début du cycle 3, dans le cadre des recherches sur les apprentissages géométriques de l'équipe ERMEL, nous avons cherché à amener les élèves à construire des significations du concept d'angle droit comme outil implicite de résolution de problèmes spatiaux. L'atelier se propose d'étudier les connaissances que les élèves peuvent mobiliser lors de ces résolutions : leur « nature » (sont-elles perceptives ? instrumentées ? spatiales ou géométriques ?) ainsi que les savoirs auxquels elles se réfèrent (angle droit, mais aussi autres savoirs).
Les conditions d'apparition et d'évolution de ces connaissances peuvent dépendre des significations de l'angle droit sous-tendues par les situations de référence, des types de problèmes proposés (reconnaissance, production), des variables didactiques qui leur sont appliquées (le caractère spatial ou non des objets, la présence ou non d'instruments). Il en résulte une évolution possible de ces connaissances au cours du cycle : de spatiales initialement, elles peuvent acquérir un « statut » différent, en prenant une forme plus conceptualisée.
Dans l'atelier proposé, nous avons présenté quatre situations issues de notre recherche et les résultats obtenus. Nous avons cherché à expliciter les connaissances sur angle droit auxquelles un élève de cycle 2 peut « raisonnablement » accéder, et celles qui peuvent faire l'objet d'une institutionnalisation. Nous avons soumis à la discussion des participants les conditions permettant de définir une ingénierie didactique cohérente et satisfaisante du point de vue des apprentissages visés.
Nous développons plus particulièrement l'analyse de la situation « Contour de feuille à réparer » dont la présentation s'est appuyée sur le visionnement d'une vidéo tournée dans une classe.

I - DÉROULEMENT DE L'ATELIER

- Présentation de l'équipe et de la recherche.
- Analyse par groupe de deux situations d'apprentissage du cycle 3 : « Rectangle à terminer » (version CM1) et « Triangle à deux angles droits ? » (CM2).
- Analyse par groupe de deux situations d'apprentissage du cycle 2 : « Contour de feuille à réparer » et « Jacquette ».
- Analyse d'une vidéo d'une séance tournée en CE1 dans la classe de Catherine Mazuy (PEMF en CE1 Bourg-en-Bresse) par Georges Combier et Marie-Paule Dussuc.
- Discussion et synthèse.

[1] Henri-Claude ARGAUD, IUFM de Grenoble
Georges COMBIER, IUFM de Lyon
Jacques DOUAIRE, IUFM de Versailles
Marie-Paule DUSSUC, IUFM de Lyon
Gérard GERDIL-MARGUERON, IUFM de Grenoble
Catherine MAZUY, ÉCOLE des Vennes, Bourg-en-Bresse (01)
Cyril VIVIER, École de Coinot, St Rambert d'Albon (26)

II - LA RECHERCHE DE L'ÉQUIPE

L'équipe ERMEL a conduit des recherches sur les apprentissages mathématiques à l'école, d'abord dans le domaine numérique puis géométrique. Le but de la recherche actuelle est d'analyser les compétences spatiales et géométriques que les élèves de l'école primaire, principalement au cycle 2, peuvent construire par l'utilisation conjointe de différents environnements notamment des logiciels de géométrie. Cette recherche conduit à la production de savoirs sur ces apprentissages et à la production de ressources pour les enseignants et les formateurs.

La méthodologie de la recherche comporte :

- une identification des besoins sociaux, notamment le fait que peu de problèmes soient proposés en géométrie et que son enseignement soit souvent réduit à celui du vocabulaire et des tracés ;
- une analyse du savoir géométrique (problèmes, propriétés, …), ainsi que des connaissances spatiales que les élèves ont pu développer ;
- la formulation d'hypothèses sur les apprentissages pour préciser notamment les relations entre les apprentissages spatiaux et géométriques ;
- l'organisation de l'étude des différentes notions spatiales et géométriques sur les trois années du cycle (quels problèmes poser ? pour quel apprentissage ?) ;
- l'élaboration de situations didactiques et leur expérimentation dans plusieurs académies ;
- la rédaction d'un ouvrage pour les formateurs et pour les enseignants du premier degré comportant une explicitation des enjeux des apprentissages et des problématiques de l'enseignement dans ce domaine et parmi les dispositifs d'enseignement expérimentés, les progressions et les situations qui ont été retenues.

Ces composantes sont en interaction : l'identification des potentialités des élèves étant aussi issue des expérimentations menées.

Cette méthodologie et les résultats seront explicités à partir de l'étude de la notion d'angle droit, l'un des nombreux thèmes relatifs aux apprentissages spatiaux et géométriques au cycle 2.

Nous avons choisi d'interroger le groupe sur les connaissances disponibles chez les élèves en partant de situations de cycle 3 sollicitant, pour la production et la validation des solutions, des raisonnements faisant appel à des propriétés, puis en proposant des situations de cycle 2 (CP ou CE1), lorsque les solutions s'appuient sur l'action sur les objets physiques ou spatio-graphiques.

1 Situations du cycle 3 proposées à l'analyse des groupes

Les deux situations du cycle 3 (dont nous donnons une description sommaire ici) sont présentées dans ERMEL Géométrie « Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3 » :

1. La situation « Rectangle à terminer 2 » (CM1)[2] : pour la moitié des groupes.
2. La situation « Triangle à deux angles droits ? » (CM2)[3] : pour l'autre moitié des groupes.

Les questions posées à chaque groupe étaient : « Quels sont les savoirs visés ? » « Quelles sont les procédures attendues ? ». Les échanges ont porté sur :

- des interrogations sur les procédures ;
- la mise en évidence dans « Rectangle à terminer » du caractère non opératoire de propriétés qui sont censées avoir déjà été étudiées dans certaines progressions ;
- la nature théorique du problème dans « Triangle à deux angles droits ? » pour lequel le recours au dessin chez des élèves de CM2 est plus limité que ce que pensaient les participants ;

[2] Présentation du descriptif de la situation en Annexe 1.

[3] La question posée aux élèves dans la situation (*cf* ERMEL, p. 274) étant la suivant : « est-il possible de construire un triangle ayant deux angles droits ? ».

- la question du statut du dessin : constitue-t-il une expérience ou est–il principalement en appui du raisonnement[4] ? En fait « Triangle à deux angles droits ? » est un problème théorique qui permet une argumentation.

Plusieurs questions plus générales, dans nos propositions, ont porté sur l'institutionnalisation :

- Quels termes utilisons-nous régulièrement - traits/droites, angle droit/perpendiculaire - ?
- Quelle définition d'angle droit, de perpendicularité ?
- La situation « Rectangle à terminer 2 » n'est-elle qu'« … *une occasion, pour la notion de droite, de faire faire le lien par les élèves entre des connaissances spatiales (de l'espace sensible), et des connaissances plus conceptualisées* » ?

2 Situations du cycle 2 proposées à l'analyse des groupes

Le choix a été fait d'organiser les activités de l'atelier autour de deux situations, l'une plutôt en début de cycle, l'autre en fin de cycle. La situation « Contour de feuille à réparer », pour laquelle un déroulement dans une classe de CE1 a été filmé, est analysée de façon plus détaillée en Annexe 4. Les questions posées à chaque groupe étaient : « Quels sont les savoirs et connaissances visés ? » « Quelles sont les procédures attendues ? ».

2.1 La situation « Jaquette »

Les élèves ont à produire le rectangle de carton entrant dans l'étui de plastique d'une boîte de CD sous différentes contraintes (le descriptif complet de la situation figure en Annexe 3) :

- ils la fabriquent complètement, mais en disposant de la jaquette originale (duplication) ;
- ils en terminent le tracé qui a déjà été commencé.

Les problèmes les amènent à utiliser différentes procédures qui mobilisent différents savoirs et connaissances qui étaient à inventorier.

Les questions du groupe ont été les suivantes :

- Pourquoi un rectangle presque carré ? Quelles sont les procédures effectives dans l'étape 1 ?
- Est-il important de ne pas transposer les procédures d'adultes sur des élèves de CE1 ?
- Quelle durée pour la situation ?

2.2 La situation « Contour de feuille à réparer »

Les élèves disposent d'une feuille A4 fixée sur le bureau, sur laquelle est dessiné le contour inachevé d'une feuille de bristol A5 ainsi que de pièces faites en papier 60gr, étiquetées A, B, C… et découpées chacune de façon à ce que les extrémités des traits soient en limite de pièce – ces pièces sont donc libres. Les coins dessinés sur ces pièces soit des angles droits, des angles aigus, des angles obtus ; pour une même valeur d'angle, les longueurs des traits sont variables. La question est de savoir si telle ou telle pièce répare comme il faut le coin du contour de la feuille (voir le descriptif de la situation en Annexe 4).

Les procédures et formulations des élèves sont relevées : « Là ça descend, ça dépasse, cette barre … le trait commence à rentrer dans le rectangle : accord sur les critères matériels de validité… » ; le trait droit est déjà reconnu comme ayant des propriétés.

III - REMARQUE SUR LES ÉCHANGES

Questions sur les apprentissages :

- Peut-on encore considérer le spatial comme pré-géométrique ?
- Peut-on considérer qu'il est possible de construire des situations de résolution de problème robustes dans le spatial comme dans le géométrique ?

[4] En Annexe 2 sont présentées des productions d'élèves (ERMEL, 2006, 275).

- Aura-t-on des procédures toujours sous-ensembles de procédures décrites ?

Question sur la gestion de la situation : si les situations sont suffisamment décrites dans le contexte pour éviter de sortir du dispositif ..., quelle autonomie dans l'utilisation de la situation par le maître ?

IV - CONCLUSION : SAVOIRS ET CONNAISSANCES MOBILISÉS AU CYCLE 2

En prenant en compte les résultats que nous avions produits dans la recherche précédente au cycle 3 exemplifiés par l'étude de deux situations, nous nous sommes posé la question des savoirs accessibles à des élèves du cycle 2.

Sur le plan des connaissances des élèves :

- De quelles connaissances disposent-ils (de connaissances spatiales ? de connaissances géométriques ? d'autres connaissances ?) ?
- Ces connaissances sont-elles mobilisables en résolution de problèmes ? Est-il possible de les faire évoluer ? Vers quelles connaissances ?

Sur le plan des moyens pour l'enseignement et les apprentissages : les situations peuvent-elles être aussi « robustes », c'est-à-dire les procédures des élèves sont-elles suffisamment décrites par anticipation pour qu'un enseignant puisse les identifier et favoriser leur évolution ?

1 Quelques exemples de savoirs et connaissances employés par les élèves à travers leurs procédures

1.1 Dans la situation « Jaquette »

A l'étape 1, les élèves tracent le contour du gabarit ou « décalquent ». Les procédures décrites ci-dessous sont employées de façon très variable dans les étapes 2 et 3 :

- le prolongement progressif alternativement des traits jusqu'à leur point de concours :
  - de façon rectiligne,
  - de façon non rectiligne ;
- le prolongement non progressif des traits jusqu'à la zone estimée de leur point de concours et ajustement final « à la main » ;
- le prolongement non progressif des traits au-delà de la zone estimée de leur point de concours ;
- le prolongement de chaque trait à longueur du trait opposé, et ajustement du point de concours à l'estimation ;
- le prolongement d'un trait à longueur du trait opposé, et jonction de son extrémité à l'extrémité du trait incomplet.

L'utilisation des longueurs n'est ici pas nécessaire et pourtant des élèves l'utilisent quand même. Les procédures progressives nous semblent bien correspondre aux connaissances disponibles chez les élèves. La troisième procédure est très peu employée.

A l'étape 4, notamment si les règles graduées son absentes, des élèves ont recours :

- à un positionnement du sommet cherché au jugé, suivi de réajustements ;
- à une construction des côtés au moyen des longueurs (mais sans mesurage), avec des bords d'outils qui font l'enveloppe de la jaquette ;
- à une construction d'un côtés au moyen de l'angle droit.

L'angle droit est identifié à travers les instruments de la boîte à outils qui sont choisis : les rectangles et carrés sous transparent (instruments peu commodes malgré tout car davantage propices au contrôle d'angle droit qu'à la production) ; les rectangles et carrés en gabarit ; les « équerres » mises à disposition sont assez peu utilisées.

1.2 Dans la situation « Contour de feuille à réparer »

A l'étape 1, les procédures observées sont les suivantes :

- une décision au jugé (appréciation visuelle), sans essai de mise en correspondance effective traits des secteurs / traits du contour – avec ou sans réorientation des objets (contour ou pièces) ;
- un positionnement bout à bout des extrémités des secteurs avec les extrémités du contour – pour obtenir un contour (fermé) : obtention de « pointe » ;
- le positionnement d'un des traits de la pièce en superposition avec un trait du contour et essai d'ajustement de la superposition ou non des deux autres traits ;
- un positionnement simultané en superposition des deux traits de la pièce avec les deux bords du contour.

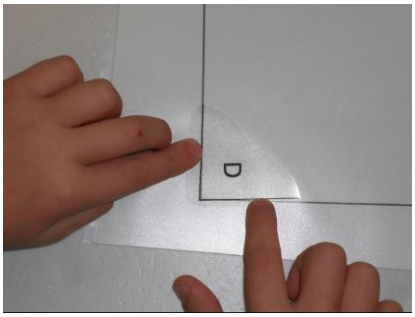
On constate que ces procédures mettent en jeu :

- l'angle droit, comme propriété particulière d'un coin de rectangle ;
- l'identité des coins d'un rectangle du point de vue de l'angle ;
- la contiguïté de traits (la propriété d'avoir une extrémité commune) ;
- la rectitude d'une ligne plane.

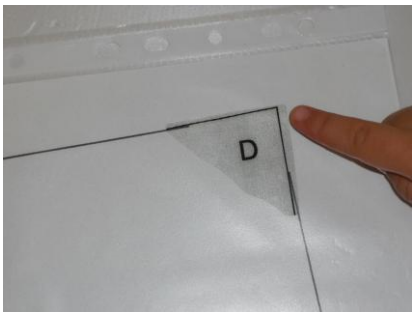
Ces propriétés sont mobilisées comme outils de solution. La contiguïté et la rectitude sont aussi utilisées fortement comme critères de validité.

Pour une pièce qui ne répare pas comme il faut, par exemple la pièce D :

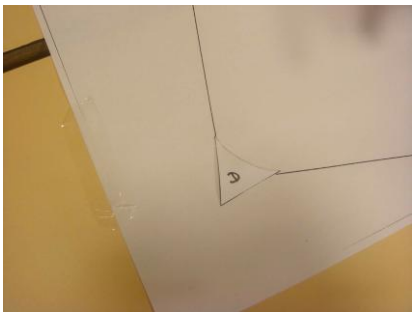
- positionnement d'un des traits de la pièce superposé avec un côté du rectangle, et positionnement implicite du sommet de la pièce sur le prolongement rectiligne de l'autre côté du rectangle, ce qui fait que le trait de la pièce est « rentrant » :



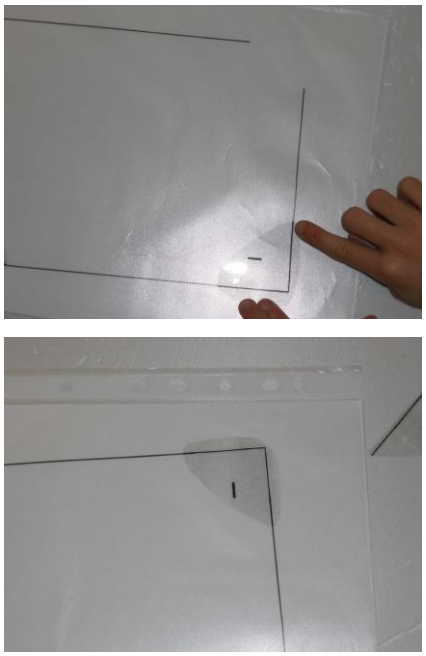
- positionnement de la pièce de façon à obtenir une forme qui ait l'aspect global d'un rectangle (implicitement le sommet est placé « correctement ») :



- positionnement de la pièce de façon à obtenir une forme qui ait l'aspect global d'une figure fermée :



A l'étape 1 pour une pièce qui répare comme il faut, par exemple la pièce I : le contrôle de « conformité » de la pièce avec un coin matérialisé du rectangle (Figures 1), puis le positionnement d'un de ses traits en prolongement rectiligne d'un côté du rectangle - avec contrôle de parallélisme de son second trait avec le côté du rectangle (Figure 2) - et enfin son positionnement (correct) au coin à réparer.



Figures 1

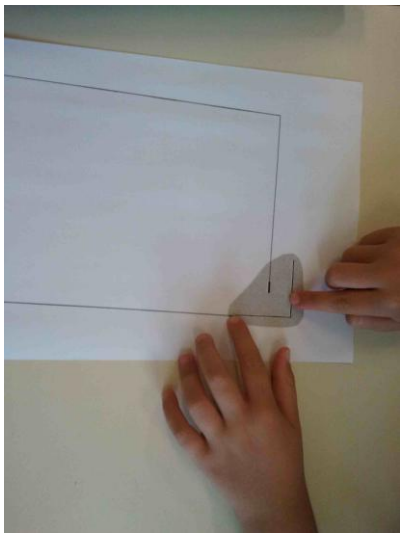


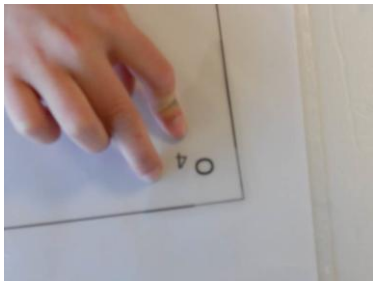
Figure 2

A l'étape 2, deux procédures ressortent :

- l'application d'une procédure précédente pour tous les coins ;
- l'application d'une procédure précédente pour un coin, ou pour deux coins avec induction pour les autres coins.

Cette dernière procédure est encore assez peu utilisée, mais la succession des problèmes posés la favorise. Les élèves la manifestent d'abord en acte ; ensuite dans les phases de verbalisation, ils parviennent à dire : « Si une pièce répare un coin, elle répare tous les coins ».

A cette étape où la comparaison directe est encore possible, cet élève compare la pièce aux coins 3 et 4 :





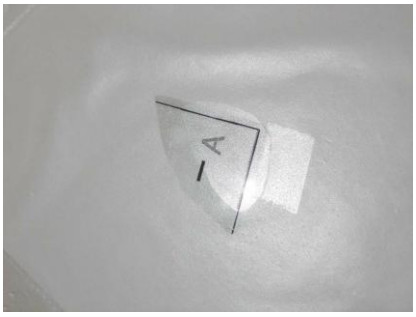
Les élèves comparent la pièce à tous les coins, comparent à deux ou trois coins ; quelques uns comparent à un seul coin. Mais cette étape d'action est utile à l'étape 5 où le but est d'institutionnaliser. Par ailleurs, en fin d'étape, il y a peu de réponses erronées.

A l'étape 3, la comparaison de la pièce aux différents coins n'est plus possible. Les élèves font :

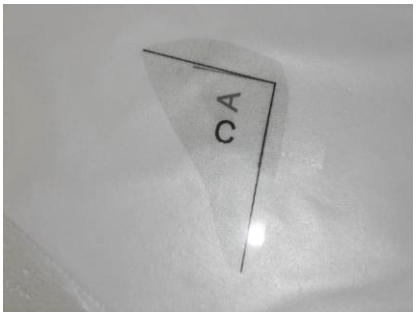
- une comparaison au jugé (appréciation visuelle de l'angle) ;
- la comparaison de la pièce problème à toutes les pièces des étapes précédentes qui réparent ;
- la comparaison de la pièce problème à une (ou deux) pièce(s) des étapes précédentes qui répare(nt) et complète(nt) leur conclusion par induction.

Comme les élèves disposent d'un nombre conséquent de pièces - plusieurs pièces problème et des pièces angle droit – certains d'entre eux commencent par espacer les pièces sur leur table à les disposer le plus possible en orientation H/V, et ils effectuent un premier tri, au jugé, qui leur permet d'éliminer les pièces qui, à coup sûr, ne conviennent pas.

Les productions d'élèves ci-dessous attestent d'une comparaison des pièces deux à deux :



Une pièce qui convient (I)



Une pièce qui ne convient pas (C)

On peut penser qu'ils mobilisent une connaissance comme : « Si une pièce répare, et si une autre pièce se « superpose » à celle-ci, alors cette pièce répare aussi ». L'angle apparaît comme un invariant commun à plusieurs secteurs plans.

A l'étape 4, lorsque les instruments de la boîte servent d'intermédiaires, ce sont essentiellement les rectangles et carrés sur transparent ou en gabarit qui sont employés ; les élèves renforcent à cette occasion la connaissance selon laquelle :

- ils peuvent utiliser un angle indifférent d'un rectangle ou d'un carré ;
- ils peuvent utiliser l'un quelconque des rectangles de formes différentes, l'un quelconque des carrés de taille différentes.

Ainsi l'angle droit est introduit comme un invariant de l'espace, et se rattache en particulier à des polygones plans, et à des instruments qui deviendront de référence.

De même, les élèves renforcent leur connaissance du rectangle et du carré : il leur apparaît que des polygones ont des propriétés particulières :

- « Si une pièce répare un coin, elle répare tous les coins » : cela permet aux élèves d'approcher le fait que les angles d'un rectangle sont égaux.
- « L'angle droit est une propriété commune à deux rectangles différents ».
- « Plusieurs instruments de la boîte possèdent un angle droit ».

Les connaissances mobilisées pourraient se classer en trois catégories en fonction de leur mode d'explicitation :

- les connaissances qui s'expriment par des actions sur des objets, par des gestes… ;
- les connaissances qui s'expriment par du langage verbal ;
- les connaissances qui s'expriment de façon mixte (langage et gestes).

Elles peuvent aussi se classer selon qu'elles sont :

- spatiales (liées à l'espace usuel environnant) ;
- spatiales graphiques (liées à l'espace graphique de la feuille, mais tout en restant spatiales) ;
- « pré-géométriques » au sens où elles sont les premières connaissances déclarées, « transcontextualisées » (communes à plusieurs « contextes » comme des rectangles de formes différentes, des rectangles et un carré ou un triangle rectangle), voire quelque peu décontextualisées.

Aussi il nous semble nécessaire d'expliciter les connaissances spatiales en jeu réellement au cycle 2 dans la résolution de problèmes et les différentes activités ou expériences spatiales. Par ailleurs le passage d'une action sur des objets à celle sur leur représentation spatio-graphique doit faire aussi l'objet d'un apprentissage.

V - BIBLIOGRAPHIE

ARGAUD H-C. (1998) Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géomètre. Thèse : Université Joseph Fourier Grenoble 1.

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1992) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse : Université Bordeaux 1.

BROUSSEAU G. (1998) Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

DOUADY R. (1986) Jeu de cadres et dialectique outil-objet, *RDM*, **7-2**, 5-31. Grenoble : La Pensée Sauvage.

ERMEL (2006) Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3. Hatier.

LABORDE C. (1990) L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques, *RDM*, **9-3**,337-364. Grenoble : La Pensée Sauvage.

VI - ANNEXES

1 Annexe 1 : « Rectangle à terminer 2 » (CM1)[5]

1.1 Description rapide

Dans la progression sur le thème de la perpendicularité, la situation « Rectangle à terminer 2 » arrive après une série de situations qui ont permis à l'élève de rencontrer l'angle droit dans différents contextes, et après l'institutionnalisation du langage correspondant et celle des différentes procédures instrumentées caractéristiques de l'angle droit. Elle reprend le contexte de la situation « Rectangle à terminer 1 », mais le côté de l'angle droit à construire n'a plus d'extrémité commune avec le côté fourni.

La situation « Rectangle à terminer 1 » avait pour objectif la mobilisation de connaissances spatiales sur l'objet rectangle pour approcher l'angle droit alors que « Rectangle à terminer 2 » utilise les connaissances des élèves sur l'angle droit pour approcher la notion de droites perpendiculaires.

« Rectangle à terminer 2 » peut être utilisée en début de CM1 quand les situations précédentes ont été réalisées en CE2. Dans ce cas, pour une reprise de contact avec l'angle droit et le concept de perpendicularité, il est important de proposer auparavant la situation « Rectangle à terminer 1 » telle qu'elle est décrite dans l'additif[6].

Objectifs

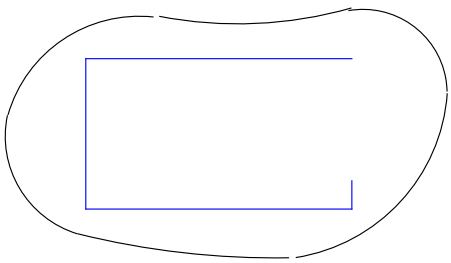
Renforcer la perception de la relation de perpendicularité comme invariant de positions spatiales de segments.

Aborder la relation de perpendicularité entre droites (traits, segments) en construisant un angle droit à partir de segments (traits) n'ayant pas d'extrémité commune.

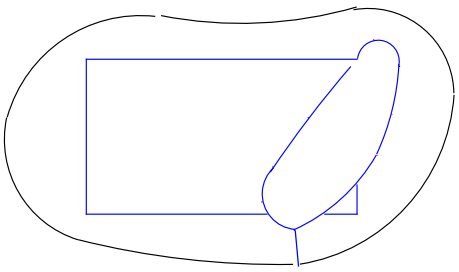
Renforcer la nécessité du recours à l'instrument pour construire deux segments perpendiculaires et vérifier s'ils le sont effectivement.

Problème

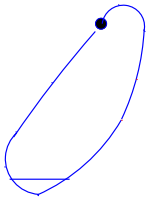
Le problème est analogue à celui de la situation « Rectangle à terminer 1 » ; il s'agit de terminer un rectangle, dessiné sur une feuille à bords arrondis, comme indiqué sur le Dessin 1. Cette feuille est ensuite découpée en deux parties comme indiqué ci-après (Dessins 2 et 3 – pour évider la partie correspondant au Dessin 3, il est plus commode de partir du bord de la feuille avec les ciseaux comme indiqué sur le Dessin 2). La feuille conservée par le maître (Dessin 2) comporte un vide correspondant à la feuille de travail de l'élève. Sur sa feuille de travail (Dessin 3), l'élève doit donc construire le morceau manquant du côté en ne disposant pas du coin du rectangle mais en disposant d'un point du côté à terminer.



Dessin 1



Dessin 2



Dessin 3

[5] Extrait de (ERMEL, 2006).

[6] Voir additif à la situation « Rectangle à terminer 1 » (ERMEL, 2006,193-196).

Le problème posé consiste donc à construire un segment perpendiculaire à un segment donné sans extrémité commune avec ce dernier.

Matériel

Pour la classe : un rectangle référence Rr de dimensions 18 x 27 cm (fiche 1) à reproduire sur une feuille de papier découpée dans une feuille A3 suivant des bords non rectilignes ; il est le même pour les trois phases de la situation. Les dimensions du rectangle de base doivent permettre l'utilisation de l'équerre.

Par équipe de deux :

- la boîte à outils pour la géométrie ;
- un crayon à papier et un feutre assez épais de façon à atténuer les problèmes de précision lors de la validation ;
- deux rectangles à terminer de mêmes dimensions (fiches 2 et 3) à reproduire sur une feuille A3 dont les bords seront découpés suivant des lignes courbes comme décrits ensuite (sans les lettres !)… *Bien s'assurer que, suite aux photocopies, le rectangle référence et le rectangle à terminer restent superposables. Les maîtres qui le souhaitent peuvent agrandir les fiches pour travailler avec des formes de dimensions plus importantes et gêner davantage les procédures perceptives.*

La situation est décrite avec un exemplaire de chacune des deux parties (cf. dessins 2 et 3) par équipe. Pour économiser les photocopies, il est possible de n'utiliser qu'une seule partie témoin gardée par le maître et de ne photocopier que les parties données aux élèves. Il faut alors faire très attention au découpage pour pouvoir reconstituer le puzzle au moment des validations.

Sur les fiches, les lignes de découpage ne sont pas tracées pour éviter des contraintes et faciliter celui-ci ! Seuls deux points du côté fourni et le sommet correspondant au côté à terminer sont à respecter rigoureusement pour le découpage. Il faut veiller à ce que ce dernier point soit bien évident sur la feuille de travail de l'élève. Si nécessaire, on l'agrandira au feutre.

Ne pas oublier de supprimer les titres des fiches avant de les reproduire pour éviter toute orientation induite de la feuille…

Procédures observées

Procédure 1 – Dessin du côté, en référence à la forme globale, sans mettre en jeu la perpendicularité.

Procédure 2 – Dessin du côté avec utilisation perceptive de la perpendicularité.

Procédure 3 – Dessin du côté avec utilisation instrumentée de la perpendicularité, par le moyen de deux règles transparentes graduées, positionnées de façon à reconstituer un coin de rectangle en dehors de la partie fournie.

Procédure 4 – Dessin du côté avec utilisation instrumentée de la perpendicularité, par le moyen d'un rectangle de référence (celui de la boîte à outils ou un autre disponible dans la classe : affiche, boîte, …).

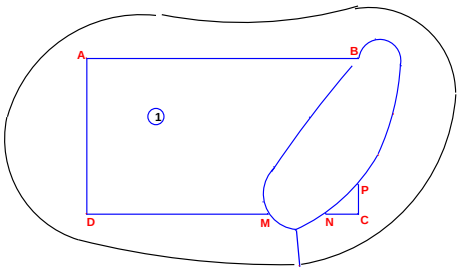
Procédure 5 – Dessin du côté avec utilisation instrumentée de la perpendicularité par le moyen de l'équerre (éventuellement prolongée par une règle si elle n'est pas assez grande).

Procédure 6 – Dessin du côté avec utilisation instrumentée de la perpendicularité par le moyen d'une feuille annexe glissée sous la feuille de travail (de façon à prolonger le trait donné) et de l'équerre.

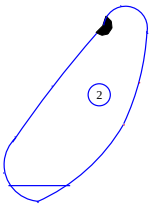
1.2 Déroulement de la première phase : quand on est tout prêt du petit coin…

Problème

Pour le rectangle R1, construire la partie [BP] du côté [BC], connaissant la partie [MN] du côté [DC] et le point B.



Partie 1 : gardée par le maître



Partie 2 : feuille de travail de l'élève

Les distances NC et PC sont petites de façon à faciliter la reconstitution mentale du coin du rectangle. Le segment [MN] est dessiné sur la partie 2 donnée à l'élève. Le point correspondant à B doit être bien matérialisé et mis en évidence (couleur) pour la compréhension du problème. Les instruments de la boîte de géométrie sont tous disponibles.

Le découpage de la partie 2 est délicat ; il est nécessaire de partir du bord de la feuille arrondie pour rejoindre le morceau correspondant à la feuille de travail de l'élève. Il faut aussi veiller à ce que le découpage passe bien par les points M et N mais surtout qu'il passe par le point B avec une grande précision et qu'il évite le point P ! *Attention : aucune lettre ne figure sur les dessins fournis aux élèves ; elles ne sont utilisées que pour faciliter la présentation du matériel dans cette fiche de préparation !*

Procédures attendues

Ce sont les procédures 4 et 5 qui sont visées dans cette phase. La difficulté de concevoir la perpendicularité pour deux segments sans extrémité commune va probablement entraîner un retour des procédures de type perceptif (procédures 1, 2 et 3). La procédure 3 peut être une procédure pertinente si les règles sont de « vrais » rectangles, à bords et coins non arrondis…

Etape 1 : mise en place et communication du problème

Les élèves travaillent par deux. Chaque équipe est désignée par une lettre : A, B, C… Les rectangles à terminer R1 sont désignés du nom des équipes A, B, C… écrit au recto sur le bord de la feuille de chacune des deux parties.

Le maître montre le rectangle référence Rr puis le fixe au tableau, dans une position quelconque, côtés non parallèles aux bords du tableau. Puis il montre le rectangle R1 en disant : « On a commencé à reproduire le rectangle affiché. Trois côtés sont déjà dessinés. Il reste ce côté à terminer (il montre [BC]). » Le maître découpe ensuite au vu de tous ce rectangle suivant un contour correspondant à la partie 2, montre chacune des deux parties puis les fixe au tableau en position quelconque.

Les autres rectangles ayant été découpés auparavant par le maître pour gagner du temps, leurs parties 2 sont présentées aux élèves puis distribuées à chaque paire. Le maître fixe toutes les parties 1 au tableau en veillant à en installer peu en position « horizontale/verticale ». Il amène ensuite les élèves à reformuler le problème en veillant à ce que chaque équipe perçoive le rôle du point figurant sur chacune des parties 2. Si besoin, il place à nouveau la partie 2 dans la partie 1 du rectangle affiché.

Etape 2 : recherche

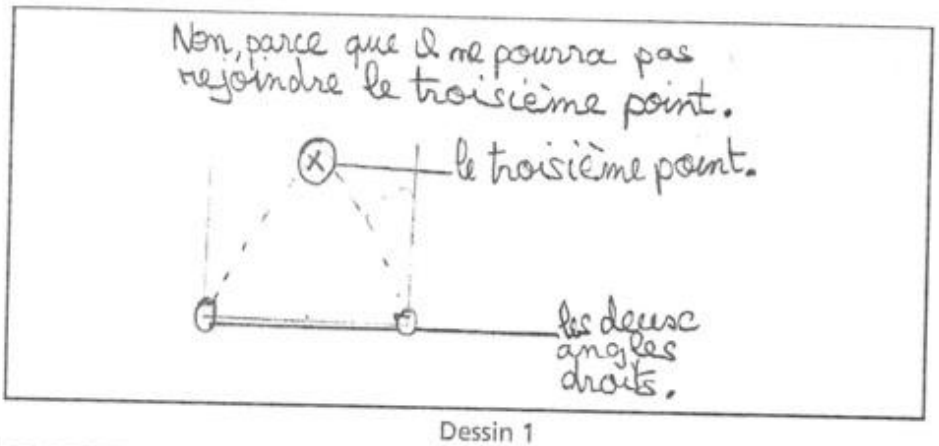
Pendant la phase de recherche, les élèves peuvent faire leurs essais au crayon mais ils devront faire leur production définitive au feutre.

Etape 3 : bilan

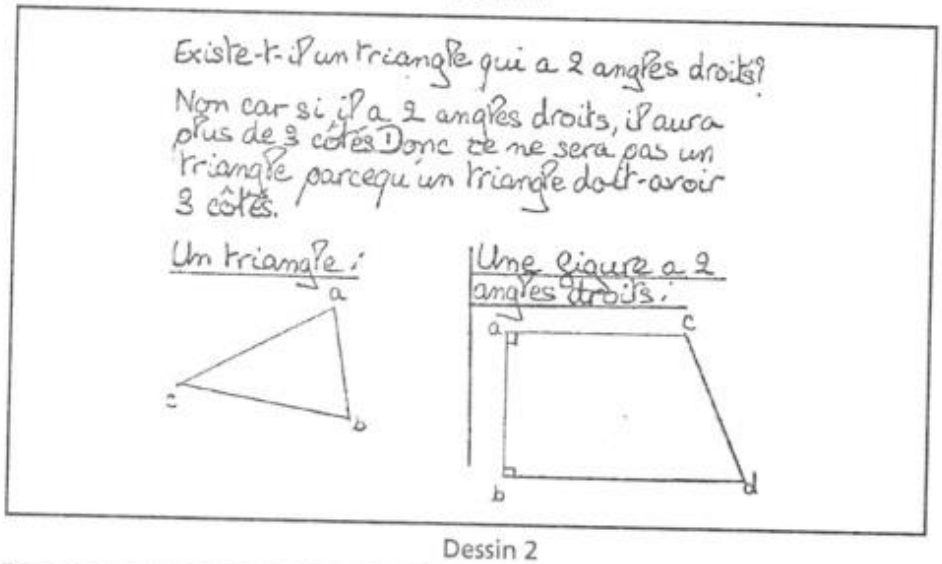
Le maître affiche les productions correspondant aux parties 2 en demandant aux élèves de repérer les productions qui conviennent et de noter leurs lettres sur un brouillon. Puis il envoie deux élèves les classer (« bons » d'un côté, « pas bons » de l'autre, « on ne sait pas » au milieu). On ne vise là que des réponses établies perceptivement du type « C'est bon ! », « C'est pas bon ! », « On ne peut pas dire, c'est presque bon ! »…

Dans cette première phase, la mise en commun sera rapide et conduite en termes de réussite ou non-réussite sur les productions. L'explicitation des procédures n'est pas un objectif de cette phase, mais elle peut surgir lors du classement des productions tout comme le besoin de valider ou d'invalider avec l'équerre.

2 Annexe 2 : « Le triangle à deux angles droits ? » (CM2)



Dessin 1



Dessin 2



Dessin 3

3 Annexe 3 : « Jaquette de boîte de CD »

La situation est construite autour d'une boîte de CD, avec feuille de dessus, carrée ; son ruban ; son fond : sa jaquette. Les élèves disposent d'une boîte à outils.

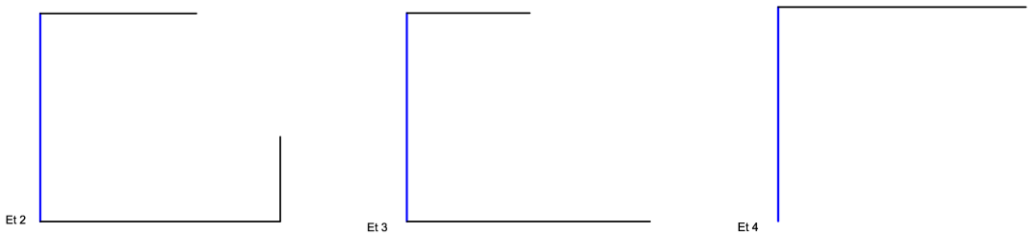
La situation s'organise en plusieurs étapes, dont la première a pour but de faire approprier par les élèves les données de la situation et ce qu'il leur faudra produire. Au cours de cette première étape, ils disposent de :

- une boîte de CD, fermée par un morceau d'adhésif, sans sa jaquette ;
- la jaquette, libre, rectangulaire (13.7 x 12.6) ;
- une feuille de papier à bords quelconques, avec le dessin du ruban (de largeur celui de la jaquette) ;
- la boîte à outils sans les ciseaux, mais avec calque.

Il leur est demandé : « Dessine sur la feuille de papier la jaquette pour le fond de la boîte ».

Dans les étapes suivantes, la jaquette « modèle » n'est plus disponible ; les élèves disposent d'un dessin inachevé de la jaquette, et le problème devient : « Termine le dessin de la jaquette pour le fond de la boîte ». La situation s'organise alors autour de deux variables principales :

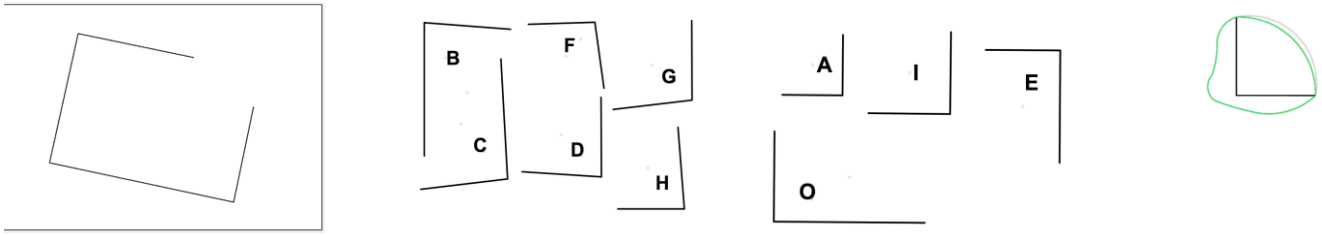
- la partie du contour à réparer :



- les outils à disposition : dorénavant donc, dans ces étapes, la boîte à outils est fournie sans ciseaux, ni calque, mais avec règles graduées ou bien sans règle graduée ; cette variable est très sensible dans la mesure où les élèves (en raison des usages familiaux, scolaires, des apprentissages effectués à l'école) utilisent très fortement ces outils et donc le mesurage pour résoudre les problèmes. Le fait de n'autoriser que des règles non graduées a pour but de faire mobiliser l'angle droit par les élèves comme outil de solution, même si le report de longueur est encore possible.

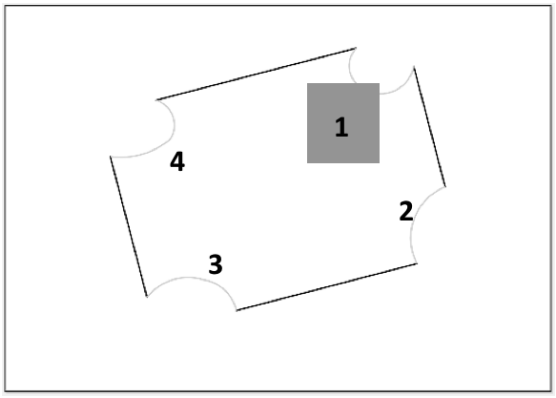
4 Annexe 4 : « Contour de feuille à réparer »

Les élèves disposent d'une feuille A4 fixée sur le bureau, sur laquelle est dessiné le contour inachevé d'une feuille de bristol A5, de pièces faites en papier 60gr, étiquetées A, B, C…, et découpées chacune de façon à ce que les extrémités des traits soient en limite de pièce – ces pièces sont donc libres. Les coins dessinés sur ces pièces sont des angles droits, des angles aigus, des angles obtus ; pour une même valeur d'angle, les longueurs des traits sont variables.



Au cours de la première étape, le problème suivant est donné : « Est-ce que la pièce I (respectivement B, puis G), répare comme il faut le coin du contour de la feuille ? ». La question est posée successivement pour différentes pièces. En fin de séance, des gommettes vertes sont collées sur les pièces qui réparent « comme il faut ».

Dans la seconde étape, sont donnés : un contour, fixé sur le bureau, inachevé aux quatre coins (numérotés), ainsi que des pièces problème choisies dans le lot précédent, libres, et données successivement.



L'élève doit répondre à quatre questions :

- Est-ce que la pièce C répare comme il faut le coin 1 ?
- Est-ce que la pièce C répare comme il faut le coin 2 ?
- Est-ce que la pièce C répare comme il faut le coin 3 ?
- Est-ce que la pièce C répare comme il faut le coin 4 ?

Dans la troisième étape, les pièces des étapes précédentes qui réparent (elles ont une gommette verte), ainsi que des pièces problème sont données. Il faut que l'élève décide si ces dernières réparent. Toutes les pièces sont libres. Contrairement aux étapes précédentes, le contour n'est pas donné.

La quatrième étape doit être l'occasion pour les élèves de chercher des équivalents angle droit dans la boîte à outils. Les élèves en disposent, comme du contour incomplet, et de pièces problème. Les procédures attendues sont celles des étapes précédentes. Nous sommes intéressés par les instruments choisis pour établir la comparaison, au cas où ils sont employés : ce sont essentiellement les rectangles et les carrés (sur transparent ou en gabarit de bristol). Il s'avère beaucoup moins nécessaire d'effectuer la comparaison pour les quatre coins de tels instruments : un ou deux suffisent en général.

La cinquième étape est consacrée à une institutionnalisation.

Enfin, les différentes étapes peuvent être reprises avec le carré.

UN PROBLÈME OUVERT EN GÉOMÉTRIE POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS ?

Carine REYDY
FORMATRICE, ESPE D'AQUITAINE
Carine.Reydy@espe-aquitaine.fr

Grégory TRAIN
FORMATEUR, ESPE D'AQUITAINE
Gregory.Train@espe-aquitaine.fr

Patrick URRUTY
FORMATEUR, ESPE D'AQUITAINE
Patrick.Urruty@espe-aquitaine.fr

Résumé
Cet atelier a pour objectif d'amener les participants à interroger les stratégies de formation des enseignants du premier degré concernant l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Il s'agit, à partir d'une activité de résolution de problème en géométrie mise en place dans deux classes de CM, de questionner son exploitation possible en formation initiale ou continue des enseignants :
- quelles sont les potentialités de ce type de situation en formation ?
- comment structurer une séance de formation autour de cette proposition d'activité ?
- quels objectifs peut-on lui assigner, notamment du point de vue de la construction des gestes professionnels liés à la récupération de l'activité de l'élève ?
Ce questionnement permettra d'interroger plus largement les critères qui orientent la construction d'une situation de formation prenant appui sur un problème ouvert en géométrie.

I - POINT DE DÉPART

Dans cet atelier, nous proposons d'entamer un premier questionnement sur les conditions et contraintes pesant sur la mise en place d'une stratégie de formation relevant de l'homologie et engageant des formés dans l'étude d'un problème ouvert de géométrie.

Les problèmes ouverts occupent une place de choix à l'école. En témoigne l'existence d'un vocabulaire institutionnel pluriel : *problème pour chercher, problème ouvert, situation problème, problème de recherche, tâches complexes…*[1] En témoignent également les préconisations formulées dans les programmes scolaires, qui semblent, dans une certaine mesure, entrer en résonance avec ce type de problèmes : « *Les problèmes inédits dont la résolution demande des prises d'initiatives d'un autre ordre […] prendre des initiatives, formuler des hypothèses, apprendre à les prouver* » *(le nombre au cycle 3)* « *savoir organiser des informations numériques ou géométriques, justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat* » *(socle commun).*

Pour le formateur, la volonté d'outiller les enseignants pour qu'ils puissent faire vivre de tels problèmes dans leurs pratiques n'est pas déraisonnable. L'orchestration de stratégies d'homologie de formation, dans lesquelles, en première approximation, "*le formateur utilise (ou tente d'utiliser) un modèle de transmission identique à celui qu'il souhaite voir utiliser par ses étudiants lorsque ceux-ci*

[1] Nous sommes bien conscients que la littérature de recherche s'efforce de tracer des frontières plus nettes entre ces différents objets. Reste que d'un point de vue institutionnel, cela ne semble pas exactement le cas.

enseignent dans des classes élémentaires" (Kuzniak 1994) est une trajectoire qui apparaît *a priori* séduisante.

Dès 1994, Kuzniak, dans ses travaux de thèse, théorise les stratégies d'homologie. Ces stratégies, permettant de transmettre simultanément du savoir mathématique et des connaissances liées à l'enseignement[2] semblent avoir trouvé depuis un écho favorable dans les pratiques des formateurs.

Différentes possibilités sont exhibées par Kuzniak quant au choix de la situation à l'étude : « *une situation identique pour les élèves et les étudiants - une situation à destination des étudiants plus complexe mais aisément transférable - une situation à destination des étudiants peu susceptible d'un transfert simple en classe.* » Mais au delà de ce choix, les nombreux exemples de situations d'homologie, véhiculés en particulier par la COPIRELEM, semblent également souligner une appétence marquée pour des situations relativement consistantes (voire résistantes aux formés).[3] Les problèmes ouverts apparaissent dès lors répondre assez favorablement à ce critère.

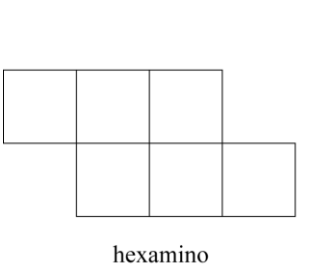
Dans cet atelier, nous questionnons les conditions qui pèsent sur une telle stratégie de formation pour viser son efficience. Dans cette stratégie, dans laquelle un changement de point de vue du formé est nécessaire, à la fois en position d'élève, puis amené à prendre du recul et à penser comme le maître, nous questionnons la manière dont le formateur est susceptible d'accompagner les formés dans ce changement de point de vue. Nous interrogeons également les connaissances mathématiques construites (chez les formés et chez ses élèves) dans cette stratégie d'homologie *directe* de formation (*i.e.* dans laquelle le type de problème étudié est le même que celui étudié à l'école).

II - TRAVAIL CONDUIT EN AMONT DE L'ATELIER

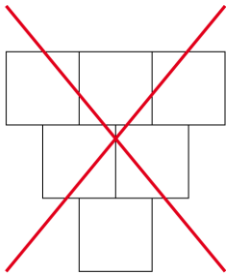
Avant de détailler le déroulement de l'atelier, voici le problème ouvert qui a fait l'objet du travail présenté ici et la description du dispositif expérimental que nous avons préalablement mis en place pour en étudier les potentialités.

1 Le problème

Un *hexamino* est une figure plane obtenue en juxtaposant 6 carrés identiques selon la règle suivante : chaque carré doit être collé à au moins un des autres carrés par un côté (entièrement) commun.



hexamino



non hexamino

Problème : il faut trouver le plus possible d'hexaminos différents.

2 Le scénario de formation préalablement expérimenté

Deux enseignantes aux profils différents se sont prêtées au jeu pour la mise en place du scénario de formation que nous avions conçu. D'une part Agnès, professeur des écoles depuis 5 ans, qui enseigne dans une classe de CM1 en ZEP[4]. Deux élèves de CLIN[5] sont en inclusion dans sa classe

[2] Ces connaissances peuvent également relever de l'organisation particulière de la classe (pour favoriser le débat au sein de la classe, etc...)

[3] Au profit de situations plus simples qui risquent d'infantiliser les étudiants et provoquer leur rejet.

[4] ZEP : Zone d'Education Prioritaire

[5] CLIN : CLasse d'INitiation pour non-francophones

pour les mathématiques. La plupart de ses élèves sont issus de classes sociales modestes (voire défavorisées). Stéphanie, d'autre part, est professeur des écoles depuis 17 ans. Elle est titulaire du CAFIPEMF depuis un an. Elle enseigne dans une classe de CM2 dont la majorité des élèves proviennent d'un milieu socio-culturel relativement aisé.

2.1 Étape 1 : la séance de formation

Dans un premier temps, les deux formées ont participé à une séance de formation d'une demi-journée, que nous qualifions de "en laboratoire" et dont voici une retranscription succincte.

Les formées ont à leur disposition différents matériels (papier uni, papier quadrillé recto, papier quadrillé recto-verso, grilles 6×6, Lokons[6], ciseaux). Les formateurs exposent le problème qu'elles commencent à résoudre sans connaître au départ le nombre de solutions. Il sera annoncé en cours de recherche. Après quelques minutes de recherche individuelle, elles choisissent rapidement de poursuivre à deux.

Lorsqu'après 40 minutes, les formateurs interrompent la recherche, 30 solutions ont été exhibées par les formées. Sur l'affiche répertoriant les 35 solutions qui leur est proposée, elles identifient les 5 solutions manquantes après avoir superposé celles qu'elles ont trouvées avec les hexaminos de l'affiche.

Les formateurs interrogent alors les formées : « *Utiliseriez-vous ce problème en classe, et si oui, de quelle manière ?* ». Les deux enseignantes s'accordent sur le fait que c'est un « bon problème pour apprendre à organiser une recherche ». Mais les objectifs dégagés, qualifiés de « méthodologiques » ou « transversaux », restent assez flous. Stéphanie s'interroge sur l'existence d'un outil mathématique (une formule ?) qui permettrait de prévoir le nombre de solutions. Agnès, quant à elle, s'inquiète au sujet de l'étayage matériel qu'elle pourra apporter à ses élèves en difficulté.

Les formateurs interrogent à nouveau les formées : « *Quelle place accorderiez-vous à ce problème dans votre programmation en mathématiques ?* ». Stéphanie conçoit l'affiche obtenue en fin de recherche comme un support qui permettrait de travailler la distinction entre aire et périmètre. Les formateurs proposent comme deuxième piste les patrons de cubes. Les formées réalisent alors que l'on peut retrouver tous les patrons de cubes parmi les 35 hexaminos. Les formateurs proposent alors comme troisième piste la symétrie. Stéphanie suggère de faire chercher aux élèves, parmi les 35 hexaminos, ceux qui ont un axe de symétrie et ceux qui n'en ont pas. Les formateurs pointent également le fait que lorsqu'on cherche à repérer les doublons, on est amené à identifier des figures symétriques l'une de l'autre.

À l'issue de la discussion, Agnès se propose de prolonger l'activité par un travail sur la symétrie dans le repérage des doublons. Stéphanie souhaite compléter la résolution du problème par la recherche des patrons du cube. Elle entrevoit une façon de « rentabiliser » le travail de recherche initial : le support obtenu en classe à l'issue de la résolution du problème pourra servir à plusieurs reprises (distinction entre aires et périmètres, patrons, symétrie).

2.2 Étape 2 : observation des formées en classe

À partir des pistes ouvertes à l'issue de la séance, chacune des deux enseignantes a mis en place une séquence dans sa classe que les formateurs sont venus filmer. Il a été convenu entre les participants que les formateurs n'interviendraient pas pendant le déroulement des séances et qu'aucune discussion sur le contenu des séances n'aurait lieu entre les formateurs et les formés avant la fin de la séquence.

[6] matériel de construction constitué de trois types de formes géométriques (triangle équilatéral, carré, pentagone régulier) dont l'assemblage permet la réalisation de solides.

2.3 Étape 3 : analyse en deux temps

Une première analyse « à chaud » a été menée avec chacune des deux enseignantes à l'issue de la séquence de classe. Une seconde analyse a été faite entre les formateurs sur l'impact réel de la séance de formation sur la mise en œuvre pratique.

III - DÉROULEMENT DE L'ATELIER

1 Consigne pour les participants

Après avoir exposé le problème aux participants de l'atelier, les formateurs ont donné la consigne suivante : *« Proposez sur une affiche un scénario de formation de 3 heures basé sur l'exploitation de ce problème en précisant les objectifs de formation, le matériel proposé, la trame de la séance, etc… »*

2 Mise en commun

Après 45 minutes de recherche par groupes, les participants ont dans un premier temps décrit leurs propositions. Dans un second temps, les formateurs ont exposé le dispositif qu'ils avaient mis en place auprès des deux enseignantes volontaires et l'analyse qu'ils en ont faite, ce qui a permis aux participants de questionner les propositions issues de leur propre travail de groupe.

Les échanges menés lors de la mise en commun ont permis d'aborder les points suivants.

2.1 Les choix matériels

Lors de la séance de formation conduite avec les deux professeurs des écoles, les formateurs avaient apporté plusieurs types de supports :

- feuilles quadrillées (format A4),
- feuilles quadrillées recto-verso (format A4),
- fiches de petit format comportant un support quadrillé 6x6 (permettant a priori de dessiner un seul hexamino),
- carrés issus du matériel LOKON (permettant d'assembler et de défaire rapidement des hexaminos).

Aux yeux des formateurs, cette richesse matérielle aurait dû inciter les professeurs des écoles à faire ensuite, lors de la conception de leur séance, un choix parmi un éventail de supports, afin de s'adapter à la classe et d'envisager éventuellement des modalités de différenciation.

Dans les faits, les formées ne se sont pas nettement déterminées sur le choix d'un support à proposer aux élèves. Dans la classe d'Agnès en particulier, tout le matériel listé ci-dessus avait été préparé et était disponible lors de la recherche. Cette décision a entraîné plusieurs effets pervers :

- l'utilisation de matériels différents rend plus difficile la collecte des hexaminos trouvés dans chaque groupe ;
- l'attrait pour les pièces du Lokon détourne les élèves du problème initial et les incite à « jouer ».

Finalement, la mise en œuvre en classe de la phase de recherche a été très proche de celle vécue en situation de formation par homologie. Il a sans doute manqué lors de cette formation un temps spécifique pour étudier l'intérêt et les limites de chaque type de matériel, ce qui aurait pu conduire les enseignantes à faire un choix éclairé lors de la mise en œuvre en classe.

2.2 L'annonce du nombre total de solutions

Lors de la situation de formation avec les deux enseignantes, le nombre total de solutions avaient été annoncé en cours de recherche par les formateurs, afin de relancer l'activité.

Lors de la mise en œuvre en classe, l'une des formées n'a pas perçu ce levier pour redynamiser la recherche : elle n'a, à aucun moment, indiqué à ses élèves le nombre total d'hexaminos. Ainsi, dans

chaque groupe, les élèves ont abandonné la recherche lorsqu'ils ont obtenu une collection « suffisamment grande » sans chercher à persévérer davantage.

Ainsi, il aurait fallu lors de la séance de formation expliciter la décision de communiquer le nombre de solutions, pour ne pas la laisser à l'état d'implicite et conduire les professeurs des écoles à prendre conscience de ses effets.

2.3 L'organisation de la collection d'hexaminos

Lors de la situation de formation par homologie, les enseignantes avaient nettement pointé que la mise en œuvre du problème en classe permettrait de cibler des objectifs méthodologiques (elles citaient explicitement l'objectif « apprendre à organiser une recherche »).

En pratique, Agnès n'a pas suggéré à ses élèves d'organiser leur collection lors de la recherche et cet aspect n'a pas non plus été évoqué lors de la mise en commun. Stéphanie, quant à elle, a pris appui sur une proposition d'élève lors d'un bilan intermédiaire pour orienter les élèves vers une organisation des hexaminos, mais a pris conscience au fil de la séance des difficultés éprouvées par les groupes pour satisfaire cette demande.

La seule méthode réellement envisageable par les élèves pour organiser la collection consiste à classer les hexaminos en fonction de la propriété *« l'hexamino comporte N carrés alignés »* (en outre cette méthode ne facilite pas réellement la recherche exhaustive pour N = 3 en particulier).

Contrairement à ce qu'on pourrait espérer a priori, le problème permet donc difficilement de viser un objectif de type *« identifier et comparer des critères pour organiser une collection »* (si on considère qu'un tel objectif a une légitimité lors d'une séance de mathématiques).

2.4 Les savoirs mathématiques

La symétrie

Les transformations du plan fonctionnent comme des outils implicites pour repérer, lors des phases de mise en commun en particulier, des hexaminos isométriques. On peut être tenté, lors de ces phases, de rendre explicite la présence de la seule transformation relevant du programme de l'école primaire, la symétrie axiale.

Ce choix, visant à « récupérer » en situation l'activité de l'élève, a été opéré par Agnès. Il a montré certaines limites :

- L'enseignant doit « décrocher » de la mise en commun pour proposer une activité géométrique collective portant sur la symétrie. Il « casse » alors la motivation inhérente à la recherche du maximum de solutions ;
- Le repérage de deux hexaminos symétriques, pour être rigoureux, oblige à placer les figures « face à face », sur un quadrillage, de telle sorte qu'on puisse repérer facilement l'axe de symétrie et qu'on puisse faire fonctionner facilement les techniques de tracé connues des élèves. La manipulation n'est pas aisée, et le temps passé à l'activité géométrique peut s'avérer assez long.

Un choix plus prudent, également expérimenté par Agnès, peut consister, à retravailler sur la notion de symétrie lors d'une séance ultérieure, lorsque le problème aura été résolu.

Les patrons de cubes

Parmi les 35 hexaminos se trouvent les 11 patrons du cube. On peut donc utiliser l'affiche comportant les 35 hexaminos comme un support pour rappeler la notion de patron et faire repérer par ses élèves tous les patrons du cube. Cette potentialité a été souvent évoquée par les participants à l'atelier. C'est aussi le choix fait par l'une des maîtresses, Stéphanie, lors d'une séance ultérieure à la résolution du problème.

La distinction aire / périmètre

Les hexaminos sont des figures de même aire mais de périmètres différents. On peut envisager d'utiliser l'affiche comportant les 35 hexaminos comme un support pour amener les élèves à prendre conscience de l'indépendance entre les grandeurs aire et périmètre. Ces pistes, qui n'ont pas été exploitées par les deux maîtresses, ont été évoquées par les participants à l'atelier.

IV - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES EN FORMATION

1 Des choix pour le problème des hexaminos

L'expérimentation menée à l'aide des deux enseignantes et les échanges ayant eu lieu lors de l'atelier nous conduisent à formuler des pistes pour des exploitations possibles de ce problème en classe et en formation des enseignants.

1.1 En classe

Dans un premier temps, le problème est résolu en une ou deux séances avec une organisation matérielle appropriée. On peut envisager différentes mises en œuvre :

- soit les élèves cherchent individuellement avec un matériel unique (grilles 6×6), puis chaque élève vient compléter une affiche collective au fur et à mesure des productions obtenues ; les hexaminos ne sont découpés qu'en cas de doute dans l'identification d'un doublon,
- soit après une première recherche individuelle, les élèves, par groupes de 3 ou 4, réalisent une affiche ; lors de la mise en commun, on repère d'éventuels doublons et on note les scores ; chaque groupe complète sa collection en référence à l'affiche solution proposée par l'enseignant.

Dans des étapes ultérieures, le support produit (affiche des 35 hexaminos) est utilisé à différents moments de l'année pour réinvestir plusieurs notions : symétrie, patrons de cubes, distinction entre aire et périmètre.

1.2 En formation

À l'issue de cet atelier, trois principes se dégagent pour optimiser une séance de formation prenant appui sur le problème des hexaminos.

Principe 1 : faire vivre la situation aux formés, oui…

Principe 2 : … mais expliciter les choix opérés et leur transposition en classe :

- le rôle du matériel ;
- l'annonce du nombre de solutions ;
- les modalités pour faciliter la mise en commun (numéroter les 35 hexaminos de l'affiche pour faciliter les comparaisons, avoir des supports à la même échelle, etc.).

Principe 3 : distribuer en fin de séance un document écrit décrivant précisément les propositions d'exploitation du problème en classe. Nous en faisons une proposition en annexe 2.

En terme d'objectif de formation, ces principes devraient permettre de susciter une certaine vigilance chez les formés : le fait d'engager les élèves dans une recherche ne se suffit pas à lui même, l'orchestration de cette recherche par l'enseignant doit permettre de dégager des connaissances mathématiques.

2 Quels critères pour une « bonne » situation dans le cadre d'une stratégie d'homologie ?

Le problème des hexaminos a donné lieu à des activités de classe suffisamment appréciées des deux enseignantes pour qu'elles prévoient de le réutiliser. Ceci semble jouer en la faveur de séances de formation basées sur une stratégie d'homologie et prenant appui sur un problème

ouvert. Toutefois, des précautions s'imposent dans la conduite d'un scénario de formation de ce type.

2.1 Du côté de la mise en œuvre de la situation

Il ressort en premier lieu de cette expérimentation que dans une séance de formation basée sur une stratégie d'homologie, il ne suffit pas de « bien jouer » la situation. Il faut également expliciter les choix dans la gestion du jeu (dans le problème des hexaminos par exemple, l'annonce du nombre de solutions, la multiplicité du matériel, etc.).

En effet, il y a de nombreux implicites dans les actions, les choix et le discours du formateur qui « joue » une situation d'homologie. Leur décodage est d'autant plus complexe que la situation d'homologie nécessite, de la part du formé, des changements de rôles : il doit tour à tour endosser celui de l'élève, de l'étudiant ou de l'enseignant sans que ce ne soit, le plus souvent, explicitement signifié par le formateur. Par exemple, lors de la séance de formation prenant appui sur le problème des hexaminos, les formateurs mettent à la disposition des formées différents supports matériels pour la recherche. Ils supposent que les formées endosseront simultanément le rôle d'élève (en choisissant le matériel qui leur semble le plus approprié pour qu'elles effectuent elles-mêmes la recherche et en éprouvent les limites éventuelles) et celui d'enseignante (en interprétant l'intention tacite des formateurs de pointer une variable de la situation qui permettrait de s'adapter à l'hétérogénéité des élèves). Les résultats de l'expérimentation laissent à penser que l'une des deux formées revêt alors uniquement son rôle d'élève puisqu'elle reproduit à l'identique les propositions matérielles des formateurs lors de la séquence de classe.

Les changements de rôles attendus à certains moments d'une séance de formation basée sur une stratégie d'homologie devraient donc être signalés par le formateur. Or c'est là qu'est le paradoxe : si le formateur se contente de « bien jouer » la situation, il expose les formés à une mauvaise compréhension des éléments implicites de son discours. Si au contraire il les avertit de chaque changement de posture nécessaire de leur part, il risque fort de « tuer » le jeu, perdant ainsi les bénéfices de la situation d'homologie.

2.2 Du côté des connaissances mathématiques

La difficulté que nous pointons ici est liée aux problèmes pour chercher : quelles sont les connaissances mathématiques en jeu dans ces problèmes ? D'un point de vue méthodologique, quelles sont les démarches mathématiques convoquées et sont-elles transférables à d'autres problèmes ? Ces points ont déjà été soulignés par le groupe Math'aqui au colloque COPIRELEM 2010 : « *Si ces questions ne sont pas posées, le risque de voir ce problème comme un problème isolé est grand.* » (Math'aqui, 2010).

En effet, dans notre expérimentation, la résolution du problème des hexaminos mobilise des compétences d'ordre méthodologique liées à l'organisation de la collection (« *Pour résoudre un problème au rang n, je me ramène au cas n-1* » dont nous avons vu qu'elles étaient difficilement transférables à d'autres situations pour des élèves de CM). D'autre part, peu de connaissances mathématiques sont en jeu dans cette phase de l'activité (figures planes usuelles, transformations du plan pour identifier les doublons) et elles ne font pas l'objet d'une institutionnalisation. C'est en proposant des prolongements réutilisant l'affiche des 35 hexaminos produite à l'issue de la recherche que le problème retrouve un intérêt : il devient alors un support permettant d'aborder différentes notions mathématiques (symétrie, patrons du cube, distinction entre aire et périmètre) dans un contexte porteur de sens pour les élèves.

Plus généralement, dans le cadre d'une séance de formation basée sur une stratégie d'homologie, on pourrait surmonter les écueils liés à l'utilisation de problèmes ouverts à travers de nouvelles vies de la situation.

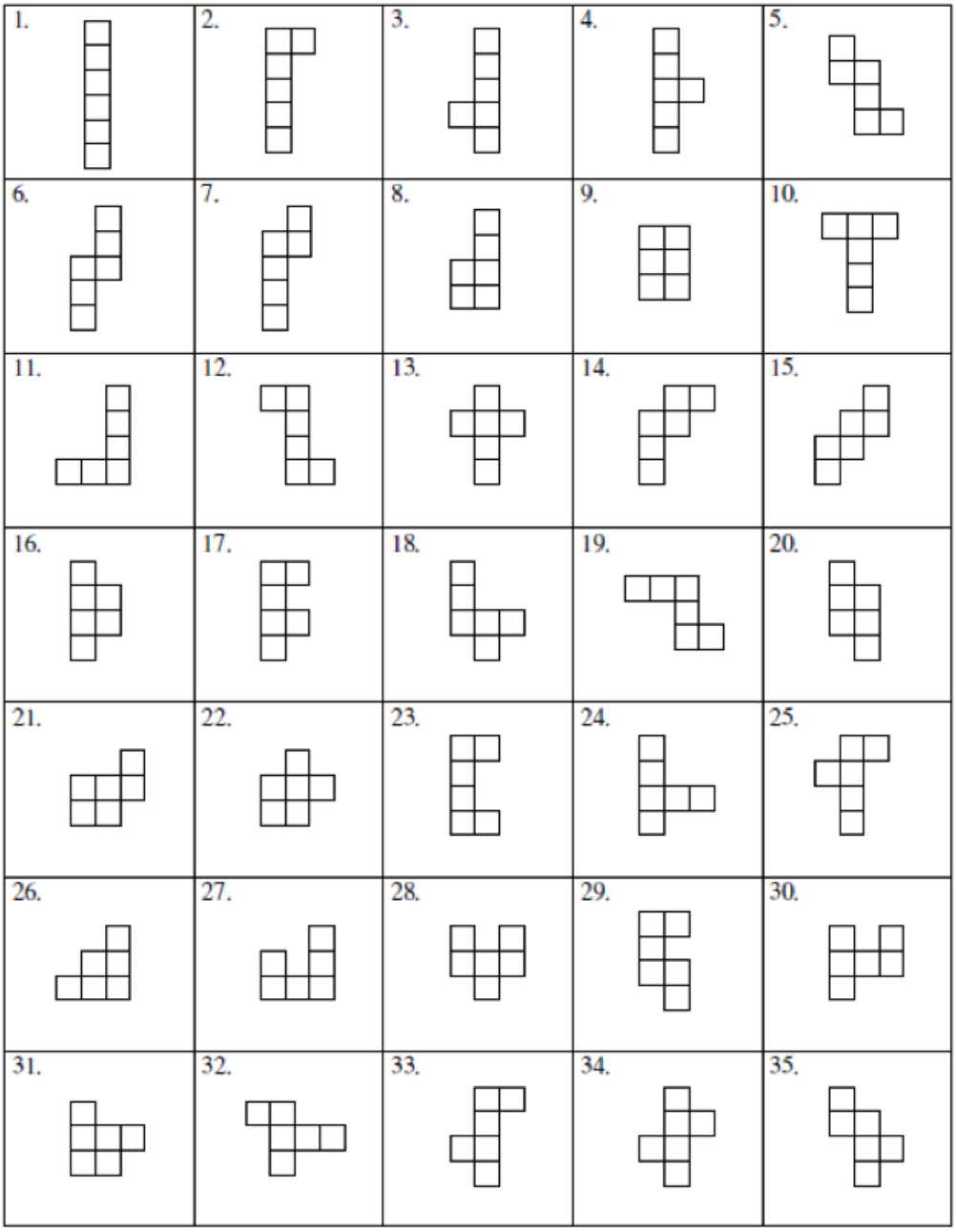
V - BIBLIOGRAPHIE

DOUAIRE J., EMPRIN F., (2012) chapitre « Résolution de problèmes », *Le nombre au cycle 3 : apprentissages numériques, SCEREN.*

KUZNIAK A. (1994) Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques *Actes du colloque COPIRELEM de Chantilly*

MATH'AQUI : BULF C., CELI V., COULANGE L., REYDY C., TRAIN G., URRUTY P. (2010) La résolution de problèmes en questions : quels savoirs ou savoir-faire ? Quelle institutionnalisation ? *Actes du colloque COPIRELEM de La Grande Motte (IUFM Montpellier).*

VI - ANNEXE 1 : LES 35 HEXAMINOS



VII - ANNEXE 2 : PROPOSITION DE SÉQUENCE DE CLASSE

On propose une séquence pour une classe de CM en deux étapes :

- **étape 1 :** en **début d'année**, les élèves cherchent à produire l'ensemble de tous les hexaminos, dans le cadre de la résolution d'un problème ouvert.
- **étape 2 :** la collection d'hexaminos sert de support au réinvestissement de notions rencontrées **au fil de l'année** dans **plusieurs chapitres de géométrie** : les patrons du cube (géométrie dans l'espace), la construction de figures symétriques (géométrie plane), la distinction entre aires et périmètres (grandeurs et mesures).

ETAPE 1 : TROUVER TOUS LES HEXAMINOS (en début d'année)

Objectifs :

- résoudre un problème de recherche ;
- (socle commun) savoir organiser des informations numériques ou géométriques ;
- (socle commun) justifier et apprécier la vraisemblance des résultats.

Programmes 2008 : *« La pratique des mathématiques développe le goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision ».*

On propose une gestion du problème organisée sur deux séances de 1 heure environ.

SEANCE 1 : DEBUT DE LA RECHERCHE

Phase 1 : présentation de la situation (10 minutes)

Matériel *:* 6 carrés fixés au tableau par des aimants ou 6 carrés déplaçables dessinés au TBI.

L'enseignant introduit le terme « hexamino » et fait deviner sa signification par analogie avec « dominos » et « hexagones ». On peut alors donner la définition suivante : *un hexamino est une figure plane obtenue en juxtaposant 6 carrés identiques selon la règle suivante : chaque carré doit être collé à au moins un autre carré par un côté (entièrement) commun*.

Le problème *:* il faut trouver le plus possible d'hexaminos différents.

Quelques exemples et contre-exemples sont produits collectivement, pour s'assurer de la compréhension de la définition.

Phase 2 : recherche des hexaminos (45 minutes)

Matériel par groupe :

- feuilles de couleur quadrillées ;
- une affiche ;
- ciseaux, colle ou patafix.

Recherche individuelle (10 à 15 minutes) : les élèves dessinent sur les feuilles quadrillées le plus possible d'hexaminos différents.

Recherche par groupe (30 minutes) : les élèves doivent **s'organiser** pour récolter sur leur affiche le plus possible d'hexaminos différents, en faisant attention à **ne laisser aucun double**.

Au bout de quelques minutes, afin de dynamiser la recherche, l'enseignant annonce que le problème posé comporte **35 solutions**.

Aide apportée par l'enseignant :

- on peut inciter les élèves à **s'organiser dans le groupe** : par exemple deux élèves peuvent produire les hexaminos et les deux autres vérifier qu'ils ne sont pas déjà trouvés avant de les coller sur l'affiche.
- on peut inciter les élèves à **regrouper les hexaminos par familles** sur l'affiche, afin de faciliter le repérage des doubles au fur et à mesure de leur réalisation. La méthode

généralement retenue par les élèves consiste à classer les hexaminos, au moins partiellement, en fonction de la propriété « l'hexamino comporte N carrés alignés ». On peut obtenir ainsi au total :

- 1 hexamino comportant 6 carrés alignés,
- 3 hexaminos comportant 5 carrés alignés,
- 13 hexaminos comportant 4 carrés alignés,
- 17 hexaminos comportant 3 carrés alignés,
- 1 hexamino ne comportant pas plus de 2 carrés côte à côte.

– on peut si nécessaire faire une **mise au point collective** en cours de recherche si les élèves ne repèrent pas correctement les doubles. En particulier, une **figure et son symétrique** sont dans le problème considérées comme **identiques puisque superposables.** Cette mise au point est importante car la propriété ne va pas de soi, en particulier lorsque le quadrillage est imprimé seulement sur le recto. Ainsi pour reconnaître deux figures identiques, on peut les « tourner » (les transformer par rotation et translation) dans le plan, mais aussi les « retourner » (les transformer par symétrie).

Clôture de la séance : les élèves indiquent le nombre de solutions trouvées et écrivent le nom de chaque famille, s'ils ont réussi à organiser, au moins partiellement la collection.

SEANCE 2 : FINALISATION DE LA RECHERCHE

Phase 1 : relance collective de l'activité (15 minutes)

L'enseignant a écrit le nombre de solutions trouvées par chaque équipe et accroché au tableau une ou deux affiches qui lui paraissent intéressantes (en particulier celles contenant des doubles). La mise en commun s'articule autour des questions suivantes : *toutes les solutions ont-elles été trouvées ? Les élèves ont-ils collé des doubles sur l'affiche ? Les élèves ont-il organisé la collection ?* En prenant appui sur les affiches on pourra faire émerger les éléments suivants :

– les groupes qui ont laissé des doubles sont ceux qui n'ont pas organisé la collection. La **réalisation de familles facilite le repérage des doubles** car lorsqu'on produit un nouvel hexamino, il suffit de le comparer à ceux de sa famille, sans avoir à passer en revue l'ensemble de la collection déjà produite.

– pour repérer des doubles sur l'affiche, il faut « déplacer mentalement » des figures et éventuellement « retourner » les figures (par symétrie) pour s'assurer qu'elles sont superposables.

Remarque : l'enseignant pourra faire repérer explicitement par les élèves la notion de symétrie lors du repérage de certains doublons. Toutefois, ce n'est pas indispensable au bon déroulement de cette première étape.

Phase 2 : finalisation du travail de groupe (20 minutes)

L'enseignant montre alors (vidéo-projecteur ou TBI) l'ensemble des 35 solutions **numérotées**.

Fin de la recherche : chaque groupe récupère son affiche et doit :

– numéroter les hexaminos trouvés, en référence à l'affichage collectif ;

– barrer les doubles oubliés sur l'affiche ;

– dessiner à main levée les hexaminos manquants ;

Aide et différenciation : si certains groupes rencontrent des difficultés, on pourra leur donner la feuille comportant le dessin des 35 hexaminos numérotés, ce qui facilitera les comparaisons entre figures.

Clôture du problème : après la phase de vérification, on rectifie au tableau les scores obtenus par chaque groupe, et on désigne le groupe vainqueur.

Phase 3 : réinvestissement individuel (20 minutes)

On décrit ci-après plusieurs propositions possibles.

- **Proposition 1 :**

Matériel : la planche des 35 figures numérotées est présente au tableau.

Travail sur ardoise : l'enseignant accroche au tableau un hexamino (récupéré sur l'une des affiches produites par les élèves par exemple), les élèves doivent écrire son numéro après avoir repéré la figure semblable sur la planche à figure.

Travail sur fiche : on peut proposer éventuellement la même activité sur une fiche comportant le dessin de plusieurs hexaminos qu'il s'agit d'identifier en référence à la planche à figure collective.

Bien entendu, dans ces activités, on choisira les supports de telle sorte que le repérage de la figure semblable sur la planche collective conduise les élèves à réaliser mentalement des rotations et des symétries.

- **Proposition 2 :**

Cette proposition sera exploitée si les recherches des élèves ont permis de mettre en évidence l'organisation de la collection selon les familles décrites plus haut.

Matériel : une feuille quadrillée pour chaque élève.

Recherche : les élèves doivent dessiner sur la feuille les 13 hexaminos qui comportent un alignement d'exactement 4 carrés.

AUTRE PROPOSITION DE GESTION DE L'ETAPE 1

En général, l'intérêt d'un problème de **recherche exhaustive** (trouver toutes les solutions vérifiant une contrainte donnée) est dans la mise en évidence et la comparaison de méthodes qui permettent efficacement de trouver toutes les solutions. Or, avec le problème posé ici, le seul moyen qui s'impose pour organiser la collection est de se baser sur la propriété « les hexaminos contiennent N carrés alignés » et ce critère laisse encore un grande place aux essais-erreurs, en particulier lorsque N=3 ou N =2. Cette observation minimise l'intérêt du travail de groupe et de sa mise en commun ultérieure. On peut donc imaginer une résolution de problème collective, sur une seule séance de 1h15.

Phase 1 : présentation du problème (10 minutes)

Modalité identique à la première proposition.

Phase 2 : résolution collective du problème.

Matériel par élève : feuilles de couleur quadrillées, ciseaux.

Phase de recherche (30 minutes) : les élèves cherchent à produire le plus possible d'hexaminos différents. Ils les dessinent et les découpent sur les feuilles quadrillées. À tour de rôle, ils viennent placer au tableau un hexamino qui n'a pas été déjà trouvé. La collection s'agrandit ainsi progressivement, en tirant profit des contributions individuelles de tous les élèves de la classe. L'enseignant peut trouver avec les élèves un mode d'organisation de la collection en plusieurs familles, afin de leur permettre de vérifier plus facilement si une figure qu'ils viennent de réaliser est déjà trouvée.

Phase de vérification (15 minutes) : lorsque le temps de recherche est écoulé, on compte le nombre d'hexaminos obtenus. L'enseignant affiche sur vidéo-projecteur la planche à figure comportant les 35 solutions numérotées. À tour de rôle les élèves annoncent un numéro d'hexamino qu'ils ont repéré dans la collection produite par la classe, viennent le montrer pour que son identification soit validée par tous. On repérera ainsi dans la planche à figures les hexaminos manquants.

Phase 3 : réinvestissement individuel (20 minutes)

Même modalité que pour les exercices de la séance 2 dans la proposition 1.

ETAPE 2 : EXPLOITER LA COLLECTION D'HEXAMINOS

Les propositions suivantes ne sont pas à prendre en compte dans l'ordre chronologique, mais au fil des notions rencontrées dans les chapitres de géométrie.

VOLET 1 : HEXAMINOS ET SYMETRIE

Objectifs :

- reconnaître deux figures symétriques,
- identifier les axes de symétrie d'une figure,
- tracer, sur papier quadrillé, le symétrique d'une figure par rapport à un axe.

Activité 1 : identifier les axes de symétrie des hexaminos

Travail de groupe : les élèves disposent des 35 hexaminos, ils doivent repérer la présence d'axes de symétries et les tracer. Ils collent les productions obtenues sur une affiche, en les regroupant en fonction du nombre d'axes de symétries trouvés. Une mise en commun rapide permettra de corriger les erreurs éventuelles.

Exercice individuel : un exercice similaire est proposé à partir d'une fiche individuelle sur laquelle sont dessinés plusieurs hexaminos.

Remarque : les deux modalités peuvent être proposées

- soit sur papier uni, dans ce cas la validation peut se faire par pliage.
- soit sur papier quadrillé, dans ce cas la validation prendra appui sur le quadrillage.

Activité 2 : construction de symétriques par rapport à un axe.

Matériel : une feuille quadrillée par élève.

Exercice individuel : l'enseignant choisit un hexamino, les élèves le reproduisent au centre de leur feuille. Ils doivent ensuite tracer un axe puis le symétrique de l'hexamino par rapport à cet axe. L'opération sera répétée plusieurs fois. Pour faire le lien avec la recherche de début d'année, on fait remarquer aux élèves que toutes les figures produites sont des « doublons ».

VOLET 2 : HEXAMINOS ET PATRONS DU CUBE

Objectif : identifier les 11 patrons du cube

Matériel :

- l'affiche comportant les 35 hexaminos,
- une feuille quadrillée pour chaque binôme.

Activité : retrouver les 11 patrons du cube

Par binômes, les élèves doivent identifier les hexaminos qui constituent des patrons du cube et les reproduire sur leur feuille en les numérotant conformément à l'affiche. Lors de la mise en commun, on répertorie les 11 solutions.

Remarque : on peut, avec les élèves les plus en difficulté, utiliser le matériel Lokon ou Polydron pour produire et valider facilement les assemblages, puisque la modalité adoptée pour la recherche ne permet pas de réaliser concrètement un pliage.

VOLET 3 : HEXAMINOS, AIRE ET PERIMETRE

Objectif : distinguer aire et périmètre

Activité : chaque élève doit repérer sur l'affiche :

- la (ou les) figure de périmètre maximal et celle de périmètre minimal,
- la (ou les) figure d'aire maximale et celle d'aire minimale.

Lors de la mise en commun, on constate que :

- toutes les figures ont la même aire ;
- la figure de périmètre minimal (P=10 côtés du quadrillage) est l'hexamino n°9 ;
- la figure de périmètre maximal (P=14 côtés du quadrillage) est l'hexamino n°15.

On aboutit à la conclusion que « Deux figures de même aire peuvent avoir des périmètres différents ».

ANALYSER LA PERTINENCE D'UNE RESSOURCE POUR LA CONSTRUCTION DE MODULES DE FORMATION DANS LE DOMAINE DE LA GÉOMÉTRIE PLANE

Catherine Taveau
Formatrice ESPE Aquitaine
COPIRELEM
Catherine.taveau@espe-aquitaine.fr

Résumé
Les travaux actuels de la COPIRELEM se sont orientés sur les contenus mathématiques et didactiques « incontournables » pour enseigner la géométrie à l'école primaire et également sur des situations de formation « consistantes » souvent reprises dans l'ouvrage Concertum (2003).
Pour cela, nous avons construit une ressource ouverte, évolutive et susceptible de s'adapter à des dispositifs de formation très variables (formation initiale ou continue).

Cette ressource met en lien, dans une carte mentale (construite à partir du logiciel libre « xmind »), ces contenus d'enseignement et ces situations de formation. L'entrée par les situations de formation a été privilégiée et est complétée par des analyses de manuels, de productions d'élèves, de vidéos de classe,…

Dans le cadre de cet atelier, ce type de ressource destinée aux formateurs sera mis à l'épreuve.

Après avoir présenté l'origine du projet et rappelé les objectifs assignés à la formation des maîtres en géométrie, nous explicitons la forme de la ressource construite et nous évoquons les critiques et les exemples d'utilisation ébauchés par les participants au cours de l'atelier.

L'ORIGINE DU PROJET

1 Évolution des structures de formation

Depuis une dizaine d'années, la formation initiale destinée aux Professeurs des Écoles au sein des IUFM n'a cessé d'être modifiée afin de s'adapter aux plans de formations successifs, à l'évolution des contenus et de la structure du concours de recrutement (CRPE) puis aux différentes maquettes d'enseignement dans le cadre de la « mastérisation ».

Ainsi, en quelques années, les heures de formation sont passées de 150 h en moyenne pour deux années (PE1-PE2) à moins de 80 h (M1-M2) dans la plupart des Masters et l'intégration des IUFM au sein des universités a souvent entraîné des changements de format de cours : les cours intégrés de 3 h devenant des TD de 2 h accompagnant des cours magistraux.

De plus, depuis la « mastérisation », une nouvelle contrainte très forte s'est imposée, celle de valider les différents enseignements répartis en UE à travers des épreuves écrites en temps limité et communes. Cette contrainte pèse sur le travail des formateurs qui doivent penser la cohérence de l'ensemble et l'articulation entre TD, cours magistraux et évaluation des UE semestrielles, problématique inexistante auparavant puisque seule l'obtention du CRPE validait l'année de PE1.

Ces contraintes institutionnelles ont obligé les formateurs à faire des choix, souvent dans l'urgence, et jamais satisfaisants. Il s'agit d'adapter les contenus d'enseignement, tout en essayant de conserver les mêmes objectifs : revisiter, en donnant du sens, les savoirs mathématiques nécessaires pour enseigner à l'école primaire.

Ce nouveau cadre, et notamment le découpage imposé en cours magistraux et TD, a parfois favorisé le développement de démarches d'enseignement dont la cohérence interne est plus que floue : les savoirs mathématiques n'étant plus revisités d'un point de vue professionnel, articulant savoirs savants et savoirs didactiques et pédagogiques, mais plutôt présentés comme une succession de notions indépendantes illustrées par un cours magistral suivi de travaux dirigés d'application.

2 Un manque de formation des nouveaux formateurs

Au niveau de la COPIRELEM, nous nous sommes interrogés sur notre propre capacité à développer une formation mathématique professionnelle dans cette nouvelle structure universitaire et nous nous sommes rendu compte que, en s'appuyant sur notre culture commune, nous pouvions plus facilement concilier les contraintes institutionnelles avec une formation mathématique professionnelle de qualité.

Cette culture commune, constamment interrogée et enrichie des réflexions à différents niveaux (notamment depuis les travaux de thèses de Kuzniak (1994), Houdement (1995), etc.), a été pendant 10 ans (de 1997 à 2009) diffusée et partagée au sein du réseau des formateurs non seulement au moment des colloques, mais plus spécialement dans le cadre des séminaires de formation de nouveaux formateurs, organisés par la COPIRELEM.

Lors de ces séminaires, au-delà des échanges et des questionnements liés à leur nouvelle fonction, les nouveaux formateurs étaient confrontés aux situations de formation, les vivaient, les analysaient et pouvaient ainsi se les approprier. Les situations de formation privilégiées dans ce cadre étaient le résultat d'une co-construction par les formateurs de la COPIRELEM qui les avaient auparavant mises à l'épreuve en formation et en avaient analysé le potentiel.

Beaucoup de ces situations, s'appuyant souvent sur des démarches d'homologie (Kuzniak 1994), visent l'acquisition des contenus mathématiques destinés à des Professeurs des Écoles et abordent simultanément les notions didactiques liées à l'enseignement de ces notions.

Or le changement structurel que représente la « mastérisation », accompagné par le recrutement de nouveaux formateurs de profils très différents (enseignant-chercheurs ou enseignants issus du second degré), a vu souvent disparaître le recours à ces situations de formation au profit de pratiques très universitaires, plus économiques en temps, non porteuses de sens pour des étudiants bien souvent en grande difficulté concernant les savoirs mathématiques.

Il nous a semblé opportun de mobiliser notre énergie pour réorganiser et enrichir notre « patrimoine culturel », issu du travail dans le réseau des IREM, concernant les situations de formation construites par la COPIRELEM (Concertum (2003)) et donc d'élaborer une première ressource qui mette en évidence la richesse et la complémentarité de ces situations consistantes et porteuses de sens pour la formation initiale ou continue des Professeurs des Écoles.

Nous nous sommes, dans un premier temps, focalisés sur l'enseignement de la géométrie plane.

II - LES OBJECTIFS PRIORITAIRES DANS LA FORMATION DES MAÎTRES DANS LE DOMAINE DE LA GÉOMÉTRIE

1 Qu'est-ce que « faire » de la géométrie à l'école primaire ?

L'une de nos priorités est de préciser auprès des enseignants en formation une certaine conception de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie et des idées relativement partagées à ce sujet.

La géométrie n'est pas une leçon de choses…

Il ne suffit donc pas de présenter les objets géométriques les uns après les autres ou d'illustrer leurs définitions par quelques exemples pour atteindre les objectifs visés. La construction de concepts géométriques nécessite des actions concrètes sur du matériel.

L'activité géométrique suppose la mobilisation « en actes » de certaines connaissances plus ou moins explicitables selon l'âge des élèves mais néanmoins opérationnelles. Par exemple, à l'école maternelle, les élèves peuvent reconnaître un rond en le faisant pivoter sur lui-même et utiliser ainsi implicitement la propriété d'invariance d'un cercle par rotation.

L'enseignant favorisera l'entrée de ses élèves dans la géométrie en faisant vivre les concepts, c'est-à-dire en les confrontant à certaines situations. Ainsi, il nous semble important d'insister auprès des enseignants (en formation initiale ou continue) sur la nécessité de **"faire faire de la géométrie"** aux élèves plutôt que d'enseigner de manière ostensive des connaissances géométriques.

Faire de la géométrie, c'est résoudre des problèmes.

Les situations proposées aux élèves doivent être suffisamment riches pour les amener à entrer dans une réelle démarche de résolution de problèmes. Ainsi, comme pour toute résolution de problème, l'élève devra prendre des initiatives, il aura à sélectionner des informations (par exemple, lors de l'analyse d'une figure) pour ensuite organiser sa démarche de résolution (par exemple, rédiger les étapes nécessaires de la construction).

2 Spécificités de la géométrie et de son enseignement

Une autre de nos priorités vise à attirer l'attention des enseignants en formation sur les spécificités de la géométrie et de son enseignement. Il existe une complexité intrinsèque à la géométrie qui, selon nous, se manifeste à travers différents aspects de l'activité géométrique.

Les modes de validation

L'activité géométrique requiert des modes de validation spécifiques et évolutifs dans la mesure où l'élève est amené, lors de la résolution d'un problème, à se référer, plus ou moins directement (ne serait-ce que mentalement), à l'espace sensible. Par conséquent, du cycle 1 au cycle 3, l'enseignement de la géométrie participe à l'apprentissage du raisonnement mathématique, à l'initiation au débat et à l'argumentation.

L'importance du langage

Une autre spécificité de l'enseignement de la géométrie est le rôle joué par le langage dans l'acquisition des concepts (Gobert 2005). Le vocabulaire géométrique présente certaines difficultés liées notamment à la polysémie de certains termes. Il est important d'attirer l'attention des enseignants sur la nécessité de choisir, au moment de la préparation de la séance, les définitions à donner aux élèves et le vocabulaire à employer. C'est à travers la mise en mots de certaines actions sur le matériel que se construisent les concepts géométriques. De plus, ce vocabulaire évoluant au fil de la scolarité, il est nécessaire pour l'enseignant de s'interroger sur les mots à utiliser et/ou à exiger en fonction de l'âge de ses élèves. Il faut aussi insister sur l'existence pour un concept donné d'une pluralité de définitions renvoyant à des conceptions différentes (exemples : le cercle ; les droites parallèles…) et de la nécessité de la mise à disposition des élèves de plusieurs conceptions ou de conceptions adaptées à leur niveau (Duval & Godin 2005).

L'usage d'instruments

Enfin, l'activité géométrique nécessite le recours à divers instruments dont l'usage ne va pas de soi et nécessite également un apprentissage.

L'enseignant doit en particulier avoir conscience des spécificités des instruments du commerce. La règle graduée est à la fois instrument de géométrie (outil pour vérifier l'alignement ou pour réaliser des tracés (relier des points, prolonger des segments, tracer des droites parallèles particulières…)) mais aussi instrument de mesure (y compris lorsque la règle est cassée…). Grâce aux graduations figurant en général sur l'un de ses côtés, l'équerre peut servir non seulement de gabarit pour construire ou vérifier un angle droit mais aussi d'instrument pour tracer des lignes ou encore mesurer des longueurs… Cette multiplicité de fonctions des instruments est souvent source de confusions. Il est nécessaire d'accompagner les élèves dans la découverte de ces instruments afin de les aider à établir des liens entre leur usage, les relations voire les concepts en jeu (exemple :

la règle est l'instrument privilégié pour faire vérifier l'alignement de points, cet alignement définissant la notion de droite).

3 Enseigner la géométrie nécessite certaines connaissances

Il est souvent "douloureux" pour les étudiants de travailler eux-mêmes la géométrie. De plus, leurs représentations de ce domaine et des connaissances à acquérir restent très liées à leur parcours scolaire. Les étudiants identifient spontanément un certain nombre de manques, ils ressentent non seulement la nécessité d'une prise de recul relative aux connaissances à enseigner mais également un manque par rapport aux tâches à proposer aux élèves. Il est donc indispensable de les aider à re-donner du sens à l'activité géométrique.

Rappelons que les étudiants doivent tout à la fois revoir certaines notions dans la perspective des épreuves du concours mais également acquérir des connaissances mathématiques et didactiques pour enseigner.

Enseigner la géométrie nécessite des connaissances disciplinaires pour pouvoir dominer les notions à enseigner.

Voici une liste de notions géométriques de base :

Les objets et leurs propriétés : le point, les droites, les segments, les polygones, les non polygones, les lignes, secteur angulaire, diagonale, axe de symétrie, médiatrice, hauteur, bissectrice...

Les relations entre objets : alignement, parallélisme, perpendicularité, intersection, centre, milieu, symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation, rotation, avoir même longueur, représenter le même angle, agrandissement-réduction.

Enseigner la géométrie nécessite des connaissances relatives au maniement des instruments

Tout instrument de construction est d'abord un objet technologique. Analyser le lien entre l'objet technologique et l'objet géométrique peut permettre de mieux comprendre le maniement de ces instruments.

Enseigner la géométrie nécessite des connaissances didactiques

Il s'agit non seulement de connaissances issues de la didactique générale des mathématiques (exemple : variables didactiques liées aux instruments et aux supports) mais aussi des connaissances issues de la didactique de la géométrie (ex : espaces, paradigmes géométriques, …).

Le formateur permet aux futurs enseignants de s'approprier un certain nombre de connaissances et d'en percevoir leur opérationnalité dans la pratique de leur métier. Celui-ci sélectionne ainsi des résultats issus de la recherche dans le but d'une transposition visant à donner aux enseignants des outils pour enseigner. Citons ici les principales recherches dans le domaine de la géométrie.

Les travaux de Houdement et Kuzniak (1999) ont mis en évidence différents paradigmes géométriques qui permettent de :

- donner des repères dans une progressivité des apprentissages, identifier les objectifs visés et saisir les enjeux des programmes ;

- donner des repères par rapport aux attentes vis à vis des élèves aux différents moments de leur scolarité ;

- aider à la construction de séances qui balisent cette progression.

La définition des différents niveaux d'espaces - micro, méso et macro - (Berthelot-Salin - 1999) aide à :

- faire prendre conscience de l'intérêt de proposer des activités aux élèves dans différents niveaux d'espaces ;

- établir des liens entre connaissances spatiales et connaissances géométriques.

Concernant le rapport aux figures géométriques, Duval (registres des représentations sémiotiques) (Duval, Godin, 2005) et Perrin-Glorian (2012) proposent un cadre qui peut aider à :

- décrire différentes manières de « voir » une figure ;

- faire prendre conscience de la nécessité d'accompagner le changement de regard sur les figures ;

- concevoir des tâches spécifiques pour apprendre à travailler et à manipuler des objets autres que points, droites, segments (retour sur des objets 3D, puis 2D, puis 1D, voire 0D).

Nous avons donc choisi de construire une ressource ouverte, évolutive qui illustre la richesse et la variété des travaux de la COPIRELEM dans le domaine de la géométrie. Il est aussi essentiel que cette ressource puisse être utilisée par un formateur peu familier de ces situations.

III - UNE CARTE MENTALE POUR ORGANISER LES SITUATIONS DE FORMATION

Notre principale difficulté a été de trouver un moyen d'organiser la diversité des situations de formation, de les compléter par des outils permettant d'enrichir un cours et aussi d'intégrer des éléments théoriques issus de la recherche sur le domaine.

Pour cela, nous avons choisi d'utiliser un logiciel libre de carte mentale (*xmind*), disponible et fonctionnant sur tout système d'exploitation.

1 L'entrée par les situations

Un logiciel de carte mentale, nécessite dans un premier temps de prendre une option concernant l'arborescence : quel sujet principal ? quels sujets secondaires ?

Concernant les choix sur le type d'entrées et sur la cohérence dans l'organisation des branches de cette carte, plusieurs options étaient possibles :

- Entrer par les savoirs mathématiques (triangles, théorème de Thalès, quadrilatères, médiatrice,…) ;

- Entrer par les compétences des programmes de l'école primaire (reconnaître, reproduire, décrire, construire) ;

- Entrer par les situations de formation.

Pour rester en cohérence avec notre projet, nous avons choisi une entrée par ***les situations de formation*** déjà éprouvées qui représentent pour nous, formateurs, une culture commune, partagée et souvent fondamentale dans le cadre de la formation des Professeurs des Écoles.

Au fur et à mesure de l'élaboration de cette ressource, nous nous sommes demandé quelles ressources supplémentaires pourraient être pertinentes pour tout formateur débutant ou chevronné.

En listant les supports que les uns et les autres utilisaient en formation après avoir proposé les situations déjà évoquées et qui pouvaient constituer un ensemble cohérent, nous avons alors décidé de compléter la ressource notamment par des analyses de productions d'élèves, des analyses de manuels scolaires, des analyses de scénarios de classe et des extraits de vidéos.

Les documents proposés dans la ressource sont quasiment tous issus des travaux de la COPIRELEM, enrichis par des articles de recherche sur le domaine de la géométrie et complétés par des liens vers des sites institutionnels (académiques ou ESPE).

Une dernière question, non banale, a été de savoir si cette ressource pouvait être lisible, pertinente, exploitable pour un formateur n'ayant pas participé à la conception de cette ressource.

Une des solutions pour obtenir des réponses à cette question était de tester l'opérationnalité de la ressource lors d'un atelier, ce qui est donc l'objet de cet article.

Au moment de la rédaction de ce compte-rendu, cette ressource a déjà évolué et s'est enrichie par la construction d'autres branches de la carte mentale.

IV - MISE À L'ÉPREUVE DE LA RESSOURCE LORS DE L'ATELIER

1 Le travail dans l'atelier

Suite à une présentation de l'origine du projet et des questions soulevées précédemment, les consignes de travail sont ainsi énoncées :

Dans un premier temps, vous allez essayer de vous approprier cette ressource, ou du moins une partie. Vous pourrez explorer plus particulièrement la branche la plus aboutie (dont l'origine est la « situation des triangles équilatéraux ») de cette carte mentale. Mais nous n'avons pas voulu que chaque branche constitue un parcours obligatoire.

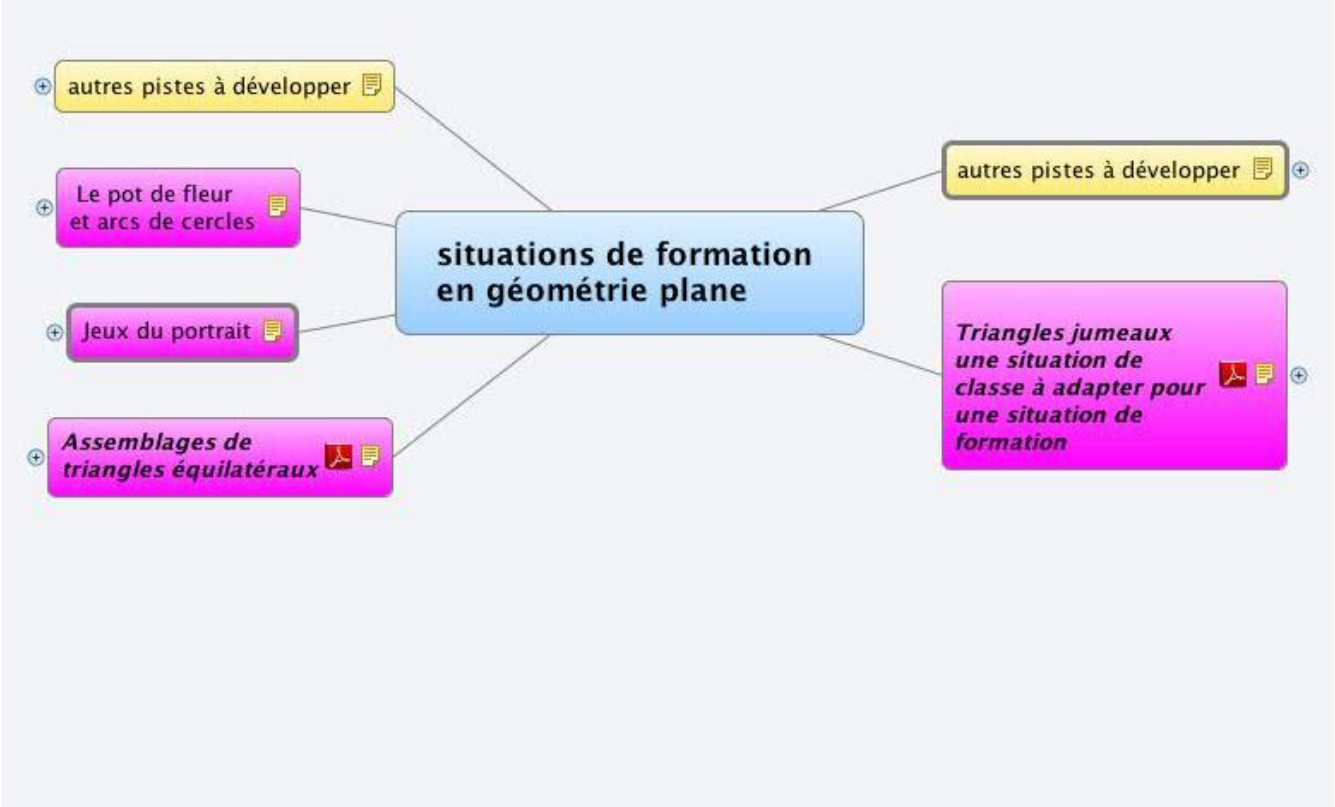
Puis par binôme, vous allez essayer de construire un module de formation pour lequel vous choisirez le format (public visé : formation initiale, formation continue ; durée du module choisie) tout en vous aidant de la ressource proposée.

Pendant cette élaboration de module, il s'agit de questionner la ressource : ses manques, sa pertinence, ses difficultés d'appropriation…

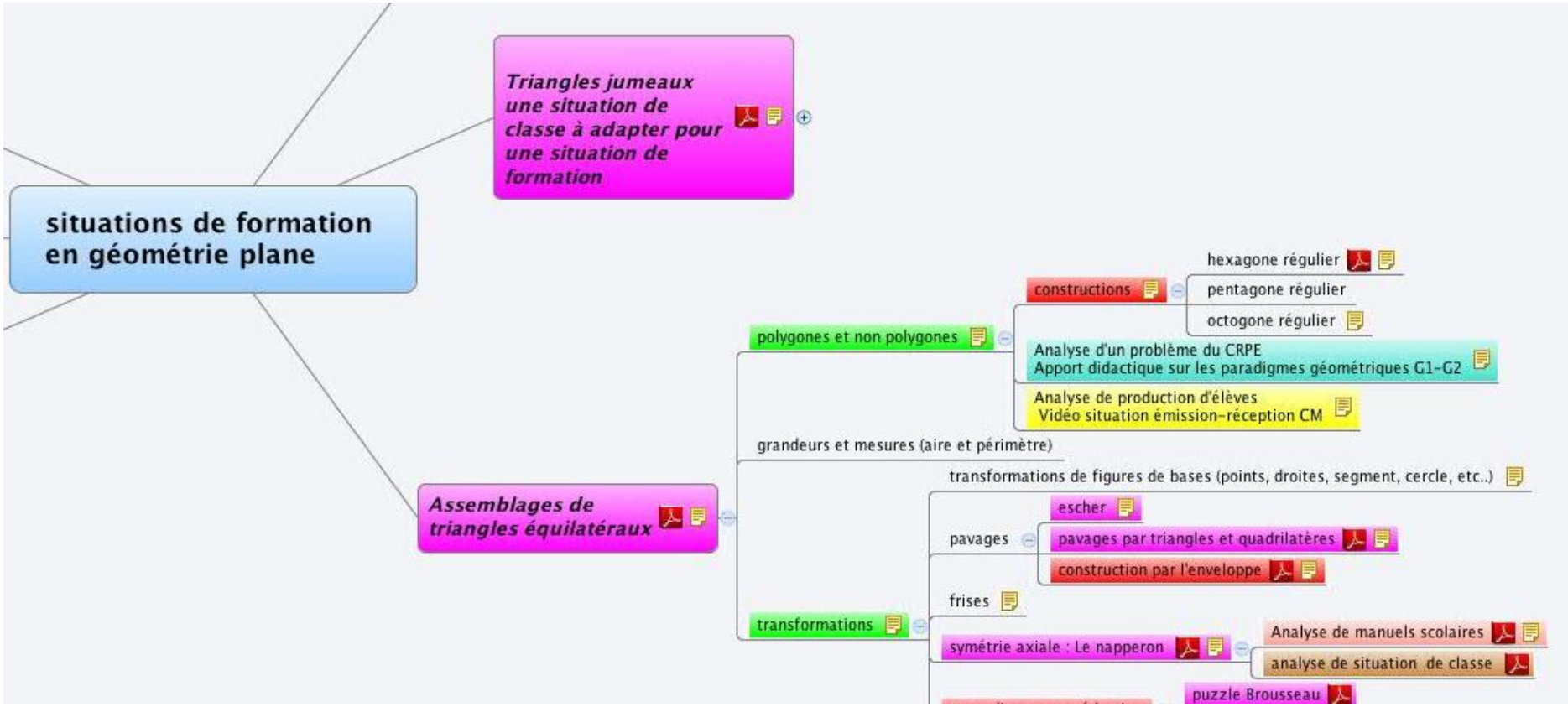
Pour terminer, nous mettrons en commun vos analyses afin de pouvoir améliorer notre ressource pour une utilisation plus pertinente ou bien tout simplement interrompre ce travail si elle semble inadaptée.

2 Présentation de la ressource[1]

Deux images successives de la ressource proposée aux participants de l'atelier sont représentées ci-dessous : l'une illustrant une vue générale de la ressource et l'autre développant en détail la branche concernant la situation *assemblages de triangles équilatéraux*.



[1] La ressource interactive, sous le logiciel *xmind*, est disponible sur le CD des actes. Pour la lire, il suffit d'installer le logiciel en utilisant la version adaptée à votre système d'exploitation.


situations de formation en géométrie plane
Triangles jumeaux une situation de classe à adapter pour une situation de formation
Assemblages de triangles équilatéraux
polygones et non polygones
constructions
hexagone régulier
pentagone régulier
octogone régulier
Analyse d'un problème du CRPE
Apport didactique sur les paradigmes géométriques G1-G2
Analyse de production d'élèves
Vidéo situation émission-réception CM
grandeurs et mesures (aire et périmètre)
transformations de figures de bases (points, droites, segment, cercle, etc..)
transformations
pavages
escher
pavages par triangles et quadrilatères
construction par l'enveloppe
frises
symétrie axiale : Le napperon
Analyse de manuels scolaires
analyse de situation de classe
puzzle Brousseau

3 Une analyse très prometteuse de la ressource

Les participants de l'atelier se sont fortement investis dans l'exploration de cette ressource et ont effectivement commencé l'élaboration de modules de formation. En annexe, six propositions ont été retranscrites. Rappelons que l'objet de l'atelier est de mettre à l'épreuve cette ressource et vu le temps imparti pour ce travail, ces propositions ne sont que des ossatures possibles et restent sous la responsabilité pédagogique de leurs auteurs.

Il est cependant intéressant de repérer que les travaux réalisés pendant cet atelier sont le reflet des préoccupations fortes pour la formation des PE en cette fin d'année universitaire (juin 2013) où les contenus attendus du nouveau concours CRPE ne sont toujours pas connus et où les modalités de formation des M2 ne sont encore que transitoires.

C'est pourquoi, chaque proposition doit être repensée dans son contexte historique.

Lors de l'analyse qui suit le travail d'élaboration, les participants font part de leur grand enthousiasme face à la conception de la ressource élaborée par la COPIRELEM.

Le public étant assez hétérogène (formateurs très familiers des travaux de la COPIRELEM depuis de nombreuses années, nouveaux formateurs ou formateurs assez récemment investis dans la formation des PE, IEN et IPR-IA ne connaissant pas les situations proposées), les ressentis des uns et des autres sont très divers. Pour certains, c'est une synthèse réorganisée de ce qui est connu. Pour d'autres, ce sont beaucoup d'éléments nouveaux qui demandent du temps d'appropriation mais cela apporte une vision plus globale, une prise de recul par rapport à qu'il serait nécessaire de proposer aux étudiants ou stagiaires. Et pour d'autres encore, ce sont des situations très riches et surtout une autre façon de concevoir les modalités de formation (situations d'homologie en particulier).

De façon unanime, les participants ont apprécié la facilité d'entrée dans la ressource : les codes couleurs permettent au formateur de garder des entrées multiples sur les contenus proposés et d'éviter l'écueil d'une entrée quasiment exclusive par les contenus. D'autre part, cette organisation propose des idées pour repenser leurs propres interventions dans le cadre de la formation des Professeurs des Écoles et permet des pistes variées de lecture.

La présence de vidéos a été fort appréciée, notamment pour les formateurs n'ayant pas recours à ce type de supports. C'est probablement une dimension à enrichir.

Dans un premier temps, certains participants ont été attirés par le suivi d'un parcours déjà défini car lié au suivi d'une branche de la carte mentale, ce qui est assez intuitif. On peut penser qu'une bonne connaissance de la ressource modifiera cette démarche et autorisera différentes prises d'initiative.

La présentation sous forme de carte mentale, utilisant un logiciel libre, permet d'envisager un enrichissement personnel des contenus et documents de chacun. En effet, le choix opéré par notre commission n'est pas exhaustif et chaque formateur peut être attaché à d'autres situations qu'il intégrerait dans l'arborescence.

Suite au travail des participants, les principales remarques qui vont permettre à la COPIRELEM d'enrichir, de modifier et de faire évoluer cette ressource sont les suivantes :

Si cette ressource est destinée à des nouveaux formateurs, non familiers des situations retenues, elle doit proposer des parcours préconstruits.

Il pourrait être intéressant d'ajouter les programmes de l'école.

L'apparition de mots-clés permettrait de se repérer plus vite car, finalement on se retrouve assez rapidement avec beaucoup d'informations à exploiter. Reste à lister ces mots-clés !

4 Un projet à poursuivre

Dans ces actes, la version de la ressource proposée est celle présentée lors de l'atelier. Le travail réalisé par les participants nous a confortés dans notre projet de réorganiser les situations de

formation en les mettant en synergie avec des ressources complémentaires pour dispenser une formation de qualité. Nous avons continué à y travailler en l'enrichissant de documents qui nous semblent incontournables.

Elle peut devenir une ressource libre, diffusée dans la communauté des formateurs en mathématiques pour les Professeurs des Écoles avec pour objectif de faire connaître une façon de penser la formation, une façon de concevoir des enseignements auprès d'étudiants se destinant à devenir enseignant à l'école primaire.

Elle illustre une palette des possibles pour penser une formation de qualité en géométrie, notamment en évitant d'entrer par les contenus, ce qui nous semble réducteur et peu adapté à un public souvent en difficulté en mathématiques et plus particulièrement en géométrie.

V - BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R., SALIN M-H. (1999). L'enseignement de l'espace à l'école, in *Grand N* n° 65, pp. 37-61

COPIRELEM, (2003). Concertum, Carnet de route de la COPIRELEM, éd. Arpeme.

DUVAL R., GODIN M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures, *in Grand N* n° 76, pp. 7-27.

GOBERT S. (2005). Quelles formulations pour les savoirs géométriques ?, in *Grand N* n° 76, pp. 29-44.

HOUDEMENT C. (1995). Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies, Thèse Université Paris-Diderot.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1999). Réflexions sur l'enseignement de la géométrie, in *Grand N* n° 64, pp. 65-78.

KUZNIAK A. (1994). Étude des stratégies de formation en mathématiques des enseignants du premier degré, Thèse Université Paris-Diderot.

PERRIN-GLORIAN M-J. (2012). Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? Les mathématiques en marche au long de la scolarité obligatoire : L'exemple de la symétrie axiale, in *Bulletin de l'APMEP*. n° 499. pp. :25-332.

VI - ANNEXE : SCENARII DE FORMATION CONSTRUITS À L'AIDE DE LA RESSOURCE

Proposition 1 : FORMATION SUR LES FIGURES GÉOMÉTRIQUES

Niveau : M1

Durée : 9 heures

Objectifs : Reconstruire les savoirs mathématiques concernant les figures géométriques.
Avoir des connaissances didactiques et professionnelles sur la géométrie plane.

Scénario envisagé :

Démarrer par un « VRAI/FAUX » sur les propriétés des polygones, non corrigé qui sera repris en fin de séquence.

Séance 1 : Situation de communication de type émission/réception (figures complexes à décrire et à construire constituées de figures simples usuelles de type : cercle, triangle, quadrilatères)

Compétences : vocabulaire, construction, analyse de la figure, manipulation des instruments

Objectif : Aider les étudiants à prendre conscience de leurs lacunes en mathématiques, entrée de la didactique de la géométrie par analyse de la tâche et analyse la situation d'homologie vécue.

Durée : 3 heures

Modalités de travail : en groupes, échanges, mise en commun, travail collectif sur l'article Gobert (Grand N n° 76), analyse de productions d'élèves (CRPE Limoges 2000).

Séance 2 : Jeu du portrait sur les quadrilatères

Compétences : revoir les propriétés des quadrilatères

Objectif : Redéfinir les inclusions des quadrilatères particuliers

Durée : 3 heures

Modalités de travail : travail collectif, exercices de type CRPE sur les quadrilatères , partie mathématique et didactique, qui travaillent les propriétés des quadrilatères (exemple type « 2 étiquettes à prendre parmi 10 »)

Séance 3 : Construction de la rosace à 8 pétales

Compétences : Analyse et construction de figures planes

Objectif : Revoir les propriétés des polygones réguliers

Durée : 3 heures

Modalités de travail : travail individuel, analyse de manuels scolaires (Polygones au CM annales 2008 pp. 61, 63 et 64)

VRAI/FAUX correction par groupes puis mise en commun

Proposition 2 : **LES QUADRILATÈRES**

Niveau : M1

Situation de départ : le jeu du portrait.

Objectif : Construire une séance en prenant en compte les différents paramètres : savoir en jeu/variable/ difficulté/procédures.

Les étudiants doivent arriver à la progression suivante : reconnaissance, propriétés et construction.

Séance 1 : Organiser les propriétés de quadrilatères autour des grandeurs

Distribution de la fiche de classement des quadrilatères (Doc 12-Quadrilatères particuliers.pdf)

Consignes :

- Classer les quadrilatères.
- Expliquer les choix du classement effectué.

Mise en commun, bilan (on attend la mise en évidence des différentes propriétés des quadrilatères : angulaire et longueur).

Proposition de classement des quadrilatères à partir des propriétés des diagonales (réinvestissements des critères sur les longueurs et angles).

Éventuellement réflexion sur les choix des quadrilatères et le transfert possible dans une classe.

Séance 2 : Pourquoi connaître ces propriétés ?

Reprendre le classement de la séance précédente pour établir un inventaire des propriétés des quadrilatères suivant leur nature.

Problème de construction mettant en jeu ces propriétés (faire percevoir la finalité de la géométrie : résolution de problèmes).

Bilan : les propriétés permettent de justifier des constructions : initiation à la preuve, réflexion sur la preuve en géométrie.

Séance 3 : Étude d'une situation de classe

Étude d'extrait de manuel : analyser une situation de classe en analysant ce qui est demandé aux élèves (document quadrilatère Cap Maths Hatier Groupement 2 – 2008 *à compléter par d'autres manuels)*

Synthèse : Décrire la tâche, savoir en jeu, difficultés, erreurs.

Séance 4 : Mise en place d'une séance autour de la compétence « Construire un quadrilatère particulier »

Réalisation d'une fiche de préparation.

Appui sur les livres du maître et des manuels.

Bilan avec questionnement sur ce qui n'y est pas : éléments précis sur la gestion de la dévolution et l'institutionnalisation.

Éventuellement apports théoriques sur des problématiques spécifiques à cette compétence (lecture des figures, place des instruments,…).

Séance 5 : Ouverture sur des problèmes originaux : découpages, partages.

Pistes de lectures.

Proposition 3 : **LES QUADRILATÈRES**

Public : M1

Durée : 2 séances de 4 heures

Objectifs : - Réactiver les connaissances mathématiques sur les quadrilatères.
- Introduire des apports didactiques.

Séance 1 : Évaluation diagnostique de l'état des connaissances mathématiques concernant les quadrilatères. Apports de ce qui manque.

1) Faire vivre le *Jeu du portrait* sur les quadrilatères.

Faire deviner des quadrilatères choisis par le formateur ou des étudiants ? Quelles difficultés ? Quelles questions poser ? Quelle définition permet de trouver ?

Comparer les définitions de chacun.

2) Élaboration collective des propriétés des quadrilatères particuliers.

Par groupes – pliages, manipulation de quadrilatères en papier.

3) Moment dédié à la construction de quadrilatères à partir de différents supports (papier-crayon et logiciel de Géométrie Dynamique).

L'objectif est de faire prendre conscience des propriétés nécessaires et suffisantes des quadrilatères.

Séance 2 : Approche didactique à partir d'erreurs d'élèves.

Les objectifs sont de : - réinvestir les connaissances mathématiques de la séance 1 ;
- savoir analyser quelques erreurs types ;
- construire quelques connaissances didactiques.

Activité à partir de productions d'élèves sur une activité d'émission-réception.

1) Faire soi-même l'exercice.

2) Par groupe, retrouver les erreurs des élèves : identifier ou émettre des hypothèses sur les procédures des élèves – leurs conceptions, les connaissances erronées ou manquantes. Comment les classer ?

3) Mise en commun : choix collectif d'un classement – quelles remédiations pour des erreurs type ?

Proposition de la lecture d'un article de Grand N.

4) Exercice des annales : *Jeu du portrait CRPE 1994* (cet exercice servira d'évaluation du module).

Proposition 4 : **TRIANGLES ET QUADRILATÈRES**

Niveau : M1/PE

Durée : 3 séances de 2 heures et utilisation de la ressource

Objectifs : - revisiter des notions mathématiques en géométrie plane (contenu culturel nécessaire à l'étudiant/futur enseignant) ;

- déterminer les difficultés et particularités des objets mathématiques en jeu ;
- analyser une vidéo et/ou des productions d'élèves sur le thème de triangles et quadrilatères ;
- proposer et analyser une situation d'enseignement sur le même thème.

Séance 1 : Réflexion individuelle puis travail collaboratif autour d'une situation : triangles jumeaux (rose).

Mise au point sur les contenus mathématiques et didactiques en jeu : triangles, quadrilatères, propriétés, transformations géométriques (vert).

Travail à faire pour la séance 2 : étudier le programme du cycle 3 sur ces thèmes (orange ?).

Séance 2 : Analyse d'une vidéo (jaune) à trouver : interaction des élèves avec le contenu mathématique en jeu ? Rôle de l'enseignant (dévolution, institutionnalisation, etc) ?

Mise au point sur les contenus mathématiques et didactiques en jeu : triangles, quadrilatères, propriétés, transformations géométriques (vert)

Travail à faire pour la séance 3 : …

Séance 3 :

…

Proposition 5 : **AUTOUR DES TRANSFORMATIONS**

Durée : 6 heures

Objectif : Mise en évidence des transformations du plan et de leurs conséquences sur les figures.

Matériel : Site de Thérèse EVEILLEAU

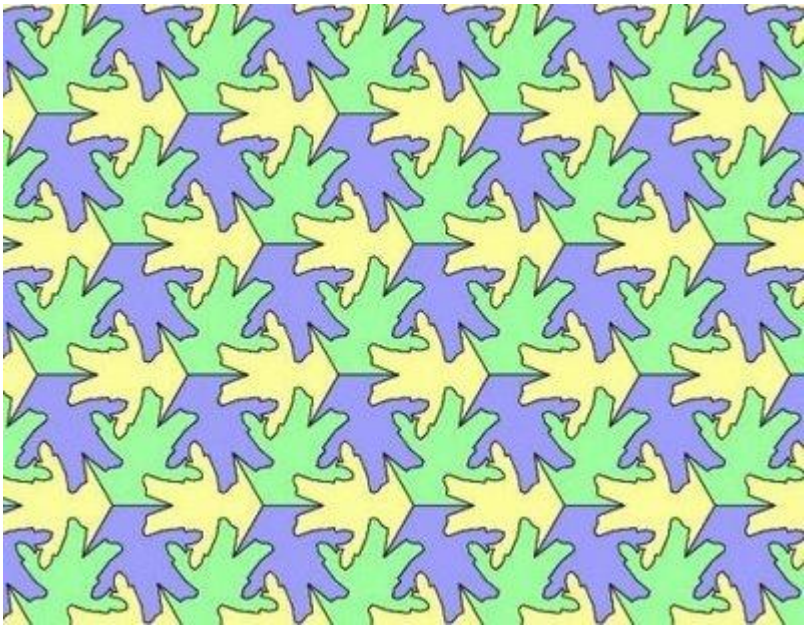
http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/pavage_enveloppe.htm

Les ressources de la Copirelem

Séance1 : Activités de pavages

1) Observation de l'image ci-dessous :

Site : http://algorythmes.blogspot.fr/2008/10/maths-et-architecture-pavages.html (consulté le 20/06/2013)



Pavage chinois de Escher

2) Questionnement sur les représentations des stagiaires sur les pavages.

3) Utilisation de la ressource *pavage_Rauscher.pdf*

Distribution sur une même feuille de figures planes régulières : triangle, pentagone, carré, hexagone et octogone. Les polygones ont tous une longueur commune.

Construction d'une multitude d'exemplaires des figures ou utilisation du matériel « Polydron ».

Essai par les stagiaires par groupes de pavage du plan avec pavages réguliers et semi-réguliers.

Mise en commun sur les réussites et les échecs.

Caractérisation des conditions sur les angles en chaque nœud.

4) Activité de l'enveloppe : *pavage_methode_enveloppe.pdf*

5) Élaboration d'une fiche de préparation de séquence pour une classe de cycle 3.

6) Institutionnalisation : importance des échanges verbaux entre les élèves durant les mises en commun sur les relations et propriétés des figures planes rencontrées.

7) Liens avec l'histoire des arts.

Séance 2 : Activité des napperons

Objectifs : Trouver des axes de symétrie, caractériser les propriétés de la symétrie axiale.

1) Individuellement, les stagiaires doivent reproduire un napperon en papier.

2) Recherche des compétences que l'élève met en œuvre dans une telle situation. Reconnaissance des figures et des propriétés. Anticipation de la forme de la figure plane après pliage.

Relations et propriétés des figures planes : axes de symétrie, alignements, perpendicularité, égalités de longueurs, milieu d'un segment, parallélisme...

3) Visionnage d'une séance de classe.

4) Analyse de la vidéo.

Proposition 6 : **LES ENJEUX DE LA REPRODUCTION DE FIGURES**

Niveau : M2 (Stage filé)

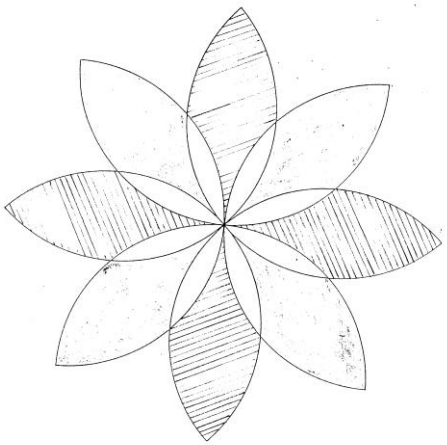
Durée : 6 heures

Objectif : Amener les étudiants à identifier les enjeux des situations de reproduction des figures planes.

Variables didactiques : choix du type de figures (polygones, triangles, figures complexes…)

Phase 1 : Situation d'homologie (2 heures)

Proposer une situation de reproduction (*la fleur* ou *la cloche* de Rouen…)



Mise en commun – institutionnalisation : difficultés à réaliser la tâche de reproduction.

Compétences et connaissances (implicites ou non) mises en jeu dans des situations de reproduction :

- déconstruction et identification de sous-figures ;
- reconnaissances des propriétés des sous-figures nécessaires à la construction ;
- utilisation des artefacts.

Variables didactiques : choix de la figure, façon de donner le modèle, échelle de reproduction, choix ou pas des artefacts.

Phase 2 : Analyse de production d'élèves (1 heure)

Autour d'une activité de reproduction au cycle 2 pour mettre en exergue le fait qu'il existe d'autres instruments que règles et compas (cf Duval Grand N n° 76).

Phase 3 : Analyse de manuels (2 heures)

Mise en commun (1 heure)

Liste des communications résumées. Les textes complets sont sur le CD.

C11 - Étude comparative de deux situations d'introduction du triangle en cycle 3.
Stéphane FABRE, Brigitte GRUGEON-ALLYS.

C12 - Comparaison franco-espagnole de ressources sur l'enseignement de la modélisation.
Richard CABASSUT, Ferrando Irene

C13 - Expériences spatiales et apprentissages géométriques en GS et au CP : autour de l'appréhension de la rectitude.
Jacques DOUAIRE, Fabien EMPRIN

C14 - Enseignement de la géométrie à des élèves dyspraxiques visuo-spatiaux.
Edith PETITFOUR

C15 – Étude d'un dispositif articulant production de ressources et formation continue en géométrie : quels effets sur les pratiques des enseignants ?
Régis LECLERCQ, Christine MANGIANTE-ORSOLA

C16 – L'enseignement du concept de volume en CM2.
Karine MOLVINGER

C17 – Géométrie dynamique au cycle 3 : instrumentation et ingénierie didactique.
Isabelle PAYET

C18 – A la découverte des triangles :de la manipulation de segments dans un logiciel de mathématiques dynamiques à la construction à la règle et au compas.
Anne VOLTOLINI, Anne CALPE, Sophie SOURY-LAVERGNE

C21 – Un exemple de circulation des savoirs entre recherche et formation.
Monique CHARLES-PEZARD, Pascale MASSELOT, Denis BUTLEN

C22 – Une expérience de formation continue en ligne et à distance en didactique des mathématiques.
Jean-Philippe GEORGET, Avenilde ROMO-VAZQUEZ

C25 - Géométrie et visualisation : une réflexion sur l'importance des processus de médiation dans l'apprentissage et le réinvestissement de notions mathématiques « non géométriques ».
Raquel I. BARRERA CURIN

C26 – Une situation de reproduction de figures au cycle 2 : mises en œuvre et analyses.
Claire WINDER

C28 – Analyse d'un dispositif de formation en géométrie plane pour les futurs professeurs des écoles autour de pliages, de constructions à la règle et au compas, de rédaction de programmes de construction et de justifications de ces programmes.
Françoise JORE

ÉTUDE COMPARATIVE DE DEUX SITUATIONS SUR LES TRIANGLES PARTICULIERS AU CYCLE 3

Stéphane FABRE
MCF, UPJV IUFM AMIENS
CAREF
Stephane.fabre@u-picardie.fr

Brigitte GRUGEON-ALLYS
PU, UNIVERSITE PARIS EST CRETEIL IUFM
LDAR Université Paris Diderot
Brigitte.grugeon@orange.fr

Résumé
Dans un premier temps, nous comparons deux situations d'apprentissage ayant le même objectif : nommer et caractériser des triangles particuliers (triangles isocèles et équilatéraux).
La première situation est extraite du manuel « objectif calcul » de CM2 (page 34, aux éditions Hatier 1996), la deuxième nommée « triangle paille » est une situation que nous avons élaborée dans le cadre de la recherche ORPROF[1]. Ces deux situations mettent en jeu les mêmes supports (des pailles) et les tâches proposées aux élèves sont proches (construire des triangles avec les pailles). Cependant à travers l'étude des différences entre certaines variables (présence de ficelles, constitution des paquets de pailles, longueur et nombre de pailles, organisation du travail..), nous voulons montrer par une analyse *a priori* que le milieu créé dans la situation « triangle paille » semble plus robuste et favorise davantage les interactions élèves/milieu pour permettre aux élèves de valider ou d'invalider leurs procédures.
Ensuite, nous analysons la mise en œuvre de la situation « triangle paille » dans une classe de CE2/CM1. Cette analyse des interactions prend en compte la structuration du milieu (Margolinas 2005).
Elle met en évidence le rôle important du maître pour faire vivre la situation tout en laissant l'activité à la charge des élèves.

I - COMPARAISON DE DEUX SITUATIONS

1 Définition du cadre géométrique

A la suite des travaux de Ferdinand Gonseth, dans leur article « Géométrie et paradigmes géométriques » (1999), Catherine Houdement et Alain Kuzniak définissent trois géométries : *la géométrie naturelle*, *la géométrie axiomatique naturelle*, *la géométrique formaliste*, et, pour chacune d'entre elles, 3 piliers autour desquels elles s'organisent : *l'intuition*, *l'expérience* et *la déduction*. Ils définissent :

L'intuition, comme « une prise de contact immédiate, directe, concrète avec son objet » et soulignent que « cette interaction peut évoluer avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences et donc de connaissances a posteriori ».

L'expérience qui « permet d'approcher la géométrie en restant proche de l'action et d'une certaine réalité physique ». Les « pliages, découpages et constructions […] constituent la base de cette approche expérimentale qui peut être développée à l'école ».

La déduction qui « permet d'atteindre de nouvelles informations à partir de celles déjà acquises sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure ».

[1]Objets et ressources professionnelles à l'école primaire : Quelles références et quels usages pour le enseignants ? Recherche du pôle Nord-Est des IUFM.

La géométrie rencontrée à l'école s'apparente à la géométrie naturelle qui a « pour source de validation la réalité, le sensible ». Les auteurs ajoutent que « la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie naturelle de type expérimental ».

Ici, l'intuition et l'expérience sont liées à la perception d'objets concrets, la déduction s'exerce à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments.

2 Présentation de la séance « triangle - pailles »

A la fin du cycle 2, les élèves ont une reconnaissance globale des triangles. Ils les perçoivent comme des surfaces délimitées par un contour fermé caractéristique. Les seuls triangles étudiés (en se référant aux Instructions Officielles de 2008) sont les triangles rectangles identifiés grâce à la présence d'un angle droit. L'objectif de notre séance est d'amener les élèves à construire des triangles à partir des côtés et d'en définir certains à partir des propriétés relatives aux longueurs de leurs côtés (triangles isocèles et équilatéraux).

La construction de triangles à partir de pailles prédécoupées semble être une tâche potentiellement satisfaisante pour atteindre nos objectifs. En effet la construction papier / crayon n'est pas disponible à ce niveau de classe, et les pailles vont matérialiser les côtés des triangles.

Notre situation s'inscrit dans le cadre de la géométrie naturelle de type expérimental.

C'est la première séance d'une séquence dont les objectifs sont :

• Définir un triangle comme un polygone à trois côtés.

• Reconnaître, nommer et décrire des triangles (en particuliers des triangles isocèles et équilatéraux).

• Utiliser un vocabulaire géométrique spécifique : côté.

La séquence comporte trois séances clés :

Séance 1 (séance triangle-pailles): Les élèves doivent construire des triangles différents en utilisant des pailles de longueurs et de couleurs différentes.

Séance 2 : Les élèves doivent classer les triangles construits lors de la séance 1 en précisant leurs critères (Annexe 1).

Séance 3 : les élèves doivent construire un triangle équilatéral, un triangle isocèle et un triangle ayant ses trois côtés de longueurs différentes avec des pailles de la même couleur (Annexe 1).

2.1 Description de la séance 1.

Objectifs de la séance :

- Connaître et utiliser le vocabulaire relatif aux triangles : côtés ;
- Définir et construire des triangles comme polygones à trois côtés ;
- Première approche de la notion de triangles superposables ;
- En situation, « première rencontre » avec l'inégalité triangulaire.

Type de travail : par groupe de 2 élèves.

Matériel : - des pailles de différentes couleurs correspondant à différentes longueurs : pailles vertes (6 cm), pailles jaunes (9 cm), pailles bleues (12 cm) et pailles roses (15cm).

- de la ficelle.
- des aimants pour la mise en commun.
- une feuille par groupe.

Chaque groupe reçoit un paquet numéroté de 12 pailles et 4 ficelles.

Constitution des paquets :

- Paquet A : 4 roses/4 bleues/4 jaunes;
- Paquet B : 4 roses/4 jaunes/4 vertes;
- Paquet C : 4 roses/4 bleues/2 jaunes/2 vertes;

- Paquet D : 1 rose/3 bleues/2 jaunes/6 vertes;
- Paquet E : 2 roses/2 bleues/4 jaunes/4 vertes;
- Paquet F : 4 roses/2 bleues/4 jaunes/2 vertes;
- Paquet G : 2 roses/4 bleues/2 jaunes/4 vertes;

Consigne : « Vous travaillerez en groupe de 2. Chaque groupe va recevoir un paquet de 12 pailles en couleur et 4 morceaux de ficelles avec lesquelles vous devez construire 4 triangles différents. Vous aurez aussi une feuille de papier où vous écrirez la lettre correspondant à votre paquet puis vous décrirez chaque triangle construit ».

2.2 Première analyse de la situation

Chaque paquet de 12 pailles et 4 ficelles constitue le milieu matériel de la situation. Pour construire leurs triangles les élèves doivent enfiler un bout de ficelle au travers de 3 pailles.

– La situation comporte trois contraintes fortes pour la réalisation de la tâche des élèves :
  - la première est la nécessité pour les élèves d'utiliser la totalité des pailles pour accomplir leur tâche (douze pailles pour quatre triangles) ;
  - la deuxième explicitée dans la consigne concerne l'obtention de quatre triangles « différents ». Pour les élèves deux triangles sont différents s'ils sont construits avec au moins une paille de couleur différente ;
  - la troisième, non explicite, est une conséquence de l'inégalité triangulaire : tout triplet de pailles ne permet pas forcément d'obtenir un triangle.

  Ces trois contraintes vont amener les élèves lors de la phase d'action à réaliser des essais, des ajustements et des déconstructions de triangles pour en réaliser de nouveaux. C'est à travers ces manipulations que les concepts mathématiques prendront du sens chez les élèves.
– La construction de triangles avec des pailles (formes vides) permet de mettre en évidence les notions de côté et de polygone à 3 côtés, à la différence de situations papier/crayon ou de manipulation de formes cartonnées où le triangle apparaît comme une surface plane. Les triangles - pailles sont des objets de l'espace que les élèves peuvent manipuler.
– À la différence d'un tracé (conjuguant les difficultés d'exactitude du tracé et de manipulation des outils), la construction de triangles en enfilant une ficelle dans des pailles est relativement simple pour les élèves. De plus, les compétences et connaissances liées à la manipulation des outils de tracé ne sont pas à la portée des élèves de ce niveau de classe (CE2-CM1).
– Les pailles de la même couleur ont la même longueur, donc les triangles équilatéraux apparaîtront comme des triangles monocolores et les isocèles comme des triangles bicolores. Ce sont donc des propriétés perceptives qui permettront de les distinguer.
  Les élèves ne connaissent ni les longueurs des pailles, ni la correspondance entre couleur et longueur. Cependant, les différences de tailles des pailles de couleurs différentes sont si grandes (3 cm au moins) qu'elles vont amener les élèves à remarquer cette correspondance.
– Lors de la construction, une interrogation peut apparaître : l'ordre de placement des pailles sur la ficelle influe-t-il sur le triangle obtenu ?
– Les variables didactiques : les paquets permettent à chaque groupe (s'il respecte les consignes) de construire au moins un triangle isocèle ou équilatéral. Cependant les nombres de solutions de triplets de pailles constituant des triangles sont différents pour chaque paquet. Par exemple :

Paquet A : 4 roses/4 bleues/4 jaunes. Il y a un grand nombre de solutions : 3R/3B/3J/RBJ ; 3R/R2B/2BJ/3J ; 2RB/2RJ/3B/3J ; 2RB/2RJ/2BJ/3J…(une dizaine). Les élèves en trouveront facilement une.

Paquet B: 4 roses/4 jaunes/4 vertes. Il n'y a que trois solutions : 3R/1R2J/2J1V/3V, 2RJ/2RV/3J/3V et 2RJ/2RV/2JV/2VJ. Les élèves auront plus de difficulté à trouver une solution. Le milieu est plus résistant.

2.3 Description de la séance d'Objectif Calcul

Le manuel Objectif calcul, niveau CM2, des éditions Hatier de 1996 présentait une situation proche de la situation présentée ci-dessus tant dans ses objectifs que dans la tâche des élèves. Dans leur article, Catherine Houdement et Alain Kuzniak présentent cette situation pour illustrer leur propos sur la géométrie naturelle expérimentale.

Procure-toi des pailles du type de celles que tu utilises pour boire des jus de fruits.
Il en faut au moins : 10 rouges, 10 vertes et 10 bleues.

1. Coupe-les pour qu'elles correspondent aux longueurs ci-dessous.



2. En utilisant une seule paille par côté,
combien peux-tu construire de triangles différents :
- avec les seules pailles rouges ?
- avec les pailles rouges et vertes ?
- avec les pailles rouges, vertes et bleues ?

3. Quelles remarques peux-tu faire
sur les triangles que tu as formés ?

4. Sur du papier uni, construis un
des triangles obtenus à la question 2.



Objectif calcul CM2 p 34 (Hatier 1996)

D'après le livre du maître, les objectifs sont :

- Reconnaître les différentes sortes de triangles et les propriétés qui leur sont associées.

- Construire les différents types de triangles.

Le Matériel :

Pour chaque élève ou chaque groupe :

- 10 pailles rouges de 4 cm de longueur, 10 pailles vertes de 5,6 cm de longueur, 10 pailles bleues de 8 cm de longueur et 6 pailles jaunes de 12 cm de longueur *(qui ne sont pas représentées dans le manuels de l'élève)*.

- Une feuille de carton *(sur laquelle les élèves doivent fixer les triangles construits)*.

- punaises, ciseaux.

2.4 Analyse comparée des deux situations :

Potentiel d'a-didacticité des situations

• En situation **d'action** en rétroaction avec le milieu matériel et en travail par groupe de 2, la situation triangle-pailles permet aux élèves de se confronter aux conditions d'existence d'un triangle (inégalité triangulaire) via la mise en évidence de 3 pailles qui « ne se referment pas » ou qui réalisent une « barre » ou un « trait » (par exemple avec le paquet B, l'assemblage rose-jaune-vert n'est pas un triangle). Nous pointons le rôle important que prend l'action de nouer la ficelle : l'inégalité triangulaire se traduit par le résultat d'une expérience (en reprenant les termes de Catherine Houdement et Alain Kuzniak) que les élèves peuvent évaluer. Elle constitue un événement que les élèves gardent en mémoire. De plus au début de la construction les pailles sont enfilées bout à bout sur la ficelle et le triangle apparaît (ou pas) en faisant un nœud

indépendamment du résultat escompté par l'élève. Le résultat de l'expérience et son interprétation sont indépendants de l'expérimentateur. Avec un même triplet de pailles, les élèves obtiennent le même résultat.

Dans le cas de la situation d'Objectif calcul, la construction du « triangle aplati 4-4-8 » et son interprétation comme un non-triangle dépendront de la précision dans le positionnement des pailles ainsi que de la « volonté » de l'élève d'obtenir un triangle (liée au contrat didactique). En effet pour construire un triangle, les élèves anticipent la forme triangle dans le positionnement initial des trois pailles puis ils ajustent les pailles pour faire coïncider les extrémités. Le résultat de l'expérience dépend de l'habileté de l'expérimentateur mais aussi de ses représentations initiales. De plus comme il n'est pas mentionné qu'il faut utiliser la totalité des pailles (et ce n'est pas le cas pour les deux premiers moments de l'activité), il est possible que les élèves ne rencontrent pas la situation du triangle aplati.

• Dans la situation triangle - pailles, c'est le milieu matériel (la composition des paquets) qui amène les élèves à construire des triangles particuliers (situation a-didactique). Dans la séance d'Objectif calcul, c'est le déroulement de la séance et les consignes qui amènent les élèves à construire des triangles particuliers lors des deux premiers moments (volonté de l'enseignant). Le découpage en trois moments semble avoir pour but de permettre aux élèves d'élaborer une démarche systématique pour construire la totalité des triangles au troisième moment.

• Dans les deux situations, la comparaison visuelle de la couleur des côtés des triangles construits permet de mettre en évidence des triangles de nature différente ou d'invalider des choix qui ont été faits (par exemple dans la situation triangle-pailles avec le paquet B, l'assemblage trois verts pour un triangle équilatéral, trois triangles isocèles l'un vert-jaune-jaune, et deux rose-rose-jaune met en évidence que deux triangles sont identiques). Dans notre situation, un partage équitable des pailles entre les deux élèves du groupe avant toute construction peut conduire à plusieurs réalisations du même triangle (par exemple avec le paquet A, une répartition équitable 2 roses, 2 bleues et 2 jaunes entre les deux élèves du groupe peut conduire à deux triangles rose-rose-bleu et deux triangles bleu-jaune-jaune). La situation nécessite un travail de groupe.
L'égalité de deux triangles d'abord perçue comme une propriété visuelle (les trois côtés sont de la même couleur) peut être confirmée par une superposition des deux triangles. Nous passons donc d'une correspondance des couleurs à une égalité des longueurs des côtés. Ceci n'est pas possible dans la situation d'Objectif calcul car les triangles ne sont pas manipulables (il est vrai que si ce sont les élèves découpent les pailles en début de situation, ils savent que la même couleur correspond à la même longueur).

• Notre situation permet de faire une description de chaque triangle construit :
  - en français avec l'énumération des pailles et de leurs couleurs ;
  - par un schéma sur la feuille avec des couleurs différentes ;
  - ou en caractérisant les triangles en fonction de la taille de leurs côtés (par exemple, pour des triangles équilatéraux : « trois côtés de la même taille » ou « trois côtés de la même couleur »)

Potentiel de la situation de formulation et validation (mise en commun) :

Le milieu construit fournit au maître des conditions favorables pour amener les élèves à :
  - verbaliser les conditions d'existence d'un triangle,
  - formuler et décrire les caractéristiques des triangles construits avec différents niveaux de langage : en français avec l'énumération des pailles et de leurs couleurs, ou en caractérisant les triangles « 3 pailles avec des tailles différentes, … », ou encore, en utilisant un vocabulaire géométrique pour donner des informations sur la longueur des « côtés ».

II - UNE ANALYSE DU DÉROULEMENT DE LA SÉANCE

La situation « triangle - pailles » a été mise en place dans une classe de CE2/CM1 de l'école d'application Louise Macault de Laon. Elle a été filmée. Dans la suite, nous en transcrivons des extraits qui nous semblent significatifs notamment pendant la phase d'action.

Pour l'analyser, nous nous appuierons sur les outils développés par Claire Margolinas (2005) pour décrire la structuration du milieu. Ces outils permettent de décrire et de rendre compte de la complexité des interactions qui se nouent entre les élèves et le professeur dans un temps long pendant la gestion d'une situation ou de plusieurs séances. La modélisation d'une situation d'enseignement conduit à décrire les relations entre les différents systèmes en jeu dans la production du savoir visé. Une situation se caractérise par l'ensemble des rôles des actants (élèves et professeur) et de leurs relations avec le milieu dans une institution donnée. Le rôle du maître et la gestion de la situation peuvent être analysés en fonction des différentes postures des sujets (professeur et élèves) et du milieu sur lequel interagissent les sujets, la situation de niveau n-1 devenant le milieu de la situation de niveau n (Mn= Sn-1), la situation étant constituée des rapports existants entre le milieu M, l'élève E et le professeur P, c'est-à-dire tous les niveaux inférieurs (Cf. annexe 1). On peut résumer l'analyse prenant en compte les différentes postures des sujets et la structuration du milieu *via* ce tableau :

M+3 M de construction		P+3 P-noosphérien	S+3 S- noosphérienne
M+2 M de projet		P+2 P-constructeur	S+2 S- de construction
M+1 M-didactique	E+1 E-réflexif	P+1 P-projeteur	S+1 S de projeteur
M0 M d'apprentissage	E0 Elève	P0 Professeur	S0 S-didactique
M-1 M de référence	E-1 E-apprenant	P-1 P-observateur	S-1 S-d'apprentissage
M-2 M-objectif	E-2 E agissant		S-2 S de référence
M-3 M-matériel	E-3 E-objectif		S-3 S-objective

Tableau 1 - La structuration des milieux selon Claire Margolinas

1 Organisation du processus de dévolution par le maître

Etudions le rôle du professeur (P) dans l'organisation du processus de dévolution.

Après la formulation de la consigne, il reprend les termes des élèves (E0) pour parler de « fagot » et aborder la tâche de fabrication à faire. Les quatre interventions du maître :

- « *Sur cette feuille, vous allez marquer deux choses. Chacun des paquets - parce qu'il y a des paquets différents, vous n'allez pas tous avoir le même paquet - chacun des paquets comporte une lettre, donc vous commencez par noter cette lettre là et ensuite vous noterez les triangles que vous avez fabriqués : ce que vous avez utilisé comme pailles pour fabriquer le triangle* »,

- « *Tu peux me rappeler la consigne Maeva ? Combien est-ce qu'il faut en faire* ? »,

- « *Tu es sûre ?* »

- « *Combien tu as de ficelles* ? »

Elles pointent le rôle de P pour poursuivre le processus de dévolution. P engage d'abord une réflexion avec les élèves sur l'usage de l'artefact « pailles » : il organise le milieu matériel (M-3) pour faciliter l'engagement des élèves à percevoir les pailles attachées (M-2) comme des objets mathématiques (M-1). Les réponses des élèves puis l'implication des élèves dans la tâche indiquent l'impact de ces interventions pour favoriser la dévolution de la situation aux élèves.

2 Phase d'action : Construction de différents types de triangle

Le groupe observé a un paquet E composé de 2 pailles roses, de 2 pailles bleues, de 4 pailles jaunes et de 4 pailles vertes. Avec ce paquet, plusieurs solutions valides sont possibles.

Premier moment :

Deux triangles (B/J/V) identiques sont construits ainsi qu'un triangle (J/V/V).

Professeur : Qu'est-ce que vous pouvez me dire de ça ? »

Elève : « Moi, j'ai terminé le premier puis Maeva elle a fait le même, regardez. »

Ils ont tous les deux fait un triangle « rose, bleu, jaune ».

P. : « Je crois que vous devez travailler dans le groupe. »

Le maître s'éloigne.

E. : « Je te l'avais dit Maeva qu'il fallait faire attention. Il ne fallait pas faire pareil que moi. Maintenant …, puis après t'auras plus de bout de ficelle.

Maeva dénoue la ficelle de son triangle.

Le maitre (P-1 observateur), en montrant les triangles-pailles construits et attachés, amène les élèves à valider leurs productions et leur démarche de travail en les plaçant dans le milieu objectif.

La réponse de l'élève E-1(apprenant) montre que les élèves n'ont pas travaillé en groupe.

P-1 demande une évolution du contrat didactique (travail de groupe demandé) et amène les élèves du groupe (E-1) à modifier leur stratégie initiale pour construire quatre triangles-pailles différents. Maeva défait le triangle après rétroaction avec le milieu M-1 (deux représentations de triangles avec les mêmes pailles de même couleur).

Le rappel par le maître de l'enjeu d'apprentissage en se plaçant dans le milieu objectif (2 triangles pailles construits avec les mêmes pailles) a relancé le travail. Il (P-1 observateur) a peut-être court-circuité les interactions entre les élèves et le milieu et entre élèves.

Deuxième moment :

Maeva dénoue la ficelle de son triangle et son camarade commence à organiser leur recherche.

Elève : « Je mets un jaune et deux verts. »

Il s'aperçoit que c'est son deuxième triangle.

E. : « Le jaune …, tu mets ces trois-là ensemble. Et après tu mets ces trois-là. »

Il prépare pour Maeva deux lots : Un rose, un jaune et un vert ; un bleu, un jaune et un vert. Il pointe les lots.

E. : « En fait, tu fais un triangle comme ça et un triangle comme ça. »

… Maeva désigne les triangles déjà construits. La discussion semble porter sur l'ordre dans lequel placer les pailles.

E. : « …mais regarde, c'est pas les mêmes couleurs. Tu mets comme tu veux, c'est pas les mêmes couleurs. »

Il le répète plusieurs fois et prends le dernier lot. Chacun fabrique un triangle, mais celui de Maeva leur pose un problème.

Ici les interactions entre le maître et les élèves et celles entre les deux élèves deviennent avec le milieu matériel le nouveau milieu (M-1) où les élèves interprètent leurs constructions.

L'élève (E-2 agissant) s'appuie sur les représentations des triangles (comparaison des couleurs) pour organiser son tri et constitue 4 lots de 3 pailles de couleurs différentes dont deux triangles-pailles déjà construits (B/J/R et 2V/J attachés, B/J/V et R/J/V). Il se place dans une position d'apprenant en s'appuyant sur les rétroactions du milieu. Il interprète et formule les résultats : « *Tu mets comme tu veux, c'est pas les mêmes couleurs.* » en réponse à Maeva sur le rôle de l'ordre des pailles sur la ficelle. Maeva est en position d'expérimentateur guidé.

Mais le triplet de pailles de Maeva ne va pas constituer un triangle (R/J/V triangle aplati). Un nouveau milieu de référence M-1 apparaît qui à son tour va interagir avec les élèves.

Troisième moment :

Lors de la mise en commun, le groupe observé montre les 4 triangles construits au cours de la phase d'action (2JV/R2J/2BR/3V).

Élève : En fait, nous on a eu le même souci que … En fait on mettait deux verts et un rose et quand on faisait le nœud, ça faisait une barre.

Maeva : Après on a réussi à faire les quatre triangles.

E. : On a été obligé de les rouvrir.

Suite à la situation d'action où différentes interactions entre les élèves et les élèves et le milieu se sont succédées, le groupe est arrivé à construire 4 triangles différents.

Cet extrait montre bien le potentiel d'a-didacticité de la situation indiqué dans l'analyse *a priori*. Il montre des élèves confrontés aux conditions d'existence de triangle en accomplissant leur tâche.

Le professeur qui intervient pour rappeler les conditions que doivent remplir les triangles a permis l'avancée du temps didactique.

3 Formuler les conditions d'existence et décrire les différents types de triangles

Pendant la mise en commun, P0 amène les élèves à décrire les triangles construits. Ils s'appuient sur des termes correspondant à des objets du milieu M-2 (pailles ou pailles attachées), en précisant leur taille et leur couleur. Nolwen, une autre élève de la classe, en montrant les côtés jaunes et vert d'un triangle bleu, jaune, vert dit : « *Là, celle-là elle est plus grande que celle-ci. Et c'est un triangle* ». Et, montrant un assemblage rose, vert, vert : « *L'autre, ça fait un trait* ». Les questions relatives à l'existence des triangles sont abordées, mais restent contextualisées aux constructions de quelques élèves. Le langage utilisé par le maître concerne les pailles, la taille ou la longueur des pailles « *pourquoi tu me dis que les trois ont la même longueur* », « *le rapport entre la longueur et la couleur* ». La nature des triangles construits n'est pas abordée dans cette séance. Il n'y a pas de synthèse organisée par le maître pour faire évoluer la formulation de la définition des triangles et de ces constituants ou pour expliciter des conditions d'existence d'un triangle dans le monde de la géométrie. Le maître ne met pas en évidence les types de triangles envisagés.

III - CONCLUSION

À travers l'étude de cette situation, nous voyons l'intérêt didactique de l'utilisation et de la mise en œuvre en classe de situations « expérimentales » en géométrie. Elles permettent de donner du sens à des notions mathématiques dont l'apprentissage est trop souvent implicite (ici, les notions de côté d'un triangle ou de triangles particuliers) et d'en donner une représentation matérielle. Elles permettent aux élèves, à travers des manipulations, de modifier leur représentation première (tout triplet de pailles permet de construire un triangle) et d'aborder expérimentalement des propriétés mathématiques complexes (l'inégalité triangulaire). Cependant elles sont bien sûr insuffisantes pour permettre aux élèves d'appréhender le concept sous-jacent dans toute son étendue : les triangles - pailles sont des objets matériels, les triangles des notions mathématiques.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU, G. (1988) Le contrat didactique : Le milieu, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **9** (3), 309-336.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1999) Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*, **51,** 5-21.

MARGOLINAS, C. & RIVIERE, O. (2005) La préparation de séance : un élément du travail du professeur. *Petit x*, **69**, 32-57.

V - ANNEXE 1

Séance 2

Objectifs de la séance: - Classer des triangles suivant la longueur de leur côtés.

- Différencier et définir les triangles équilatéraux, les triangles isocèles.

Type de travail : groupe de 4 élèves

Matériel: - Les triangles réalisés lors de la séance 1, plus d'autres triangles construits par le maître avec les mêmes pailles. Chaque groupe de 4 élèves a une dizaine de triangles dont des équilatéraux et des isocèles.

- une feuille format A3.

Consigne : « Regroupez les triangles qui se ressemblent. Vous devez expliquer votre classement et présenter votre travail sur la feuille. »

Séance 3

Objectifs de la séance : Séance de réinvestissement.

Type de travail : groupe de deux élèves.

Matériel : - des pailles de la même couleur et de différentes longueurs :

S = 6 cm, N = 9 cm, D = 12 cm et Q = 15 cm.

- de la ficelle.

- des aimants pour la mise en commun.

- chaque groupe reçoit un paquet numéroté de 9 pailles et 3 ficelles. Il y a pour l'ensemble de la classe quatre paquets de pailles différents (soit trois fois quatre paquets). Constitution des paquets :

- Paquet A: 4 S/3N/2D ;
- Paquet B: 6S/1N/1D/1Q ;
- Paquet C: 3S/3N/2D/1Q ;
- Paquet D: 4S/2N/2S/1Q.

Comme pour la séance 1, les paquets ne présentent pas les mêmes difficultés pour construire les triangles demandés.

Consigne: « Vous allez travailler par groupe de 2. A chaque groupe je vais donner 9 pailles de la même couleur et trois ficelles. Comme la dernière fois vous allez construire trois triangles, mais il faudra qu'il y ait un triangle équilatéral, un triangle isocèle et un triangle ni équilatéral ni isocèle. Je veux un travail de groupe et rappelez-vous qu'il faut chercher avant de nouer la ficelle. »

COMPARAISON FRANCO-ESPAGNOLE DE RESSOURCES SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA MODÉLISATION

Richard CABASSUT
Enseignant, Université de Strasbourg
LDAR Université Paris 7
richard.cabassut@unistra.fr

Irène FERRANDO
Enseignante, Universidad de Valencia
Departamento de didáctica de las matematicás
irene.ferrando@uv.es

Résumé

La modélisation est un thème important des programmes de l'enseignement secondaire en France et en Espagne, et on peut également relier ce thème aux programmes de l'enseignement primaire. Dans cette étude, nous considérons différentes ressources de l'école primaire disponibles pour un enseignement de la modélisation. Nous adoptons une approche comparative entre les deux pays, pour mieux mettre en évidence les différences dans les ressources des manuels. Nous proposons une typologie des ressources en s'appuyant sur les fonctions qui vont y être assignées. Pour cela, nous étudions les compétences qui sont mises en jeu dans les tâches de modélisation et qui sont aussi en relation avec les recommandations des textes officiels des programmes d'enseignement de l'école primaire. Nous discutons aussi quelques implications possibles pour une formation à la modélisation des enseignants de l'école primaire.

Maass (2006) [1] étudie les cinq compétences qui interviennent quand les élèves font face à une tâche de modélisation :

- Compétence pour comprendre le problème réel et pour établir un modèle réel (hypothèses, simplifications, reconnaissances des variables et relations entre elles, recherche d'information).

- Compétence pour établir un modèle mathématique à partir du modèle réel (mathématisation de quantités et relations, simplification, choix de notation).

- Compétence pour résoudre des questions mathématiques à propos du modèle (stratégies heuristiques, savoir mathématique).

- Compétence pour interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle (interprétation, généralisation, usage approprié du langage mathématique et communication de la solution).

- Compétence pour valider la solution (analyse critique de la solution, révision du modèle, autres solutions possibles, généralisation).

[1] Les traductions à partir de l'anglais, de l'espagnol ou de l'allemand dans cet article ont été assurées par les auteurs de l'article.

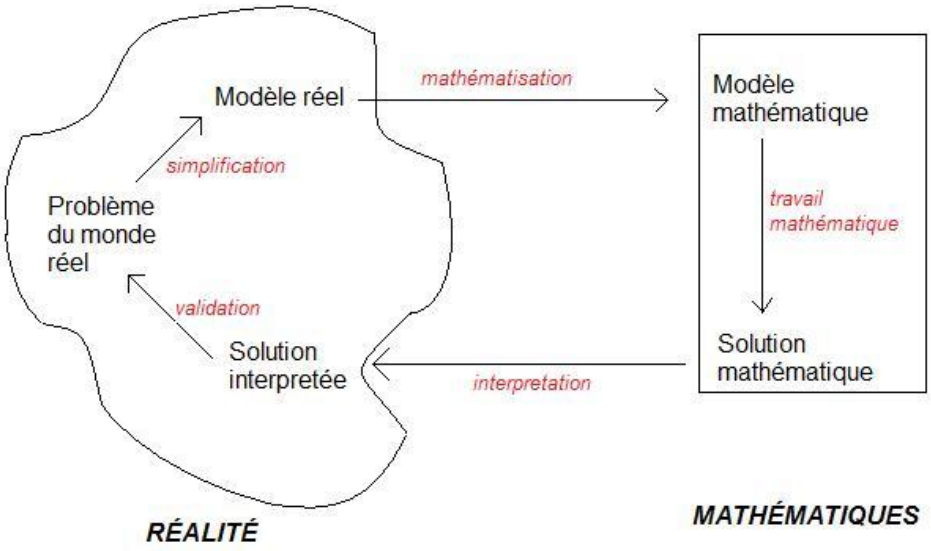


Fig. 1 : Diagramme du cycle de modélisation

Dans cet article nous proposons de comparer, en France et en Espagne, la mise en œuvre de ces compétences dans les programmes et dans des manuels de l'école primaire. Commençons par comparer les programmes.

I - LES COMPÉTENCES EN MODÉLISATION DANS LES PROGRAMMES

1 Les compétences en modélisation dans le programme espagnol de l'école primaire

Le programme espagnol de l'école primaire (BOE, 2007) est construit sur la base de huit compétences basiques que doivent se travailler le long des cycles primaire et secondaire (entre 6 et 16 ans). Les compétences, qui correspondent aux connaissances considérées indispensables d'un point de vue intégrateur et orienté vers l'application des savoirs acquis, sont les suivantes[2] :

- Compétence en communication (CC)
- Compétence mathématique (CM)
- Compétence sur la connaissance et l'interaction avec le monde physique (CCI)
- Savoir traiter de l'information et compétence digitale (CID)
- Compétence sociale (CS)
- Compétence culturelle et artistique (CCA)
- Compétence pour apprendre à apprendre (CAA)
- Être capable d'autonomie et d'initiative personnelle (AI)

La méthodologie, que nous adoptons dans cet article, consiste à examiner alors les compétences de modélisation de Maass et, pour chacune d'elle, à citer des extraits du programme officiel qui sont en rapport avec cette compétence de modélisation. Nous indiquons également, pour chaque extrait, quelle est sa relation avec les compétences basiques en rappelant au regard de l'extrait du programme le code correspondant de la compétence basique- CC, CM, CCI, CID, CS, CCA, CAA, AI. Ces mises en relations, par les auteurs de l'article, du programme officiel avec les compétences de modélisation d'une part, et les compétences basiques d'autre part se font sur la base de considérations sémantiques : si un extrait du programme officiel paraît rejoindre la signification

[2] Le programme utilise bien le terme « competencias » que nous traduisons par « compétences »

d'une compétence de modélisation (respectivement d'une compétence basique), la mise en relation est effectuée.

1.1 Compétence pour comprendre le problème réel et pour établir un modèle réel

(CC) liée aux « outils pour représenter mentalement, interpréter et comprendre la réalité ».

(CCI) « rend possible la compréhension des événements », «intègre les aptitudes pour (…) interpréter le monde » et «rend possible l'identification des questions ou des problèmes ». Tout cela «implique la compétence pour mettre en jeu les processus et les attitudes propres de l'analyse systématique et de recherche scientifique : poser des problèmes, … » .

(CID) « consiste à disposer des outils pour chercher, obtenir, traiter et communiquer l'information » ; cette compétence est associée avec « la recherche, la sélection, le registre et le traitement l'analyse de l'information ». De plus, « les technologies de l'information (…) s'utiliseront avec une fonction génératrice, en les employant, par exemple, comme outil pour obtenir des modèles de processus mathématiques, physiques, sociaux,… »

(CCA) cette compétence met en jeu « les aptitudes de pensée divergente et convergente puisqu'elle implique la réélaboration d'idées ».

(AI) cette compétence exige « l'analyse des possibilités et des limitations, de connaitre les phases de développement d'un projet, de planifier, de prendre des décisions, … ».

1.2 Compétence pour établir un modèle mathématique à partir du modèle réel

(CM) correspond à l'aptitude pour «résoudre des problèmes qui sont en relation avec le quotidien et avec le monde du travail ».

Dans la description des mathématiques qui doivent se travailler en primaire on trouve aussi quelques références à cette compétence : «(Les mathématiques) permettent structurer les savoirs qu'on obtient de la réalité, l'analyser et obtenir d'autres informations pour mieux la connaitre et l'évaluer, ainsi que prendre des décisions » ; de plus, «elles permettent qu'on se pose des questions, qu'on obtienne des modèles et qu'on identifie des relations pour analyser les phénomènes et les situations qui se présentent dans la réalité ».

1.3 Compétence pour résoudre des questions mathématiques à propos du modèle

(CM) la compétence mathématique exige « la connaissance et la gestion des éléments mathématiques basiques (types de nombres, mesures, symboles, éléments géométriques,…) ». Dans le programme des mathématiques du primaire, on insiste sur l'idée « de chercher une alphabétisation numérique, entendue comme la capacité d'affronter avec succès les situations où interviennent les nombres, ses relations, pour obtenir l'information utile ».

1.4 Compétence pour interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle

(CM) correspond à «l'aptitude pour interpréter et exprimer clairement et de forme précise des informations ou des données ». À travers la matière de mathématiques, les élèves doivent comprendre que «l'interprétation des résultats est un contenu préalable et prioritaire face à la dextérité de calcul ».

1.5 Compétence pour valider la solution

(CM) les processus liés à cette compétence « permettent d'estimer et de juger la logique et la valeur des arguments et des informations (…) ce qui conduit à identifier la validité des raisonnements ainsi qu'à évaluer le degré de certitude associé aux résultats obtenus. »

(CCI) cette compétence « fournit, aussi, des compétences associées à la planification et gestion des solutions ».

(CID) permet de « communiquer l'information et les connaissances acquises en employant des ressources d'expression avec l'incorporation (…) des possibilités offertes par les technologies de l'information et la communication ».

(CAA) « implique la curiosité pour se poser des questions, d'identifier et de gérer toutes les réponses possibles face à une même situation ou un problème en utilisant diverses stratégies qui permettent d'affronter la prise de décisions critiques, avec toute l'information disponible ».

2 Les compétences en modélisation dans le programme français de l'école primaire

Dans le programme français, on peut distinguer différents textes officiels de référence :

- le programme officiel de 2008 (BOEN 2008),
- le socle commun de 2006 (BOEN 2006),
- les documents ressources sur le nombre au cycle 2 (2010) et au cycle 3 (2012),
- d'autres documents comme les anciens documents d'accompagnement des programmes de 2002, notamment sur les problèmes (2005), ou encore le rapport de l'inspection générale sur l'enseignement des mathématiques en cycle 3 (2010).

Concentrons-nous sur le socle commun et sur le programme de 2008, en adoptant la même catégorisation que pour les compétences basiques espagnoles (CC, CM, CCI, CID, CS, CCA, CAA, AI). Les compétences qui apparaissent dans le socle commun français sont :

- la maîtrise de la langue française et la pratique d'une langue étrangère (CC)
- la connaissance des principaux éléments de mathématiques (CM)
- la maîtrise d'une culture scientifique et technologique (CCI)
- la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication (CID)
- la possession d'une culture humaniste (CCA)
- les compétences sociales et civiques (CS)
- l'accession à l'autonomie et l'acquisition de l'esprit d'initiative (AI)

Déclinons maintenant les compétences de modélisation, dans la catégorisation de Maass, avec des extraits des textes officiels référant au socle commun (SO) ou bien au programme de 2008.

2.1 Compétence pour comprendre le problème réel et pour établir un modèle réel

- pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner (SO)
- manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter (SO)
- estimer l'ordre de grandeur d'un résultat (SO)
- mettre à l'essai plusieurs pistes de solutions
- exprimer et exploiter les résultats d'une mesure ou d'une recherche en utilisant un vocabulaire scientifique à l'écrit et à l'oral
- maîtriser des connaissances dans divers domaines scientifiques
- mobiliser ses connaissances dans des contextes scientifiques différents et dans des activités de la vie courante (par exemple, apprécier l'équilibre d'un repas) (SO)
- prendre part à un dialogue : prendre la parole devant les autres, écouter autrui, formuler et justifier un point de vue (SO)
- montrer une certaine persévérance dans toutes les activités (SO)
- utiliser l'outil informatique pour s'informer, se documenter, présenter un travail (SO)

2.2 Compétence pour établir un modèle mathématique à partir du modèle réel

- pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner (SO)
- manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter (SO)
- mettre à l'essai plusieurs pistes de solutions ;
- exprimer et exploiter les résultats d'une mesure ou d'une recherche en utilisant un vocabulaire scientifique à l'écrit et à l'oral ;
- maîtriser des connaissances dans divers domaines scientifiques ;
- mobiliser ses connaissances dans des contextes scientifiques différents et dans des activités de la vie courante (par exemple, apprécier l'équilibre d'un repas) (SO)
- prendre part à un dialogue : prendre la parole devant les autres, écouter autrui, formuler et justifier un point de vue (SO)

2.3 Compétence pour résoudre des questions mathématiques à propos du modèle

- résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres (SO)
- savoir organiser des informations numériques ou géométriques, mesures, "règle de trois", figures géométriques, schémas (SO)
- justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat (SO)
- lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques (SO)

2.4 Compétence pour interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle

- justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat (SO)
- lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques (SO)

2.5 Compétence pour valider la solution

- estimer l'ordre de grandeur d'un résultat (SO)
- faire preuve d'esprit critique face à l'information et à son traitement (SO)
- prendre part à un dialogue : prendre la parole devant les autres, écouter autrui, formuler et justifier un point de vue (SO)
- commencer à savoir s'auto-évaluer dans des situations simples (SO).

Ainsi Maass a proposé une catégorisation des compétences de modélisation en cinq grandes catégories. Nous avons pu analyser les programmes à partir de ces catégories et observer que des relations peuvent être construites entre les compétences basiques et les compétences de modélisation. De notre point de vue, les activités de modélisation où on travaille le cycle complet sont la clef pour travailler les compétences basiques.

II - LES COMPÉTENCES DANS DES MANUELS

Nous allons maintenant illustrer la mise en œuvre des compétences de modélisation dans des manuels. De nombreuses études (Margolinas, Wozniak 2010) ont montré l'importance des manuels scolaires dans l'enseignement. Pour les manuels espagnols, il a été choisi la collection la plus utilisée. Pour la France, il ne s'agit pas de choisir les manuels les plus utilisés ou les plus représentatifs : il est difficile de faire une sélection suivant ces critères en l'absence d'outils incontestables mesurant la représentativité ou l'utilisation. Il s'agit plutôt de construire une clinique de mises en œuvre des compétences de modélisation dans des manuels. On observera la difficulté à trouver, pour certaines compétences, leur mise en œuvre dans des manuels. Nous

livrerons les conclusions de l'observation dans la dernière partie.

1 Comprendre le problème réel et établir un modèle réel

1.1 Distinguer les questions mathématiques des questions extra-mathématiques

L'activité présentée ci-contre correspond à « pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner » ; cet exemple est extrait d'un livre français niveau CP (ERMEL 2000, p. 85). On demande aux élèves de formuler des questions à partir de l'image proposée et de distinguer les questions mathématiques (par exemple mettant en jeu un dénombrement) des questions extra-mathématiques. Cet extrait est intéressant car il concerne la première année de l'école primaire et une collection de manuel emblématique pour la formation des maîtres.



1.2 Faire des hypothèses sur le monde réel

Cet extrait, adressé aux élèves de CM1 (Myx & al. 2003, p.141) montre qu'une connaissance extra-mathématique est institutionnalisée dans le manuel de mathématiques pour permettre aux élèves de la mobiliser dans la phase de construction d'un modèle.

La proportionnalité

Le prix de la viande est proportionnel à son poids.
Le prix des bouteilles est proportionnel au nombre de bouteilles.
Le prix d'un tissu est proportionnel à sa longueur.

Dans les situations de la vie quotidienne, les prix sont, en général, **proportionnels** aux quantités.

Dans un barème, les deux grandeurs sont proportionnelles.

Pour trouver le prix de plusieurs objets, je multiplie le nombre d'objets par leur prix unitaire.

La distance sur le terrain est proportionnelle à celle de la carte.

Pour trouver la distance sur le terrain, je multiplie la distance sur la carte par l'échelle.

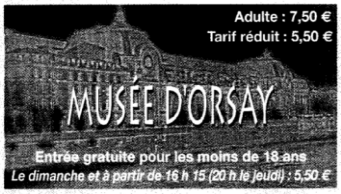
Les trajets sont proportionnels aux durées lorsque la vitesse ne change pas.

Lorsque la durée **double**, triple, quadruple… la **mesure** du trajet double, triple, quadruple.

1.3 Relier données utiles et questions simples

Les deux activités suivantes sont extraites de Caloudis et al. (2008, p.60, 70), et adressées aux élèves de CM2. Elles illustrent le travail sur la distinction entre données utiles et données inutiles par rapport à la question posée. On observe que les questions proposées ou à proposer sont fermées : il n'y a pas plusieurs hypothèses qui pourraient orienter vers des réponses différentes à la même question. Ce sont plutôt des questions intermédiaires simples que l'on trouverait dans le cadre d'un problème à plusieurs étapes.

Aujourd'hui dimanche, un père emmène ses deux enfants âgés de 8 et 10 ans au musée d'Orsay.



Les informations contenues dans un énoncé de problème permettent de trouver la ou les questions auxquelles on peut répondre.

Attention ! Il est très important de bien comprendre la situation proposée avant de débuter la résolution d'un problème.

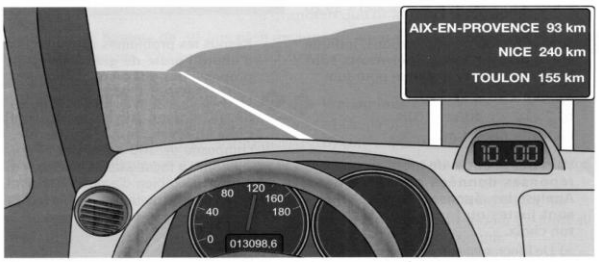
1 **Trouve la question qui complète chaque énoncé.**

A	Julien s'est couché à 23 h 40 et s'est levé à 10 h 20.	1	Quel âge a-t-il ?
B	Au marché, papa achète 5 kg de pommes de terre, 1 kg de bananes et 500 g de cerises.	2	À quelle heure arrive-t-il ?
C	Papy achète une douzaine d'œufs à 2,10 €, un fromage à 1,70 € et 1 kg de pêches à 2 €.	3	Combien de temps a-t-il dormi ?
D	Le TGV part de Paris à 10 h 10. Il met 3 h 03 pour arriver à Marseille.	4	Quelle quantité achète-t-il ?
E	Paul a 6 ans, Damien a trois ans de plus que lui.	5	Combien a-t-il dépensé ?

6 Produire des énoncés

Pour rédiger un énoncé, il faut inventer une situation comportant des données numériques et poser une ou plusieurs questions auxquelles on peut répondre en se servant des données fournies.

1 **Observe ce dessin.**



a) **Quelles informations t'apporte ce dessin ?**
Peux-tu expliquer les données chiffrées comme :
013098,6 120 155

b) **Recopie et complète cet énoncé par une question.**
Bertrand arrive à Aix-en-Provence et souhaite se rendre à Nice.

c) **Trouve une question en te servant du compteur kilométrique et du panneau indicateur.**

d) **Trouve une question en te servant de la vitesse de la voiture, de l'heure et de la distance qu'il reste à parcourir pour aller à Nice.**

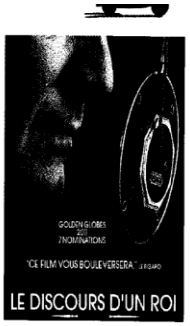
1.4 Relier données utiles et questions complexes

L'activité suivante est extraite d'un livre adressé au CM1 (Brault et al. 2012, p.36). À partir d'une situation donnée (une visite au cinéma) et d'une question complexe, l'élève doit retrouver quelles sont les questions intermédiaires simples qui vont aider à résoudre le problème, puis le résoudre. Par rapport aux activités précédentes, la question à laquelle relier les informations utiles est une question complexe.

Je résous un problème en posant les bonnes questions

Énoncé
Une école organise une sortie pour aller voir au cinéma le film *Le Discours d'un roi*.
275 élèves participent à la sortie.
Ils sont accompagnés par 16 adultes.
La salle de cinéma est constituée de 21 rangées de 14 sièges.

Question
Y aura-t-il assez de sièges pour tout le monde ?

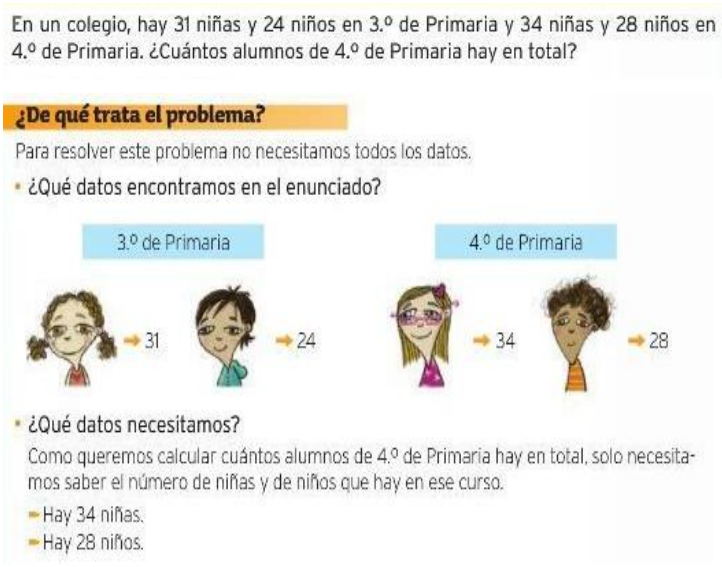


1• Parmi les questions suivantes, laquelle n'est pas utile à la résolution de ce problème ?

Combien y a-t-il de sièges dans la salle de cinéma ?	Quel est le titre du film ?	Combien y a-t-il de participants à la sortie scolaire ?

2• Réponds aux deux questions restantes.

3• Déduis-en alors s'il y aura assez de sièges pour tout le monde.


En un colegio, hay 31 niñas y 24 niños en 3.º de Primaria y 34 niñas y 28 niños en 4.º de Primaria. ¿Cuántos alumnos de 4.º de Primaria hay en total?

¿De qué trata el problema?

Para resolver este problema no necesitamos todos los datos.

- ¿Qué datos encontramos en el enunciado?

3.º de Primaria → 31 → 24

4.º de Primaria → 34 → 28

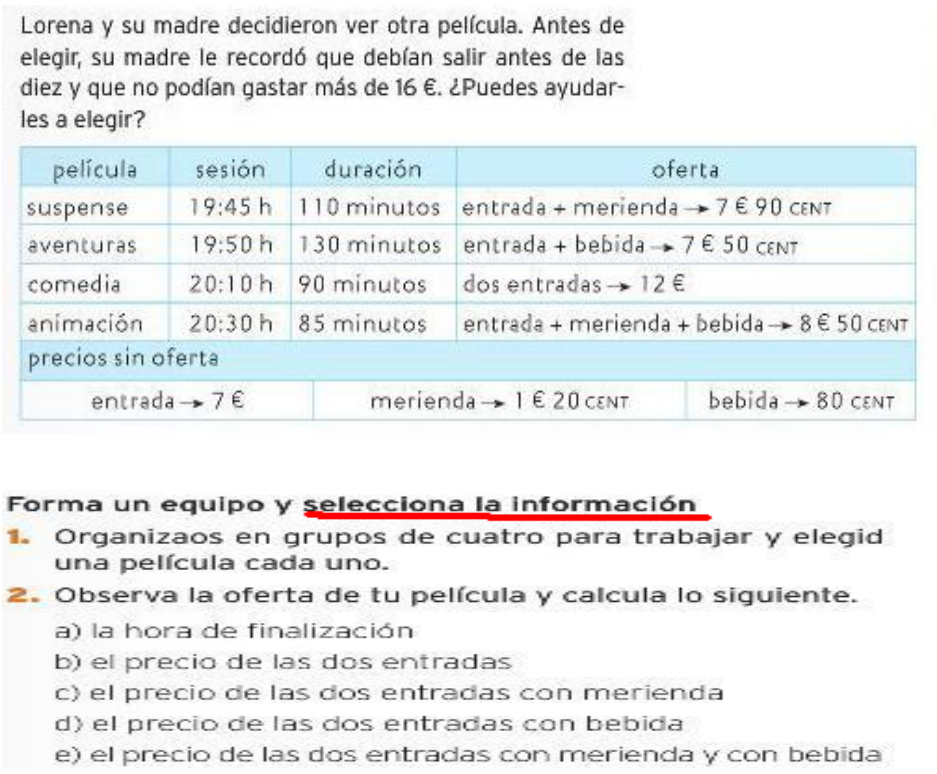
- ¿Qué datos necesitamos?

Como queremos calcular cuántos alumnos de 4.º de Primaria hay en total, solo necesitamos saber el número de niñas y de niños que hay en ese curso.

- Hay 34 niñas.
- Hay 28 niños.

Ce problème apparaît dans un livre espagnol adressé aux élèves de CE2 (González et al. 2012, p.32). Il présente un problème et une résolution détaillée. Dans l'énoncé, on retrouve le nombre de filles et de garçons qui étudient en CE2 et CM1, la question posée est : combien d'élèves y a-t-il en CM1 ? Dans la résolution, on retrouve une schématisation graphique des données de l'énoncé et une question explicite : *De quelles données a-t-on besoin ?* L'objectif est que les élèves apprennent à discerner les données utiles des données inutiles par rapport à la question posée.

L'activité suivante (González et al. 2012, p.123) concerne des élèves de CE2 qui doivent la résoudre en groupes. L'énoncé commence avec la description d'une situation : une fille et sa mère veulent aller voir un film au cinéma, elles ont une limitation horaire et économique. La grille illustre les différentes formules et les horaires. Avant les questions, on retrouve une phrase importante : *« sélectionne l'information »*[3].


Lorena y su madre decidieron ver otra película. Antes de elegir, su madre le recordó que debían salir antes de las diez y que no podían gastar más de 16 €. ¿Puedes ayudarles a elegir?

película	sesión	duración	oferta
suspense	19:45 h	110 minutos	entrada + merienda → 7 € 90 CENT
aventuras	19:50 h	130 minutos	entrada + bebida → 7 € 50 CENT
comedia	20:10 h	90 minutos	dos entradas → 12 €
animación	20:30 h	85 minutos	entrada + merienda + bebida → 8 € 50 CENT

precios sin oferta

entrada → 7 €	merienda → 1 € 20 CENT	bebida → 80 CENT

Forma un equipo y selecciona la información

1. Organizaos en grupos de cuatro para trabajar y elegid una película cada uno.
2. Observa la oferta de tu película y calcula lo siguiente.
   a) la hora de finalización
   b) el precio de las dos entradas
   c) el precio de las dos entradas con merienda
   d) el precio de las dos entradas con bebida
   e) el precio de las dos entradas con merienda y con bebida

On observe à partir de ces exemples que le tri d'informations utiles/inutiles dans l'énoncé permet de travailler deux compétences : la compétence en communication ainsi que le traitement de l'information et la compétence digitale. En effet, selon le programme officiel espagnol, la

[3] C'est nous qui soulignons en rouge dans le texte espagnol les passages qui nous semblent intéressants pour notre observation.

compétence en communication est liée « aux outils pour représenter mentalement, interpréter et comprendre la réalité ». Puis, le traitement de l'information est associé à « la recherche, la sélection, le registre et le traitement ou l'analyse de l'information ».

1.5 Chercher des informations en dehors de l'énoncé

L'activité suivante correspond à un livre espagnol pour élèves de CE2 (González et al. 2012, p.193). L'objectif est d'estimer une quantité d'eau qu'un élève ingère chaque jour. Dans l'énoncé on retrouve une grille pour aider à la résolution mais on suggère aussi de consulter les autres élèves pour des informations complémentaires : « *Si tu ne connais pas la quantité de liquide qu'on peut mettre dans un récipient, consulte les camarades de ton équipe*«.

La abuela de Raúl le explica que las personas necesitamos beber, al menos, 2 l de agua al día. ¿Quieres comprobar si tú los tomas?

Forma un equipo y piensa qué líquidos tomas

1. En grupos de tres compañeros fijáos en esta tabla.

líquido	cantidad
1 taza de leche	33 cl
2 vasos de agua	50 cl
1 refresco	33 cl

2. Elabora una tabla como la anterior, con los líquidos que sueles beber a lo largo del día. Si dudas de la cantidad de líquido que cabe en algún recipiente, consúltalo con tus compañeros de equipo.

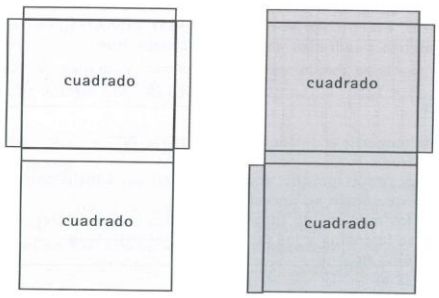
Ce type d'activités renforce le développement de la compétence sur la connaissance et l'interaction avec le monde physique. En effet cette compétence « rend possible la compréhension des événements » et « l'identification des questions ou des problèmes ». Tout cela « implique la compétence pour mettre en jeu les processus et les attitudes propres de l'analyse systématique et de recherche scientifique» (BOE 2007). En effet, pour résoudre les activités précédentes, les élèves doivent aborder l'analyse de l'énoncé pour trier les informations pertinentes ainsi que pour trouver les questions qui peuvent être utiles à la résolution du problème. Ce travail est semblable à celui qui est réalisé lors d'une recherche scientifique : on doit identifier la question puis déterminer les données, ces données peuvent se trouver dans la situation problématique, mais aussi ailleurs.

2 Établir un modèle mathématique à partir d'un modèle réel

2.1 Simplification du modèle réel

Dans cet exemple pour élèves de CM2, on demande aux élèves de produire deux patrons différents d'une boîte de pizza (Alfonso et al. p.233).

1 El departamento de diseño de una industria alimentaria está diseñando una caja para transportar pizzas. En la parte superior de la caja tiene que imprimirse un mensaje publicitario.
a) Dibuja dos desarrollos diferentes de la misma caja.



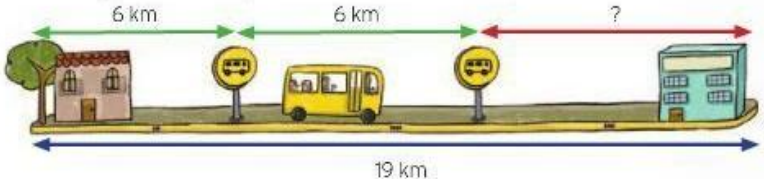
D'après la solution proposée par le livre du professeur (Galera et al., 2009), on voit qu'on simplifie le modèle réel. On ne tient pas compte des languettes adhésives ou à encastrer nécessaires pour que les côtés de la boîte ne tombent pas. On ne retrouve aucun commentaire relatif à cette simplification de la réalité. Si on observe les manuels de classe, la simplification de la réalité n'est jamais questionnée et semble aller de soi.

Le problème suivant est adressé aux élèves de CE2 (González et al. 2012, p.60). Cette tâche apparaît résolue dans le livre de l'élève, on observe que, pour la résolution, on propose une simplification schématique du problème. La représentation schématique simplifiée n'est pas questionnée.

El autobús recorre 19 kilómetros hasta el colegio. En la ruta realiza dos paradas. La primera a 6 kilómetros de la salida y la segunda, 6 kilómetros después. ¿Qué distancia hay desde la segunda parada hasta el colegio?

¿De qué trata el problema?

El problema presenta un recorrido con etapas. Un dibujo nos ayuda a comprender la situación. Dibujamos un croquis con los datos del enunciado.



2.2 Modèle à une opération

Dans l'exemple suivant, on retrouve cinq problèmes réels (pour élèves de CM2) qui peuvent être résolus en faisant une seule opération arithmétique (Caloudis 2008, p.60).

Pour chacun des énoncés suivants, pose uniquement l'opération qui te permettra de répondre à la question posée.

1. Éric vend sa moto 1 200 euros et sa voiture 14 500 euros. Quelle somme va lui rapporter la vente des deux véhicules ?
2. Madame Areti, qui a 57 ans, a 11 ans de moins que son mari. Quel âge a monsieur Areti ?
3. La maman de Yasmine parcourt tous les jours 84 km pour se rendre à son travail (aller et retour). Quelle distance sépare son domicile de son lieu de travail ?
4. Le boulanger du village de Sainte-Agrève va déposer de l'argent à la banque. Il donne 56 billets de 20 €. Quelle est la somme totale déposée ?
5. Fin 2005, 19,9 millions de consoles ont été vendues au total à travers le monde, dont 13,2 millions en Amérique du Nord. Combien de consoles ont été vendues dans le reste du monde ?

3 Résoudre des questions mathématiques à propos du modèle

Dans les livres français, on a réussi à retrouver quelques exemples de cette compétence, ils correspondent au processus de trouver les étapes intermédiaires de résolution ainsi qu'à établir l'ordre entre les étapes. Elle correspond aux nouveaux programmes de 2008 qui distinguent une progression : problèmes relevant d'une opération, des quatre opérations, à une étape, à plusieurs étapes, complexes. Dans les livres espagnols, nous n'avons pas trouvé ce type d'activités. Pour rechercher ce type d'activités dans les manuels espagnols étudiés, la méthodologie consiste à les parcourir systématiquement jusqu'à rencontrer l'activité cherchée.

3.1 Ordre des étapes (Brault 2012, p.72)

Énoncé
Sur son ordinateur, Manon joue à un jeu d'élevage de chevaux. Pour monter son centre équestre, elle dispose d'un budget de 40 000 fers à cheval. Elle achète :
- 1 écurie à 12 500 fers à cheval ;
- 1 carrière à 6 800 fers à cheval ;
- 1 prairie à 5 900 fers à cheval ;
- 7 juments à 950 fers à cheval chacune ;
- 1 étalon à 1 200 fers à cheval.

Question
Combien reste-t-il de fers à cheval à Manon après ses achats ?



1• Des questions suivantes, laquelle n'est pas utile à la résolution de ce problème ?

Combien Manon a-t-elle dépensé de fers à cheval ?	Combien de chevaux Manon achète-t-elle ?	Combien coûtent les 7 juments ?

2• **a)** Des deux questions restantes, laquelle dois-tu te poser en premier ?
b) Réponds à cette question.

3• Réponds alors à la question restante.

4• Déduis-en combien il restera de fers à cheval à Manon après ses achats.

3.2 Trouver les étapes intermédiaires (Caloudis 2008, p.64)

Pour chacun des problèmes suivants, écris la ou les questions intermédiaires et résous le problème.

1 Mélanie possède 65 €. Elle veut acheter les articles suivants : une cafetière à 69 € 90 et un lot de 20 dosettes à 2 € 90. Combien lui manque-t-il pour acheter les deux articles ?



2 Alicia possède une encyclopédie en trois volumes de 820 pages chacun. Celle de Juliette comporte deux volumes de 1 340 pages chacun. Quelle encyclopédie comporte le plus de pages ?

3.3 Problèmes à plusieurs étapes (Brault & al. 2012, p.108)

Énoncé
Le camping « Les Estivales » organise un concours de saut en longueur par équipes de quatre.
L'arbitre calcule la somme des longueurs réalisées par les quatre membres d'une même équipe.
Pour qu'une équipe soit qualifiée pour la finale, son score total doit être supérieur à 10 mètres.
Léo, Maria, Kamel et Polly sont dans la même équipe.
Léo a sauté à 2,47 m. Maria a sauté à 2,7 m.
Kamel a sauté à 1,99 m. Polly n'a pas encore sauté.



Question
Quelle longueur Polly doit-elle sauter au minimum pour qualifier son équipe ?

4 Interpréter les résultats mathématiques dans la situation réelle

Même si cette compétence se travaille dans presque la totalité des problèmes arithmétiques, elle n'apparait pas souvent explicitement. On a retrouvé l'exemple ci-contre dans un livre espagnol adressé aux élèves de CE2 (González et al. 2012, p.193). Dans la dernière question, l'élève doit expliquer quelle quantité de liquide il ingère chaque jour et quelle est la proportion d'eau. Pour cela il doit interpréter les résultats numériques obtenus dans les questions précédentes. De plus, on remarque que l'auteur du livre insiste sur le fait que l'élève doit «*analyser les résultats* ».

La abuela de Raúl le explica que las personas necesitamos beber, al menos, 2 l de agua al día. ¿Quieres comprobar si tú los tomas?

Calcula cuánta agua tomas

3. Suma la cantidad total de líquido que bebes a lo largo del día.
4. Señala en tu lista las ocasiones en las que bebes agua y suma el total. ¿Bebes más o menos de 2 l?

Analiza los resultados

5. Explica a tus compañeros cuánto líquido bebes en total y cuánto de ese líquido es agua.

5 Valider la solution

5.1 Validation mathématique

On retrouve différents types de validations, notamment la validation mathématique : elle correspond uniquement à une validation numérique. Dans l'exemple suivant (González et al. 2012, p.32), on trouve une tâche résolue, la dernière partie correspond à la validation. C'est un exemple curieux parce que la validation n'est pas totalement fiable, même s'il s'agit d'une validation numérique. En effet, la validité de la solution est basée sur le fait que « le résultat de l'addition doit être plus grand que chacun des termes sommés ». Cette affirmation, même si elle est vraie, n'est pas totalement utile pour valider la solution, puisque le résultat peut être incorrect tout en étant supérieur chacun des termes sommés.

En un colegio, hay 31 niñas y 24 niños en 3.º de Primaria y 34 niñas y 28 niños en 4.º de Primaria. ¿Cuántos alumnos de 4.º de Primaria hay en total?

¿Cómo se resuelve?

Para saber cuántos alumnos hay en total, sumamos los datos seleccionados.

$$\begin{array}{r} 34 \\ +\ 28 \\ \hline 62 \end{array}$$

▶ Hay 62 alumnos de 4.º de Primaria en total.

¿Lo hemos hecho bien?

En una suma, el resultado debe ser mayor que cada uno de los sumandos.

$62 > 34$ $62 > 28$ ✓

Dans l'exemple suivant (Thévenet 2009, p.138), on demande à l'élève qu'il justifie, probablement à travers une opération, la réponse qu'il a donnée.

2 Un automobiliste qui roule à la vitesse moyenne de 60 km par heure met 3 h 30 min pour parcourir 350 km.
Est-ce exact ? Explique pourquoi.

L'exemple suivant (Gonzáles et al., 2012, p.60) correspond à un autre cas de validation numérique : la différence par rapport au premier exemple, c'est que la validation proposée est correcte.

El autobús recorre 19 kilómetros hasta el colegio. En la ruta realiza dos paradas. La primera a 6 kilómetros de la salida y la segunda, 6 kilómetros después. ¿Qué distancia hay desde la segunda parada hasta el colegio?

¿Cómo se resuelve?

Como nos piden que calculemos cuánto mide la línea roja, tenemos que realizar dos operaciones.

1. Averiguamos los kilómetros que miden las dos líneas verdes.

$$6 \times 2 = 12$$

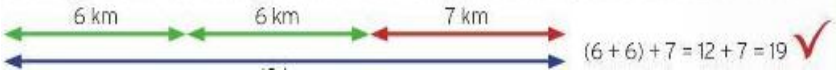
2. Calculamos los kilómetros que mide la línea roja.

$$\begin{array}{rl} 19 & \text{distancia total de la ruta} \\ -\ 12 & \text{distancia desde la salida hasta la segunda parada} \\ \hline 7 & \end{array}$$

▶ Hay 7 km desde la segunda parada hasta el colegio.

¿Lo hemos hecho bien?

Comprobamos que al sumar las tres distancias obtenemos la longitud total del recorrido.



$(6 + 6) + 7 = 12 + 7 = 19$ ✓

On observe que, par rapport au programme espagnol, la validation numérique est clairement liée à la compétence mathématique. En effet, selon le programme espagnol, les processus liés à la compétence mathématique «permettent d'estimer et de juger la logique et la valeur des arguments et des informations […] ce qui conduit à identifier la validité des raisonnements ainsi qu'à évaluer le degré de certitude associé aux résultats obtenus. ».

5.2 Justifier le choix des hypothèses

Dans la phase de validation, il faudrait aussi justifier les hypothèses. Dans la tâche précédente du cinéma (González et al. 2012, p.123), les élèves doivent choisir, à partir d'une grille de données et en respectant deux restrictions, le film que Lorena et sa mère vont aller voir. Dans la dernière question les élèves doivent justifier leur choix, et justifier les hypothèses qui ont aidé à ce choix. Il semblerait que cette justification ne s'appuie que sur des critères mathématiques (la vérification des contraintes mathématiques).

Lorena y su madre decidieron ver otra película. Antes de elegir, su madre le recordó que debían salir antes de las diez y que no podían gastar más de 16 €. ¿Puedes ayudarles a elegir?

Elegid la opción más adecuada

4. Decidid qué película elegirán Lorena y su madre y anotad por qué.

5.3 Validation extra-mathématique

(Caloudis 2008, p.68) propose un contrôle extra-mathématique basé essentiellement sur des connaissances sociales du monde réel et probablement avec des arguments de logique (par élimination).

5 Contrôler la vraisemblance d'une solution

Quand tu as trouvé une solution à un problème, demande-toi toujours si ce que tu as trouvé est vraisemblable.

Pour cela, tu peux :
– faire appel à tes connaissances personnelles ;
– comparer ton résultat avec l'ordre de grandeur que tu as déterminé au préalable.

Exemples : un homme de 30 ans pèse environ 70 kg et non pas 7 kg ou 700 kg ; la tour Eiffel mesure 320 m et non pas 320 km ou 3,20 m.

1 Retrouve la bonne réponse.

a) La masse d'un pot de yaourt est :
125 g – 125 mg – 1,250 kg – 1 250 g

b) Le réservoir d'essence d'une voiture peut contenir :
6,5 L – 65 L – 650 cL – 6,5 hL

c) Un immeuble de 4 étages mesure environ :
15 m – 300 m – 50 m – 5 m

d) Le poids d'un bébé à la naissance est :
30,5 kg – 3 050 g – 305 dg – 30,50 cg

e) La hauteur d'un filet de tennis en son milieu est :
91 mm – 91 dm – 0,91 m – 9,1 m

Vrai ou faux ?

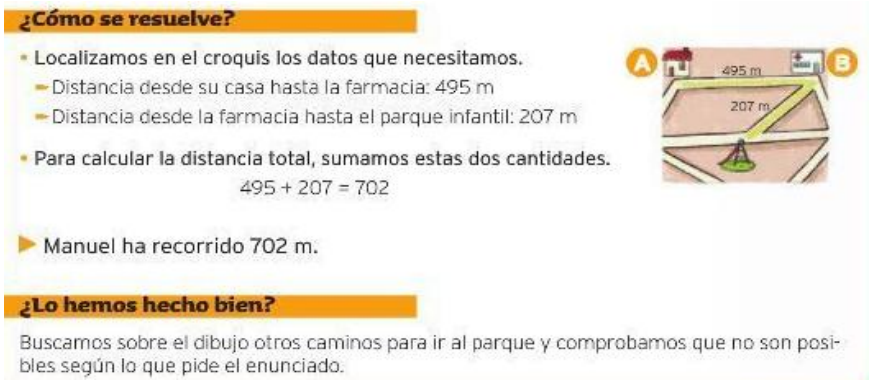
a) Un plein d'essence coûte 600 €.
b) Une baguette de pain coûte 4 €.
c) Un éléphant mange 3 kg de fourrage par jour.
d) La Tour de Pise mesure 54,50 m.
e) La longueur d'un terrain de football est de 0,120 km maximum.
f) Les cheveux poussent de 3 mm tous les mois.

5.4 Validation par essai-ajustement

Dans l'exemple suivant (González et al., 2012, p.132), on présente une tâche où la validation se fait par essai-ajustement : l'élève doit calculer la distance parcourue pour aller de la maison au parc en passant par la pharmacie ; pour cela, selon la validation proposée par les auteurs du livre, on doit chercher tous les chemins possibles et examiner s'ils vérifient les conditions de l'énoncé. On observe d'autres solutions (qui correspondent à des chemins plus longs), mais elles ne sont pas commentées dans la validation proposée par les auteurs du livre. La validation proposée est donc incomplète. La question n'est pas bien posée : on veut savoir la longueur du chemin plus court.

Manuel ha hecho un croquis de los lugares que visita con más frecuencia. Hoy ha ido desde su casa hasta el parque infantil pasando por la farmacia. ¿Qué distancia ha recorrido?





Ces processus peuvent être mis en relation avec la compétence apprendre à apprendre car celle-ci « implique la curiosité pour se poser des questions, identifier et gérer toutes les réponses possibles face à un problème » (BOE 2007).

III - DISCUSSION ET CONCLUSION

Les ressources sur la modélisation proposent des activités pour la classe qui font travailler différentes compétences. Deux questions sont posées.

Quelle articulation entre compétence globale de modélisation et compétences partielles de modélisation ?

On appelle compétence globale de modélisation la capacité à mettre en œuvre toutes les étapes du cycle de modélisation en résolvant un problème de modélisation complet, et compétence partielle la capacité à mettre en œuvre une des étapes d'un cycle de modélisation (éventuellement en ne résolvant qu'une partie d'un problème de modélisation). La maîtrise isolée de chaque compétence partielle assure-t-elle la maîtrise de la compétence globale de modélisation ? Le seul moyen de maîtriser les compétences partielles est-il de les intégrer à une maîtrise de la compétence globale de modélisation, c'est-à-dire de les mettre en œuvre dans une situation de résolution d'un problème de modélisation complet ? Ce débat n'est pas sans rappeler, sur la résolution de problèmes dont les problèmes de modélisation sont une partie, le débat entre compétences mathématiques et compétences méthodologiques, évoqué dans (Balmès, Coppé 1999, p. 50) : « il nous semble qu'il faut traiter l'activité de résolution de problèmes en confrontant les élèves à de véritables problèmes pour lesquels ils doivent mobiliser des connaissances mathématiques, chercher, tâtonner, revenir en arrière..., plutôt que des compétences méthodologiques ». Les programmes français de 2002 précisaient : « ces compétences n'ont pas à être travaillées pour elles-mêmes, l'objectif essentiel étant toujours de résoudre le problème proposé » (Ministère 2002, p. 13). On peut donc remarquer qu'en France, tout comme en Espagne, des manuels continuent à proposer des ressources travaillant ces compétences partielles. Nous n'avons pas trouvé de résultats de recherches tranchant la question. Les auteurs de la communication sont intéressés par toute référence de recherches sur cette question.

Quand est travaillée la spécificité de la modélisation par rapport à la résolution de problème ?

La modélisation mathématique de problèmes en relation avec le monde réel fait que la modélisation met en jeu des compétences communes à la résolution de problèmes, qui englobe la résolution de problème intra-mathématique. La spécificité de la modélisation tient à l'intervention de connaissances et de validations extra-mathématiques qui en général n'interviennent pas dans la résolution de problèmes intra-mathématiques. L'observation des manuels français et espagnols montre que cette spécificité est peu traitée. Il y a une quasi-absence de questionnement en lien avec le monde réel sur la simplification du problème réel en modèle réel, les hypothèses faites sur le monde réel, les critères de choix adoptés dans les situations de prise de décision. Beaucoup d'activités relèvent de la méthodologie déjà analysée dans (Coppé, Houdement 2009), sans tenir

compte de la spécificité de la relation au mode réel. Certes, on observe quelques rares activités impliquant des connaissances extra-mathématiques : trier des questions mathématiques et extra-mathématiques, valider la vraisemblance d'une solution sur des connaissances extra-mathématiques. Mais ces activités relèvent plus souvent, pour reprendre la distinction rappelée dans (Maass 2006, p. 114) de problèmes énoncés par un texte, de tâches mathématiques contextualisées avec le langage quotidien ou d'applications d'algorithmes mathématiques routiniers à un problème relié à la réalité au lieu d'être des problèmes de modélisation, c'est-à-dire des problèmes complexes, ouverts et reliés à la réalité. (Cabassut, 2008) propose de tels exemples utiles pour la formation et pour l'évaluation.

On observe de plus dans le cas français, l'influence du programme officiel de 2008 dans la progression proposée dans la construction de modèles et dans leurs traitements mathématiques : modèle à une opération, à plusieurs opérations, à plusieurs étapes, complexe. On remarque, là encore, que cette progression est une progression sur la résolution de problème et qui, a priori, n'intègre pas la relation avec le monde réel.

La formation des maîtres

Pour la formation des maîtres, on voit donc l'importance de l'appropriation par le maître de ressources proposées par exemple par les manuels. Le maître devrait être capable en amont de se fixer les objectifs en termes de compétences travaillées, ce qui suppose qu'il a bien été formé à la reconnaissance de ces compétences. Un modèle de la modélisation peut être utilise pour permettre d'analyser le processus de modélisation, de désigner les différentes étapes de ce processus et les compétences qui y sont associées. Le modèle utilisé par Maass, et rappelé en début d'article, est intéressant. Nous avons proposé dans (Cabassut 2009) un modèle plus simple qui contracte les deux étapes, du monde réel au modèle réel, et du modèle réel au modèle mathématiques, en une seule étape. Dans le cadre de sa liberté pédagogique, l'enseignant devrait se positionner dans le débat entre compétences mathématiques et compétences pédagogiques, entre compétences spécifiques à la modélisation et compétences génériques de la résolution de problème : la formation devrait lui permettre d'éclairer ce débat pour assumer ses choix. Dans la conception de son enseignement, il devrait pouvoir modifier ses ressources ou en créer de nouvelles pour atteindre les objectifs qu'il s'est fixés, tout en respectant les contraintes institutionnelles du programme officiel. Ces contraintes peuvent varier d'un programme à l'autre, comme le montre l'étude curriculaire de (Coppé, Houdement 2009) au niveau de la France, ou d'un pays à l'autre (Cabassut, Wagner 2011 ; Cabassut, Ferrando 2012). La réflexion sur la programmation intégrée de l'enseignement des connaissances mathématiques et des connaissances extra-mathématiques est encore débutante. En France, la collection « Les maths à la découverte des sciences » chez Hachette en est une tentative. Pour répondre à tous ces besoins, à côté de la mise à disposition de ressources adéquates (manuels, sites internet …), la formation des maîtres est une réponse indispensable. Le projet LEMA en constitue un exemple (Cabassut 2009) qui propose des ressources de formations, pour lesquelles il est important de conserver un regard critique.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BALMÈS R.-M., COPPÉ S. (1999) Les activites d'aide à la résolution de problèmes dans les manuels de cycle III. *Grand N , 63.* pp. 39 à 57, 1998-1999

BOLETIN OFICIAL DEL ESTADO [BOE] (2007) ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE,173,* 31487-31566.

BULLETIN OFFICIEL DE L'EDUCATION NATIONALE [BOEN] (2006) Socle commun de connaissances et de compétences. *BOEN, 29.*

BOEN (2008) Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire. *BOEN hors série 3.*

CABASSUT R. (2008) Articulation entre réel mathématiques : spécificité et généricité de la modélisation. *Acte du colloque Didirem « Approches plurielles en didactique des mathématiques Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ?* ». Université Paris 7.

CABASSUT R. (2009). Un exemple de formation continue à la modélisation dans le cadre du projet LEMA : description et problèmes rencontrés, in *Actes du XXXV^e colloque COPIRELEM*, Bombannes.

CABASSUT R. & WAGNER A. (2011). *Modeling at primary school through a French-German Comparison of Curricula and Textbooks*, Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Kaiser, Blum, Ferri, Stillman Editors. Springer, 559-568.

CABASSUT R. & FERRANDO I. (2012) Modelling in French and Spanish syllabus of secondary education, in *8th Congress of European society for research in mathematics education*, Antalya, Turkey.

COPPÉ S., HOUDEMENT C. (2009) Résolution de problèmes à l'école primaire française : perspectives curriculaire et didactique. *Actes du 36^e colloque de la Copirelem.* Auch. p. 48-70.

MAASS K. (2006) *What are modeling competencies?*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38 (2)

MARGOLINAS, C. & WOZNIAK, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In Gueudet, G. & Trouche, L. (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.233-249). Presses Universitaires de Rennes & INRP

MINISTÈRE (2002) Document d'application mathématiques cycle 3. Ministère de l'Education Nationale. DESCO.

V - MANUELS SCOLAIRES

BRAULT R., RIBANIER C., ROQUES N. (2012) CM1 Petit phare. Hachette. p.36, 72, 108

CALOUDIS A., LECLEC'H-LUCAS J., LUCAS J.-C., MEUNIER L., MEUNIER R. (2008) CM2 A portée des maths. Hachette. p.60, 64, 68, 70, 108.

ERMEL (2000). Apprentissages numériques et résolution de problèmes CP (p.85). Institut National de Recherche Pedagogique. Paris. Hatier.

GALERA J., RUIZ J. ET SOLÀ M. (2009) Propuesta didáctica Matemáticas 5º Educación Primaria. Grupo editorial Bruño.

GONZÁLEZ Y., ABELLÓ N., LLINARES X., SANTAOLALLA (2012). Matemáticas 3ºEP. P. Conecta 2.0 LIR. Ediciones SM.

MYX A., DOSSAT L., BREGEON J.-P., VICENS P.-Y., POLI, B. (2003). Mathématiques. CM1, p.141. Collection Diagonale. Paris. Nathan.

THÉVENET S.(2009) Maths CM2,p.138. Collection Thévenet. Bordas.

APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE ET RESSOURCES POUR LES ENSEIGNANTS

Jacques DOUAIRE
Équipe ERMEL - IFé
LDAR – ESPE Académie de Versailles - UCP
jacques.douaire@u-cergy.fr

Fabien EMPRIN
Équipe ERMEL - IFé
CEREP - Université Reims Champagne Ardennes - ESPE
fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé
Au cycle 2 le recours à la ligne droite, l'appréhension de ses propriétés et des contraintes techniques du tracé, sont rencontrés dans des problèmes d'alignement de points ainsi que dans des problèmes de représentation d'objets du plan ou de l'espace sollicitant des propriétés du trait droit (rectitude) indépendantes de l'alignement de points. Cet apprentissage pose plusieurs questions :
- Quelles sont les éléments problématiques de ces apprentissages, et notamment quelle articulation possible au cycle 2 entre ces deux aspects (alignement de points et rectitude de traits) ?
- Quelles sont les possibilités et les limites de transfert entre les procédures développées dans le méso-espace et dans celui de la feuille de papier ?
Cette communication a aussi pour but d'expliciter certaines questions que nous nous posons sur la production des ressources valorisant les résultats de notre recherche et en particulier sur la rédaction des dispositifs d'enseignement.

I - PRÉSENTATION

L'équipe ERMEL a conduit des recherches sur les apprentissages mathématiques à l'école, d'abord dans le domaine numérique puis géométrique. Le but de la recherche actuelle est d'analyser les compétences spatiales et géométriques que les élèves de l'école primaire, principalement au cycle 2, peuvent construire par l'utilisation conjointe de différents environnements notamment des logiciels de géométrie.

Cette recherche conduit à la production de savoirs sur ces apprentissages et à la production de ressources pour les enseignants et les formateurs. Les étapes de la recherche comportent :

1) Une analyse du savoir géométrique (problèmes, propriétés…), ainsi que des connaissances spatiales que les élèves ont pu développer.
2) L'organisation de l'étude des différentes notions spatiales et géométriques, sur les trois années du cycle.
3) L'élaboration de situations didactiques et leur expérimentation dans plusieurs académies.
   Ces trois composantes sont en interaction : l'identification des potentialités des élèves étant aussi issue des expérimentations menées.
4) La rédaction d'un ouvrage pour les formateurs et pour les enseignants du premier degré comportant une explicitation des enjeux des apprentissages et des problématiques de l'enseignement dans ce domaine et parmi les dispositifs d'enseignement expérimentés, les progressions et les situations qui ont été retenues.

Ces étapes de la recherche et les résultats seront explicités à partir de l'étude d'un des nombreux thèmes relatifs aux apprentissages spatiaux et géométriques au cycle 2 : celui de l'alignement.

II - L'ÉTUDE D'UN APPRENTISSAGE : CELUI DE L'ALIGNEMENT

L'approche de la droite peut être appréhendée par les élèves du cycle 2 à travers différentes significations liées à la perception ou l'expérience : un objet matériel (fil tendu, bord d'un objet rectiligne, pli d'une feuille…), un objet du monde graphique (trait rectiligne, tracé sur un écran par l'outil « droite » dans un logiciel de géométrie dynamique comme Cabri©…). Ces significations sont associées à des problèmes portant sur l'identification, la production d'alignements ou de traits rectilignes, et sur la reconnaissance ou l'usage d'instruments utilisés dans ces buts.

1 Hypothèse initiale

Compte tenu de ce qui avait été produit lors de la recherche sur le cycle 3, nous pensions que des compétences (ou des connaissances) pouvaient être construites au CE1 à partir du même type de problèmes que ceux que nous avions proposés au CE2.

Nous avions envisagé, au début de la recherche, une appréhension de la notion d'alignement favorisée par le passage d'expériences spatiales centrées sur l'idée de cacher un objet (au moyen de la visée) à partir d'activités vécues dans le méso-espace, reprises ensuite sur la feuille de papier dans le but de mettre en évidence le recours à la ligne droite.

Il s'agissait de poser des problèmes d'alignement dans le méso-espace (situation « Plots ») ou dans un grand micro-espace (situation « Biglotron ») puis de passer à une « modélisation » sur A3/A4 dans les deux cas ; cette modélisation avait pour but de recourir au tracé de droites passant par des points représentants les objets de l'espace.

Le choix était donc au début de la recherche de donner du sens à des situations d'alignement de points dans le méso-espace pour ensuite faire apparaître la ligne droite comme un moyen efficace de résoudre ces problèmes dans le micro-espace, ce qui pourrait s'exprimer de façon un peu lapidaire par « **du méso surgit la droite ».** Dans ce sens la progression était plus dirigée par son but que par notre connaissance des potentialités des élèves du cycle 2.

2 Analyse des difficultés rencontrées dans le passage du méso-espace au micro-espace

Alors que les élèves développaient des procédures spatiales de résolution s'appuyant sur la visée et d'autres gestes dans le méso-espace, la modélisation par une droite de la visée n'était pas effective dans la résolution d'une situation sur papier dans le micro-espace. De plus des difficultés se posaient pour le tracé à la règle de traits droits, beaucoup de productions comportant des lignes brisées.

Une reprise de la situation utilisant Cabri© semblait rendre possible ce passage au CE1 : les élèves ayant recours aux tracés de droites pour produire avec Cabri© la solution du problème d'alignement de plots. Toutefois, nous n'avons pas pu en vérifier le réinvestissement à plus long terme sur la feuille de papier.

Nous listons ici les résultats des expérimentations en termes de difficultés pouvant être liées :

- à la compréhension de la modélisation sur une feuille A3 d'une situation vécue dans la cour :
    - au passage 3D méso / 2D micro (vue de dessus…) et à la disparition du sujet (élève) dans le micro-espace du dispositif méso-espace ;
    - à la représentation d'objets physiques (cônes) par des schématisations (cercles, points) ;
    - à ce que le trait droit était sensé représenter : le regard, le tracé sur le sol …
- aux tracés de traits droits (cf. les difficultés déjà développées) ;
- à l'insuffisance des éléments langagiers dans la situation « Plot » pour évoquer une action et son déroulement pour la situation en micro.

Ces résultats expérimentaux ont donc mis en évidence la nécessité d'un travail qui fait l'objet actuellement d'une expérimentation permettant l'appréhension en acte des significations et de certaines propriétés de la droite dès le cycle 2 indépendamment de la représentation d'alignement de points.

III - UN APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUE DE LA RECTITUDE

1 Significations de la notion de trait droit

Le concept de droite et les notions associées (trait droit, alignement,…) peuvent être appréhendés par l'élève du cycle 2 à travers différentes significations induites par la perception ou l'expérience :

- un objet matériel : un fil tendu, un objet ou un bord d'objet rectiligne, un rayon lumineux, un pli de feuille… voire des objets « composés » (un mètre de menuisier que l'on déplie, des baguettes mises bout à bout…) ;
- la frontière entre (des objets matériels ?) :
  - deux régions planes de l'espace, comme les arêtes d'un polyèdre ;
  - deux régions du plan, comme les côtés d'un polygone, des demi-plans ;
- objet du monde graphique : un trait rectiligne (qui peut être prolongé au-delà des extrémités) ;
- la trace :
  - trace produite par un tracé avec la règle ;
  - trace écran provoquée par l'outil « droite » dans Cabri© ;
- la trajectoire d'un objet ponctuel animé d'un mouvement rectiligne (bille,…) ;
- un ensemble de points alignés : le lieu de points alignés avec deux points.

Parmi ces significations du trait droit, celles privilégiées dans nos situations pour le CP sont celles de bords de bandes parallèles, de contours d'une figure, de traits comme réunion de segments rectilignes. Les critères de validation sont soit simplement perceptifs (régularité du tracé ou ressemblance avec un modèle) soit en relation avec une référence plus ou moins explicite au parallélisme (direction…), soit constitués par une validation pratique (coïncidence des extrémités, superposition, actions sur les objets…).

2 Présentation de deux situations

- « Papier peint » : Les élèves ont à reproduire un papier peint (au motif formé de traits parallèles) en prolongeant des traits placés sur une feuille amorçant le dessin du motif.
- « Formes empilées » : Les élèves ont à représenter un empilement de formes (rectangles, triangles) et à anticiper le tracé de ces formes suivant la contrainte d'empilement.

3 Objectifs communs

À ces significations peuvent être associés des problèmes concernant soit :

- la production de traits rectilignes ;
- l'identification de traits rectilignes (jugement) ;
- la reconnaissance et l'usage des instruments susceptibles d'être utilisés pour identifier où produire un alignement ou une ligne droite.

Ce travail sur la notion de « rectitude », bien qu'il puisse être amorcé en GS avec la production de tracés réguliers effectués dans des activités de dessin, ne prend réellement sa dimension géométrique qu'au CP où des propriétés du trait droit peuvent donc être appréhendées. Ces

propriétés ne sont pas encore des objets d'étude pour elles mêmes, mais constituent d'abord des expériences :

- un trait peut représenter quelque chose qui n'a pas laissé de trace matérielle (ex : visée) ;
- un trait peut être associé à des instruments ;
- un trait peut être prolongé, par exemple pour pointer un objet caché.

4 Différents niveaux de maîtrise peuvent être associés à ces significations

- Comprendre qu'il faut tracer un trait droit pour résoudre le problème ; c'est ici le rôle des formulations (validation par le langage, assez consensuelle), rôle des gestes (main levée).
- Savoir comment il faut placer la règle pour tracer un trait plus long que celle-ci ; il s'agit de la connaissance de la technique (report de la règle) et l'aspect technologique : nommer les outils, décrire l'action…
- Maîtrise de la technique de tracé (validation par la production).

5 Des questions posées

- Quelle robustesse des situations ? Les dispositifs (progressions, situations) que nous avons élaborés privilégient une construction de connaissances s'appuyant sur la résolution de problèmes. Ils présentent une certaine « robustesse » liée notamment à ce que les résultats et procédures qui seront produits par les élèves dans une classe sont exposés dans le descriptif des situations, ce qui permet au maître, en général non spécialiste des mathématiques, de pouvoir anticiper ses décisions en fonction des productions propres à sa classe. Cette fiabilité nous semble due d'une part à la cohérence entre les conceptions de l'apprentissage et les situations proposées et, d'autre part, à leur expérimentation dans de nombreuses classes durant plusieurs années.
- Sur les apprentissages spatiaux : les apprentissages spatiaux ou géométriques ne sont pas perçus par l'environnement familial de l'élève et parfois par les enseignants comme présentant un caractère de nécessité tant scolaire que social. De plus leur contribution aux apprentissages ultérieurs se réduit parfois dans les classes à un apprentissage précoce, voir inefficace, d'un vocabulaire. Il nous paraît donc nécessaire de développer des apprentissages spatiaux portant notamment sur l'analyse des représentations d'objets lors de changement d'espaces.
- Par la production de ces ressources pour la maternelle. Dans les classes de maternelle où nous expérimentons, les situations didactiques côtoient des « jeux » ou des projets pluridisciplinaires. Des enseignants transforment, modifient les situations de façon à les adapter à leur projet en cours ou au matériel usuel… Il nous semble donc important de réfléchir à la place qu'il est possible de laisser à ces adaptations dans la conception de nos situations et en particulier dans l'articulation entre les situations didactiques et les situations de construction d'expériences. Il est aussi crucial, compte tenu de la diversité de ces appropriations de mettre en évidence quels sont les apprentissages indispensables parmi l'ensemble des possibles.

IV - DES INTERROGATIONS RÉCURRENTES SUR L'APPROPRIATION DES DISPOSITIFS D'ENSEIGNEMENT PAR LES ENSEIGNANTS

Un des enjeux de notre méthodologie est de permettre l'appropriation par les enseignants des dispositifs d'enseignement produits. Si notre recherche actuelle ne comporte pas spécifiquement

de volet portant sur cette question[1] nous émettons des hypothèses basées sur le travail des enseignants associées avec lesquels nous travaillons et sur nos échanges notamment lors des colloques tels que ceux de la COPIRELEM.

Les conditions que nos considérons comme nécessaires pour que l'appropriation de nos dispositifs soit possible sont que les enseignants :

- perçoivent mieux les relations entre les connaissances spatiales que peuvent développer les élèves et les connaissances géométriques ;
- prennent conscience de l'ensemble des significations d'une notion et des situations associées ;
- identifient les caractéristiques essentielles des situations didactiques.

Pour cela nous mettons en évidence ces éléments dans nos publications tant dans leur structure que dans les parties « théoriques ».

Les enseignants débutants sont également une de nos préoccupations et nous avons essayé d'identifier, dans nos expériences de formateurs, des difficultés spécifiques telles que celles liées au processus de dévolution, à la gestion des mises en commun qui sont souvent accentuées par des difficultés d'analyse à chaud des productions des élèves et ou à l'institutionnalisation.

Pour aider ces enseignants débutants et les enseignants en général il nous faudrait pouvoir identifier dans un premier temps si la source des difficultés est essentiellement didactique ou pédagogique. Dans le premier cas, une analyse didactique des enjeux des situations, des difficultés des élèves et de leurs potentialités permettrait d'anticiper les procédures des élèves pour mettre en place une mise en commun, de savoir ce qui est visé et doit être institutionnalisé… dans le second cas des narrations de situations détaillant les gestes pédagogiques attendus, l'organisation matérielle et temporelle de la séance permettrait de construire, dans un premier temps, les conditions d'un mise en œuvre de la séance puis à l'enseignant d'acquérir l'expérience nécessaire.

En tant que chercheurs en didactique nous privilégions la première piste en essayant de trouver des modalités qui permettent de ne pas négliger la seconde.

V - CONCLUSION

Pour notre équipe, les exigences liées à la production de ressources qui présentent à la fois les enjeux des apprentissages, le savoir mathématique, l'analyse de l'état de savoir des élèves, les problématiques d'enseignement et des dispositifs d'enseignement que peuvent s'approprier les maîtres, notamment dans le cadre de la formation, sont présentes à toutes les étapes de notre recherche.

La production de ce type de ressources nous paraît une exigence pour la communauté didactique.

[1] Nous avions, dans une recherche précédente, analysé des choix d'enseignants dans la conduite des situations, cf. Douaire J., Argaud H.-C.., Dussuc M.-P, Hubert C, (2003) « Gestion des mises en commun par des maîtres débutants » in «Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes, (coordination Colomb J., Douaire J., Noirfalise R. ADIREM/INRP).

VI - BIBLIOGRAPHIE

DOUAIRE J., EMPRIN F., RAJAIN C., (2009) L'apprentissage du 3D à l'école, des situations d'apprentissage à la formation des enseignants, *Repères IREM*, **77**, 23-52.

ÉQUIPE ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*, Hatier.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, **10**, 5-55.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C., LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ?, *Repères IREM*, **90**, 5-41.

ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE A DES ELEVES DYSPRAXIQUES VISUO-SPATIAUX

Édith PETITFOUR
PIUFM, IUFM de Bar-Le-Duc, Université de Lorraine
LDAR, Paris 7
edith.petitfour@univ-lorraine.fr

Résumé
Les apprentissages géométriques peuvent sembler inaccessibles aux élèves ayant des troubles praxiques quand l'enseignement s'appuie sur des manipulations d'objets lors d'expérimentations avec du matériel ou lors de tracés instrumentés. Ces élèves, en effet, sont maladroits dans les actions à réaliser car il résulte de leur handicap une incapacité à programmer des séquences de gestes et à les automatiser. À cela peuvent s'ajouter des troubles visuo-spatiaux empêchant une exploration fiable des figures.
Nous cherchons à déterminer ce qui, dans l'action didactique, permet la construction de connaissances et une évolution de la conceptualisation en géométrie plane, lors de la transition école primaire-collège, pour ces élèves porteurs de troubles spécifiques des apprentissages.
Nos observations ont été réalisées dans une classe de sixième où sont scolarisés quelques élèves « Dys ». Notre étude porte sur l'enseignement de la symétrie axiale au moment où les élèves doivent passer d'une appréhension globale à une appréhension ponctuelle des figures. Nous analysons l'impact des ressources utilisées par l'enseignant sur les apprentissages des élèves, tels les gestes, le discours, les signes écrits et graphiques et l'utilisation d'artefacts dans un environnement numérique.

I - INTRODUCTION

Pour permettre aux élèves d'accéder à une conceptualisation en géométrie plane, l'enseignement à l'école primaire fait appel à des expériences dans le monde sensible (manipulation de formes, pliage, travail expérimental avec calque, …) et à des constructions instrumentées. Dans les programmes de l'école primaire (BO n°3 du 19 juin 2008), il est spécifié que « *L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.* ». Ce travail se poursuit au collège : « *Les constructions géométriques, avec leurs instruments traditionnels – règle, équerre, compas, rapporteur – aussi bien qu'avec logiciel de géométrie, constituent une étape essentielle à la compréhension des situations géométriques.* » (BO Spécial n°6 du 28 Août 2008).

Les activités qui s'appuient fortement sur le tracé aux instruments et sur une perception « naturelle » des figures[1], c'est-à-dire considérée comme allant de soi, nous laissent augurer des difficultés importantes dans la réalisation des apprentissages géométriques des élèves dyspraxiques visuo-spatiaux. En effet, les troubles visuo-spatiaux de ces élèves provoquent une représentation défaillante des figures et les empêchent donc d'avoir une bonne perception des objets géométriques et de leurs propriétés : « *Les yeux ne peuvent pas explorer la figure, ou le modèle, de façon cohérente et régulière. Ils « sautent » sans logique d'un endroit à un autre, se posant à plusieurs reprises sur certains secteurs et en ignorant d'autres, sans percevoir l'ensemble ni l'organisation spatiale des diverses parties.* » (Mazeau et Crouail, 2009).

Ces anomalies du regard rendent difficiles les activités de reproduction de figures, et notamment celles des lignes obliques. Elles rendent impossible l'accès à une image mentale figurative fiable, ce

[1] Nous entendons par figure le dessin matériel doté de propriétés graphiques réglées au plan théorique par des propriétés géométriques

qui compromet toute anticipation d'un tracé sur un support. Par ailleurs, la prise de repères sur quadrillage ou réseau pointé est défaillante. Difficiles aussi les activités de reconnaissance de figures, qu'il s'agisse de percevoir une figure simple dans une figure complexe ou d'émettre des conjectures, concernant par exemple la nature des angles ou les égalités de longueurs, à partir de dessins géométriques.

Les troubles praxiques de ces élèves les rendent maladroits et lents dans leurs actions à réaliser avec du matériel ou avec des instruments de géométrie. En effet, il résulte de leur handicap une incapacité à programmer des séquences de gestes. Mazeau (Mazeau, 2010) définit les gestes comme un ensemble de mouvements, coordonnés dans le temps et dans l'espace dans l'intention de réaliser une action finalisée. Les dyspraxies se caractérisent alors par des coordinations qui ne se mettent pas en place dans les délais habituels, ou sinon, d'une façon déficitaire, anormale et inefficace et ce, en l'absence d'une déficience mentale et de troubles neuromoteurs, neurosensoriels ou neuromusculaires, alors qu'un apprentissage habituel a été effectué. Ainsi, l'enfant dyspraxique conçoit bien les gestes mais il n'arrive pas à les organiser ni à les exécuter en concordance avec son intention. Pour les élèves dyspraxiques que nous avons observés dans des tâches de tracé instrumenté, cela se manifeste par exemple par une coopération des mains malhabile, une gestuelle saccadée, sans modulation, avec un freinage non réalisé à temps, avec pour conséquences des positionnements d'instruments approximatifs et des productions très imprécises, brouillonnes.

Habituellement, tous les gestes appris deviennent des routines après un certain nombre de répétitions et peuvent être réalisés sans y prêter attention et sans fatigue. Pour les élèves dyspraxiques, il n'est est rien : « *Ils ne peuvent réaliser facilement ni « routiniser » des traitements de « bas niveau » (sensorimoteurs, gestuels et spatiaux), traitements qui font normalement l'objet d'une acquisition implicite puis d'une automatisation chez les enfants tout-venant.* » (Mazeau, 2010). Cette absence d'automatisation constitue un handicap caché pour ces élèves alors en incapacité de réussir une double tâche. Par exemple, des tâches telles que tracer une ligne le long d'une règle en la maintenant, ou faire tourner un compas en exerçant une pression adaptée, nécessiteront en permanence un contrôle volontaire extrêmement coûteux pour ces élèves, toutes leurs ressources attentionnelles et cognitives seront mobilisées au détriment du raisonnement qu'ils seraient pourtant en capacité d'exercer.

Sachant qu'un enfant présentant des troubles spécifiques des apprentissages peut s'appuyer sur ses compétences préservées pour suppléer à ses dysfonctionnements, que pour un élève dyspraxique l'utilisation des canaux auditivo-verbal et mnésique est préconisée et que des adaptations pédagogiques peuvent favoriser un accès aux apprentissages scolaires (Mazeau et Crouail, 2009), nous nous sommes interrogés sur ce qui, dans l'action didactique, permettait la construction de connaissances et une évolution de la conceptualisation en géométrie plane, lors de la transition école primaire-collège.

Nous avons choisi de nous intéresser plus particulièrement au concept de symétrie axiale, concept dont l'enseignement prend fortement appui sur la perception et sur différentes manipulations, et qui peut donc sembler inaccessible a priori aux élèves dyspraxiques de par leurs troubles. Par ailleurs, l'évolution du mode d'appréhension de la symétrie axiale dans la transition CM2-6ème est source de difficultés en général pour l'élève, qu'il soit dyspraxique ou non. Ainsi, pour répondre à nos interrogations, nous avons tout d'abord examiné cette évolution à partir des programmes de 2008, puis nous avons observé une séquence d'enseignement de la symétrie axiale dans une classe de sixième, durant l'année scolaire 2010-2011. Nous avons filmé plus particulièrement un élève dyspraxique visuo-spatial scolarisé dans cette classe et accompagné d'une Auxiliaire de Vie Scolaire (AVS). Nous avons sélectionné les activités intégrant la construction du symétrique d'un point par rapport à une droite réalisées tout au long de la séquence. Ce type de tâches apparaît dès la première séance où une technique de construction à l'équerre et au compas est institutionnalisée. Il est rencontré de nombreuses fois par la suite, que le point soit isolé ou dans une figure. Nous avons alors analysé l'impact des ressources utilisées par l'enseignant sur les apprentissages de l'élève dyspraxique, tels les gestes, le discours, les signes écrits et graphiques et l'utilisation d'artefacts dans un environnement numérique.

Dans ce qui suit, nous présentons une partie de nos analyses et résultats.

II - ENSEIGNEMENT DE LA SYMETRIE AXIALE A LA TRANSITION ECOLE-COLLEGE

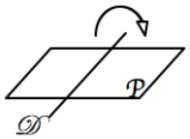
1 Étude à partir des textes officiels

À la fin de l'école primaire, d'après les programmes de 2008 (B.O. n°3 du 19 juin 2008), les élèves doivent être capables de percevoir un axe de symétrie, de reconnaître le(s) axe(s) de symétrie d'une figure, de tracer le symétrique d'une figure sur papier quadrillé et de compléter une figure par symétrie. En sixième, la progression consiste à faire évoluer les conceptions de l'élève en le faisant passer du travail expérimental (pliage, utilisation de papier calque) portant sur des objets de l'espace sensible à des constructions à l'aide des instruments usuels (règle, équerre et compas) fondées sur la mise en œuvre de propriétés portant sur des lignes et des points. Dans les commentaires du programme de sixième (B.O. spécial n°6 du 28 août 2008) apparaît une volonté de continuité avec le travail entrepris à l'école élémentaire conduisant à dégager les propriétés de « conservation » de la symétrie axiale (distances, alignement, angles et aires) à partir d'un inventaire de figures simples obtenu par pliage ou par utilisation de papier calque. En fin de sixième, l'élève doit être capable de construire le symétrique d'un point, d'une droite, d'un segment, d'un cercle (que l'axe de symétrie coupe ou non la figure) et plus généralement le symétrique d'une figure donnée, en utilisant ses instruments. Le rôle de la médiatrice comme axe de symétrie d'un segment est mis en évidence mais cette notion n'est exigible pour le socle qu'en classe de cinquième.

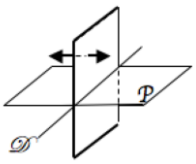
À l'école primaire et au collège, les élèves rencontrent deux aspects différents du concept de symétrie. En effet, les problèmes de reconnaissance et de construction mettent en jeu soit une figure symétrique, soit deux figures symétriques. Dans le cas d'une figure symétrique dont le(s) axe(s) sont à reconnaître ou qui est à compléter, la symétrie est vue comme une propriété de la figure ; dans le cas de deux figures symétriques, l'une est considérée comme l'image de l'autre par symétrie en tant que transformation géométrique.

Nous pouvons souligner enfin une rupture dans l'enseignement de la symétrie axiale. A l'école primaire, l'introduction pragmatique du concept conduit à la considérer comme une transformation portant sur des surfaces en passant par l'espace. On propose en général aux élèves un dispositif expérimental qui permet d'obtenir, par manipulations simples, le symétrique d'une figure donnée ou de contrôler la symétrie d'une configuration par rapport à un axe donné. La symétrie axiale dans un plan P par rapport à une droite D de ce plan peut être conçue comme la restriction à ce plan des deux transformations de l'espace suivantes :

- un demi-tour autour de la droite D



- une symétrie orthogonale par rapport au plan perpendiculaire au plan P et contenant la droite D



Pour la première transformation, le plan peut être représenté par une feuille transparente et le demi-tour obtenu par pliage de la feuille suivant la droite D ou par retournement de la feuille autour de la droite D. Dans cette manipulation, on ne tiendra pas compte des positions intermédiaires prises par les objets en déplacement. De plus, il sera nécessaire d'identifier les deux faces de la feuille pour que celle-ci ait les caractéristiques du plan qui est sans épaisseur et qui n'est pas biface. Cette abstraction non explicitée peut être source de difficulté comme l'illustre Figure 1 l'objection d'une élève utilisant l'image mentale associée au demi-tour autour de l'axe de symétrie.

« *Si le chat tourne autour de la droite on ne doit plus voir sa queue.* »
(Commission Collège de l'APMEP-Lorraine, 2002)

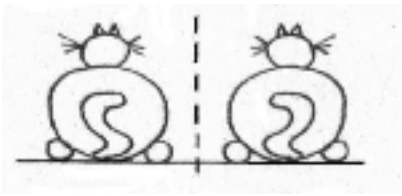


Figure 1

Pour la seconde transformation, on peut utiliser un objet plan réfléchissant représentant le plan de symétrie, tel un miroir ou un Géomiroir, et le placer perpendiculairement au plan P sur l'axe de symétrie. On peut ainsi visualiser les effets de la symétrie axiale en observant le reflet d'une figure. Cette matérialisation n'est pas basée sur l'idée de mouvement géométrique comme avec le pliage ou le retournement du calque. Ici, la transformation est invisible, on observe seulement son résultat : la figure située d'un côté de l'axe et son image virtuelle.

Pliage, retournement du calque ou visualisation du reflet favorisent la construction d'images mentales relatives à la symétrie axiale mais peuvent amener aussi des conceptions erronées. Par exemple, la symétrie pourra être perçue comme une transformation d'un demi-plan délimité par l'axe dans l'autre demi-plan et dans un seul sens. Les élèves considéreront alors comme impossibles des constructions de symétriques de figures traversées par l'axe de symétrie.

Le mode d'appréhension de la symétrie axiale va progressivement évoluer en sixième, elle sera considérée comme une transformation ponctuelle. Faisant référence aux travaux de Duval (Duval, 1995), nous pouvons remarquer qu'une déconstruction dimensionnelle est nécessaire, à savoir un passage d'une visualisation des figures en termes de surfaces à une visualisation des figures en termes de lignes et de points. Ce changement de point de vue sur les figures est amorcé à l'école primaire dans le cas d'activités de tracé du symétrique d'une figure par rapport à une droite sur papier quadrillé mais il peut rester minime si, une fois le symétrique d'un point placé, ce sont des propriétés portant sur les surfaces qui sont prises en compte, comme la conservation de la forme et de la taille, et le retournement de la figure. Par ailleurs, les points isolés sur quadrillage peuvent être vus comme des sommets de triangles et les constructions peuvent n'être réalisées qu'en s'appuyant sur une perception de surfaces.

L'approche ponctuelle des figures prépare l'accès à la géométrie déductive étudiée au collège mais constitue un obstacle pour les élèves puisqu'elle va à l'encontre de la manière spontanée et prédominante de voir les figures. Dans notre étude, nous nous appuyons sur les unités constitutives d'une figure géométrique définies par Duval (Duval, 1995) pour caractériser les différents types de points dont les élèves seront amenés à construire le symétrique.

2 Les unités constitutives d'une figure géométrique

Dans le registre des représentations géométriques, Duval (Duval, 1995) définit les unités figurales élémentaires comme des figures de dimension 0 (*0D*) : un point, de dimension 1 (*1D*) : une ligne ou de dimension 2 (*2D*) : une zone dans une surface. Les lignes et les zones peuvent avoir des formes rectilignes ou courbées qui peuvent être ouvertes ou fermées pour les zones. De l'analyse des figures géométriques en fonction de ces unités figurales élémentaires, il ressort différents constats qui permettent d'expliquer des difficultés rencontrées par les élèves lors de l'apprentissage de la géométrie. D'une part, la perception visuelle des unités de dimension 2 prédomine sur celles de dimension 1 ou 0, Duval précise que les élèves évitent au maximum de transformer une unité figurale de dimension 2 en une configuration d'unités figurales de dimension 1 ou 0, cette déconstruction dimensionnelle allant à l'encontre des processus spontanés d'identification visuelle des formes, alors que le traitement d'une situation mathématique représentée par une figure nécessite que l'on considère les unités figurales de dimension inférieure. Par exemple le carré est perçu comme une figure unique mais il est défini par des propriétés sur les unités figurales de dimension 1 qui le composent : quatre côtés de même longueur, des angles droits, des axes de symétrie, …

D'autre part, un même objet mathématique peut être représenté par des unités figurales différentes. Par exemple le point peut être représenté par trois unités figurales différentes : celle typique de dimension 0, le point pouvant être en dehors ou sur une autre unité figurale et celles moins typiques de dimension 2 comme « coin » (sommet) ou « croix » (intersection). Dans ces dernières représentations, le point sera plus difficilement identifié.

Nous avons repéré, dans la séquence d'enseignement observée, tous les épisodes de construction instrumentée du symétrique d'un point par rapport à une droite. Nous avons alors distingué le point isolé, unité figurale de dimension 0 situé en dehors de toute autre unité figurale, représenté par une croix, des autres points :

- le point sur une figure : point situé sur une autre unité figurale, visible par une marque qui le désigne ou non (point sur une droite, sur un cercle ou un segment ; point extrémité d'un segment ; point centre d'un disque, …) ;
- le point sommet d'un polygone ;
- le point résultant de la relation d'incidence de deux lignes (intersection d'un arc de cercle et d'une droite, intersection de droites, …).

III - ÉVOLUTION DES APPRENTISSAGES DE L'ÉLÈVE DYSPRAXIQUE VISUO-SPATIAL AU COURS DE LA SÉQUENCE

1 Méthodologie de l'analyse

Nous avons déterminé différentes natures d'aide nous permettant de repérer les ressources sémiotiques utilisées par l'enseignante ou par l'AVS pour amener l'élève dyspraxique à intégrer des schèmes de construction instrumentée. Nous nous appuyons pour cela sur le concept d'ostensif introduit par Bosch et Chevallard (Bosch et Chevallard, 1999) dans le cadre de l'approche anthropologique. Ceux-ci distinguent deux types d'objets unis par une dialectique :

- Les ostensifs sont des objets qui ont un caractère matériel, perceptible par le moyen des sens, et qui peuvent être manipulés par la voix, par le regard, de façon motrice, … Ce sont des objets matériels quelconques tels un crayon, une règle, un compas, … ou d'autres particuliers : les gestes ; les sons, dont les mots de la langue, et plus généralement le discours ; les graphismes, schémas, dessins ; les écritures et les symboles. La manipulation des ostensifs est guidée et contrôlée par les non-ostensifs.
- Les non-ostensifs, tels des notions, des concepts, des intuitions, des idées, ne peuvent être manipulés. Ils existent institutionnellement et ne peuvent qu'être évoqués à travers la manipulation d'ostensifs associés.

Dans la réalisation d'un type de tâches, les ostensifs constituent la partie visible de l'activité, leur manipulation réglée par les non-ostensifs correspond à la mise en œuvre d'une technique.

Bosch et Chevallard considèrent que les objets ostensifs sont les ingrédients premiers des techniques, des technologies et des théories et qu'ils peuvent être regardés « comme des instruments de l'activité mathématique, des outils matériels sans lesquels l'action ne peut pas se réaliser ». Ils caractérisent les différents objets ostensifs par le registre auquel ils appartiennent : oral, écrit, graphique, gestuel et matériel. A partir de ces caractérisations, mais aussi de nos observations en classe, nous distinguons :

- ***le langage oral*** : discours adressé collectivement à la classe ou personnellement à l'élève ;
- ***le langage écrit*** auquel l'élève peut se référer : écrits au tableau, dans le cahier, dans le manuel, dans les interfaces d'Apprenti-Géomètre et de Mathenpoche ;
- ***la gestuelle*** : tout mouvement des mains ou des bras réalisé « dans l'air » ou sur un support, destiné à évoquer un non-ostensif dans le cadre d'activité mathématique ;

- ***les manipulations d'objets matériels*** : cela peut être des manipulations de dispositifs expérimentaux (pliage, retournement de calque ou utilisation de Géomiroir) ou des manipulations d'instruments géométriques (équerre, règle, compas) ;
- ***les manipulations d'objets virtuels*** dans un environnement numérique : animations d'objets géométriques effectuant un demi-tour autour de l'axe de symétrie avec le logiciel Apprenti-Géomètre ou manipulations d'instruments géométriques virtuels dans la base d'exercice en ligne Mathenpoche ;
- ***les signes graphiques*** : cela peut être un schéma, un symbole, un codage de propriétés (angle droit, égalité de longueurs), un surlignage.

Dans l'environnement Papier-Crayon, l'élève dyspraxique que nous avons observé a toujours été conduit à utiliser une même technique de construction d'un point M', symétrique d'un point M par rapport à une droite (d), à l'équerre et au compas.

Nous avons décomposé ce type de tâches en treize actions, réparties en trois étapes illustrées Figure 2. La première étape consiste en la construction à l'équerre du segment [MP], avec P projeté orthogonal de M sur la droite (d) : il s'agit pour cela de prendre l'équerre, de placer un côté de l'angle droit de l'équerre contre la droite (d) du côté où se trouve le point M, de glisser l'équerre jusqu'à ce que l'autre côté de l'angle droit soit sur le point M, de maintenir l'équerre et de tracer le segment [MP]. La deuxième étape consiste en un prolongement du segment [MP] grâce à un glissement puis maintien de l'équerre. La troisième étape consiste en la construction d'un arc de cercle de centre P et de rayon MP interceptant la droite (MP) en un point M' : il s'agit de prendre le compas, d'écarter les branches de l'écart MP, de tracer l'arc et de repérer le point M'.

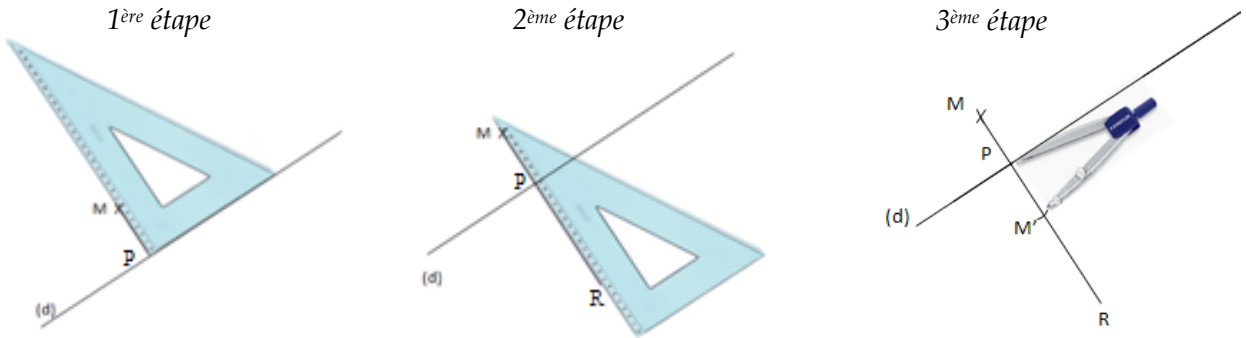


Figure 2

À partir du visionnement et de la transcription des épisodes où l'élève dyspraxique visuo-spatial était amené à construire le symétrique d'un point M par rapport à une droite (d) à l'équerre et au compas, nous avons relevé les aides apportées par l'enseignante ou par l'AVS au cours des différentes étapes de la construction selon leur nature (orale écrite, gestuelle, manipulatoire, graphique), ainsi que leurs effets sur l'action de l'élève. Nous avons distingué les aides mathématiques des aides compensatoires du handicap. Les premières sont relatives aux connaissances mathématiques à mettre en jeu dans la construction instrumentée. Une aide forte de ce type peut être une formulation ou une évocation de la propriété géométrique à mettre en œuvre : « Trace la perpendiculaire à (d) passant par M » ; reporte la distance de M à (d) sur la perpendiculaire à partir de ce point ; … ». Elle peut être aussi une instruction sur le positionnement des instruments à effectuer ou sur une action à réaliser avec : « Place un côté de l'angle droit de l'équerre contre l'axe de symétrie ; glisse ton équerre le long de la droite ; mets la pointe du compas sur le point M ; … ». Elle peut être enfin une action exécutée à la place de l'élève, sans instruction de sa part. Une aide mathématique faible sera une formulation d'une action réalisée par l'élève, cette formulation lui servant de rétroaction. Aucune aide mathématique ne sera apportée si l'élève réalise l'action de façon autonome ou s'il donne une instruction permettant à un tiers de l'effectuer. Les aides compensatoires au handicap pallient les déficits praxiques, visuo-

spatiaux ou organisationnels. Ces aides sont fortes lorsqu'un tiers exécute les actions à la place de l'élève, avec ou sans ses instructions (ajustement de la position de l'équerre, maintien de l'équerre, …) ; elles sont faibles lorsqu'un questionnement non inducteur est conduit (« Que faut-il faire maintenant ? ») ou lorsque des conseils sur la tenue des instruments sont donnés (« Tiens le compas par le haut », « Appuie plus sur la pointe », « Ecarte les doigts sur l'équerre », …).

Dans les différentes constructions analysées, nous avons calculé le pourcentage d'aides données à l'élève dyspraxique visuo-spatial, en affectant un coefficient 2 aux actions fortement aidées, un coefficient 1 aux actions faiblement aidées, un coefficient 0 aux actions autonomes, que les aides soient mathématiques ou compensatoires au handicap. Une aide forte dans toutes les actions revient à 100% d'aide se décomposant en 43 % d'aide mathématique et 57 % d'aide compensatoire au handicap.

2 Analyse et résultats

Pour étudier l'évolution des apprentissages de l'élève et ce qui les favorisait, nous avons analysé plusieurs épisodes de constructions instrumentées du symétrique d'un point par rapport à une droite, en nous intéressant à différents types de points. Pour chacune des treize actions mise en jeu pour réaliser la construction, nous avons regardé le type d'aide apportée (aide mathématique ou aide compensatoire au handicap), la nature de cette aide (orale, écrite, gestuelle, manipulatoire, graphique) et nous en avons déterminé l'intensité. Nous avons également analysé les effets de ces aides sur l'activité de l'élève.

Nous présentons Figure 3 les pourcentages d'aide apportée dans différents épisodes de construction du symétrique d'un point dans une configuration composée d'un point isolé et d'une droite, sur support uni. Les cinq premières constructions sont réalisées dans l'environnement Papier – Crayon sauf la troisième qui est faite par l'élève au tableau, interrogé par l'enseignante. Les trois dernières sont réalisées avec les instruments virtuels de Mathenpoche.

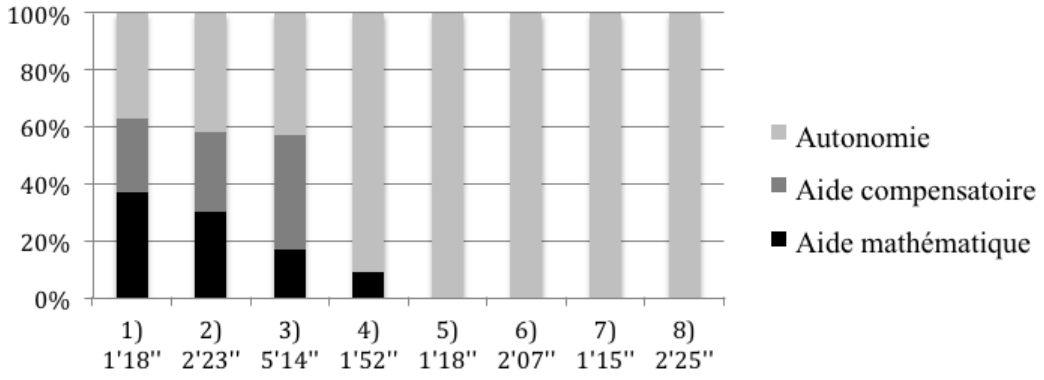


Figure 3. Construction du symétrique d'un point isolé (0D)

Le pourcentage d'aide mathématique diminue progressivement. Dans ses premières constructions, l'élève ne prend pas en compte la propriété de perpendicularité de façon instrumentée. Il utilise bien l'équerre en faisant passer un côté de l'angle droit par le point considéré, mais il oriente ce côté perpendiculairement à l'axe de symétrie de façon visuelle. Pour le positionnement de l'équerre, des traitements spatiaux complexes sont à mettre en œuvre lorsqu'il faut considérer simultanément l'orientation de l'équerre, celle de la droite ainsi que la position du point. Différentes interventions ont permis d'aboutir à un positionnement correct : l'enseignante ou l'AVS attire l'attention de l'élève sur l'axe de symétrie en le mentionnant, en le montrant ou en lui demandant de le repérer. L'une ou l'autre fait également le lien entre les objets géométriques (axe de symétrie, point, angle droit) et les côtés de l'équerre dans un discours oral appuyé de gestes (parcours des éléments mentionnés avec le doigt). Dans la deuxième construction, l'AVS organise les actions de l'élève en le contraignant d'abord à tenir compte de l'axe, elle y maintient une règle contre laquelle l'élève doit faire coulisser son équerre jusqu'au point. A partir de la quatrième construction, l'élève place l'équerre en la glissant le long de l'axe et jusqu'au point. La maîtrise de

cette technique de positionnement de l'équerre est cependant occultée par une imprécision importante dans le tracé : les difficultés praxiques de l'élève l'empêchent de bien ajuster son équerre puis de la maintenir tout en traçant. Cette imprécision est provoquée aussi parfois pour d'autres raisons comme par exemple une gêne occasionnée par le graphisme du nom d'un point écrit dans la zone de tracé par manque d'anticipation, ou alors à cause d'un déséquilibre de l'équerre dans une construction réalisée en bas de page de cahier. Une absence d'aide compensatoire à ce niveau conduit donc à une production peu satisfaisante si l'enseignant garde un niveau d'exigence de précision identique à tous les élèves de la classe.

Dans les quatre premières constructions, et cela apparaitra aussi par la suite dans des constructions avec d'autres types de points, l'élève considère la construction terminée une fois le prolongement du segment [MP] tracé. Le point symétrique cherché est selon lui à l'extrémité du prolongement. Ce peut être la conséquence d'une perception syncrétique du segment où longueur et direction sont prises globalement en compte. L'évocation du report de longueur par l'AVS enclenche alors la fin de la construction.

En fin de la séquence d'apprentissage, l'élève dyspraxique a acquis les schèmes d'utilisation de l'équerre et du compas concernant la technique qui lui a été enseignée pour réaliser le type de tâche de construction du symétrique d'un point par rapport à une droite, dans le cas d'un point isolé. Il est d'ailleurs capable d'adapter de façon autonome cette technique dans l'environnement numérique de Mathenpoche, une fois effectuée la prise en main des instruments virtuels. Ses constructions sont alors réalisées dans une durée analogue à celle des autres élèves.

L'élève ne s'est pas montré capable de réinvestir de façon autonome sa technique de construction lorsque le point n'est plus isolé ou lorsqu'il est en présence de « lignes parasites », telles d'autres droites qui ne sont pas l'axe de symétrie par exemple. Nous présentons en Figure 4 les pourcentages d'aide apportée pour trois constructions de ce type.

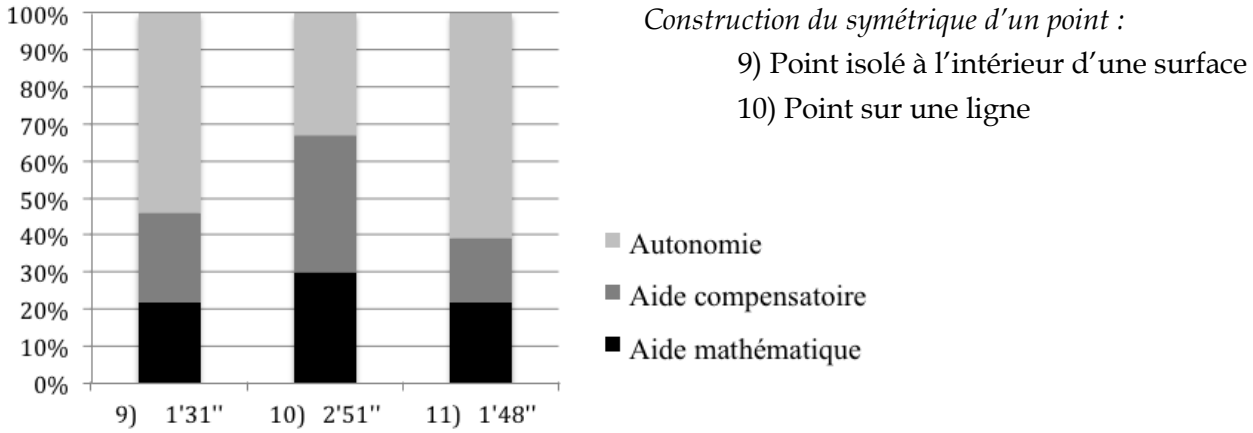


Figure 4.

La construction 9) est celle du symétrique du centre d'un cercle, la construction 10) celle du symétrique d'un point d'une droite sécante à l'axe de symétrie. 46 % d'aide pour la première et 67 % pour la seconde ont permis la mise en œuvre d'une technique correcte. Moins d'aide a été apportée pour la construction 11) où figurent sur un support plusieurs droites et points isolés, cependant le report de longueur a été effectué en autonomie par l'élève de façon incorrecte (point D' de l'Annexe). Une construction avec une « droite parasite » dans Mathenpoche n'a pas non plus abouti.

Nous attribuons assez naturellement les difficultés de repérage de l'élève à ses troubles visuo-spatiaux, ce repérage pouvant être amélioré par la qualité des supports proposés (supports agrandis, axe à considérer coloré ou surligné). Toutefois, il semble que ce ne soit pas la seule origine des difficultés. Elles viennent aussi de l'appréhension qu'il a des objets géométriques et de leur représentation. Ce rapport aux figures est commun à d'autres élèves de classe, même non dyspraxiques visuo-spatiaux, qui ne perçoivent par exemple la droite que comme un trait qu'on ne peut prolonger et qui ne possède que deux points : les extrémités du trait. Ces élèves ne

parviennent pas à aller au-delà de leur vision prédominante des figures : la ligne, unité figurale de dimension 1, n'est pas perçue comme un ensemble de points.

IV - ETUDE DE L'IMPACT DE RESSOURCES SÉMIOTIQUES

Pour l'élève dyspraxique observé, c'est principalement le langage oral, en lien avec une aide gestuelle ou manipulatoire, qui l'a conduit à organiser et à réaliser ses actions pas à pas et de façon autonome. Nous développons ci-après l'impact de l'utilisation de gestes et celui de la manipulation d'instruments virtuels.

1 Aide gestuelle

L'aide gestuelle intervient à différents niveaux. Certains gestes sont produits par l'enseignante et sont adressés à l'ensemble des élèves dans des phases de travail collectives. Nous avons pu en observer l'appropriation et l'exploitation par une partie de la classe, notamment pour ce qui est des gestes issus de la matérialisation de la symétrie axiale effectuée en début de séquence, à savoir le pliage. D'autres gestes, destinés directement à l'élève dyspraxique et proposés dans le cadre d'une relation duale avec l'enseignante ou avec l'AVS, se sont avérés être une aide compensatoire aux difficultés engendrées par la dyspraxie visuo-spatiale.

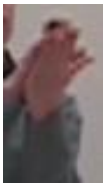
1.1 Gestuelle issue du pliage

La notion de symétrie axiale a été introduite par l'enseignante à partir d'un travail expérimental, une activité de pliage, dans la continuité de ce qui est réalisé à l'école élémentaire.

Il s'agissait pour les élèves de décalquer « la cocotte », forme figurative représentée à côté d'une droite inclinée sur leur support papier, après avoir plié la feuille le long de la droite. L'enseignante amenait alors les élèves à faire des observations relatives à des propriétés géométriques de la configuration obtenue et à les vérifier avec leurs instruments. De la matérialisation de la symétrie axiale par le pliage ont émergé différents gestes avec les mains permettant d'évoquer cette manipulation, et, à travers elle, la transformation géométrique qu'elle représente. Cette évocation gestuelle s'est installée lors de la phase de synthèse qui a fait suite à l'activité de pliage.

Tout d'abord, à la superposition de figures symétriques placées de part et d'autre d'une droite, présentée par un mouvement réitéré de pliage-dépliage d'une feuille de papier, se substitue un mouvement analogue avec les mains : mains côte à côte, paumes vers le haut, puis l'une des deux se retourne et se pose sur l'autre.





C'est ce mouvement de la main qui est réalisé ensuite, paume posée sur une figure puis retournement autour de l'axe pour se poser dos sur la figure symétrique, sur les supports non pliables tels que tableau, cahiers d'élèves ou écran d'ordinateur. Ces gestes, réalisés au départ par l'enseignante en accompagnement de son discours, reproduits puis exploités par l'AVS auprès des élèves dyspraxiques, permettent de soutenir la représentation mentale de superposition de figures après retournement autour de l'axe.



La signification de ces gestes se construit pour chaque élève, de façon implicite et personnelle. Ces gestes apparaissent spontanément et ne sont pas institutionnalisés. Certains élèves les réinvestissent dans des situations de communication pour exprimer ce qu'ils ne parviennent pas encore à formuler dans un langage mathématique. Ces gestes, ou d'autres qui en dérivent, sont aussi utilisés dans la résolution de certains types de tâches de construction comme moyen d'anticiper ou de contrôler la position du symétrique d'un point ou d'un autre objet géométrique (segment, droite, cercle, …), ou comme aide à la reconnaissance d'axes de symétrie de figures.

Nous avons observé à différentes reprises l'efficacité de l'évocation verbale et gestuelle du pliage pour des élèves, dont l'élève dyspraxique. Elle s'est cependant révélée inopérante pour beaucoup lorsqu'il a fallu déterminer si une diagonale d'un rectangle était axe de symétrie ou non de ce rectangle : le recours au pliage effectif a été nécessaire pour aller contre les conceptions erronées des élèves.

1.2 Gestuelle en lien avec les objets, relations et propriétés géométriques

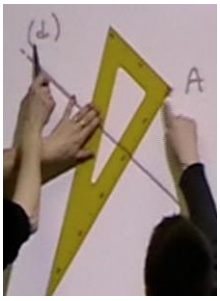
Certains gestes ont permis de focaliser l'attention de l'élève sur les objets géométriques à considérer dans les activités de construction qui lui étaient proposées :

- ***le geste de tracé***, consistant en un parcours avec l'index de l'objet, l'axe de symétrie par exemple ; souvent un va-et-vient est effectué sur l'objet, l'allongement de la durée du geste en favorise alors la perception ;
- ***le geste de pointage***, consistant à montrer avec l'index l'objet évoqué dans le discours, ce qui permet de le repérer plus facilement et limite les malentendus.

Ces gestes ont parfois pu être remplacés ou renforcés par une aide graphique, comme le surlignage au feutre fluorescent du point et de l'axe de symétrie à prendre en compte dans la construction, dans le cas d'une configuration qui présente des lignes et des points « parasites ». Ce type de support, source de difficulté importante pour l'élève dyspraxique visuo-spatial, résulte souvent d'un souci d'économie de place du concepteur de l'exercice qui met les figures de plusieurs énoncés sur une même feuille. (Voir Annexe).

Certains gestes, en collaboration avec le langage, sont destinés à permettre à l'élève **de construire des relations entre l'instrument, les objets mathématiques et la propriété géométrique mobilisée**. Nous l'illustrons par deux exemples.

Dans le premier épisode choisi, l'élève dyspraxique visuo-spatial est interrogé au tableau par l'enseignante lors d'une phase de rappel. Il présente à la classe la première étape de construction du symétrique d'un point isolé A par rapport à une droite (d), à l'aide de la grande équerre du tableau.



Il propose un positionnement de l'équerre erroné avec le sommet de l'angle droit sur A et un côté de l'angle droit visuellement perpendiculaire à la droite (d). Par un aller-retour avec l'index à partir du point A le long de ce côté de l'équerre, il montre le tracé qu'il souhaite effectuer, en le formulant par bribes en réponse à un questionnement de l'enseignante. Celle-ci reprend alors ce que l'élève a exprimé en accompagnant son discours de gestes qui mettent en évidence les objets géométriques à considérer :

> Enseignante : Il faut bien tracer la droite perpendiculaire à (d), *elle parcourt la droite (d) avec son crayon, passant par A // Elle pointe le point A*.

Elle établit ensuite le lien avec l'instrument :

> Enseignante : Bon, maintenant, pour tracer une perpendiculaire, il faut une équerre et il faut placer l'angle droit de l'équerre // e*lle effectue avec son crayon deux va et vient sur les côtés de l'angle droit de l'équerre,* où ?
>
> Elève : sur A
>
> Enseignante : sur A ? // *Elle parcourt l'angle droit de l'équerre.*
>
> Elève : sur la droite
>
> Enseignante : Ah, sur la droite. Est-ce qu'elle est sur la droite ? *Elle parcourt l'angle droit de l'équerre.*

Suite à cela, l'élève déplace l'équerre et la positionne de façon correcte. Ainsi, des gestes de tracé et de pointage ont contribué à la mise en relation des côtés de l'angle droit de l'équerre avec l'angle droit à obtenir à partir de l'axe de symétrie et du point considéré.

Notre deuxième exemple est issu des échanges entre l'AVS et l'élève dyspraxique visuo-spatial lors de phases d'apprentissage de la construction du symétrique d'un point par rapport à une droite à l'équerre et au compas. Nous avons observé un type de gestes produit par l'AVS et déclencheur de la prise en compte par l'élève de la propriété d'égalité de longueurs dans ses constructions. Ce geste a émergé lors de la première construction instrumentée du symétrique d'un point par rapport à une droite que les élèves devaient réaliser individuellement après qu'elle ait été présentée collectivement à la classe par l'enseignante.

AVS : Là, il faut qu'on ait la même distance // *Elle place son pouce sur le point M et son auriculaire sur son projeté orthogonal.*

de la droite // *Elle lève son pouce et appuie sur son auriculaire.*

au point // *Elle appui sur son pouce et lève son auriculaire.*

Elle décale ensuite sa main, pointe sur le projeté orthogonal de M puis sur l'emplacement du symétrique de M par rapport à la droite.



Dans les constructions qui suivront, ce geste, qui se présente dans sa forme la plus condensée par l'écart pouce-index de la main, va être évocateur pour l'élève du report de longueur à effectuer et de l'instrument à utiliser pour cela, à savoir le compas.

Au vu de ce qui précède, les gestes produits par l'enseignant, l'AVS ou les élèves, et associés au discours, semblent avoir eu un rôle déterminant pour permettre à l'élève dyspraxique visuo-spatial d'élaborer et de mobiliser des schèmes de construction instrumentée du symétrique d'un point par rapport à une droite dans l'environnement Papier-Crayon. Voyons maintenant ce qu'il en est de l'utilisation d'instruments virtuels.

2 Manipulation d'instruments virtuels

A la fin de la séquence sur la symétrie, nous avons expérimenté la réalisation du type de tâches de construction du symétrique d'un point par rapport à une droite dans un environnement numérique avec des instruments virtuels (crayon, équerre et compas) afin de dégager les conséquences d'une utilisation de cette ressource sur le comportement d'élèves faibles et sur leurs apprentissages.

Nous avons choisi de travailler avec Mathenpoche pour le confort visuel que cela présente pour l'utilisateur. L'emploi de couleurs et d'animations permet de guider le regard, la clarté dans la présentation donne une bonne lisibilité, ce qui est essentiel pour favoriser l'entrée de l'élève dyspraxique dans l'activité et ce qui n'est pas négligeable pour les autres non plus.

Nous avons observé l'élève dyspraxique visuo-spatial ainsi qu'un élève dyslexique, dans les quatre premières constructions de l'exercice 3 de la deuxième série d'exercices « Construction de points » du chapitre 5 « Symétrie axiale » du domaine de la géométrie en sixième dans Mathenpoche. La tâche de construction du symétrique d'un point par rapport à une droite se complexifie graduellement avec l'orientation de l'axe : vertical (Q1), horizontal (Q2) puis oblique (Q3). Dans la quatrième construction (Q4), l'axe est également oblique mais un axe vertical « parasite » est présent. Après une prise en main du crayon, de l'équerre et du compas, les élèves ont démarré leur activité.

2.1 Vers l'activité

L'énoncé se présente sous la forme d'un texte écrit accompagné de la figure à compléter. Le texte, pour chacune des trois questions, est présenté ainsi :

Question N°1 :

Le point H est le symétrique du point F par rapport à l'axe (d) : place-le avec précision en te servant de l'équerre et du compas.

Tout d'abord, nous notons à travers la consigne une rupture avec le contrat didactique habituel de la classe : l'ostensif utilisé par l'enseignante pour nommer le symétrique d'un point – lettre correspondant au nom du point initial affecté du symbole « ' » n'apparaît pas ici (dans l'exemple, le symétrique de F aurait été nommé F'). Ensuite, de nos observations des élèves ressort le fait qu'aucun d'entre eux ne lit le texte de la question n°1 jusqu'au bout et de façon correcte :

- l'élève dyspraxique visuo-spatial ne voit pas ce qu'il faut faire ; l'enseignante lui demande de lire le texte, ce qu'il fait de façon approximative et manquant de fluidité ; elle lui relit la consigne, cela ne l'aide pas plus ; elle lui fait alors remarquer qu'en classe, ils ont nommé F' le point nommé ici H et reformule la tâche en utilisant F' ; l'élève comprend alors la tâche ;
- l'élève dyslexique ne lit le texte que partiellement à mi-voix « Le point H est le symétrique du point F », décide de sortir les outils disponibles en cliquant sur leurs icônes, puis relit en s'arrêtant au même endroit ; il voit le point F sur la figure mais pas le point H et reste bloqué ; l'enseignante intervient en lui demandant de lui lire le texte, ce qu'il fait dans une lecture non fluide qui ne l'empêche pas de comprendre alors la consigne : « Le point H, il est … ah oui, j'ai compris, faut que H il se retrouve là, en face, OK ».

Nous retrouvons des comportements déjà observés dans l'environnement Papier-Crayon, à savoir une lecture superficielle ou approximative des consignes. La présence de la figure et des outils disponibles permet de suggérer la tâche à réaliser. Cet exercice sur Mathenpoche a permis de mettre en évidence l'importance qu'a prise l'ostensif graphique « F' » pour l'élève dyspraxique sur la compréhension de l'expression « le symétrique de F ».

2.2 Genèse instrumentale

Nous présentons maintenant la genèse instrumentale relative à la construction instrumentée avec crayon, équerre et compas virtuels.

Dans l'approche instrumentale de Rabardel (Rabardel, 2005), un artefact, objet matériel ou symbolique, devient un instrument au cours d'un processus de genèse instrumentale, qui consiste en l'élaboration de schèmes d'utilisation de cet artefact, résultant d'une construction propre du sujet ou de schèmes sociaux d'utilisation. De l'artefact à l'instrument, la genèse instrumentale consiste en un double processus d'évolution des relations « sujet – artefact » :

- ***l'instrumentalisation*** est relative à l'artefact, à la découverte et à la sélection des commandes ; les diverses potentialités de l'artefact sont progressivement découvertes par le sujet, éventuellement transformées, voire « détournées » : l'usager adapte l'artefact à ses habitudes de travail ;
- ***l'instrumentation*** est relative à l'émergence et à l'évolution des schèmes pour la réalisation d'un type de tâche : les contraintes de l'artefact contribuent à structurer l'action de l'usager.

Les schèmes d'utilisation du crayon, de l'équerre et du compas ne sont pas analogues dans l'environnement numérique et dans l'environnement Papier-Crayon. En premier lieu, les outils virtuels sont manipulés par des commandes au clavier ou à la souris, ce qui libère l'élève de tâches praxiques telles le positionnement manuel et la tenue de la règle ou de l'équerre ou telle la manipulation du compas. Celle-ci en effet nécessite des aptitudes motrices importantes dans l'environnement Papier-Crayon lorsqu'il s'agit d'écarter les branches du compas, de le tenir par le haut en donnant une pression plus forte sur la pointe ou de mouvoir le poignet avec souplesse pour tracer un arc de cercle. L'allégement du coût de ces tâches rend l'élève dyspraxique plus disponible pour le repérage visuel et pour l'organisation de ses actions. Contribuent aussi à cela la fixité des outils en l'absence de commande ainsi que l'absence de gestion d'actions simultanées telles que tenir l'équerre et tracer le long ou tenir la règle et y faire coulisser l'équerre.

La zone de travail restreinte a l'avantage de focaliser l'attention sur la tâche à effectuer mais elle rend plus difficile le bon positionnement des instruments lorsqu'ils doivent en sortir (la copie d'écran présentée Figure 5 en est un exemple). En effet, il faut d'une part anticiper sur la partie qui restera visible pour pouvoir les manipuler et d'autre part une vision partielle peut perturber l'élève dans la suite des actions à effectuer.

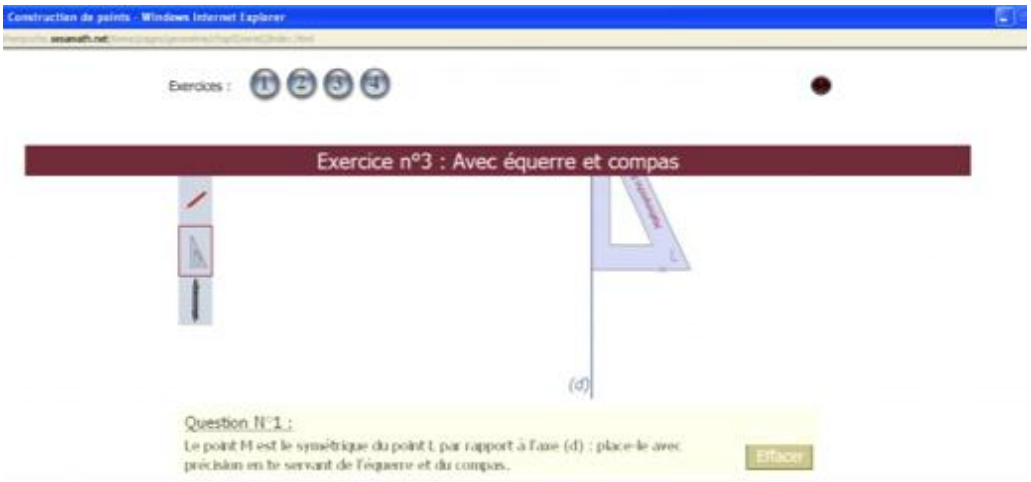


Figure 5.

En second lieu, un même outil peut avoir des caractéristiques qui diffèrent selon l'environnement, ce qui conduit à des phénomènes d'instrumentation et d'instrumentalisation. Nous allons illustrer cela à partir de nos observations du comportement des élèves.

Dans le tableau suivant sont exposés les schèmes élaborés par chacun des deux élèves dans l'environnement numérique au cours des trois premières questions des situations expérimentées.

Elève dyslexique	**Elève dyspraxique visuo-spatial**
- Sort l'équerre. - Tourne l'équerre jusqu'à la placer avec un côté de l'angle droit contre l'axe dans le demi- plan où se situe le point. - Déplace l'équerre pour amener l'autre côté de l'angle droit sur le point.	
- Prend la distance du point à l'axe avec le compas, le retourne et trace un arc de cercle.	- Trace un segment du point en allant le long de l'équerre puis en prolongeant de l'autre côté de l'axe (Voir Figure 7).
- Glisse l'équerre jusqu'à ce que le côté qui passe par le point intercepte l'arc (Voir Figure 6).	- Prend la distance du point à l'axe avec le compas, le glisse et trace un arc de cercle.
- Trace un segment le long de l'équerre du point jusqu'à plus loin que l'arc.	
- Place le point.	

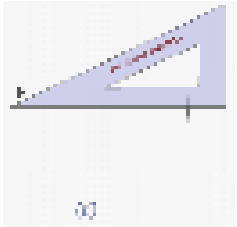


Figure 6.

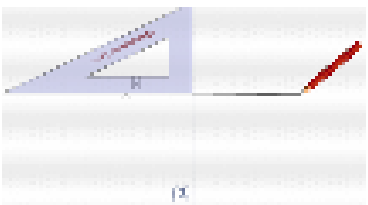


Figure 7.

Dans l'environnement Papier-Crayon, pour tracer le symétrique d'un point par rapport à un axe, les élèves ont le plus souvent utilisé la construction que nous avons décomposée en trois étapes.

Pour la première étape, les deux élèves ont réinvesti leur technique de placement de l'équerre. La deuxième étape, consistant à prolonger le segment [MP] pour obtenir une droite perpendiculaire à l'axe passant par le point M, n'est pas transposable dans l'environnement de Mathenpoche. En effet, il n'est possible de tracer avec le crayon qu'une ligne droite, si l'on en trace une seconde, la première s'efface automatiquement. L'action de l'usager doit donc s'adapter à cette contrainte.

Pour cela, l'élève dyslexique utilise la conservation de l'orientation de l'équerre lorsqu'on la glisse (Figure 6). Cette action n'est pas valide dans l'environnement Papier-Crayon car sans support pour coulisser, l'équerre peut tourner. L'élève dyspraxique utilise la possibilité donnée par le crayon de tracer un segment en donnant une extrémité (le point dont on veut le symétrique) et une direction (donnée par l'équerre), le prolongement pouvant être réalisé sans déplacement de l'équerre (Figure 7). Cette procédure n'est pas non plus transposable à l'environnement Papier-Crayon. Dans l'aide proposée par Mathenpoche, apparaissent les étapes explicitées Figure 8.

Positionnement de l'équerre *Positionnement de la règle* *Retrait de l'équerre et tracé*



Figure 8.

Au regard de cela, nous pourrions penser que les élèves observés instrumentalisent l'équerre ou le crayon pour tracer la perpendiculaire à une droite passant par un point car la procédure de tracé proposée par les concepteurs est bien transposable dans l'environnement Papier-Crayon. Toutefois, cette procédure n'est pas réalisable avec les instruments proposés dans l'exercice 3 : équerre, compas et crayon.

2.3 De l'activité vers les rétroactions

Nous présentons maintenant la prise en compte de la réponse de l'élève et ses effets. Si l'élève place le point symétrique au bon endroit, l'affichage « BRAVO ! » apparaît et le compteur du score est mis à jour.

La position des instruments n'est pas vérifiée, seule celle du point symétrique l'est, et nous avons parfois observé une rétroaction validant une réponse obtenue par une méthode incorrecte. A sa première erreur, l'élève reçoit le conseil d'utiliser l'aide, si son deuxième essai est erroné, il est envoyé directement sur la première page de l'aide. Dans les deux cas, il est libre de la consulter ou non. Il obtient ensuite sa construction corrigée (symétrique placé avec codage de la perpendicularité et de l'égalité de longueurs) avant de passer à la question suivante.

Le contenu de l'aide est toujours le même, il s'agit de la présentation des étapes de construction, chacune étant décrite par un texte, une figure sur laquelle on visualise le positionnement dynamique des instruments et le codage des propriétés. Il arrive que l'aide ne soit pas adaptée à l'activité de l'élève, ne l'éclairant pas sur la nature de son erreur, comme par exemple le mauvais choix de l'axe dans Q4 pour l'élève dyspraxique.

Mises à part des difficultés de lecture du texte, dues entre autres à un manque de repères pour l'élève dyspraxique, et à certains écrits qui ne restent pas longtemps à l'écran, les élèves ne réussissent pas toujours à saisir de façon autonome les indications qui leur seraient utiles dans l'aide d'autant plus que certaines actions présentées ne sont pas en adéquation avec celles attendues dans l'exercice. Par exemple, les élèves n'ont pas la possibilité de coder leur figure au fur et à mesure des constructions. L'intervention de l'enseignant est alors nécessaire pour permettre aux élèves de l'utiliser de façon efficace.

Nous constatons une instrumentation réussie avec Mathenpoche pour les deux élèves dans les trois premières constructions. Déjà performants dans des constructions de ce type dans l'environnement Papier-Crayon, ils n'ont pas eu de difficulté à élaborer des schèmes valides en s'adaptant aux contraintes de Mathenpoche. Au cours de la séquence, les progrès de l'élève dyslexique dans l'environnement Papier-Crayon ont été beaucoup plus rapides que ceux de l'élève dyspraxique qui a eu longtemps besoin d'aides procédurales et manipulatoires. L'élève dyspraxique a gagné en précision avec Mathenpoche, à noter que son temps moyen de

construction (1 min 56) pour Q1, Q2 et Q3 est meilleur que celui de l'élève dyslexique (3 min 04) : allégé du coût attentionnel existant pour lui dans l'environnement Papier-Crayon, il est plus disponible pour élaborer de façon autonome une démarche de construction avec Mathenpoche. Ceci est un atout indéniable d'un travail dans un environnement numérique pour un élève dyspraxique.

V - CONCLUSION

Dans la séquence d'enseignement observée, des difficultés propres à la dyspraxie visuo-spatiale sont apparues dans l'apprentissage du concept de symétrie axiale, que ce soit au niveau de la perception visuelle, de la manipulation des instruments ou de l'organisation d'actions à mettre en œuvre dans des activités de reconnaissance ou de construction. Tout cela n'a pas pour autant rendu totalement impossible tout apprentissage. A la fin de la séquence, l'élève dyspraxique visuo-spatial est capable de réaliser en autonomie une construction instrumentée du symétrique d'un point par rapport à une droite une fois qu'il repère bien ces deux objets géométriques.

L'élève dyspraxique visuo-spatial a reçu une aide individualisée importante, il s'est approprié progressivement une technique de construction instrumentée grâce à une « séquentialisation » des actions à effectuer, donnée de façon orale et accompagnée d'évocations gestuelles.

Enfin, les quelques expérimentations réalisées avec Mathenpoche nous laissent penser que les constructions instrumentées dans un environnement numérique sont plus accessibles pour les élèves dyspraxiques. Reste à déterminer si les constructions avec des instruments virtuels peuvent se substituer à celles réalisées dans l'environnement Papier-Crayon pour conduire l'élève à des apprentissages géométriques.

VI - BIBLIOGRAPHIE

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19/1**, 77-123.

Commission collège de l'APMEP-Lorraine (2002) Interrogations naïves mais sérieuses sur la symétrie. *Le Petit Vert*, Bulletin de la régionale Lorraine de l'A.P.M.E.P, **71**.

DUVAL R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Chapitre IV Figures géométriques et discours mathématique. Berne : Peter Lang.

MAZEAU M. & CROUAIL A. (2009). Rééduquer dyscalculie et dyspraxie. Méthode pratique pour l'enseignement des mathématiques. Editions Masson.

MAZEAU M., LE LOSTEC C. (2010). L'enfant dyspraxique et les apprentissages. Coordonner les actions thérapeutiques et scolaires. Elsevier Masson.

RABARDEL P. (2005). *Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques*. Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement. Rabardel P. et Pastré P. (eds). Octarès :Toulouse.

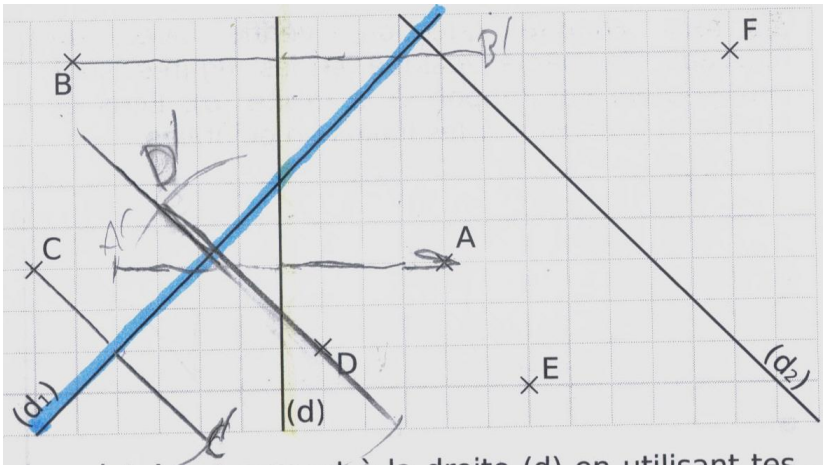
VII - ANNEXE

6 Sur la figure ci-contre,

a. construis les points A' et B' symétriques des points A et B par rapport à (d) ;

b. construis les points C' et D' symétriques des points C et D par rapport à (d_1) ;

c. construis les points E' et F' symétriques des points E et F par rapport à (d_2).



ÉTUDE D'UN DISPOSITIF ARTICULANT PRODUCTION DE RESSOURCES ET FORMATION CONTINUE EN GÉOMETRIE : QUELS EFFETS SUR LES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS ?

Christine MANGIANTE-ORSOLA
MCF, Université d'Artois
Laboratoire de Mathématiques de Lens
christine.mangiante@espe-lnf.fr

Régis LECLERCQ
IEN 1er degré
regis-jules.leclercq@ac-lille.fr

Résumé
Notre travail prend appui sur un dispositif visant la production de ressources dans le cadre de séances de formation continue, mettant en place un suivi d'enseignants sur le moyen terme, afin de mieux comprendre comment ils s'approprient des situations directement produites ou inspirées par la recherche et d'identifier des aspects qui facilitent à la fois le processus d'appropriation et la diffusion de ces situations dans l'enseignement ordinaire. Dans cette contribution, nous décrirons le parcours d'une enseignante de CM1/CM2 participant au dispositif de formation. Après plusieurs rencontres de travail, elle nous présente une séance en classe à partir d'un document issu des travaux du groupe Géométrie de l'IUFM Nord Pas de Calais. Le bilan de cette séance soulève un certain nombre de questions à propos des apports possibles pour l'enseignante et amène à concevoir une situation alternative qui sera, à son tour, testée et analysée. Quels sont les éléments issus de la recherche à opérationnaliser dans le but de les adapter aux besoins des enseignants ? En quoi cette séance revêt un potentiel de formation plus important que la première et de façon plus générale aménage un "passage" entre les travaux du groupe Géométrie et les pratiques des enseignants suivis ? Nous conclurons en essayant de caractériser ce qui pourrait être désigné par une *situation pour la classe avec objectifs de formation*.

INTRODUCTION

Depuis plus de dix ans, prenant appui sur un petit groupe de professeurs des écoles, enseignants maître-formateurs, volontaires pour tester les activités, un groupe de recherche de l'IUFM Nord-Pas-de-Calais[1] produit des articles et propose des situations pour l'enseignement de la géométrie. Notre travail s'inscrit dans le cadre de ces recherches et les prolonge en interrogeant les possibilités de diffusion dans l'enseignement ordinaire des situations produites (Mangiante-Orsola, Perrin-Glorian, même ouvrage). Dans cette perspective, nous avons conçu et mis en œuvre un dispositif de travail qui articule production de ressources et formation continue auprès d'un petit groupe de professeurs des écoles volontaires. Cette communication vise à étudier comment favoriser ce processus d'appropriation. Nous présenterons tout d'abord notre démarche puis nous analyserons la mise en œuvre d'une situation inspirée par la recherche par l'une des enseignantes impliquées dans le dispositif. Le bilan de la séance observée nous conduira alors à questionner les effets potentiels des ressources produites sur les pratiques des enseignants - pas seulement ceux qui participent à l'élaboration des ressources - et ouvrira des pistes pour l'optimisation des ressources produites. Il nous conduira à repenser la situation initialement produite par la recherche pour

[1] Ont participé à ce groupe J.R. Delplace, R. Duval, C. Gaudeul, M. Godin, B. Keskessa, R. Leclercq, C. Mangiante-Orsola, A.C. Mathé, B. Offre, M. J. Perrin, O. Verbaere.

proposer une *situation pour la classe avec objectifs pour la formation* dont nous proposerons une caractérisation.

I - PRESENTATION GENERALE DE LA RECHERCHE

1 Nos questions initiales

Lorsque nous avons rejoint le groupe en 2008, les chercheurs faisaient le constat que les situations produites par la recherche étaient accueillies favorablement par les enseignants en raison de leur caractère innovant et du manque d'exemples de résolution de problèmes durant les séances d'apprentissage en géométrie, mais chacun s'accordait à dire que ces situations impactaient peu les pratiques habituelles.

Suite à ce constat, nous avons décidé de chercher à mieux comprendre comment les enseignants s'approprient ou non des situations plus ou moins directement issues de la recherche et d'interroger les leviers sur lesquels agir pour améliorer cette appropriation. Notre problématique s'inscrit donc dans un questionnement plus large, celui portant sur la diffusion de résultats de recherche dans l'enseignement ordinaire. Pour aborder cette question, nous faisons le choix d'étudier un dispositif de formation continue visant la production de ressources pour les enseignants.

Ce dispositif, de deux fois neuf heures, a été élaboré et déployé, dans une circonscription du premier degré, sur deux années consécutives. Au cours de la première année, une conférence plénière rassemblant tous les enseignants de cycle 2 et de cycle 3 a permis de présenter des ressources issues de la recherche. Une petite dizaine d'enseignants volontaires (non titulaires du CAFIPEMF [2]) a ensuite choisi de travailler avec nous, pour élaborer et présenter les ressources produites aux autres enseignants de la circonscription dans le cadre d'un « forum des pratiques[3] ». De nombreux allers-retours entre ces enseignants volontaires et les formateurs (conseillers pédagogiques, conseiller TUIC, nous-mêmes) furent mis en place entre les moments de conception et les usages réalisés en classe. En tant que formateurs, nous faisons l'hypothèse que ce travail collaboratif, parce qu'il laisse une certaine marge de manœuvre[4] aux enseignants et les implique dans la production de ressources, est susceptible de favoriser l'appropriation des situations plus ou moins directement issues de la recherche. En tant que chercheurs, nous faisons l'hypothèse que l'étude de ce dispositif nous donne accès aux conditions d'appropriation par les enseignants de situations inspirées par la recherche. Notre intention est d'étudier ces conditions dans le but d'optimiser les ressources produites.

2 Précisions à propos de notre démarche et des cadres théoriques mobilisés

La théorie des situations de Brousseau (Brousseau, 1998) et les registres des représentations sémiotiques de Duval constituent les principaux appuis théoriques à partir desquels ont été conçues les situations produites par le groupe puis testées dans des classes. Toutefois, notre questionnement porte davantage sur la façon dont les enseignants s'approprient ces situations. C'est pourquoi, nous faisons également appel à la double approche des pratiques (Robert, Rogalski, 2002) et plus précisément à un modèle mis au point dans une recherche antérieure qui nous permet d'analyser l'activité du maître en termes de processus de modifications (Mangiante-Orsola, 2012). Ce modèle distingue trois niveaux : la représentation de la tâche, la redéfinition de la tâche et la réalisation de la tâche, comme l'explicite le schéma ci-dessous (figure n°1) :

[2] Certificat d'Aptitude aux Fonctions d'Instituteur ou Professeur des Ecoles Maître Formateur

[3] L'objectif de ce forum est d'échanger autour d'expériences d'enseignement s'appuyant sur des modules de formation continue, durant lesquels des documents ont été produits (progressions, fiche de préparation de séances, activités pour les élèves, etc.) puis mis en commun via le site de la circonscription.

[4] Nous veillerons à ne pas proposer aux enseignants des situations « clés en mains ».

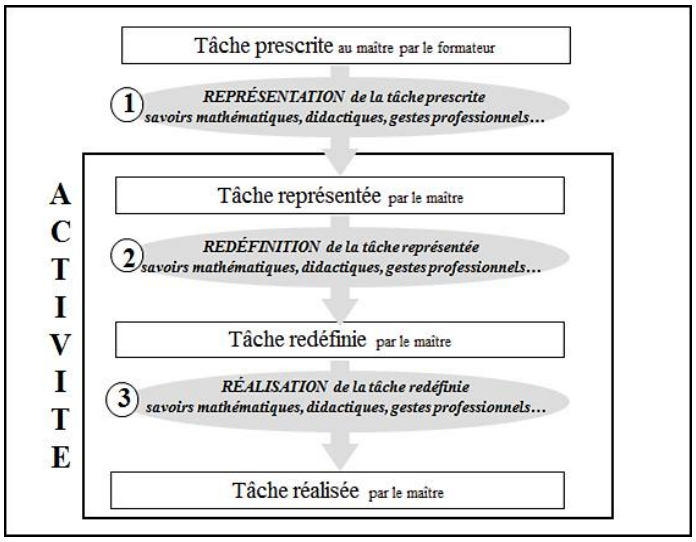


Figure n°1

En amont de l'activité de l'agent, figurent la tâche à réaliser (ce que celui qui a conçu ou qui gère la tâche attend de celui qui va la réaliser) et la tâche prescrite (qui est une formulation de la tâche à réaliser à l'intention de celui qui doit l'exécuter). Analyser l'activité de l'agent à partir de la tâche prescrite consiste à « se demander comment l'agent répond à cette tâche, comment il la transforme, éventuellement, en fonction de ses caractéristiques et de ses propres finalités. » (Leplat 1992, p.24). Selon Leplat, la première des tâches à envisager est la tâche représentée par l'agent. Elle correspond à la question : « Qu'est-ce que vous croyez qu'on attend de vous ? » et dépend, bien entendu, de la tâche prescrite mais aussi du niveau d'expertise de l'agent, de sa connaissance du contexte de travail et de son histoire personnelle. La deuxième de ces tâches est la tâche redéfinie. Elle apparaît comme le résultat d'un compromis entre deux finalités. En effet, l'agent, qui ne peut être considéré comme un simple exécutant, va non seulement chercher à découvrir, à partir de la tâche représentée, la procédure susceptible de lui permettre d'exécuter la tâche telle qu'il se la représente mais il va aussi tenir compte de ses propres caractéristiques, des objectifs qu'il vise à travers l'exécution de cette tâche. Enfin, au cours du travail, la tâche redéfinie s'actualisera pour coller au plus près du contexte et deviendra tâche réalisée à la fin de l'activité.

Nous allons à présent étudier une situation qui n'a pas été directement produite par la recherche mais qui s'en inspire fortement. Elle a été utilisée par une enseignante dans le cadre de notre dispositif et nous allons utiliser le modèle que nous venons de présenter pour analyser les écarts entre le projet initial (la situation issue de la recherche) et sa mise en œuvre. Quelles sont les origines de ces écarts ? En quoi ces écarts sont-ils révélateurs des difficultés de diffusion de cette situation dans l'enseignement ordinaire ?

II - UNE SITUATION DIRECTEMENT INSPIREE PAR LA RECHERCHE

1 Analyse a priori de la situation

Mme S. a un cours double CM1/CM2. C'est une enseignante reconnue par l'institution puisqu'inscrite sur la liste des MAT[5]. Mme S. propose très régulièrement des activités de géométrie à ses élèves. Elle a participé à toutes les séances de formation et a déjà testé avec sa classe certaines situations proposées par les formateurs. Au cours de la deuxième année du dispositif de formation, elle accepte de nous recevoir dans sa classe et nous présente, pour mettre en pratique les acquis de formation, une activité de restauration de figure conçue à partir d'un document traitant de ce sujet, élaboré par C. Reydy et téléchargeable en ligne à l'époque[6].

[5] Maître d'Accueil Temporaire, enseignant accueillant dans sa classe des étudiants en formation initiale.

[6] http://c.reydy.free.fr/jeux-maths-Bazas/Jeux-maths-C3-CReydy/Restauration-de-figures.pdf.

Le travail du groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie vise à proposer une progression de l'enseignement de la géométrie tenant compte du développement des élèves. Comme le soulignent Godin et Duval en introduction d'un article *« le rapport des élèves aux figures est l'un des points clés de leur entrée dans la géométrie »* (Duval, Godin, 2006). Il s'agit donc pour le groupe de proposer des situations tenant compte de ce rapport aux figures, à savoir la manière de regarder ce qu'elles donnent à voir et de favoriser la déconstruction dimensionnelle. Cela conduit à donner la priorité aux figures 2D (les surfaces) par rapport aux figures 1D (les lignes), à inverser l'approche et l'introduction répandues dans les pratiques ordinaires des concepts de base de la géométrie et de leurs relations. Duval et Godin proposent de travailler sur des situations de restauration (réparation) de figure définie de la manière suivante : une réparation[7] de figure est une reproduction de figure respectant des conditions particulières : une figure modèle est donnée (en vraie grandeur ou non) ; une partie de la figure à obtenir (appelée amorce) est donnée soit par son tracé, soit par un instrument permettant de reporter des informations 2D[8] de la figure initiale mais sans donner toute l'information ; on dispose d'instruments variés ayant un coût d'utilisation ; la vérification du résultat obtenu s'effectue à l'aide d'un transparent portant la figure modèle.

Le milieu - au sens de la théorie des situations didactiques - contient la figure modèle sur papier (on peut écrire sur le modèle), l'amorce sur une autre partie de la feuille ou sur une autre feuille, les instruments et leur coût. L'usage des instruments, la variation de ceux-ci constituent des variables didactiques essentielles que les enseignants ne prennent pas souvent en compte. Ce choix d'instruments est corrélé à une règle de coût qui permet à la fois l'autonomie de l'élève et l'observation de ses procédures. Tous les instruments utiles sont en effet laissés à sa disposition pour que celui-ci puisse réussir avec ses connaissances anciennes ; le coût sur les instruments l'incite à chercher d'autres procédures l'amenant à construire des connaissances nouvelles, en changeant de regard sur la figure. Comme pour toute situation de restauration de figure, la tâche de l'élève est d'une part d'analyser la figure modèle, d'autre part d'identifier l'amorce comme une sous figure de la figure modèle, d'utiliser une procédure de réparation à moindre coût, sous la contrainte d'un coût sur les instruments, supposant ainsi de s'appuyer sur les propriétés de la figure en faisant appel à une vision mathématisée de la figure.

La situation choisie par Mme S. s'inscrit dans ces travaux : il s'agit d'une situation de réparation très proche de celle présentée durant la formation-animation à l'ensemble des autres enseignants de la circonscription. Apportons néanmoins une remarque tenant au choix de la figure que Mme S propose à ces élèves (figure n°2) : celle-ci issue du document mis en ligne par C. Reydy contient un alignement de moins que la figure proposée initialement par les chercheurs (figure n°3)[9]. Ce choix conduit alors à moins de sollicitations en terme de prolongement mais davantage en terme de reports de longueurs, sachant qu'un report de longueur peut nécessiter l'usage de deux instruments différents. Les outils à disposition -notamment la réglette informable qui permet de matérialiser une longueur à reporter – sont précisés avec la règle de coût.

[7] Nous préférons le terme « réparation » car nous le considérons d'une utilisation plus facile en classe. C'est un terme utilisable par les élèves.

[8] Au sens de Duval

[9] C'est pourquoi nous ne pouvons pas considérer que cette situation est celle produite par le groupe de recherche. Toutefois, elle s'en inspire directement.

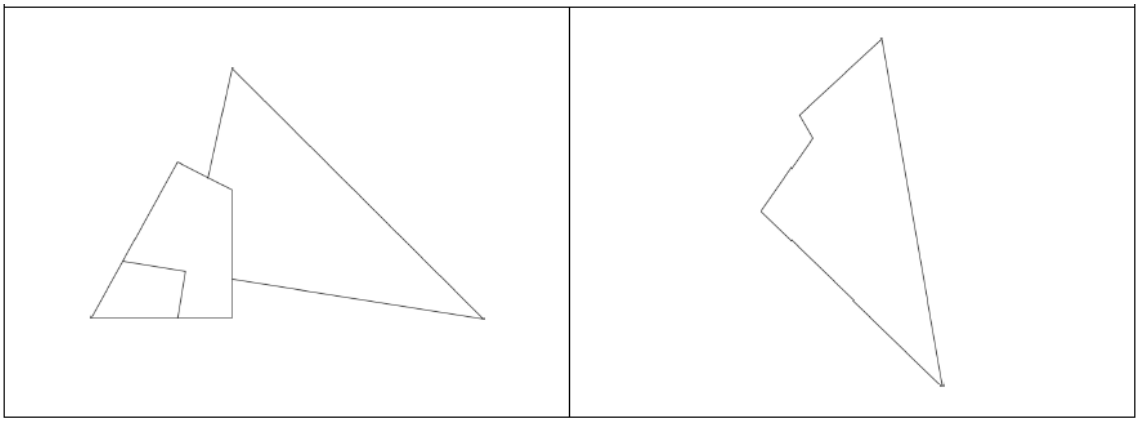
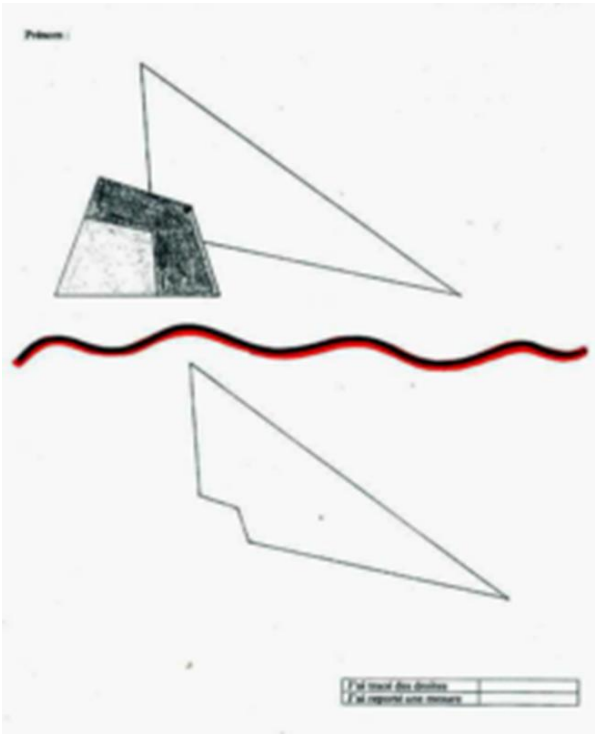


Figure n°2 : figure choisie par Mme S



A disposition des élèves : une réglette non graduée dite « informable », une réglette non graduée (plastifiée) permettant de tracer des droites.

Les règles de coût : 0 point pour le tracé d'une droite sur la figure modèle ou l'analyse de la figure, via l'utilisation de la réglette « informable » ; 1 point pour le tracé d'une droite, avec la réglette plastifiée, pour compléter l'amorce ; 3 points pour un report de longueur

Figure n°3 : figure utilisée dans la situation produite par la recherche

2 Analyse de l'activité de l'enseignante

Nous allons à présent utiliser notre modèle d'analyse de l'activité du maître pour tenter d'élucider les écarts crées entre le projet et sa mise en œuvre, écarts ressentis « à chaud » par Mme S. qui, interrogée à la fin de la séance, confiait s'être sentie mal à l'aise face aux réalisations non abouties des élèves. Au travers de notre modèle, nous allons tenter de mieux comprendre les difficultés auxquelles Mme S. a été confrontée : sont-elles dues au niveau des élèves ? Sont-elles imputables à l'enseignante elle-même, à un déficit de formation, à la situation elle-même, …?

Pour trouver des éléments de réponses à ces questions, nous commencerons par présenter la tâche prescrite à l'enseignante, son projet (tel que nous pouvons l'appréhender à travers de la fiche de préparation) puis la séance observée en classe.

2.1 Analyse de la tâche prescrite à l'enseignant

La tâche prescrite peut être analysée via l'action de formation-animation que nous avons conduite avec un groupe étoffé d'enseignants au cours de laquelle nous avions proposé un exemple de

situation sans prescription à propos de la mise en œuvre pour la classe. Après avoir présenté les idées clés développées par le groupe de recherche, nous avons proposé un travail en atelier durant lequel chacun des enseignants a pu, d'une part se confronter à des situations de restauration de figure dédiées aux cycles 2 et 3, d'autre part a pu entamer une réflexion sur les actions sur le matériel en lien avec les gestes et les concepts de géométrie.

2.2 Analyse du projet de Mme S.

La fiche de préparation de Mme S. fait apparaître clairement une déclinaison d'objectifs en termes de compétences – comme par exemple *« être capable de restaurer une figure en reconnaissant l'amorce comme une sous-figure de la figure initiale ; être capable de percevoir les alignements, de prolonger des lignes droites pour découvrir les points d'intersection »*. Des objectifs méthodologiques sont aussi proposés : *« savoir prolonger des droites, savoir utiliser les bons outils pour restaurer au moindre coût »*. Remarquons d'ores et déjà que si Mme S. a perçu les enjeux de la situation, elle ne semble pas avoir compris que le choix d'un bon outil n'est pas une fin en soi. L'analyse de la tâche attendue (par Mme S. de la part de l'élève) – comme par exemple, lire la consigne et comprendre le tableau de barème, analyser la figure modèle, la figure « amorce », gérer les différences entre la figure modèle et la figure « amorce », dénommer les points des figures, produire puis lire un programme de construction – suppose de la part de l'élève de déconstruire la figure en utilisant un jeu sur les instruments, de développer des connaissances géométriques en lien avec l'usage d'instruments dont l'utilisation est moins immédiate et enfin de gérer simultanément la construction, l'écriture du programme de construction et la mise à jour du coût.

2.3 Analyse des extraits vidéo de la séance observée

La fiche de préparation de Mme S. prévoit un déroulement sous la forme de quatre phases (terminologie employée par l'enseignante). Précisons que Mme S. n'a pas envisagé de découpage de ces phases en sous-phases sauf pour la phase 3. Notre découpage en épisodes suit celui réalisé par l'enseignante mais nous identifions davantage de sous-épisodes.

Le premier épisode, découpé en deux sous-épisodes, est d'une part consacré à la lecture à voix haute par des élèves de la consigne et du tableau de barème et à l'explicitation de la règle de coût d'autre part. Au cours du premier sous-épisode, Mme S. insiste sur la définition de l'expression «*compléter la figure*» : «*Avec vos mots à vous, qu'est-ce que vous allez devoir faire ?*». Diverses réponses d'élèves surgissent : *« reproduire la figure ; compléter la figure (l'élève reprend l'énoncé) ; on va devoir refaire une petite partie de la figure ; reconstituer une partie de la figure, un morceau de la figure, la partie manquante »*. Mme S. conclut en disant : *« on va l'achever, on va la terminer. »*. Elle perçoit les enjeux liés à la différence entre les verbes « reproduire » et « restaurer », tente de les expliciter en s'appuyant sur le document de formation mis au point par C. Reydy. Remarquons que celui-ci est un document de formation par conséquent destiné à des enseignants et non à des élèves. Mme S., qui a compris la distinction entre « restauration » et « reproduction », cherche un vocabulaire adapté. Durant le second sous-épisode permettant l'explicitation du coût, l'enseignante a affiché les instruments. Les commentaires sur les outils permettent de dégager que la règle non graduée est utilisée pour « tracer », la règle en papier est requise selon les élèves pour faire des reports de longueurs : *« on va faire des petits traits à la longueur. »*, *« on va faire des reports de longueur. »*, *« on va reproduire des longueurs, des mesures. »*. Mais nous remarquons sur l'affichage proposé une modification apportée par l'enseignante par rapport à la situation du document rédigé par C. Reydy (et a fortiori la situation initiale). Le coût est donné en fonction des instruments et non plus en fonction du geste mis en œuvre (par exemple, « report de longueur avec la règle de papier » remplace « report de longueur » levant ainsi les ambiguïtés possibles puisqu'en effet, le report de longueur peut nécessiter l'usage de deux instruments : la règle non graduée et la règle informable). Mme S. insiste sur le verbe « reporter ». Un élève indique qu'on a *« le droit de faire des petits traits »* sur la règle en papier. L'enseignante ajoute qu'on a le droit d'écrire dessus. Pour la règle graduée, l'enseignante précise qu'on mesure. Elle précise *« Elle coûte 700 euros, est-ce qu'il faut l'utiliser souvent ? »*. Un élève précise *« qu'on va dépenser trop de sous »*. L'enseignante rajoute *« qu'on essaye de*

ne pas l'utiliser souvent! ». En ce sens, nous sentons poindre la volonté de l'enseignante de guider les élèves, de ne pas les laisser s'engager dans diverses procédures. Ceci sera confirmé par la suite.

Le second épisode est dédié à l'analyse et l'observation à la fois de la figure modèle et de l'amorce. Un affichage des deux figures est réalisé au tableau sur un grand support uni. Mme S. a pour objectif de faire retrouver l'amorce dans la figure initiale (comme sous-figure initiale) *: « On a dit qu'il fallait finir la figure. Qu'est-ce que vous pouvez dire de ce morceau-là ?* ». Un élève répond « *Il en manque une partie.* ». L'enseignante relance en précisant : *«Observer, regarder, est-ce que vous voyez ce morceau-là dans la figure ?*». Des élèves fournissent les réponses suivantes : *« Non, il va falloir tourner la feuille! », « Elle est à l'envers, celle de droite. », « Ben ce n'est pas un triangle. », « Elle est retournée ».* C'est bien entendu l'orientation de l'amorce qui suggère ce type de réponses. Mme S. rajoute : *« Si, ce morceau-là est bien dedans, je ne l'ai pas inventé. », « On dit qu'on l'a bougé, on dit qu'on l'a orienté différemment.»* ou encore *: « On va déjà essayer parce que je pense que certains pensent que ce morceau-là n'est pas dedans, de repérer cette figure dans celle-ci, qu'est-ce qu'on pourrait faire pour essayer de repérer ? ».* Les réponses fournies par les élèves sont : « *Avec la règle. On va mesurer* », « *On va faire des tracements avec la règle non graduée.* ». Comme ces deux réponses ne font pas avancer vers l'attendu de l'enseignante, elle pose la question : *« Je ne veux pas qu'on la reproduise, je veux juste qu'on repère, ce morceau est où ? ».* Un élève précise : *« Avec notre feuille, on va faire des petits traits pour repérer et après… (Il manipule la règle qui sert de report de longueur, passe de la figure à l'amorce)* ». Mais Mme S. qui n'observe pas suffisamment les gestes de cet élève lui répond « Non »! Un élève rajoute : *« On pourrait retourner la figure et la comparer avec la première. ».* Il vient au tableau et oriente différemment la figure. Mais Mme S. indique *« On pourrait faire cela, mais comme sur la feuille on ne peut pas bouger! ».* Elle finit par conclure par la phrase *« On va utiliser les crayons de couleur, tout simplement ».* Les élèves sont invités à colorier les segments homologues sur l'amorce et sur la figure initiale avec un code couleur précis. La procédure attendue, qui consiste à repérer les segments dans la figure, n'émerge finalement pas. C'est l'enseignante qui l'impose.

Le troisième épisode permet de distinguer la mise en œuvre d'une procédure pour restaurer la figure en dépensant le moins d'argent possible. Il est découpé en deux sous-épisodes qui coïncident avec le déroulement en « sous-phases » envisagé par Mme S. Le premier identifie un travail collectif durant lequel l'enseignante conduit au tableau la recherche d'alignements et de points d'intersection. Mme S. désigne les points présents sur l'amorce puis indique ce qu'il faut rechercher, à savoir trouver les points alignés et les points d'intersection. Certains alignements à partir des points A, L, K, B, I, J et C sont indiqués. La consigne est redite par Mme S. : *« Chaque fois qu'il y a tracé, le noter et écrire son prix ».* Le second sous-épisode couvre le temps de recherche individuel permettant à chacun des élèves de s'exercer à la restauration. Nos observationsont permis de constater combien il est difficile pour les élèves de mener en parallèle la réalisation des tracés, la rédaction du programme de construction et le calcul du coût des instruments. L'observation de la procédure d'un élève -enregistrée sur la vidéo- montre que celui-ci construit en effet plusieurs points sans avoir pris le temps ou ressenti la nécessité de rédiger pas à pas le programme de construction. De plus des problèmes de précision sont soulevés. Sur un autre extrait, des points à « reporter » sont en effet placés de manière approximative puisque les segments supports permettant clairement de les identifier ne sont pas tracés.

Un quatrième épisode est consacré à la correction. La « compétence spécifique » définie par l'enseignante est d'être capable d'exposer sa stratégie. Il est prévu que l'élève qui aura le moins dépensé expose sa manière de faire. Au vu des observations réalisées par Mme S -à partir des productions- et des difficultés exprimées par les élèves, elle omet volontairement ce travail de confrontation et distribue le programme de construction donné dans le document de C. Reydy. Au fur et à mesure qu'un élève montre et réalise les tracés sur le grand support affiché au tableau, les autres élèves doivent réaliser les tracés sur la feuille qui leur a aussi servi durant la recherche individuelle. Nous remarquons que c'est l'outil « règle graduée jaune » classique qui est utilisée pour restaurer la figure affichée au tableau alors que nous faisons le choix de ne pas recourir à la mesure de grandeurs. De plus certains élèves ne parviennent pas à suivre tous les tracés. Enfin l'identification de la figure, une fois les tracés réalisés, pose également souci. En effet, les tracés

successifs pour relier les points et ainsi dessiner la figure obligent à des allers-retours entre l'amorce et la figure initiale et donc d'identifier les droites, segments et points « homologues » dans cette correspondance, ce qui n'est pas facile pour quelques élèves. Cette phase collective permet néanmoins d'introduire du vocabulaire spécifique comme le point d'intersection de deux droites.

2.4 Analyse en termes de modifications de la tâche prescrite.

S'appuyant sur le modèle d'analyse développée en I.2, nos observations permettent de préciser les écarts tant au niveau de la représentation que de la redéfinition et la réalisation de la tâche pour à terme en déduire des informations à propos du processus d'appropriation de cette situation par Mme S.

Commençons par analyser la réalisation de la tâche, c'est-à-dire les écarts entre la tâche redéfinie telle que nous pouvons l'appréhender au travers notamment de la fiche de préparation et la tâche réalisée. Mme S. a des ressentis négatifs à l'issue de la séance : elle n'est pas satisfaite et se dit déçue car la séance vécue ne correspond pas à ce qu'elle espérait. Notre analyse vient confirmer les décalages ressentis. Non seulement Mme S. n'a pu obtenir de ses élèves la rédaction d'un programme de construction mais de plus ces derniers ont été en difficulté dès la restauration de figure. Peu maîtrisent le prélèvement d'informations sur la figure modèle et beaucoup ne parviennent pas à organiser leur travail du choix de l'instrument jusqu'au décompte du coût. De plus, Mme S. éprouve des difficultés à prélever des informations sur l'activité des élèves, à réguler l'avancée du travail et par voie de conséquence à faire évoluer les procédures au moment de la mise en commun. Les origines de ces écarts prennent source à la fois dans la situation elle-même et dans les objectifs fixés trop ambitieux. En effet, non seulement la mise en œuvre de ce type de situation nécessite de la part de l'enseignante la capacité d'analyser les procédures mises en œuvre par les élèves pour ensuite les faire évoluer mais en plus, Mme S. cherche à aller au-delà alors qu'il est très difficile d'amener des élèves non initiés à la restauration de figures. Nous pouvons raisonnablement nous interroger sur de la manière dont elle se représente la tâche qui lui a été prescrite et la manière dont elle l'a redéfinie.

Considérant que la tâche prescrite correspond principalement ici à l'ensemble des injonctions issues de la formation suivie et des ressources utilisées, nous pouvons affirmer, grâce à l'entretien mené avec Mme S juste après la séance, que celle-ci a saisi les principaux enjeux de ce type de situations. Cette absence d'écarts importants peut s'expliquer par le fait que Mme S participe activement au module de formation proposé. Signalons, toutefois, quelques écarts entre la tâche prescrite et la tâche représentée. Tout d'abord, comme l'atteste la fiche de préparation, Mme S n'a pas saisi que la rédaction d'un programme de construction n'était pas une nécessité. Nous pouvons supposer que cet écart est dû à l'interprétation qu'elle fait du document de C. Reydy. Ensuite, nous remarquons qu'elle a prévu dans sa fiche de préparation un tableau de deux colonnes, « j'observe », « je trace », dont le but avoué (au cours de l'entretien) est d'aider les élèves à organiser leur réflexion (prise en charge par anticipation des difficultés des élèves). Manifestement, elle n'avait pas perçu que le tableau prévu ne serait pas une aide. Mais pouvons-nous vraiment affirmer que ces deux écarts majeurs avec la situation initiale (celle décrite dans le document de C. Reydy) soit uniquement le fait d'interprétations non pertinentes de la part de Mme S. Nous devons analyser les écarts créés entre la tâche représentée et la tâche réalisée.

Comme l'explique Leplat, l'agent, qui ne peut être considéré comme un simple exécutant, va chercher à découvrir la procédure susceptible de lui permettre d'exécuter la tâche telle qu'il se la représente mais il va aussi tenir compte de ses propres caractéristiques, des objectifs qu'il vise à travers l'exécution de cette tâche. Ici de nombreux éléments tendent à montrer que c'est au niveau de la réalisation de la tâche que le processus de modifications a été principalement initié : dès la rédaction de la fiche de préparation, cherchant à minimiser la prise de risques, Mme S. modifie le projet initial en fonction de l'idée qu'elle se fait de ses compétences et de celles de ses élèves. Parmi les écarts introduits par l'enseignante, citons tout d'abord le déroulement de la séance qui prévoit une analyse collective de la figure à restaurer, au cours de laquelle elle conduit une phase dédiée à la monstration des alignements et qui par voie de conséquence modifie la tâche de l'élève en la

simplifiant grandement. Une autre modification importante apportée au projet initial est la mise à disposition des élèves du tableau « j'observe »-« je trace » destiné là encore à aider les élèves en prenant en charge (du moins du point de vue de Mme S.) le lien entre chaque propriété de la figure à identifier et une action à réaliser. A travers l'affichage elle tente encore de simplifier le travail de l'élève en clarifiant les règles de calcul : à un instrument est associé un coût, grâce à l'affichage des instruments. Notons toutefois que son intention d'amener les élèves jusqu'à la rédaction d'un programme de construction échappe à ce raisonnement et que ce choix est probablement dû en partie à son interprétation du document qui va de plus dans le sens des attentes des programmes. La correction est elle-même très directive.

Pour conclure, la mise en œuvre de cette situation qui synthétise une grande partie des travaux du groupe de recherche, à savoir la restauration de figure, le jeu sur les instruments et le langage sous-jacent, se révèle une tâche complexe pour l'enseignante, de sa représentation à sa réalisation. De plus son adaptation au niveau des élèves est laissée à sa charge.

III - UNE SITUATION POUR LA CLASSE AVEC OBJECTIFS DE FORMATION

1 Conception d'une nouvelle ressource pour les enseignants

Si le bilan de la séance menée par Mme S. semble peu encourageant quant aux possibilités de diffusion de situations de restauration dans l'enseignement ordinaire, son analyse nous ouvre toutefois des pistes pour l'élaboration d'une nouvelle ressource pour les enseignants. Nous faisons en effet l'hypothèse qu'une étude préalable de l'activité du maître en termes de niveaux (représentation-redéfinition-réalisation de la tâche) constitue une aide à la conception de situations plus adaptées à l'enseignement ordinaire. Cette partie vise à mettre à l'épreuve cette hypothèse par l'analyse d'une nouvelle ressource conçue dans le cadre de notre dispositif de travail.

Nous référant à la conclusion de la partie précédente, nous retenons que les principaux écarts constatés entre nos attentes[10] et la séance menée par Mme S. trouvent leur origine dans la redéfinition de la tâche et sont initiés par anticipation de la réalisation de la tâche. En effet, c'est parce qu'elle a conscience des difficultés de mise en œuvre de cette situation que l'enseignante fait le choix de les limiter en prévoyant un guidage fort du travail des élèves. Ainsi l'étude de la séance observée chez Mme S. complétée par l'analyse a priori de la situation nous conduisent à souligner le niveau de complexité de la mise en œuvre du projet tel que prévu initialement et la nécessité de faciliter le travail de l'enseignant.

En outre, dans la perspective d'une diffusion plus large de cette ressource, via le site de la circonscription, nous devons veiller à clarifier nos choix pour espérer que ceux-ci soient compris même de la part d'enseignants n'ayant pas participé à la formation (et ainsi limiter les écarts créés au niveau de la représentation de la tâche).

Ainsi, pour réduire les décalages entre le projet des formateurs/chercheurs et la séance effective, nous cherchons à améliorer la lisibilité de la démarche tout en facilitant la mise en œuvre de la situation. Nous faisons ainsi l'hypothèse que cela permettra non seulement de limiter les écarts au niveau de la représentation et de la réalisation de la tâche mais que de plus l'enseignant étant plus en confiance, il sera moins tenté de s'écarter du projet initial via la redéfinition de la tâche.

Dans cette perspective, nous faisons le choix de concevoir des *situations pour la classe avec objectifs de formation*, c'est-à-dire des situations permettant à l'enseignant de mieux comprendre les enjeux de notre démarche et les choix qui sous-tendent les situations proposées. Pour cela, nous cherchons à concevoir des situations relativement faciles à mettre en œuvre et donnant la possibilité à l'enseignant d'être suffisamment en retrait pour observer les procédures de ses élèves.

[10] En tant que formateurs et chercheurs participant au groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie.

L'une des conséquences de ce choix est que nous ne pouvons proposer une seule et même séance pour introduire la restauration de figure, le jeu sur les instruments avec instauration d'un coût, la nécessité d'articuler action sur le matériel et concepts géométriques…etc…Nous préférons concevoir plusieurs situations visant une intégration progressive d'éléments nouveaux dans les pratiques. La séquence ainsi conçue est constituée de quatre situations de restauration présentant chacune un objectif spécifique de formation.

La première situation est une situation de restauration avec gabarits. Son objectif d'apprentissage est la prise en compte par les élèves de propriétés de la figure à restaurer (il s'agit ici d'alignements) et son objectif de formation consiste à donner la possibilité aux enseignants d'observer comment une situation de restauration jouant sur les instruments[11] mis à disposition peut amener les élèves à exercer leur regard sur une figure jusqu'à en découvrir les propriétés à utiliser pour la restaurer.

La deuxième situation permet de réinvestir le travail effectué au cours de la première situation tout en introduisant un premier jeu sur les instruments que l'enseignant devra gérer. La figure modèle est différente de la précédente mais possède les mêmes propriétés (deux côtés des triangles sont portés par les diagonales du quadrilatère-cadre). La tâche de l'élève consiste là encore à restaurer la figure mais il lui est de plus demandé de choisir parmi plusieurs instruments possibles. L'objectif visé pour la formation est d'amener l'enseignant à faire formuler par les élèves les procédures mises en œuvre pour ainsi commencer à utiliser l'activité des élèves pour mettre en lien, via le langage, actions sur le matériel et concepts géométriques.

La troisième situation permet de franchir une étape supplémentaire. La figure choisie peut être restaurée selon deux types de procédures (soit grâce à un report d'angle droit, soit grâce à un report de longueur). Comme dans la situation précédente, l'enseignant est encouragé à faire verbaliser, expliciter par les élèves la procédure utilisée mais ici l'instauration d'un système de coût sur les instruments incite les élèves à rechercher la procédure la moins coûteuse. L'objectif est de montrer aux enseignants que le choix d'un instrument est révélateur de l'analyse faite par l'élève de la figure. Par exemple, ici, le choix d'une équerre non graduée (gabarit d'angle droit par exemple) pour compléter la figure devra être interprété par l'enseignant comme la prise en compte par l'élève d'angles droits de la figure (celui du cadre ou celui d'un des triangles).

Enfin, parce que nous tenons à prendre en compte les attentes des enseignants, nous prévoyons une quatrième situation visant la rédaction d'un programme de construction. Pour atteindre cet objectif l'enseignant pourra prendre appui sur les formulations attendues des élèves lors des séances précédentes.

Outre la présentation de ces quatre situations, la ressource fournit aux enseignants des indications pour leur mise en œuvre (le matériel à prévoir, les grandes lignes du déroulement, les documents à reproduire pour les élèves...) et des encadrés de couleurs apportent des informations complémentaires à propos du choix des situations, une analyse des procédures pouvant être mises en œuvre par les élèves mais aussi des éléments susceptibles d'aider les enseignants à prendre du recul par rapport à la situation vécue pour se donner des outils de travail en partie décontextualisés[12].

Dans la suite de ce texte nous allons restreindre notre analyse à la première situation de cette séquence.

[11]Il est précisé dans la ressource que le mot « instrument » peut désigner une bande de papier, un gabarit, une règle non graduée.

[12]Trois types d'encadrés de couleurs différentes. Sous l'intitulé « pour mieux comprendre notre démarche », nous explicitons par exemple, la différence entre « reproduire » et « restaurer » une figure (qu'est-ce que cela change pour l'élève ? qu'est-ce que cela change pour l'enseignant ?). Sous l'intitulé « pour mieux observer les procédures des élèves », nous présentons par exemple, des gestes à observer significatifs de la prise en compte de certaines propriétés de la figure. Sous l'intitulé « des outils de travail pour l'enseignement de la géométrie », nous proposons par exemple, un tableau récapitulatif des règles à respecter pour la rédaction d'un programme de construction.

2 Analyse a priori de la première situation

Le point de départ de l'élaboration de cette progression est une figure issue du document de Carine Reydy utilisé précédemment par Mme S. (figure n°4).

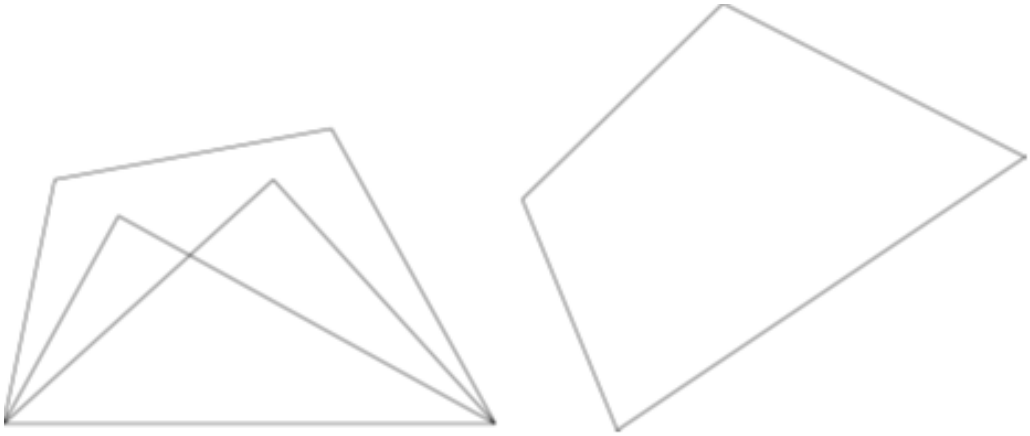


Figure n°4

Celle-ci nous suggère de l'utiliser car elle l'a testée en classe auprès de ses élèves et a constaté moins de difficultés de mise en œuvre. Cette figure est constituée d'un quadrilatère et de segments dont certains sont portés par les diagonales. Deux types de procédures peuvent être envisagées pour la restaurer à partir de l'amorce donnée : dans les deux cas, il s'agit de tracer les segments situés sur les diagonales pour ensuite procéder soit par report de l'angle droit, soit par report de longueur et ainsi tracer les segments manquants (figure n°5).

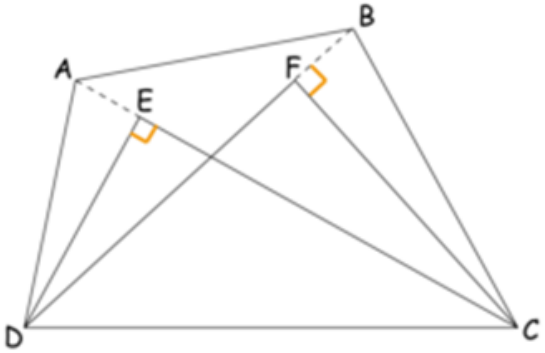
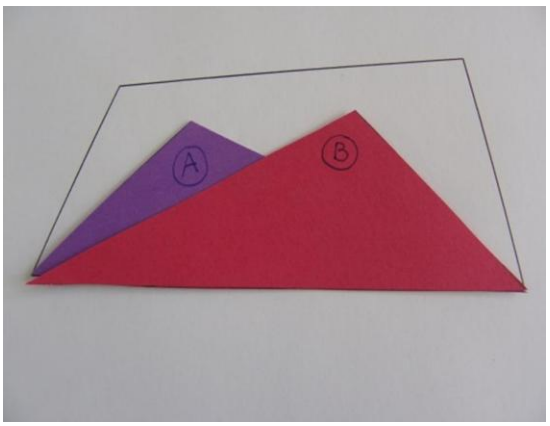


Figure n°5

L'existence de ces deux types de procédures présente un intérêt en termes de potentialité d'apprentissages : la nécessité du choix d'un instrument permet d'exercer l'élève à utiliser les différentes propriétés d'une figure mais la mise en œuvre de ce jeu sur les instruments constitue une difficulté pour l'enseignant. En effet cela nécessite d'identifier et d'utiliser l'articulation entre actions sur le matériel et concepts géométriques en jeu. Cela nous conduit à renoncer à utiliser cette figure et préférons en choisir une autre de même allure mais sans angle droit (figure n°6). Nous conservons la même consigne et le même type d'amorce (le quadrilatère cadre) mais nous prévoyons un déroulement en trois phases (nous préciserons par la suite les raisons de ce choix).

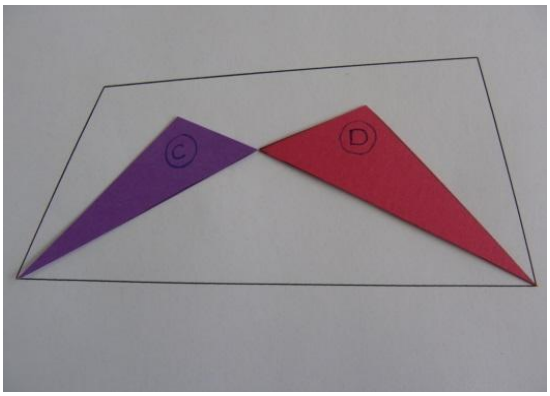
Première phase : reproduire la figure modèle à partir des gabarits A et B.

La procédure attendue consiste à réaliser un assemblage par superposition des gabarits pour ensuite en tracer les contours.



Deuxième phase : reproduire la figure modèle à partir des gabarits C et D.

La procédure attendue consiste à placer les deux gabarits en faisant coïncider certains sommets (des sommets des gabarits avec des sommets du quadrilatère « cadre » et deux sommets des gabarits entre eux) pour ensuite effectuer des tracés. Pour ce faire, les élèves peuvent soit utiliser les gabarits (tracer leur contour) soit prendre en compte certains alignements (tracer des lignes). Il s'agit alors de placer dans le prolongement un bord de C avec un bord de D (deux possibilités) pour ensuite placer la règle le long d'un bord et posée au-dessus de l'autre et tracer.



Troisième phase : reproduire la figure modèle à partir des gabarits C et E.

La procédure attendue consiste à placer le gabarit C en faisant coïncider l'une de ses pointes avec un sommet du quadrilatère et le faire pivoter jusqu'à ce qu'un de ces bords coïncide avec la diagonale. Le placement du gabarit E nécessite le recours à la deuxième diagonale.

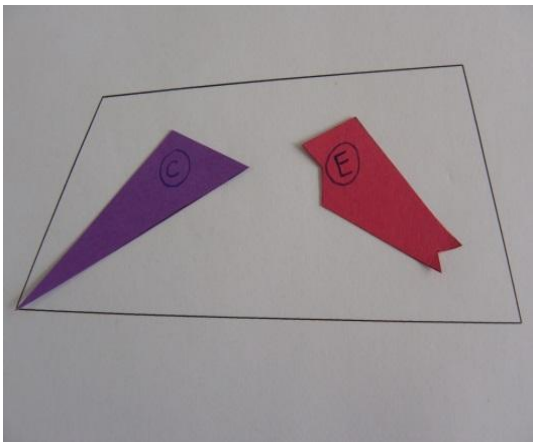


Figure n°6

Ces trois phases manipulatoires ont pour objectif d'amener l'élève à exercer son regard sur la figure pour en identifier les propriétés. A chaque étape, il devra, à partir d'un agencement de gabarits, tracer le contour des formes situées à l'intérieur du quadrilatère « cadre » mais le choix des gabarits à disposition organise le travail de l'élève. Lors de la première phase, il lui suffit de positionner les gabarits par rapport au cadre et l'un par rapport à l'autre. La seule véritable difficulté réside dans l'organisation des tracés et la nécessité de soulever un gabarit pour voir apparaître l'autre en entier. La deuxième phase devrait amener les élèves à prendre en compte certains alignements (alignement de segments correspondants aux bords des gabarits). A ce stade rien ne contraint les élèves à utiliser le positionnement de certains segments sur les diagonales ,mais le recours à la règle non graduée peut amener les élèves à constater l'alignement des deux bords avec un sommet du quadrilatère. Dans la troisième et dernière phase, la forme du gabarit E empêche de faire coïncider certains sommets et nécessite la prise en compte des diagonales. Au fil

de la séance, le prolongement de segments et la perception de l'alignement se révèlent déterminantes pour la réussite des tracés attendus.

Il convient de souligner ici, que comme pour toute restauration de figure, cette situation suppose une analyse de la figure modèle et de l'amorce donnée mais que cette analyse est progressive, induite par les trois étapes. En effet le choix des gabarits conduit peu à peu l'élève à faire appel à une vision « plus mathématisée » de la figure, la propriété de la figure doit « surgir » sous le regard des élèves. Du moins, nous en faisons l'hypothèse.

Pour chacune des trois étapes, la tâche de l'enseignant consiste à dévoluer la tâche, observer les procédures des élèves et à faire une synthèse des procédures utilisées.

3 Analyse a posteriori

Nous avons testé cette situation dans la classe de Mme S', enseignante de CM1 qui a assisté l'année dernière à une formation sur l'enseignement de la géométrie mais qui ne fait pas partie du groupe impliqué dans la production de ressources. Le document présentant une nouvelle progression lui a été remis une dizaine de jours avant la séance. Dans cette partie nous cherchons à mettre en évidence les écarts entre le projet et sa mise en œuvre pour ensuite analyser l'origine des décalages constatés.

3.1 Identifier les écarts entre le projet et sa mise en œuvre

Cinq minutes suffisent à Mme S' pour effectuer la passation de consigne et distribuer le matériel.

> *« Vous avez tout en haut une figure modèle, prenez le temps de la regarder. Et au-dessous, vous voyez qu'on a commencé à la reproduire, on a commencé à la tracer mais de façon incomplète. Donc, vous, votre travail, ça va être de poursuivre le tracé. […]*
> *Laissez vos règles tranquilles. D'ailleurs, on n'en a pas besoin, vous allez les ranger. […]*
> *Alors, pour vous aider dans ce travail, je vais vous donner des petits gabarits. On va les découper proprement et grâce à ces gabarits, on va poursuivre le tracé. »*

Pendant la recherche individuelle l'enseignante observe les procédures des élèves, s'étonne de difficultés de positionnement des gabarits pour deux élèves et relève qu'un groupe a eu besoin de tracer le bord du gabarit caché sur le gabarit apparent avant d'effectuer les tracés sur la figure amorce.

Lorsque l'enseignante qui circule dans les rangs constate que tous les élèves ont réussi à reproduire la figure, elle donne la consigne de la deuxième étape sans faire de synthèse : *« on a la même figure modèle, il faut continuer le tracé mais avec d'autres gabarits »*

Le temps consacré à cette deuxième étape est plus long. De nombreux élèves utilisent la perception (certains procèdent par translation du gabarit de la figure modèle à l'amorce à compléter), positionnent un gabarit puis l'autre. Certains élèves cherchent à faire en sorte que *« les coins se touchent »*. Au bout de 7 minutes l'enseignante se rend compte qu'elle a oublié de distribuer la règle non graduée. A ce stade de la séance la plupart des élèves ont effectué les contours des gabarits. Certains néanmoins (mais une minorité) utilisent la règle pour réaliser des tracés plus précis (ils gomment en partie les contours et les retracent à la règle). Ce faisant, ils utilisent l'alignement de façon implicite. Là encore, aucune synthèse ne vient clore cette étape.

La troisième étape constitue le véritable enjeu de la séance puisque c'est à ce moment-là que les élèves doivent utiliser les diagonales du quadrilatère.

De nombreuses minutes sont nécessaires aux élèves pour cherchent à disposer les gabarits. Certains élèves utilisent encore la perception, d'autres tentent de les juxtaposer (il est vrai que le découpage des gabarits grignotés le permet), beaucoup sont en difficulté et il devient alors nécessaire de rappeler aux élèves qu'ils ont une règle à leur disposition, qu'ils peuvent la positionner sur le bord des gabarits et observer. Peu à peu la procédure experte se diffuse dans la classe et une majorité d'élèves parvient à restaurer la figure. Néanmoins certains élèves continuent à positionner les gabarits en utilisant la perception. D'autres positionnent la règle en utilisant les diagonales mais sont incapables de dire qu'ils prennent en compte un sommet. L'enseignante

constate que l'utilisation de la règle lors de l'étape 2 était déterminante pour la réussite de l'étape 3.

Pour effectuer la phase de synthèse, celle-ci a prévu un rétroprojecteur et des transparents sur lesquels la figure modèle et l'amorce sont reproduites. Elle sollicite plusieurs élèves qui viennent à tout de rôle exposer leurs procédures dont Léa qui a tracé les diagonales du quadrilatère.

M: « Qu'est-ce que tu as remarqué ?
E : « Quand on a dit qu'il fallait poser sa règle sur la figure modèle, j'ai remarqué que ça faisait une croix ici. » […]
M: « Ca faisait quoi ? »
E : « Ca fait une diagonale »
M : « Ca fait une diagonale, un segment qui joint les angles opposés, l'angle ici et là, on les a rejoint par un segment. »

Pendant que Léa trace les diagonales sur le transparent, l'enseignante invite l'ensemble de la classe à anticiper la suite des tracés.

M : « Est-ce que vous voyez où elle veut en venir ? Parce que là, ce n'est pas encore la figure modèle-là ! »

Envisager les différentes étapes des tracés est d'autant plus difficile qu'il s'agit ici d'effectuer des tracés pour ensuite pouvoir positionner les gabarits alors que, dans les deux premières phases de la séance, les procédures consistent à positionner puis tracer.

Pour aider ses élèves elle les invite à isoler certains segments pour ensuite les retrouver sur la figure modèle dans le but de les habituer à prélever des informations sur la figure modèle à l'aide des instruments avant de tracer.

M: « La figure modèle n'est pas là pour rien »

Enfin elle clôt la séance en demandant à ses élèves.

M: « Qu'est-ce que vous n'avez pas fait suffisamment d'après vous ? »
E: « Réfléchir »
M : « Observer ? Manipuler ? »

Au cours de l'entretien « à chaud » qui suit la séance, l'enseignante nous confie qu'elle aurait eu besoin de plus de précisions quant aux mots à utiliser lors de la phase de synthèse.

Mme S' : « Au moment de la mise en commun, je n'étais pas à l'aise…pour l'analyse des procédures »

Formateur : « Pourtant vous aviez remarqué bien des choses. »

M : « Oui, mais je ne sens pas capable de toutes les analyser », « mais, c'est moi, vous auriez fait ça avec quelqu'un d'autres, cela se serait passé différemment, je ne suis pas une matheuse. Je ne savais pas par exemple si je pouvais parler des diagonales. Maintenant, c'est tout nouveau, en le refaisant, ça ira mieux, il faut nous aussi qu'on ciselle notre analyse »

Elle termine néanmoins l'entretien en soulignant la facilité de mise en œuvre de la séance.

M : « Oui, parce que sinon c'est facile à mener. Ça s'est super, on est très en retrait, on voit bien. »

3.2 Analyse en termes de processus de modifications de la tâche prescrite

Nous avons conçu cette situation de restauration dans l'intention de limiter les écarts pouvant être créés par l'enseignant entre la tâche prescrite et la tâche réalisée. Est-ce que nos explications ont permis d'optimiser la représentation de la tâche ? Est-ce que la conception même de la situation a facilité sa mise en œuvre et ainsi réduit les écarts au niveau de la réalisation de la tâche évitant ainsi trop de modifications au niveau de la redéfinition ? La mise en parallèle de l'analyse a posteriori avec l'analyse a priori nous permet de mettre à l'épreuve nos hypothèses. La séance observée révèle surtout des écarts créés au niveau de la réalisation de la tâche. Mais ces écarts trouvent principalement leur origine dans la situation elle-même (et par conséquent sont peu imputables à l'enseignante). A ce propos, précisons que nous devons prévoir des ajustements mineurs (modifier la forme des gabarits grignotés qui autorisent une juxtaposition dans l'étape 3, revoir la position de la figure amorce sur la feuille de papier qui peut encourager les procédures

par translation et indiquer les mots à utiliser au moment de l'explicitation des procédures) mais aussi des transformations plus importantes de la situation (les difficultés rencontrées par les élèves au cours de la troisième étape nous incitent à revoir notre analyse a priori de la situation)[13]. Mais l'enseignante a respecté les grandes lignes du projet. Elle n'a pas modifié son déroulement, elle a donné les consignes prévues, elle n'a pas transformé la tâche des élèves. Nous pouvons seulement relever qu'elle a tardé à distribuer la règle non graduée lors de la deuxième étape[14].

L'enseignante a introduit peu d'écarts au niveau de la représentation de la tâche : elle a perçu les principaux enjeux de la situation même si elle n'a pas suffisamment pris en compte le rôle de la règle (elle oublie de la distribuer et tarde à inciter les élèves à l'utiliser).

Mais surtout, il convient de souligner que l'enseignante n'a pas créé d'écarts important au niveau de la redéfinition de la tâche. Elle a certes fait le choix de faire travailler les élèves par deux et elle a prévu l'utilisation d'un rétroprojecteur mais ces choix de modalités de travail ne la conduisent pas à s'éloigner du projet initial. Contrairement à Mme S, elle n'a pas modifié la tâche qui lui était prescrite pour pouvoir exercer plus de contrôle sur l'activité des élèves et même si elle est hésitante quant aux termes à employer lors de la phase de synthèse (elle se demande si elle devait employer le mot diagonale) elle n'a pas cherché à poursuivre d'autres objectifs que ceux fixés par la ressource.

A l'issue de cette première expérimentation, nous retenons des pistes possibles pour une optimisation de la ressource mais nous pouvons également souligner que nos hypothèses sont en partie validées. En effet, contrairement à la situation testée par Mme S, notre situation pour la classe avec objectifs de formation a permis à Mme S' d'observer ses élèves dans le cadre d'une restauration de figure sans pour autant être mise en difficulté. Mais, au-delà d'un déroulement plus simple, d'une figure moins complexe et d'une planification des objectifs sur plusieurs séances, qu'est-ce qui distingue ces deux situations ?

3.3 Essai de caractérisation de la situation pour la classe avec objectifs de formation

Dans cette dernière partie nous cherchons à comparer les deux séances étudiées afin d'en déduire des éléments de caractérisation de la situation pour la classe avec objectifs de formation relatifs à la tâche de l'élève mais aussi et surtout à celle de l'enseignant.

Dans les deux situations la tâche de l'élève consiste à restaurer une figure mais, dans la première, le coût instauré sur les instruments incite celui-ci à recourir à des procédures nécessitant un changement de regard sur les figures. Les procédures pouvant être mises en œuvre sont diverses. La déconstruction est laissée à la charge de l'élève qui doit effectuer un choix judicieux des instruments. Dans la situation pour la classe avec objectifs de formation, les étapes successives avec un jeu sur le degré de liberté de positionnement des gabarits autorise une prise en compte progressive des alignements (segments puis segment et point). Les procédures de restauration sont diverses mais ciblées à chacune des étapes. La déconstruction (certes moins complexe car la restauration à effectuer n'est pas la même) est induite par les instruments mis à disposition.

Ces différences au niveau de la tâche de l'élève ont des conséquences sur la tâche de l'enseignant. En effet, dans la situation directement inspirée par la recherche, la phase de mise en commun joue un rôle déterminant : elle doit permettre à l'enseignant de faire évoluer les procédures des élèves et c'est à ce moment-là que se situe le véritable enjeu de la séance. Pour cela il doit au préalable avoir réussi à interpréter le choix des instruments utilisés en termes de changement de regard puis il doit aussi se donner les moyens de faire évoluer les procédures. Cela suppose en effet de demander aux élèves de recommencer, c'est-à-dire, de distribuer de nouvelles feuilles pour qu'ils puissent chercher à restaurer à nouveau la figure mais avec un coût moins important. Or ce type

[13] Nous reviendrons plus loin sur les questions que nous nous posons à propos de l'optimisation de la ressource.

[14] Même si cet oubli a des conséquences importantes, il ne constitue pas un écart important dans le déroulement de la séance tel qu'il est décrit dans la ressource.

de fonctionnement est éloigné des pratiques usuelles pour diverses raisons : nécessité d'une gestion différenciée du travail des élèves, travail à recommencer sur de nouvelles feuilles de papier à prévoir, temps de recherche se prolongeant pour certains élèves... De plus cette évolution des procédures peut nécessiter plusieurs séances et dans ce cas, on se heurte au besoin qu'ont les enseignants de se faire assez rapidement une idée de l'intérêt de la ressource. Si les élèves n'ont pas réussi à calculer le coût de la restauration, la tâche devient encore plus ardue pour l'enseignant[15]. Dans la situation pour la classe avec objectifs de formation, il est tout aussi nécessaire d'observer les procédures des élèves mais l'évolution des procédures induisant un changement de regard n'est pas à la charge de l'enseignant. La gestion de la phase de synthèse s'en trouve facilitée. L'enseignant peut se limiter à un simple exposé des procédures et centrer davantage son attention sur leur explicitation.

Ainsi nous devons prévoir d'améliorer notre ressource en tenant compte et en préservant ces caractéristiques.

3.4 Comment améliorer la ressource ?

Les difficultés rencontrées par les élèves au cours de la troisième étape nous conduisent à revenir sur notre analyse *a priori*. En effet nous n'avions pas suffisamment pris en compte l'importance de l'utilisation de la règle lors de la deuxième étape. Plusieurs pistes pour une amélioration de la situation sont à envisager. Nous pourrions jouer sur certaines variables didactiques : modifier le choix de l'amorce ou celui des gabarits à disposition pour une autre organisation des procédures à mettre en œuvre[16] mais nous souhaitons dans un premier temps envisager de ne pas modifier les trois étapes et nous limiter à chercher des moyens de favoriser le recours à la règle lors de la deuxième étape[17]. Nous pourrions alors soit prévoir de jouer sur l'épaisseur des gabarits (les découper dans du papier plus fin de façon à ne pas pouvoir en tracer les contours), soit compléter notre ressource par une mise en garde pour l'enseignant (préciser pourquoi il est important d'amener les élèves à utiliser la règle à l'étape 2). Mais ces deux options ne sont pas équivalentes et les comparer nous permet de discuter à propos des choix à faire. En effet, dans le premier cas, nous modifions la tâche de l'élève ; dans le second, nous cherchons à compenser ce que l'on peut voir comme un déficit de formation par une explication donnée. Jouer sur l'épaisseur du papier revient à transformer le milieu pour que celui-ci contraigne l'élève à utiliser la règle [18]alors que prévoir une mise en garde pour l'enseignant permet de laisser plus de responsabilités à celui-ci. Mais, au-delà de ces différences, comment s'assurer de la mise en évidence pour les élèves des propriétés de la figure ? En modifiant le milieu, ne risque-t-on pas de voir l'enseignant passer sous silence les concepts géométriques en jeu ? Comme l'explique Annie Bessot (Bessot, 2009), *le professeur a l'obligation d'organiser son cours en des causes d'apprentissage pour les élèves mais son travail s'arrête lorsque les causes ont été transformées en des raisons d'ordre mathématique : le sujet doit reconstruire, reprendre ses savoirs, les organiser et les trouver raisonnables c'est-à-dire les articuler pour les rendre consistants.*

Ainsi, notre travail doit se poursuivre en tenant compte des caractéristiques du type de situation que nous souhaitons développer ce qui suppose faire des choix, trouver un certain équilibre entre les contraintes imposées par le milieu et ce qui doit être de la responsabilité de l'enseignant. Ces choix devront se faire en cohérence avec les objectifs de formation que nous nous donnons pour les enseignants.

---

[15] Ajoutons ici que l'enseignante poursuivait un objectif supplémentaire : la rédaction d'un programme de construction et que par conséquent sa tâche était encore plus complexe.

[16] Nous pourrions prévoir une étape supplémentaire avec un gabarit moins grignoté.

[17]Nous faisons aussi ce choix car cela nous permet de soulever des questions importantes de notre point de vue.

[18]Pour tracer des traits plus précis

I - CONCLUSION

Les travaux menés par le groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie du Nord Pas de Calais ont donné lieu à la production de situations pour un enrichissement des pratiques qui ne va pas de soi et nous conduit à chercher comment optimiser l'appropriation par les enseignants de ces situations. Nous avions mis à l'épreuve dans des travaux antérieurs (Mangiante-Orsola, 2011) l'hypothèse selon laquelle concevoir des ressources laissant aux enseignants une certaine marge de manœuvre favoriserait le processus d'appropriation mais notre recherche actuelle ouvre de nouvelles pistes pour la production de ressources.

Tout d'abord, nous retenons que la situation mise en œuvre par Mme S. présente un certain nombre de difficultés et qu'il convient plus généralement de mettre en garde les enseignants vis-à-vis d'une utilisation sans adaptation de situations conçues par la recherche. En effet certaines de ces situations, parce qu'elles intègrent les principaux résultats issues de la recherche, sont certes particulièrement riches du point de vue des apprentissages potentiels pour les élèves mais concentrent dans une seule et même séance un certain nombre de difficultés pour l'enseignant. Ainsi notre analyse de la situation utilisée par cette enseignante nous conduit à souligner la nécessité d'une introduction progressive d'éléments nouveaux dans les pratiques.

Par ailleurs, au-delà de l'élaboration d'une progression, nous proposons *des situations pour les élèves avec objectifs de formation* c'est à dire des situations dont l'enseignant peut s'emparer grâce à une mise en œuvre facilitée par rapport à la situation inspirée par la recherche et qui lui permet de mieux comprendre les enjeux de notre démarche et nos choix de conception via une observation facilité de l'activité des élèves.

L'analyse de la situation testée par Mme S' n'est qu'une première étape de notre travail. Il convient à présent d'améliorer la ressource produite et de la tester dans de nouvelles classes auprès de nouveaux enseignants. Notre intention est de questionner plus avant ses effets sur leurs pratiques. Les situations ainsi conçues permettent-elles comme nous l'espérons un réel enrichissement ? Favorisent-elles une intégration progressive dans les pratiques des résultats issus de nos recherches à propos de l'enseignement de la géométrie ?

Les travaux menés dans le Nord Pas de Calais ont toujours eu pour ambition de proposer une progression assurant une certaine continuité dans les apprentissages visés pour les élèves. Nous pensons qu'il convient aussi de s'interroger sur la possibilité de penser une certaine « continuité » dans l'enrichissement des pratiques c'est-à-dire de réfléchir aux possibilités d'une intégration progressive de pratiques nouvelles au sein des pratiques existantes. Les recherches menées dans le cadre de la double approche attestent que les pratiques enseignantes constituent un système complexe, cohérent et stable (Robert, Rogalski, 2002). Il nous semble par conséquent tout à fait légitime de chercher à tenir compte de cette organisation des pratiques.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BESSOT A. (2009) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* XV[ème] école d'été de didactique des mathématiques, Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme)

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques (didactique des mathématiques 1970-1990),* textes rassemblés et préparés par Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. & Warfield, V. Grenoble : La Pensée sauvage.

DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM,* 17, 121-138.

DUVAL R. & GODIN M. (2006) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76,** 7-27.

GODIN M. & PERRIN-GLORIAN M.J. (2009) De la restauration de figures à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. In COPIRELEM *Enseigner les mathématiques à l'école : où est le problème ? Actes du colloque de Bombannes, juin 2008, CD-rom, Atelier A2*.

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M.J. & DELPLACE J.R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N,* 79, 33-60.

LABORDE C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique. Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université J. Fourier, Grenoble.

MANGIANTE-ORSOLA C. (2012), Une étude de la cohérence en germe dans les pratiques de professeurs des écoles en formation initiale puis débutants. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 32/3

MANGIANTE-ORSOLA C. (2011), Etude du processus d'appropriation de ressources par des professeurs des écoles enseignant les mathématiques : entre travail au quotidien et développement des pratiques, *Actes du Colloque international INRP, Le travail enseignant au XXIe siècle Perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle. http://www.inrp.fr/archives/colloques/travail-enseignant/contrib/123.htm*

MANGIANTE-ORSOLA C., MATHÉ A.C. (2011) La symétrie orthogonale du CE2 à la Sixième : d'une réflexion sur les enjeux de son enseignement à l'élaboration d'un document-ressource pour les enseignants. Actes du colloque COPIRELEM 2010, Montpellier.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.J. & VERBAERE O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2 *Petit x* 72, 6-39 et *Grand N* 77, 7-34.

PERRIN-GLORIAN M.J., MATHÉ A.-C. & LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 a 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM,* **90,** 5-41.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, volume 2, n°4, 505–528.

V - ANNEXE

Restauration de figures

D'après le travail d'un groupe de recherche de l'IUFM Nord-Pas-de-Calais : Marc Godin, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Frédéric Brechenmacher, Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Bachir Keskessa, Anne-Cécile Mathé, Odile Verbaere ainsi que des maîtres formateurs et conseillers pédagogiques.

Qu'est-ce qui change dans l'activité des élèves et de l'enseignant entre les 2 activités suivantes ?

ACTIVITÉ 1

1. Reproduit à l'identique la figure de gauche dans la case de droite.
2. Rédige un programme qui décrit ta méthode.



ACTIVITÉ 2

1. Complète la figure de droite pour obtenir celle de gauche en dépensant le moins d'argent possible. Chaque tracé à la règle (non graduée) coûte 1 €. Chaque report de longueur coûte 5 €.
2. Calcule combien a coûté ta méthode.
3. Rédige un programme qui décrit ta méthode.





Dans le premier cas, il s'agit d'une activité classique de reproduction. On peut également demander à l'élève de construire la figure à une autre échelle, avec une mesure indiquée. La seconde activité est une *restauration de figure* : cela consiste à reproduire une figure modèle à partir d'une *amorce* à l'aide d'instruments. Il s'agit donc de travailler non pas sur une figure mais sur *la différence entre deux figures* : le modèle et l'amorce (éventuellement en plusieurs morceaux). La reproduction de figure correspond au cas où l'amorce est vide et où les instruments autorisés sont la règle et le compas.

La reconnaissance d'un problème de restauration commence par la reconnaissance de l'amorce comme une sous-figure de la figure modèle. Elle peut :

- être une reconnaissance visuelle,
- être acceptée comme une donnée,
- être vérifiée en utilisant un transparent (qui servira pour valider l'activité de restauration),
- être vérifiée en utilisant des instruments.

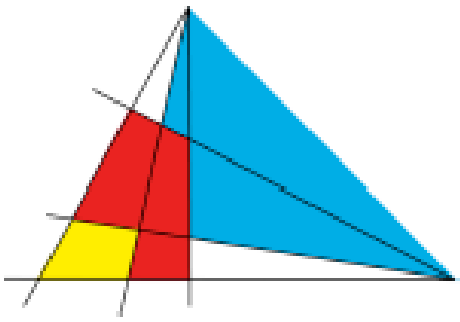
Le choix de donner à la figure et à l'amorce des orientations différentes écarte la possibilité d'une démarche visuelle par translation.

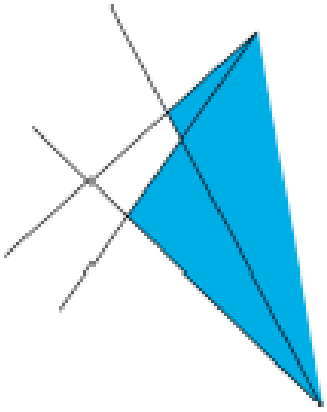
Les variables :

- le choix de la figure : bien entendu, la figure modèle peut être, comme dans les activités de reproduction, plus ou moins complexe ;
- le choix de l'amorce : les relations entre la figure à restaurer et son amorce orientent l'analyse de la restauration. La restauration est fonction non de la figure seule mais de la différence entre l'amorce et la figure. C'est l'analyse de cette différence qui importe pour choisir une restauration relative à un niveau d'enseignement donné. Évidemment, si l'amorce est insignifiante, les propriétés géométriques de la figure constituent l'essentiel des propriétés à restaurer.
- le choix des instruments à disposition ;
- le choix du barème associé aux instruments :
  - l'introduction d'un coût à l'utilisation des instruments permet la réussite par des procédures diverses qui demandent plus ou moins de connaissances géométriques ;
  - cela incite aussi à utiliser certains instruments plutôt que d'autres, et donc à développer des connaissances géométriques pour obtenir les effets graphiques voulus avec des instruments dont l'utilisation est moins immédiate chez les élèves ;
  - en modifiant le barème relatif aux instruments de tracé, on peut donc agir sur les procédures de tracé des élèves ;
  - le choix du barème a enfin une incidence sur la difficulté des calculs au moment d'estimer le coût de la restauration ;
- les exigences d'écriture : écritures additives du coût de restauration, rédaction d'un programme de restauration, de reproduction ou de construction (rédaction d'un algorithme de tracé, et ou, rédaction d'une description) ;
- la gestion des écritures du coût de restauration (comparaison collective ou non).

Aides possibles dans l'exemple ci-dessus (qui a été proposé en CE2) :

- utiliser des couleurs : les élèves cherchent les éléments qui se correspondent sur l'amorce et la figure modèle et les tracent de la même couleur.
- lors de mises en commun intermédiaires, identification des droites qui manquent sur l'amorce et des moyens de les obtenir (sur le modèle) à partir d'éléments déjà présents sur l'amorce (décomposition de la différence) avant de les construire (recomposition de la différence).

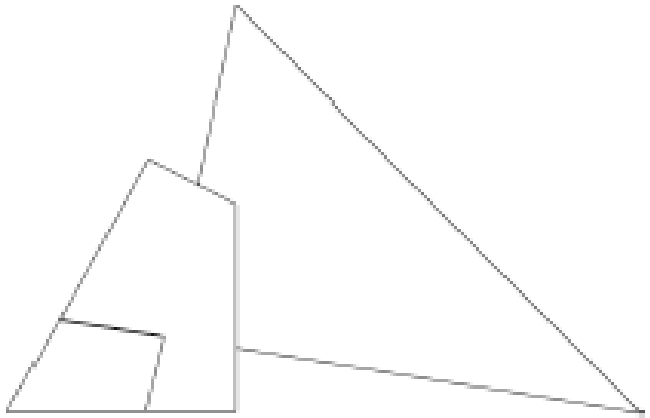


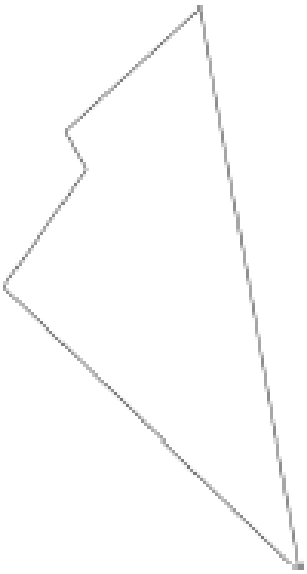


BARÈME

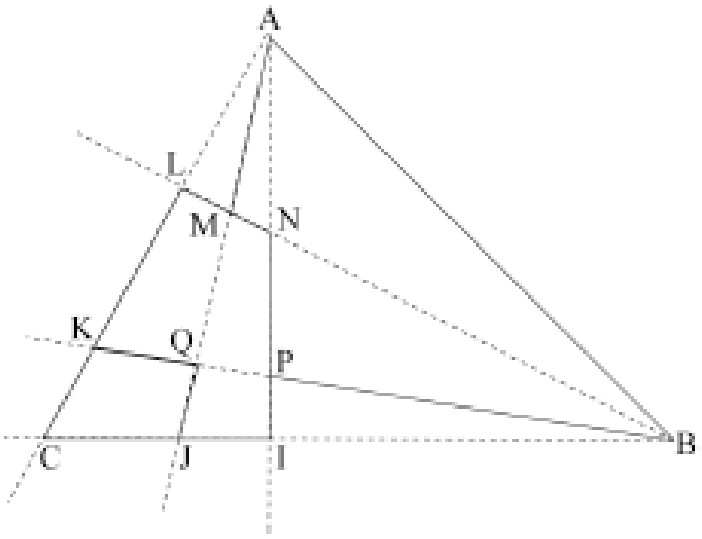
Instruments	Coût en €
calque	700
trait à la règle (non graduée)	1
report de longueur	5
mesure de longueur	700

1. Compléter la figure de droite pour obtenir celle de gauche en dépensant le moins d'argent possible.
2. Calculer combien a coûté sa méthode.
3. Rédiger un programme qui décrit cette méthode.





Programme :



Tracer (BP) et (AM). Q est à l'intersection.
Reporter QJ pour trouver J.
Tracer (BJ) et (AN). I est à l'intersection.
Reporter JC pour trouver C.
Tracer (BN) et (AC). L est à l'intersection et K est à l'intersection de (BP) et (AC).

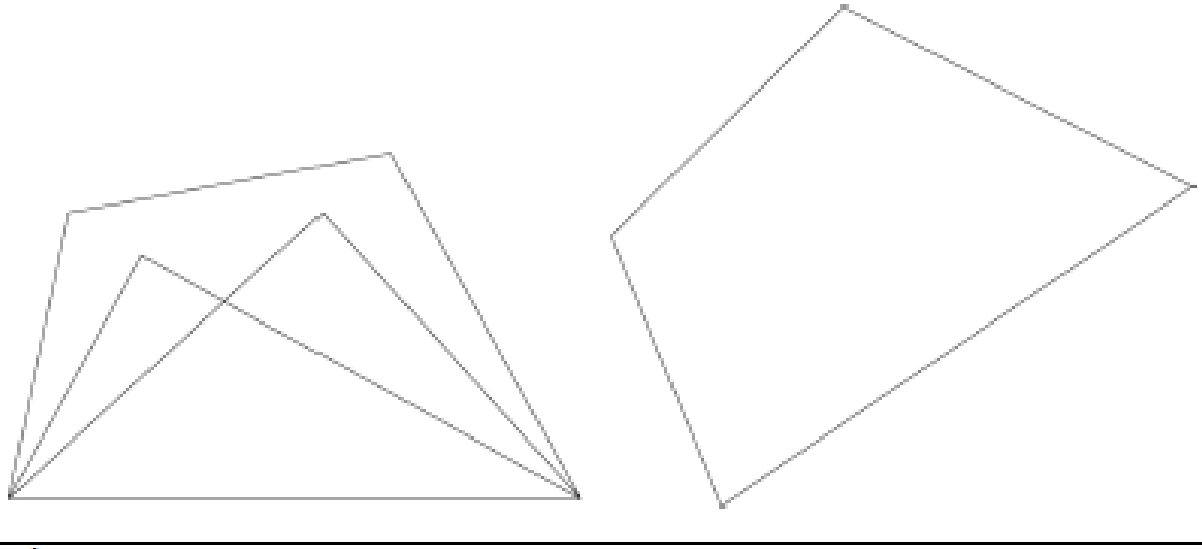
1+1+5+1+1+5+1+1=16 €

Un exemple pour le cycle 3

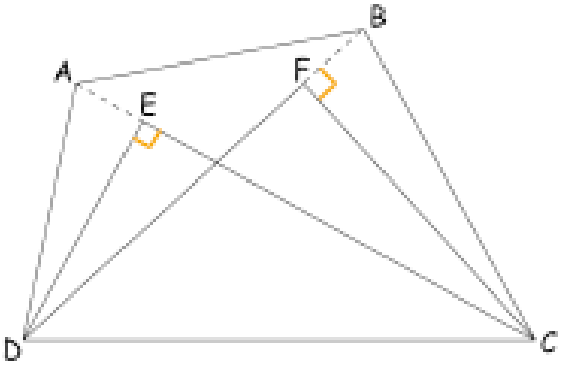
BARÈME

Instrument	Coût
Règle non graduée	1 €
Règle graduée	75 €
Equerre	5 €
Compas	50 €
Calque	250 €
Gomme	0 €

1. Complète la figure de droite pour obtenir celle de gauche en dépensant le moins d'argent possible.
2. Calcule combien a coûté ta méthode.



Coût total :



Tracer [AC] : 1 €
Tracer [BD] : 1 €
Tracer la perpendiculaire à [AC] passant par D : 5 €
Tracer la perpendiculaire à [BD] passant par C : 5 €
Gommer [AE] et [BF] : 0 €
Coût total : 1 + 1 + 5 + 5 = 12 €

5

document rédigé par Carine Reydy

Restauration d'une figure

Être capable de restaurer une figure :

- En développant les capacités d'observation de la figure initiale
- En reconnaissant l'amorce comme une sous-figure de la figure initiale

Être capable de percevoir les alignements, de prolonger des lignes droites pour découvrir les points d'intersections

Être capable de restaurer une figure en écartant la démarche visuelle par translation car l'amorce est orientée différemment.

Objectifs méthodologiques :

- Savoir prolonger des droites (sans appuyer sur le crayon)
- Savoir utiliser les bons outils pour que la restauration coûte le moins cher possible (cf barème)

Compétences spécifiques	temps	Déroulement	Réponses attendues
Lire : Lire la consigne et le tableau de barème	Collectif 10'	Phase 1 : Présentation collective Les élèves lisent la consigne *Complète la figure de droite pour obtenir celle de gauche en dépensant le moins d'argent possible .* -> Que va-t-il falloir faire ? -> Que signifie le tableau de barème ? Rappeler l'utilisation de la règle bristol sans graduation et de la bande jaune qui permet de reporter des longueurs (on peut écrire dessus)	Il va falloir refaire la figure en dessinant ce qu'il manque. Il va falloir faire attention à la procédure que l'on va choisir car il faut essayer de compléter la figure sans trop dépenser d'argent. • Si on utilise le calque ou si on mesure avec la règle graduée cela coûte 700 € (il faut essayer de ne pas utiliser ces outils) • Si on trace un trait avec la règle non graduée cela coûte 1€ • Si on reporte une longueur avec la règle papier cela coûte 5 €
Analyser : Observer à la fois la figure modèle et l'amorce	Collectif 10'	Phase 2 : Travailler sur la différence entre deux figures : le modèle et l'amorce Que constatez-vous entre la figure de départ et le morceau de figure tracé ? Le morceau est orienté différemment. Comment faire pour repérer les parties déjà tracées ? Au tableau, l'amorce est reproduit en grand ainsi que la figure de départ. On colorie chaque segment de l'amorce d'une couleur et on repasse de la même couleur chaque segment de la figure modèle. On nommera les sommets de l'amorce et de la figure modèle	Le morceau de la figure tracé ne semble pas être dans le même sens que la figure de départ → Utilisation du calque pour vérifier En repassant les segments tracés sur les deux figures, en utilisant des couleurs.

Compétences spécifiques	temps	Déroulement	Réponses attendues
Mettre en œuvre sa procédure pour **restaurer** la figure en dépensant le moins d'argent possible	Collectif 5 ' Individuel 20'	Phase 3 : Restaurer la figure Comment complète-t-on une figure ? Sur la figure modèle peut-on trouver les alignements ? Ne pas oublier les alignements A,L,K, Cet B,I, J,C N'oubliez pas à chaque fois que vous tracez ou que vous prolongez un trait de le noter et d'écrire son prix. Vous pouvez nommer les différents points d'intersection qui vont apparaître au fur et à mesure de votre construction	• On cherche les alignements • On cherche les points d'intersection On souligne de la même couleur les segments tracés et leur prolongement
Être capable d'**exposer** clairement sa **stratégie** Être capable de suivre un programme de restauration	Collectif 15'	Phase 4 : Correction Avec la papier calque chaque élève individuellement pourra s'auto-corriger et ainsi constater si ses tracés sont corrects. L'élève qui aura le moins dépensé exposera sa stratégie au reste de la classe. Si la stratégie a 16 € n'a pas été découverte on donnera la solution aux élèves qui la traceront en même temps qu'on lira le programme de construction	Parvenir à une restauration correcte

Matériel :
Pour chaque élève :
Un calque avec la figure complète.
Une règle papier pour les reports de longueur
Une règle en carton plastifié pour les prolongements de droite
Une règle graduée pour mesurer les longueurs.
Un critérium, une gomme, des crayons de couleur
Une feuille avec la consigne, le barème, la figure modèle, l'amorce et des lignes pour écrire le programme et compter le prix de la restauration
Une feuille avec la restauration à 16 €

Matériel :
Pour le tableau
La figure modèle et l'amorce agrandies. (4 fois)

Prénom : .....

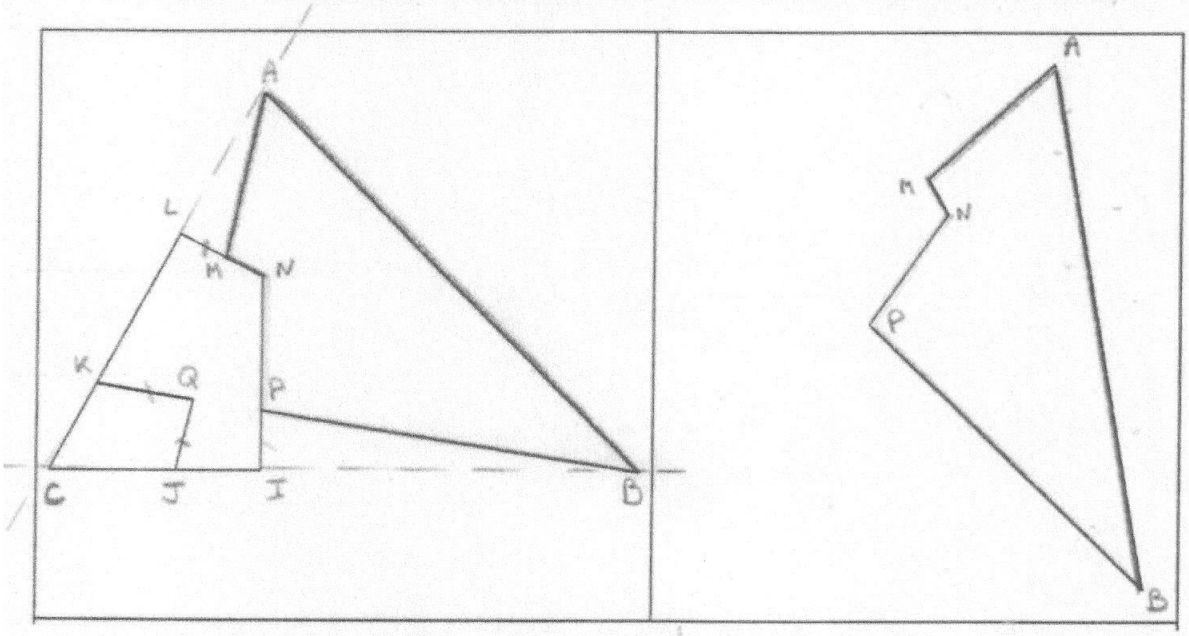
- Complète la figure de droite pour obtenir celle de gauche.

Attention il faudra dépenser le moins d'argent possible.

- Tu devras simultanément compléter ta figure, écrire ton programme de reconstructior et calculer le prix de celle-ci.

Barème

Instruments	Coût en €
calque	700
Trait à la règle (non graduée)	1
Report de longueur avec la règle papier	5
Mesure de la longueur avec la règle graduée	700
gomme	0



gramme :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

L'ENSEIGNEMENT DU CONCEPT DE VOLUME EN CM2

Karine MOLVINGER
Chargée de recherche au CNRS,
LIRDEF (Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Éducation et Formation) équipe ERES, EA 3749, UM2, UM3
karine.molvinger@montpellier.iufm.fr

Résumé

L'étude présentée est une partie d'un projet plus vaste s'intéressant à la transition école-collège en sciences et en mathématiques. Elle porte sur les grandeurs à l'école primaire et plus particulièrement sur l'enseignement de la grandeur volume. Nous présentons une étude des programmes dans laquelle nous nous intéressons à la prise en charge de cette notion en sciences et en mathématiques. Puis, nous nous appuyons sur les recherches sur les difficultés des élèves (Ricco *et al*., 1983, Smith, 1985) pour étudier des manuels et des pratiques d'enseignants de cycle 3. Nous y analysons la façon dont la grandeur volume est traitée : prise en charge des aspects géométriques/physiques versus les aspects numériques, prise en compte des conceptions des élèves et des problématiques liées à la mesure des grandeurs. Notre objectif est ainsi d'explorer comment les enseignants peuvent aborder ce concept et gérer les difficultés des élèves.

L'étude présentée est une partie d'un projet plus vaste s'intéressant à la transition école-collège en sciences et en mathématiques[1]. Notre objectif est ainsi d'explorer comment le concept de volume est enseigné (notamment au CM2) et d'apprécier les apprentissages qui peuvent en découler. Le présent article rend compte des premiers résultats d'un travail toujours en cours actuellement. Après avoir explicité le cadre théorique, la méthodologie et le corpus de l'étude, nous regardons dans la bibliographie ce que nous pouvons trouver sur le concept de volume. Puis nous étudions les programmes où nous nous intéressons à la prise en charge de cette notion en sciences et en mathématiques. Nous analysons les manuels scolaires présentant cette notion, notamment la façon dont la grandeur volume est introduite (prise en charge des aspects géométriques/physiques versus les aspects numériques). Pour l'étude des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves, nous nous inscrivons dans le cadre de la théorie de l'activité (Robert, 2008). Pour cela, nous analysons les séances de classe de trois enseignants ayant fait des choix didactiques différents.

I - PROBLÉMATIQUE, CADRE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIE

Notre problématique s'intéresse au concept de volume, à savoir comment il est abordé dans les instructions officielles, dans les manuels (aspects numérique, géométrique, physique) ainsi qu'en classe où nous analysons des séances de trois enseignants ayant fait des choix didactiques différents.

Notre étude s'inscrit dans la théorie de l'activité telle qu'elle a été spécifiée à l'enseignement des mathématiques par Robert et Rogalski (Robert & Rogalski, 2002, 2005 ; Robert, 2008). Dans ce cadre théorique, on considère que les pratiques des enseignants influent sur les apprentissages des élèves *via* les activités qu'elles provoquent, notamment par le choix des tâches proposées aux élèves. De ce cadre découle une méthodologie : ce sont les activités des élèves en classe qui nous permettent d'étudier l'enseignement dispensé. Les pratiques des enseignants sont analysées, d'une part en reconstituant le scénario, c'est-à-dire l'enchaînement des tâches prévu par l'enseignant et l'organisation de la classe ; d'autre part, le déroulement, c'est-à-dire la mise en œuvre du scénario dans la classe.

[1] Ce projet est financé par la Région Languedoc-Roussillon dans le cadre de l'appel à projet "Chercheurs d'avenir 2011"

L'analyse du scénario suppose la « conversion » des énoncés choisis par l'enseignant en tâches pour les élèves, puis l'analyse de ces dernières d'un point de vue didactique pour déterminer les activités qu'elles sont susceptibles de provoquer chez les élèves, à travers la description des procédures de résolutions envisagées, les connaissances mobilisées, les conceptions erronées qui peuvent intervenir. Cette analyse *a priori* des tâches permet de réaliser une première prévision de l'ensemble des activités qu'elles sont susceptibles de provoquer chez les élèves, donnant ainsi accès à l'itinéraire cognitif élaboré par l'enseignant en vue de « mettre ses élèves sur le chemin de la connaissance » (Chesnais, 2009).

L'analyse du déroulement, réalisée ici à partir de vidéos de séances de classe, est guidée par la recherche de ce qui peut influer sur les activités que les élèves développent. Nous procédons tout d'abord à un découpage chronologique des séances en épisodes selon la nature du travail (cours, exercices, rappels de leçon, correction, autre). Puis nous considérons notamment les temps et formes de travail (individuel, en petit groupe, collective en classe entière…) en fonction des contenus (exercice ou cours…), les échanges verbaux, les aides prodiguées par l'enseignant, etc. Nous nous en tenons aux activités possibles, inférées à partir de nos hypothèses et des traces des activités effectives. En effet, les activités effectives elles-mêmes ne sont pas à notre portée, non seulement parce qu'elles sont différentes pour chaque élève et que notre méthodologie de recueil de données ne nous permet pas d'apprécier les activités individuelles, mais aussi parce qu'une partie de ces activités est de toutes façons inobservable, se déroulant dans les têtes (Chesnais, 2009).

Le corpus étudié est constitué des instructions officielles, de manuels scolaires, d'enregistrements vidéo de l'ensemble des séances portant sur les mesures de volume en CM2 dans les classes de trois enseignants, complétés par de nombreux documents : cahiers d'élèves, feuilles d'exercices, traces écrites. Nous disposons également de productions d'élèves lors d'évaluations réalisées en classe (tests conçus par nos soins) en fin d'année. Ces productions nous permettent d'apprécier, même de manière imparfaite, les apprentissages réalisés.

Ne pouvant présenter l'intégralité des séquences, nous n'analyserons que certaines tâches au sein de toutes ces séances.

II - LE CONCEPT DE VOLUME

Rappelons tout d'abord que le volume est l'espace occupé par un objet et que la contenance est ce qui peut être contenu dans les limites d'un contenant. Dans cette étude, nous distinguons les deux notions et nous nous intéressons au volume.

Le concept de volume s'inscrit dans les programmes de mathématiques dans la thématique « grandeurs et mesures ». Cependant, il relève également de la géométrie dans l'espace puisqu'il met en jeu des solides. Dans l'enseignement mathématique, le concept de volume est en général abordé selon deux axes : géométrique et numérique. Le volume est l'espace occupé par un solide, une situation relevant de la géométrie spatiale, mais il peut être traité également d'un point de vue numérique par dénombrement souvent matérialisé par des petits cubes unités ou utilisation de formules. Cette dualité cadre géométrique/cadre numérique peut être toutefois une source de difficulté pour les élèves, comme l'évoque Moreira-Baltar pour la notion d'aire :

« Le fait que les situations-problèmes renvoient simultanément au cadre géométrique et au cadre numérique crée une difficulté importante lors de l'analyse des erreurs commises par les élèves et la recherche des sources de ces erreurs » (Moreira-Baltar, 1994-1995, page 190).

Par ailleurs, est-ce que le concept de volume s'inscrit uniquement dans les cadres géométrique (solide) et numérique (nombre), ne peut-on pas envisager un cadre physique, comme l'a fait Moreira-Baltar (2002) pour les aires où elle parle du « cadre grandeur » ?

Le concept de cadre est défini par Régine Douady (1986) :

« *Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations*. » (Douady, 1986, page 11).

Les cadres sont les domaines mathématiques mobilisés pour décrire les problèmes et les traduire en termes opératoires. Selon la théorie de Douady (1986), le passage d'un cadre à un autre peut permettre la résolution d'un problème et donne du sens aux notions.

Pour nous, dans notre étude sur le volume, outre les cadres numérique et géométrique, le « cadre grandeur », est également mobilisé comme le rappelle Moreira-Baltar (2002) pour l'aire :

« *Les recherches développées par Douady et Perrin-Glorian les ont conduites à construire et expérimenter une ingénierie didactique pour l'enseignement de la notion d'aire, dans laquelle la construction de cette notion est basée sur la dissociation de trois cadres : le géométrique, avec les surfaces ; celui des grandeurs, avec les aires et le numérique, avec les mesures.* » (Moreira-Baltar, 2002, page 2)

Pour la notion de volume, on considère que l'on travaille dans le cadre numérique lorsqu'on manipule des nombres, dans le cadre géométrique lorsqu'il est question de solides et le cadre « grandeur » lorsqu'on travaille le volume physique et sa mesure sans les nombres. Souvent on passe d'un cadre à l'autre (discours de l'enseignant, des élèves et tâches proposées aux élèves), ce qui peut conduire à de nouvelles connaissances.

Plusieurs auteurs ont montré la difficulté des élèves face à la notion de volume. Rogalski (1982) caractérise une des difficultés : le dépassement du modèle linéaire pour arriver à un modèle multidimensionnel. Ricco, Vergnaud et Rouchier (1983) mentionnent que les élèves utilisent les notions de périmètre ou de surface pour calculer le volume :

« *L'analyse des procédures utilisées par les élèves et notamment des erreurs, montre que l'arithmétisation du volume est souvent opérée à l'aide d'une représentation de type « périmètre » ou de type « surface »* » (Ricco, Vergnaud, Rouchier, 1983).

Jean Piaget a travaillé sur la construction et les conservations des grandeurs physiques ; il a établi différents stades pour la maîtrise de ces notions. Même si depuis ces travaux, il a été montré une variabilité inter et intra individuelle, il nous paraît légitime de les citer ici. En effet, à propos de la construction de ces grandeurs en fonction de l'âge des enfants, Piaget a montré que les premières grandeurs construites sont la quantité de matière vers sept-huit ans, puis la masse vers huit-neuf ans et enfin le volume entre dix et douze ans (Piaget et Inhelder, 1962). Piaget, Inhelder et Szeminska (1973) donnent plusieurs significations au concept de volume : le volume intérieur et le volume occupé. Les auteurs définissent le volume intérieur, comme « intérieur aux surfaces frontières » (p. 433) et comme « la quantité de matière » (p. 445). Le volume occupé est défini comme « la place prise par le volume d'ensemble de l'objet » (p. 433).

Une des difficultés, bien connue des enseignants, est la dissociation masse/volume. La plupart des enfants pensent que lorsqu'on plonge un solide dans l'eau, ce qui explique l'élévation du niveau de l'eau, c'est la masse de l'objet, ne concevant pas que le volume se mesure à la place occupée par cet objet, indépendamment de sa masse. La dissociation du volume physique de la masse est acquise lorsque le sujet considère que la masse n'intervient pas mais que le volume se mesure à la place occupée par l'objet.

Dans une publication sur les concepts de taille, de masse, de matière et de substance chez les enfants de 3 à 9 ans, Carol Smith (Smith, 1985) montre que les concepts de masse et de densité (rapport masse/volume) se différencient chez les enfants au cours de leur développement. Les données montrent que les plus jeunes enfants ont un système théorique incluant des concepts distincts de masse, de taille et de matière et forment des généralisations en relation avec ces concepts (par exemple, la taille est grossièrement corrélée à la masse, les objets d'acier sont lourds *etc.*).

En complément de la bibliographie et dans le cadre de nos recherches, pour avoir une idée de l'évolution des conceptions des élèves sur les notions que nous étudions, nous avons fait passer des tests à des élèves de CM2, 6ème et 5ème. Parmi plusieurs questions, nous nous intéressons à celle

concernant le volume et sa conservation dans la mesure où elle nous renseigne sur le degré de conceptualisation de la notion de volume des élèves (Annexe 1).

Environ deux tiers des élèves de ces classes indiquent que le niveau de l'eau augmente lorsqu'on y plonge un objet. Le pourcentage d'élèves de ces mêmes classes qui savent que le volume se conserve lorsqu'on fait subir une déformation à l'objet est plus faible (environ 50 %).

Ces chiffres nous questionnent, surtout pour des élèves de Cinquième qui, d'après Piaget, ont dépassé l'âge auquel cette notion est acquise. D'où l'intérêt de se pencher sur l'enseignement de ces grandeurs, enjeu en mathématiques et en sciences physiques (en chimie par exemple, dissocier quantité de matière, volume, mole…).

Les résultats des tests en 6ème et 5ème confirment que les difficultés persistent au collège, le concept de volume se construit effectivement lentement chez l'enfant, comme l'ont montré les études de Piaget.

III - LES PROGRAMMES

Nous examinons comment l'institution propose l'enseignement du concept de volume. Nous regardons cette notion dans les programmes en vigueur à l'école et au collège (cf. Annexe 2). Même si nous nous intéressons ici à l'enseignement du volume à l'école, nous regardons brièvement les programmes du collège, cette étude étant une partie d'un projet sur la transition école/collège.

À l'école primaire comme au collège, on trouve dans les programmes de mathématiques, dans la partie « grandeurs et mesure », la notion de volume. Le volume est donc considéré comme une grandeur, au même titre que l'aire, la masse…

À l'école, au cycle 2, les contenances sont étudiées puis au cycle 3, seule la formule du volume du pavé droit est exigée. Dans le socle commun sont mentionnées les principales grandeurs dont le volume.

Pour les programmes du collège, il est demandé de savoir déterminer le volume d'un certain nombre de solides (par dénombrement d'unités ou formules), de connaître les unités de volume et de les relier aux unités de contenance.

Force est de constater que c'est l'aspect numérique qui est davantage mis en avant dans les programmes, même si le travail sur les unités de mesure peut être considéré dans le cadre grandeur si, comme nous l'avons précisé précédemment, il ne fait pas intervenir de nombre.

Il est intéressant de remarquer dans le document d'accompagnement du collège « grandeurs et mesures », le seul document d'accompagnement par ailleurs où il est fait mention du volume, la phrase suivante (p 20 et 21) :

« Pour justifier la formule donnant le volume de la pyramide ou du cône, on peut recourir à du matériel pédagogique permettant de comparer le volume d'une pyramide et du cylindre de même base et de même hauteur en comparant les masses d'un même liquide avec lequel on les remplit. »

Ici on constate que la masse et le volume/contenance sont mis en relation. Il est possible d'interpréter cet extrait comme supposant de mobiliser le concept de masse volumique.

IV - LES MANUELS SCOLAIRES

Nous avons analysé sept manuels scolaires de CM2 : Cap maths (Hatier), Euro Maths (Hatier), Maths + (SED), Outils pour les maths (Magnard), Au rythme des maths (Bordas), Maths tout terrain (Bordas), À portée de maths (Hachette). Nous avons également regardé les manuels de CE2 et CM1 d'Euro Maths afin de prendre en compte le cycle 3 de manière complète.

Nous considérons les manuels à la fois comme des exemples de savoirs enseignés et des ressources pour les enseignants. Nous regardons quels sont les cadres (numérique, géométrique ou grandeur) qui sont privilégiés dans ces manuels. Une même activité, selon la manière dont elle est menée, peut conduire à privilégier un cadre ou un autre, ou plusieurs cadres.

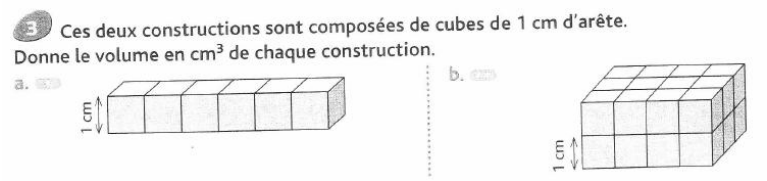
Les tâches proposées se réunissent en trois grands types :

- Trouver le volume de pavés droits par comptage de cubes unités.
- Utiliser la formule du pavé droit (pour calculer le volume d'un pavé droit connaissant ses dimensions ou calculer une dimension du pavé connaissant son volume et les autres dimensions).
- Convertir entre unités du système (relation volume/contenance, m^3/L).

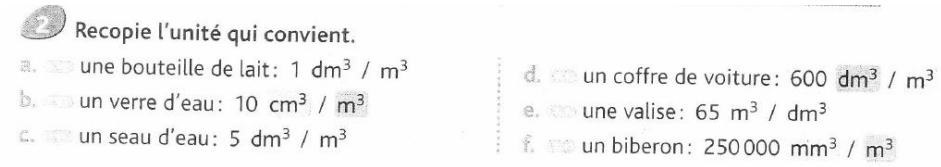
De manière plus précise, nous analysons les tâches associées au concept de volume, comment elles peuvent être résolues par les élèves, en regardant deux manuels, l'un qui paraît présenter une variété d'exercices et l'autre, faisant appel à un seul type d'exercices sauf dans son activité introductive. Nous nous référons dans ces manuels aux exercices et activités ne relevant pas du cadre numérique.

Au rythme des maths (Bordas) (en annexe 3.A)

Nous nous intéressons à ce manuel car, parmi les sept manuels étudiés, c'est celui qui fait intervenir le panel le plus grand d'exercices, impliquant plus de cadres, contrairement aux autres qui privilégient le cadre numérique.



Les élèves doivent donner le volume de deux pavés composés de petits cubes unités, le premier étant composé de six petits cubes alignés (une seule dimension) et le deuxième étant construit sur les trois dimensions. Le premier ne doit pas poser de réelles difficultés puisque d'une part, tous les cubes sont visibles et d'autre part, les élèves ne sont pas confrontés au problème lié à la multi-dimensionnalité. Pour le deuxième, les élèves ne doivent pas oublier les cubes qui ne se voient pas sur la figure. Certains rencontrent des difficultés avec les cubes des "coins" ne voulant pas les compter trois fois dans le calcul du volume ; par exemple pour le pavé ci-dessus, au lieu de calculer 4 x 3 x 2, ils font 4 x 2 x 1, problème lié au passage à la multi-dimensionnalité. Ici aussi nous avons coexistence des deux cadres numérique (pour le dénombrement) et géométrique (pour la représentation spatiale).

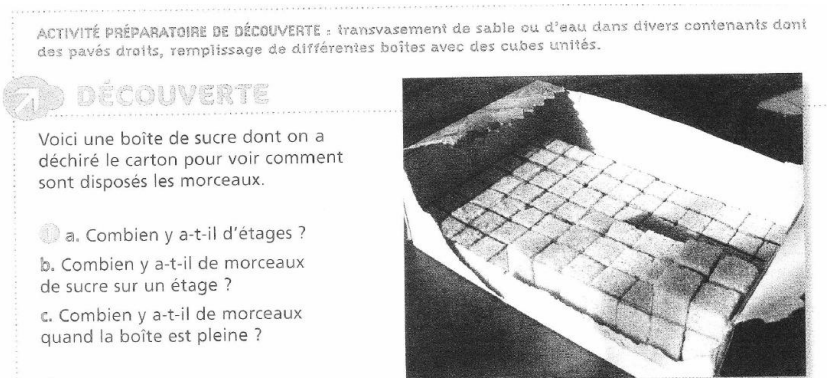


Il faut estimer une mesure en utilisant la bonne unité du système volumétrique. Six objets (bouteille, verre, seau, coffre de voiture, valise, biberon) sont proposés et pour chacun, une des deux unités de volume doit être choisie. Le cadre « grandeur » a été choisi par les auteurs (connaître les unités de mesure). Par le choix des objets, tous des contenants, l'élève est confronté à la notion de contenance qui, elle, en général, s'exprime en litre, du moins dans les manuels scolaires de l'école, et peut par conséquent déstabiliser l'élève. Notons que le choix des nombres est discutable (pour le coffre de voiture et le biberon) car il s'agit de travailler la grandeur, c'est-à-dire que pour les élèves se fassent une idée, il serait plus pertinent de convertir les « grands nombres » pour prendre conscience de l'unité qui sera la plus adaptée.

Euromaths (Hatier) (en annexe 3.B)

Tout d'abord, nous avons rapidement regardé l'ensemble des manuels du cycle 3. Seules les mesures de contenances sont étudiées en CE2 et CM1 ; en CM2, nous trouvons les contenances ainsi que le volume du pavé droit sur lequel nous nous focalisons.

Dans Euromaths, l'activité introductive est basée sur le remplissage de différentes boîtes avec des cubes unités, la notion de volume est introduite dans un cadre grandeur, les élèves vont faire des expériences pour réaliser ce qui va être « mesuré » lorsque l'on parle de volume. Il est aussi recommandé des activités de transvasement dans différents contenants, on a donc un lien entre contenance et volume. Ensuite tous les exercices s'inscrivent dans un cadre numérique puisqu'il s'agit d'appliquer la formule du pavé droit.



ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE DE DÉCOUVERTE : transvasement de sable ou d'eau dans divers contenants dont des pavés droits, remplissage de différentes boîtes avec des cubes unités.

DÉCOUVERTE

Voici une boîte de sucre dont on a déchiré le carton pour voir comment sont disposés les morceaux.

a. Combien y a-t-il d'étages ?

b. Combien y a-t-il de morceaux de sucre sur un étage ?

c. Combien y a-t-il de morceaux quand la boîte est pleine ?

En conclusion de cette étude de manuels scolaires, à part les exercices et activités dans le cadre grandeur présentés ci-dessus qui sont minoritaires, on constate que le cadre mobilisé est essentiellement le cadre numérique ; même dans le manuel le plus contrasté, puisqu'il s'agit d'appliquer la formule du volume du pavé droit. On a donc une prédominance du cadre numérique en CM2, avec très peu d'exercices relevant du cadre grandeur. On peut se demander si les tâches vont être suffisantes aux élèves pour les initier à la construction de la notion de volume, vu que les exercices abordant cette notion ne font appel qu'à des calculs numériques.

On note également l'absence de prise en compte de la dissociation masse/volume et d'activités de mesure (sans l'intervention des nombres).

Les grandeurs peuvent donner une signification aux nombres et réciproquement les nombres permettent l'étude des grandeurs et de leur mesure. Mais il semble nécessaire que la grandeur soit construite par les élèves en dehors des nombres. La plupart des didacticiens s'accordent sur le fait qu'un travail spécifique sur le sens de la grandeur doit être mené indépendamment de la mesure. La maîtrise des activités dans un cadre numérique ne garantit pas que les élèves aient construit le sens de la grandeur.

Dans son mémoire de Master, Anwandter (2008) parvient aux mêmes conclusions que nous pour les manuels de collège où l'application des formules de la mesure de différents solides prédomine.

V - DIFFÉRENTES PRATIQUES ENSEIGNANTES

Face aux difficultés rencontrées par les élèves lors de l'apprentissage de la notion de volume, comment les enseignants gèrent-ils les cours sur le volume, quels choix didactiques font-ils ? La construction de ce concept peut-elle se faire séparément d'autres grandeurs comme celle de la masse, cela a-t-il un sens, ou faut-il les enseigner simultanément pour pouvoir les différencier car trop d'enfants ne distinguent pas la masse du volume et ce, même au collège ? Nous allons voir ici l'approche de trois enseignants, le premier (Carole) suivant les instructions de CM2 (formule du pavé droit), le deuxième (David) séparant clairement l'enseignement des deux concepts (masse et volume) et la troisième (Hannah) voulant aborder explicitement la dissociation des deux grandeurs. Nous regardons quel cadre ils vont privilégier. Nous ne connaissons pas les ressources

utilisées par ces enseignants pour la préparation de leur séquence, d'autant plus qu'aucun manuel scolaire n'a été utilisé lors des séances.

1 La séance de Carole

Analyse *a priori*

Carole étudie la mesure du volume du pavé droit. La durée consacrée à ce travail est une séance d'environ une heure et quart.

La première tâche est de calculer la mesure du volume d'un pavé droit à l'aide du matériel suivant : une boîte vide et des petits cubes. La deuxième tâche est de construire un pavé droit à l'aide des petits cubes et d'en calculer son volume à l'aide d'une des méthodes proposées dans la première tâche, ce qui constitue un réinvestissement des connaissances mobilisées lors de la première tâche. Nous n'analyserons pas le déroulement de la deuxième tâche ici.

Analyse de la première tâche :

Il s'agit de calculer le volume d'un pavé droit (boîte) en la remplissant de petits cubes. Les procédures possibles sont :

- remplir entièrement la boîte de petits cubes que l'on dénombre ;
- tapisser le fond de la boîte de petits cubes que l'on dénombre soit un par un soit en utilisant la formule de l'aire du rectangle ; puis construire la hauteur et la multiplier par l'aire ;
- construire un "squelette" de pavé droit constitué d'une longueur, d'une largeur et de la hauteur et multiplier ces trois nombres.

Analyse du déroulement

Carole présente le thème de la leçon, à savoir la mesure du volume du pavé droit. Elle va donc d'abord demander aux élèves de lui rappeler la définition du pavé droit, qu'ils ont rencontrée en géométrie plus tôt dans l'année (« *Un pavé droit est un solide dont les faces sont des carrés ou des rectangles*. »). Nous pouvons pointer ici que la définition est incomplète puisque Carole ne précise pas que le pavé possède six faces. Elle leur demande ensuite ce que veut dire le mot volume.

Les élèves proposent :

- la profondeur ;
- l'épaisseur et la taille ;
- les mètres cubes [Ici Carole fait remarquer qu'il s'agit de la mesure et non de la grandeur. Pour l'instant, elle veut que les élèves définissent la grandeur.] ;
- combien de petits carrés on peut mettre à l'intérieur ;
- la surface de l'intérieur. [Carole insiste sur le mot « intérieur », et reformulera avec « la mesure de l'intérieur du solide ».].

Les éléments de réponse de quelques élèves ont une certaine pertinence. Il est intéressant de noter que la majorité des élèves se placent dans un cadre grandeur pour définir le mot volume (surface, profondeur, taille, unité) ; un élève se situe dans le cadre numérique (nombres de petits carrés).

Carole énonce ensuite la première tâche. Les élèves, par groupes de 4, doivent calculer le volume d'une boîte (pavé droit) à l'aide de petits cubes. Carole explique que le petit cube est leur unité de mesure. Elle saisit l'occasion pour faire un rappel sur les unités de mesure : pour un segment, l'unité de mesure est le centimètre ; pour la mesure de l'aire d'une surface, c'est le centimètre carré. Ici pour l'instant, l'unité est « le petit cube ». Après quelques minutes de travail en petits groupes, Carole propose une mise en commun ; un représentant par groupe explique ce que le groupe a fait.

Trois groupes tapissent le fond et multiplient par la hauteur.

Un groupe dénombre le nombre de longueurs (« *donc en fait, vous avez trouvé qu'il fallait chaque fois 6 cubes pour faire une rangée et vous avez calculé le nombre de rangées nécessaires*. »).

Un groupe construit un squelette (la longueur, la largeur et la hauteur) et multiplie les trois nombres entre eux.

La première procédure montre que les élèves réfléchissent à partir de deux dimensions (surface et hauteur). Il est intéressant de noter que les élèves n'ont pas rencontré de problème avec les cubes des "coins", le passage à la tridimensionnalité ne semble pas être un obstacle. Bien sûr ce travail étant un travail de groupe, on ne peut pas étudier chaque élève séparément.

Carole, pour conclure sur cette première tâche, va valider les trois procédures. Elle va cependant montrer que la dernière méthode sera la plus efficace, notamment lorsque les élèves seront devant leur feuille sans les petits cubes. Elle institutionnalise la formule du volume du pavé droit à partir des procédures des élèves.

La séance se termine sur une trace écrite :

« La mesure de volume d'un pavé droit »

« Un pavé droit est un solide dont les faces sont des carrés ou des rectangles. »

« Le volume d'un solide c'est la mesure de son intérieur. Pour calculer le volume d'un pavé droit, on multiplie la longueur (L) par la largeur (l) par la hauteur (h). »

$\mathcal{V}$ = L x l x h

« Si toutes les mesures sont en centimètres, alors le volume sera exprimé en cm^3. »

Après une introduction du mot « volume » dans un cadre plutôt géométrique, la séance de Carole est conforme au programme (formule du pavé droit) et proche de ce que l'on trouve dans les manuels scolaires, elle se positionne dans un cadre numérique. On peut remarquer qu'elle définit un « volume intérieur » d'après la classification de Piaget et qu'elle définit la grandeur par sa mesure.

2 La séance de David

Analyse *a priori*

La séance que nous analysons porte sur les contenances et les volumes. La durée prévue pour ce travail est d'une heure environ ; la séance suivante étant consacrée à des exercices de conversions d'unités. Deux tâches sont proposées aux élèves. La première tâche est de mesurer la contenance d'un récipient en utilisant un verre doseur puis une éprouvette pour plus de précision. La seconde tâche consiste à mesurer les volumes d'un petit ballon et d'un morceau de polystyrène. David annonce qu'il va travailler la notion de contenance avant celle de volume. Nous ne nous intéressons ici qu'à la deuxième tâche, celle sur la mesure de volume.

Analyse de la deuxième tâche

Il s'agit ici de mesurer le volume d'objets. Une procédure possible pour réaliser cette tâche est :

a. prendre un récipient gradué (ou le graduer) assez grand pour y introduire l'objet à mesurer ;
b. le remplir d'eau, suffisamment pour que l'objet puisse être immergé mais pas trop pour ne pas faire déborder l'eau lorsqu'on plonge l'objet ;
c. noter le volume d'eau initial ;
d. plonger l'objet dont on veut mesurer le volume ;
e. noter le nouveau volume d'eau ;
f. soustraire à ce dernier volume le volume initial.

On peut également envisager une seconde procédure correcte par débordement. Le récipient où l'objet sera plongé est rempli à ras bord. On plonge l'objet et on recueille l'eau qui a débordé. On mesure dans une éprouvette (ou un autre instrument de mesure de contenance) l'eau qui a débordé et qui correspond au volume de l'objet. Dans les deux cas, l'élève doit savoir que le volume de l'objet correspond au volume d'eau déplacé. L'emploi de cette technique nécessite d'avoir compris que le volume ne dépend pas de la profondeur à laquelle on immerge l'objet et suppose de faire abstraction du volume de l'objet utilisé pour provoquer son immersion si celui-ci ne coule pas.

Les objets choisis sont un petit ballon et un morceau de polystyrène.

Parmi les deux objets proposés, le ballon est creux. En termes de mesure de grandeurs, on pourrait mesurer son volume mais également sa contenance. Même si David envisage la mesure du volume pour cet objet, un élève qui ne distingue pas la contenance du volume, peut envisager de remplir le ballon d'eau et mesurer ainsi la contenance au lieu du volume. Il est vrai que si on néglige l'enveloppe de l'objet, cette procédure est acceptable puisque le volume et la contenance seront équivalents.

Le fait que ces deux objets flottent peut engendrer des problèmes techniques même chez les élèves qui mobilisent la grandeur. Les élèves peuvent se demander comment ils vont les immerger. Cela peut être réalisé avec une tige dont le volume est négligeable, mais également avec la main. Dans ce dernier cas, l'ajout du volume de la main fausse la mesure. L'utilisation d'objets qui flottent, pour un élève qui ne dissocie pas la masse du volume, peut également mobiliser la notion de masse « il flotte car il est léger ».

Analyse du déroulement

La séance se déroule de manière collective. Un élève est au tableau avec David pour l'aider dans la réalisation de ses expériences, les autres élèves sont assis à leur bureau. La partie sur les contenances dure 8 minutes et celle sur les volumes moins de 25 minutes. Le reste de la séance est consacré à des exercices d'application ; la construction du tableau de conversion des capacités comme trace écrite clôt la séance. Rien n'est noté sur la notion de volume.

David explique que la séance va porter sur les mesures de contenance et de volume. On s'intéresse ici à la partie sur le volume.

Tout d'abord, nous verrons tout au long du déroulement que lorsque l'enseignant invalide les propositions des élèves, il le fait d'un point de vue technique.

Nous constatons, dans un premier temps, une confusion entre contenance et volume que ce soit chez l'enseignant ou chez les élèves. Les élèves proposent de mettre de l'eau dans le ballon ou proposent de mesurer l'eau contenue dans le ballon. Ils raisonnent sur la notion contenance au lieu de volume. David explique qu'il ne faut pas remplir le ballon d'eau pour des raisons pratiques. Il invalide cette procédure d'un point de vue technique, le ballon peut se crever. Mais il ne fait pas remarquer aux élèves qu'ils sont en train de parler de contenance au lieu du volume.

Nous constatons, dans un deuxième temps, la confusion volume/masse chez les élèves. « *On met de l'eau dans l'aquarium et si le ballon flotte c'est qu'il est moins lourd* ». Cette confusion avec les masses est favorisée par l'utilisation d'objets qui flottent. Les élèves anticipent cette flottaison. En effet, ce phénomène est souvent expliqué par les élèves par la notion de masse, principale conception erronée de ce phénomène, qui doit mobiliser la masse volumique. Par conséquent les élèves vont se focaliser sur la masse, notion que David veut éviter.

Cet enseignant a fait le choix de bien séparer les grandeurs physiques, et ne pas travailler la masse dans cette séance. À plusieurs reprises, les élèves mobilisent cette notion ; David fait remarquer que ce n'est pas le sujet du jour et qu'il ne va pas s'en occuper :

E : le ballon il est plus léger que

D : alors attention léger ça s'adresse à quoi, aux mesures de

I : masse

D : donc est-ce qu'on va pouvoir utiliser le terme lourd/léger dans les mesures de volume ?

[…]

E : il est plus léger que le ballon, alors le volume d'eau va monter

D : attention. Est-ce qu'on utilise ce terme léger ? Moi ce que je cherche, c'est quoi, c'est le volume du morceau de polystyrène, léger, le poids je m'en moque complètement, on en a déjà parlé, on l'a vu avant, moi c'est quel volume il fait, pourquoi ça peut être important d'avoir le volume de ce morceau de polystyrène. Si on veut envoyer un colis par la poste il faut savoir quelle taille, y a des petits, des grands, des très très grands, il faut savoir le volume pour pouvoir l'envoyer

D : donc on revient ici, y a pas de problème de poids [David immerge le morceau de polystyrène].

Pour la première fois dans la séance, David donne une situation concrète de la mesure de volume. Il propose aux élèves une situation de la vie quotidienne dans laquelle la mesure d'un volume est nécessaire. On peut noter que son exemple de colis n'est peut-être pas très adapté, car là encore, l'envoi d'un colis nécessite aussi de connaître sa masse.

> *D : attention elle a bien dit le ballon il pèse. Alors attention, est-ce qu'il pèse vraiment, qu'est-ce qu'on cherche nous ?*

David veut tellement éviter la masse et centrer son cours sur le volume qu'il finit par dire que le ballon n'a pas de masse.

L'analyse des extraits montre que David veut séparer la masse du volume, mais ceci semble difficile. Il souhaite tout au long de sa séance ignorer la masse, mais on voit bien que cela n'est pas possible par les situations choisies. Le choix des objets a sûrement compliqué la réalisation de la tâche. L'utilisation d'objets qui flottent oriente les élèves sur la masse.

David explicite les problèmes techniques (il a pris un ballon car des boules de pétanque auraient pu casser l'aquarium ou on ne met pas d'eau dans le ballon car il va se crever), mais pas les problèmes de compréhension comme les confusions des grandeurs auxquelles les élèves sont confrontés. Les élèves n'ont pas construit les différentes notions, alors que David est parti du fait que ces notions étaient déjà connues.

Enfin, David choisit de travailler sur le volume d'un point de vue physique (cadre grandeur) et il ne travaille pas sur la formule du volume du pavé droit (cadre numérique). En revanche, il continue ensuite sa séance sur la conversion des unités de capacité. L'institutionnalisation du tableau de conversion des unités de capacité clôt la séance.

3. La séance de Hannah

Analyse *a priori*

Hannah va consacrer cinq séances d'une heure à la notion de masse, à raison d'une par semaine. Contrairement à David, elle choisit, lors de cette séquence, de faire un travail explicite sur la dissociation masse/volume. Lors de la première séance et le début de la deuxième, deux tâches sont proposées aux élèves. Nous analysons la deuxième tâche.

Tâche 2 : La tâche principale est de savoir quel est, pour des groupes d'objets, celui qui est le plus lourd. Dans un premier temps, les élèves observent les objets, puis dans un deuxième temps, ils peuvent toucher les objets, et enfin dans un troisième temps, ils peuvent les ouvrir afin de voir ce qu'ils contiennent. À chaque étape, Hannah procède à une mise en commun. Le choix des objets a été réfléchi dans le but d'une dissociation des deux grandeurs masse et volume. Parmi les objets choisis, nous en retenons ici deux :

- Deux cartons, l'un volumineux et léger (A), l'autre moins volumineux et plus lourd (B).

On ne voit pas ce qu'il y a à l'intérieur des cartons. Par ces deux choix, elle veut montrer aux élèves que les objets les plus volumineux ne sont pas forcément les plus lourds. Lors de la première étape, soit les élèves sont conscients qu'on ne peut pas répondre à la question sans soupeser ou savoir ce qu'il y a l'intérieur des cartons ou des sacs, soit la conception erronée que le plus volumineux est le plus lourd va émerger. Lors de la deuxième étape, les enfants peuvent toucher les objets. Ici, aucun doute pour savoir celui qui est le plus lourd lorsqu'on soupèse. Les enfants, qui ne savaient pas répondre, vont pouvoir percevoir la masse des objets et donc répondre correctement. D'autres, non déstabilisés, resteront sur leurs idées. La troisième étape devrait convaincre les plus réticents.

- Deux pots de confiture, l'un rempli de pistaches (A) et l'autre d'amandes (B), les niveaux étant identiques. Hannah a choisi deux objets de même volume qui n'ont pas une masse identique.

Comme ici, contrairement aux cartons, les pots sont transparents, les élèves sont conscients du contenu. Certains élèves raisonnent sur le fait que le volume occupé par les fruits secs est le même dans les deux pots. Par conséquent, s'ils ne dissocient pas la masse du volume, ils

proposent des masses identiques. Ils peuvent également raisonner sur le nombre de fruits secs dans chaque pot.

Analyse du déroulement

Ici l'objectif est de regarder une enseignante qui, lors du cours sur les masses, associe cette grandeur à celle de volume.

Regardons les réponses des élèves aux comparaisons de masses des objets lors de la première partie de la deuxième tâche, lorsqu'ils ne font que regarder les différents objets.

Pour les cartons : les cinq groupes pensent que le carton B est le plus lourd avec des arguments liés au volume, « le plus gros étant le plus lourd ».

D'autres élèves mobilisent un autre raisonnement lié au fait qu'un des cartons est en mauvais état. Ces élèves font référence à la vie quotidienne : le contenu du carton est plus lourd que l'autre, ce qui entraine sa déformation, *« il est plus lourd parce que le carton il s'est cassé »*.

Certains élèves relient également dur et lourd, des situations qu'ils ont pu rencontrer dans la vie de tous les jours. Le fait que l'objet soit dur signifie, pour eux, qu'il est lourd.

Pour les pots de confiture, deux groupes pensent que le pot A est plus lourd car *il y en a plus.* Ces élèves raisonnent sur le nombre sans prendre en compte la masse. Trois groupes pensent que le pot B est plus lourd car *les amandes sont plus lourdes que les pistaches*. Ils raisonnent sur la masse d'un objet ou sur la masse volumique. Aucun élève ne raisonne sur le volume total.

Tout au long de son activité, par le choix des objets, Hannah essaie de dissocier la masse du volume. Son objectif était de voir de quoi dépend la masse et pour cela, elle se place, comme David, dans un cadre non numérique, plutôt dans un cadre grandeur.

Lors de la construction de la trace écrite, pour elle, la masse ne dépend pas du volume mais que de la matière c'est-à-dire de la masse volumique. Elle n'envisage que la matière qui constitue l'objet comme variable de la masse. Or, la masse dépend du volume pour un objet constitué de la même matière. Mais Hannah ne précise pas qu'elle isole certaines variables. Par conséquent, les élèves ne peuvent plus suivre son raisonnement. En effet, on est en présence d'une relation fonctionnelle à trois variables. Hannah en fixe une sans le préciser aux élèves. Elle veut montrer que ce n'est pas forcément l'objet le plus volumineux qui est le plus lourd, sauf que, si on est en présence d'objets de même matière, l'objet le plus volumineux sera le plus lourd.

H : alors on peut le peser mais qu'est-ce qu'on peut faire aussi pour savoir s'il est lourd ou s'il est léger

[…]

H : ah super il faut savoir ce qu'il y a dedans

[…]

H : le soupeser, je peux voir s'il est lourd ou s'il est léger, mais je peux aussi regarder ce qu'il y a dedans s'il est rempli de coton ce carton, est-ce qu'il va être lourd ou est-ce qu'il va être léger ?

[…]

H : donc ça dépend de ce qu'il y a dedans, d'accord, et ben pour les objets c'est la même chose ça dépend ce qu'il y a comme matière dedans, d'accord avec quoi c'est fabriqué.

La notion de masse volumique est sous-jacente dans les propos de Hannah puisqu'elle relie la masse d'un objet à la matière qui le constitue mais elle oublie une des variables, le volume.

H : d'accord, chut, en fait la masse elle dépend pas du volume, de la taille, elle dépend de ce qu'il y a dedans, de ce avec quoi c'est fabriqué, de la matière qui compose l'objet, d'accord.

Par conséquent, les élèves considèrent maintenant uniquement la matière et ne tiennent plus compte du volume. Hannah essaie de leur montrer qu'il y a trois variables qui sont reliées entre elles :

H : donc ça ne dépend pas, c'est difficile, il faut savoir si c'est des matières différentes, mais il faut savoir si c'est la même matière s'il y a la même quantité, s'il y a la même quantité de matière.

Malgré cette remarque, elle leur fait écrire : ***« La masse ne dépend pas du volume ou de la forme mais du matériau dont il est constitué ».***

Il est peut-être difficile de relier les trois grandeurs ensemble chez des enfants de cet âge mais si cela n'est pas fait, la trace écrite n'est pas complète. On a en effet deux cas, lorsque la matière est la même, masse et volume varieront dans le même sens mais lorsque les matières sont différentes, ce ne sera plus le cas.

Au cours de ces séances, nous avons vu une enseignante voulant aborder la dissociation des différentes grandeurs physiques par le choix des objets qu'elle a pris pour les expériences menées en classe. Elle a relié la masse au volume ainsi qu'à la matière tout au long de la séance mais lors de la trace écrite, elle n'envisage plus que la matière. On note ici beaucoup d'implicites lors de la construction de cette trace écrite. En effet, en négligeant un paramètre, la trace écrite n'est pas assez précise : la masse de deux objets dépend du volume si la matière est la même. Il semble difficile de relier trois grandeurs simultanément comme l'a montré Viennot.

VI - DISCUSSION ET CONCLUSION

Nous avons constaté que les programmes s'inscrivent plutôt dans un cadre numérique (formule).

Les manuels scolaires travaillent pour la plupart le sens de la grandeur dans l'activité introductive puis dans les exercices s'inscrivent pratiquement exclusivement dans un cadre numérique.

Nous avons vu au travers des séances d'enseignants, des approches différentes avec dans tous les cas un travail sur le sens de la grandeur. Carole commence par un travail sur la grandeur en faisant manipuler des solides. Puis on peut considérer que le cadre numérique est mobilisé à travers des activités de dénombrement de cubes unité pour construire une définition de la grandeur, puis à partir de ce travail elle construit la formule du pavé droit, conformément aux programmes en vigueur. David et Hannah font un cours sur le volume sans aborder la formule du volume du pavé droit comme indiqué dans les instructions officielles. Ils se placent dans un cadre « grandeur ».

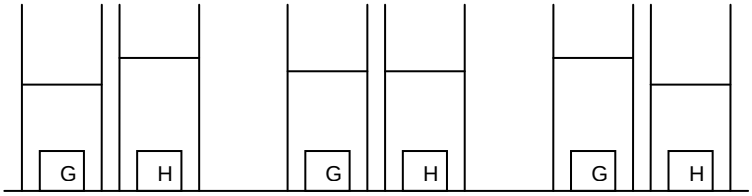
David, pour sa séance sur le volume semble avoir fait l'hypothèse qu'il est plus simple d'aborder cette grandeur indépendamment de la masse. Cependant, le choix d'objets qui flottent entraîne les élèves sur les questions difficiles de la flottaison qui, pour eux, induisent forcément la notion de masse, concept que David veut absolument écarter. Son choix de séparer ses leçons sur la masse et sur le volume aurait pu être judicieux s'il avait utilisé d'autres valeurs des variables didactiques ne faisant pas intervenir la notion qu'il veut à tout prix éviter : la masse. Il n'a pas été conscient des enjeux de ses choix. Cet enseignant a fait le choix d'enseigner les différentes grandeurs les unes après les autres sans jamais les relier entre elles. On a vu qu'il était très difficile d'ignorer la masse lors de l'étude du volume. David se heurte également au fait que les élèves n'ont pas du tout construit les notions de contenance et de volume contrairement à ce qu'il pensait. De plus, David refuse les explications ou propositions qui ne font pas intervenir le volume uniquement mais il reste à la charge des élèves de comprendre la raison du rejet de leurs propos.

Hannah a fait le choix de relier la masse et le volume en construisant une séance où les élèves manipulent plusieurs objets pour dépasser leur conception erronée, mais les choses ne sont pas si simples. Comme nous l'avons vu, les élèves ne parviennent pas à faire varier plusieurs paramètres simultanément. Elle va notamment relier la masse au matériau, c'est-à-dire à la matière, ce qui sous entend la masse volumique sauf que les élèves vont se focaliser sur ces deux paramètres en oubliant la notion de volume.

Ces approches très différentes ont généré des activités différentes chez les élèves (il n'est pas toujours facile d'y avoir accès en phase collective), c'est pour cela que nous regardons les résultats des tests que nous avons élaborés. Cependant, il faut être prudent dans l'analyse de ces tests (pas de test préalable, les classes ne sont pas au même niveau). Nous donnons ici les résultats à la

question présentée précédemment (Annexe 1) (à savoir 1°) que devient le niveau de l'eau d'un récipient lorsqu'on plonge une boule de pâte à modeler à l'intérieur, 2°) que devient le niveau de l'eau quand on transforme la boule en galette) ainsi qu'à une troisième retranscrite ci-dessous sur la distinction masse/volume.

3. Les objets G et H sont deux cubes de même taille. H est plus lourd que G. Avant l'expérience, l'eau était au même niveau dans les deux récipients. On plonge les cubes G et H dans l'eau. Quel est alors le niveau de l'eau ?



	Question 1 (%)*	Question 2 (%)	Question 3 (%)
Carole	65	40	25
David	84	32	32
Hannah	50	57	43

**Il s'agit ici du pourcentage de réussite.*

On constate que, pour la première question, les élèves de David sont plus nombreux à répondre correctement, ce que l'on peut expliquer par le fait que David a réalisé l'expérience en classe.

Hannah qui travaille la dissociation masse/volume a le taux le meilleur pour la question 3 et ce malgré une classe très faible ; le test comprenait de nombreuses autres questions, les résultats pour la classe de Hannah sont en dessous de la moyenne.

On observe beaucoup d'ambiguïté dans le concept de volume (contenance, volume), que ce soit dans les manuels ou dans les pratiques enseignantes. Il semble nécessaire de développer la formation des enseignants dans le domaine des grandeurs et mesures, à la fois pour améliorer leur maîtrise des concepts en jeu, pour qu'ils soient en mesure de mettre en œuvre les prescriptions officielles et d'avoir du recul sur les enjeux de ces prescriptions qui sont parfois pointues sur ces questions. Nous avons encore besoin de mieux comprendre ce qui se joue à l'intérieur de la classe sur ces questions pour pouvoir développer des ingénieries de formation pour les enseignants, car cela nous semble un objectif essentiel pour les recherches en didactique des sciences.

VII - BIBLIOGRAPHIE

ANWANDTER N. (2008) Étude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume, mémoire de master 2, Université Montpellier 2.

BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1991-1992) Le poids d'un récipient étude des problèmes de mesurage en CM. *Grand N*, **50**, 65-87.

CHESNAIS, A. (2009) Analyse de pratiques d'enseignants – analyse *a posteriori* de séances. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel, P., Vandebrouck F., & Wozniak F. (Eds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la XV*ème *Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand, Août 2009.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7(2)**, 5-31.

MOREIRA BALTAR P. (1994-1995) Etude des situations autour du concept d'aire de surface plane. *Didactique et technologies cognitives en mathématiques*, séminaire n°171, 189-218.

MOREIRA BALTAR P., BELLEMAIN P. (2002) Une étude comparative des choix de transposition didactique à propos du concept d'aire en France et au Brésil, *Actes de la XI*ème *école d'Eté de didactique des Mathématiques*, Grenoble, La pensée sauvage.

PIAGET J. & INHELGER B. (1962) Le développement des quantités physiques chez l'enfant : conservation et atomisme, Neuchâtel, Paris : Delachaux et Niestlé.

PIAGET J., INHELGER B. & SZEMINSKA A. (2ème ed. 1973) La géométrie spontanée de l'enfant. Paris P.U.F.

RICCO G., VERGNAUD G. & ROUCHIER A. (1983) Représentation du volume et arithmétisation - entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **4(1)**, 27-69.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **2(4)**, 505-528.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2005) A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade classe. *Educational studies in mathematics*, **59(1)**, 269-298.

ROBERT A. (2008) Sur les apprentissages des élèves : Une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In F. Vandebrouck (éd.), *La classe de mathématiques : Activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Éd. Octarès, 33-44.

ROGALSKI J. (1982) Acquisition de notions relatives à la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherche en Didactiques des Mathématiques*, **3(3)**, 343-396. La pensée sauvage.

SMITH C., CAREY S. & WISER M. (1985) On differentiation: A case study of the development of the concepts of size, weight and density. *Cognition*, **21(3)**, 177-237.

VIENNOT, L. (1992) Raisonnement à plusieurs variables : tendances de la pensée commune. *Aster*, **14**, 127-141.

Bulletin officiel du Ministère de l'éducation nationale, hors série n°3 du 19 juin 2008, *programme de l'école primaire*.

Bulletin officiel du Ministère de l'éducation nationale, n°6 du 28 août 2008, *programmes du collège, Programmes de l'enseignement de mathématiques*.

Document d'accompagnement collège grandeurs et mesures, octobre 2007

Socle commun des connaissances et des compétences, Ministère de l'éducation nationale, décret du 11 juillet 2006.

Euro Maths, M.-L. Peltier, J. Briand, B. Ngono, D. Vergnes, Hatier, CM2, 2009.

Euro Maths, M.-L. Peltier, J. Briand, B. Ngono, D. Vergnes, Hatier, CM1, 2009.

Euro Maths, M.-L. Peltier, J. Briand, B. Ngono, D. Vergnes, Hatier, CE2, 2010.

Cap maths, R. Charnay, G. Combier, M.-P. Dussuc, D. Madier, Hatier, CM2, 2010.

Maths +, A. Dausse, C. Augé, P. Bérat, SED éditions, CM2, 2012.

Outils pour les maths, S. Carle, S. Ginet, I. Petit-Jean, Magnard, CM2, 2011.

Au rythme des maths, J. Hélayel, C. Fournié, Bordas, CM2, 2010.

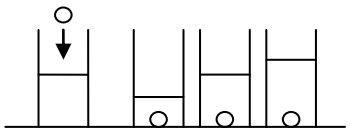
Maths tout terrain, X. Amouyal, J. Brun, A. Errera, Bordas, CM2, 2011.

A portée de maths, A. Caloudis, J. Leclec'h-Lucas, J.-C. Lucas, L. Meunier, Hachette, CM2, 2009.

VIII - ANNEXES

Annexe 1 : Tests (extraits)

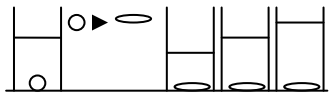
1. Quel sera le niveau de l'eau quand on aura plongé une nouvelle boule de pâte à modeler dans le récipient rempli d'eau ? *Coche la case correspondant à ta réponse en-dessous.*



☐ ☐ ☐

2. On plonge une nouvelle boule de pâte à modeler dans l'eau, on repère le niveau de l'eau. On enlève la boule de pâte à modeler, on la transforme en galette et on la remet dans l'eau. Quel sera le niveau de l'eau ?

Coche la case correspondant à ta réponse en-dessous.



☐ ☐ ☐

Annexe 1 : Synthèse des réponses obtenues :

Classe	Question 1 Moyenne*	Question 2 Moyenne	Les 2 questions justes Moyenne
14 classes de CM2	62%	53%	28%
6 classes de 6è	70%	48%	26%
4 classes de 5è	64%	56%	33%

*Il s'agit ici de la moyenne de réussite à ces questions sur les classes de CM2 (effectif 289 élèves), de 6è (effectif 68 élèves) et de 5è (effectif 86 élèves).

Pour les « non réussites », voici le détail des réponses des élèves. On n'observe pratiquement aucune « non réponse » (inférieur à 0,5%).

classe	Question 1		Question 2	
	Niveau plus bas	Niveau identique	Niveau plus bas	Niveau plus haut
CM2	9%	28%	14%	33%
6è	2%	28%	12%	40%
5è	6%	30%	21%	24%

Annexe 2 : Extraits des programmes école et collège

Programme CE2, CM1, CM2 :

Mathématiques

3. Grandeurs et mesures

Les longueurs, les masses, les volumes : mesure, estimation, unités légales du système métrique, calcul sur ces mesures exprimées, conversions, périmètre d'un polygone, formule du périmètre du carré et du rectangle, de la longueur du cercle, du volume du pavé droit.

Progressions CE2, CM1, CM2

CM2 : - Formule du volume du pavé droit.

Programme mathématiques du collège

Préambule :

3. Organisation des contenus

Grandeurs et mesures

- se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées)
- connaître et utiliser les périmètres, aires et volumes des figures planes et des solides étudiés

Classe de sixième :

- Déterminer le volume d'un parallélépipède rectangle en se rapportant à un dénombrement d'unités,* *en utilisant une formule*
- Connaître et utiliser les unités de volume et les relier aux unités de contenance
- Savoir que 1 L = 1 dm^3
- *Effectuer pour les volumes des changements d'unités de mesure*

Classe de cinquième :

- Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle
- *Calculer le volume d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution*
- Effectuer pour des volumes des changements d'unités de mesure

Classe de quatrième :

- Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution à l'aide de la formule $V = 1/3\ B\ h$

Classe de troisième :

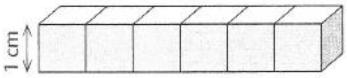
- *Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné*
- Calculer le volume d'une boule de rayon donné
- Connaître et utiliser le fait que, dans un agrandissement ou une réduction de rapport k
  - l'aire d'une surface est multipliée par k^2
  - le volume d'un solide est multiplié par k^3

Annexe 3.A : **Extraits de manuels :**

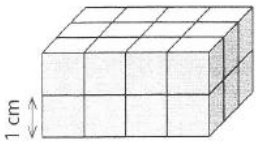
- Au rythme des maths CM2 (Bordas) (volume du pavé droit) (2 pages)

3 Ces deux constructions sont composées de cubes de 1 cm d'arête.
Donne le volume en cm^3 de chaque construction.

a.



b.



Calculer des volumes

4 Calcule le volume de chaque pavé.
a. Dimensions du pavé n° 1 : 3 m × 1 m × 2 m
b. Dimensions du pavé n° 2 : 4 dm × 5 dm × 6 dm

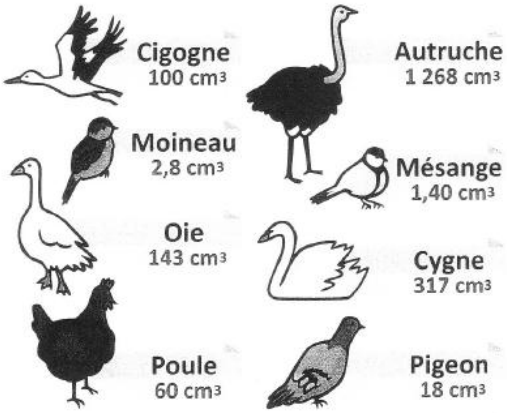
TEST

5 Pour chaque exercice, choisis la réponse A, B ou C qui convient.
Vérifie tes réponses page 140.

	A	B	C
1. Le volume d'un pavé se mesure en...	cm^3	cm^2	cm
2. Pour calculer le volume d'un pavé, je pose...	$L \times \ell$	$(L + \ell) \times 2$	$L \times \ell \times h$

Je résous des problèmes

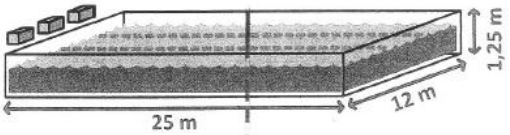
6 Voici le volume d'un œuf pondu par chacun de ces oiseaux.



a. Range les œufs du plus petit au plus gros.
b. Recopie et complète : « L'œuf du moineau a un volume double de l'œuf de ... . »

7 Erwan a une boîte dont les dimensions sont les suivantes : 12 cm, 4 cm, 90 cm.
Calcule le volume (en cm^3) de la boîte.

8 Une piscine mesure 25 m de long sur 12 m de large et a une profondeur de 1,25 m.
Calcule le volume d'eau (en m^3) contenu dans la piscine.



9 En travaux manuels, Lisa a fabriqué un assemblage avec 3 blocs de mousse.
Calcule le volume (en cm^3) de cet assemblage.
Dimensions de 1 bloc de mousse :
15 cm, 8 cm, 5 cm

Tout dans la tête

Les dimensions d'une boîte sont 8 cm, 5 cm, 9 cm.
Calcule son volume.

Question Express

Combien de cubes de 1 cm^3 peut-on mettre dans 1 dm^3 : 10, 100 ou 1 000 ?

Annexe 3.B : **Extraits de manuels :**

- Euromaths Hatier CE2 (mesures de contenances) (2 pages)
- Euromaths Hatier CM1 (mesures de contenances) (1 page)
- Euromaths Hatier CM2 (mesures de contenances) (2 pages) et (volume du pavé droit) (2 pages)

72

CALCUL MENTAL. Encadrer un nombre par deux multiples de 6. Reprendre avec les multiples de 7.

Mesures de contenances

Objectifs : comprendre les relations entre litre (L), centilitre (cL), demi-litre (1/2 L ou 50 cL) et effectuer des opérations simples.

ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE : transvaser de l'eau avec des bouteilles de différentes contenances. Établir les relations entre litre (L) et centilitres (cL), entre 1/2 L et 50 cL, entre 1,5 L et 1 L 50 cL, entre 1,25 L et 1 L 25 cL.

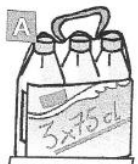
DÉCOUVERTE

1 L c'est 100 cL.
1/2 L c'est 50 cL.



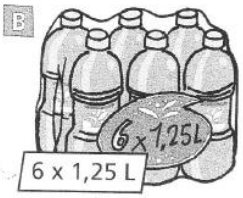
1 Pour chaque pack, calcule la quantité totale d'eau minérale.

A



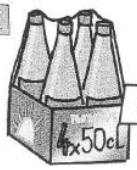
3 x 75 cL

B



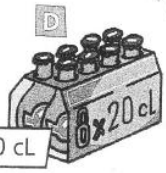
6 x 1,25 L

C



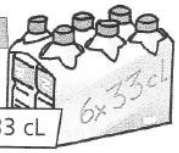
4 x 50 cL

D



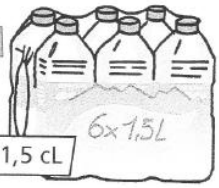
8 x 20 cL

E



6 x 33 cL

F



6 x 1,5 cL

2 Range les quantités d'eau contenues dans ces packs de la plus petite à la plus grande.

EXERCICES

1 a. Dans le verre doseur A, on verse 25 cL de lait.

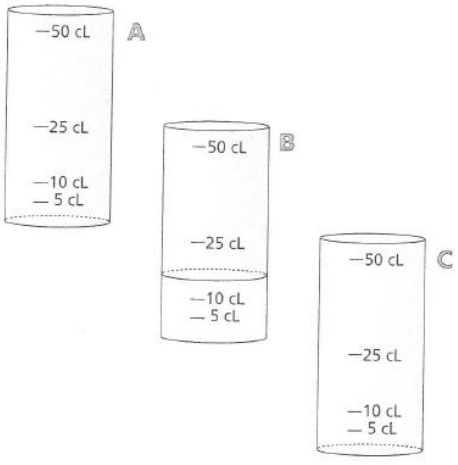
Décalque ce verre doseur et trace un trait pour marquer le niveau du lait dans ce verre.

b. Quelle quantité de lait a-t-on versée dans le verre doseur B ?

9 cL 15 cL 20 cL 35 cL

c. Dans le verre doseur C, on verse le contenu des verres A et B.

Décalque le verre doseur C et trace un trait pour marquer approximativement le niveau du lait dans ce verre.



150 • cent cinquante

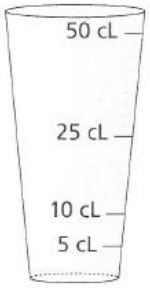
2 Indique comment utiliser ce verre doseur pour mesurer :

a. 75 cL de lait

b. 30 cL de lait

c. 65 cL de lait

d. 1 L 50 cL de lait





3 a. Pour faire cette recette, quelle quantité de jus de citron faut-il verser dans le récipient ?

b. Quelle quantité de jus de pamplemousse faut-il ajouter ?

c. Quelle quantité d'eau faut-il ajouter ?

d. Quelle quantité de boisson chaque personne aura-t-elle ?

e. Anselme veut préparer ce cocktail pour 16 personnes.
Écris les quantités nécessaires de chaque liquide.

Cocktail des îles pour 8 personnes

Dans un récipient, verser :
- 10 cL de sirop de grenadine ;
- le double de jus de citron ;
- 50 cL de jus d'orange ;
- autant de jus de pamplemousse ;

Compléter avec de l'eau pour obtenir 2 L de cocktail.

4 Anne a préparé 3 L de jus de fruit pour une promenade.
Elle a quatre gourdes :
– une contient 50 cL ;
– deux contiennent 75 cL ;
– la dernière contient 1 L.

Pourra-t-elle emporter tout le jus qu'elle a préparé ?



5 Convertis en centilitres les quantités suivantes :

a. 2 L b. 5 L c. 3 L 50 cL d. 1/2 L e. 1 L 75 cL

6 Pour remplir un aquarium de 20 L, Yann utilise un bidon de 3 L.

a. Combien de bidons complets va-t-il pouvoir verser dans l'aquarium ?

b. Quelle quantité d'eau devrait-il ajouter pour que l'aquarium soit plein ?

Remue-méninges

Corentin dispose d'un bidon de 5 L et d'une bouteille de 2 L.

Comment doit-il faire pour avoir exactement 1 L dans un des deux récipients ?

58

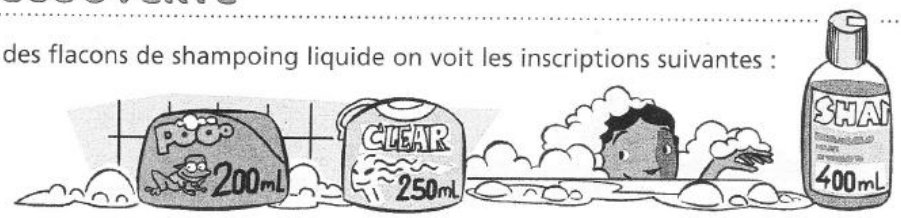
CALCUL MENTAL
Le professeur dit une fraction, les élèves l'écrivent en chiffres.
Le professeur écrit une fraction sur le tableau les élèves la lisent.

Mesure des contenances

Objectif : connaître les unités légales de contenance du système métrique.

DÉCOUVERTE

❶ Sur des flacons de shampoing liquide on voit les inscriptions suivantes :



Quelles informations apportent-elles ?

❷ Voici différentes contenances de flacons :

Flacons de shampoing	A	B	C	D	E	F	G	H
Contenance	50 mL	100 mL	125 mL	150 mL	175 mL	200 mL	250 mL	500 mL

a. Un coiffeur a vidé, dans la journée, les flacons B, D et H.
Quelle quantité de shampoing a-t-il utilisée ?

b. Le lendemain, il a utilisé 1 litre de shampoing en vidant complètement 4 flacons différents.
Retrouve les flacons qui ont été vidés.

EXERCICES

1

Il existe d'autres unités de contenance que le litre (L), le centilitre (cL) et le millilitre (mL) : il s'agit de l'hectolitre (hL), du décalitre (daL) et du décilitre (dL)

hL	daL	L	dL	cL	mL
1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0

Recopie et complète les égalités suivantes :

a. 4 L = ... cL
b. 654 L = 6 ... 54 ....
c. 450 cL = ... L ... cL
d. 223 L = ... hL ... L



2

Trouve, dans chaque cas, la mesure la plus vraisemblable.

a. Une cuillère à soupe :	5 mL	5 cL	5 dL
b. Un verre à moutarde :	12 mL	12 cL	12 L
c. Une bouteille de jus de fruit :	33 cL	33 dL	33 L
d. Un arrosoir :	5 L	50 L	500 L
e. Une casserole :	20 cL	200 cL	2 000 cL
f. Une piscine :	30 L	300 L	30 000 L

59

CALCUL MENTAL
Conversion de mesure d'aires. Ex. : 3 dm², c'est combien de cm² ? C'est combien de m² ?

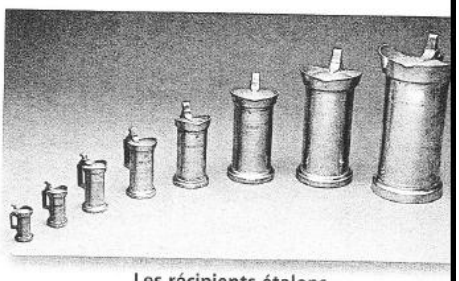
Nombres décimaux et mesure de contenances

Objectifs : connaître les unités légales de contenance du système métrique, faire le lien avec les unités légales de masse

DÉCOUVERTE

Dans les manuels scolaires d'autrefois, on trouvait les unités de capacité suivantes :

- l'hectolitre, le demi-hectolitre ;
- le double-décalitre, le décalitre, le demi-décalitre ;
- le double-litre, le litre, le demi-litre ;
- le double-décilitre, le décilitre, le demi-décilitre ;
- le double-centilitre, le centilitre.



Les récipients étalons du centilitre au double-litre

Voici le tableau de conversion des unités de contenance :

hectolitre	décalitre	litre	décilitre	centilitre	millilitre
hL	daL	L	dL	cL	mL
0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0

Par exemple : 1 L = 100 cL 1 hL = 100 L

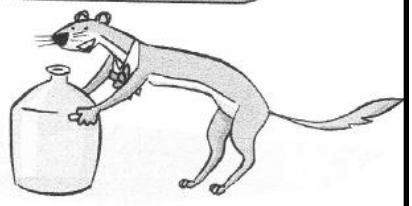
1 a. Combien de litres contient un demi-hectolitre ? un double décalitre ? un double-litre ?
b. Combien de centilitres contient un double-décilitre ? un demi-litre ? 10 millilitres ?

2 La contenance standard des bouteilles de vin est de 75 cL.
Qwang affirme :
« 4 bouteilles, cela fait trois litres. »
A-t-il raison ?

3 Le « souverain » est le nom donné à une bouteille de 26,25 litres.
Trouve avec quels récipients étalons on peut remplir d'eau le souverain en faisant le minimum de transvasements.

4 Un litre d'eau pèse un kilogramme.
Une carafe vide pèse 600 g.
Pleine d'eau, elle pèse 1,35 kg.
Quelle quantité d'eau contient-elle ?

Pour exprimer la quantité contenue dans un récipient, on utilise les expressions contenance, capacité, parfois aussi volume. L'unité de contenance est le litre.



EXERCICES

1 Combien y a-t-il de centilitres dans un quart de litre ? dans trois quarts de litre ?

2 Transforme

a. en litres :	235 cL	450 mL	7 hL	65,4 hL
b. en centilitres :	2 L	0,2 L	3,6 L	235 mL
c. en décilitres :	45 L	3 L	42 cL	750 mL

3 Quelle unité choisirais-tu pour donner une estimation de la contenance

a. d'un pot de yaourt ?
b. d'une bouteille d'eau minérale ?
c. d'une baignoire ?
d. d'une cuillère à café ?
e. d'une piscine ?
f. d'une casserole ?

4 Combien de centilitres manque-t-il à 65 cL pour faire un litre ?

Quelle quantité faut-il retirer à 65 cL pour avoir un demi-litre ?

5 Il faut 22 litres de lait pour fabriquer 1 kg de beurre.

Combien de litres de lait faut-il pour fabriquer une plaque de 250 g de beurre ?

6 2,2 L de lait sont nécessaires pour fabriquer un camembert de 250 g.
Sophie a découpé un camembert en huit portions.

Combien de millilitres de lait a-t-il fallu pour fabriquer une portion ?

7



Théo demande : « Qu'est-ce que c'est un baril de pétrole ?
– C'est une unité de mesure de capacité, lui répond Alice.
– Oui, mais cela fait combien en litres ? demande encore Théo.
– J'ai entendu hier qu'un baril, ça faisait 159 litres. » dit Qwang.

a. En 2005, l'Algérie a produit environ 850 000 barils de pétrole par jour.
Avec le renseignement donné par Qwang, trouve combien de litres de pétrole cela représente.

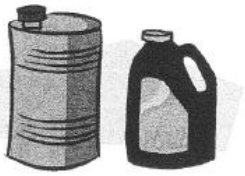
b. On sait que cette quantité de pétrole représentait environ un centième de la production mondiale journalière.

À ton avis, en 2005 la production mondiale journalière de pétrole était de l'ordre de :
8 500 000 barils ? 85 000 000 barils ? 850 000 000 barils ?

Remue-méninges

Thomas est près d'une source. Il dispose d'un bidon de 4 litres et d'un bidon de 3 litres qui ne sont ni transparents, ni gradués.

Comment peut-il obtenir exactement deux litres d'eau dans l'un d'eux en utilisant seulement ces bidons ?



71

CALCUL MENTAL
Jeu de portait sur les nombres entiers ou décimaux.

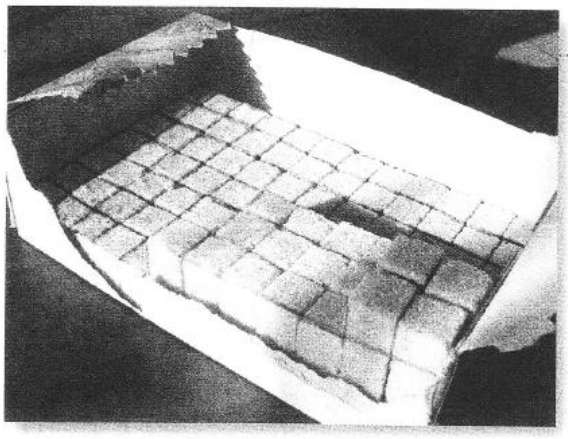
Volume du pavé

Objectifs : comprendre le lien entre les notions de volume et de contenance. Se familiariser avec la formule de calcul du volume dans le cas particulier du parallélépipède rectangle, appelé parfois pavé droit.

ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE DE DÉCOUVERTE : transvasement de sable ou d'eau dans divers contenants dont des pavés droits, remplissage de différentes boîtes avec des cubes unités.

DÉCOUVERTE

Voici une boîte de sucre dont on a déchiré le carton pour voir comment sont disposés les morceaux.



1 a. Combien y a-t-il d'étages ?

b. Combien y a-t-il de morceaux de sucre sur un étage ?

c. Combien y a-t-il de morceaux quand la boîte est pleine ?

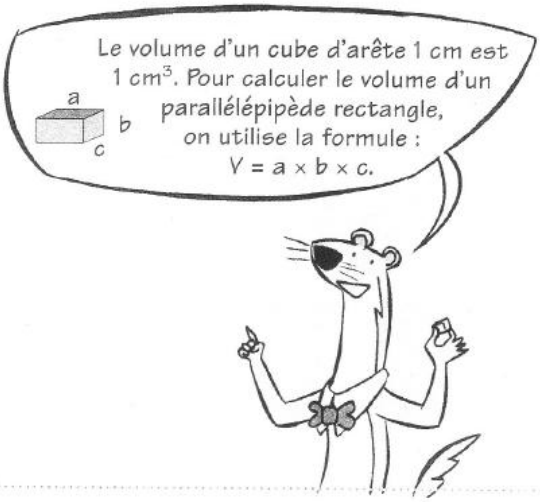
2 Ont-ils raison ?



3 a. Avec la formule donnée par le furet, calcule le volume en cm^3 de la boîte de sucre.

Compare ce nombre avec le nombre de morceaux de sucre que tu as trouvé à la question 1 c.

b. Calcule le volume des boîtes de Théo et d'Alice.



4 a. Combien de morceaux de sucre (cubes d'arête 1 cm) sont nécessaires pour remplir un cube d'arête 1 dm ?

b. Quel est le volume de ce cube ?

c. Complète l'égalité : 1 dm^3 = ... cm^3.

EXERCICES

1 Une malle parallélépipédique a pour dimensions 90 cm, 60 cm et 50 cm.
Quel est son volume ?

2 Le volume d'une boîte parallélépipédique est 1 260 cm^3 ; le fond est un rectangle de 12 cm sur 15 cm.
Quelle est la hauteur de la boîte ?

3 a. Combien de cubes d'arête 1 cm sont nécessaires pour remplir un cube d'arête 1 m ?
b. Le volume d'un cube d'arête 1 m est 1 m^3. Complète l'égalité : 1 m^3 = ... cm^3.

4 Complète. Tu peux t'aider du tableau de conversion.
a. 1 dm^3 = ... cm^3 1 cm^3 = ... dm^3
b. 1 m^3 = ... dm^3 1 dm^3 = ... m^3
c. 1 cm^3 = ... mm^3 1 mm^3 = ... cm^3

m^3	dm^3	cm^3	mm^3
000	001	000	000
000	000	001	000

5 Quel est le volume d'un récipient qui contient $\frac{1}{2}$ L ?



6 a. Combien de litres sont contenus dans un récipient qui a un volume de 1 m^3 ?
b. Complète le tableau.

Volume	1 m^3	1 dm^3	1 cm^3	1 mm^3
Contenance	... L	... L	... cL	... mL

7 Quelle est la contenance en litres d'une boîte parallélépipédique de dimensions 30 cm, 5 cm, 10 cm ?

8 Un flacon contient 25 cL de liquide.
Quel est son volume en cm^3 ?

9 Une piscine municipale mesure 25 mètres de long, 10 de large et a une profondeur constante de 1,5 mètres. Un m^3 d'eau pèse une tonne (1 000 kg).
Quel est la masse d'eau totale, en tonnes ?

10 Un semi-remorque pèse 3,75 tonnes.
À combien de semi-remorques la masse d'eau de la piscine de l'exercice 9 correspond-elle ?

Remue-méninges

On a placé deux aquariums cubiques dans un jardin. L'arête du premier mesure 30 cm, l'arête du second mesure 20 cm.
Après une forte averse, la hauteur d'eau dans le premier aquarium est 4 cm.
Quelle est la hauteur d'eau dans le second ?

GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE AU CYCLE 3 : INSTRUMENTATION ET INGÉNIERIE DIDACTIQUE.

Isabelle PAYET
Doctorante, Formatrice en mathématiques, ESPE de la Réunion
Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM)
isabelle.payet@univ-reunion.fr

Résumé
La géométrie dynamique est un environnement encore peu pratiqué à l'école et dont le potentiel reste à explorer à ce niveau de scolarité. Dans le cadre de cette recherche, nous travaillons avec le logiciel libre de géométrie dynamique CaRMetal. Ce dernier présente certaines spécificités comme la construction anticipée de tous les objets (désormais, GeoGebra le propose depuis la version 4), ainsi qu'un outil qui lui est spécifique : le Monkey, qui « secoue » les figures construites permettant d'être confronté immédiatement à la résistance des figures par rapport aux propriétés. Des recherches antérieures ont montré que la validation des propriétés par le mouvement véhicule de nouvelles représentations des objets géométriques étudiés et de leurs propriétés. Plus généralement, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peut induire un travail plus conceptuel avec des situations complexes permettant ainsi d'entrer dans une démarche d'investigation pertinente en termes de propriétés des objets. Cette recherche s'inscrit donc dans cette continuité et la prolonge sur tout le cycle 3 (du CE2 au CM2) en construisant des ingénieries utilisant la réactivité immédiate des outils de CaRMetal.

Cet article se propose de rendre compte de travaux menés dans des classes de cycle 3 de l'école primaire depuis quelques années, sur l'introduction de la géométrie dynamique (GD) et notamment sur l'instrumentation de certains outils spécifiques au logiciel utilisé. Des recherches antérieures nous ont appris que les nouvelles technologies peuvent créer de nouveaux problèmes ou agir sur l'enseignement de la géométrie. Dans un premier temps, il s'agira d'étudier l'instrumentation dans l'environnement de la géométrie dynamique et de la comparer avec celle déployée en environnement papier-crayon. Les genèses instrumentales déployées dans chacun de ces environnements participent à la construction de représentations différentes des objets géométriques étudiés et de leurs propriétés. Cette recherche porte ensuite sur une ingénierie didactique de la GD en cycle 3, et vise à son utilisation efficace et généralisée en proposant des exemples de séquences.

Nous dégagerons ici quelques premières réflexions sur l'usage de la géométrie dynamique à ce moment de la scolarité en étudiant les effets de l'instrumentation sur les représentations des élèves en géométrie.

Après une première partie qui présentera le logiciel utilisé dans ces classes (CaRMetal) la suite de l'article fera état des premières ingénieries didactiques mises en place, sous-tendues par les différents cadres théoriques. Il se terminera avec des situations illustrant quelques-uns des premiers résultats. En conclusion, il abordera les perspectives au regard de ce qui a déjà été accompli.

I - CHOIX DU LOGICIEL

Les interfaces de logiciels de géométrie dynamique progressent régulièrement dans plusieurs domaines en prenant en compte les analyses didactiques relatives à la genèse instrumentale. C'est le cas en particulier du logiciel CaRMetal que nous avons choisi pour cette recherche, parce qu'il permet la construction anticipée des objets, l'a-modalité de nombreux outils et un engagement direct plus fin que ce qui peut exister ailleurs. Cette partie présente quelques-unes de ses spécificités qui ont conduit à ce choix.

1 La construction anticipée des objets

Les pratiques informatiques sont intimement liées à la pertinence des interfaces (Artigue, 2011). Nous pouvons faire l'hypothèse que la visualisation anticipée des constructions participe chez les élèves, à la construction d'images mentales des concepts engagés beaucoup plus riches. Au début de ce travail, CaRMetal était le seul logiciel à le proposer. Depuis, GeoGebra (version 4) le propose également de manière moins systématique mais suffisante pour l'école primaire.

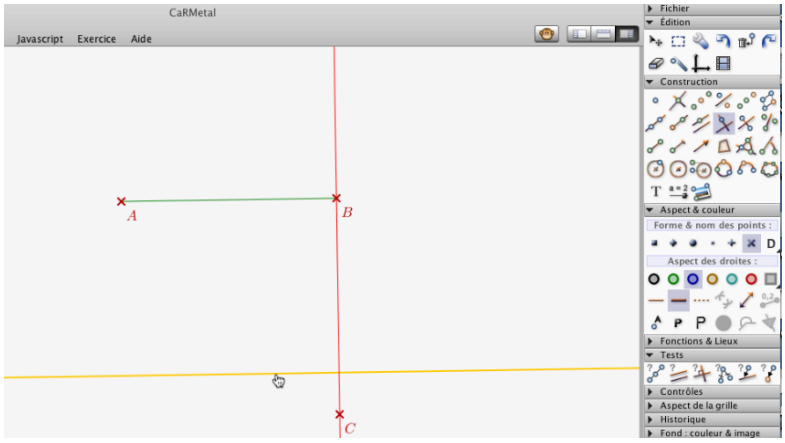


Figure 1 : capture d'écran, construction d'une perpendiculaire.

Par exemple, dans la figure 1, l'élève souhaite créer la perpendiculaire à [BC] passant par le point C : il choisit l'outil perpendiculaire, sélectionne la droite (BC) ; alors la droite perpendiculaire apparaît en jaune fluo sur l'écran, portée par la souris (icône en forme de main). L'élève peut constater de visu différentes propriétés comme le parallélisme de cette droite au segment [AB] mais encore le parallélisme de toutes les droites qui sont perpendiculaires à (BC).

Même si ces propriétés ne sont pas verbalisées, elles participent à la création d'images mentales cohérentes autour de l'orthogonalité. L'engagement direct (le rapport au savoir de l'élève) est plus fin que dans les logiciels antérieurs puisque l'objet est construit avant le clic sur le deuxième item et ainsi l'élève dépose, dans notre exemple, la perpendiculaire où il le veut. Même si ce serait complexe à évaluer, nous pouvons penser qu'un rapport au savoir est modifié.

2 La validation

En environnement papier-crayon on travaille sur des dessins géométriques ; les validations se font par manipulation de gabarits, par pliage ou par usage des instruments divers. ERMEL (ERMEL, 2006) utilise cela pour mettre en œuvre des débuts de raisonnement dans le cadre d'une géométrie des propriétés des objets.

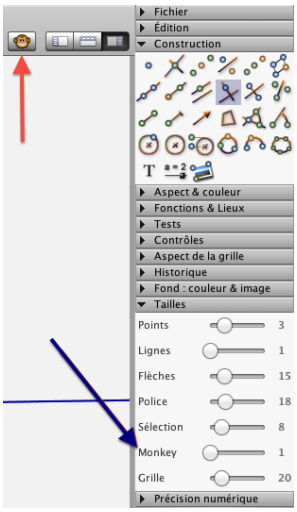


Figure 2 : le Monkey et la palette d'outils de CaRMetal.

En géométrie dynamique, on ne travaille plus sur des dessins géométriques mais sur des figures (Laborde, 1994). La validation est faite par la résistance de la figure issue d'un programme de construction, au déplacement des points initiaux. Les analyses antérieures montrent que les élèves n'utilisent pas spontanément la manipulation des points initiaux pour valider la résistance d'une figure au déplacement. Tenant compte de ce résultat de recherche en didactique, CaRMetal dispose d'un outil de validation spécifique : le Monkey (indiqué par la flèche rouge dans la figure 2), qui va faire bouger aléatoirement les objets construits et proposer ainsi des instanciations différentes de la construction réalisée. Lors de notre expérimentation, nous avons institutionnalisé l'outil Monkey afin que les élèves puissent l'utiliser pour valider leur construction. L'appropriation a été immédiate et les élèves sont confrontés à leurs productions (les gestes faits) et à leurs représentations géométriques de ce qu'ils pensent avoir fait.

Au début de notre recherche, dans l'usage du Monkey, la vitesse du mouvement des objets construits était beaucoup trop rapide pour être interprétable par des élèves de cycle 3. En effet, s'il y a trop d'objets en mouvement, les élèves ne peuvent plus repérer des invariants sur la figure qu'ils ont construite et ainsi analyser leurs erreurs éventuelles. Comme les figures construites sont élémentaires à l'école primaire, nous avons demandé au concepteur du logiciel (Hakenholz, 2007) d'avoir la possibilité de réduire sa vitesse : il a donc ajouté un paramètre (indiqué par la flèche mauve), ce qui permet ainsi d'avoir des réglages adaptés au niveau d'enseignement. Ainsi, progressivement les logiciels de géométrie dynamique s'adaptent aux analyses ou besoins didactiques des situations rencontrées.

3 La palette restreinte

Ce qui nous a guidée aussi dans notre choix, c'est l'accès rapide à une palette restreinte qui permet d'adapter chacune des séances en choisissant les outils dont les élèves peuvent avoir besoin. Comme en environnement papier-crayon, où l'enseignant choisit les outils qu'il désire mettre à disposition de ses élèves, il est aussi possible dans l'environnement de CaRMetal de choisir de manière rapide et détaillée les outils avec lesquels les élèves vont pouvoir travailler.

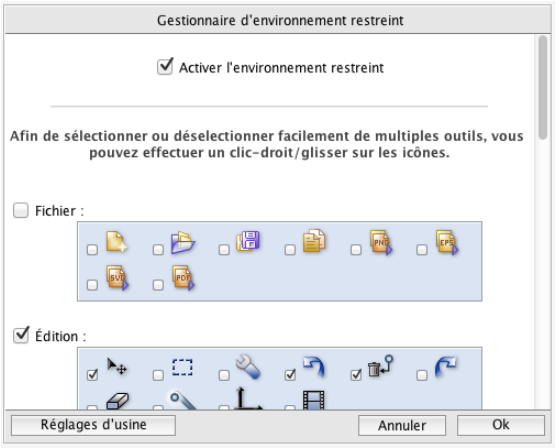


Figure 3 : fenêtre d'accès à la palette restreinte.

La suite de l'article a pour objet d'exposer successivement nos questions de recherche ainsi que nos hypothèses de travail puis les cadres théoriques sous-tendant cette recherche.

II - NOS QUESTIONS DE RECHERCHE ET CHOIX THÉORIQUES

Les recherches précédentes (T. Assude, 2007 et C. Laborde, 1994) ont montré que les changements induits par l'intégration des TICE sont divers : savoirs anciens revisités, résolution de nouveaux problèmes, travail de nouvelles techniques…

Suite à ces différents constats, nous avons commencé à dégager des questions autour de cette intégration et à formuler des hypothèses de travail.

1 Questions de recherche et hypothèses

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique modifie profondément les situations didactiques (rapport au milieu, non transposition du savoir papier–crayon) et donc les situations d'apprentissage. Cela nous a amenée à poser les questions suivantes :

Q1 : Quelles ingénieries didactiques proposer aux élèves pour accompagner la construction des savoirs géométriques au cycle 3 ?

Q2 : Comment assurer une instrumentation efficace et adéquate pour que CaRMetal devienne un outil utilisable notamment en résolution de problèmes ?

Q3 : Dans quelle mesure la pratique de la géométrie dynamique influence–t-elle les représentations des élèves sur les objets et les concepts géométriques ?

Suite à ce questionnement, nous avons formulé les hypothèses suivantes :

H1 : L'anticipation des constructions et la validation par le mouvement participent à la conceptualisation des propriétés des objets.

H2 : L'appropriation du déplacement permet aux élèves de distinguer un dessin d'une figure.

H3 : Une bonne instrumentation de la géométrie dynamique et de l'interface du logiciel rend cet outil utilisable par les élèves de cycle 3.

Les hypothèses H1 et H2 font référence principalement à la question Q3 et l'hypothèse H3 à la question Q2. Même si elle est plus globale et ne pourra être abordée qu'en synthèse de notre travail, la question Q1 est néanmoins toujours présente dans les activités choisies.

Pour tenter de répondre à nos questions de recherche et vérifier nos hypothèses, nous sollicitons plusieurs approches théoriques afin d'étudier les différents aspects de notre questionnement.

2 Les cadres théoriques

La théorie principale sur laquelle nous nous appuyons est celle des paradigmes et espaces de travail géométriques développée par A. Kuzniak et C. Houdement (2006).

Pour la question de l'instrumentation, nous utilisons les travaux de chercheurs utilisant une approche ergonomique avec la théorie de l'instrumentation de Rabardel ; cette dernière nous permet d'étudier la dimension instrumentale des outils utilisés et d'avoir ainsi un regard plus attentif à l'utilisation de l'outil informatique et de son impact dans la construction des savoirs géométriques.

En ce qui concerne la question de l'ingénierie, la théorie des situations didactiques donne les outils nécessaires à l'analyse et l'étude du système en jeu ; l'accent est mis notamment sur la notion de milieu et de validation.

Enfin, la question du passage du papier/crayon à l'écran est éclairée par la notion de milieu couplée avec celle des paradigmes.

Revenons à présent sur ces différents cadres théoriques.

2.1 Les paradigmes géométriques et les espaces de travail géométriques (ETG).

Alain Kuzniak présente la géométrie élémentaire comme étant répartie entre trois paradigmes géométriques différents. Il établit comme le montre ce tableau (figure 4) un parallèle entre ces paradigmes et les niveaux de Van Hiele. Pour notre recherche, nous nous intéressons uniquement aux deux premiers paradigmes.

Les objets de la Géométrie I sont des objets matériels, traces graphiques ou virtuelles. L'expérience usuelle dans ce paradigme est le dessin instrumenté. La GI est donc la géométrie de l'espace perceptif avec un vocabulaire encore non mathématique. Dans ce paradigme, *les modes d'accès aux connaissances font appel à l'intuition, comme la reconnaissance perceptive de certains dessins, à l'expérience, notamment celle liée aux instruments, mais aussi au raisonnement*[1].

	GEOMETRIE NATURELLE G I	**GEOMETRIE AXIOMATIQUE NATURELLE G II**	**GEOMETRIE AXIOMATIQUE FORMALISTE G III**
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Liée à un schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur un système complet d'axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Support du raisonnement et « figural concept »	Schéma d'un objet théorique, outil heuristique
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriété et démonstration	Démonstration et liens entre les objets.

Figure 4 : Extrait de « Sur la gestion des différents paradigmes géométriques », 2001, Houdement C. et Kuzniak A., Actes du XXVIIIème Colloque Inter-IREM.

[1] HOUDEMENT C. (2007), À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, Repères IREM, n°67, p.73.

La Géométrie II est la géométrie des propriétés des objets[2], elle est partiellement axiomatisée et fait encore souvent référence au monde perceptif.

Pour notre recherche nous allons tenter de faire évoluer ce tableau en tenant compte des autres approches dont celle de Rabardel.

Associée aux paradigmes géométriques, Alain Kuzniak a développé la notion d'espaces de travail géométrique (ETG) ; cette notion nous fournit une base pour examiner les caractéristiques spécifiques à l'activité géométrique de l'élève dans notre recherche. Dans cet article, nous n'abordons pas ce point encore en cours de développement.

2.2 La théorie de l'instrumentation de Rabardel.

L'approche instrumentale est reconnue comme un cadre théorique riche pour les recherches dans le domaine de l'intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques.

La notion de genèse instrumentale renvoie au processus progressif au cours duquel un instrument se construit pour un sujet donné, en faisant émerger ses schèmes d'utilisation. Derrière l'intégration d'un logiciel dans l'activité mathématique des élèves, on émet l'hypothèse que le travail en environnement informatique présente un intérêt par rapport à l'environnement papier-crayon, mais aussi que les genèses instrumentales des élèves sont bénéfiques à la conceptualisation des notions mathématiques (meilleure illustration des concepts, le travail est plus centré sur l'abstrait car le logiciel prend en charge les tracés).

De ce fait certaines questions apparaissent en relation avec notre question Q2 :

Q2a : Comment peut-on organiser le travail ?

Q2b : Quelles activités concevoir et mettre en place pour accompagner les genèses instrumentales des élèves ?

Q2c : et les rendre effectivement bénéfiques à l'apprentissage des mathématiques ?

De manière générale, cette approche permet d'examiner la relation entre l'usage des outils et la conceptualisation (c'est à dire l'imbrication et les interactions entre les connaissances de l'artefact et les connaissances mathématiques) mais aussi d'analyser les genèses instrumentales aussi bien que d'en étudier la gestion didactique.

Nous avons délibérément fait le choix de ne nous intéresser qu'aux genèses instrumentales des élèves dans l'environnement CaRMetal (en laissant de côté le parcours de la genèse instrumentale de l'enseignant) : l'accent est mis sur les processus d'instrumentation chez les élèves de cycle 3.

2.3 La théorie des situations didactiques.

La théorie des situations didactiques nous permet de décrire la genèse d'un savoir. Nous ciblons plus exactement la validation comme élément clé de l'apprentissage. Ici, l'élève a la possibilité de décider de la validité de ses propres actions et l'élément permettant cette validation est le milieu. Si ce dernier est soigneusement choisi et préparé, il permet le travail en autonomie de l'élève qui va pouvoir mettre en œuvre des stratégies, les tester et les faire évoluer.

Dans la partie suivante, nous allons exposer le cadre de l'expérimentation ainsi que la méthodologie d'analyse.

III - EXPÉRIMENTATION ET MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE

Cette recherche est un approfondissement d'un travail entamé il y a maintenant plus de trois ans. Les prémices de celle-ci ont débuté dans une classe de CM1 en 2009/2010 (avec des interventions ponctuelles) dans le cadre d'un atelier IREM. Puis cela s'est poursuivi l'année suivante dans le cadre d'un mémoire de Master avec l'élaboration et l'expérimentation d'un premier dispositif

[2] Des travaux proches de ceux menés par A. Kuzniak, ont été développés par l'équipe ERMEL sous la direction de R. Charnay dans l'ouvrage Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3, 2006.

mettant en œuvre l'utilisation de la géométrie dynamique dans une classe de CM2. Suite à l'analyse de ces premières expérimentations, qui nous a permis de mettre en évidence la nécessité de construire une ingénierie didactique pertinente de la GD visant à son utilisation efficace et généralisée, nous avons voulu poursuivre et approfondir ce travail, dans le cadre d'un projet de recherche doctoral.

1 L'expérimentation

Dans le protocole actuel, nous avons choisi de suivre une même classe du CE2 au CM2.

Lors des toutes premières expérimentations (notamment dans le cadre de l'expérimentation pour le mémoire de recherche de Master), nous ne pouvions que travailler en classe entière suite à des contraintes organisationnelles ne permettant pas à l'enseignant titulaire de la classe de séparer sa classe en deux groupes.

Pour ce projet de recherche doctoral, nous avons retenu de ne travailler qu'en demi-groupe classe, les élèves étant par binôme. Nous avons la responsabilité du choix de la séance et l'enseignant titulaire de la classe a, en partie, la responsabilité de sa mise en œuvre ; un travail spécifique de préparation et de mise en œuvre avec l'enseignant est nécessaire pour équilibrer les activités collectives (notamment sur les mises en commun, les institutionnalisations) et individuelles.

Le corpus des données est constitué des fiches de préparation des diverses séances, des fichiers élèves de géométrie dynamique, des productions papiers-crayons (quand il y en a), et enfin des observations filmées et enregistrées. Les analyses a priori et a posteriori se font avec l'enseignant.

Pour la suite de notre recherche (cette année, en classe de CM2), deux à trois séances de géométrie dynamique sont organisées par période scolaire (alors qu'auparavant les séances étaient regroupées sur uniquement deux périodes consécutives) et de manière à ce que la géométrie dynamique fasse partie intégrante des séquences de géométrie, nos choix de situations s'adaptent à la progression de l'enseignant. Nous suivons aussi toutes les séances de géométrie en environnement papier-crayon.

Lors des premières expérimentations et suite aux travaux de M. Artigue et T. Assude qui montrent que genèse instrumentale et construction de connaissances mathématiques ne peuvent pas être séparées, mais qu'au contraire, ces deux processus sont imbriqués, nous avions mis en évidence les questions suivantes :

Q2c : Quelles sont les connaissances instrumentales nécessaires à la manipulation du logiciel afin que celles-ci ne soient pas un obstacle au travail de l'élève ?

Q2d : Ces connaissances devaient-elles s'imbriquer dans la séance ou au contraire devait-on alterner les séances ?

Ce qui nous a amené à construire deux grands types de séances durant lesquelles une part d'instrumentation du logiciel est présente :

- Les séances de construction ou de reproduction de figures, qui obligent les élèves à faire la distinction entre tracés et procédés de tracé.
- Les séances d'expérimentation et d'argumentation. Les logiciels de géométrie dynamique étant propices à l'expérimentation et libérant les élèves de la tâche des tracés, ces derniers peuvent se concentrer plus sur l'expérimentation.

Les séquences réalisées en CE2 et en CM1 sont en annexe.

2 Méthodologie d'analyse

Toutes les séances sont filmées par trois caméras. Les enregistrements audios et vidéos des différentes activités constituent la première partie du corpus. À ceci s'ajoutent les entretiens avant et après les séances avec l'enseignant titulaire de la classe : c'est la seconde partie du corpus de données.

Pour chaque séance, les analyses a priori permettent de préciser les enjeux de la séance en anticipant les possibles comportements des élèves aussi bien d'un point de vue mathématique que stratégique (usage du logiciel). Au regard de ces analyses a priori, nous dégageons les observables suivants : les rétroactions du milieu, les validations, les gestes des élèves, l'utilisation du vocabulaire géométrique et les connaissances mises en jeu.

L'analyse a posteriori, grâce aux vidéos réalisées, nous permet de confronter nos anticipations aux observations des actions des élèves et de leur réactivité face au logiciel : analyse des gestes faits d'un point de vue de la pertinence fonctionnelle (instrumentation) et du sens mathématique éventuellement associé à ces gestes (théorèmes en actes ou approfondissement de la conceptualisation) mais aussi les savoirs utilisés et leur mise en œuvre par ces élèves (tout cela n'étant pas toujours observable en direct). La transcription du corpus audio permet d'analyser les interactions langagières entre les élèves mais aussi entre élèves et enseignant et donc d'analyser la place et le rôle du langage dans la situation d'apprentissage (nous nous centrons sur la qualité du vocabulaire géométrique employé que ce soit pour décrire une figure géométrique ou les procédés de tracés).

La partie suivante se propose d'exposer certains résultats au regard des questions de recherche posées précédemment.

IV - LES PREMIERS RÉSULTATS

Nous proposons d'analyser en plus des premiers résultats issus de la classe de CE2[3] pour notre recherche doctorale, quelques résultats issus des toutes premières expérimentations dans la classe de CM2[4] lors de notre recherche en Master.

1 En référence à la question Q2

Pour tenter de répondre à la question Q2, nous avons formulé l'hypothèse H3. Les résultats présentés dans cette partie, font donc référence à l'instrumentation du logiciel et aux différents schèmes d'action mis en œuvre par les élèves dans l'environnement papier-crayon et celui de la géométrie dynamique.

1.1 Sur l'instrumentation

La séance 6 proposée en CM2 nous sert de bilan sur l'instrumentation du logiciel. En quarante-cinq minutes les élèves ont à réaliser deux constructions différentes du pentagone régulier, l'une réinvestissant plus particulièrement l'utilisation des cercles (figure 5), l'autre des segments et droites (figure 6).

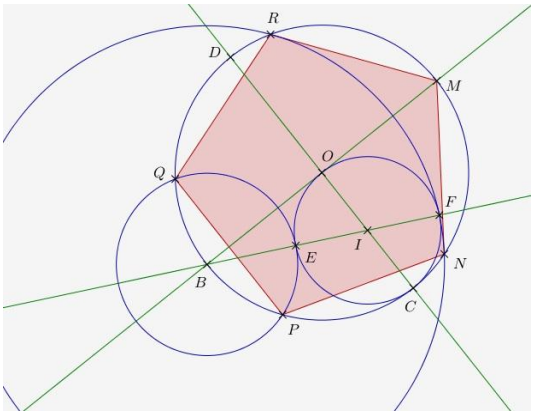


Figure 5 : pentagone régulier construit à partir d'un programme de construction réinvestissant plus particulièrement l'outil cercle.

[3] A ce jour, les analyses réalisées portent uniquement sur la classe de CE2 et sur les classes antérieures à cette recherche doctorale.

[4] Séquence CM2 en annexe.

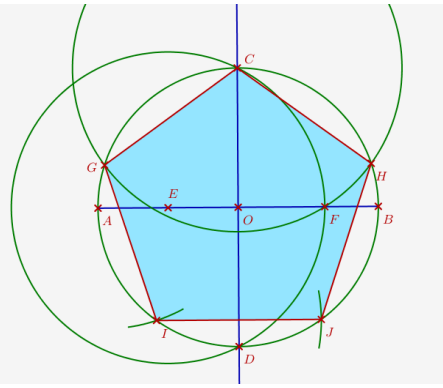


Figure 6 : pentagone régulier construit à partir d'un programme de construction réinvestissant plus particulièrement les outils droites et segments.

Les élèves ont à leur disposition les deux programmes de construction. Nous constatons que plusieurs binômes réalisent les deux figures plus rapidement que ce qui était prévu et ce bien que les consignes sur la construction par les cercles soient relativement complexes à interpréter et à mettre en œuvre.

De manière générale, nous constatons que les élèves manipulent le logiciel avec aisance et que l'instrumentation proposée dans les séances précédentes a été efficace. La séance se termine par la réalisation vidéo-projetée de la construction du pentagone par une élève sous la dictée des consignes d'une autre élève.

L'élève qui manipule le logiciel, utilise le nommage anticipé des points et semble donc être experte dans la manipulation de cet outil. Cependant l'analyse de la vidéo montre qu'en définitive elle se refuse à l'utilisation d'autres outils pour le nommage des points et que tout au long de la construction, elle n'utilise que cette procédure. En fait, elle ne sait pas faire autrement c'est à dire renommer un point en double-cliquant sur celui-ci et en changeant son nom dans l'inspecteur d'objets.

Ce que nous pensions être une expertise de l'élève n'en ait pas une ; en effet, elle ne pratique qu'un schème d'action alors que l'expert possède plusieurs schèmes d'action pour une même tâche.

Nous constatons pour chaque outil, des niveaux d'instrumentation différents chez les élèves : l'expertise dans l'utilisation de certains outils cachant le défaut d'instrumentation d'autres.

1.2 Induction des schèmes d'action par le milieu

Nous sommes en CM1, l'activité proposée[5] en séance 4 consiste à reproduire une configuration de droites sécantes (figure 8) à partir de quelques points donnés (figure 7) ; il s'agit de travailler la notion d'incidence par l'intersection de droites et/ou de segments.

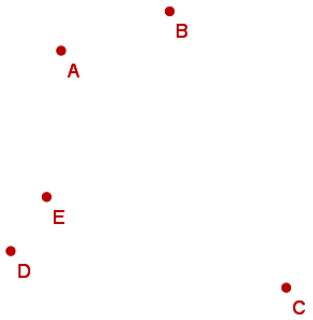


Figure 7 : points de départ de la reproduction de la configuration de droites sécantes.

[5] Transcription d'une activité de ERMEL (2006), Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3, Hatier.

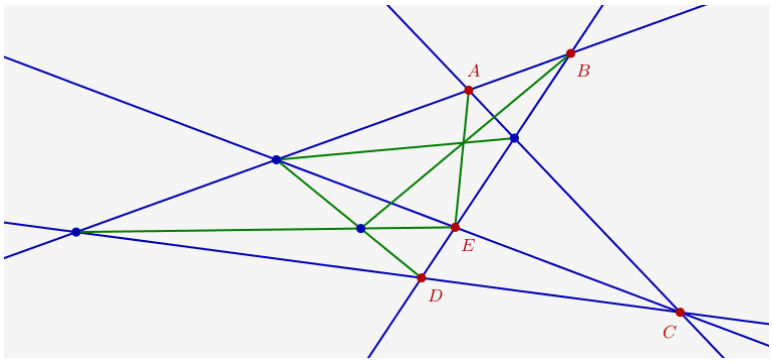


Figure 8 : configuration de droites sécantes à reproduire.

En environnement papier-crayon, les élèves disposent de leur crayon et d'une règle ; la règle se posant en premier, les élèves tracent les droites attendues et arrivent à produire la figure. En environnement GD, l'item droite étant un item de tracé parmi d'autres (même avec la palette restreinte), le choix préalable de cet outil n'est pas aussi immédiat que dans l'environnement papier-crayon où la règle est présente sur la feuille. Choisir l'item droite relève d'une conceptualisation géométrique plus aboutie que la simple saisie d'une règle ; de fait on observe que les élèves cliquent à l'écran et donc créent des points perceptivement aux intersections possibles sans référence à l'intersection des droites.

Cette situation illustre une critique historique sur les logiciels de GD parfois décriés comme des logiciels de la "géométrie du point".

On constate que la règle est un outil primordiale de l'environnement papier-crayon et le crayon qu'un scripteur alors que sans instrumentation particulière, le pointeur, item par défaut dans le logiciel, est l'outil de construction de base dans l'environnement GD.

Comme on prend naturellement la règle avec la main, on prend spontanément un point avec la souris.

2 En référence à la question Q3

Pour répondre à la question Q3, plusieurs hypothèses H2 et H1 sont sollicitées. Dans cette partie, nous mettons l'accent sur l'instrumentalisation (au travers de deux situations), l'argumentation et l'évolution des représentations géométriques des élèves.

2.1 Sur l'instrumentalisation

Exemple d'instrumentalisation spontanée de l'anticipation des constructions

Avec le logiciel, les élèves peuvent faire des expériences en mettant en œuvre les outils dont ils disposent. Grâce au fil à la patte[6], les élèves peuvent s'approprier de manière avantageuse ces outils.

Lors de la séance 7 en CM2, les élèves doivent reproduire une figure mettant en jeu la construction du carré.

[6] Termes utilisés à l'oral avec les élèves pour exprimer *"cette capacité du logiciel à anticiper la construction avant le dernier clic de souris."* La démarche d'investigation et les TICE : une opportunité pour l'inventivité ? 2008, Revue Sesamath, n°9.

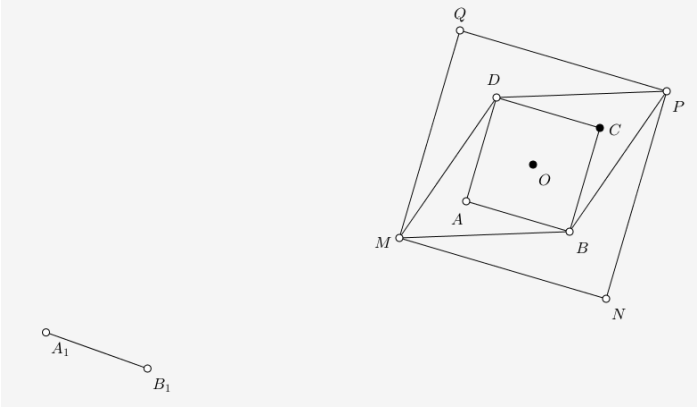


Figure 9 : figure à reproduire, issue de CapMaths CM2.

Nous sommes vers la fin de la reproduction (le carré $A_1B_1C_1D_1$ de centre O_1 étant fait) ; il s'agit de construire les points N_1, P_1, Q_1 et M_1 c'est-à-dire les points du grand carré. Les élèves savent qu'il faut construire N_1 tel que B_1 soit le milieu de $[O_1N_1]$, car B est le milieu de [ON]. Cela suppose la construction du cercle de centre B_1 et de rayon B_1O_1.

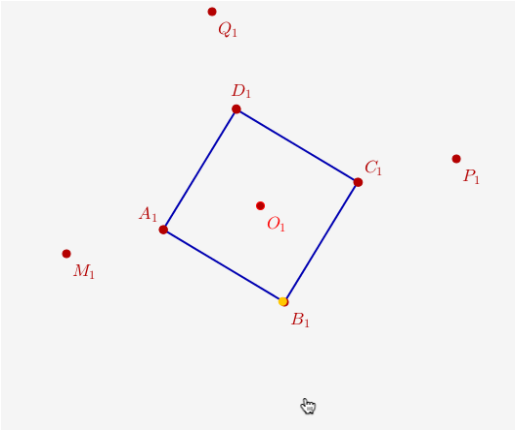


Figure 10 : capture d'écran, utilisation en cours de l'outil milieu ; ici l'élève veut placer de visu le milieu (en jaune fluo) sur le point B_1.

Cependant, l'engagement direct de l'outil milieu qui permet de voir le milieu pendant sa construction donne une idée aux élèves : celle de retrouver les symétriques[7] à partir des milieux. En cliquant sur l'outil milieu puis sur le point O_1, les élèves voient le milieu (en jaune fluo) se déplacer et essaie de le placer visuellement sur le point B_1, par exemple, pour construire le point N_1 (figure 10). Et ils font de même pour les autres points.

Cependant ils s'aperçoivent après avoir activé le Monkey, que les points M_1, N_1, P_1 et Q_1 formant le grand carré, se déplacent, ne conservant pas la forme attendue.

Il s'agit d'une instrumentalisation "inversée" de l'outil milieu, possible de par l'anticipation de sa construction. Cela signifie que l'élève sans connaître la notion, utilise le milieu de manière pertinente pour chercher un symétrique. Même si la démarche ne peut aboutir, elle permet de voir où les points N_1, P_1, Q_1 et M_1 doivent être construits sur la figure.

Les élèves ont temporairement fait un dessin pour positionner les points puis ont vérifié avec le Monkey que ce n'était pas une figure. Ils sont ensuite passés par des procédés plus adéquats (création du point N_1 par l'intersection de la droite (D_1O_1) avec le cercle de centre B_1 et de rayon O_1B_1).

[7] Dans le vocabulaire de l'enseignant.

L'usage de la GD permet aux élèves de gérer différents essais de manière assez rapide par rapport à l'environnement papier-crayon. Ainsi si cela ne fonctionne pas, les élèves peuvent réajuster leurs stratégies pour en tester de nouvelles.

Exemple d'a-modalité instrumentalisée spontanément par les élèves

Dès les premières années d'expérimentation, nous avons rencontré le problème de l'instrumentalisation de l'a-modalité de la couleur de fond et de l'aspect et couleur des objets ; nous avons résolu cette question en supprimant les onglets " Fond : couleur & image " et " Aspect & couleur " dans la palette d'outils grâce au gestionnaire d'environnement restreint. Malgré cela, la créativité et la curiosité des élèves qui sont probablement des invariants, se sont manifestées dans d'autres classes. Ces derniers ont trouvé une autre façon de modifier les couleurs des objets en temps réel grâce à l'a-modalité des outils de CaRMetal, en la retrouvant dans l'inspecteur d'objets.

Lors de la séance 4 visant une instrumentation des outils associés au cercle, en CM2, un groupe d'élèves, réalise une figure qu'ils devaient animer après avoir activé la trace d'un des objets construits (le cercle C_2 dans la figure 11) afin d'avoir une néphroïde. Ce groupe d'élèves a profité de l'a-modalité de l'animation pour faire varier les couleurs du cercle C_2 donc de la néphroïde.

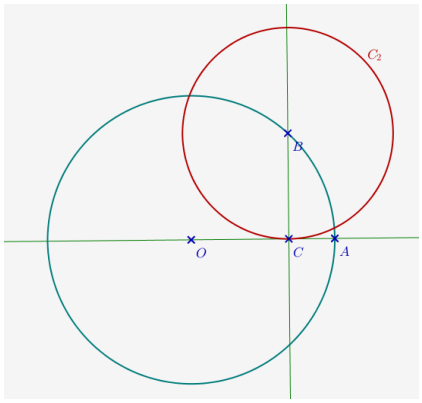


Figure 11 : figure à construire, les élèves doivent ensuite animer le point B sur le cercle vert.

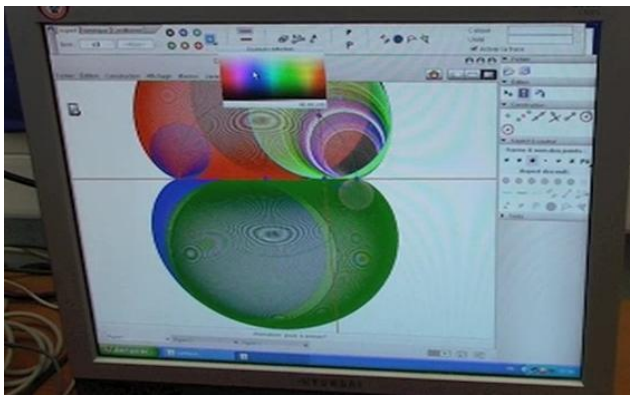


Figure 12 : tracé d'une néphroïde avec changement de couleur.

Nous voyons sur ces deux exemples que l'anticipation des constructions et l'a-modalité de toutes les fonctionnalités sont très vite utilisées comme des outils d'exploration mathématique ou de créativité artistique. Rien que pour cela, il est dommage que ce logiciel soit si peu connu.

2.2 L'argumentation

Nous sommes en CE2 en séance 5, les élèves doivent construire la figure suivante (figure 13) puis tester l'alignement de quatre points. Dans CaRMetal, il existe un test pour savoir si des points sont alignés ou pas, cependant il ne permet de tester que l'alignement de trois points.

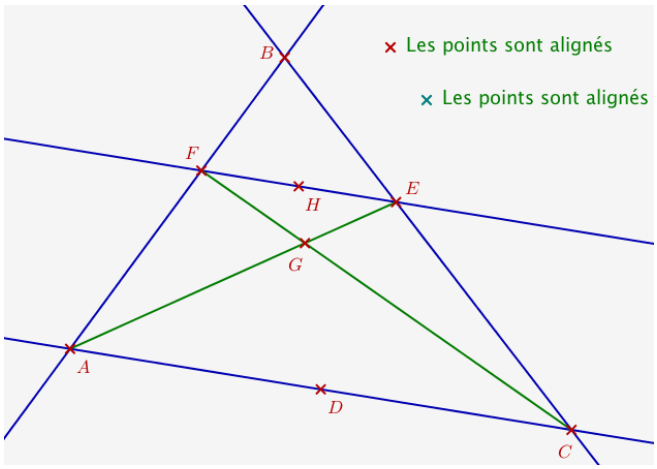


Figure 13 : figure à construire.

Les élèves testent par exemple, l'alignement de B, H et G puis de H, G et D ; ils doivent ensuite en déduire l'alignement des quatre points.

Lors de cette séance un élève s'exclame tout à coup « J'ai compris. » ; après avoir expliqué à l'enseignant, ce dernier lui dit d'aller partager son raisonnement avec l'ensemble de la classe. Voici ce qu'il dit (ses dires sont accompagnés de gestes indiquant les objets impliqués) :

Élève : « Si ces trois-là sont alignés (en montrant les points B, H et G) et ces trois-là sont alignés (en montrant les points H, G et D), eh bien, ils sont tous alignés ! »

Réponse de l'enseignant : « Effectivement oui… »

Élève : « Parce que ces deux-là sont alignés (l'élève indique les points B et G) et celui-là (en montrant le point H) fait parti de celui-là (en montrant le segment [BG]) et de celui-là (en montrant le segment [HD])… »

Plus clairement, si B, H et D sont alignés c'est que H appartient à la droite (BD) ; si B, G et D sont alignés c'est que G appartient à la droite (BD) donc on peut dire que H et G sont sur la même droite et que les points B, H, G et D sont alignés.

Nous sommes en présence de ce que Balacheff appelle une expérience cruciale. Nous avons peut-être ici, un début de preuve intellectuelle.

2.3 Sur les représentations des élèves

Bien que le triangle soit une figure connue depuis la maternelle, sa construction nous a réservé quelques surprises. Nous sommes en classe de CE2, en séance 3, et nous demandons aux élèves en début de séance, de construire un triangle.

Les élèves sont par binôme ; une élève trace un triangle, son binôme s'exclame alors « ce n'est pas un triangle, ça ! » À cette réaction, sa camarade lui rétorque que si. Nous intervenons en demandant à cet élève qui n'est pas d'accord, de construire un triangle. Ce dernier s'applique de manière à faire des côtés de longueur identique. Ses explications nous indiquent que sa représentation du triangle est dans une configuration prototypique « inversé » (triangle équilatéral avec « la pointe vers le bas » (issu du vocabulaire élève)). On constate ici la prégnance de figure prototypique chez cet élève. En fait, l'élève a mobilisé une figure qu'il a rencontrée antérieurement dans sa scolarité (avec les blocs logiques par exemple). De manière générale, les figures simples sont mémorisées et reconnues par le biais de dessins les représentant : ce qui permet de mémoriser généralement un ensemble de propriétés géométriques, plus ou moins bien retenues par les élèves.

Par la suite, lorsque cet élève utilise le Monkey, le triangle, qu'il a soigneusement construit c'est à dire perceptivement équilatéral, se déforme sans conserver ni ses propriétés spatiales ni ses propriétés d'équilatéralité. Ce qui fait dire de manière hésitante à cet élève dubitatif, qu'il n'a plus un triangle. La déstabilisation est importante car cet élève est perturbé dans ses représentations. Il avait focalisé son attention sur certaines propriétés de la figure plutôt que sur d'autres. Il y a donc comme une résistance à se détacher de cette forme visuellement reconnue. Cette appréhension

perceptive spontanée (ici, du triangle équilatéral) bloque l'appréhension mathématique de l'objet triangle.

Le Monkey a brisé la représentation du triangle de cet élève. Le milieu a modifié le rapport au vrai pour cet élève.

De manière générale, comprendre et interpréter les effets d'une déformation (le mouvement déforme la figure, ce qui diffère du déplacement d'un seul point) est une véritable difficulté pour les élèves. Il n'y a pas forcément d'analyse mathématique et les effets de la déformation sur les propriétés géométriques ne sont pas toujours compris. Dès les petites classes, les élèves sont amenés à déplacer les objets : il y a donc une représentation du mouvement d'une figure qui est essentiellement un déplacement composé de translations et rotations (de gabarits) et ensuite éventuellement de retournements, ce qui peut entraîner une représentation fausse du « mouvement » car ce sont des mouvements de pièces solides alors que la GD a une notion du mouvement différente, celle du point. Il semble donc que déplacer les objets ne suffise pas à construire les propriétés de ces derniers.

Finalement, on peut voir le Monkey comme un « modificateur global » qui est une aide sérieuse à l'instrumentation initiale mais qui peut être ensuite une limite à la compréhension fine.

La théorie des situations didactiques pourra nous éclairer sur la validation et comment celle-ci va être perçue par les élèves.

3 Les interactions langagières

L'analyse de l'activité langagière est conduite en relation avec les différentes activités proposées aux élèves : nous nous axons surtout sur les restitutions de connaissances, les explications relatives à l'instrumentation du logiciel et les justifications de démarches.

Le fait d'avoir un élève qui construit et un autre qui conseille voire contrôle, favorise la métacognition sur les objets géométriques. Les interactions langagières participent à la construction des concepts engagés, la communication aidant à la conceptualisation. De même, les témoignages des enseignants nous ayant accueillie tendent à montrer que le fait de travailler en binôme et de faire fonctionner les élèves dans un environnement a-didactique a permis à ces derniers d'évoluer dans leur langage mathématique qui s'est enrichi et précisé.

V - DIFFICULTÉS RENCONTRÉES ET PERSPECTIVES

1 La maintenance informatique

D'une année sur l'autre, le système d'exploitation de la salle informatique a changé ce qui a évidemment eu des conséquences sur la version du logiciel téléchargée. Malgré les précautions prises, les versions Linux et Mac OS du logiciel utilisées ne sont pas tout à fait les mêmes sur certains points précis et parfois des parties de séance ont dû être modifiées directement en séance.

2 Complexité de l'intégration des TICE

Comme l'a souligné Michèle Artigue, se pose le problème de l'instrumentation de l'enseignant : cela reste un exercice très complexe car il nécessite une transformation des pratiques enseignantes ; or ces derniers dans le primaire n'y sont pas tous préparés : ils n'ont pas forcément le temps ou n'osent tout simplement pas. De même, malgré la plus-value espérée, cette tâche nouvelle d'intégration demande un surcoût en travail de préparation pour l'enseignant.

Pour la suite de cette recherche, nous suivons ces élèves en CM2 ; l'enseignante de ce niveau n'étant pas très à l'aise avec l'outil informatique, c'est l'enseignant de l'année de CM1 qui est en charge de mener les séances en GD cette année 2013/2014 (décloisonnement).

3 Évolution de la méthodologie et perspectives

Lors de l'expérimentation pour le mémoire de recherche, quand nous travaillions avec le demi-groupe classe en informatique, l'autre demi-groupe était dans une activité non mathématique.

Pour pouvoir enrichir le corpus de notre travail et les analyses qui en découlent, actuellement nous menons avec un groupe des activités en GD et avec l'autre groupe des activités en environnement papier-crayon. Par ailleurs, nous suivons les élèves en séance « classique » de géométrie.

D'un point de vue des interactions langagières, désormais l'instrumentation s'accompagne du discours conceptuel associé afin que l'élève conscientise les gestes effectués, cela signifie un vocabulaire simple mais précis accompagnant les schèmes d'action associés. De par la quantité d'apprentissages opérationnels qu'ils ont à gérer, les enseignants de l'école primaire ont généralement une tendance naturelle à transformer ce qui devrait être une instrumentation en tâche d'exécution. Un volet de notre ingénierie didactique que nous mettons en place pour un usage généralisé de la GD est particulièrement vigilant à ce que cette pratique non seulement résiste à cette tendance mais puisse aussi l'évacuer. Nous veillons de notre côté à la présence et l'expression correcte du sens mathématique de ce qu'on propose.

Enfin, pour cette année, nous comptons affiner les travaux menés en analysant en détail tout le corpus recueilli.

VI - CONCLUSION

Nous avons vu à travers les activités précédentes l'efficacité d'une instrumentation bien menée (construction du pentagone régulier) et la richesse des productions des élèves utilisant l'anticipation et l'a-modalité du logiciel.

S'il est plus riche et plus facile d'accès, le cadre dynamique est aussi géométriquement plus exigeant car il déconstruit un rapport implicite au dessin géométrique encore trop présent au cycle 3. L'évolution des interfaces des logiciels, comme ici la mise en œuvre du Monkey, adaptée à l'école primaire, permet de nouvelles ingénieries didactiques qui savent prendre à leur charge une part de cette exigence. L'organisation d'activités autour d'interactions langagières est une autre façon de prendre en charge, mais aussi d'accélérer l'entrée dans la géométrie des propriétés des objets.

L'utilisation du Monkey, considéré comme autre tiers validant que l'enseignant, permet aux élèves de mettre à distance leurs propres démarches perceptives pour mieux les regarder, favorisant ainsi des changements de représentations et donc de stratégies de construction.

Enfin, suite à ces expérimentations, nous avons pris conscience du caractère spécifique d'un travail en petit groupe piloté par un projet de recherche. Comme l'a mis en évidence Michèle Artigue, va se poser le problème du transfert d'une expertise locale à sa massification. Même si elle est théoriquement incontournable, nous nous appliquons dans la construction de notre ingénierie, à ce que la décohérence quantique (influence de l'environnement) s'applique le moins possible à la pratique de la géométrie dynamique.

VII - BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M. (2011) Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement de base, UNESCO, 43-44.

ASSUDE T. (2007) Modes et degré d'intégration de Cabri dans des classes du primaire, in Floris R. et Conne F. (éd) *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*, 119-134, Bruxelles : De Boeck.

CHARNAY R. & DOUAIRE J. (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3,* Paris : Hatier.

GOUSSEAU-COUTAT S. (2006) Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété, thèse de doctorat de l'université JOSEPH FOURIER, Grenoble 1.

HOUDEMENT C, KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, IREM de Strasbourg, *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, **11**, 175-193.

LABORDE C., CAPPONI B. (1994) Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherche en didactique des mathématiques*, **14**, 1.2, 165-210.

HAKENHOLZ E. (2006) Concepteur du logiciel CaRMetal, http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/

PAYET I. (2013) Bilan d'une séquence de géométrie dynamique au CE2, IREM de la Réunion, en cours de rédaction.

PAYET I. (2011) Géométrie dynamique au cycle 3 : construction d'un rectangle, IREM de la Réunion,

http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/spip.php?article472.

PAYET I. (2010) Comparaison des environnements papier-crayon et informatique en cycle 3 sur une activité géométrique non usuelle, *Expressions*, **35**, 119-145.

http://espe.univ-reunion.fr/bibliotheque/revue-expression/

RABARDEL P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

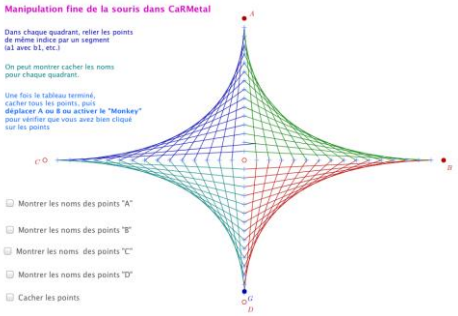
RESTREPO A. M. (2008) Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème, thèse de doctorat de l'université JOSEPH FOURIER, Grenoble 1.

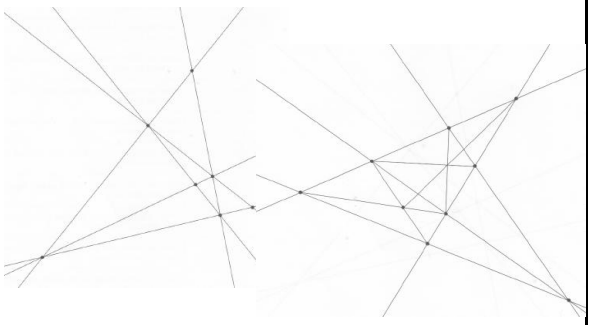
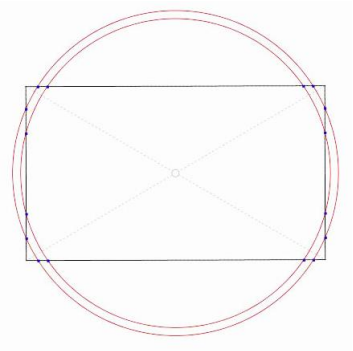
VIII - ANNEXES

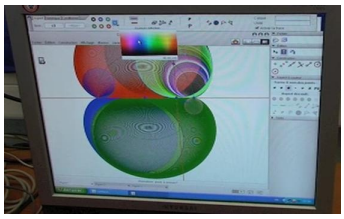
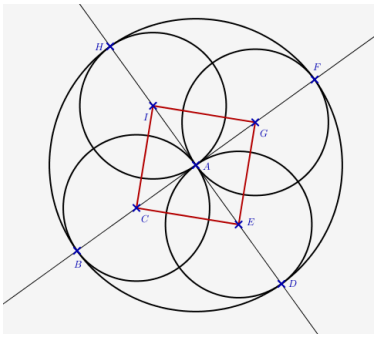
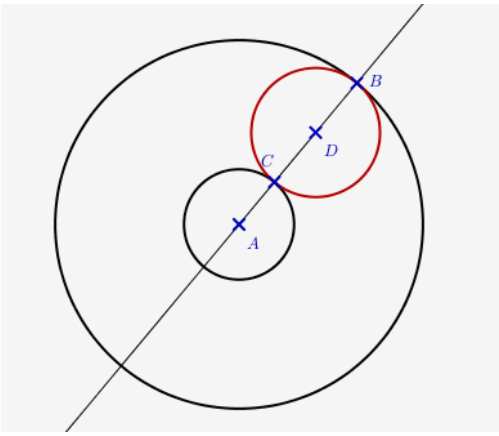
Les fiches pédagogiques des séquences seront accessibles sur le site de l'IREM de la Réunion (article en cours : Bilan d'une séquence de géométrie dynamique au CE2, et article à venir : Bilan d'une séquence de géométrie dynamique au CM1).

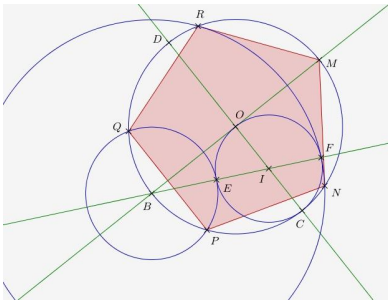
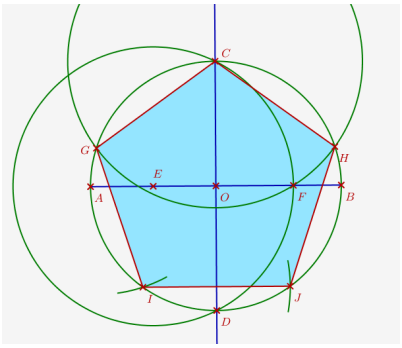
Pour chaque niveau de classe, les séquences se présentent sous la forme d'un tableau avec d'une part les activités mathématiques avec les objectifs visés dans un premier temps et les consignes données aux élèves (pour plus de détails et notamment les différents programmes de construction des figures, se référer aux fiches pédagogiques disponibles dans les articles cités précédemment sur le site de l'IREM de la Réunion) et d'autre part l'instrumentation du logiciel.

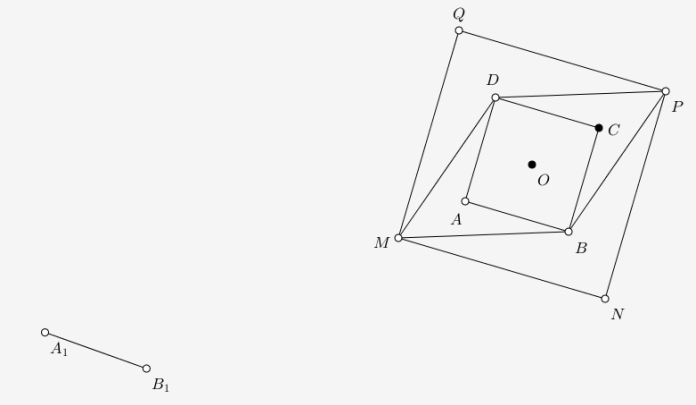
Annexe 1 - Séquence en CM2 (année 2010/2011)

Séances	**Activités mathématiques**	**Instrumentation du logiciel**
S1 Découverte du logiciel	- utiliser en situation le vocabulaire géométrique. **Consignes :** * Créer un point A et un point B ; puis déplacez-les en utilisant l'icône Les déplacements sont-ils libres? Faire la même chose mais cette fois-ci en utilisant le Monkey * A partir de ces deux points A et B, tracer le segment [AB]. Cliquez droit sur le segment, et dans l'inspecteur d'objet, changez sa couleur et sa forme. Puis déplacez-le en utilisant les deux façons de faire. Qu'observe-t-on dans les deux cas? * Tracer un segment de longueur fixe ; cliquez droit dessus et dans l'inspecteur d'objets, fixez la longueur à 4 puis allez dans l'onglet aspect et activez la trace. Déplacer le point B, que remarque-t-on?	Découverte du logiciel : palette, inspecteur d'objets. Instrumentation des outils suivants : point, segment, segment de longueur fixe, Monkey. Instrumentation sur la manipulation directe. Activité d'instrumentation : les tableaux de fils. 

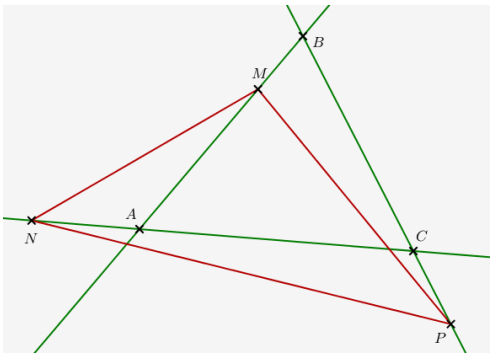
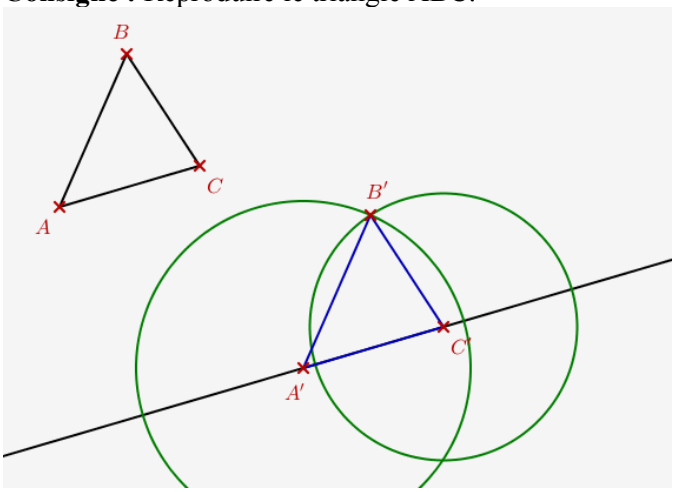
Séances	Activités mathématiques	Instrumentation du logiciel
S2 Faisceaux de traits (ERMEL) : reproduction de figures mettant en jeu des relations d'incidence	- utiliser en situation le vocabulaire géométrique. - employer des relations d'incidence. - comprendre la nécessité de mettre en place une chronologie (situation n°2). - comprendre que les points peuvent être définis par des alignements (situation n°2). **Consignes :** Reproduire les figures à partir des points donnés.  Situation n°1 Situation n°2	Instrumentation sur les outils droites, segments et point.
S3 Construction du rectangle et Problème ouvert : nombre d'intersections d'un rectangle avec deux cercles	<u>Construction du rectangle</u> - construire une figure **Consigne :** construire un rectangle qui résiste au mouvement. <u>Problème ouvert</u> - émettre des hypothèses sur l'intersection de deux cercles avec un rectangle. **Consigne :** construire deux cercles ayant un maximum de points d'intersection avec le rectangle construit. 	Instrumentation sur les outils perpendiculaire et parallèle. Instrumentation sur la manipulation directe et sur le Monkey.

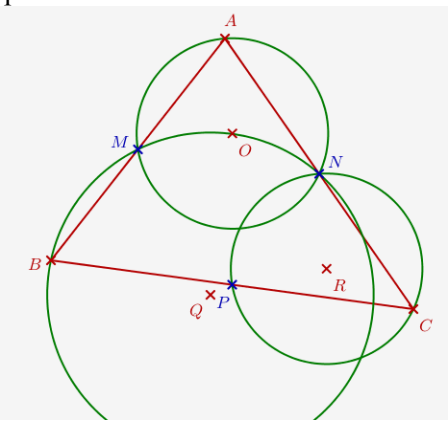
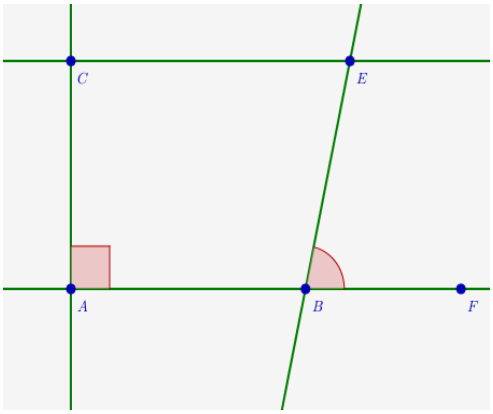
Séances	Activités mathématiques	Instrumentation du logiciel
S4	- suivre un programme de construction. - émettre des hypothèses sur le problème de la situation n°2. - utiliser les propriétés géométriques d'une figure valider une hypothèse. *Activité 1 : la néphroïde* **Consigne :** suivre le programme de construction et animer le point indiqué.  *Activité 2 :* Suite à une construction mettant en jeu la construction de cercles, les élèves doivent répondre à la **consigne** suivante : comment s'appelle le quadrilatère construit? Pourquoi? 	Instrumentation sur les cercles. Instrumentation sur l'outil animation.
S5 Le cercle et les cercles (ERMEL)	- faire émerger des propriétés géométriques d'une figure pour la construire. - argumenter la validité d'une procédure de construction. **Consigne :** tracer un autre cercle qui touche les deux premiers. 	Instrumentation sur les cercles.

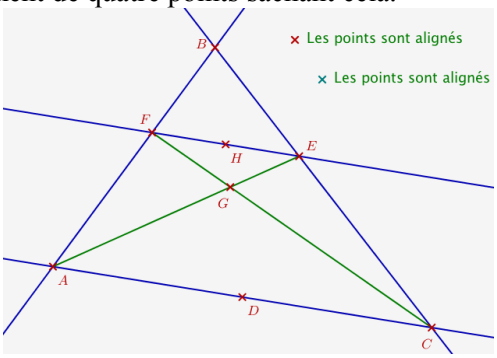
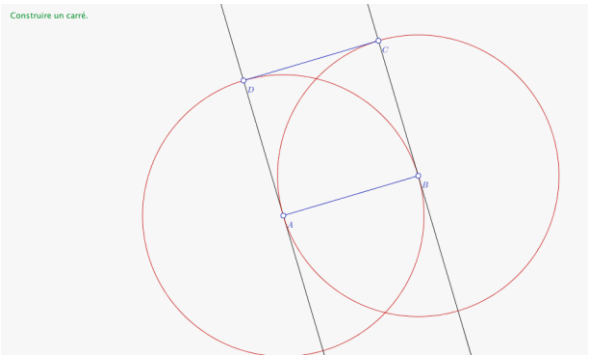
Séances	Activités mathématiques	Instrumentation du logiciel
S6 Le pentagone régulier	- suivre un programme de construction **Consigne :** Suivre les programmes de construction pour construire les deux figures demandées.  programme n°1  programme n°2 **Consignes :** Quelles sont les propriétés de ce polygone construit ? Comment se nomme-t-il ? On attend que les élèves nous disent qu'il a cinq côtés de même longueur, cinq sommets et qu'on le nomme pentagone (on précisera régulier).	Bilan sur l'instrumentation.

Séances	Activités mathématiques	Instrumentation du logiciel
S7 Reproduction de figure mettant en œuvre la construction du carré	- construire un carré. - décrire une figure. - reproduire une figure. **Consignes :** Décrire la figure à l'écran. Reproduire le petit carré à partir de l'un de ses côtés. Terminer la reproduction de la figure initiale. 	

Annexe 2 - Séquence en CE2 (année 2011/2012)

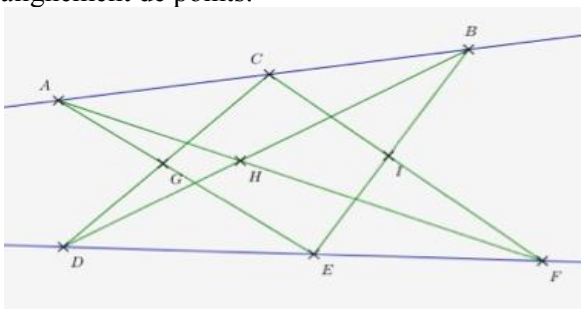
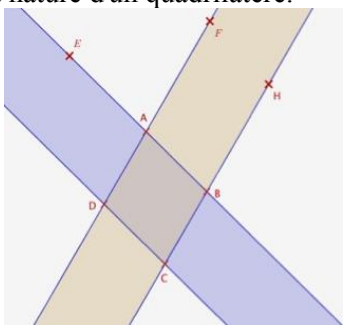
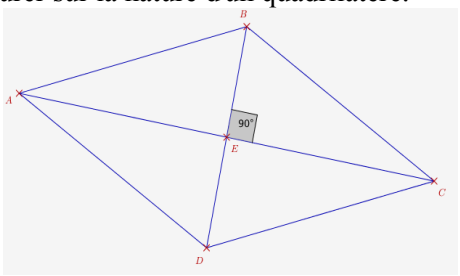
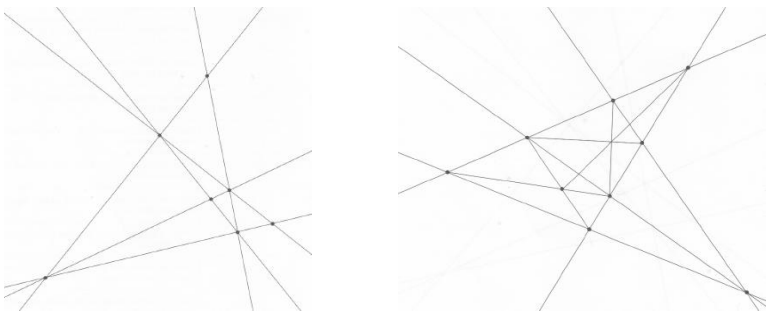
Séances	**Activités mathématiques**	**Instrumentation du logiciel**
S1 Le triangle des milieux, permanence des propriétés lors de l'utilisation du Monkey.	- utiliser en situation le vocabulaire géométrique. - construire un triangle. - faire des conjonctures. **Consignes :** Comment placer les points M, N et P pour que le triangle MNP soit à l'intérieur du triangle ABC ? Comment placer les points M, N et P pour que le triangle MNP soit à l'extérieur du triangle ABC ?  	Découverte du logiciel. Instrumentation sur les points, segments. Instrumentation sur le Monkey. Travail sur la manipulation directe. Les tableaux de fils et les cardioïdes (pour apprendre à cliquer au bon endroit).
S2 Reproduction de figure : le triangle.	- reproduire à partir d'un modèle un triangle donné. - décrire ses procédés de tracés. **Consigne :** Reproduire le triangle ABC.  	Instrumentation de l'outil cercle report de longueur. Instrumentation de l'outil cacher et supprimer. Instrumentation de l'outil cercle de rayon fixe. Instrumentation de l'outil animation.

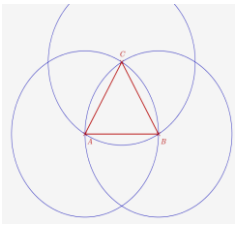
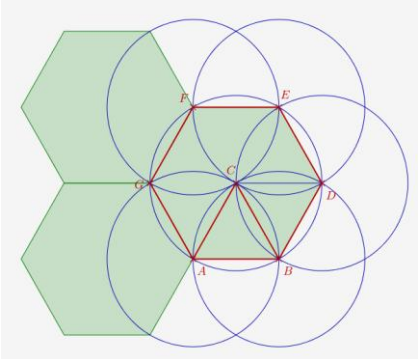
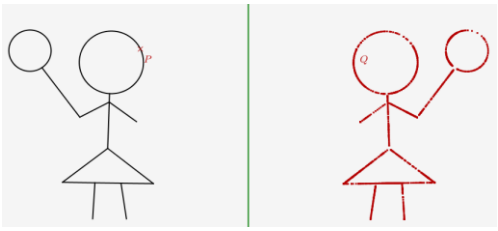
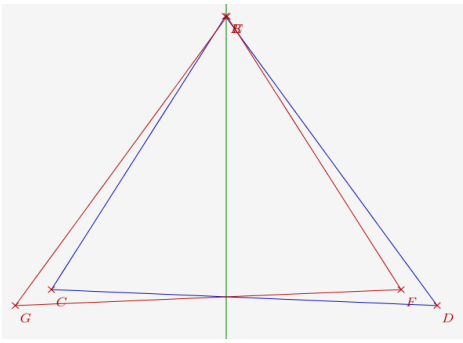
S3 Conjecture	- suivre un programme de construction. - émettre des hypothèses. **Consigne :** suivre le programme de construction. Les élèves sont ensuite sollicités sur la question suivante : où se coupent les cercles?  	Instrumentation de l'outil cercle passant par trois points
S4 La double perpendicularité et le parallélisme. Le rectangle et ses propriétés.	- utiliser en situation le vocabulaire géométrique. - suivre un programme pour la construction des droites sécantes. - conjecturer. - faire des hypothèses. **Consignes :** ces dernières étant nombreuses, se référer à la fiche pédagogique pour cette activité.  	Instrumentation sur l'outil angle. Instrumentation sur les tests perpendiculaire et parallèle.

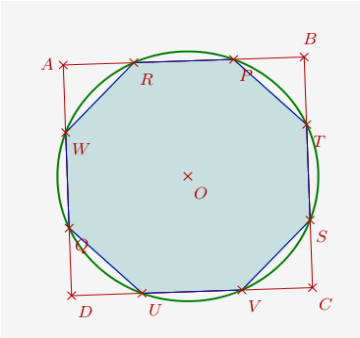
S5 L'alignement	- utiliser en situation le vocabulaire géométrique. - suivre un programme de construction. - conjecturer. **Consignes :** suivre le programme de construction et dire si les quatre points B, H, G et D sont alignés. Le logiciel permet de faire un test sur l'alignement de 3 points uniquement ; les élèves doivent donc argumenter sur l'alignement de quatre points sachant cela. 	Instrumentation sur les macros polygones. Instrumentation sur le test points alignés.
S6 Le carré	- construire un carré. - utilisation en situation du vocabulaire associé à cette construction - décrire les procédés de tracés. **Consignes :** construire un carré à partir d'un côté et décrire les procédés de tracés. 	

Annexe 3 - Séquence en CM1 (année 2012/2013)

Les consignes étant nombreuses, elles n'ont pas été détaillées dans ce document ; pour cela se référer aux articles (cités en bibliographie) sur le site de l'IREM de la Réunion.

Séances	**Activités mathématiques**	**Instrumentation du logiciel**
S1 Alignement de points	- suivre un programme de construction. - tester l'alignement de points. 	Rappel sur l'instrumentation vue en CE2.
S2 Nature des quadrilatères : propriétés (des côtés) du carré, du losange.	- conjecturer sur la nature d'un quadrilatère. 	Instrumentation sur la manipulation directe. Instrumentation sur les outils de test (perpendiculaire et parallèle).
S3 Nature des quadrilatères : propriétés des diagonales du carré, du losange.	- conjecturer sur la nature d'un quadrilatère. 	Instrumentation sur la manipulation directe. Instrumentation sur l'outil test.
S4 Reproduction de figures (configuration de droites sécantes) : faisceaux de traits (ERMEL).	 Se reporter à la séance S2 en CM2.	Instrumentation sur les points, droites et segments.

S5 Le triangle L'hexagone régulier et pavage.	- construire un triangle et argumenter sur la nature du triangle.  - suivre un programme de construction de l'hexagone régulier. - réaliser un pavage avec l'hexagone. 	Instrumentation sur les macros polygones. Instrumentation sur le test points alignés.
S6 La symétrie axiale.	- faire le symétrique d'une figure donnée.  - retrouver l'axe de symétrie d'une figure (triangle isocèle et équilatéral). 	Instrumentation sur l'outil aimantation. Instrumentation sur la trace. Instrumentation sur l'outil symétrie axiale.

S7 L'octogone.	- construire un carré à partir de son centre et d'un sommet. - description les procédés de tracés. - construire d'un octogone régulier à partir du carré.		

À LA DÉCOUVERTE DES TRIANGLES : DE LA MANIPULATION DE SEGMENTS DANS UN LOGICIEL DE MATHÉMATIQUES DYNAMIQUES À LA CONSTRUCTION À LA RÈGLE ET AU COMPAS

Anne VOLTOLINI
Enseignante
Collège Champollion, Grenoble
anne.voltolini@ac-grenoble.fr

Résumé
Nous présentons une situation de travail sur les triangles, basée sur l'utilisation de cahiers d'activités informatiques. L'objectif de la situation est l'apprentissage de la construction à la règle et au compas d'un triangle étant données les longueurs de ses trois côtés. Dans un premier cahier l'élève sera amené à former des triangles par manipulations directes de segments de longueurs données selon deux déplacements : par translation et par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe. Ce deuxième déplacement qui permet de faire pivoter le segment autour d'une extrémité qui reste fixe amènera l'usage du compas dans la construction géométrique d'un triangle. Un deuxième cahier poursuit le travail pour aboutir à l'usage du compas et à la nécessité de tracer des arcs de cercles pour construire un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés.

Les moyens de communication pour apprendre évoluent très rapidement aussi bien à l'école qu'en dehors de l'école. Ainsi il nous semble important de réfléchir au défi de l'intégration des TICE dans notre enseignement des mathématiques. Les projets MaDyp : Mathématiques Dynamiques à l'école Primaire et Mallette : Mallette de ressources pour l'école, actions de l'équipe de recherche EducTice de l'IFE, ont pour objectif de développer des activités utilisant les TICE qui incluent une approche expérimentale sur la base de manipulations directes de représentations d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur pour l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle et primaire. La géométrie au cycle 3 et les triangles font partie des thèmes de travail de ces groupes.

Nous présentons une situation de travail sur les triangles, basée sur l'utilisation de cahiers d'activités informatiques développés avec le logiciel Cabri Elem[1]. Cette situation a pour objectif d'apprentissage la construction géométrique à la règle et au compas d'un triangle étant données les trois longueurs de ses côtés. Un premier cahier amène l'usage du compas, dans la construction géométrique du triangle à partir de manipulations de segments de longueurs données. Un second cahier poursuit le travail pour aboutir à l'usage du compas et la nécessité de tracer des arcs de cercle pour construire un triangle dont on connaît les trois longueurs des côtés.

I - UN PREMIER CAHIER « À LA DÉCOUVERTE DES TRIANGLES »

Dans le premier cahier,qui permet d'amener la nécessité de l'usage du compas dans la construction géométrique d'un triangle dont les longueurs des trois côtés sont données, l'élève sera amené à traiter deux tâches : former des triangles par manipulation directe (Laborde et Marcheteau 2009)

[1] Le logiciel Cabri Elem créator et Player est un logiciel développé par la société Cabrilog partenaire dans les projets Madyp et Mallette.

de segments de longueurs données, et déterminer si trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle. La deuxième tâche à propos de l'existence ou non d'un triangle est une question mathématique qui problématise la recherche de la formation d'un triangle et donc le recours aux déplacements des segments. Deux types de déplacements sont possibles pour un segment : déplacer le segment entier par translation ou par rotation en faisant pivoter le segment autour d'une extrémité qui reste fixe.

1 Former des triangles (figure 1)

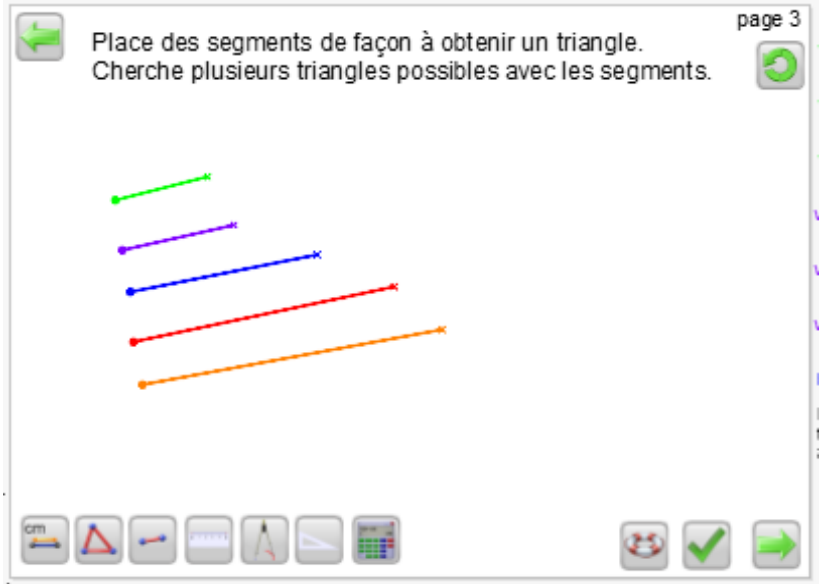


Figure 1. Place des segments de manière à obtenir un triangle.

Sur cette page sont affichés cinq segments de longueurs données. Il est demandé à l'élève de placer des segments de façon à obtenir un triangle, et de chercher plusieurs triangles possibles. Les segments sont asymétriques dans le mouvement et à l'écran. L'extrémité ronde permet de déplacer le segment par translation et l'extrémité cruciforme permet de faire pivoter le segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe. L'environnement informatique oblige à dissocier les deux déplacements contrairement aux manipulations d'objets sensibles lors desquelles les déplacements sont réalisés conjointement. Ces deux déplacements possibles des segments, par translation et par rotation, permettent de mettre en œuvre des stratégies pour former un triangle. Pour former un triangle reconnaissable par le système il est possible de procéder par ajustements successifs ou de former une ligne brisée, dont les deux extrémités sont cruciformes, puis le triangle en faisant pivoter les deux segments extrêmes. Dans ces deux stratégies le déplacement par rotation est indispensable.

2 La ligne brisée : une stratégie gagnante efficace (figure 2)

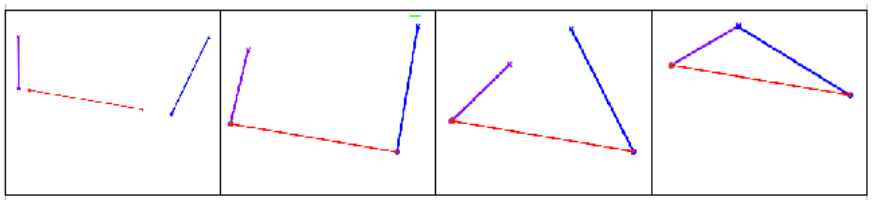


Figure 2. Former un triangle en passant par la ligne brisée

Cette stratégie gagnante efficace est une première étape à la déconstruction dimensionnelle du triangle. (Duval 2005). L'activité de formation du triangle dans l'environnement informatique à partir de trois segments en passant par la ligne brisée repose sur une déconstruction

dimensionnelle du triangle (2D) à la ligne brisée (1D). Cette descente dans les dimensions permet le passage d'une surface à une ligne alors que la construction géométrique du triangle à la règle et au compas repose sur une déconstruction dimensionnelle du triangle (2D) au point d'intersection des deux arcs de cercle (0D).

La manipulation des segments est plus efficace lorsqu'elle donne au grand segment un rôle particulier. En effet la ligne brisée avec le plus grand segment entre les deux autres est plus efficace pour former le triangle car il est alors plus facile d'anticiper la position du troisième sommet. Le troisième sommet est dans une bande de largeur le grand segment (figure 3).

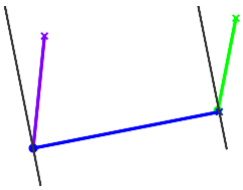


Figure 3. Le troisième sommet du triangle est dans la bande centrale

Cette ligne brisée avec le grand segment placé entre les deux autres est aussi plus efficace pour montrer la non existence du triangle (figures 4 et 5).

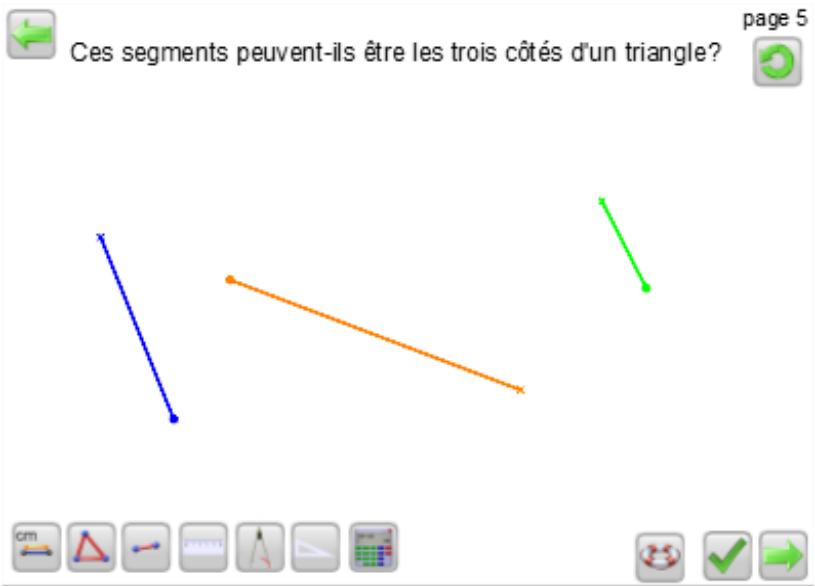


Figure 4. Ces segments peuvent-ils être les trois côtés d'un triangle ?



Figure 5. Visualisation de la non existence du triangle

3 Des rétroactions porteuses d'informations

La manipulation des segments dans l'environnement informatique sert à produire la solution et est porteuse d'informations (Laborde et Marcheteau 2009). En effet les rétroactions de manipulation directe, l'affichage continu du segment au cours du déplacement, les positions successives du segment, la trajectoire de l'extrémité dans le déplacement par rotation permettent à l'utilisateur d'avoir un contrôle sur le segment, côté du triangle qui est déjà présent mais pas dans la bonne position. Ceci n'est pas le cas lors de l'usage du compas dans la construction géométrique du triangle. Dans la construction du triangle à la règle et au compas, le compas est utilisé dans sa fonction de report de longueurs, il produit des arcs de cercle et le segment qui représente le côté du triangle n'est pas rendu visible.

Ce premier cahier dans l'environnement informatique Cabri Elem, qui oblige à dissocier les deux déplacements, met en évidence la rotation indispensable pour former un triangle et permet le contrôle de l'utilisateur sur le côté du triangle, peut constituer une première étape à l'apprentissage de la construction géométrique du triangle dont les longueurs sont celles des trois segments donnés.

4 Expérimentation et résultats

Ce cahier « À la découverte des triangles » a été testé dans une classe de CM2. L'enseignante a engagé sa séquence sur la construction géométrique du triangle à la règle et au compas à partir de ce cahier.

Les élèves sont tous entrés dans l'activité. La distinction graphique des deux extrémités d'un segment, ronde ou cruciforme, est rapidement prise en compte par les élèves. Ils découvrent tous et utilisent tous le double déplacement de chaque segment : l'extrémité ronde permet de déplacer le segment par translation alors que l'extrémité cruciforme permet de le faire pivoter autour de l'autre extrémité qui reste fixe. Pour former les triangles, la majorité des élèves a mis en place la stratégie ligne brisée dont les deux extrémités sont des croix pour pouvoir pivoter les segments extrêmes et ainsi former le triangle. Lors de la phase de synthèse par l'enseignante cette stratégie a été reconnue comme la stratégie gagnante efficace pour former un triangle dans l'environnement informatique. La nécessité de la rotation dans la phase de formation d'un triangle a été mise en évidence par les élèves et les a conduits à citer le compas comme instrument nécessaire dans la construction géométrique d'un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés.

II - UN SECOND CAHIER « CONSTRUIRE DES TRIANGLES »

L'objectif de ce cahier est de permettre l'apprentissage de la construction, à la règle et au compas, d'un triangle dont les longueurs des côtés sont données en s'appuyant sur les schèmes de manipulation des segments élaborés lors de l'utilisation du premier cahier. Il s'agit d'aboutir à l'usage du compas pour tracer des arcs de cercle dont l'intersection sera le troisième sommet du triangle. Il s'agit de trouver le troisième sommet du triangle par une méthode et non plus par tâtonnement.

Dans ce second cahier on repart de la ligne brisée, constituée des trois segments, qui a pu être formée dans le premier cahier. Deux tâches seront à traiter : former un triangle à partir d'une ligne brisée pour faire apparaître la trace des extrémités et les cercles sous-jacents à la construction du triangle, puis construire des triangles à l'aide des outils compas ou cercles disponibles dans une boite à outils à disposition.

Ce cahier n'a pas encore été testé avec des élèves.

1 Former des triangles (figure 6)

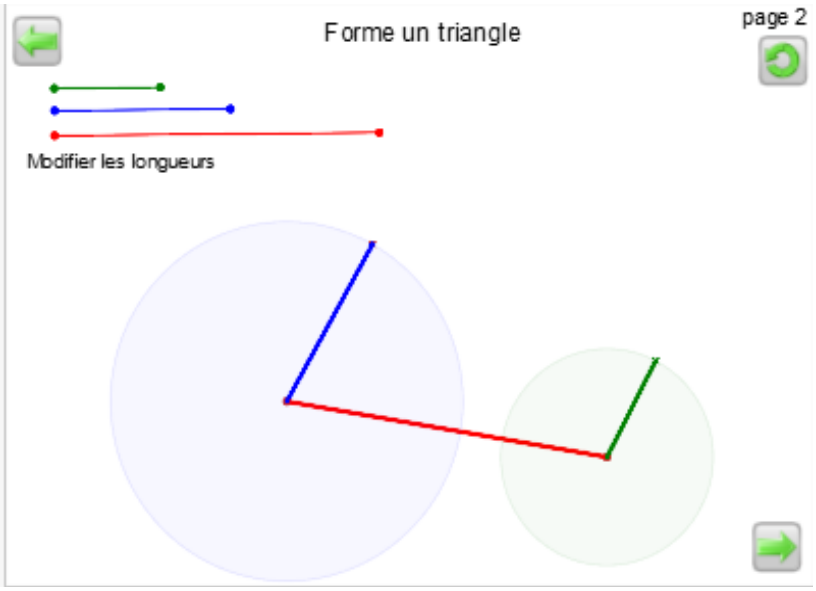


Figure 6. Forme un triangle

Trois segments et une ligne brisée constituée à partir des trois segments sont affichés à l'écran. Il s'agit de former un triangle à partir de cette ligne brisée. Les cercles dont les rayons sont les deux segments extrêmes de la ligne brisée sont apparents. Le troisième sommet du triangle peut être visible comme intersection des deux cercles. Dans la configuration à l'ouverture de la page les cercles n'ont pas de point d'intersection donc le triangle ne peut pas être formé. Une ou plusieurs longueurs doivent être modifiées pour faire apparaître le troisième sommet du triangle comme point d'intersection des deux cercles et former le triangle.

2 Construire un triangle (figure 7)

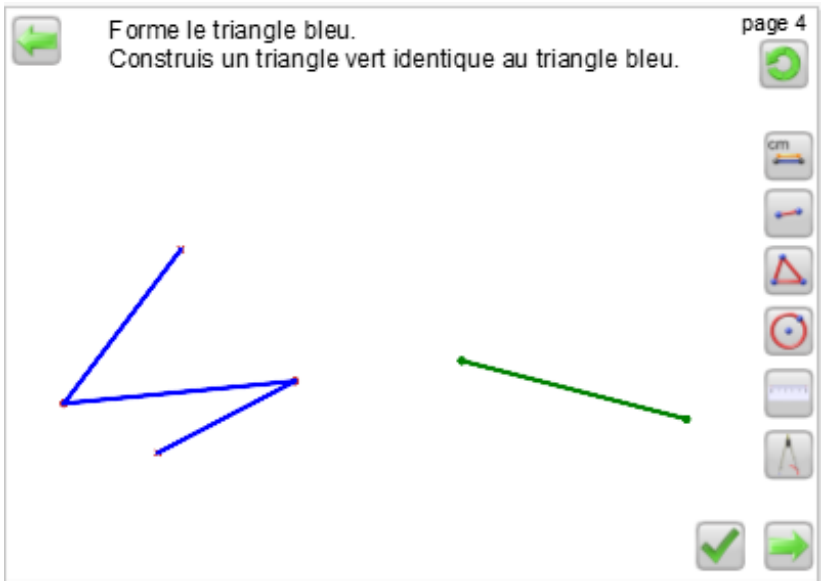


Figure 7. Construire un triangle

Une ligne brisée et un segment sont proposés sur la page. Après avoir formé le triangle à partir de la ligne brisée il s'agit de construire un triangle identique à partir du segment déjà affiché sur la page. Il n'est pas possible de superposer le triangle et le segment. Le système bloque une manipulation directe qui aurait pu être obtenue par déplacement du triangle ou du segment.

Des outils sont disponibles sur la page. On retrouve les outils longueur, segment, triangle, règle et compas déjà présents dans le premier cahier. L'outil cercle est aussi disponible ici.

III - CONCLUSION

Au cours des manipulations des segments l'élève s'approprie la nécessité de la rotation pour former des triangles dans l'environnement numérique. L'élève élabore un instrument (Rabardel 1995) « rotation d'un segment » qui va lui permettre de former des triangles dans l'environnement informatique. Les schèmes évoqués chez le sujet au cours de l'élaboration de l'instrument « rotation d'un segment » peuvent être associés à des schèmes d'utilisation du compas. Nous retenons que cet instrument « rotation d'un segment » que l'élève élabore dans la tâche de formation d'un triangle dans l'environnement informatique et les rétroactions qu'il produit sont porteurs de sens pour l'utilisation du compas dans la construction géométrique du triangle.

IV - BIBLIOGRAPHIE

DUVAL R . (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives,* **10**, 5-53.

LABORDE C., MARCHETTEAU A. (2009) L'incontro tra réale e virtuale in Cabri Elem per attivita matemativhe nella scuola primaria, *La matematica e la sua Didattica*, **23 n°1**, 19-34.

RABARDEL P.(1995) *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.

VERS UNE DIDACTIQUE PROFESSIONNELLE DU PROFESSEUR DES ÉCOLES ENSEIGNANT LES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE : UN EXEMPLE DE CIRCULATION DES SAVOIRS ENTRE RECHERCHE ET FORMATION

Denis BUTLEN
PU, IUFM de Versailles - UCP
LDAR
Denis.butlen@u-cergy.fr

Monique CHARLES-PEZARD
MCF, IUFM de Créteil - UPEC
LDAR
Monique.pézard-charles@upec.fr

Pascale MASSELOT
MCF, IUFM de Versailles - UCP
LDAR
PMasselot@aol.com

Résumé
Quelle est la place accordée à la recherche en didactique des mathématiques dans les actuels masters « Métiers de l'éducation et de l'enseignement du premier degré » ? Comment est-elle intégrée à la formation en mathématiques ? À quel moment ? Quels sont les contenus abordés ? Que signifie « adosser un master à la recherche » ? S'agit-il d'amener les futurs enseignants à prendre connaissance de certains résultats de recherche censés éclairer leurs pratiques quotidiennes ultérieures ? Ou bien de les engager dans une démarche de recherche ?
Dans une première partie, nous mettons en perspective et analysons en parallèle deux modalités à partir des descriptifs de deux masters : celle proposée par l'IUFM de Créteil, UPEC et celle proposée par l'IUFM de Versailles, UCP. Nous présentons ensuite des éléments sur la place accordée à la recherche en didactique des mathématiques dans ces formations en fonction des besoins des futurs professeurs des écoles qui devront enseigner les mathématiques. Dans une troisième partie, nous réfléchissons de façon plus générale sur le contenu possible d'une initiation à la recherche en didactique des mathématiques pour ces enseignants et nous tentons d'en dégager les incontournables, en particulier le rôle du mémoire. Nous concluons sur différents liens possibles entre recherche et formation, en les mettant en perspective avec la réforme en cours de la formation des enseignants dans les futures ESPE.

Ce texte a pour but de présenter le point de vue de chercheurs ayant une longue expérience de formation (formation de Professeurs des Écoles mais aussi formation de Formateurs), engagés dans des recherches sur les pratiques d'enseignants du premier degré, débutants et confirmés notamment exerçant en ZEP. Ces recherches, initialisées pour une part par des questions de formation, débouchent sur de nouvelles questions de formation et contribuent à dégager des pistes de réflexion portant en particulier sur la place de la recherche dans le cadre des masters « enseignement 1er degré » mais aussi plus largement dans les masters formation des enseignants. Cela nous conduit à traiter de la place d'un enseignement explicite de didactique des mathématiques dans ce type de formation.

Des questions initiales :

Quelle est la place accordée à la recherche dans les Masters « *Métiers de l'éducation et de l'enseignement du premier degré* » ? Comment est-elle intégrée ? À quel moment ? Quels sont les contenus abordés ? Que signifie « *adosser un master à la recherche* » ? S'agit-il d'amener les futurs enseignants à prendre connaissance de certains résultats de recherche censés éclairer leurs pratiques quotidiennes ultérieures ? Ou bien l'objectif est-il de les engager dans une véritable démarche de recherche ?

Après deux années de mise en place effective des masters, en nous limitant au cas de la formation en mathématiques des professeurs des écoles, nous présentons l'état de notre réflexion sur ces questions en nous appuyant sur une première analyse de deux modalités retenues pour adosser ces masters à la recherche.

Dans une première partie, nous mettons en perspective et analysons en parallèle deux modalités à partir des descriptifs (dont des extraits figurent en annexe) de deux masters : celle du Master proposé par l'IUFM de Créteil, UPEC, et celle du Master proposé par l'IUFM de Versailles, UCP. Ces deux IUFM sont proches tant par leur taille que par le public des étudiants inscrits. Nous présentons ensuite des éléments permettant de formuler des hypothèses sur les choix quant à la place accordée à la recherche en didactique des mathématiques dans ces formations en fonction des hypothèses relatives aux besoins des futurs professeurs des écoles qui devront enseigner les mathématiques. Dans une troisième partie, nous tentons de dégager les incontournables d'un master professionnel intégré à la formation des professeurs des écoles.

I - MISE EN PERSPECTIVE DE DEUX MODALITÉS

Pour la première analyse, nous nous appuyons sur les expériences communes des formateurs mais aussi sur l'expérience spécifique des formateurs de mathématiques. Autrement dit, à partir des deux exemples de Créteil et Versailles[1], nous apportons des éléments de réponse aux questions suivantes : Quelle place a pris cet aspect dans le cadre des masters ? À quel moment ce type de travail est-il proposé ? Selon quelles modalités ?

1 Temps consacré à cette initiation à la recherche et intitulés des Unités d'Enseignement

Afin de situer la place donnée dans le Master, nous pouvons tout d'abord repérer le temps consacré à cette initiation à la recherche tout au long des deux années de Master et les intitulés des Unités d'Enseignement concernées.

Pour Créteil, l'option recherche intitulée : « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique » est proposée parmi une trentaine de choix, (voir Annexe 1).

L'UE « Recherche et approfondissement dans une thématique optionnelle (initiation à la recherche et approfondissement) » représente 44 h au semestre 1 (pour 6 ECTS) et l'UE « Recherche et approfondissement dans une thématique optionnelle. Réalisation d'une note de recherche. » 27 h au semestre 2 (pour 9 ECTS).

L'UE « Accompagnement et approfondissement dans la thématique de recherche choisie. Réalisation d'un mémoire » représente 21 h au semestre 3 (pour 6 ECTS) et l'UE « Accompagnement et poursuite de la réflexion sur la recherche. Réalisation d'un mémoire » 33 h au semestre 4 (pour 12 ECTS).

Donc globalement, sur les deux années de formation, dans ce Master, 125 h sont consacrées à l'initiation à la recherche.

[1] Il s'agit des maquettes IUFM du master « premier degré », qui ne seront pas celles des ESPE mises en œuvre à la rentrée 2013.

Créteil	S1	S2	S3	S4	Total
UE Option Recherche	44h	27h	21h	33h	125h
UE Enseigner les mathématiques[2]	28h	35h	34h[3]	25h	122h

Pour Versailles (voir Annexe 2), en M1[4], l'Unité d'Enseignement (UE1) « Savoirs transversaux et initiation à la recherche » comporte un Élément Constitutif (EC2) « Initiation à la recherche : méthodologie, état des lieux d'une question de recherche ; méthodologie du recueil de données et de l'analyse. Élaboration d'un écrit de recherche » d'une durée de 20 h.

En M2, l'Unité d'Enseignement (UE1) « Savoirs transversaux et formation par la recherche » comporte un Elément Constitutif (EC2) « Méthodologie de la recherche. Recueil et exploitation de données ; articulation avec l'observation et la mise en œuvre de pratiques professionnelles lors des stages. Élaboration du mémoire avec suivi sous forme d'ateliers et tutorat individuel » d'une durée de 22 h.

Donc globalement, sur les deux années de formation, 42 h sont consacrées à l'initiation à la recherche, soit le tiers en durée de l'exemple précédent. Cependant les choix diffèrent également au niveau des heures des UE de mathématiques proposées à l'ensemble des étudiants. Pour Créteil, il y a une soixantaine d'heures en M1 et en M2 alors que dans la maquette de Versailles, 100 heures en M1 sont consacrées à l'EC : « Connaissances nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école » et 72 heures en M2 pour l'EC : « Enjeux de l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle et élémentaire et appropriation de ressources didactiques ».

Versailles	UE1 (M1)	UE2 (M2)	Total
UE Initiation à la recherche	20 h	22 h	42 h
UE Enseigner les mathématiques	100 h	90 h[5]	190 h

Pour ce qui est des intitulés, les deux mentionnent l'expression « initiation à la recherche », mais l'un le décline en M2 en « Accompagnement, approfondissement dans la thématique de recherche choisie », puis « poursuite de la réflexion sur la recherche » alors que le second décline cette expression en « méthodologie, état des lieux d'une question de recherche ; méthodologie du recueil de données et de l'analyse », puis « formation par la recherche », déclinée encore en « Méthodologie de la recherche. Recueil et exploitation de données ; articulation avec l'observation et la mise en œuvre de pratiques professionnelles lors des stages. ».

2 Contenus des Unités d'Enseignement

Au-delà des intitulés, attardons nous sur le contenu de ces UE dans le cas des étudiants qui optent pour le domaine des mathématiques. Dans les deux cas, le choix porte sur les travaux de recherche relevant de la didactique des mathématiques, cependant les descriptifs diffèrent nettement.

[2] Pour le S1 et le S3, il faut rajouter des heures liées à deux UE professionnelles transversales, en moyenne une dizaine d'heures pour chacune.

[3] Incluant 12 h consacrées spécifiquement à la préparation de l'épreuve écrite de mathématiques de septembre

[4] Le choix a été fait pour Versailles d'annualiser les enseignements de chaque année du Master.

[5] Incluant 18 h consacrées spécifiquement à la préparation de l'épreuve écrite de mathématiques de septembre

Pour Créteil, le nombre d'heures est conséquent, les enseignants chercheurs interviennent très majoritairement dans cette partie de la formation ; quelques PIUFM interviennent ponctuellement notamment pour le suivi des notes de recherche en première année. Les objectifs et les descriptifs des contenus et des supports privilégiés pour chacun des semestres sont très précis.

En M1, lors du premier semestre :

« Cette option vise à une professionnalisation par la recherche, dans le cadre de la didactique des mathématiques, à partir d'outils de description et d'analyse de situations de classe. Plusieurs questionnements seront présentés aux étudiants pour les amener à comprendre et analyser la problématique de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et notamment :

- l'épistémologie des savoirs mathématiques afin d'étudier plus spécifiquement les notions à enseigner à l'école ;
- les apprentissages des mathématiques à l'école, au travers de cadres théoriques permettant d'analyser les obstacles didactiques, les difficultés des élèves, mais aussi la transposition des savoirs (programmes et manuels) ;
- les marges de manœuvre et contraintes des enseignants, mettant en jeu l'institutionnel, le social, les choix d'énoncés, les scénarii et les déroulements ;
- les élèves en (grande) difficulté, les postures, les malentendus scolaires.

Un travail sur l'observation en classe et l'élaboration de grilles d'analyse prenant en compte plusieurs dimensions du travail de l'enseignant et de l'activité de l'élève sera proposé en vue de la constitution d'un répertoire de matériaux professionnels visant, pour partie, à l'élaboration d'une note de recherche.

Évaluation : analyse d'un ou plusieurs textes issus de travaux en didactique des mathématiques + rédaction d'un écrit intermédiaire servant d'appui pour la note de recherche »

Puis au deuxième semestre :

« Dans la continuité des questionnements abordés au semestre précédent, un travail spécifique sera proposé autour de différents domaines de l'enseignement des mathématiques à l'école (grandeurs & mesures, résolution de problèmes, calcul mental, etc.), ainsi qu'autour des pratiques enseignantes.

Une réflexion sur le recueil et le traitement précis de données pour la recherche sera initiée.

L'élaboration d'une « Note de recherche » constituera le cœur de cette UE. Elle sera étayée par une recherche bibliographique et comprendra un questionnement didactique, ainsi que des pistes méthodologiques appropriées pour le traitement de ce questionnement.

Évaluation : rédaction d'une note de recherche. »

En M2, lors du semestre 3 :

« Approfondissement des apports en didactique des mathématiques s'appuyant sur des comptes-rendus d'expérimentations ou de travaux de recherche portant sur : la numération au CP, les évaluations nationales en mathématiques, les situations de recherche, les notions de définition et de classification, le calcul mental, les pratiques enseignantes…

Un travail méthodologique sera proposé dans le but d'engager les étudiants dans la rédaction de leur mémoire de recherche (ce travail pourra s'appuyer sur la note de recherche du M1).

Évaluation : rédaction d'un écrit intermédiaire servant d'appui pour le mémoire »

Puis au semestre 4 :

« Rédaction d'un mémoire comprenant : l'expression d'une problématique, des éléments de cadrage théorique, la description d'une méthodologie, l'analyse des résultats comprenant la discussion (avec la prise de distance nécessaire correspondante), la portée et les limites de la recherche, la bibliographie, les annexes (avec les données brutes).

Soutenance et présentation des résultats de la recherche et des perspectives qu'ils apportent (dans une perspective professionnelle/professionnalisante et didactique).

Évaluation : rédaction finale du mémoire de recherche et soutenance. »

Pour Versailles, tous les formateurs sont susceptibles d'intervenir mais les contenus sont nettement moins détaillés. Notons que même si chacun des laboratoires d'adossement du master est présenté aux étudiants lors d'un cours en début d'année, les choix des thèmes de mémoires ne sont pas « imposés » a priori.

En M1 :

« Les enseignements de cet EC ont pour objectif une initiation à la recherche en éducation et formation. Ils permettent à l'étudiant de s'approprier les travaux fondamentaux sur une question, d'élaborer un début de problématique relative à cette question, de s'initier à la pratique du recueil méthodique de données et à la construction d'un cadre théorique d'analyse de ces données. »

« Plusieurs ateliers sont proposés au choix des étudiants. Les thématiques des ateliers se rattachent aux disciplines suivantes : didactiques des différentes disciplines scolaires, psychologie, histoire de l'éducation, philosophie de l'éducation, sociologie de l'éducation, sciences de l'information et de la communication, sciences de l'éducation. Dans chaque atelier, une question commune est proposée à tous les étudiants.

Les ateliers privilégient les échanges à partir des exposés réalisés par les étudiants sur les ouvrages de la bibliographie et sur la transformation d'une question de départ en une problématique de recherche. »

« Initiation à l'analyse de données qu'elles soient recueillies par les étudiants ou proposées par le formateur responsable de l'atelier. »

Evaluation : rédaction d'un TER

Puis en M2 :

« Les enseignements de cet EC ont pour objectif la réalisation d'un mémoire professionnel étayé par des références théoriques.

Plus particulièrement, le travail au sein de cet EC permettra à l'étudiant d'approfondir le travail initié en M1 ou d'entreprendre une nouvelle recherche (cadre théorique et problématique). Il permet également de construire une méthodologie pertinente au regard de la problématique, de recueillir et de traiter des données issues de l'expérience professionnelle. »

Evaluation :

« Le mémoire professionnel est centré sur l'analyse de pratiques professionnelles. Il est problématisé en lien avec des questions vives de l'enseignement. Ces pratiques peuvent être celles de l'étudiant lors de ses stages ou être des pratiques observées dans des classes et/ou dans des institutions éducatives et culturelles. Elles font l'objet d'un recueil méthodique. Les analyses sont référées à un cadre théorique clairement défini et s'appuient sur une synthèse bibliographique. »

Ainsi, dans les deux IUFM, les étudiants doivent produire un écrit répondant à certains critères méthodologiques issus de la recherche (constitution d'un corpus de données à interroger, revue bibliographique d'articles exposant des résultats de recherche, prise de distance à une pratique professionnelle personnelle, écrit(s) intermédiaire(s) en M1 susceptible(s) d'être approfondi(s) en M2, etc…). Toutefois, celui-ci ne s'inscrit pas dans le même cursus. Il prend place dans une initiation à la recherche beaucoup plus conséquente (en cours, temps, qualité et quantité d'informations) dans le cursus mathématique de Créteil alors qu'à Versailles, il s'inscrit davantage dans une approche de questions professionnelles plus marquées par l'ancien mémoire professionnel.

Dans les deux cas, pour les concepteurs, il s'agit de penser une transposition de certains concepts issus de recherches en didactique des mathématiques en outils de formation, de fournir aux futurs enseignants une grille de lecture des ressources existantes ainsi que des éléments pour mener une analyse de leur propre pratique, d'accroître les marges de manœuvre et l'efficacité de l'enseignant dans l'exercice quotidien de son métier.

De notre point de vue, cela amène à la construction d'une didactique professionnelle pour le professeur des écoles enseignant les mathématiques. Ce qui implique la construction d'un corpus de connaissances nécessaires à l'exercice d'une vigilance didactique (Charles-Pézard 2010). Cette notion sera développée dans la suite du texte.

II - DIFFÉRENTS ASPECTS D'UNE INITIATION À LA RECHERCHE DANS LA FORMATION

1 Différents axes d'initiation à la recherche dans la formation

Situant ces deux modalités dans une réflexion plus globale, il nous semble que plusieurs axes peuvent être envisagés dans une formation initiale des professeurs des écoles :

Le premier axe concerne une présentation de résultats de diverses recherches en didactique des mathématiques dans le but d'éclairer la pratique du futur enseignant et de favoriser son développement professionnel : recherches sur différents thèmes mathématiques liés à l'école élémentaire, recherches sur les conditions d'apprentissage des élèves, recherches sur les pratiques des professeurs… À cette occasion, on peut être amené à expliciter des éléments de cadres théoriques (théorie des situations didactiques, théorie des champs conceptuels, théorie de la double approche, théorie anthropologique du didactique…).

Cette présentation de résultats comporte elle-même deux aspects. Elle peut être de type « culturelle », focalisée sur des résultats reconnus par la communauté didactique, sans qu'il soit nécessaire de développer la méthodologie utilisée pour établir ces résultats. C'est le cas par exemple de recherches sur les élèves en difficulté en mathématiques ou de recherches sur les pratiques des enseignants ou encore de recherches sur les conceptions des élèves sur certains contenus, comme les nombres décimaux. Mais une présentation peut aussi s'efforcer de restituer le cheminement des chercheurs concernés, depuis les questions « naïves » qu'ils se sont posées jusqu'aux résultats et limites de la recherche, en passant par la reformulation d'une problématique dans un cadre théorique, la description de la méthodologie utilisée, le traitement des données recueillies. C'est le cas par exemple des recherches sur les relations entre sens et technique liées à une pratique de calcul mental.

Cette mise en évidence d'une démarche de recherche rejoint un deuxième axe d'une initiation à la recherche des futurs enseignants. Il s'agit d'une initiation personnelle à une méthodologie de recherche par l'intermédiaire d'un écrit sous forme de note de recherche ou de mémoire. Cette initiation s'avère difficile pour les étudiants, dans le temps qui leur est imparti. Pourtant le passage par l'écriture d'un mémoire semble une manière active et efficace d'apprendre. Grâce à la distance réflexive permise par l'écrit, l'étudiant peut assimiler des connaissances dans le domaine choisi en les transférant dans la résolution du problème auquel il s'attache dans son mémoire. Celui-ci doit porter sur une question liée à l'enseignement des mathématiques, c'est-à-dire renseigner un problème du métier, en restant centré sur les acteurs que sont les élèves et les enseignants. Il doit être suffisamment dépersonnalisé, décontextualisé pour pouvoir être lu et compris par quelqu'un d'autre que celui qui l'a écrit. Cela implique une méthodologie pour rendre reproductible l'expérience ou la démarche de réflexion, ce qui nécessite de faire un pas de côté, pour une nécessaire prise de distance par rapport à sa propre pratique. La dimension pratique peut alors être liée à ce qui se passe avant, pendant et après la classe.

D'autre part, il nous semble important que des liens entre l'initiation à la recherche et les autres enseignements du Master (UE disciplinaires, didactiques et professionnelles, en particulier liées au stage) soient réellement pensés, mis en évidence par les formateurs et ne restent pas totalement à la charge des étudiants.

2 À propos du mémoire

À partir de ces deux exemples, nous reprenons ce qui semble se dégager concernant le mémoire dans le cadre de la formation au métier de Professeur des Ecoles. Celui-ci doit porter sur une question liée au métier d'enseignant, en restant centré, quand le contexte le permet, sur les

pratiques du sujet. Sa nécessaire décontextualisation implique de prendre du recul par rapport à sa propre pratique.

Les entrées choisies amènent à évoquer ce qui différencie la didactique des autres champs de recherche, notamment la prise en compte des contenus et de lister un certain nombre d'hypothèses admises en didactique des mathématiques.

Pour illustrer, on peut donner quelques exemples de sujets de mémoire (donnés à Créteil). Certains portent plutôt sur les contenus mathématiques et les questions posées par leur enseignement à différents niveaux scolaires :

1. Choix d'une situation d'introduction d'un contenu mathématique à un niveau donné (par exemple numération au CP) et gestion de la situation : quelles analyses préalables ? Quelles conditions sur la phase de lancement de la situation pour assurer la dévolution du problème et une recherche active de la part des élèves ?

2. Choix d'un contenu à un niveau spécifique et étude de la continuité des apprentissages au niveau de l'école, de la transition école/collège.

3. Comparaison de manuels anglais et français sur une même notion (par exemple : fractions et décimaux) ; comment analyser et comparer les tâches proposées et leur complexité ? Importance de la mise en œuvre effective en classe pour comprendre les réussites des élèves.

4. Place et rôle de la manipulation dans l'apprentissage de techniques opératoires (soustraction, division) ; quels matériels peuvent intervenir en amont d'une technique opératoire posée ?

D'autres portent sur l'étude de certaines pratiques :

5. Les pratiques en calcul mental, leur lien avec les autres activités mathématiques, avec la résolution de problèmes ; Quelles analyses à conduire pendant les stages ? Quelle méthodologie ? (interviews, questionnaires, vidéos, etc.).

6. Les pratiques enseignantes dans les activités ludiques : comment les pratiques enseignantes peuvent-elles participer à l'optimisation des apprentissages des élèves en calcul mental à travers des séances de jeux au cycle 2 ?

7. Quelles pratiques et représentations des enseignants sur la technique de la soustraction posée en CE1 et CE2 ? Comment les enseignants et les manuels prennent-ils en compte les différentes techniques possibles ? Comment justifient-ils leurs choix ?

8. La validation des procédures lors de la résolution d'un problème (multiplicatif ou de division) : Quelles analyses ? Quels supports ? Quelle organisation de la mise en commun des procédures et quel rôle du maître ? Quelle phase de bilan ?

9. L'institutionnalisation (par exemple en calcul mental) : Qu'est ce qu'on institutionnalise ? Quand ? Comment institutionnalise-t-on ?

D'autres enfin portent sur des questions plus transversales aux différents thèmes mathématiques :

10. Les erreurs : Comment prendre en compte les erreurs des élèves lors de la phase de mise en commun (formulation / validation) ? Quelle analyse préalable ? Quels effets sur l'activité des élèves et sous quelles conditions ?

11. Les élèves en difficulté en mathématiques : quel diagnostic ? En quoi telle ou telle pratique peut-elle aider ou au contraire se révéler différenciatrice ?

12. Utilisation de schémas pour résoudre des problèmes (par exemple des problèmes additifs de transformation) : quel impact sur la réussite des élèves ? Comment les schémas sont-ils représentés dans les manuels ? Dans quelles conditions les schémas pourraient-ils avoir une influence positive sur les apprentissages des élèves pour la résolution de problèmes ?

13. Comment, lors d'une situation-problème, peut-on recueillir et utiliser les traces de la réflexion des élèves afin qu'elles deviennent les briques fondamentales sur lesquelles leur apprentissage se construira ?

La bibliographie recommandée aux étudiants est essentiellement constituée de revues et d'ouvrages de didactique à visée professionnelle comme par exemple les revues Grand N ou Petit x.

III - DIFFÉRENTES STRATÉGIES POUR ENVISAGER LES LIENS ENTRE RECHERCHE ET FORMATION

1 Qu'entend-on par recherche dans une formation d'enseignant?

Une question « préalable » mais qui en fait trouvera pour une large part une réponse dans l'étude des stratégies, des contenus et des pratiques de formation est celle de la signification de certaines expressions liant les termes formation et recherche : « formation par la recherche », « formation à la recherche », « formation s'appuyant sur ou comportant une initiation à la recherche », « formation en lien avec la recherche ».

Une clarification de ces expressions permettrait sans doute de lever certaines ambiguïtés ou malentendus. Il y a à la fois une continuité et des ruptures dans les conceptions qui accompagnent ces différentes formulations et dans la manière dont elles se traduisent en formation.

Certains considèrent que la recherche est convoquée dès que l'enseignant novice est engagé dans un dispositif et/ou dans des activités qui lui permettent de prendre du recul par rapport à sa propre pratique et dès qu'il adopte une posture réflexive.

D'autres pensent que la recherche est convoquée dès que l'étudiant est impliqué dans une activité de recherche (au sens résolution d'un problème ou élaboration d'éléments de réponse à une question liée (ou non) au métier de professeur). Cette réponse peut ou non déboucher sur une construction de connaissances nouvelles. Notons que cette approche s'oppose à une conception de la recherche largement partagée par les chercheurs qui repose sur l'idée suivante : l'activité de recherche se doit de déboucher soit sur une réorganisation de connaissances anciennes, soit sur un enrichissement de celles-ci ou bien encore sur la constitution de nouvelles connaissances. L'activité de recherche est ainsi finalisée par l'accumulation de connaissances.

D'autres encore incluent sous le terme de recherche la participation (même modeste) à une recherche-action, à une recherche-développement, voire même à une action relevant de l'innovation.

Certains considèrent qu'une initiation à la recherche passe et parfois peut se limiter en formation initiale à la fréquentation et à la mise en œuvre d'une méthodologie inspirée ou importée de la recherche. Celle-ci peut concerner l'élaboration d'une bibliographie, le recueil d'un corpus de données et/ou l'analyse de celui-ci.

D'autres encore, défendent l'idée qu'il est nécessaire de proposer aux étudiants et aux professeurs novices des éléments de théories dans le cadre d'un enseignement de concepts construits, élaborés et utilisés en recherche. Cet enseignement d'une « didactique-objet » est parfois pensé comme commun aux masters formation et aux masters recherche et est souvent défendu par des enseignants chercheurs qui interviennent dans les deux types de masters. Le mémoire est alors le moment privilégié où l'étudiant fait la preuve de l'appropriation de ces éléments de théories et de méthodologie.

Certains chercheurs enfin défendent l'idée d'une nécessaire transposition de certains concepts issus de la recherche en vue de les présenter comme des outils permettant aux enseignants (novices comme confirmés), de mieux lire les ressources qui sont leur sont proposées, de mieux interpréter en actes ou en différé les phénomènes d'enseignement dans lesquels ils peuvent être impliqués, d'être mieux outillés pour élaborer des situations d'enseignement, voire des programmations. Ces derniers, parmi lesquels on doit compter les partisans d'une « didactique-outil » ou d'une « didactique professionnelle » acceptent de repenser les concepts élaborés dans le

cadre et pour la recherche en termes d'outils d'enseignement et pour l'enseignement. Et ce, même si ce travail de transpositions transforme les concepts en question.

Ils rejoignent toutefois les précédents sur la nécessité non plus de présenter des théories mais de présenter des résultats de recherche (considérés comme suffisamment établis, suffisamment résistants) pour être enseignés en formation. Ces résultats sont de plusieurs types. Par exemple, en didactique des mathématiques, il peut s'agir de cheminements cognitifs (associés à des itinéraires cognitifs pouvant être proposés par le professeur), de situations d'enseignement incontournables (des passages obligés), ou des outils méthodologiques (l'analyse *a priori* ou la notion de variable d'une situation).

Ces différentes approches ne sont pas sans liens entre elles, les frontières sont souvent difficiles à cerner. Toutefois des pôles apparaissent et peuvent se traduire par des pratiques de formation assez différentes. Si elles peuvent être étudiés pour elles-mêmes, ces différentes approches doivent aussi l'être en lien avec l'étude des conditions de leur mise en œuvre et avec celle de leurs effets sur les pratiques des formés et des formateurs.

Enfin, il est difficile de penser les liens entre recherche et formation sans penser les dispositifs associés. Cette réflexion concerne évidemment directement la place et le rôle du mémoire dans la formation, les liens entre les différents dispositifs faisant intervenir la recherche dans l'ensemble de la formation.

2 Trois stratégies pour envisager les liens entre recherche et formation

À ce jour, nous pouvons donc définir trois grandes manières d'envisager l'initiation à la recherche et plus largement les liens entre recherche et formation :

- Une stratégie affirmant très fortement la nécessité de ménager dans la formation un axe recherche, avec des enseignements présentant des résultats de recherche mais aussi et parfois principalement des théories de didactique des mathématiques. Cette stratégie est très largement développée dans certains IUFM (Marseille par exemple). Au-delà du débat théorique sur les liens entre recherche et formation, ce type de stratégie sera certainement plus difficile à penser et surtout à mettre en œuvre dans le cadre des projets de formation (alternance pour un tiers de stage, puis pour un mi-temps dans le cadre des ESPÉ).

- À l'opposé de cette première stratégie, une deuxième stratégie minimise l'initiation à la recherche, finalement la réduit souvent au mémoire et s'accompagne d'une séparation de fait, plus ou moins grande dans la formation, entre mémoire et reste de la formation. Cette stratégie se nourrit des habitudes qui perdurent (parfois à juste titre) de la formation précédant les masters.

Nous allons développer davantage la troisième stratégie qui renvoie à la construction déjà évoquée d'une didactique professionnelle pour le professeur des écoles enseignant les mathématiques.

IV - VERS UNE DIDACTIQUE PROFESSIONNELLE

La troisième stratégie est associée à la poursuite de la construction d'une didactique professionnelle pour le professeur (des écoles, des collèges et lycées) enseignant les mathématiques, évoquée ci-dessus. La question se pose de savoir dans quelle mesure cette construction est viable dans le seul domaine disciplinaire ; des liens sont à penser entre les différents domaines, en liaison notamment avec la question de la polyvalence mais aussi en perspective avec les relations didactiques/pédagogie/psychologie, etc.

Suite à nos recherches portant sur les pratiques des enseignants débutants, nous dégageons des éléments permettant de montrer comment une entrée de la recherche dans la formation peut contribuer à la mise en place de ce que nous avons appelé « l'exercice d'une vigilance didactique ». Cette initiation vise notamment une appropriation de résultats de recherche concernant des outils de description et d'analyse de situations de classe, et une familiarisation avec certaines méthodologies.

La vigilance didactique traduit une manière de prendre en compte la place du savoir mathématique dans nos analyses de l'activité du professeur des écoles (Charles-Pézard, 2010). De manière générale, on peut considérer que le travail de l'enseignant comporte au moins deux éléments principaux largement dépendants : préparer sa classe et gérer les déroulements en classe. La maîtrise des contenus est nécessaire mais ne suffit pas. D'autres connaissances en particulier de type didactique sont nécessaires à l'enseignement des mathématiques. La vigilance didactique est définie « comme une sorte d'ajustement didactique permanent de la part du professeur faisant appel aux composantes cognitive et médiative des pratiques et s'exerçant dans les trois niveaux global, local et micro ».

Exercer une certaine vigilance didactique met donc en jeu des connaissances mathématiques et didactiques nécessaires pour enseigner. Les connaissances mathématiques ne sont pas seulement académiques, elles doivent être finalisées pour l'enseignement. Les connaissances didactiques contribuent à une bonne perception des enjeux d'apprentissage des situations et de leur organisation en vue de l'enseignement de savoirs mathématiques. (…)

Ces différentes connaissances mathématiques et didactiques s'opérationnalisent dans l'action du professeur pour réaliser des tâches. La vigilance didactique est liée aux différentes tâches d'enseignement de contenus mathématiques situées en amont de l'action en classe, pendant l'action en classe ou après la classe ainsi qu'aux différentes manières de les réaliser.

Une vigilance didactique insuffisante peut laisser penser à l'enseignant (mais aussi à l'institution) que l'important est de négocier la paix sociale y compris au détriment des mathématiques enseignées. La compréhension des enjeux didactiques est ici très déterminante.

Cela nous permet de déboucher sur de premières élucidations de ce que pourraient être les savoirs constituants « une didactique professionnelle pour le professeur des écoles enseignant les mathématiques », transposition de savoirs issus de recherches en didactique.

Prenons l'exemple de la notion de **variable didactique**, ce qui est le plus intéressant pour le quotidien du professeur des écoles, c'est davantage la notion de variable de commande que la notion de variable didactique. Pascale Masselot dans son mémoire de DEA (Masselot, 1994) a montré que le professeur des écoles, adoptant un point de vue pragmatique, a seulement besoin, le plus souvent, d'anticiper sur les productions et performances des élèves. De ce fait, il va souvent réduire la notion de variable didactique à certains aspects de celle-ci, comme la taille des nombres ou le support utilisé en géométrie pour le tracé des figures, ou encore le temps, voire la forme de travail. En revanche, il n'aura que peu souvent l'utilité de prendre en compte une donnée plus complexe comme par exemple la nature des situations proposées aux élèves.

Ainsi, la notion de **situation adidactique** est le plus souvent utile pour l'action du professeur comme un moyen de déterminer la part prise par le professeur et l'élève dans la construction ou la mobilisation des connaissances en jeu dans la situation proposée. De même, il nous semble que c'est davantage l'idée de situation de référence que de **situation fondamentale** qui est utile pour la pratique du professeur au quotidien dans sa classe.

Sans faire l'objet d'un cours spécifique, les caractères outil et objet des concepts mathématiques sont souvent identifiés notamment dans le cadre d'analyses de progressions, de séances et de tâches proposées dans les manuels. Les changements de cadres sont souvent réduits à des changements de point de vue ou des changements de domaines des mathématiques.

Nous pourrions multiplier les exemples illustrant cette nécessaire transposition de certaines notions théoriques issues de la recherche en vue de la formation et de l'enseignement. Notons que ce processus de transposition comporte au moins deux étapes : une première étape correspondant à la transmission des résultats et théories de recherche aux formateurs, une seconde étape correspondant à une seconde transformation de ces savoirs en vue de la diffusion à l'ensemble des enseignants.

Cette didactique professionnelle, parce qu'elle concerne le métier de professeur des écoles, se distingue de la didactique professionnelle classique (relative aux autres métiers) sur un point qui nous semble fondamental. La didactique professionnelle classique repose plus ou moins

explicitement sur un principe : les problèmes du métier ont trouvé ou peuvent trouver des réponses dans l'explicitation (par des chercheurs notamment) des pratiques des experts de la profession. Ce ne peut être le cas pour le métier de professeur des écoles.

Reprenons une distinction formulée notamment par Butlen et Robert (2011) entre problèmes internes et problèmes externes ; les premiers étant reconnus, voire ressentis par les professionnels alors que les seconds sont identifiés par des extérieurs à la profession. Si nous retrouvons cette distinction, dans le premier degré, elle peut s'avérer difficile à établir. Toutefois, elle permet de mieux cerner les limites des ressources « existant dans le genre ».

1 Les problèmes externes

Certains des problèmes, que l'on pourrait plutôt qualifier d'externes, comme par exemple éviter une baisse des exigences d'enseignement, sont globalement ressentis, exprimés par les enseignants (le *turn over* dans les écoles de ZEP en témoigne). Toutefois, c'est davantage la manière dont cette baisse se manifeste au quotidien, les raisons de celle-ci et les alternatives possibles qui sont peu, voire mal ou pas du tout perçues. En ce sens, les recherches menées apportent des éléments de description, des exemples d'alternatives viables.

Relevant des problèmes externes, l'exercice d'une certaine vigilance didactique est une question complexe. Si la plupart des professeurs des écoles sont plutôt conscients de certaines faiblesses dans la maîtrise des contenus, l'existence de ressources (manuels, brochures, exemples de situations) peut les amener à sous-estimer ces dernières On peut même penser que la qualité même de ces dernières peut contribuer à les masquer, (cf. Arditi, 2010). Il est souvent particulièrement difficile pour les enseignants d'appréhender les enjeux d'apprentissages sous-jacents aux situations pouvant être exposées dans ces ressources. Charles-Pézard (Charles-Pézard, 2010) énonce certains éléments d'explication : faiblesse des analyses *a priori*, difficulté pour lire en temps réel les productions des élèves et pour les prendre en compte dans le scénario initial pour l'adapter tout en maintenant l'objectif visé, méconnaissance de certains faits didactiques révélés par les recherches et/ou difficulté à les prendre en compte dans l'élaboration comme dans la mise en œuvre des scénarios. Ces constats sont autant de pistes pour la formation.

2 Les problèmes internes

Inversement certains problèmes internes s'ils sont identifiés, reconnus et deviennent cruciaux pour nombre de débutants (voire de professeurs confirmés) peuvent être surmontés de manière non satisfaisante du point de vue des apprentissages des élèves sans que les enseignants prennent vraiment conscience des limites de leurs réponses. C'est le cas pour l'installation d'une paix scolaire (Charles-Pézard, Butlen, Masselot, 2010) qui s'avère être souvent identifiée comme le premier problème à régler dans ce type de classe (conforté en cela par l'institution comme en témoigne les ressources proposées aux débutants affectés dans ces écoles). Le fait que certains professeurs réussissent à installer la paix sociale ('la classe tourne') au détriment de la qualité des mathématiques montre que le problème est ressenti. Ce sont davantage les critères d'évaluation des solutions apportées qui peuvent être discutables (notamment du point de vue des apprentissages des élèves sur le long terme). Nous avons montré que cette évaluation dépend notamment de la capacité de l'enseignant à évaluer la prise de risque qu'implique un changement de stratégie.

3 Une dialectique entre problèmes internes et problèmes externes

Nous voyons que, pour le premier degré, problèmes internes et problèmes externes entretiennent des liens étroits. La frontière entre les deux est parfois difficile à déterminer. La gestion du couple dévolution/institutionnalisation en est un autre exemple. Ainsi, sans trop caricaturer, la question de la dévolution était considérée (et l'est encore actuellement) par les formateurs comme un problème externe important. Ils lui ont accordé un traitement particulier, y compris en termes de mise en exergue de routines : des mises en commun et pas des corrections, donner la parole aux élèves, des formats de séances, de séquences… (cf. oral du concours). On peut supposer que c'est devenu une préoccupation pour les enseignants, et donc un problème interne, et ce d'autant plus

que de nombreuses injonctions institutionnelles le leur rappellent. Cela peut avoir induit des pratiques susceptibles de créer de nouvelles questions (identifiées (par nous) comme un problème externe) comme celle de la minoration des institutionnalisations. Cela reste toutefois encore à vérifier, mais certains indices nous le laissent penser (Coulange, 2010).

Si l'identification des questions de la profession nous semble incontournable, la présentation d'alternatives viables l'est aussi.

4 Enrichir les pratiques des formés en partant des pratiques

Il s'agit pour nous d'élargir le champ des possibles pour l'enseignant, notre but étant de diversifier les modalités d'investissement des marges de manœuvre qui lui restent. Nous adoptons l'idée de faire travailler les débutants sur des pratiques proches des leurs (Valsiner (1997)), qui seraient dans leur 'Zone Proximale de Développement des Pratiques', modèle Vygotskien déjà utilisé pour les apprentissages des élèves. Nous faisons ainsi l'hypothèse que les pratiques peuvent évoluer à condition de s'appuyer en formation sur des pratiques ayant suffisamment de proximité avec celles des participants pour que ces derniers se reconnaissent et ne rejettent pas tout en bloc.

Enrichir les pratiques peut signifier par exemple présenter la diversité des stratégies d'enseignement possibles, préciser les différents types d'activités à proposer aux élèves. Cela devrait amener le professeur des écoles à adapter des situations d'apprentissage (trop souvent construites pour un public élève standard) en vue d'un enseignement adapté au contexte de sa classe, par exemple en ZEP en prenant en compte les difficultés spécifiques de ce public, ou dans une classe à plusieurs niveaux, tout en assurant les apprentissages visés par la scolarité obligatoire. Il s'agit en particulier de distinguer ce qui « peut bouger » et ce qui est incontournable, de reconnaître le « potentiel » des élèves même si ce qu'ils produisent semble « éloigné » de ce qui est attendu…

V - CONCLUSION : UN ENJEU DES ESPÉ

Nous pensons qu'un enjeu actuel de la création des ESPÉ est la constitution d'un ensemble de savoirs de formation issus de la recherche mais aussi de l'expérience accumulée des formateurs afin d'enrichir les pratiques et d'accroître les marges de manœuvre des enseignants. Ces savoirs pourraient être notamment constitués de certains résultats didactiques décrivant les cheminements cognitifs possibles des élèves relatifs à l'apprentissage d'un contenu donné (passages obligés, erreurs fréquentes, étapes dans la conceptualisation) et des itinéraires susceptibles d'optimiser ces cheminements (situations de référence). À cela pourraient s'ajouter les savoirs issus de la transposition décrite ci-dessus. Enfin, il nous paraît indispensable de capitaliser les savoirs d'expérience construits depuis plusieurs dizaines d'années par les formateurs, notamment ceux relatifs aux stratégies et situations de formation.

La constitution de cet ensemble de savoirs professionnels ne peut se faire que dans le cadre d'une équipe multi catégorielle de formateurs mixant chercheurs, enseignants de terrain, conseillers pédagogiques et formateurs professionnels.

De façon générale, il semble important de tenir compte du décalage entre ce qui peut être valorisé dans la recherche et ce qui peut être valorisé comme ressource professionnelle effective pour de futurs enseignants.

La mise à distance critique, inhérente à la recherche, ne va pas toujours de pair avec les nécessités quotidiennes du praticien dans sa classe qui doit agir, prendre des décisions…

VI - BIBLIOGRAPHIE

BUTLEN D. (1995) Vers une didactique professionnelle, *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome IV, Angers 1995, COPIRELEM – ARPEME.

BUTLEN D., CHARLES-PÉZARD M., MASSELOT P. (2012) Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique in *actes du colloque « Espace Mathématique Francophone »* Genève, Suisse.

CHARLES-PÉZARD M. (2010) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques*, VOL 30-2, Grenoble, La Pensée Sauvage, 197-261

CHARLES-PÉZARD M., BUTLEN D., MASSELOT P. (2012) Professeurs des écoles débutants en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ? Grenoble, La Pensée Sauvage

ROBERT A. (1995) Mathématiques et didactique en formation des PE, *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome IV, Angers 1995, COPIRELEM – ARPEME.

VII - ANNEXE 1 : IUFM DE CRÉTEIL - UPEC

Master Education et métiers de l'enseignement du 1er degré

Objectifs :

- Professionnaliser de futurs enseignants du 1er degré pour qu'ils exercent, de façon optimale dès la première année de mise en contact avec la classe et l'établissement, un métier qui exige de maîtriser plusieurs domaines de savoirs et de compétences (polyvalence). Il s'agit de proposer une formation qui leur permette de passer progressivement à l'expertise, c'est-à-dire à la capacité de problématiser sur le terrain et en partenariat.

- Permettre aux étudiants d'obtenir le concours de recrutement des professeurs des écoles en incluant un entrainement à ses épreuves.

- S'appuyer sur la recherche pour armer les pratiques professionnelles, les adapter aux évolutions à venir et permettre une éventuelle poursuite d'études en doctorat.

- Faciliter l'insertion des étudiants ou la réorientation à terme des enseignants dans d'autres domaines professionnels relevant des champs de l'éducation.

M1 :

Organisation générale des études

Premier semestre :

UE1 : Savoirs disciplinaires (programmes du primaire) en complément des parcours antérieurs de l'étudiant (130 h).

UE2 : Approches institutionnelles, psychologiques et sociologiques de l'école et de l'enfant (60 h).

UE3 : Recherche et approfondissement dans une thématique optionnelle (initiation à la recherche et approfondissement) (44 h).

(Nota : Le choix d'une option entraîne sa continuation dans les UE6, 9 et 13).

Deuxième semestre :

UE4 : Disciplines des épreuves d'admissibilité du concours de recrutement des professeurs des écoles : préparation des épreuves et approches didactiques (167 h).

UE5 : L'école, ses publics et ses partenaires (42 h).

UE6 : Recherche et approfondissement dans une thématique optionnelle (27 h). Réalisation d'une note de recherche.

Enseignements supplémentaires facultatifs offerts aux semestres 1 et 2 - Prérequis au concours de recrutement des professeurs des écoles :

- Langue vivante (36 h) + 2 modules optionnels (8 h)

- Certificat Informatique et Internet niveau 2 enseignant (C2I2e) (12 h)

- Secourisme- prévention et secours civiques de niveau 1 (10 h)

- Mise à niveau dans une discipline de l'écrit du concours en plus des heures de l'UE1 (24 h).

M2 :

Organisation générale des études

Troisième semestre :

UE7 : Préparation des épreuves d'admission du concours de recrutement de professeurs des écoles (66 h).

UE8 : Pratique réflexive du métier, gérer la polyvalence (140 h).

UE9 : Accompagnement et approfondissement dans la thématique de recherche choisie. Réalisation d'un mémoire (21 h).

Quatrième semestre :

UE10 : Préparation des épreuves d'admission du concours de recrutement de professeurs des écoles (66 h).

UE11 : Connaissance du système scolaire et préparation de la seconde épreuve orale du concours : " Agir en fonctionnaire... " (33 h).

UE12 : Pratique réflexive du métier, gérer la polyvalence, approches réflexives de situations d'apprentissage (75 h).

UE13 : Accompagnement et poursuite de la réflexion sur la recherche. Réalisation d'un mémoire (33 h).

Enseignements supplémentaires facultatifs offerts aux semestres 3 et 4 - Prérequis au concours de recrutement des professeurs des écoles :

- Langue vivante (36 h) + 2 modules optionnels (8 h)
- Certificat d'informatique et internet niveau 2 enseignant (C2I2e) (12 h)
- Travail sur le corps et la voix dans l'optique de la préparation aux oraux du concours (10 h)

Enseignements supplémentaires offerts en septembre :

- Entraînement aux épreuves du concours de recrutement des professeurs des écoles (48 h)

VIII - ANNEXE 2 : IUFM DE VERSAILLES - UCP

Master Education et métiers de l'enseignement du 1er degré

Parcours 1 : Enseigner en école maternelle et élémentaire – EEME

M1 :

UE1 : Savoirs transversaux et initiation à la recherche

EC1 : Connaissance de l'institution scolaire et du système éducatif. Connaissance de l'enfant, des élèves et de leurs démarches d'apprentissage. (52 h)

EC2 : Initiation à la recherche : méthodologie, état des lieux d'une question de recherche ; méthodologie du recueil de données et de l'analyse. Élaboration d'un écrit de recherche. (20 h)

UE 2 : Stages et compétences transversales

EC1 : Stage d'observation et stage de pratique accompagnée (21 h)

UE 3 : Éléments de culture disciplinaire et didactique Préparation aux épreuves écrites du concours

EC1 : Connaissances nécessaires à l'enseignement du français à l'école primaire : maîtrise de la langue française orale et écrite, lecture, écriture et littérature. Enjeux didactiques (100 h)

EC3 : Connaissances nécessaires à l'enseignement de l'histoire, de la géographie et de l'ICM à l'école. (68 h)

EC2 : Connaissances nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école (100 h)

EC4 : Connaissances nécessaires à l'enseignement des sciences et de la technologie à l'école (68 h)

UE 4 : Enseignements complémentaires (quatre au choix soit 4 x 18 h)

EC1 : Allemand ou Anglais ou Espagnol : Connaissances nécessaires à l'enseignement d'une LVE à l'école

EC2 : Scolarisation des jeunes enfants

EC3 : Outils pour communiquer : technologies usuelles de l'information et de la communication. Préparation au C2i2e

EC4 : Connaissances et compétences nécessaires à l'enseignement de l'EPS à l'école.

EC5 : Connaissances et compétences nécessaires à l'enseignement des arts visuels à l'école

EC6 : Connaissances et compétences nécessaires à l'enseignement de l'éducation musicale à l'école

EC10 : Littérature de jeunesse de la Petite Section au CM2.

EC11 : Histoire des arts

EC12 : Éducation artistique et culturelle

EC13 : Communication et multimédia

EC14 : Valorisation de l'engagement étudiant

EC15 : Préparation aux concours administratifs de la fonction publique

M2 :

UE1 : Savoirs transversaux et formation par la recherche

EC1 : Connaissance de l'institution et éthique professionnelle Éthique et responsabilité (44 h)

EC2 : Méthodologie de la recherche. Recueil et exploitation de données ; articulation avec l'observation et la mise en œuvre de pratiques professionnelles lors des stages. Élaboration du mémoire avec suivi sous forme d'ateliers et tutorat individuel. (22 h)

UE 2 : Stages et compétences transversales

EC1 : Stage en responsabilité (36 h)

UE 3 : Éléments de culture disciplinaire et didactique Préparation aux épreuves écrites puis orales du concours

EC1 (1ère partie) : Connaissances nécessaires à l'enseignement de la littérature et de la langue française, de l'histoire, de la géographie et de l'ICM à l'école. Préparation aux épreuves écrites du concours (30 h)

EC1 (2ème partie) : Enjeux de l'enseignement de la langue française et didactique de l'oral, de la lecture et de l'écriture à l'école maternelle et élémentaire. (72 h)

EC2 (1ère partie) : Connaissances nécessaires à l'enseignement des mathématiques, des sciences et de la technologie à l'école primaire et appropriation de ressources didactiques. Préparation aux épreuves écrites du concours (30 h)

EC2 (2ème partie) : Enjeux de l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle et élémentaire et appropriation de ressources didactiques. (72 h)

EC3a : Enjeux de l'enseignement des arts visuels à l'école (54 h)

EC3b : Enjeux de l'enseignement de l'éducation musicale à l'école (54 h)

EC3c : Les démarches d'enseignement et d'apprentissage en EPS à l'école primaire (54 h)

UE 4 : Enseignements complémentaires (quatre au choix soit 4 x 18 h)

EC3 : Outils pour communiquer : technologies usuelles de l'information et de la communication

EC4 : Connaissances et compétences nécessaires à l'enseignement de l'EPS à l'école

EC5 : Connaissances et compétences nécessaires à l'enseignement des arts visuels à l'école

EC6 : Connaissances et compétences nécessaires à l'enseignement de l'éducation musicale à l'école

EC7 : Concevoir un projet dans le domaine « Découvrir le monde » en maternelle

EC8 : Concevoir et organiser des séquences d'enseignement en histoire-géographie et ICM à l'école

EC9 : Concevoir et organiser des séquences en sciences et technologie à l'école

EC 10 : Littérature de jeunesse de la Petite Section au CM2

EC11 : Histoire des arts

EC12 : Education artistique et culturelle

EC13 : Communication et multimédia

EC14 : Valorisation de l'engagement étudiant

EC15 : Préparation aux concours administratifs de la fonction publique

EC16 : Allemand ou Anglais ou Espagnol : Connaissances et compétences didactiques nécessaires à l'enseignement d'une LVE à l'école

EC17 : Renforcement des connaissances en littérature, langue française, histoire, géographie et ICM : éléments de formation en vue de la préparation aux épreuves écrites de la session suivante.

EC18 : Renforcement des connaissances en mathématiques, sciences et technologie : éléments de formation en vue de la préparation aux épreuves écrites de la session suivante.

EC19 : Apprendre et enseigner dans le cadre de la polyvalence à l'école maternelle

IX - ANNEXE 3 : IUFM DE CRÉTEIL - UPEC

CADRAGE TRAVAUX Option recherche n°1 : **NOTE DE RECHERCHE (M1)**

La note de recherche demandée dans le cadre de cette option recherche permettra à l'étudiant de s'engager dans une démarche de recherche en didactique des mathématiques, à visée professionnalisante.

La note sera structurée en plusieurs parties (décrites ci-après) et comprendra environ 30 pages (soit 60 000 signes (espaces compris), si on utilise la police Times New Roman, 12, Interligne 1,5, marges de 3), bibliographie comprise et annexes en supplément.

- La première partie sera composée d'un questionnement qui s'intéressera à : un thème mathématique spécifique, un problème d'enseignement, un phénomène d'apprentissage que vous avez observé, des difficultés rencontrées par les élèves décrites dans un article, etc.
- La deuxième partie sera une ébauche bibliographique autour des questions posées dans la partie précédente et devra rendre compte de lectures d'articles ou de chapitres d'ouvrages (entre 3 et 5 suivant la nature des documents). Il s'agira à la fois d'en résumer le contenu et d'en faire une note critique. Vous pourrez articuler la présentation de vos lectures dans la perspective de votre questionnement.
- La troisième partie synthétisera les deux parties précédentes et devra déboucher sur une problématique de recherche plus fine que le questionnement de la première partie. Cette problématique vous permettra d'envisager une première expérimentation (qui sera à décrire au niveau théorique dans la note de recherche) et pourra constituer une base pour une poursuite de ce travail en M2. L'expérimentation en question pourra revêtir différentes formes (évaluation diagnostique, questionnaire, situation-problème, analyse et comparaison de documents pour la classe, etc.) et pourra être réalisée lors d'un stage (dans la mesure du possible). Seule l'analyse a priori de cette (petite) expérimentation est attendue dans la note de recherche : l'analyse des résultats de celle-ci ne figurera pas dans la note de recherche elle-même, mais si vous avez la possibilité de la conduire, elle pourra être utilisée explicitement pour définir la suite de votre travail.
- La dernière partie proposera une conclusion reprenant votre problématique de recherche et explicitant vos perspectives (méthodologiques, théoriques, expérimentales ...) pour la suite de votre travail en M2.

La présentation et les exigences bibliographiques sont les mêmes que pour le mémoire. Les références seront présentées en respectant les normes APA, auxquelles vous avez été initiés lors de la séance en BU (http://www.unites.uqam.ca/grem/colloque/documents/NORMES_APA.pdf)

Une présentation orale de ce travail pourra être envisagée en fin d'année suivant les possibilités qui pourront être dégagées.

CADRAGE TRAVAUX Option recherche n°1 : **MÉMOIRE (M2)**

I. RAPPELS

La visée du mémoire de Master consiste principalement à familiariser des étudiants avec les écrits, les démarches et les objets de la recherche, afin d'étayer l'analyse des pratiques professionnelles, et ainsi contribuer à la construction d'une posture professionnelle. Le mémoire doit donc répondre à des exigences de rigueur méthodologique et de clarté théorique.

Cadre théorique

Le cadre théorique, défini par les travaux scientifiques consultés et retenus, permet de formuler et/ou reformuler les questions de la recherche et ainsi d'affiner la problématique. Il contribue à décrire les choix argumentés de la recherche de l'étudiant. Ce cadre théorique, qui pourra être composé de l'interaction entre plusieurs cadres théoriques, devra également permettre de conduire les analyses a priori et a posteriori des expérimentations.

Reconfiguration de la question de départ

La question de départ évolue tout au long du mémoire, et se nourrit des apports théoriques et des découvertes liées à l'analyse des données. Elle vise la compréhension et/ou l'explication et/ou l'interprétation de phénomènes empiriques, et contribue elle-même à l'évolution des hypothèses de recherche éventuellement formulées au début du travail.

Recueil des données

Les données peuvent être constituées :

- d'observations de séances de classe ;
- de comparaisons de manuels scolaires ;
- de la mise en place de protocoles d'observation (grille d'analyse) ;
- de travaux d'élèves, enregistrements ou autres (dans le cadre d'une expérimentation en classe) ;
- d'entretiens ;
- de questionnaires.

Le choix de tel ou tel type de recueil doit être justifié par la question située au cœur du mémoire ; le choix retenu peut consister à adopter l'une ou l'autre des méthodes, ou à croiser plusieurs méthodes (par exemple observation et questionnaires). C'est ainsi que sera justifiée la méthodologie de la recherche.

II. ORGANISATION DU MÉMOIRE

L'introduction doit faire état de la question de départ et, éventuellement, des hypothèses initiales (de travail et de recherche) ; elle doit préciser le but de la recherche, annoncer le plan et mentionner tout élément susceptible de faciliter la lecture du mémoire. L'introduction doit également situer le travail par rapport à une littérature existante : la problématique sera affinée ensuite.

Le corps du mémoire s'organise autour de la question initiale, qui se problématise tout au long du travail ; il comprend un état des lieux, explicite et argumenté, en matière de travaux de recherches sur ou autour de la question posée, mentionne les concepts, modèles et autres éléments théoriques sur lesquels il s'appuie. Il mentionne et justifie la (les) méthode(s) d'analyse retenue, les modalités de recueil des données, et présente les analyses elles-mêmes.

La conclusion retrace rapidement l'évolution de la question initiale, fait apparaître les domaines qui restent ouverts ou non visités, ainsi que les questions nouvelles que le mémoire a suscitées. Elle fait état des difficultés rencontrées, au plan méthodologique et conceptuel, et des limites de cette recherche. Cette conclusion pourra également ouvrir la recherche sur des perspectives professionnelles.

III. INDICATIONS PRATIQUES

- Rappel de la décision prise en réunion des responsables d'options : la longueur attendue est d'une cinquantaine de pages. On peut traduire cette longueur en 10 000 signes (espaces compris) environ (soit 50 pages de 2000 signes, si on utilise la police Times New Roman, 12, Interligne 1,5, marges de 3 cm).
- Couverture et page de garde : indiquer le nom de l'étudiant, le numéro d'étudiant, le titre du mémoire, le diplôme (master « Éducation et métiers de l'enseignement du premier degré », 2ème année), l'intitulé de l'option et l'année universitaire.
- Quatrième de couverture : La présence d'un résumé n'est pas obligatoire.
- La présence des références bibliographiques à la fin du mémoire est indispensable. Ces références seront présentées en respectant des normes cohérentes, de préférence les normes APA, auxquelles ont été initiés les étudiants dans les options qui ont bénéficié des intervenants de la BU.

Se référer aussi aux normes APA pour les notes de bas de page, etc. (voir par exemple http://www.unites.uqam.ca/grem/colloque/documents/NORMES_APA.pdf)

- Des annexes peuvent figurer en plus du mémoire lui-même (ensemble des matériaux qui ont été analysés dans le mémoire : corpus, données, entretiens retranscrits, enregistrements de séances, photos, etc. en fonction du sujet).

IV. SOUTENANCE

- Le jury est composé de deux enseignants : pour les options gérées par l'IUFM, un enseignant-chercheur, docteur ou enseignant reconnu par ses publications dans des revues scientifiques, et un autre enseignant ou maitre formateur. Le directeur du mémoire est membre du jury.
- Durée de la soutenance : 45 minutes (environ 15 min de présentation et 30 minutes de réponses aux questions/discussion).
- Les mémoires sont adressés à votre directeur de mémoire en version numérique et deux exemplaires papier. Un exemplaire supplémentaire est déposé au secrétariat du site de rattachement de l'étudiant. Une version électronique du mémoire, dernière version, devra être déposée sur EPREL dans le dossier réservé à cet effet (rubrique « Travaux »).
- La date et le lieu de soutenance, ainsi que la composition du jury de soutenance est fixée par le directeur du mémoire, en accord avec le responsable de l'option, et dans le cas des options IUFM en lien avec le secrétariat du site où a lieu la soutenance. Les notes doivent être entrées, comme déjà indiqué, sur l'application informatique dédiée avant le 20 mai (1ère session) et avant le 4 juillet (2ème session). Il n'y a pas de session en septembre. Le respect de ces dates est donc important, l'absence de saisie de notes en temps et heure risque d'empêcher un étudiant de se voir attribuer le master et donc, s'il est reçu au concours, de ne pas pouvoir bénéficier cette année de son admission.

Compléments :

"La soutenance aura pour but de rendre compte, de manière synthétique, du travail de recherche effectué dans le cadre du mémoire (les membres du jury auront lu le mémoire). Il conviendra de repréciser la problématique, l'expérimentation et la méthodologie adoptée ainsi que les conclusions. Dans un second temps vous devrez exposer quels enseignements et perspectives vous avez pu dégager, d'un point de vue professionnel, de cette expérience de recherche en didactique des mathématiques.

La soutenance se déroulera comme suit :

15 min : présentation du mémoire

25-30 min : questions du jury

Vous pouvez, si vous le souhaitez, accompagner votre exposé d'une présentation numérique ou autre (diaporama, transparents, etc.).

La clarté de vos propos et de votre démarche participera de l'évaluation de la soutenance.

Barème :

- Problématique et Articulation question de recherche/ question professionnelle : 4
- Expérimentation et méthodologie adoptée : 3
- Analyses et synthèse : 3
- Bibliographie (choix et cohérence) : 2
- normes APA (Biblio, citations) + orthographe : 2
- Soutenance : clarté de l'exposé (3) + qualité des réponses (3)

X - ANNEXE 4 : IUFM DE VERSAILLES - UCP

Note de cadrage 2012-2013 de l'EC2 de l'UE1 de la spécialité « Métiers de l'éducation et de l'enseignement du premier degré »

Cette note 2012-2013 s'appuie sur les notes précédentes (années universitaires 2010-2011 et 2011-2012). Elle en reprend les principaux éléments et les actualise à la lumière de l'annualisation et de l'expérience des années écoulées.

Les descriptifs des EC2 de l'UE1 en M1 et en M2 fixent le cadre dans lequel seront menés les travaux des étudiants et rédigés les écrits qui en rendront compte. La première année (TER ou Travail Encadré de Recherche) a pour objectif principal l'initiation à la méthodologie de la recherche. La deuxième année (Mémoire) poursuit ce travail méthodologique en concrétisant un projet qui articule ancrage théorique et dimension expérimentale. Il est recommandé que le travail de deuxième année soit dans le prolongement de celui de la première année (à titre exceptionnel, il est possible de réorienter la recherche entreprise en M1).

1. Adossement à la recherche

La légitimité scientifique du master est liée aux travaux des laboratoires d'appui du master :

- EMA (École, Mutations, Apprentissages)
- CRTF (Centre de Recherche Textes et Francophonie)
- LDAR (Laboratoire de Didactique André Revuz - Didactique des mathématiques et des sciences)
- PARAGRAPHE (équipe Compréhension, Raisonnement, et Acquisition de connaissances)

L'adossement à la recherche et l'appui sur les connaissances et pratiques de formation sont tous deux nécessaires pour répondre aux impératifs de la maquette du master et des usages universitaires.

Le choix a été fait à l'IUFM d'associer étroitement l'ensemble des formateurs qui le souhaitent à l'encadrement des TER et Mémoires ainsi qu'à la dynamique de recherche de l'établissement. Leur expérience et leur connaissance de la formation des enseignants est nécessaire à une bonne articulation formation/recherche.

Pour renforcer cette articulation, des séminaires-ateliers de recherche ont été mis en place et se poursuivront cette année. Ils ont pour but de favoriser une réflexion commune sur des thématiques ciblées aussi bien au niveau théorique que méthodologique. Ce dispositif devrait donc favoriser la mutualisation des pratiques d'accompagnement des travaux de recherche et la production de repères communs. Les séminaires-ateliers proposés par des enseignants-chercheurs pourront reprendre /approfondir /recouper les questions soulevées lors des ateliers TER et mémoires mais ils ont principalement vocation à développer une dynamique réflexive commune.

2. Organisation pratique de l'accompagnement des TER et Mémoires

La première et la deuxième année débutent par des conférences introductives (deux en M1 et une en M2). Leur but est de présenter ce qui est attendu d'un TER (en M1) et d'un Mémoire (en M2) en référence aux descriptifs concernés. Les conférenciers seront ainsi amenés à définir ce que signifient, dans leur domaine de recherche : « problématique », « état de la question », « cadre théorique », « recueil de données », « méthodologie » et « bibliographie » en montrant de quelle manière ces éléments participent de la construction d'un objet de recherche et de l'élaboration de la démarche de recherche. Ce sera aussi l'occasion de préciser le rôle de l'écrit dans la production scientifique et de montrer la spécificité des écrits de recherche.

M1 – Élaboration du TER

Cette présentation accompagne la fiche descriptive de l'UE1-EC2 (classique et alternance) et y apporte quelques précisions.

Septembre	Les formateurs encadrant les TER feront connaitre aux directeurs d'études du site, les thématiques de recherche (relativement larges) autour desquelles ils souhaitent diriger des Septembre travaux étudiants.
	Les étudiants émettront des voeux et seront répartis dans les différents ateliers proposés (TP).
Octobre → Janvier	L'étudiant sera amené à délimiter une question de recherche, à établir une première bibliographie éventuellement accompagnée de notes de lecture.
Janvier	Une note intermédiaire est attendue pour les étudiants inscrits en contrôle continu.
Février → Avril	L'étudiant proposera une première formulation de la problématique et, sur le plan méthodologique, concevra un dispositif de recueil et d'analyse de données.
Mai	L'étudiant devra remettre un dossier écrit d'une vingtaine de pages intégrant des éléments théoriques, la problématique et une méthodologie de recueil de données. Il devra montrer comment son travail peut se concrétiser dans l'élaboration du mémoire de 2ème année. En outre, l'étudiant devra montrer des capacités : - à citer et donner les références des textes convoqués pour le dossier ; - à présenter une bibliographie ; - à utiliser une langue française correcte respectant les rectifications orthographiques de 1990.
	Le dossier sera soutenu devant un jury constitué de deux formateurs, dont le formateur responsable de l'atelier.

M2 – Élaboration du Mémoire

Cette présentation accompagne la fiche descriptive de l'UE1-EC2 (classique et alternance) et y apporte quelques précisions.

Septembre	Reprise de contact entre l'étudiant et son tuteur de TER (dans les cas particuliers, attribution d'un tuteur en fonction des réorientations de sujet ou des vœux des étudiants nouveaux entrants).
Octobre → Janvier	L'objectif pour les étudiants qui ont validé leur TER est d'approfondir ce travail en fonction des hypothèses émises l'année précédente. Un complément de lecture peut être demandé. Un lien explicite doit être fait avec l'exercice du métier lors des stages. Dans la mesure du possible, cette période sera celle du recueil de données pour laisser le temps à l'analyse et à la synthèse durant la deuxième partie de l'année universitaire.
Janvier	Une note intermédiaire est attendue pour les étudiants inscrits en contrôle continu.
Février → Avril	L'étudiant analysera ses données et mettra en perspective les résultats. C'est la période de finalisation de la rédaction du Mémoire.
Fin Avril	L'étudiant devra remettre un mémoire (entre 30 et 40 pages) qui présentera une problématique, une bibliographie pertinente au regard de la problématique, une cadre théorique et la méthodologie ayant permis recueil et traitement des données. La conclusion du mémoire proposera des résultats qui seront contextualisés dans l'état de la question.

	En outre, l'étudiant devra montrer des capacités : - à produire un écrit structuré et bien documenté ; - à présenter une bibliographie ; - à utiliser une langue française correcte au niveau de la formulation et de l'orthographe (cf. M1)
Mai	Le mémoire sera soutenu devant un jury constitué de deux formateurs, dont le formateur responsable de l'atelier.

UNE EXPÉRIENCE DE FORMATION CONTINUE EN LIGNE ET À DISTANCE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Jean-Philippe GEORGET
Maître de conférences, Normandie Université
CERSE, EA 965
jean-philippe.georget@unicaen.fr

Avénilde ROMO-VASQUEZ
Chercheuse, Instituto Politécnico Nacional, Mexcico
CICATA-IPN
avenilderv@yahoo.com.mx

Résumé
Dans le cadre d'un programme de formation continue en ligne et à distance destiné à des enseignants latino-américains, nous avons proposé un module consacré aux ressources enseignantes. La manière de concevoir et de mettre en place ce module nous a fait réfléchir, au-delà des ressources didactiques pour l'enseignant, sur les potentialités de la formation continue en ligne et à distance en didactique des mathématiques. Les enseignants participant au module habitent dans des pays différents tels que l'Argentine, la Colombie et le Mexique. Les programmes, les traditions d'enseignement et les conditions institutionnelles sont très différents d'un pays à l'autre, ce qui pose un défi au moment de concevoir une formation commune en didactique des mathématiques. Comment peut-on prendre compte ces différences ? Quels types d'activités peuvent être utilisés dans ce contexte de formation ?
Pour aborder ces questions, nous proposons de présenter les caractéristiques du module conçu et les analyses préliminaires et partielles des activités proposées aux enseignants participant à cette formation.

Le master en didactique des mathématiques PROME CICATA-IPN (Mexico) s'adresse à des enseignants des mathématiques d'Amérique latine, en service, de différents niveaux d'enseignement. L'objectif de ce master est de donner une formation didactique aux participants, de fournir des outils qui permettent de contrôler, de modifier et d'adapter leur pratique aux demandes sociales qui évoluent rapidement. Par exemple, il peut s'agir d'intégrer des nouvelles technologies et de connaître les effets de cette intégration, de rapprocher l'enseignement des mathématiques des besoins de la vie quotidienne des élèves, en tant que futurs citoyens, et aussi de leur permettre de poursuivre leurs études (socle commun). Enfin, cette formation ne cherche pas à former des chercheurs en didactique, mais elle peut contribuer à former des formateurs d'enseignants.

Les enseignants qui participent à cette formation habitent dans différentes régions du Mexique et de l'Amérique Latine, ils partagent le même métier mais ils appartiennent à différentes traditions d'enseignement et sont soumis à différentes contraintes institutionnelles. Ceci peut enrichir leurs regards sur leur pratique mais la conception d'une formation adaptée à une telle variété de participation reste un défi.

La formation a lieu en ligne et à distance et s'organise en modules d'enseignement qui se déroulent sur plusieurs semaines. Dans cette contribution, un seul module d'enseignement est présenté. Il concerne la conception et l'analyse de ressources enseignantes.

I - CONTEXTE ET ACTIVITÉS DU MODULE CONSACRÉ AUX RESSOURCES ENSEIGNANTES

Au moment de commencer le module consacré aux ressources enseignantes, les enseignants (11 enseignants de niveaux d'enseignement du collège à l'université) ont déjà eu des apports en didactique et pédagogie dans d'autres modules. Les enseignants ont, par exemple, abordé la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998), la théorie anthropologique du didactique (Chevallard), ils ont déjà fait des analyses a priori et a posteriori de situations d'enseignement.

1 Objectifs du module d'enseignement

Ce module d'enseignement était conçu avec l'objectif de mettre à disposition des enseignants de mathématiques des outils théoriques et méthodologiques pour créer et évaluer des ressources enseignantes. Ces apports semblent pertinents pour que les enseignants aient des outils pour analyser leur pratique, mais aussi pour enrichir leur capacité à interagir avec leurs collègues et pour analyser des ressources produites par d'autres. Ici, seules des ressources didactiques dactylographiées sont considérées, bien que le mot ressources puisse revêtir un caractère plus large, celui de re-sourcer les pratiques enseignantes (Adler 2000).

2 Les participants : professionnels et étudiants

Les participants du cours ont un double statut : ils sont à la fois des enseignants de mathématiques en service et ils sont des étudiants de deuxième année d'un master en didactique des mathématiques.

En tant que professionnels expérimentés, les participants du cours sont supposés avoir beaucoup d'expérience dans l'utilisation de ressources enseignantes – manuels, activités proposées dans le programme, etc. Ils ont donc des outils d'analyse des ressources plus ou moins naturalisées. Ils ont aussi des conceptions sur les ressources, autant sur le processus de conception que sur le produit fini.

Par exemple, ils peuvent avoir des idées pertinentes sur l'enseignement, même à des niveaux d'enseignement qui ne sont pas les leurs. Par contre, il n'est pas sûr qu'ils aient de l'expérience dans l'analyse des ressources consciente et outillée.

En tant qu'étudiants, les participants sont aussi supposés avoir des connaissances didactiques disponibles et mobilisables (Robert 1998) pour évaluer une ressource didactique. En effet, ils ont suivi d'autres modules d'enseignement du master et on peut donc s'attendre à certains réinvestissements de notions ou de techniques, sans qu'il y ait toujours un appel explicite au réinvestissement de ces notions ou de ces techniques.

3 Conception du module d'enseignement

Au moment de concevoir le module d'enseignement, différentes questions se sont posées : Les participants du cours sont-ils amenés à créer des ressources didactiques pour d'autres enseignants dans leur pratique ordinaire ? Disposent-ils d'outils théoriques et méthodologiques pour évaluer la performance des ressources créées ? Comment faire pour que les participants du cours puissent créer des ressources pour d'autres enseignants ? Les enseignants conçoivent des ressources pour leur pratique quotidienne, mais comment le font-ils ? Est-ce de manière formelle ? Créer une ressource de manière formelle implique, selon nous, de décrire les objectifs de la ressource, son utilité – c'est à dire la façon dont elle va effectivement permettre à l'enseignant qui l'utilise de faire ce qu'elle décrit –, ses potentialités et ses limites. En explicitant ce qui est attendu (analyse *a priori*), un enseignant participant du cours pourrait évaluer l'utilité de la ressource en comparant ce qui est prévu avec ce qui se passe réellement (analyse *a posteriori*). Pour ce faire, des outils théoriques et méthodologiques ont été proposés aux participants du cours et ils ont eu l'occasion de les employer dans différentes situations, de se les approprier en fonction des besoins et des résultats obtenus. À plus long terme, ces apports peuvent permettre de comparer des ressources à partir de

critères bien identifiés, de créer de nouvelles ressources et de les faire évaluer par d'autres enseignants.

Autre aspect de ce cours international, les participants peuvent avoir des connaissances de nature différentes et plus ou moins approfondies du contexte d'enseignement des autres participants. En plus de la question de faire créer et analyser des ressources par ces participants se pose donc la question de favoriser des échanges entre enseignants-étudiants qui évoluent dans des contextes différents.

II - ANALYSES PRÉLIMINAIRES DES ACTIVITÉS DU MODULE

Le module d'enseignement est divisé en cinq phases d'une semaine. Chaque phase comprend une ou plusieurs activités qui sont listées succinctement dans le Tableau 1.

Phase 1	Problème *Cordes* (Ermel 1999) : résolution du problème et production d'une ressource (guide didactique) pour le mettre en place dans une classe. Forum pour discuter du problème, de sa nature et de la façon de le présenter en classe
Phase 2	Production d'une ressource pour des enseignants de mathématiques
Phase 3	Lecture d'un document présentant des outils d'analyses et écriture d'une analyse critique de ces outils – Forum pour discuter des outils présentés
Phase 4	Retravailler la ressource produite en phase 2 en utilisant les outils théoriques et méthodologiques – Forum pour préciser la consigne
Phase 5	Faire évaluer la ressource produite dans la phase précédente par un enseignant de mathématiques

Tableau 1. Les phases hebdomadaires du module d'enseignement consacré aux ressources enseignantes.

La recherche menée étant toujours en cours, les analyses présentées dans cette section sont préliminaires au sens où ce sont les toutes premières investigations des données qui sont rapportées ici. Elles restent donc largement à approfondir. À la veille de la mise en place des Écoles supérieures du professorat et de l'éducation (ESPE) en France, il a paru néanmoins intéressant de partager ces premiers résultats. En effet, le contexte de formation et de recherche étant amené à changer radicalement, on peut penser que cette expérience de formation en ligne et à distance s'inscrivant dans la durée préfigure des conditions de formation qui seront plus couramment rencontrées en France dans un avenir plus ou moins proche.

1 Activité 1. Autour du problème *Cordes*

Le problème *Cordes* consiste à déterminer le nombre de cordes reliant des points placés sur un cercle (ERMEL 1999). Le nombre de points peut être fixé à l'avance.

L'activité proposée dans le module d'enseignement consiste, elle, à résoudre le problème des cordes et à produire un guide pédagogique pour un enseignant qui veut mettre en œuvre ce problème en classe. Les consignes proposent par exemple de « présenter les techniques ou différentes manières de résoudre le problème » et de « préciser les interventions possibles de l'enseignant » (degré d'ouverture de la situation). L'activité ne fait aucun appel explicite à d'autres modules d'enseignement, mais les concepteurs attendent des réinvestissements de connaissances de la part des participants au module.

Pour soutenir l'activité, un forum est mis en place. C'est un dispositif souvent utilisé dans ce master en ligne et à distance. Ce forum se présente sous la forme de 3 fils de discussion qui concernent les points suivants :

1. la nature du problème (exercice routinier, ouvert...) ;
2. les techniques de résolution ;
3. le fait de savoir si ce problème constitue ou non une bonne ressource.

L'activité proposée aux participants est donc relativement ouverte. Si elle laisse la place à des réinvestissements de connaissances déjà travaillées dans d'autres modules, les participants restent libres d'y faire appel ou non.

À l'issue de cette activité, les réinvestissements attendus sont rares ou absents. Par exemple, concernant la nature du problème, les discussions précisent rarement le niveau d'enseignement, alors que cette donnée est essentielle pour discuter de la nature du problème et des techniques de résolution. Concernant les techniques de résolution, les enseignants perçoivent bien l'ouverture du problème, notamment en proposant des techniques variées. Ceci étant, ils ne précisent pas toujours explicitement le lien avec leur niveau d'enseignement ou les niveaux d'enseignement qu'ils visent. Par ailleurs, les ressources produites sont relativement « fermées », ce qui contraste avec l'ouverture du problème perçue par les participants. Cette « fermeture » n'est ni justifiée ni discutée dans les contributions des participants.

Une hypothèse plausible qui peut expliquer ce constat est que la tâche initiale prescrite de conception d'un guide pédagogique a pu être redéfinie (Rogalski 2003) par les participants comme une tâche de conception d'un guide pour des enseignants novices. Les participants ont alors pu penser que, pour un premier contact avec le problème *Cordes*, il serait opportun de « bien cadrer » le déroulement de la situation d'enseignement.

Enfin, à la question de savoir si le problème constitue une « bonne » ressource, la question des niveaux d'enseignement est évoquée mais sans approfondissement. La référence aux programmes d'enseignement ou, plus largement, au contexte d'enseignement n'est pas toujours faite.

Les analyses préliminaires de l'activité 1 tendent donc à montrer combien il peut être difficile de formuler les consignes aux participants du module. Il se pose notamment la question de la juste distance entre une terminologie précise, dont la compréhension dépendrait du niveau de réussite des participants aux autres modules d'enseignement, et des consignes relativement ouvertes permettant aux participants de réinvestir des connaissances vues dans d'autres modules d'enseignement.

2 Activité 2. Production d'une ressource didactique

L'activité 2 est, elle aussi, une activité ouverte en tant qu'elle laisse la liberté aux participants de réinvestir les connaissances acquises dans le cadre du master et dans le cadre professionnel. Pour les participants, cette activité consiste à choisir un problème pour le niveau où ils travaillent et à présenter un guide permettant de le mettre en œuvre. À cet égard, cette activité présente des similitudes avec la précédente. Les participants peuvent donc faire des liens avec les productions de leurs pairs, les discussions des forums et leurs propres productions.

Les analyses produites par les participants sont peu approfondies relativement aux apports théoriques et méthodologiques des autres modules d'enseignement. Comme dans l'activité précédente, il se pose la question d'une possible redéfinition de la tâche par les participants. Autrement dit, quels étaient les objectifs des participants pour créer leur ressource ? Il n'est pas sûr que l'analyse plus poussée des productions permette de fournir une réponse plausible à cette question.

3 Activité 3. Analyse critique d'un document présentant des outils d'analyse de ressources

L'activité consiste en l'analyse critique d'un document de synthèse présentant, en espagnol, des outils d'analyses issus d'une thèse de doctorat (Georget 2009) écrite, elle, en français. Ces outils sont basés sur l'ergonomie des ressources et sur les notions de potentiels d'une activité de recherche et de preuve entre pairs (cf. Georget 2010). Les participants ont donc tout loisir de

critiquer ces outils de différents points de vue – « simple » enseignant, étudiant de master, formateur ou formateur en devenir – et de s'intéresser à l'utilité et à l'utilisation possible de ces différents outils.

Un forum est aussi proposé pour discuter des outils présentés dans le document.

Malgré l'ouverture de l'activité, les productions des différents participants sont plus proches de résumés que d'analyses critiques. Certains participants écrivent même qu'ils ne sont pas assez compétents pour donner un avis critique sur des notions et des techniques qu'ils maîtrisent mal.

Même si ce n'est pas exclu, il est probable qu'une analyse plus approfondie des productions n'apporte pas d'élément d'explication sur la teneur des productions. Ici, c'est davantage le contrat didactique au sein du module d'enseignement qui semble le plus à même de les expliquer. Les participants sont des enseignants. Face à des écrits de recherche, ils semblent minorer l'intérêt de donner leur avis étayé par leur expérience d'enseignement, voire de formateur.

4 Activité 4. Reprise de la ressource produite à la phase 2

Cette activité consiste à retravailler la ressource produite à la phase 2 en utilisant les outils théoriques et méthodologiques vus à la phase 3. Un forum est proposé pour discuter et préciser la tâche.

Les consignes aux participants sont plus fermées que pour les activités précédentes car elles demandent explicitement le réinvestissement des outils vus dans l'activité précédente, comme en témoignent les extraits suivants :

- présenter les objectifs, leur lien avec le programme et comment ils peuvent être atteints ;
- expliciter, en détaillant le plus possible, pourquoi la ressource est utile, utilisable et acceptable dans cette classe ;
- préciser la nature de la situation : exercice, problème ouvert ;
- décrire les potentiels de la situation présentée.

À l'inverse des activités précédentes, il s'agit donc là d'une tâche fermée qui laisse peu de liberté aux participants dans l'interprétation de la tâche prescrite. Ce choix des concepteurs du module est dû aux manques de réinvestissements des notions et techniques des modules d'enseignement précédents. Il s'agit là « d'assurer » un réinvestissement minimal des connaissances vues lors de la phase précédente. Ce choix peut être critiqué. En effet, les enjeux d'un réinvestissement de connaissances vues dans la phase précédente n'est pas identique à ceux d'un réinvestissement de connaissances vues dans d'autres modules d'enseignement. C'est davantage le contexte d'un cours à distance qui a pesé, plus que celui d'une recherche scientifique.

L'analyse préliminaire de cette activité est toujours en cours et il n'est pas possible d'en livrer une synthèse au moment de l'écriture de cette contribution.

5 Activité 5. Faire évaluer la ressource produite par un enseignant de mathématiques

Conformément à l'un des objectifs généraux du master, cette activité vise à faire interagir les participants avec un de leurs pairs, un enseignant de leur environnement professionnel ou bien un enseignant participant au module.

L'activité consiste à faire évaluer la ressource produite à la phase précédente par un autre enseignant de mathématiques sous la forme d'un entretien. Pour outiller les interactions, un guide à base de questions réinvestissant les outils présentés lors du module a été proposé.

Pour illustrer la teneur de ce guide d'entretien, on trouve, parmi les questions proposées pour l'entretien, les questions suivantes :

1. Considères-tu que cette ressource pourrait être utile à ta pratique ?

2. Considères-tu qu'il manque quelque chose ? Quoi ?
3. Penses-tu que cette ressource est suffisamment « flexible » ? Permet-elle de prendre des décisions pour l'utiliser ?
4. Après avoir utilisé cette ressource, les élèves vont-ils apprendre quelque chose ? Quoi ?
5. Considères-tu que cette ressource favorise le débat entre des élèves ? Pourquoi ?
6. Quels changements proposes-tu ?

On retrouve ici des concepts d'ergonomie (utilité, adaptabilité, acceptabilité) et certains des potentiels des situations de recherche et de preuve entre pairs (situation RPP) décrits par Georget (2012, 2010, 2009) tels que le potentiel de débat et le potentiel didactique d'une situation RPP.

L'analyse préliminaire de cette activité est toujours en cours au moment de l'écriture de cette contribution mais une rapide consultation des productions des participants pose la question de savoir si ces derniers accepteraient d'utiliser les ressources telles qu'ils les ont produites dans ce cours s'ils étaient en situation professionnelle. Autrement dit, il semble qu'un contrat didactique non souhaitable se soit établi et que les ressources produites par les enseignants soient des ressources spécifiquement produites au sein d'un module d'enseignement, et qu'elles seraient tout autre hors de ce contexte. Par exemple, il n'est pas certain que les ressources produites tiennent compte de contraintes institutionnelles telles que les programmes en vigueur et du temps « raisonnable » à consacrer à la situation décrite.

III - DISCUSSION DES PREMIERS RÉSULTATS

La présente contribution vise à présenter une expérience menée dans le cadre d'un master international hispanophone destiné à des enseignants de mathématiques. Ce master, en ligne et à distance, a offert un module consacré à la conception et à l'analyse de ressources enseignantes.

Les analyses étant toujours en cours, ce sont seulement des résultats préliminaires et partiels qui ont été présentés.

Ces résultats témoignent des ajustements qui ont été effectués. Après trois activités relativement ouvertes, ce sont deux activités davantage encadrées qui ont été proposées aux participants. En effet, les trois premières activités n'ont pas montré de réinvestissements notables par les participants de notions et de techniques abordées dans d'autres modules d'enseignement, parfois même parmi les plus simples comme la référence aux programmes d'enseignement.

Ce manque de réinvestissement pourrait être simplement attribué aux manques de connaissances des participants mais la présente contribution a mis en évidence que d'autres hypothèses étaient envisageables pour expliquer ce manque.

En premier lieu, ce manque de réinvestissement peut témoigner d'une redéfinition de la tâche par les participants. Une future expérimentation devra donc davantage préciser les consignes données aux participants de façon à limiter cet effet non souhaité.

En second lieu, ce manque de réinvestissement peut témoigner d'un effet du contrat didactique établi dans le module d'enseignement. Cet effet semble, lui, moins simple à contrôler a priori. Une prochaine expérimentation devra permettre d'étudier plus finement ce point en développant des outils méthodologiques non prévues dans l'expérimentation relaté ici. En particulier, des entretiens avec les participants à l'issue du module d'enseignement pourraient se révéler très informatifs à cet égard.

Les perspectives de travail liées à cette contribution sont nombreuses. Il s'agit bien sûr de poursuivre les analyses en cours, mais aussi d'affiner le scénario du module d'enseignement et ces consignes pour le proposer à nouveau l'année prochaine à d'autres participants. Il sera

particulièrement intéressant d'étudier ce que les modifications apportées peuvent apporter dans la qualité et la nature des productions des participants.

IV - BIBLIOGRAPHIE

ADLER J. (2000) Conceptualising resources as a theme for teacher education, *Journal of Mathematics Teacher Education*, **3**, 205-224.

ERMEL (1999) Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM2. Paris : Hatier.

GEORGET J.P. & LABROUSSE B. (2012) Expérimentation d'une ressource pour une situation de recherche et de preuve entre pairs. preuve entre pairs. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012 (GT6, pp. 838–848).ISBN : 978-2-8399-1115-3. URL : http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012.

GEORGET J.P. (2010) De nouveaux outils pour favoriser les activités de recherche et de preuve entre pairs dans l'enseignement. Actes du XXXVII^{e} colloque de la COPIRELEM. La Grande Motte.

GEORGET J.P. (2009) Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants. Thèse de doctorat. Université de Paris Diderot (Paris 7). http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00426603/

MOLINA G., ROMO A & ROSAS A. (2011) Una formación para el profesor de matemáticas en el Programa de Matemática Educativa del IPN. En G. Buendía (Ed.) Reflexión e investigación en matemática educativa. Mexico: Lectorum.

ROBERT A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, **18.2**, 139-190.

ROGALSKI J. (2003) Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques*, **23.3**, 343–388.

GÉOMÉTRIE ET CALCUL NUMÉRIQUE : UN REGARD HISTORICO-ÉPISTÉMOLOGIQUE ET DES RÉFLEXIONS THÉORIQUES POUR L'ANALYSE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES ET DES ENSEIGNANTS

Raquel BARRERA - CURIN
ATER, IUFM de Montpellier
Laboratoire de Didactique André Revuz
quellita@gmail.com

Résumé
À travers cette communication, je voudrais à la fois mettre en valeur les relations entre géométrie et calcul numérique mais aussi mettre en valeur de nouveaux éléments théoriques pour l'analyse du travail mathématique des élèves et des enseignants.
Tout d'abord, je présenterai un aperçu d'une étude de travaux épistémologiques, historiques et didactiques à propos de la relation entre nombres et géométrie rendant compte du rôle médiateur de la géométrie pour la construction du sens de certaines idées mathématiques.
Ensuite, je ferai référence à des réflexions théoriques cherchant des moyens pour l'analyse du travail mathématique des élèves dans le processus de construction du sens d'une idée mathématique. Je présenterai quelques exemples d'un processus visant la construction du sens de la multiplication en géométrie dans un contexte d'apprentissage collaboratif.
Finalement, je partagerai quelques questions se dégageant de ma recherche, autour de la formation et du travail mathématique des futurs enseignants. Ces questions se fondent sur une épistémologie permettant un regard particulier sur le travail mathématique des élèves et les rôles de créateur et de médiateur des enseignants.

Cet article est organisé en trois sections. Dans les deux premières sections, je présente quelques réflexions autour de la relation entre nombres, calcul et géométrie qui résultent de mes recherches sur des travaux historiques, épistémologiques et didactiques. De ces recherches se dégagent des éléments clés qui feront partie des fondements des propositions didactiques présentées brièvement dans la troisième section.

Dans la troisième section, je présente d'abord un aperçu d'une articulation théorique pour l'analyse du travail mathématique des élèves, dans le processus de rencontre d'idées mathématiques autour de nombre, calcul et géométrie. Par la suite, je mets en relation les résultats des réflexions historico-épistémologiques, didactiques et théoriques, dans la présentation de quelques exemples du travail mathématique des élèves rendant compte d'une rencontre géométrique de la multiplication. Dans la dernière partie de cette section, je présente quelques réflexions autour de la formation de futurs enseignants. Ces réflexions portent principalement sur l'importance de favoriser en formation un travail réflexif autour de l'épistémologie et de la didactique des mathématiques. L'idée d'un enseignant créateur et médiateur serait essentielle dans le cadre d'une formation qui lui permet de proposer des espaces de travail mathématiques afin de favoriser chez ses élèves l'émergence et la rencontre des mathématiques.

I - UN REGARD HISTORICO—ÉPISTÉMOLOGIQUE SUR LA RELATION ENTRE GÉOMÉTRIE ET CALCUL

S'intéresser à la notion de multiplication et à ses relations avec la géométrie dans l'histoire ainsi qu'aux études rendant compte d'une analyse épistémologique et didactique, c'est-à-dire d'une

analyse portant sur cette idée mathématique visant la détermination des conditions de sa compréhension (Sierpinska, 1991), est une réflexion qui me semble nécessaire et qui a constitué le premier pas méthodologique pour le démarrage de ma recherche. Je me suis notamment intéressée aux liens entre les significations de la multiplication et la géométrie qui ont été mentionnés ou construits dans l'histoire des mathématiques. Ce sont bien des significations de la multiplication — dont je parle tout d'abord dans un sens plutôt naïf fondé sur leur reconnaissance dans des travaux didactiques précédents (Conne & Lemoyne, 1999 ; Davis &Simmt, 2006 ; Douady, 1986) —, et leur représentation en géométrie, que je cherche à contextualiser d'un point de vue historique et épistémologique. La prise en compte de ce contexte historique et épistémologique enrichit le regard qu'on peut porter sur les contenus mathématiques en question lors de la conception de situations d'apprentissage. Je reviendrai sur cet aspect dans la deuxième section de cette communication.

1 Quelques constats historiques sur les liens entre calcul et géométrie à partir de la représentation de grandeurs

Pour Reyneau, la Géométrie, Science Mathématique Générale, a pour objet la représentation de toutes les grandeurs, et même s'il paraît qu'elle a pour objet particulier les rapports des trois dimensions du corps, des longueurs, des surfaces et des solides, elle peut aussi exprimer toutes les grandeurs particulières et sensibles en les contenant « éminemment » (Reyneau, 1739, p. xviii). En revanche, ce sont l'Arithmétique et l'Algèbre qui constituent la *Science du Calcul des Grandeurs* puisque, permettant de faire des opérations semblables, elles ont une liaison naturelle. La Science du Calcul des Grandeurs contient les Éléments et comprend toutes les mathématiques. Pourrait-on dire que c'est ainsi que commence la divergence entre le calcul et le visuel ? En fait, non. Je dirais que ceci n'est qu'une vision précédente de ce que Bachelard a appelé plus tard la formation de l'esprit scientifique : « sur toutes les questions, pour tous les phénomènes, il faut passer d'abord de l'image à la forme géométrique, puis de la forme géométrique à la forme abstraite, poursuivre la voie psychologique normale de la pensée scientifique » (Bachelard, 1938, p.10). C'est un exemple de l'origine des recherches de la vérité dans les perceptions, là où nous pouvons voir qu'« un nombre entier est celui qui contient exactement l'unité plusieurs fois » (Reyneau, 1739, p. xxvi) et c'est un voyage vers l'acquisition d'un *jugement* (quand c'est l'esprit qui juge un rapport comme vrai) jusqu'au développement du raisonnement.

En suivant l'œuvre de Reyneau, beaucoup de références nous parlent de la richesse du calcul littéral et numérique, sans nécessairement parler d'un lien explicite entre calcul et géométrie. On voit ainsi que ce n'est pas par hasard si, aujourd'hui, le calcul renvoie toujours au numérique. En revanche, je partage son assertion de ne pas permettre un calcul aveugle,

> « comme des artisans qui suivent des Règles dont ils ne savent pas les raisons [...] ; [ceux qui veulent apprendre les Mathématiques] doivent connaître en même temps les raisons sur lesquelles est fondé le calcul. [...] [Ils doivent voir clairement] que ces calculs étant appliqués aux figures de la Géométrie, représentent les rapports qui sont entre les lignes contenues dans ces figures, ceux qui sont entre les parties de ces figures comparées entre elles ou avec les figures entières dont elles sont les parties. » (Reyneau, 1739, p. lii)

En outre, les exemples trouvés dans l'histoire et qui mettent en relation calcul et géométrie rendent compte de l'importance des grandeurs géométriques mesurées (Bkouche, 2009b) auxquelles on associe une évolution des connaissances comme les notions de proportionnalité et de linéarité ainsi que la construction d'une« théorie des grandeurs indépendante de la mesure » (Bkouche, 2009, p. ix).

L'origine de la relation entre géométrie et calcul est ainsi racontée par l'histoire que j'évoque, ici d'une façon très simplifiée. Je reprends la phrase de Rudolf Bkouche lorsqu'il dit que « le calcul littéral a été inventé pour le calcul des grandeurs » (Bkouche, 2009b, p. xi). Puis en suivant certains faits historiques dont Bkouche rend compte, on voit qu'encore plus tard même Leibniz « a cherché désespérément un calcul géométrique, c'est-à-dire portant directement sur les objets géométriques,

ensuite Poncelet et les géomètres projectifs du XIX^{ème} siècle » (Bkouche, 2009b, p. xii).

Je me suis ainsi dirigée vers une recherche historique encore plus spécifique et je me suis notamment centrée sur les relations entre calcul arithmétique et géométrie jusqu'à ce que le calcul des grandeurs ait effectivement été représenté visuellement, en particulier d'une façon géométrique.

2 Le théorème de Thalès au cœur de la relation entre nombres et géométrie

Un exemple fondamental de la Grèce ancienne qui rend clairement compte d'une relation entre le numérique et le géométrique est le théorème de Thalès. En suivant l'œuvre de Bkouche (1994), on trouve une belle référence à cela :

> « Le théorème de Thalès (ou théorème de lignes proportionnelles) énonce des conditions de proportionnalité de segments ; en cela il est au cœur de la relation entre géométrique et numérique, que ce soit à travers la mesure ou que ce soit avec la méthode des coordonnées et la géométrie analytique. » (Bkouche, 1994, p. 1)

Proposition trouvant son origine dans la vie *réelle* via des rapports de mesures, ce théorème possède trois types principaux d'énoncés : les rapports d'abscisses, de projection et d'homothétie (Brousseau, 1995). Ainsi, on est face à un théorème qui a évolué à travers le temps jusqu'à avoir été défini comme un théorème affine et non pas métrique, étant donné que ses hypothèses et sa conclusion sont conservées par des applications affines. Les relations données par ce théorème peuvent se rapporter à des longueurs, des mesures algébriques ou des vecteurs. Finalement, je n'ai qu'à rappeler les deux éléments clés pour chacun des énoncés du théorème de Thalès : le parallélisme de droites et les proportions, c'est-à-dire les proportions et la géométrie. Bkouche (2009b), dans son *Histoire du calcul, de la géométrie à l'algèbre*, rend compte de l'existence de grandeurs et de la proportionnalité avant toute mesure, de même qu'il souligne que la mesure est une proportionnalité. Par la suite, dans cet ouvrage, on trouve, associées au théorème de Thalès, les propriétés mentionnées ci-dessus, où l'extension de la validité de leurs rapports inclut non seulement les fractions positives, les réels positifs et les quantités négatives mais aussi le rapport d'abscisses en lien avec de nouvelles définitions des opérations.

Compte-tenu de ce qui précède, j'ai eu une réponse à la question portant sur une relation entre calcul et géométrie dont la solution me permet de donner un sens à une idée mathématique, la multiplication, en la géométrisant. De fait, le cœur de cette recherche portant sur les relations entre calcul et géométrie au sein de l'épistémologie et l'histoire a acquis une existence puisque, ce que les relations dans le théorème de Thalès représentent, c'est bien la multiplication géométrisée pour différents ensembles de nombres.

Dans la section suivante, je montrerai comment je reprendrai ces idées comme fondement de certaines propositions didactiques qui forment le cœur d'une partie de la phase expérimentale de la recherche.

II - UN REGARD ÉPISTÉMOLOGICO-DIDACTIQUE SUR LA RELATION ENTRE CALCUL ET GÉOMÉTRIE : SIGNIFICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU PRODUIT POUR DIFFÉRENTS ENSEMBLES DE NOMBRES

Mon intérêt pour les travaux historico-épistémologiques et didactiques, portant sur les liens entre représentations géométriques et calcul numérique, enrichit une analyse didactique actuelle des processus mettant en relation la multiplication et certaines de ses significations à travers la géométrie. De ce fait, l'acceptation d'une mise en relation entre ces deux analyses permettrait, d'une part, que les idées mathématiques en jeu se déprennent de leur simplicité (Artigue & Robinet, 1982) et, d'autre part, que la construction de futurs processus d'enseignement favorise la rencontre de significations de ces idées. Dans cette section, je ne présenterai qu'un aperçu de cette analyse.

Cette recherche a été un aller-retour permanent entre nombres et opérations et mon intérêt pour les représentations géométriques d'une opération mathématique s'inscrit bien dans une conception dynamique du nombre (Glaeser, 1981) :

> « Il est clair, en effet, que si l'on conçoit toute notion mathématique comme devant être dérivée de la perception, le nombre négatif ne saurait se justifier puisqu'il correspondrait à une absence de perception, ou moins encore, et qu'il n'y a pas de degrés dans les perceptions nulles [...] la nature essentielle du nombre n'est ni statique, ni perceptive, mais bien dynamique et liée à l'action elle-même, intériorisée en opérations. » (Piaget, 1949, p. 110-115).

Alors, comment travailler ce caractère dynamique du nombre et donc des opérations ?
Ce questionnement m'a amenée petit à petit à vouloir mettre en valeur le fait que les opérations mathématiques ne sont pas seulement des outils au service de nos besoins de calcul : elles sont elles-mêmes porteuses de significations qui méritent d'être rencontrées.

Par exemple, en ce qui concerne la multiplication des nombres rationnels, les travaux de Brousseau sont déjà connus: il y parle du sens du produit de deux fractions. Dans le module dix de sa thèse où il décrit la mise au point collective faite par l'enseignante dans la situation concernant la multiplication par une fraction, il explicite dans une remarque que « le sens du produit de deux fractions est assez différent du sens du produit de deux nombres » (Brousseau, 1996, p. 217), lequel peut seulement être validé à travers « l'examen détaillé des propriétés formelles de cette nouvelle opération et la comparaison avec les propriétés déjà connues de la multiplication » (Brousseau, 1996, p. 217). En faisant référence à la définition du produit de deux fractions, notamment à la construction de cette *nouvelle multiplication*, il ajoute le paragraphe suivant qui fait clairement référence au sens de cette opération en termes d'agrandissements et réductions :

> « Y-a-t-il une addition qui pourrait remplacer l'opération 3×2 ? Vous vous doutez que c'est dans les agrandissements et les rapetissements (et pas dans l'addition) qu'il faut chercher des exemples pour construire cette nouvelle multiplication. » (Brousseau, 1996, p. 218)

Outre le travail de Brousseau, un travail très intéressant est celui développé par Douady (1986) qui propose des interactions entre les cadres numérique, géométrique et graphique « pour faire progresser les connaissances sur les nombres » (Douady, 1986, p. 1). D'après Douady,

> « parmi toutes les grandeurs physiques qu'on est susceptible de mesurer, les longueurs et les aires jouent un rôle privilégié dans l'apprentissage [...] car certaines d'entre elles au moins modélisent des objets matériels que les enfants peuvent manipuler ou construire facilement. » (Douady, 1986, p. 22)

Elle soutient que la correspondance grandeur-nombre est le fait qui va permettre l'extension du produit de deux entiers au calcul du produit de deux fractions. De plus, la mesure d'aire à l'aide d'une représentation géométrique devient un élément *concret* essentiel pour donner du sens à ce produit, car cette représentation rendra possible une perception de la commutativité de la multiplication, laquelle serait moins accessible si l'on ne se situe que dans le cadre numérique. Je présente donc un exemple (Douady, 1986) qui porte sur certaines représentations géométriques d'une multiplication numérique. Ces représentations permettraient d'approcher l'idée d'aire de fractions d'un rectangle, en donnant un accès visuel à la commutativité du produit tel que je viens de le mentionner plus haut et à sa correspondance avec l'idée de réduction de l'aire de l'unité, dans ce cas, par l'opération de $\frac{2}{3}$ sur $\frac{3}{4}$ (fractions des mesures des côtés d'un rectangle).

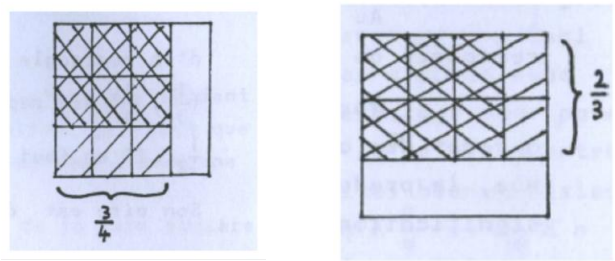


Figure 1. Représentations géométriques du produit de deux fractions (Douady, 1986)

Il me semble important de souligner que la mesure fait bien partie des éléments donnant du sens à la multiplication, de même que l'existence d'un opérateur : le terme *opérateur* définit les nombres naturels et les fractions opérant sur des espaces mesurables. En revanche, bien que la mesure soit valide pour la représentation géométrique des nombres rationnels, ce qui apparemment pourrait faciliter le fait de donner une signification géométrique à la multiplication de ces nombres, elle ne s'applique pas aux *quantités négatives*. Ces idées, qui peuvent être des nouveaux nombres, comme l'a dit Glaeser en parlant des nombres relatifs, « ne sont plus découverts, mais inventés, imaginés » (Glaeser, 1981, p. 337). De ce fait, la recherche du bon modèle géométrique de la multiplication de nombres relatifs est toujours en cours et on sait déjà qu'il n'y a pas un modèle approprié qui prenne en compte l'interprétation géométrique de toutes les propriétés de la multiplication. Néanmoins, l'abstraction de la *quantité négative* n'existe plus dès que son interprétation est liée à l'idée de direction (Flament, 2003, p. 170). De ce fait, en suivant Argand (1874), même une représentation géométrique de la multiplication des entiers négatifs devient possible puisque ces *quantités* sont maintenant traitées en termes de sens et de direction :

> « Mais puisqu'on a trouvé[…] que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de *grandeur absolue* avec l'idée de *direction*. » (Argand, 1874, p. 6)

En revanche, cette représentation ne saurait exister que si l'on décide de « travailler [dans une certaine] ambiguïté » (Bkouche, 1994, p. i). Claude-Paul Bruter, évoquant la multiplication, affirme qu'addition ou multiplication sont des transformations :

> « La notion de transformation, qui est associée à celle d'évolution, joue un rôle capital dans tous les règnes de la nature, et, par conséquent dans toutes les sciences. Elle est évidemment présente, en mathématiques, dès qu'il y a opération. » (Bruter, 2000, p. 84)

Ces transformations peuvent être internes ou externes et « peuvent faire éclater le cadre sur lequel elles opèrent, et déboucher sur des extensions des objets anciens, voire sur des structures nouvelles par bifurcation, par métamorphose » (Bruter, 2000, p. 84). De ce fait, l'action ou les opérations sur certaines des idées mathématiques travaillées à un niveau élémentaire de l'enseignement seront nécessairement justifiées dans un niveau supérieur. De fait, c'est la multiplication de nombres complexes qui possédera tous les outils pour se rendre visuelle et exprimable librement à travers la géométrie dans ce contexte spécifique que nous appelons *transformation*. Cela puisque l'extension de la définition des opérations pour les nombres complexes est liée à la représentation des quantités imaginaires par des vecteurs ou des segments de droite de Wessel (1897) :

> « le respect de la structure propre à des nombres arithmétiques dans un premier temps, puis étendue à des 'segments', nous autorise donc à appeler 'somme' ou 'multiplication' des opérations s'effectuant sur des objets. » (Flament, 2003, p. 115-116).

La multiplication de segments de droite de Wessel, comporte les mêmes propriétés de construction que la multiplication de Descartes (1637) (figure 2), qui consiste à multiplier des segments qui ne représentent pas de grandeurs 'positives' ou 'négatives'. Ces propriétés trouvent leur fondement dans ce qu'on connaît aujourd'hui comme le théorème de Thalès dont j'ai parlé dans la section précédente comme étant le cœur des relations entre géométrie et calcul.

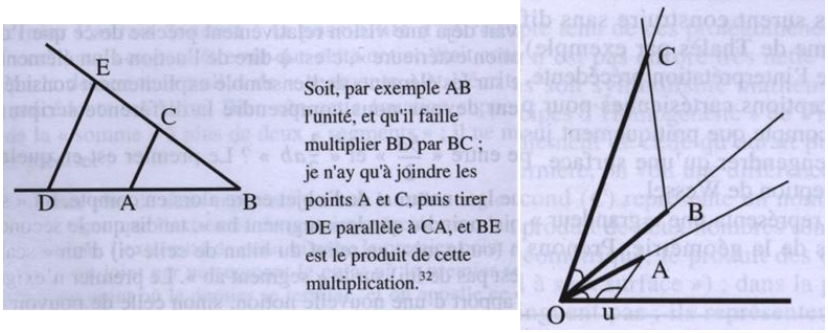


Figure 2. À gauche, multiplication de Descartes ; à droite, multiplication de segments de droites de Wessel

L'analyse des propriétés des représentations géométriques de la multiplication, présentées dans la figure 2, m'a conduit à vouloir mettre en valeur ces représentations qui peuvent représenter le produit pour différents ensembles de nombres (par exemple, entiers naturels, fractions et nombres complexes) et à les faire vivre dans un contexte d'apprentissage où elles pourraient favoriser la visualisation du produit comme une transformation dans le plan. L'idée de *repenser* les représentations classiques du produit donne une force supplémentaire à l'intention didactique d'articuler géométrie et calcul dans la rencontre du sens de la multiplication.

III - UNE ARTICULATION THÉORIQUE POUR L'ANALYSE DE LA MISE EN RELATION ENTRE MULTIPLICATION ET GÉOMÉTRIE : ESPACE DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET MÉDIATION SÉMIOTIQUE

1 L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses

Mon intérêt à analyser le processus de mise en relation entre nombres et géométrie au niveau de l'apprentissage des élèves, m'a conduit à vouloir observer ce qui se passe à l'endroit où l'on peut voir en action le travail mathématique associé à l'œuvre de celui qui le fait (Kuzniak, 2010) : dans une sorte d'espace qui permettrait de situer le travail mathématique des élèves. Ainsi, mon approche théorique principale pour étudier les relations établies par les élèves entre le numérique et le géométrique dans le processus d'apprentissage d'un contenu mathématique, concerne les travaux de Kuzniak portant sur l'Espace de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2012).

L'articulation des processus cognitifs définis par Duval (1998) avec les composantes du plan épistémologique d'un ETM (voir figure 3) rend compte d'une relation bilatérale entre les éléments constituant les deux plans de cet espace, grâce à l'action des différentes genèses, dont une sémiotique.

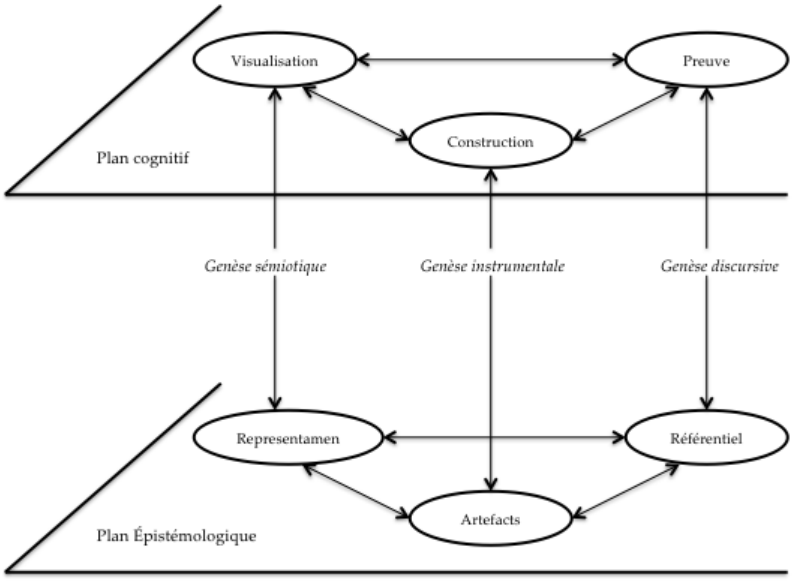


Figure 3.
Espace de Travail Mathématique et ses genèses
(Kuzniak, 2012)

Par exemple, dans le plan épistémologique, nous pouvons retrouver différentes représentations de la multiplication et les divers savoir-faire concernant le calcul d'un produit. Dans le plan cognitif nous retrouvons la visualisation desdites représentations, visualisation qui donnerait accès, par exemple, à la rencontre d'un sens géométrique du produit. La genèse sémiotique serait ainsi le processus qui favoriserait la mise en relation entre la représentation et la visualisation d'une idée mathématique, dans notre cas, de la multiplication. De ce fait, pour mieux étudier le travail

mathématique des élèves interagissant entre les deux plans de l'ETM, j'ai initié un travail d'articulation théorique me permettant d'approfondir l'étude et l'analyse de ces interactions.

Je présenterai donc dans la subsection suivante quelques éléments qui viennent s'articuler à l'ETM et qui élargissent le regard de ce qui se passe dans l'articulation des plans épistémologique et cognitif dans le processus d'émergence et rencontre de sens au milieu d'un travail collaboratif entre élèves et enseignant en classe de mathématique.

2 L'Espace de Travail Mathématique et la médiation sémiotique

Mon intérêt pour l'aspect social des processus d'apprentissage, ainsi que pour l'étude des processus de médiation sémiotique (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008) favorisant la rencontre collective d'une idée mathématique, m'a conduit à une première élaboration d'un cadre théorique articulant des éléments cognitifs et didactiques (Barrera-Curin, 2012). Cette approche s'intéresse particulièrement à des interprétations métaphoriques des connaissances mathématiques, à des utilisations médiatiques de ces interprétations ainsi qu'à la construction de nouvelles connaissances jusqu'à ce que leur *compréhension* devienne *explicitable* et *interprétable* grâce à sa verbalisation dans une situation de *communication*. Des éléments clé dans cette approche sont la visualisation déclenchée par des représentations géométriques, l'importance de prendre en compte la complexité des situations d'apprentissage qui impliquent des changements de cadres mathématiques et de registres de représentations sémiotiques ainsi que le travail collaboratif. L'Espace de Travail Mathématique a ainsi été situé dans un contexte socioculturel de l'apprentissage, et dans ce contexte, l'action de médiateurs, au niveau de ses genèses, est essentielle. Ces médiateurs peuvent être de natures différentes. D'une part, ils sont des signes, notamment des représentations géométriques, lesquelles sont censées pouvoir *conduire* le travail mathématique des élèves. D'autre part, ils résultent d'un processus de collaboration social entre élèves et enseignant. Ces éléments articulés à l'ETM sont devenus des fondements de mes propositions didactiques et viennent confirmer une nouvelle conception de l'acte d'enseigner les mathématiques : les mathématiques ne se reçoivent pas, ne se recopient pas du tableau ; les mathématiques se font, se font ensemble dans la collaboration entre élèves et enseignants.
De ce fait, des éléments théoriques associés à la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) et à une conception participationniste de l'apprentissage de mathématiques (Radford, 2004 ; Sfard, 2008) ont été intégrés aux composantes d'un espace de travail mathématique (voir figure 4).
Ce faisant, j'ai voulu mettre en valeur les potentialités médiatrices qu'ouvrent les échanges entre différents individus qui intentionnellement collaborent pour accomplir une tâche ou pour arriver au but visé (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008) dans le processus de construction d'un concept mathématique.

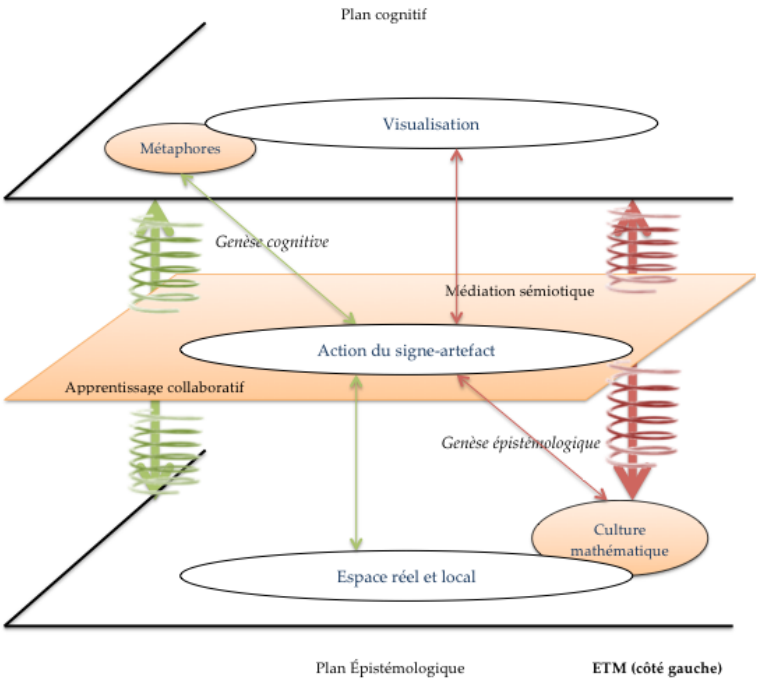


Figure 4. Schéma représentant l'articulation théorique ETM et Médiation Sémiotique. Côté gauche de l'Espace de Travail Mathématique

De plus, en parlant de l'importance accordée aux signes en tant que médiateurs dans le processus complexe visant la formation d'un concept (Vygotsky, 1934/1997), Noss et Hoyles (1996) parlent de « *situated signs to describe how learners construct mathematical ideas by drawing on the webbing of a particular setting, which, in turn, shapes the way the ideas are expressed*[1] » (Noss & Hoyles, 1996, p. 122).Ce dernier point, pourrait être associé à un espace de *visualmediation* où des médiateurs visuels sont définis comme des fournisseurs d'images permettant aux participants d'identifier l'objet en question en coordonnant la communication (Sfard, 2008).

3 L'Espace de Travail Mathématique et la médiation sémiotique

Je vais présenter des exemples du travail mathématique des élèves dns un processus d'apprentissage collaboratif visant la construction des significations géométriques de la multiplication. Il s'agit de deux situations[2] travaillées par des élèves de différents niveaux scolaires (classes de Quatrième et TS) à travers lesquelles je cherchais à étudier leur travail mathématique dans le processus de rencontre du sens géométrique de la multiplication.

3.1 Multiplication de fractions

La première situation porte sur le sens du produit de deux fractions. Le travail collaboratif entre élèves et enseignant constitue un élément fondamental de la situation. Les échanges, les allers-retours questionnant l'énoncé devraient conduire les élèves vers les réponses attendues *a priori* (Barrera-Curin, 2011).

Le travail mathématique des élèves s'est déroulé autour de la proposition suivante :

Comment peut-on visualiser que cette assertion est correcte ?

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\approx\frac{1}{3}$$

[1] « Pour décrire comment les apprenants construisent des idées mathématiques en dessinant sur la toile d'une place en particulier, ce qui détermine comment les idées sont exprimées à leur tour » (Ma traduction. Noss & Hoyles, 1996, p. 122).

[2] Pour une version détaillée de ces situations d'apprentissage et de leurs analyses respectives voir Barrera-Curin, R.I. 2011 & 2012.

Le *rôle puissant* qu'Arcavi attribue à la visualisation géométrique a été très inspirateur dans la conception de cette situation puisqu'elle favoriserait la *rencontre* du sens du produit de deux fractions. Or la prise en compte d'une référence faite par Arcavi (2003) à la figure que Mabry (1999) a proposée comme représentation visuelle de la somme d'une série de puissances d'un quart, m'a amenée il y a quatre ans, à commencer la recherche sur le rôle médiateur de la géométrie dans le processus visant la rencontre du sens de la multiplication.

Les idées mathématiques en jeu, la multiplication de fractions et la représentation géométrique d'un produit de fractions, correspondent à des outils explicites pour la résolution du problème posé. Ces outils sont définis d'après Douady « comme les notions qu'un élève met en œuvre, en pouvant les formuler et dont il peut justifier son emploi » (Douady, 1986, p.10). Ainsi, une image mentale (Douady, 1986, p. 11) ou une reconnaissance métaphorique du produit des fractions permettrait l'accès à une de ses représentations géométriques. Cette dernière est ainsi considérée comme une formulation différente d'un même résultat mathématique. De ce fait, les élèves pourraient valider leur réponse à la question « Comment peut-on visualiser que cette assertion est correcte ? » en formulant des justifications. La réponse à valider correspondrait à la représentation géométrique d'une des significations du produit de fractions. D'un point de vue cognitif, les traitements visuels de composition et décomposition à faire sur les figures produites permettraient de les unifier et de les accepter finalement comme une visualisation de l'expression arithmétique-algébrique donnée. Dans ce cas, le traitement correspond à une séquence de figures superposées dont le résultat attendu pourrait correspondre à l'exemple ci-dessous :

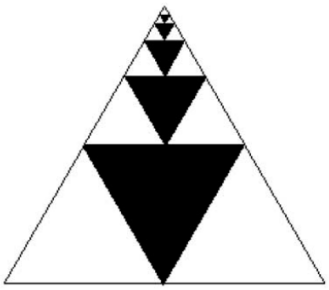


Figure 5. Composition figurale proposée par Richard Mabry comme une représentation visuelle de la série correspondant à la somme de puissances d'un quart

Le travail mathématique des élèves a rendu compte d'une mise en évidence de la signification de la multiplication de fractions comme « une partie d'une autre » et cela a été possible grâce à l'action d'une genèse sémiotique favorisant un processus de changement de registre de représentation suivi d'un traitement dans le registre d'arrivée. Les partages figuraux, permettent donc de visualiser l'expression numérique de départ (figure 6).

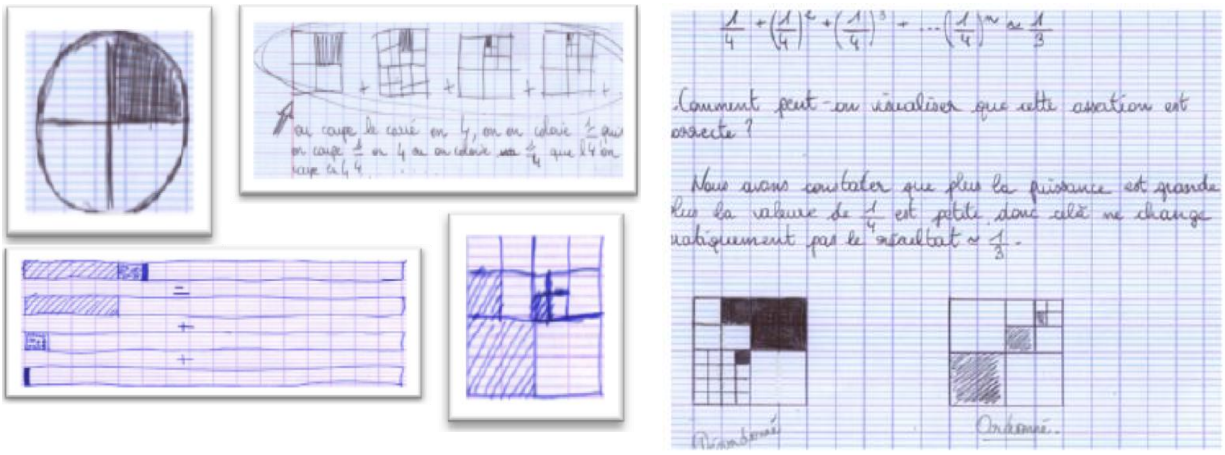


Figure 6. Compositions figurales proposées par des élèves d'une classe de quatrième comme une représentation visuelle de la série correspondant à la somme de puissances d'un quart

Nous pouvons déterminer le travail mathématique des élèves soit par une entrée de type épistémologique, grâce à la mise en œuvre des connaissances mathématiques préalables (connaître ce que multiplier deux fractions signifie), soit par une entrée de type cognitif, résultant d'un processus de recherche émergeant de la question posée et conduisant les élèves, petit à petit, à la visualisation du produit et donc à la découverte d'une de ses significations géométriques.

J'ai conclu, qu'une *manipulation* géométrique de la multiplication de fractions, impossible en restant dans le cadre numérique, a permis aux élèves d'*approcher* une des significations de la multiplication de fractions où les fractions sont des opérateurs produisant la réduction de l'aire de l'unité. L'émergence des représentations géométriques, comme un mode de production non discursive, rendant compte d'une interprétation de ce qu'est multiplier deux fractions de façon consécutive, a mis donc en évidence la *rencontre* de la multiplication de fractions par des élèves.

3.2 Multiplication pour différents ensembles de nombres

Les résultats obtenus (Barrera-Curin, 2011) et l'analyse du travail mathématique des élèves résultant de cette première expérimentation m'ont motivée à approfondir l'étude de cette relation entre nombres et géométrie et je me suis fortement intéressée à continuer l'étude du travail mathématique des élèves dans un contexte de collaboration et de médiation sémiotique.

De ce fait, une deuxième situation (Barrera-Curin, 2012) a été mise en place dans plusieurs collèges ou lycées d'Ile de France. Cette fois, je me suis posée la question suivante : pourrions-nous faire ressortir des justifications intuitives liées aux transformations géométriques en utilisant la construction géométrique de la multiplication de Descartes (cf. Section 2), pour introduire ou réinvestir des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres ?

Nous avons situé les activités proposées aux élèves à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique où la signification des idées mathématiques devait émerger grâce à l'action d'une genèse cognitive. Nous attendions encore l'émergence d'une visualisation géométrique de significations géométriques de la multiplication. Cette fois et à la différence de la situation antérieure, le processus de visualisation se produirait grâce à une genèse sémiotique où l'action d'un signe médiateur (cf. section 2, une configuration du théorème de Thalès) favoriserait la construction géométrique du sens de l'idée mathématique en jeu. Cette genèse sémiotique à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique, fait bien partie d'une activité qui suppose des enjeux sémiotiques complexes (D'Amore et Faldino, 2008) associés au processus de changement de registre de représentation.

La situation a été mise en place dans quatre classes de Terminale S et dans quatre classes de Quatrième. Dans chaque classe, la situation a été intégrée à la progression des enseignants. Les élèves ont eu à résoudre une suite de quatre ou cinq questions proposant une approche géométrique de la multiplication de nombres de différentes natures.

Dans un premier temps, les élèves devaient effectuer la construction géométrique du produit de deux nombres réels dans le cadre proposé par Descartes dans sa *Géométrie* (1637).

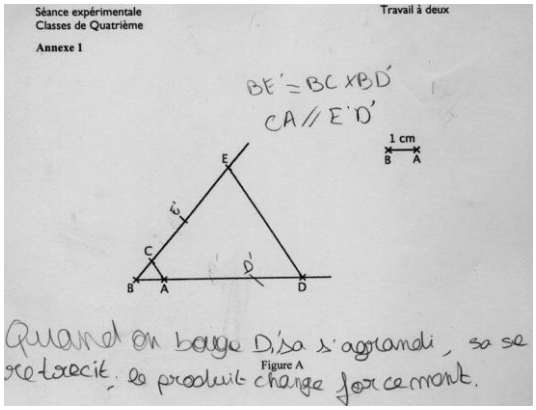
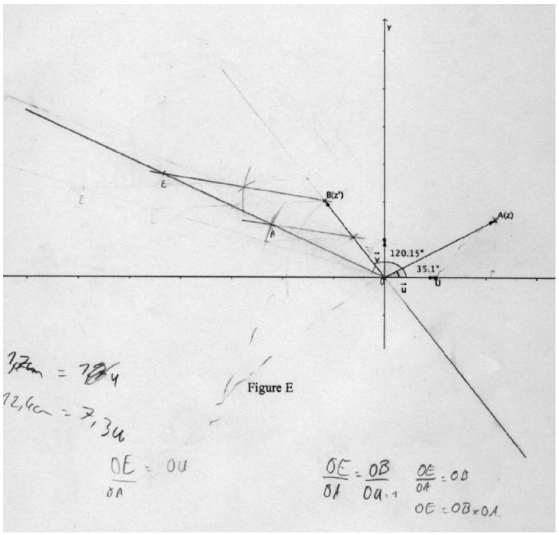
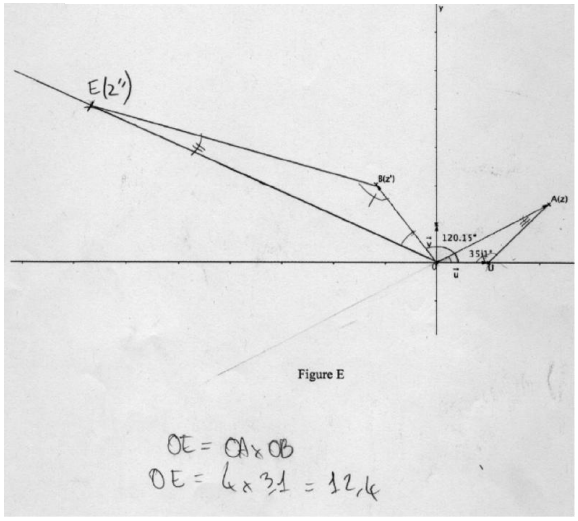


Figure 7. Représentation géométrique de la multiplication d'un nombre naturel par une fraction positive, classe de Quatrième, suite à l'analyse de la multiplication de Descartes

Figure 8. Représentation géométrique de la multiplication de deux nombres complexes, classe de TS, suite à l'analyse de la multiplication de Descartes





En m'appuyant sur ces activités, mon but était de décrire des possibilités qu'ont des élèves de rencontrer les significations géométriques de la multiplication à partir de l'analyse de la représentation géométrique de la multiplication de Descartes. Cette représentation géométrique représente aussi une icône du théorème de Thalès dont la place reconnue dans l'enseignement français m'a permis de lui attribuer le rôle d'un signe-médiateur ou signe-artefact (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008), destiné à être interprété et à évoluer jusqu'à être visualisé comme une représentation géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres.

Pour décrire le rôle de la géométrisation dans l'approche de la multiplication chez les élèves, j'ai étudié leur manière de résoudre des problèmes de construction géométrique mettant en jeu la multiplication de nombres de différentes natures. Petit à petit j'ai été amenée à répondre à une question qui articule mes recherches dans les contextes épistémologique, théorique et expérimental : « *Y a-t-il des interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'ETM approprié par les élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication ?*

L'idée que le produit de deux nombres quelconques correspond à une transformation dans le plan a été déterminée et certaines représentions données par les élèves en rendent compte. Les interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'Espace de Travail Mathématique des

élèves sont très diverses mais dans certains cas, il a été possible de percevoir des liens explicites entre les différentes composantes de la situation proposée : multiplication de Descartes, théorème de Thalès, propriétés géométriques de la multiplication de deux nombres (cf. figures 7 et 8). Le travail mathématique des élèves a été observé et analysé sous le regard de mes choix théoriques, ce qui m'a permis de déterminer que mes *a priori* n'étaient pas toujours présents, pas toujours explicites dans le travail des élèves. Néanmoins, dans le cas où l'émergence de *ce sens* géométrique du produit a bien pu être déterminé, cela ne pouvait que résulter d'un processus de médiation sémiotique dans lequel les élèves s'étaient permis de s'immerger au milieu d'un travail collaboratif fort entre eux et quand cela a été possible, des interactions avec l'enseignant[3].

4 Le rôle créateur et médiateur de l'enseignant : proposer un ETM et faire évoluer le travail mathématique des élèves

La diversité et la richesse du travail mathématique des élèves à partir de la proposition d'un seul ETM m'a amené à réflechir sur le rôle de l'enseignant dans la proposition des espaces de travail mathématiques ainsi qu'à la façon dont il est censé pouvoir les gérer une fois que les élèves se les sont appropriés.

Le travail de l'enseignant ne se réduit pas à vérifier la mise en évidence par des élèves de ce qui était attendu *a priori*. Il s'agit de faire des mathématiques ensemble. Pour cela, je ne peux que souligner l'importance de la médiation de l'enseignant dans tout processus d'apprentissage-enseignement ainsi que de l'importance de sa connaissance de la richesse et du potentiel des idées mathématiques sur lesquels il souhaite travailler avec ses élèves. Ces médiations et connaissances sont donc indispensables pour faire progresser le travail mathématique de la classe. Bien sûr, en plus de penser l'existence de cette médiation, il faudrait réfléchir au moyen de la faire exister de façon réelle dans l'action quotidienne des enseignants. Cette réflexion n'a pas de réponse simple. Une première proposition serait que l'enseignant rentre à l'intérieur des espaces mathématiques que se sont appropriés les élèves ; il doit être là, il doit jouer un rôle dans la construction du sens des idées mathématiques, il est là pour construire avec les élèves, pour faire évoluer le travail mathématique des élèves :

> "The object of knowledge is filtered by the technology of the semiotic activity [and] knowledge is culturally mediated[4]". (Radford, 2004, p. 24)

Dans le cas des situations présentées précédemment, il aurait fallu renforcer le rôle médiateur de l'enseignant dans chacune des classes et ainsi avoir un meilleur accès au travail mathématique des élèves. Mais comment l'enseignant pourrait-il participer de plus près au travail mathématique des élèves ? Quel grand défi pour un enseignant travaillant dans une classe ordinaire !

Compte-tenu de ce qui précède, les réflexions portant sur le rôle créateur et médiateur de l'enseignant m'ont conduit à des questionnements autour de la formation de futurs enseignants : des enseignants qui devront créer des situations d'apprentissage, proposer des espaces de travail mathématiques et gérer la diversité des appropriations de ces espaces.

Forte de ces réflexions, et en tant que formatrice à l'IUFM de Montpellier pendant un an, j'ai décidé de poser deux questions à mes étudiants. Le choix de ces questions trouve sa justification dans mon intérêt de poursuivre mon travail de recherche autour des nombres, opérations et géométrie cette fois à l'école élémentaire. Les questions étaient les suivantes : *Qu'est-ce que la multiplication ? Donnez une représentation géométrique de la multiplication.*

Les réponses des étudiants limitent le sens de la multiplication à une addition réitérée. Les représentations géométriques proposées mélangent des figures et des signes. Ceci confirme

[3]Pour plus de détails concernant l'analyse des situations voir Barrera-Curin, 2012.

[4] "L'objet de la connaissance est filtré par la technologie de l'activité sémiotique [et] la connaissance est culturellement médiée" (Ma traduction de Radford, 2004, p. 24).

donc le besoin d'un changement dans la façon de travailler les thèmes mathématiques fondamentaux en formation initiale.

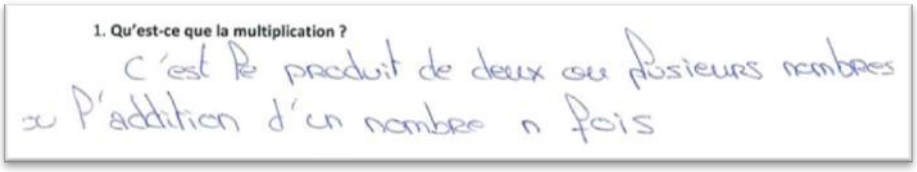


Figure 9. Réponse d'un étudiant en formation (Master 1) à la question : *qu'est-ce que la multiplication ?*

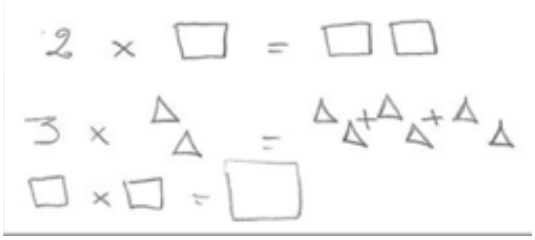


Figure 10. Réponse d'un étudiant en formation (Master 1) à la question : *donnez une représentation géométrique de la multiplication*

Il faudrait que les mathématiques redeviennent vivantes, en d'autres mots, il faudrait les faire émerger en les faisant (Maheux & Proulx, sous presse), il faudrait les faire fleurir ou exploser, il faudrait les vivre toujours en mouvement, me semble-il, tel que Châtelet (1993) le disait.

Comment peut-on établir des liens entre l'essence épistémologique des savoirs à enseigner aux futurs enseignants et les connaissances mathématiques nécessaires à leur métier ? Le rôle du formateur-chercheur me semble fondamental. Aurait-il un paradigme à changer ? Probablement. De ce fait, le travail didactique en formation ne pourrait se limiter à l'analyse des progressions pré-faites mais à un travail créateur entre enseignants et formateurs visant non seulement la proposition d'Espaces de Travail Mathématiques mais aussi une formation au métier d'enseignant où son rôle de médiateur à l'intérieur de ces espaces devrait nécessairement se développer.

IV - CONCLUSION

La recherche d'un lien entre géométrie et calcul dans certains travaux historiques, épistémologiques et didactiques, m'a permis de constater la complexité et richesse non seulement de mes intentions didactiques mais aussi des mathématiques faisant l'objet de ma recherche. Un voyage historique qui a commencé dans l'histoire des chiffres et qui a terminé dans la représentation géométrique de la multiplication de nombres complexes a mis en évidence l'existence historique d'une relation aussi étroite que controversée entre représentations géométriques et calcul numérique. Cette recherche est née à partir d'une idée élémentaire : les recherches en histoire et en épistémologie nous permettraient d'accéder à la vie et au mouvement, parfois éclipsé, des mathématiques. Ainsi, la prise en compte des relations historiquement établies entre géométrie et nombres rendant compte des significations transversales de la multiplication pour différents ensembles de nombres a, d'une part, enrichi la proposition d'Espaces de Travail Mathématiques tel que présentée dans cet article et, d'autre part, est devenue le point de départ d'une recherche beaucoup plus large autour de l'importance des relations entre nombres et géométrie dans le processus visant la rencontre des certaines idées mathématiques.

La multiplication et le Nombre, comme Piaget l'a précisé, *symbolise une action* (Piaget, 1949). Cette interprétation dynamique du nombre a produit tout au long de l'histoire ce besoin d'une représentation, ce besoin, dirais-je, de voir *en action* les nombres et les opérations sur les nombres. Que la géométrie soit en train de disparaître progressivement des programmes officiels ne veut

pas du tout dire qu'elle ne doit plus exister dans l'acte d'enseigner ou dans les représentations pour les chercheurs, les formateurs ou les enseignants. Il y a plusieurs raisons pour mettre en valeur la relation entre nombres et géométrie : la dé-géométrisation du nombre, puis sa re-géométrisation (Glaeser, 1981) ; le passage de l'image à la géométrie puis à la forme abstraite (Bachelard, 1938) ; la création d'une nouvelle géométrie comme réponse au besoin d'avoir toujours une représentation des idées arithmétiques (Bkouche, 2009b) ; le théorème de Thalès ou l'objet mathématique qui représente la multiplication géométrisée pour différents ensembles de nombres ; les transformations géométriques ou le contexte d'existence de la relation entre multiplication et géométrie (Barrera-Curin, 2012). Et j'ajoute :

> « Si les points d'une droite sont des nombres, on doit pouvoir comprendre géométriquement la signification des opérations élémentaires entre nombres : l'addition et la multiplication. La clé de cette compréhension est dans l'idée de transformation. »(Leys, Ghys, & Alvarez, s. d.).

Ainsi je suis passée du plan historico-épistémologique au plan expérimental et didactique. Je me suis intéressée aux possibilités qu'ont les élèves de chercher et d'établir un lien entre multiplication et géométrie et à la recherche d'une articulation théorique favorisant l'analyse du travail mathématique des élèves. Plus tard, ces réflexions se sont élargies vers la formation de futurs enseignants.

Une précision me semble importante. Il faut bien comprendre que mes intentions didactiques ne visent pas la *recherche d'un bon modèle* pour la représentation de la multiplication pour différents ensembles de nombres. J'ai parlé de géométrisation, d'articulation de cadres mathématiques pour l'apprentissage ou le réinvestissement du calcul numérique mais le *comment faire* reste toujours une responsabilité des futurs enseignants et des formateurs, une part de leur rôle créateur. Ici, je n'ai donné que des exemples qui rendent compte de la richesse des mathématiques et encore plus des possibilités de les faire émerger à partir de la seule proposition d'un Espace de Travail Mathématique.

Je voudrais terminer en insistant sur l'importance d'une formation initiale et continue enrichie par des réflexions épistémologiques autour des mathématiques. Une formation *mettant en valeur* le rôle créateur et médiateur de l'enseignant, participant au travail mathématique de ses élèves dans les processus d'émergence et de rencontre des mathématiques.

V - BIBLIOGRAPHIE

ARCAVI, A. (2004) The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 214-241.

ARGAND, J.-R. (1874) *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Paris : Gauthier- Villars.

ARTIGUE, M. & ROBINET, J. (1982) Conception du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *RDM*, **3**(1), 5-64.

BACHELARD, G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

BARRERA-CURIN, R. I. (2011) Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique. *Petit x*, n°**85**, 5-26.

BARRERA-CURIN, R. I. (2012) *Etude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Thèse de doctorat non publiée.

BARTOLINI-BUSSI, M. G. & MARIOTTI, M. A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artifacts and signs after a vygotskian perspective. In L. E. et al. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2ème éd.). New York and London : Routledge.

BKOUCHE, R. (1994) *Autour du théorème de Thalès*. Lille : IREM de Lille.

BKOUCHE, R. (1997) Epistémologie, histoire et enseignement de mathématiques. *For the learning of mathematics*, **17**(1), 34-42.

BKOUCHE, R. (2009) *Grandeurs et nombres*. Lille : IREM de Lille.

BKOUCHE, R. (2009b) *Histoire du calcul : de la géométrie à l'algèbre*. Rouen : Vuibert.

BROUSSEAU, G. (1995) Autour de Thalès : promenade avec Thalès entre la maternelle et l'université. *Brochure de la commission Inter-IREM Premier cycle*, 87-124.

BROUSSEAU, G. (1996) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* Thèse de doctorat non publiée.

BRUTER, C. P. (2000) *La construction des nombres : histoire et épistémologie*. Ellipses.

CHÂTELET, G. (1993) *L'enchantement du virtuel. Mathématique, physique, philosophie*. Paris : Le Seuil.

CONNE, F. & LEMOYNE, G. (1999) *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.

D'AMORE, B. & FALDINO, M. I. (2008, March) Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. In *The first century of the international commission on mathematical instruction (1998-2008) : reflecting and shaping the world of mathematics education.* Rome :Instituto della Enciclopedia Italiana.

DAVIS, B. & SIMMT, E. (2006) Mathematics-for-teaching : an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *EducationalStudies in Mathematics*, **61**, 293-319.

DESCARTES, R. (1637) *La géométrie* (Par Vincent Jullien éd.). Paris : Presses Universitaires de France.

DOUADY, R. (1986). *Liaison école- collège : Nombres décimaux* (Rapport technique). Paris.

DUVAL, R. (1998, March) Why to teach geometry ? In *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st. century.*Catania : Springer.

FLAMENT, D. (2003) *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*. CNRS Editions.

GLAESER, G. (1981) Épistémologie de nombres relatifs. *RDM*, *2*(3), 303-346.

KUZNIAK, A. (2004) *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches.

KUZNIAK, A. (2010) Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, **15**, 73-93.

KUZNIAK, A. (2011) L'espace de travail mathématique et ses genèses. In *Actes du symposium franco-chipriote de didactique espace de travail mathématique.* Paris.

KUZNIAK, A. (2012) Understanding geometric work through its development and its transformations. In S. Rezat & M. Hattermann (Eds.), Berlin : Springer. À paraître.

LEYS, J., GHYS, E., & ALVAREZ, A. (s. d.).*Dimensions.*

MABRY, R. (1999) Proof without words : *Mathematics magazine*, **72**(1), 63.

MAHEUX, J.-F. & PROULX, J. (sous presse) Vers le faire mathématique: essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques. Annales de didactique et de sciences cognitives.

NOSS, R. & HOYLES, C. (1996) *Windows on mathematical meanings : Learning cultures and computers.* Dordrecht : Kluwer.

PIAGET, J. (1949) *Introduction à l'épistémologie génétique : la pensée mathématique, tome 1*. Paris : Presses Universitaires de France.

RADFORD, L. (2004) La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In A. G. (ed.) (Ed.), *Atti del convegno di didattica della matematica* (p. 11-27). Locarno : Alta Scuola Pedagogica.

REYNEAU, C. R. (1739) *Science du calcul des grandeurs en général*. Venise : Chez F. Pitteri.

SFARD, A. (2008) *Thinking as communicating : Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge : Cambridge University Press.

SIERPINSKA, A. (1991) *Quelques idées sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques liée à la notion d'obstacle épistémologique* (Rapport technique). Thessalonique : Institut Français de Thessalonique.

VYGOTSKY, L.S. (1934/1997) *Pensée et langage* (3ème éd.). Paris : La Dispute.

UNE SITUATION DE REPRODUCTION DE FIGURES AU CYCLE 2 : MISES EN ŒUVRE ET ANALYSE

Claire WINDER
PRAG, ÉSPE de Nice
claire.winder@free.fr

Résumé
Ce travail prend comme objet d'étude une activité destinée à des élèves de cycle 2 (Favrat & al, 2006). Le choix de cette activité est lié au fait qu'elle « plaît aux enseignants » qui l'ont essayée dans leur classe, et qu'elle permettrait des rencontres géométriques moyennant des pliages d'un carré de papier pavé de 4 carrés superposables de couleurs différentes, que nous avons baptisé PLIOX. Mais quels apprentissages l'utilisation adaptée de ce PLIOX permettrait-elle ? Sous quelles conditions ? Comment les enseignants s'emparent-ils de la situation ? Qu'est ce que cela nous apprend sur leurs relations à l'enseignement de la géométrie ? Comment pourraient-ils s'emparer autrement de la situation ? L'objectif de ce travail est de transformer une banale activité en une situation susceptible d'apprentissages définis en relation avec des choix de variables, d'étudier des mises en scène par des enseignants différents pour tester sa robustesse, d'explorer ses autres potentialités et d'affiner le scénario didactique. Les outils théoriques mobilisés sont liés aux connaissances des élèves, à la théorie des situations didactiques pour la construction et l'analyse de la situation (Brousseau, 1996), aux façons cognitives d'apprendre à voir une figure (Duval, 2004), aux conceptions spatiales (Berthelot & Salin, 1993-94), aux espaces de travail géométrique (Houdement & Kuzniak, 2006), mais aussi à l'étude des pratiques enseignantes : vigilance didactique, tension dévolution institutionnalisation (Pézard & Butlen & Masselot, 2012 ; Margolinas & al, 2008).

Dans le cadre de notre action de formation en IUFM, nous avons constaté à la fois la pauvreté de certains manuels dans le domaine de la géométrie à l'école primaire, et la difficulté pour les professeurs des écoles à mettre en œuvre des activités géométriques. En outre ce phénomène nous semblait encore plus visible au cycle 2. Les programmes en vigueur indiquent dans ce cycle : « *Les élèves apprennent à reconnaître et à décrire des figures planes et des solides. Ils utilisent des instruments et des techniques pour reproduire ou tracer des figures planes. Ils utilisent un vocabulaire spécifique.* » (B.O.E.N n°3 du 19 juin 2008).

Mais qu'est-ce qu'une « figure » à l'école élémentaire ? « *Une figure est pour nous un dessin qui a des propriétés qu'on pourrait préciser dans le cadre de la géométrie théorique en le considérant comme une représentation d'une figure géométrique ; ces propriétés se traduisent par des propriétés visuelles contrôlables avec des instruments. C'est dans l'exercice de ce contrôle que vont intervenir les propriétés géométriques proprement dites* » (Duval & Godin & Perrin-Glorian, 2004, p. 13). « *Une figure ne se* [limite] *donc pas à un tracé avec les instruments de géométrie usuels sur papier ou sur un écran d'ordinateur ; elle* [peut] *être obtenue aussi par un assemblage de formes par juxtaposition ou superposition* » (Perrin-Glorian & Mathé & Leclerc, 2013, p. 12). Ainsi, reproduire des figures par assemblage ou par pliage de pièces de papier ou de carton constitue pour nous une pratique de géométrie. Perrin-Glorian considère même que le seul type d'activité de nature géométrique envisageable au CP correspond à des actions matérielles sur des objets matériels.

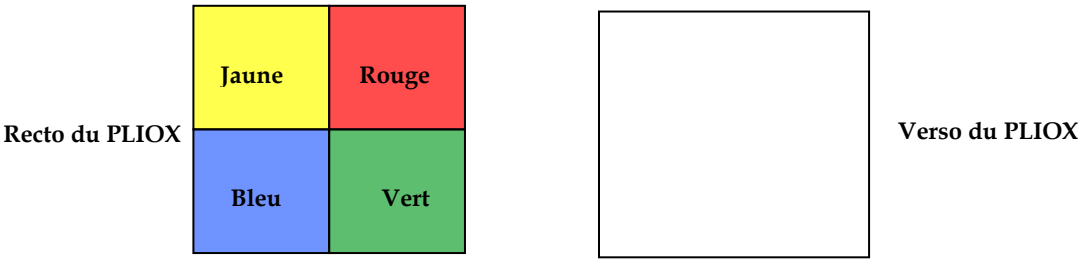
Par conséquent, nous nous sommes intéressés à des activités géométriques mettant en jeu des actions matérielles sur des objets matériels, et plus particulièrement à une activité proposée par (Favrat & al, 2006), à destination des élèves de cycle 2, intitulée « Carrés pliés ». Il s'agit de réaliser des figures colorées par le pliage d'un carré de papier pavé de quatre carrés superposables de couleurs différentes. Le choix de cette activité est lié au fait qu'elle « plaît aux enseignants » qui l'ont essayée dans leur classe suscitant l'adhésion des élèves – engouement confirmé également par l'implication des participants à la communication lors d'une petite mise en activité ! – et qu'elle

permettrait des rencontres géométriques. Or une activité « réussie » du point de vue de l'engagement des élèves n'est pas obligatoirement une activité dans laquelle les élèves apprennent[1]… Par ailleurs, comment faire émerger les concepts de la géométrie euclidienne ainsi que le langage géométrique à partir de ces actions matérielles ?

Le premier cadre théorique choisi dans ce travail est celui de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau) et nous présentons dans un premier temps la situation didactique générique (au sens de Brousseau) que nous nommons situation PLIOX. Puis, à partir du questionnement initial, nous explicitons les cadres théoriques mobilisés, les différents points de la problématique, ainsi que la méthodologie retenue. Nous mettons ensuite en évidence quelques-uns des éléments d'analyse qui nous ont conduits à un scénario didactique en CP/CE1 faisant l'objet de la dernière partie.

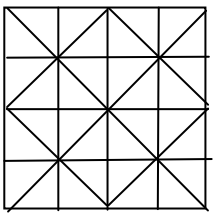
I - LA SITUATION PLIOX

Un PLIOX est un carré de papier présentant sur une face quatre zones également carrées et colorées en rouge, bleu, vert et jaune, zones disposées comme sur la figure ci-dessous.



Nous avons choisi la dénomination particulière de « PLIOX » pour dissocier la forme géométrique de l'artefact[2] au sens de (Rabardel, 1995). À partir d'un PLIOX il est possible de réaliser différentes formes planes colorées selon un ensemble de pliages autorisés. Ainsi le PLIOX est un artefact qui prend le statut d'instrument dès lors qu'il est demandé de reproduire un modèle en le pliant. On considère alors la situation générique suivante :

Reproduire une figure modèle obtenue par pliage effectif d'un PLIOX.



Les directions de plis autorisées sur le PLIOX correspondent aux axes de symétrie du carré (ses diagonales et ses médianes), ainsi qu'aux axes de symétrie des carrés que nous appellerons « carrés secondaires », c'est-à-dire des quatre carrés de couleur (leurs diagonales et leurs médianes). Elles sont présentées dans la figure ci-contre. Pour décrire les pliages, on dénommera « diagonale secondaire » (respectivement « médiane secondaire ») toute diagonale (respectivement toute médiane) d'un carré secondaire qui n'est pas confondue avec une diagonale (respectivement une médiane) du PLIOX.

II - CADRES THÉORIQUES, PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE

Le questionnement initial porte à la fois sur l'intérêt de la situation relativement aux apprentissages géométriques, à sa mise en œuvre et à l'investissement des élèves. Plusieurs cadres théoriques ont donc été convoqués. Ils sont précisés dans ce qui suit.

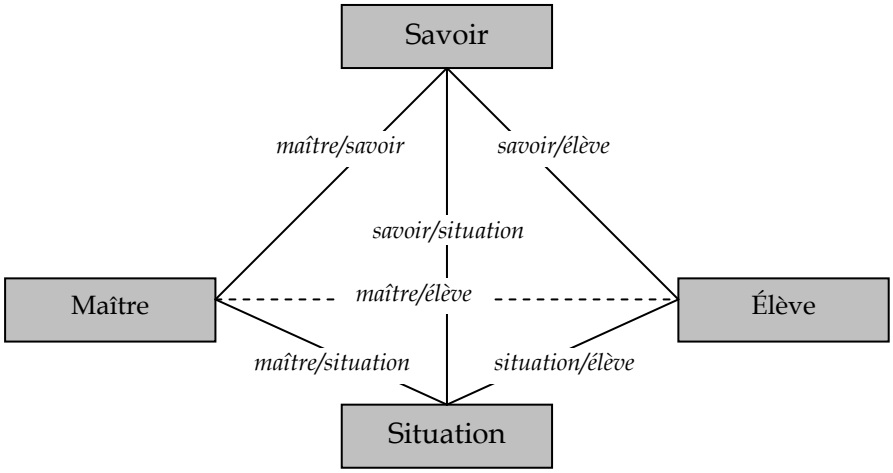
[1] Un exemple de cas emblématique est étudié dans (Margolinas, 2008).

[2] Un artefact est en effet défini comme une « *chose ayant subi une transformation d'origine humaine visant une finalité* » (Houdement & Kuzniak, 2006, p.186)

1 Les cadres théoriques

1.1 La Théorie des Situations Didactiques comme cadre d'analyse

L'utilisation du cadre de la Théorie des Situations Didactiques nous a conduits à une analyse de la situation faisant état des interactions entre le savoir, le professeur et l'élève mais également la situation. En effet, dans la situation didactique de base (représentée par le triangle didactique usuel), l'élève agit en réaction avec un milieu mais l'enseignant se trouve un peu en dehors. Or si le professeur ne fait pas partie du milieu, en revanche il y a réfléchi et le fait fonctionner. Brousseau reprend alors le triangle didactique initial pour schématiser le jeu du maître dans une situation didactique, qui « *définit et donne un sens au jeu de l'élève et à la connaissance* » (Brousseau, 1996, p.113). Reprenant ce travail, (Briand & Chevalier, 1995) identifient les paramètres reliant la situation à l'enseignant, l'élève et le savoir, et les présentent sous la forme d'un schéma reproduit ci-dessous qui constitue le canevas d'analyse retenu pour la situation du PLIOX :



1.2 D'autres éléments de la Théorie des Situations Didactiques

Outre le cadre d'analyse de la situation, nous prenons en compte d'autres éléments de la Théorie des Situations Didactiques.

La notion de situation : « *Brousseau met au cœur de son approche la notion de situation didactique. Une situation didactique* (…) *est une situation dans laquelle se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner.* » (Kuzniak, 2005, p.21). Le terme de *situation* désigne alors l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve et des relations qui l'unissent à son milieu, le milieu désignant ce avec quoi cette personne interagit. Lorsque « *l'élève s'approprie la situation proposée par le professeur non pas en faisant son travail d'élève mais plutôt celui d'un « mathématicien en herbe » préoccupé par la seule résolution du problème posé* » (Kuzniak, 2005, p.22), Brousseau parle dans ce cas de *situation adidactique.*

La notion de dévolution : la *dévolution* correspond à l'acte par lequel le professeur obtient que l'élève accepte (et puisse accepter ?) d'agir dans une situation adidactique, en prenant le risque et la responsabilité de ses actes dans des conditions incertaines. La dévolution répond donc aux questions : comment faire pour que l'élève ait envie de résoudre le problème posé ? Comment donner la tâche ? Quel cheminement pour que les élèves rentrent dans la tâche ?

La notion d'institutionnalisation : cette notion modélise le processus par lequel, sous la responsabilité de l'enseignant, cette connaissance va être dépersonnalisée, décontextualisée et explicitement rattachée aux formes officielles du savoir mathématique visées par l'institution. Il s'agit de permettre de passer de la connaissance au savoir scolaire.

1.3 D'autres cadres

La situation PLIOX correspond à un « origami » particulier, et se déroule donc sur le mode concret selon la terminologie employée par (Duval & Godin & Perrin-Glorian, 2004, p.16), c'est-à-dire dans

le monde sensible. Mais le PLIOX – objet 3D – évoque également un objet 2D dont la forme correspond à une figure géométrique et sur lequel apparaissent d'autres figures géométriques. Ainsi, nous pouvons considérer la situation PLIOX selon deux points de vue, spatial et géométrique :

- le point de vue spatial est analysé selon les travaux de Brousseau (1983) et Galvez (1985), repris par (Berthelot & Salin, 1992) ;
- le point de vue géométrique est abordé en identifiant le paradigme géométrique ainsi que l'Espace de travail Géométrique selon les travaux de (Houdement & Kuzniak, 1999, 2000, 2006), mais également en précisant la place de la situation PLIOX dans l'articulation des niveaux de pensée géométrique (travaux de (Van Hiele, 1986) adaptés par (Kuzniak & Rauscher, 2003)).

Dans cette communication, nous ne développons pas ces pistes de travail.

1.4 Un point de vue cognitif et sémiotique

La situation PLIOX consistant à reproduire des figures, nous retenons le point de vue cognitif et sémiotique sur les figures, issu des travaux de Duval.

Les objets mathématiques sont des objets idéaux qui n'existent pas dans la réalité, et qu'il n'est possible d'aborder que par le biais de leurs représentations. La *représentation sémiotique* est le signe, c'est-à-dire le graphique, des mots, voire le geste, d'un objet auquel on n'a pas accès autrement : « *Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement* » (Duval, 1993, p. 39). Un *registre de représentation sémiotique* est un système qui possède trois fonctions : la communication (ou la transmission) ; le traitement, c'est-à-dire la transformation d'une représentation dans ce même registre ; l'objectivation (pour soi) permettant de faire voir les relations qui existent entre les objets concernés. En géométrie, les registres de représentation sémiotique sollicités sont le langage ainsi que les figures et les dessins, à la fois en tant que tracés et que signes représentant un objet géométrique.

De plus, toute figure, en tant que « *tache visible* [sur] *un support matériel homogène (feuille de papier vierge, écran vide, …)* [apparaît comme] *une combinaison de valeurs pour chacune des variations visuelles* » (Duval, 1995) de type dimensionnel et de forme. Ceci conduit Duval à la définition d'*unités figurales élémentaires* dans le plan pour le registre des représentations géométriques, à savoir :

- le point (seule unité figurale de dimension 0) ;
- les lignes et les courbes ouvertes ou fermées (unités figurales de dimension 1) ;
- les surfaces et intersections de lignes, ouvertes ou fermées (unités figurales de dimension 2).

Par ailleurs, une figure géométrique est toujours une configuration d'au moins deux de ces unités figurales élémentaires puisque « *ce sont les relations (parallélisme, symétrie, tangence …) entre les unités figurales élémentaires qui constituent le contenu pertinent d'une figure géométrique* » (Duval, 1995, p.178). Duval souligne en outre que « *les unités figurales discernables dans une figure ne sont pas constantes mais peuvent varier à la fois dimensionnellement et gestaltiquement en fonction du problème à résoudre* » (Duval, 2003, p. 46). Il met en évidence trois niveaux dans l'appréhension des figures géométriques :

- l'appréhension perceptive correspond à « *un premier niveau où s'opère la reconnaissance des différentes unités figurales qui sont discernables dans une figure donnée* » (Duval, 1995 , p.181) ;
- l'appréhension opératoire correspond à un deuxième niveau, elle est centrée sur les modifications figurales d'une figure, et par suite sur les modifications perceptives que ces modifications entraînent ;
- l'appréhension discursive est déterminée par des propriétés données comme hypothèses et peut amener à changer le regard sur la figure.

Concernant l'appréhension opératoire, Duval identifie différents types de modifications figurales. Une première se fait « *en fonction de la relation entre partie et tout* » (Duval, 1988, p.61) et consiste :

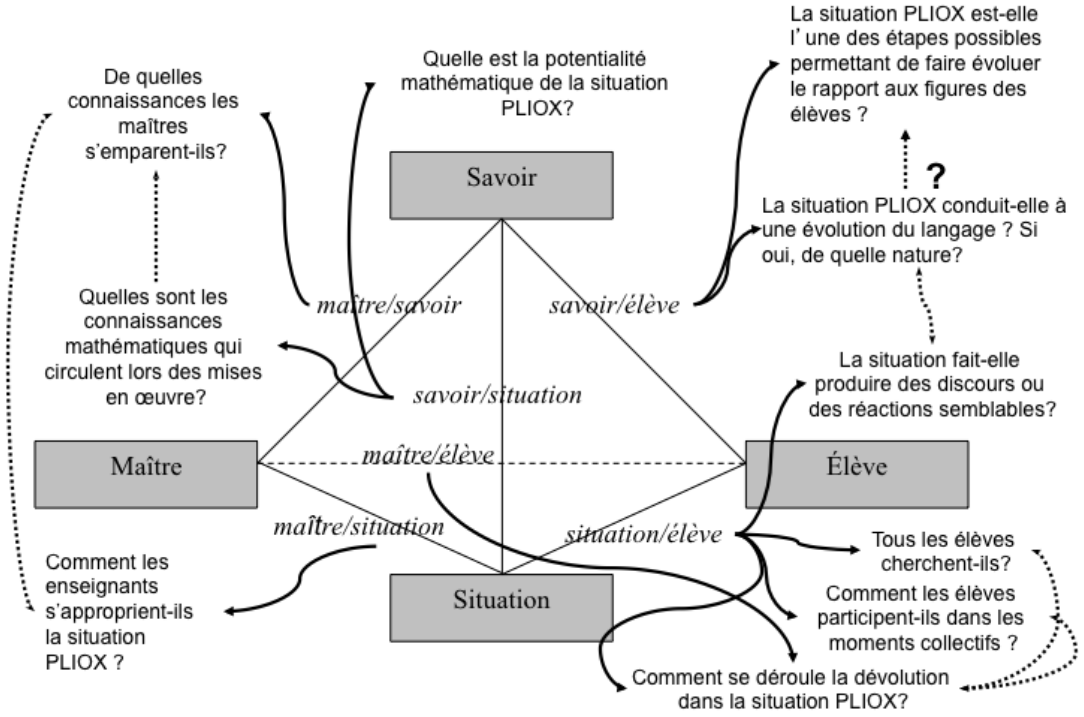
- « *soit* [à*] la partager en plusieurs parties qui sont comme autant de sous-figures* » (Duval, 1988, p.61), on parle de *décomposition méréologique strictement homogène* (décomposition en unités figurales de même forme que la forme de départ), *homogène* (décomposition en unités figurales toutes de même forme, mais différentes de la forme de départ), ou *hétérogène* (décomposition en unités figurales de formes différentes entre elles) ;
- « *soit* [à] *l'inclure dans une autre figure dont elle devient alors une sous-figure* » (Duval, 1988, p.61) ;
- soit « *à réorganiser une ou plusieurs sous-figures différentes d'une figure donnée en une autre figure* » (Duval, 1995, p.184), c'est une *reconfiguration*.

Une seconde consiste à agrandir, à diminuer ou à déformer une figure : il s'agit d'une « *modification optique, elle transforme une figure en une autre appelée son image* » (Duval, 1988, p.62). Une troisième consiste à déplacer ou faire tourner la figure : « *c'est une modification positionnelle, elle ne concerne que l'orientation et la place de la figure dans son environnement (généralement le plan fronto-parallèle)* » (Duval, 1988, p.62).

2 La problématique

L'exposition de la problématique reprend les différentes relations mises en évidence dans le schéma élaboré par (Briand & Chevalier, 1995) et s'appuie sur les cadres théoriques précédemment cités.

Concernant la relation savoir/situation, nous nous interrogeons à la fois sur la potentialité mathématique de la situation PLIOX et sur les connaissances mathématiques qui circulent lors des mises en œuvre. Ceci conduit alors à s'intéresser à la manière dont les enseignants s'approprient la situation PLIOX (relation maître/situation), mais également à identifier parmi les connaissances qui circulent, celles dont les enseignants s'emparent (ce qui donne des informations concernant la relation savoir/situation). Par ailleurs, en regardant du côté de l'élève, nous cherchons à examiner si la situation fait produire des discours ou des réactions semblables, et plus généralement quel est le niveau d'implication des élèves dans les moments de recherche ainsi que dans les moments collectifs (relation situation/élève). Ceci conduit à s'interroger sur le processus de dévolution (relation maître/élève). Enfin, concernant la relation savoir/élève, nous nous demandons si la situation PLIOX est l'une des étapes possibles permettant de faire évoluer le rapport aux figures des élèves, et si une évolution du langage (de nature à définir) permet de la rendre visible. Ces différentes interrogations sont résumées dans le schéma ci-dessous (qui ne se veut pas exhaustif).



3 La méthodologie retenue

Pour répondre à ces différents questionnements, nous avons envisagé deux grands axes de travail :

- un travail théorique, qui débouche également sur un premier scénario didactique ;
- des mises en œuvre dans des classes qui complètent en outre l'analyse théorique et font évoluer ce scénario didactique.

Ainsi nous avons réalisé une analyse mathématique et didactique de la situation, tout en prenant en compte le point de vue cognitif et sémiotique. Ce travail a débouché sur un premier scénario didactique qui a été mis en œuvre dans des classes. Celles-ci ont été filmées puis analysées, conduisant à l'élaboration d'un deuxième scénario didactique. Nous présentons dans ce qui suit quelques éléments d'analyse qui ont principalement découlé des mises en œuvre.

III - QUELQUES ÉLÉMENTS D'ANALYSE

Les mises en œuvre considérées dans cet article se sont déroulées en période 4 dans deux classes de CP d'une ville moyenne de province. Les enseignants (désignés par M et P) sont des Maîtres Formateurs expérimentés mais ils n'ont plus enseigné la géométrie depuis plus de 10 ans. Dans l'une des classes (celle de P), suite à des problèmes de remplacement, les élèves ont fait très peu de géométrie : la situation PLIOX correspond en fait à leur première séquence sur les figures planes. Les deux séances filmées correspondent aux étapes 2 et 3 du scénario didactique[3].

1 Les élèves dans les mises en œuvre

Nous avons pu constater que **les élèves sont et restent extrêmement motivés par cette activité**, même ceux qui ont du mal à rentrer dans le rythme de la classe. De plus, la **dévolution du problème aux élèves est toujours réussie**. Les indicateurs choisis pour dresser ce cosntat sont les suivants :

[3] On pourra se référer au scénario didactique présenté en dernière partie de cette communication, celui proposé aux enseignants suivait en effet la même trame mais était moins élaboré.

- Le nombre de prises de parole à bon escient (par tranche horaire de 5 minutes) augmente toujours d'une séance à l'autre (voir tableau ci-dessous) ;

Nombre de prises de paroles à bon escient par 5 min	Classe de M	Classe de P
Séance 2	6,7	8,7
Séance 3	7,2	13,3

- Le nombre d'élèves étant intervenus à bon escient rapporté au nombre d'élèves de la classe augmente également (voir tableau ci-dessous) :

Nombre d'élèves ayant pris au moins une fois la parole à bon escient / nombre d'élèves de la classe	Classe de M	Classe de P
Séance 2	14/24	15/25
Séance 3	17/24	21/24

À plusieurs reprises, dans les deux classes, nous avons pu constater que les élèves ayant des difficultés scolaires ne sont pas les moins impliqués : ils cherchent et trouvent quelquefois plus rapidement que certains considérés comme « bons ». On peut enfin souligner que si la réalisation des pliages peut poser des problèmes à des élèves ayant des difficultés de motricité fine, cela ne présume pas qu'ils auront des difficultés à identifier ce qu'il faut faire. On peut donc voir sans faire…

2 Le langage employé

Dans ce paragraphe, nous nous interrogeons sur une éventuelle évolution du langage. Or d'après Perrin-Glorian, « *dans la classe de géométrie, le langage a plusieurs fonctions, au moins : langage pour mener l'activité géométrique elle-même (situation non didactique), langage pour communiquer sur l'activité géométrique (situation didactique)* » (Perrin-Glorian, séminaire M6-15, 13 janvier 2011). Nous nous intéressons ici à la partie didactique en nous inspirant du travail de (Duval, 1995) : nous réalisons une analyse du vocabulaire employé pour désigner les objets de la géométrie.

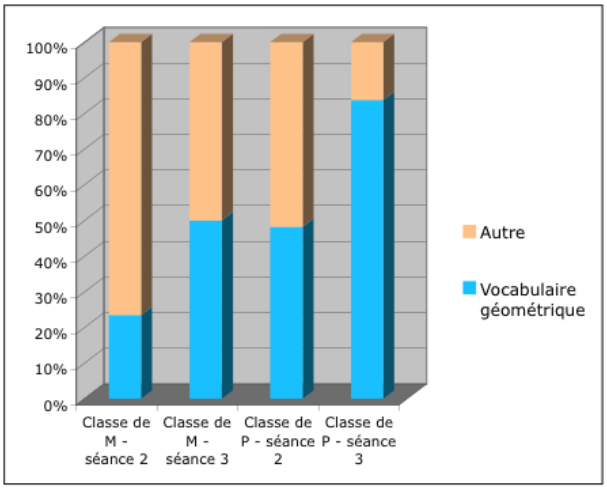
2.1 L'identification des désignations

Dans un premier temps, les différents mots utilisés par les élèves et les enseignants sont identifiés. Pour les figures planes usuelles, les désignations relèvent soit du langage géométrique (triangle, rectangle, carré, losange), soit du langage des couleurs, ou encore des formes (« le carreau »). Pour les différentes droites ou segments, les désignations relèvent soit du langage géométrique (droite, diagonale, médiane, côté), soit du langage courant (ligne, trace) faisant éventuellement référence à l'espace sensible (trait, pli, bord). Pour les points, les désignations relèvent soit du langage géométrique (point, sommet, centre), soit du langage courant en référence à l'espace sensible (« pointe », « coin », « pic »).

2.2 L'évolution du vocabulaire

Pour avoir une idée de l'évolution du vocabulaire dans les classes, nous nous intéressons à la proportion de mots relevant du langage géométrique par rapport à ceux relevant d'autres domaines langagiers et désignant les mêmes objets géométriques chez les élèves des deux classes. Pour ce faire, nous avons dénombré l'occurrence de ces mots dans le texte des transcriptions de chacune des séances, en distinguant ceux employés par l'enseignante et ceux employés par les élèves. Le diagramme ci-dessous illustre l'évolution générale mais pointe également des différences entre les classes :

- dans les deux classes la proportion de mots géométriques évolue positivement ;
- dans la classe de M, la proportion de mots non géométriques est encore importante à l'issue de la séance 2 (alors que cette séquence s'insère dans une progression en géométrie) ;
- bien que les élèves de P n'aient pas eu de séance de géométrie plane avant la séquence PLIOX, le vocabulaire employé lors de la séance 2 de P relève déjà plus souvent du langage géométrique que les élèves de M.



Plus précisément, nous cherchons à savoir si cette évolution positive mais non uniforme du langage dépend de la dimension des éléments figuraux élémentaires. Pour cela, nous considérons la proportion de mots géométriques **employés par les élèves** *en fonction de la dimension des éléments figuraux élémentaires*. Par ailleurs, pour mieux cerner le phénomène, nous croisons ces informations avec le nombre de mots géométriques **employés par l'enseignant**. Ces données sont présentées dans le tableau ci-dessous, les indications entre parenthèses et en italique gras correspondant au vocabulaire du maître.

	Classe de M		**Classe de P**	
	Séance 2	Séance 3	Séance 2	Séance 3
« carreau », désignation de couleur / **carré, triangle, rectangle,…**	39 / **15** / ***(10)***	33 / **28** / ***(56)***	9 / **8** / ***(17)***	7 / **48** / ***(112)***
« pointe », « coin », « pic » / **sommet, centre, point,…**	4 / **0** / ***(0)***	14 / **16** / ***(32)***	0 / **2** / ***(4)***	5 / **26** / ***(60)***
« trait », « pli », « trace », « ligne », « bord » **diagonale, droite, côté,…**	6 / **0** / ***(0)***	8 / **1** / ***(9)***	5 / **3** / ***(8)***	6 / **19** / ***(33)***

Nous dressons les constats suivants :

- M ne propose pas souvent le vocabulaire idoine, s'exprime souvent avec des termes non géométriques et a tendance à reprendre à son compte ceux des élèves (en général non géométriques). P en revanche désigne systématiquement l'objet géométrique par son nom.
- Dans la classe de M, les mots désignant des droites ou des parties de droite ne sont jamais employés lors de la séance 2 : élèves et enseignant utilisent « trait », « pli » ou « ligne » ; lors de la séance 3 on constate que les élèves continuent à employer ces mots …. Par contre l'emploi de tels mots devient très minoritaire lors de la séance 3 dans la classe de P. L'un des objectifs implicites d'apprentissage de P est en effet l'acquisition d'un premier vocabulaire géométrique, institutionnalisé à la fin de la séance 3.

On peut alors s'étonner de l'apparition de mots géométriques désignant des points dans la classe de M lors de la troisième séance, alors qu'ils n'ont pas été énoncés lors de la séance précédente. Ceci peut être expliqué par le travail parallèle du modulateur en géométrie. Ainsi, si les élèves des deux classes ont à un moment ou à un autre employé du vocabulaire non géométrique, ce phénomène est resté à la marge dans la classe de P – car aussitôt rectifié – alors qu'il a subsisté dans celle de M malgré les séances de géométrie effectives du modulateur. Ceci souligne également le rôle important de l'enseignant lors des phases de formulation.

3 Des connaissances en jeu et/ou en situation

3.1 Les connaissances spatiales

« *Par connaissances spatiales, nous désignons les connaissances qui permettent à un sujet un contrôle convenable de ses relations à l'espace sensible. Ce contrôle se traduit par la possibilité pour lui de reconnaître, décrire, fabriquer des objets, de déplacer, trouver, communiquer la position d'objets, de reconnaître, décrire, construire ou transformer un espace de vie ou de déplacement.* » (Berthelot & Salin, 1999-2000, p.38). Dans la situation PLIOX, la consigne de reproduction consiste à obtenir par pliage un objet de l'espace sensible. Les élèves font donc fonctionner des compétences spatiales liées à la position et à l'orientation :

- passage du plan fronto-parallèle au plan horizontal car le modèle à reproduire est placé sur le tableau (plan vertical), alors que le PLIOX des élèves se trouve sur leur table (plan horizontal) ;
- changement d'orientation (rotation d'un quart de tour) dans la classe de P, les tables étant disposées « en U » dans la classe ;
- orientation du PLIOX ;
- positions relatives des sous-figures du modèle ;
- utilisation du vocabulaire : en diagonale, à l'envers, vertical, horizontal, … et à droite, à gauche, en haut, en bas, au milieu, dessus, devant,…

Les compétences spatiales sont induites par la situation (indépendamment de l'enseignant). Elles restent implicites en phase d'action et ne peuvent être rendues explicites que lors des épisodes d'analyse des modèles ou d'explicitation des procédures. Ces moments contribuent à l'emploi du vocabulaire spatial.

3.2 Les connaissances géométriques et le rapport aux figures

La *potentialité* mathématique de la situation PLIOX porte sur la connaissance/reconnaissance d'éléments figuraux élémentaires. Concernant les éléments figuraux 2D, il s'agit de :

- *reconnaissance* du carré, du rectangle, du triangle rectangle isocèle, mais d'autres polygones convexes peuvent être présents (trapèze, pentagone, hexagone) ;
- *propriétés* de ces figures planes : axes de symétrie éventuels, égalité ou pas de longueur des côtés, nombre de côtés, de sommets,… ;
- *relations* entre carré, rectangle, triangle rectangle isocèle ;
- *vocabulaire* de la géométrie : carré, rectangle, triangle, côté, sommet, diagonale, droite, point,…

De plus, les modèles à reproduire sollicitent une appréhension opératoire qui peut conduire à des décompositions méréologiques différentes, voire à des recompositions. Concernant les éléments figuraux 1D, il s'agit de mettre en évidence des côtés de figures particulières (perçus comme les « bords » de ces figures), ainsi que les droites particulières du carré (les deux diagonales et les deux médianes). Les différentes droites font apparaître un réseau de droites très visible sur le verso du PLIOX. Concernant les éléments figuraux 0D, il s'agit d'identifier des sommets, et de mettre en évidence le centre du carré. Les connaissances géométriques en jeu dans la situation PLIOX ainsi précisées, nous mettons en évidence dans le tableau ci-dessous les connaissances qui circulent dans les mises en œuvre, puis celles dont les enseignants s'emparent quelquefois :

Connaissances géométriques…		
… en jeu	**… qui circulent…**	**… et dont les enseignants s'emparent quelquefois**
Reconnaissance du carré, du rectangle, du triangle rectangle isocèle.	Reconnaissance du carré, du rectangle, du triangle.	Reconnaissance du carré, du rectangle, du triangle.
Propriétés de ces figures planes : axes de symétrie égalité de longueur des côtés nombre de côtés nombre de sommets	Propriétés de ces figures planes : égalité de longueur des côtés nombre de côtés nombre de sommets	
Relations entre carré, rectangle, triangle rectangle isocèle	Relations entre carré, rectangle, triangle rectangle isocèle **liées au partage du carré en deux parties**	
Vocabulaire de la géométrie	Vocabulaire de la géométrie	Vocabulaire de la géométrie
Côtés Droites particulières du carré (diagonales, médianes)	Côtés Droites particulières du carré (diagonales, médianes)	Droites particulières du carré (diagonales)
Sommets, centre du carré	Sommets, centre du carré	
	Relations entre les aires de certaines surfaces	

Ces constats sont à relier avec la manière dont les enseignants s'emparent de la situation, qui fait l'objet du paragraphe suivant.

4 La manière dont les deux enseignants se sont appropriés la situation

A l'issue des mises en œuvre, on constate que M reste beaucoup dans le « faire » et peu dans le « dire », même si ses fiches de préparations indiquent que l'objectif principal est « l'analyse des figures » :

- au début de la séance 2, cet enseignant montre aux élèves le pliage du PLIOX lors de la réalisation du modèle, réduisant l'activité à une reproduction de geste ;
- dans les phases d'action, il explique aux élèves comment s'y prendre ;
- il met en avant les procédures, sans les mettre en mots mathématiques.

Pour P, l'objectif principal de la séquence semble être le vocabulaire, la place de la situation PLIOX dans la progression (première séquence de géométrie dans cette classe) pouvant en être une raison. Mais P a également la mise en recherche des élèves pour objectif.

De plus, ni M ni P n'a proposé de décontextualisation. Les élèves travaillent sur le PLIOX, obtiennent par pliage de carrés et de rectangles, d'autres carrés, rectangles ou triangles mais **aucun des deux enseignants ne met en évidence les relations entre les figures, pas plus qu'ils n'en exhibent des propriétés.** Enfin, il semble que les enjeux d'apprentissage ne sont pas clairement identifiés pour ces enseignants, ce qui peut s'expliquer par le fait qu'ils n'enseignent plus la géométrie depuis au moins une dizaine d'années. **Ce manque d'identification des enjeux d'apprentissage se traduit alors par une quasi-absence de moments d'institutionnalisation.** Ces enseignants ont finalement offert aux élèves l'occasion de rencontrer le lexique de géométrie, de position et d'orientation et de discriminer quelques formes planes : « *Tout se passe comme si le professeur offrait à l'élève des possibilités de rencontres avec certains objets, sans que les conditions de construction des connaissances et des savoirs relèvent vraiment de sa responsabilité* » (Margolinas & Laparra, 2008). Ce constat met en lumière ce que Margolinas & Laparra ont qualifié de « *dysfonctionnement d'un processus d'enseignement* ». Il est à rapprocher de l'identification de gestes professionnels nécessaires à un fonctionnement approprié de la classe de mathématiques, et

notamment liés à l'analyse *a priori*. En effet Butlen&Masselot&Pézard notent qu'« *une vigilance didactique insuffisante se traduit souvent par un manque d'analyse a priori des tâches induites par les situations proposées, débouchant sur une synthèse et une institutionnalisation faibles, peu explicites (…)* » (Butlen&Masselot&Pézard, 2012, p.260), cette vigilance didactique étant « *davantage liée à une perception des enjeux mathématiques des activités proposées, des procédures à privilégier plutôt qu'à une simple maîtrise des contenus mathématiques* » (Ibid, p.261). Ces remarques débouchent sur une nouvelle question portant sur les conditions de dépassement de la tension entre dévolution et institutionnalisation dans la situation du PLIOX.

IV - CONSÉQUENCES POUR UN SCENARIO DIDACTIQUE EN CP/CE1

La prise en compte des constats précédents nous a conduits à l'élaboration d'un nouveau scénario didactique, mettant en évidence des étapes importantes pour l'enseignant :

- Poser un « vrai » problème géométrique : préparer le modèle (c'est-à-dire réaliser le pliage du PLIOX avant sa présentation à la classe) hors de la vue des élèves pour ne pas réduire l'activité à la reproduction d'un geste.
- Faire analyser le modèle : cette phase de formulation est une étape importante de l'activité car elle incite les élèves à identifier explicitement les formes géométriques quelle que soit leur position, et à les nommer, elle « force » le regard sur les figures et induit des décompositions/recompositions figurales ; elle fournit ainsi l'occasion d'utiliser le vocabulaire géométrique et spatial et peut conduire à la justification de propositions dans le but de convaincre les autres.
- Faire expliciter la procédure : cette deuxième phase de formulation peut aider certains élèves à effectuer la reproduction attendue ; elle porte sur les *gestes* à accomplir dans le micro-espace 3D et permet ainsi de rendre explicite les compétences spatiales ; elle fournit l'occasion aux élèves d'utiliser le vocabulaire spatial et géométrique ; elle peut également conduire à mettre en évidence des relations entre les différentes figures.
- Faire justifier les faits énoncés : une demande de justification des faits énoncés peut contribuer à expliciter des propriétés par leur verbalisation et à décontextualiser.
- Institutionnaliser : lorsque l'enseignant ne dégage pas les connaissances qui circulent, alors cette connaissance ne devient pas objet d'apprentissage : « *lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible : il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation* » (Connes, 1992) ; la présentation des phases d'institutionnalisation passe par une mise en évidence, dans le scénario didactique des connaissances mathématiques qui circulent et que l'on peut faire acquérir aux élèves.

Le nouveau scénario, présenté dans ce qui suit, se déroule selon une progression établie en fonction du nombre de pliages à réaliser au minimum.

Etape 1 : Introduction du PLIOX dans la classe

But : fabrication d'un objet technique (c'est-à-dire dont la finalité est d'assurer un service de caractère pratique, utilitaire).

Tâche des élèves : reproduire le modèle sur la feuille distribuée, en suivant les instructions de l'enseignant pour les pliages, puis colorier en situant les zones colorées les unes par rapport aux autres.

Objectifs de l'enseignant : au niveau des connaissances, il s'agit de rappeler le premier vocabulaire géométrique (carré, rectangle, côté), de position (au-dessus de, au-dessous de, à gauche de, à droite de) ou d'orientation (à droite, à gauche, en haut, en bas). De plus, cette séance amorce le travail sur la tâche d'analyse d'une figure en rendant explicite le fait que la figure externe du PLIOX est un

carré et que le PLIOX est partagé en quatre zones carrées monochromes (figures internes). Enfin, concernant l'activité elle-même, il s'agit d'introduire le pliage comme modalité de reproduction utilisée, et plus particulièrement de mettre en évidence le pliage bord sur bord.

Déroulement : Temps 1 (collectif) – Présentation du PLIOX
Temps 2 (travail individuel) – Pliages
Temps 3 (travail individuel) – Coloriage

Analyse *a priori* : cette étape correspond à une *phase d'appropriation du matériel* (le PLIOX est un carré partagé en quatre zones carrées des couleurs différentes). Elle se décompose en un temps collectif de formulation correspondant à la découverte du PLIOX, suivie de deux temps d'action :

- Dans le temps 1, il s'agit de permettre une première analyse de la figure en vue de sa reproduction. Les couleurs des carrés secondaires sont évoquées. À cette occasion, un premier vocabulaire géométrique peut apparaître (carré, côté), de même que celui lié aux positions relatives des différentes figures internes (au-dessus de, au-dessous de, à gauche de, à droite de, en haut de, en bas de).
- Le temps 2 correspond à la réalisation de deux pliages bord sur bord. Après le premier pliage, un nouvel objet géométrique, le rectangle, apparaît.
- Le temps 3 nécessite que les élèves situent les zones colorées les unes par rapport aux autres (compétences spatiales).

À l'issue de chaque temps d'action, la validation est de deux sortes : auto-validation par confrontation visuelle au modèle et validation par le maître.

Les pliages bord sur bord que les élèves sont amenés à effectuer sur le carré blanc lors de la fabrication de leur PLIOX font apparaître sous forme de plis (éléments figuraux 1D) deux axes de symétrie correspondant aux deux médianes du carré : ces deux droites n'apparaissent donc pas uniquement comme les bords non détachables des carrés secondaires (première loi d'organisation et de reconnaissance perceptive). Le centre du support carré correspond d'abord à l'intersection des deux plis ; après coloriage, il correspond à un sommet commun aux quatre carrés secondaires.

Étape 2 : reproduction d'un premier modèle par pliage

Tâche des élèves : reproduire le modèle par pliage de son PLIOX



Déroulement : Temps 1 (collectif) – Présentation et première analyse du modèle
Temps 2 (travail individuel) – Recherche
Temps 3 (collectif) – Explicitation de procédure, invalidation éventuelle de productions
Temps 4 (collectif) – Conclusion portant sur les relations entre le carré et le rectangle
Temps 5 (collectif) – Institutionnalisation « locale » portant sur le vocabulaire rencontré (carré, rectangle, côté)

Le modèle reste visible mais à distance des élèves pendant la durée de l'activité.

Analyse *a priori* : cette étape organise la première confrontation à un problème de reproduction de figure par pliage du PLIOX. Pour le maître, il s'agit de s'assurer de la bonne compréhension de la consigne et de ce type de problème. Il s'agit donc d'une phase de dévolution du problème. Le modèle est choisi de façon à ce que les élèves puissent résoudre facilement le problème : il nécessite un seul pliage, il est composé de deux grands carrés monochromes mis en évidence par coloriage dans l'étape précédente, le pli nécessaire à la reproduction du modèle correspond à une médiane précédemment marquée. L'étape s'organise en plusieurs temps :

- Le temps 1 est une phase de formulation. Les élèves sont incités à l'analyse de la figure, ce qui servira dans la suite de cette étape. A minima, il s'agit d'identifier à la fois la figure externe (un rectangle) ainsi que les deux carrés secondaires (le carré jaune et le carré rouge). Pour qu'il y ait problème géométrique, la préparation du modèle (c'est-à-

dire la réalisation du pliage du PLIOX par l'enseignant avant sa présentation à la classe) est cachée aux élèves. De plus, le nombre de pliages nécessaires pour réaliser la figure n'est pas indiqué par la consigne.

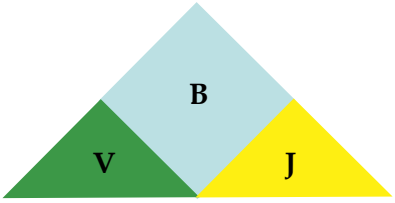
- Le temps 2 correspond à une phase d'action. La validation est perceptive par comparaison visuelle entre le modèle et le résultat du pliage du PLIOX effectué ; il est même possible pour les élèves de venir juxtaposer leur production et le modèle, par exemple pour comparer les longueurs des côtés : le milieu fournit une rétroaction immédiate.
- Le temps 3 est une nouvelle phase de formulation. La validation de cette explication est double : sur le fond par la réalisation effective du pliage en parallèle au discours, et sur la forme par l'enseignant, qui veille à employer le vocabulaire géométrique et spatial idoine tout au long de cette situation.
- Le modèle 1 met en évidence une première relation entre le carré et le rectangle : le partage en deux parties du carré conduit à un rectangle. La conclusion (temps 4) peut alors porter sur les modalités de pliage ainsi que sur le fait que le partage en deux parties du PLIOX conduit à deux rectangles. Pour illustrer cette dernière remarque, il est possible de plier et déplier son PLIOX selon une médiane.

Aucun travail papier/crayon n'est exigé, aucun instrument classique de géométrie n'est utilisé, seuls les pliages sont convoqués. L'activité est alors centrée sur l'analyse de la figure pour sa reproduction, et non pas sur le tracé. L'analyse du modèle, préalable à sa reproduction, implique la prise en compte à la fois de sa forme (figure externe) et de la décomposition méréologique induite par son découpage en éléments figuraux 2D monochromes. Ceci conduit les élèves à identifier à la fois la figure externe du modèle, ses sous-figures monochromes (figures internes) ainsi que l'organisation spatiale relative de ces éléments figuraux.

La nécessité de verbaliser ce que l'on voit et d'expliquer sa procédure conduit à faire fonctionner un vocabulaire précis. Les interventions peuvent se référer à différents domaines langagiers : celui des couleurs (éléments les plus visibles dans le modèle), au vocabulaire géométrique (notamment carré, rectangle, côté, sommet) par identification du rectangle et des carrés ou dénombrement des sommets ou des côtés, et vocabulaire spatial (orientation ou position).

Étape 3 : reproduction d'autres modèles avec un pliage

Le même déroulement est conservé. Cependant lors du temps d'analyse, l'identification des formes fait l'objet d'une demande de justification. Les modèles, bien qu'ils nécessitent un seul pliage, apparaissent plus compliqués que celui de l'étape 2, puisque qu'à chaque fois le pliage solution se réalise à partir d'un pli qui reste à déterminer.

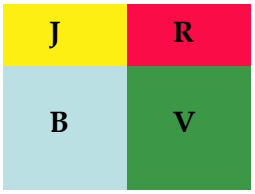


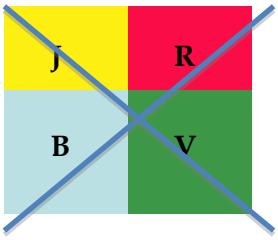
Analyse du premier modèle : Le modèle ci-contre nécessite un seul pliage dont le pli n'est pas encore marqué sur le PLIOX. Ce nouveau pli se réalise selon la diagonale du PLIOX. Il correspond à un axe de symétrie de la figure externe du PLIOX, mais également à un axe de symétrie de deux figures internes du PLIOX : le carré vert et le carré jaune. La présentation de ce modèle implique un changement d'orientation, *a priori* relativement aisé à dépasser pour les élèves grâce à un changement d'orientation de leur PLIOX.

Le temps collectif d'analyse préalable du modèle permet de souligner la présence du carré bleu, éventuellement en jouant avec le changement d'orientation, et d'une nouvelle figure géométrique en deux exemplaires : le triangle.

La réalisation de ce modèle met en évidence une relation particulière entre le carré et le triangle : un carré partagé en deux peut donner un triangle.

La mise en commun est l'occasion de revenir sur la technique de pliage bord sur bord en ajustant les deux sommets opposés l'un sur l'autre. La mise en commun se conclut en soulignant la création d'un nouveau pli sur le PLIOX partageant celui-ci en deux parties superposables : une diagonale.



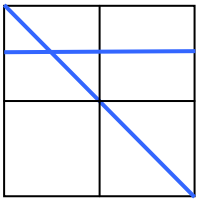


Analyse du deuxième modèle : bien que le modèle nécessite un seul pliage, il existe plusieurs difficultés : le pli n'apparaît pas sur le PLIOX, il ne correspond pas à un axe de symétrie du carré, mais à celui de deux carrés secondaires (jaune et rouge), autrement dit à la médiane du rectangle formé par ces deux carrés secondaires, le modèle est « ambigu » puisque le choix de plis différents mais parallèles aux directions de plis privilégiées, conduit à une figure «ressemblant» au modèle, mais qui ne lui est pas isométriquement équivalente, comme celle présentée ci-dessus.

Le temps collectif d'analyse préalable permet d'identifier et de nommer les figures internes (les deux carrés secondaires et les deux rectangles) ainsi que leurs positions relatives. La demande de justification des figures identifiées peut conduire à mettre en évidence leur nombre de côtés et de sommets et permet de souligner les points communs et les différences qui existent entre le carré et le rectangle : ils ont tous deux quatre côtés et quatre sommets, mais dans le rectangle tous les côtés n'ont pas la même longueur. On pourra également remarquer que parmi les différents rectangles qui apparaissent dans ce modèle certains ne sont pas des moitiés de carrés.

La mise en commun peut conduire à mettre en avant les relations qui existent entre les dimensions des rectangles rouge et jaune et des carrés secondaires correspondants. Elle permet également d'expliciter le pliage correct comme un pliage bord sur bord des carrés secondaires rouge et jaune. Ce nouveau pliage fait apparaître un nouveau pli, c'est-à-dire un nouvel élément figural 1D : une médiane secondaire, parallèle à la médiane.

L'institutionnalisation locale peut reprendre les différents points abordés tout au long de l'activité : objets géométriques, propriétés et relations mises en évidence. Elle peut porter sur les relations entre le carré, le rectangle et le triangle. En effet, le premier modèle correspond à la construction d'un triangle à partir du partage d'un carré. On peut donc mettre en évidence qu'un carré partagé en deux parties peut donner deux triangles rectangles isocèles. De plus la réalisation des deux modèles a fait apparaître de nouvelles sous-figures monochromes à l'intérieur du PLIOX : deux triangles rectangles isocèles à l'intérieur des carrés secondaires vert et jaune pour le premier modèle, deux rectangles à l'intérieur des carrés secondaires rouge et jaune pour le deuxième modèle. On peut également souligner que, dans le cas général deux triangles isocèles rectangles peuvent donner un carré, et deux rectangles peuvent donner un carré.



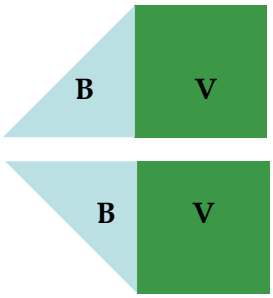
À l'issue de cette étape, le PLIOX porte les marques de plusieurs éléments figuraux 1D : les deux médianes du PLIOX déjà réalisées lors de l'étape 1 ainsi qu'une diagonale et une médiane secondaire (en gras sur le schéma ci-contre). Le verso du PLIOX permet de visualiser les différentes droites ainsi créées depuis le début de la séquence.

Étape 4 : reproduction de nouveaux modèles à deux pliages

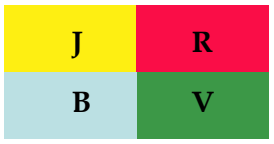
Cette étape est analogue à la précédente : elle comporte une alternance de phases d'action et de formulation. L'analyse du déroulement général est donc identique. Toutefois les modèles à reproduire nécessitent au minimum deux pliages. Ils sont choisis selon une difficulté croissante explicitée dans ce qui suit.

Le premier modèle est choisi pour permettre une reprise de l'activité de l'étape précédente, tout en proposant un nombre plus important de pliages. Il est constitué par le carré secondaire mis en évidence par sa couleur, il n'est donc pas ambigu. Les plis conduisant à la solution sont également présents dès l'étape 1 puisqu'ils ont servi à la réalisation du PLIOX. De plus, l'ordre des deux pliages nécessaires est indifférent.

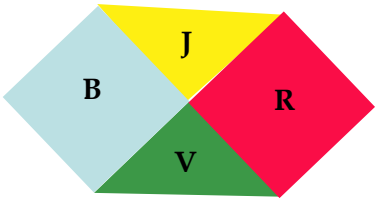




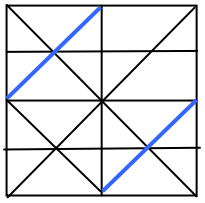
Les deux modèles suivants ne sont pas ambigus. Leurs figures externes correspondent à des trapèzes, ce qui donne l'occasion aux élèves de rencontrer des quadrilatères autres que des carrés ou des rectangles. Le dénombrement des côtés ou des sommets de ces modèles peut permettre de souligner les points communs avec ceux-ci. Ces modèles sont symétriques l'un de l'autre (donc superposables, mais non identiques) et peuvent être proposés simultanément. Avec eux, les élèves se rendent compte que des figures peuvent être très ressemblantes, c'est-à-dire avoir la même figure externe (ici, un trapèze), les mêmes figures internes (un triangle et un carré secondaire) sans être identiques : le rôle de l'orientation des figures internes est ici mis en évidence. Les plis ne sont pas marqués à l'issue des étapes précédentes, ce qui rend la reproduction plus difficile. Deux procédures sont envisageables pour obtenir chacun de ces modèles : réaliser un premier pliage selon une médiatrice, puis un deuxième selon l'une des diagonales du carré bleu ou plier selon l'une des diagonales du PLIOX puis réaliser un pliage selon une médiane. La mise en commun est l'occasion de souligner ressemblances et différences tant au niveau des figures qu'au niveau des procédures. Ces modèles conduisent à mettre en évidence des relations entre le carré et le rectangle, et plus précisément : un carré partagé en deux peut donner un rectangle, et un rectangle partagé en deux peut donner un carré.



La réalisation du troisième modèle fait appel à un premier pliage sur un pli existant depuis l'étape 3 (on retrouve le deuxième modèle de l'étape 3 si l'on choisit de commencer par ce pli), et à un deuxième pli selon une médiane secondaire que les élèves doivent déterminer. Ce modèle est donc « ambigu ». L'inversion des deux pliages n'a pas d'incidence sur le résultat : deux procédures sont ainsi possibles. On peut remarquer qu'en retournant le support, on obtient également un rectangle quadricolore. Les deux figures obtenues sont très ressemblantes mais pas identiques car leur disposition est différente : le verso est comme « inversé». Les élèves s'aperçoivent aussi que pendant la réalisation, il vaut mieux contrôler l'agencement des couleurs, sinon gare aux erreurs d'orientation à la fin ! La réalisation de ce modèle met de nouveau en évidence les relations entre le carré et le rectangle : les carrés secondaires partagés en deux donnent des rectangles ; deux de ces rectangles peuvent former soit un carré bicolore, soit un rectangle bicolore ; les quatre rectangles forment un grand rectangle.



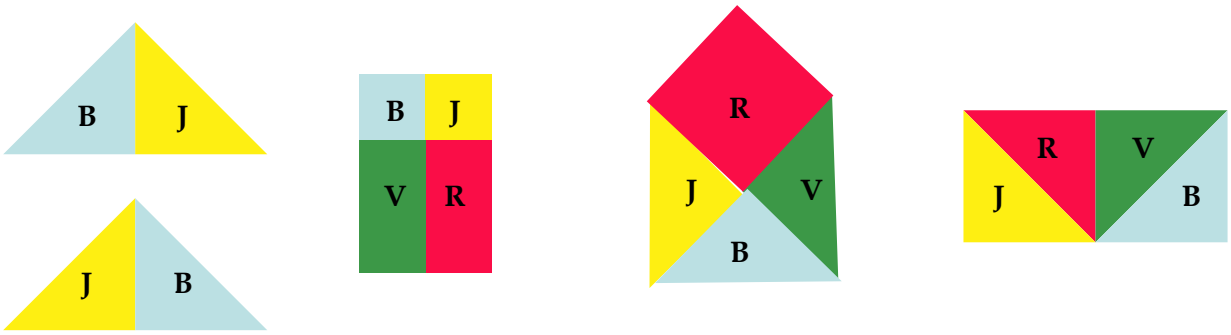
Lorsque le dernier modèle est présenté, les deux carrés sont en situation non prototypique, ce qui risque de générer des difficultés dans leur identification : l'enseignant peut alors jouer sur la mobilité du PLIOX pour les faire identifier. La réalisation du modèle nécessite de plus un changement d'orientation. La figure externe du modèle est un hexagone non régulier : l'existence de polygones convexes à plus de 4 côtés est alors soulignée. L'ordre de pliage n'a pas d'incidence sur le résultat : deux procédures sont alors envisageables. La reproduction du modèle conduit à la création de deux nouveaux plis (des diagonales des carrés secondaires jaune et vert). Ainsi à l'issue de cette activité, neuf plis sont marqués sur le PLIOX. Ils sont donnés ci-contre.



À l'issue de cette étape, l'institutionnalisation peut par exemple porter sur les droites particulières du carré.

Étape 5 : reproduction de modèles nécessitant trois pliages ou plus

Cette étape est un approfondissement des précédentes : les reproductions nécessitent maintenant trois pliages consécutifs au moins. Les modèles suivants peuvent être proposés aux élèves :



Les deux premiers sont les plus faciles à réaliser car leur reproduction ne nécessite pas l'utilisation d'un nouveau pliage, la figure externe correspond à une figure connue, le triangle, les deux figures internes également triangles sont rapidement obtenues à partir des carrés monochromes. De plus il existe une procédure économique en trois pliages : le premier selon la médiane ; les deux autres selon une diagonale et une diagonale secondaire. On obtient alors un modèle au recto et l'autre au verso. La reproduction de ces modèles s'appuie sur le fait que le partage d'un carré en deux parties peut donner un triangle.

Les figures externes et internes du troisième modèle sont encore familières et dans des positions prototypiques ; en revanche un nouveau pliage selon une médiane s'avère nécessaire. De plus, ce modèle est ambigu.

Par contre le pentagone n'est pas une figure familière aux élèves. De plus, le carré rouge est en position non prototypique, ce qui peut rendre son identification plus délicate. En revanche, tous les plis nécessaires sont marqués.

Enfin le dernier modèle est le plus difficile car il nécessite tout d'abord un nouveau pliage selon une diagonale secondaire, et ensuite un pliage « par-devant » le PLIOX.

Lors de la phase de conclusion, on peut par exemple mettre en évidence que :

- la réunion de deux triangles peut donner un triangle et qu'un triangle partagé en deux peut donner deux triangles (d'après les deux premiers modèles) ;
- la réunion de deux rectangles peut donner un carré et la réunion de deux carrés peut donner un rectangle (d'après le deuxième modèle) ;
- la réunion de quatre triangles peut donner un rectangle (d'après le dernier modèle).

Il est envisageable de prolonger la séquence en proposant des reproductions d'autres modèles en guise de « gymnastique » géométrique, non plus sur des séances complètes mais à l'occasion de brefs moments (10 à 15 minutes). Certains de ces modèles peuvent être proposés par le maître, d'autres par des élèves. Certains modèles peuvent même nécessiter quatre pliages...

D'autres pistes…

Dans le scénario didactique, le réseau de droites qui apparaît sur le verso du PLIOX n'est pas vraiment mis à profit. Il serait en effet possible de s'appuyer sur l'identification des sous-figures colorées pour les faire apparaître au verso. Il est ainsi envisageable que le jeu sur le recto/verso du PLIOX permette de développer la capacité à identifier toutes les formes qu'il est possible de reconnaître dans ce réseau de droites. Selon Houdement, cette capacité doit être travaillée en parallèle de la déconstruction dimensionnelle des formes 2D perceptivement prégnantes. Ce nouveau développement de la situation PLIOX pourrait alors s'intégrer dans le travail de Duval & Godin & Perrin-Glorian qui cherchent à développer des situations pour apprendre à regarder les figures.

V - BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l'enseignement obligatoire*. Thèse. Université Bordeaux 1.

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1999-2000) L'enseignement de l'espace à l'école primaire, *Grand N*, **62**, 37-59, Université Bordeaux 1.

BRIAND J. & CHEVALIER M-C. G (1995) *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. Paris : Hatier pédagogie.

BROUSSEAU G. (1996) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, 45-143, in *Didactique des mathématiques* (BRUN J. dir.), Delachaux et Niestlé.

CHARLES-PEZARD M. , BUTLEN D.& MASSELOT P. (2012) *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : La pensée sauvage.

CONNE F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *RDM*, **12(2/3)**, 221-270.

DUVAL R. (1988) Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **1**, 57-74, Irem de Strasbourg.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **5**, 37-65, Irem de Strasbourg.

DUVAL R. (1995) Figures géométriques et discours mathématique, 173-207, in *Sémiosis et pensée humaine*, Grenoble : La pensée sauvage.

DUVAL R. (2003) Décrire, visualiser ou raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **8**, 13-62, Irem de Strasbourg.

DUVAL R., GODIN M. & PERRIN-GLORIAN M-J. (2004) Reproduction de figures à l'école élémentaire, 6-89, in *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Irem Paris.

FAVRAT J-F. & ALII (2006) Problèmes et activités finalisées dans l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire, in *Actes du XXXIIème colloque COPIRELEM Strasbourg 2005*, Irem de Strasbourg.

GUILLE-BIEL WINDER C. (2013), *Reproduction de figures en CP/CE1 : la situation du PLIOX*, Mémoire de Master, Irem de Paris 7.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (1999) Géométrie et paradigmes géométriques, *Petit x*, **51**, 5-22, Irem de Grenoble.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *RDM*, **11**, 89-116. Grenoble : La pensée sauvage.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, 175-193, Irem de Strasbourg.

KUZNIAK A. & RAUSCHER J-C. (2003) Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, 271-290, in *Actes du XXIXème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*, IREM des Pays de la Loire.

KUZNIAK A. (2005). La théorie des situations didactiques de Guy Brousseau, *Repères IREM*, **20(1)**, 19-35.

MARGOLINAS C. & LAPARRA M. (2008) Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation, in *Actes du colloque "Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation " Bordeaux 2008*. http://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/marg.pdf .

PERRIN-GLORIAN M-J., MATHÉ A-C. & LECLERC R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ?, *Repères IREM*, **90**, 5-41.

ANALYSE D'UN DISPOSITIF DE FORMATION EN GÉOMÉTRIE PLANE POUR LES FUTURS PROFESSEURS DES ÉCOLES AUTOUR DE PLIAGES ET DE CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS

Françoise JORE
Equipe PESSOA, Département de Sciences humaines et sociales
Université Catholique de l'Ouest - Membre du PRES L'UNAM
jore@uco.fr

Résumé
La proposition qui est faite ici consiste à exploiter un travail autour de deux types d'activités : d'une part des pliages, nécessitant la mise en œuvre consciente de propriétés géométriques, d'autre part des constructions à la règle et au compas avec la rédaction et la justification des scénarios de construction correspondants. Ces activités sont l'occasion avec des M1 qui se destinent au professorat des écoles de revoir bon nombre de théorèmes de géométrie en acte, c'est-à-dire en les **utilisant** pour effectuer un pliage ou une construction, d'entrer dans une démarche de démonstration avec des hypothèses non pas imposées par un énoncé mais tirées de la construction, par le passage obligé de l'utilisation d'un vocabulaire géométrique précis et rigoureux. Ce type d'activité permet à tous les étudiants de s'investir dans la tâche proposée, quel que soit leur niveau de compétences, souvent très hétérogène.

Cette communication s'inscrit dans le cadre d'un échange de pratiques. Assurant la formation des PE1, maintenant M1, depuis longtemps, nous avons expérimenté de nombreuses situations permettant de travailler la géométrie plane. Il s'agit ici d'en proposer deux qui nous apparaissent intéressantes dans le cadre de la formation actuelle du master Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation pour des étudiants qui se préparent au concours de professeur des écoles.

I - CADRE THÉORIQUE

Quatre concepts clés de didactique sous-tendent ce travail.

1 Le concept d'outil et d'objet de R. Douady

Rappelons la définition que Régine Douady en donne dans [Douady, 1992, p. 134]

> *« Ainsi, nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un outil est engagé par quelqu'un, dans un contexte problématique, à un moment donné. […]*
>
> *Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de ses usages. »*

L'objectif des situations présentées aux étudiants est que les propriétés mathématiques soient tout d'abord investies par les étudiants sous leur aspect outil. Il ne s'agit pas de faire réciter les propriétés mais de faire en sorte que les étudiants soient contraints de les **utiliser** pour accomplir les tâches qui leur sont proposées.

2 Connaissances disponibles et mobilisables d'A. Robert

Robert [1995, p. 12] définit ainsi connaissances mobilisables et connaissances disponibles :

> *« Nous distinguons pour les élèves :*

- *le fait d'utiliser des connaissances indiquées ;*
- *le fait de penser à utiliser des connaissances alors que rien n'est indiqué à leur propos.*

Dans le premier cas, nous dirons que les élèves savent mobiliser leurs connaissances (par exemple employer un théorème ou une technique clairement signalés). Nous parlerons de connaissances mobilisables.

Dans le second cas, nous parlerons de connaissances disponibles. Cela ne peut être le cas que si les documents fournis aux élèves ne sont pas extraits d'un chapitre du manuel. »

De nombreux théorèmes de géométrie plane sont effectivement mobilisables par nos étudiants. Ils les ont plus ou moins bien mémorisés mais la plupart d'entre eux sont capables de les utiliser si on le leur demande. Quand il s'agit de les choisir de leur propre initiative pour résoudre un problème, cela est beaucoup plus difficile. Or avoir des compétences en mathématiques, c'est disposer de connaissances et être capable de les utiliser de manière autonome, sans indication particulière. Autrement dit, avoir des compétences en mathématiques, c'est selon nous disposer de connaissances disponibles, stockées dans la mémoire à long terme, et disposer de procédures pour repérer parmi les connaissances disponibles celles qui sont susceptibles d'être pertinentes dans une situation donnée. Nous essayons donc, dans la mesure du possible, de limiter dans les consignes les indices qui donnent aux étudiants une piste sur les propriétés pouvant être utilisées. Souvent, plusieurs procédures peuvent être utilisées, qui mettent en œuvre des propriétés différentes.

3 Stratégies d'homologie de C. Houdement et M.-L. Peltier

« Par les stratégies d'homologie, le formateur cherche à transmettre sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre dans son enseignement, [...] ; il construit des séances à visée mathématique ou didactique ; il attend que les étudiants utilisent dans leurs classes des mises en œuvre proches de celles des séances qu'ils ont vécues comme élèves. »[Houdement et Peltier, 2002, p. 78]

Dans le cadre du cours de didactique de la géométrie plane à l'école élémentaire, nous développons l'idée des textes officiels de faire travailler les élèves par problèmes[1]. Il s'agit donc, dans les séances de mathématiques, de mettre les étudiants eux-mêmes dans des activités de résolution de problèmes. En parallèle d'une institutionnalisation des connaissances mathématiques exploitées dans la tâche proposée, une explicitation des choix didactiques effectués dans la mise en œuvre de l'activité est également faite. Elle sera peu présentée ici.

4 Les paradigmes géométriques de B. Parzysz.

Il serait un peu long ici de détailler les différents types de géométrie que Houdement et Kuzniak [2006], puis Parzysz [2002], ont développés. On pourra lire utilement [Houdement & Kuzniak, 2006], [Parzysz, 2002] ou [Jore, 2008] pour plus de détails. Nous précisons simplement, à la suite de Parzysz [2002], que dans la géométrie spatio-graphique (notée G1), les objets géométriques sur lesquels on travaille sont physiques, les validations utilisées sont perceptives, qu'elles soient ou non instrumentées, le dessin ou le pliage effectué est l'objet d'étude. C'est le paradigme dans lequel l'élève se situe le plus souvent à l'école élémentaire. Dans la géométrie proto-axiomatique (notée G2), les objets sont théoriques, définis par un texte et/ou un codage sur un dessin à main levée, les validations relèvent du raisonnement hypothético-déductif et le dessin ou le pliage effectué n'est qu'un représentant de l'objet mathématique auquel on s'intéresse. C'est le paradigme dans lequel on attend le plus souvent que l'élève se situe au collège, ou l'étudiant dans le cadre de l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles.

Les contraintes des activités proposées en formation doivent permettre petit à petit aux étudiants de prendre conscience de ces deux paradigmes et de les aider à se situer le plus possible dans G2.

[1] « La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages. » BO 19 juin 2008, page 38.

II - LE CONTEXTE DE LA FORMATION

Plusieurs aspects spécifiques du public d'étudiants concernés et de la formation dans laquelle s'inscrivent les séances développées ici méritent d'être explicités.

1 L'épreuve de mathématiques du CRPE et le temps de formation

Le nouveau concours de professeur des écoles[2] remet en place une épreuve qui fait appel à des compétences disciplinaires et didactiques. Dans le problème de la partie 1, notamment, les étudiants peuvent être amenés à effectuer des démonstrations de géométrie plane, telles qu'on peut les faire au collège, comme en témoigne le premier sujet zéro[3] proposé pour la session 2014 par exemple. Cela nécessite entre autres de maîtriser un minimum de théorèmes de géométrie euclidienne. Nous observons que ces théorèmes sont peu mobilisables, voire parfois non disponibles, et souvent non opérationnels pour les M1. Ils peuvent être également amenés à effectuer des constructions à la règle et au compas ou à rédiger des programmes de constructions. Ainsi, l'objet du concours est bien, entre autres, d'évaluer certaines compétences disciplinaires. Par ailleurs, indépendamment de cette épreuve, « rédiger un programme de construction » fait partie des compétences travaillées au cycle 3, et par conséquent doit être maîtrisé par les futurs enseignants.

Or le temps de formation est limité. Il s'agit donc de profiter au mieux du faible temps dont le formateur dispose pour mettre en place toutes ces compétences. La situation que nous proposons sur les constructions à la règle et au compas va permettre de travailler simultanément ces différentes compétences disciplinaires.

Les deuxièmes et troisièmes parties de l'épreuve du concours vont, elles, faire appel aux compétences pédagogiques et didactiques des candidats. Cet aspect est donc à développer pendant la formation de master première année, le concours se situant en fin de cette première année. Nous utilisons pour cela des situations d'homologie, afin de développer simultanément des compétences mathématiques (ici, sur des propriétés de géométrie plane) et des compétences didactiques (ici autour de l'intérêt de travailler avec les élèves par situations problèmes, de l'aspect outil des concepts mathématiques et de l'utilisation en situation du vocabulaire géométrique).

2 La population des étudiants de Master de professorat des écoles

Dans leur grande majorité, les candidats à l'enseignement pour le premier degré n'ont pas fait d'études supérieures en mathématiques et ne possèdent pas de baccalauréat scientifique. Ils sont souvent en difficulté en mathématiques, à la fois sur le plan intellectuel mais aussi sur le plan affectif ou émotionnel. Il s'agit donc de leur proposer des activités différentes de celles qui les ont fait « souffrir » au collège pour les réconcilier avec les mathématiques. Cependant, certains étudiants ont un bagage mathématique sérieux et savent résoudre sans difficultés les problèmes de collège. On peut donc craindre pour eux un certain désintérêt pour les séances de mathématiques. Il s'agit donc de leur proposer des situations nouvelles, qui leur permettent également de réfléchir. La situation sur les pliages que nous proposons a pour objectif de répondre à ces deux contraintes.

III - PLIAGES

Un premier travail autour des pliages est proposé aux M1 en début de formation en géométrie.

1 Les objectifs de l'activité

L'idée d'utiliser les pliages pour développer des capacités et des connaissances en géométrie n'est pas nouvelle. Dans son ouvrage « Questions sur la géométrie et son enseignement » notamment, François Boule [2001] propose des activités autour des pliages à mettre en œuvre à l'école

[2] Le lecteur trouvera tous les textes définissant les nouvelles épreuves sur : http://www.education.gouv.fr/pid97/siac1.html

[3] Disponible sur : http://cache.media.education.gouv.fr/file/sujets_0(2014)/59/7/s0_crpe_math_260597.pdf

élémentaire. Ces idées sont reprises ici et adaptées à la formation des M1. Les objectifs de cette activité sont multiples :

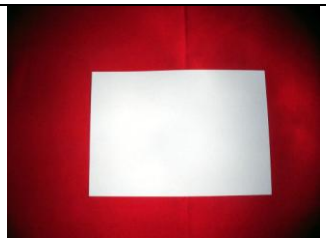
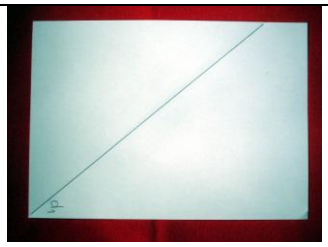
- permettre aux M1 de revoir définitions et propriétés de quelques objets du plan (triangles particuliers, quadrilatères, …).
- Proposer une tâche qui n'est pas routinisée et qui donc oblige les étudiants à réfléchir. La solution du problème ne consiste pas en l'application d'une technique rodée ; ils n'ont en général jamais rencontré cette tâche.
- Faire en sorte que les propriétés des objets soient un outil incontournable pour accomplir la tâche proposée. Il ne s'agit pas seulement d'énoncer des propriétés, mais de les utiliser comme outil pour effectuer la construction demandée.
- Donner l'occasion aux étudiants en difficulté en mathématiques de s'investir dans une activité de démonstration sous une forme nouvelle qui ne les rebuterait pas.
- Mettre les étudiants scientifiques dans une situation qui les déstabilise un peu, qui ne leur permette pas de reproduire trop rapidement un discours par ailleurs bien assimilé, qui les oblige à réfléchir. Il faut qu'eux aussi aient quelque chose à apprendre, une compétence à développer.

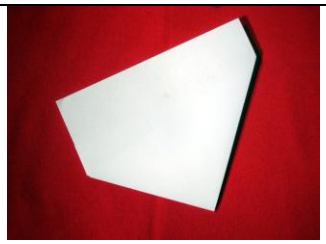
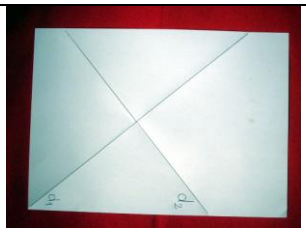
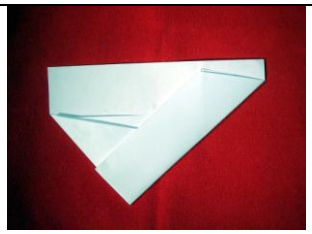
2 Construction de triangles

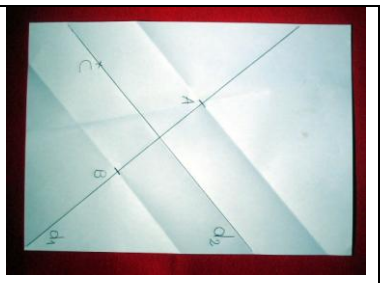
La première consigne proposée est ainsi la suivante : « Prendre une feuille de papier. Par pliage, sans utiliser les habituels instruments de géométrie, obtenir un triangle rectangle, puis un triangle isocèle. »

Ces deux constructions n'ont pour but que de s'approprier la consigne et le fonctionnement de cette activité. Elle est souvent effectuée avec les étudiants. C'est l'occasion de préciser que l'on ne se sert pas des bords de la feuille, que l'on a le droit de repérer un pli avec un crayon, etc. Elle est réalisée sans difficultés par tous les étudiants. Il leur est ensuite demandé de construire de la même manière un triangle équilatéral. Un élément est alors ajouté : « Préciser les définitions ou propriétés utilisées qui permettent de justifier la construction ».

Une démarche possible est la suivante :

		
Prendre une feuille	Plier en deux	On obtient une droite d_1

		
Plier à nouveau en deux afin d'obtenir une perpendiculaire à d_1	La droite d_2 est perpendiculaire à d_1	Replier à nouveau de sorte de déterminer deux points sur d_1 équidistants de d_2

		
A et B sont deux points de d_1 équidistants de d_2	Plier en A de sorte d'amener B sur d_2	On a ainsi déterminé sur d_2 un point C équidistant de A et B

Cette construction diffère légèrement de celle proposée dans [Boule, 2001], en particulier parce qu'elle n'utilise par les bords de la feuille. La propriété sous-jacente à la construction est que la médiatrice (obtenue comme droite perpendiculaire au côté et passant par son milieu) doit être une hauteur, tandis que Boule travaille sur la médiane. L'essentiel est que la définition habituelle seule du triangle équilatéral (triangle avec des côtés isométriques) ne suffit pas pour effectuer la construction par pliage. Dans la construction proposée ci-dessus, la propriété mise en acte est :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ C \text{ est sur la médiatrice de } [A,B] \end{array}\right\} \Rightarrow ABC \text{ est un triangle équilatéral}$$

Cette propriété est ainsi un **outil** pour accomplir la tâche.

Une autre procédure est souvent proposée par quelques étudiants : « Plier la feuille en deux. On obtient un angle plat. Partager cet angle plat en trois angles superposables. Ces angles de sommet O mesurent alors 60°. Plier à nouveau pour obtenir la bissectrice d'un des angles obtenu et placer deux points A et B équidistants de O sur les côtés de l'angle ». Le triangle AOB est isocèle avec un angle de 60 : il est donc équilatéral. Cette fois, une autre propriété est utilisée : un triangle isocèle avec un angle de 60° est un triangle équilatéral.

3 D'autres pliages

D'autres pliages sont proposés, en fonction du temps qu'il reste dans la séance : obtenir un triangle isocèle et rectangle, des angles de 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90, la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle, la hauteur d'un triangle, un carré, un losange, un parallélogramme, un cerf-volant, un hexagone, deux droites parallèles, une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné, etc. Chacune des constructions permet de travailler un aspect particulier des compétences géométriques disciplinaires.

La construction d'un rectangle permet de mettre l'accent sur le fait qu'il suffit d'effectuer successivement trois perpendiculaires. On peut alors conjecturer qu'un quadrilatère avec trois angles droits est un rectangle. La propriété pourra alors être ou non démontrée.

La construction du carré fait souvent apparaître plusieurs constructions, qui reposent sur des propriétés caractéristiques différentes du carré. Il est alors intéressant de les expliciter : quadrilatère avec trois angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur ; quadrilatère avec deux angles droits successifs et trois côtés de même longueurs ; …

Le rectangle a permis d'obtenir des droites parallèles. Le parallélogramme va amener à réinvestir cette construction. Une fois que deux parallèles vont être construites, il va falloir choisir arbitrairement une autre direction pour les autres côtés et appliquer de nouveau la procédure qui permet d'obtenir des parallèles. Cela semble simple mais en réalité, il y a là une difficulté pour bon nombre d'étudiants. En effet, à ce moment-là, il y a de multiples plis sur la feuille et il faut vraiment s'organiser et avoir en tête la propriété que l'on veut utiliser pour réussir à effectuer la construction. On peut la détailler ainsi :

- plier pour obtenir une première droite d1 ;
- plier pour obtenir une droite d2 perpendiculaire à d1 ;
- plier pour obtenir une droite d3 perpendiculaire à d2 et donc parallèle à d1 ;
- déplier le tout et remettre la feuille à plat ;
- plier arbitrairement pour obtenir une autre droite d4 ;
- plier pour obtenir une droite d5 perpendiculaire à d4 ;
- plier pour obtenir une droite d6 perpendiculaire à d5 et donc parallèle à d4 ;
- déplier le tout ;
- repérer les droites d1, d3, d4, d6 qui doivent délimiter un parallélogramme. Il faut pour cela que la figure finale ait été un peu anticipée pour que les intersections soient effectivement présentes dans la feuille de papier.

Les étudiants doivent simultanément réfléchir à la propriété utilisée (plier pour obtenir la perpendiculaire d'une perpendiculaire donne une parallèle), oublier certains plis intermédiaires de perpendiculaires pour ne s'intéresser qu'aux parallèles finalement obtenues, anticiper les pliages pour que la figure apparaisse au bon endroit. Tout cela rend la tâche relativement complexe pour bon nombre d'étudiants. Les compétences travaillées au cours de cette activité s'avèrent indispensables pour affronter les problèmes de géométrie du concours.

C'est l'occasion en outre avec certains étudiants d'insister sur les justifications et de faire prendre conscience des paradigmes G1 et G2. Certains, par exemple, font deux pliages successifs pour obtenir des droites parallèles sans autre justification que « je plie pour obtenir deux droites parallèles ». A partir de la simple question « comment peut-on faire pour être sûr qu'elles soient parallèles ? », l'étudiant peut faire la différence entre les deux procédures et les deux paradigmes sous-jacents. Dans un cas, on a utilisé des propriétés qui permettent d'affirmer que les droites sont parallèles, on travaille donc dans G2, dans l'autre cas, rien de permet de le faire, le parallélisme est obtenu par la seule perception visuelle, on se situe alors dans G1. L'amélioration de la précision n'est pas significative car à « l'œil nu », on obtient des droites tout aussi parallèles qu'après des pliages de perpendiculaires de perpendiculaires. Cela permet de mettre en évidence que ce n'est pas l'objet physique obtenu qui nous intéresse mais l'objet théorique matérialisé par le pliage. La précision de ce pliage importe peu, c'est le fait que ce pliage respecte les propriétés qui définissent l'objet théorique qui en fait un représentant de cet objet théorique. C'est là une condition fondamentale du travail dans G2.

IV - CONSTRUCTIONS A LA RÈGLE ET AU COMPAS

Après cette première activité, une autre consigne, plus habituelle, est proposée aux étudiants : effectuer des constructions à la règle et au compas. Cette fois, non seulement les étudiants doivent faire, mais ils doivent également être capables de décrire ce qu'ils ont fait. Un scénario de leur construction leur est en effet demandé. Par ailleurs, comme dans l'activité précédente, après avoir effectué la construction, les étudiants doivent la justifier. Il s'agit donc de repérer les éléments construits, les hypothèses liées à la construction choisie, puis d'appliquer définitions, propriétés, théorèmes pour démontrer que l'objet construit a bien les propriétés annoncées. Les connaissances utilisées précédemment vont ainsi être réinvesties.

1 Première étape : construction, rédaction du scénario puis justification

La première construction proposée aux étudiants est celle d'un triangle rectangle. La mise en commun des procédures utilisées est alors effectuée avec le dispositif suivant :

a1. Un étudiant dicte au formateur un scénario de construction.

a2. Le formateur effectue au fur et à mesure la construction avec un logiciel de géométrie dynamique[4], en faisant dans certains cas reformuler la consigne.

a3. L'étudiant, éventuellement aidé du groupe, explicite les propriétés qui justifient la construction effectuée.

Les objectifs de formation, explicites ou implicites, sont multiples.

Les éléments a1 et a2 permettent explicitement de travailler la rédaction d'un scénario de construction. Celui-ci doit avoir plusieurs caractéristiques :

- Les informations doivent être fournies dans l'ordre. Si cet aspect pose parfois problème aux élèves, il ne pose en général pas de difficultés aux étudiants.

- Le scénario ne doit pas être trop synthétique. Des expressions comme « tracer la médiatrice du segment [AB] » sont dans un premier temps refusées, et remplacées par la liste des objets élémentaires qui doivent être construits. Lorsqu'une procédure pour tracer une médiatrice à la règle et au compas par exemple est bien détaillée et justifiée, elle peut dans un second temps être utilisée comme une macro-construction. Au fur et à mesure que de nouvelles constructions sont explicitées et justifiées, elles viennent allonger la liste des objets constructibles directement.

- Il faut surtout que ce scénario soit complet, sans ambiguïté et sans redondance, ce qui est beaucoup plus difficile pour les étudiants. Nous mettons alors en évidence que la plupart du temps ils ne disent pas tout parce qu'ils anticipent implicitement sur le tracé qu'ils veulent obtenir. Par exemple, le plus souvent, des arcs de cercle sont effectués. Mais il est difficile de décrire correctement un arc de cercle si on veut que son intersection par exemple avec un autre arc de cercle soit non vide ! Si les arcs de cercles sont correctement tracés, ce n'est pas grâce à la précision du scénario de construction, mais parce que les étudiants savent ce qu'ils doivent obtenir et anticipent grâce à l'image mentale qu'ils ont de la construction avant même que celle-ci ne soit effectuée. Il est dans ce cas proposé de tracer systématiquement le cercle complet, même si concrètement seul un arc « bien placé » suffit.

- Par ailleurs, le langage utilisé dans le scénario doit être un langage qui décrit les objets géométriques créés, et non les actions et instruments utilisés pour les construire. On cherche par exemple à remplacer : « Je trace un segment [DC]. Avec mon compas, je pose ma pointe sur D et je fais un écartement plus grand que la moitié de mon segment. Je trace mon arc. » par « Tracer un segment [DC]. Tracer un cercle de centre D et de rayon supérieur à la moitié de la longueur DC. ». Cette contrainte permet de simplifier les formulations. Elle permet surtout à l'étudiant de **prendre conscience de l'objet géométrique construit** (par exemple un cercle). Par la suite, ces propriétés (par exemple : tout point du cercle est à égale distance du centre) pourront alors être explicitées et être utilisées comme hypothèse dans la justification du scénario, comme une hypothèse l'est dans une démonstration. Le vocabulaire géométrique est utilisé en situation.

Ce travail est explicitement mis en place pour faire évoluer la compétence de rédaction d'un scénario de construction. Les étudiants se rendent compte qu'ils sont capables d'effectuer une construction mais qu'ils ont de réelles difficultés pour la décrire. L'accent est mis sur le fait qu'ils doivent maîtriser cette compétence dans le cadre de l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles, mais également que cette compétence peut (-doit-) être travaillée au cycle 3,

[4] A défaut de disposer de suffisamment de temps pour que les étudiants s'approprient un logiciel de géométrie dynamique en en manipulant un eux-mêmes, ils peuvent au moins découvrir une partie des possibilités d'un tel logiciel afin d'envisager comment ils pourraient le faire exploiter en classe par des élèves.

et qu'ils doivent donc la développer pour eux-mêmes en formation pour aider les élèves à la développer lorsqu'ils seront en classe. Il faut qu'ils puissent également rédiger eux-mêmes des scénarios pour leurs élèves, afin que ceux-ci puissent « *Tracer une figure simple à partir d'un programme de construction ou en suivant des consignes*[5] » par exemple. Du point de vue des élèves de cycle 3, les étudiants qui ont effectué des suppléances ont l'impression que les élèves connaissent bien les objets du plan qui sont explicitement au programme : carré, rectangle, cercle par exemple. Ils considèrent que les élèves savent les nommer et les tracer, ce qui est pour eux l'essentiel. Ils prennent soudain conscience que si eux-mêmes n'utilisent pas spontanément les mots cercle, centre, rayon dans une telle activité, il en va probablement de même pour les élèves. Ils constatent alors tout l'intérêt de l'activité de rédaction d'un scénario de construction afin d' « *Utiliser en situation le vocabulaire géométrique*[6] », et s'aperçoivent que bien souvent ils n'en ont jamais fait faire à leurs élèves. Le fonctionnement par homologie leur permet de développer cette compétence pour eux-mêmes. Le détour, par des commentaires du formateur, sur les choix didactiques effectués pour cette situation leur permet de donner du sens à cette expression, en envisageant des dispositifs permettant de la mener en classe.
Implicitement, ce travail permet également de préparer les étudiants à se situer dans le cadre de la géométrie déductive. En effet, tant que le langage n'est pas géométrique, que les objets géométriques créés et utilisés ne sont pas clairement identifiés, il est difficile de s'intéresser à leurs propriétés pour effectuer une démonstration par exemple.

Dans un second temps, en a3, les justifications sont détaillées, dans le but implicite de travailler la démonstration. Elles sont souvent incomplètes au départ : « on a tracé une médiatrice, donc le triangle est rectangle ». Mais si on demande aux étudiants pourquoi il s'agit bien d'une médiatrice, les habituels arguments sont : « parce qu'elle est perpendiculaire au segment et qu'elle passe par son milieu ». Petit à petit, il s'agit de mettre en place une méthodologie :

Méthodologie	Mise en œuvre dans la construction de la médiatrice à la règle non graduée et au compas
Repérage des caractéristiques de la construction	Le compas permet de tracer des points à une distance constante du centre du cercle .
	Les intersections de deux cercles de même rayon donnent des points équidistants des centres de ces cercles.
Repérage de l'objet géométrique construit, à partir de sa définition ou d'une propriété caractéristique	Deux points équidistants des extrémités d'un segment définissent la médiatrice de ce segment.
Repérage du théorème utilisé pour conclure	Une propriété de la médiatrice est qu'elle est perpendiculaire au segment, ce qui permet de conclure que le triangle est rectangle.

Les propriétés des objets ne sont pas lues sur le dessin, mais obtenues par un raisonnement hypothético-déductif basé sur :

- la traduction de l'utilisation des instruments en propriétés des objets géométriques construits : le compas permet d'obtenir des points vérifiant une relation de distance avec le centre, la règle non graduée d'obtenir tous les points alignés avec deux points donnés ;

- les définitions et théorèmes de la géométrie euclidienne.

[5] Extrait du tableau donnant des repères aux équipes pédagogiques pour organiser la progressivité des apprentissages. Repère pour le CM1, Bulletin Officiel n° 3 du 19 juin 2008, page 39.

[6] Ibid.

La seule différence avec le travail habituel de démonstration est la manière d'obtenir les hypothèses permettant d'initier le raisonnement : elles ne sont pas données dans un texte ou codées sur un dessin mais obtenues par traduction de l'utilisation des instruments. Il s'agit donc d'une première étape dans l'apprentissage de la démonstration. Dans le travail ultérieur sur la démonstration, les données initiales de l'énoncé remplaceront le repérage des caractéristiques de la construction.

Le repérage des caractéristiques de la construction, des définitions et théorèmes utilisés, est parfois difficile pour les étudiants, et souvent des informations sont seulement lues sur le dessin. Il s'agit alors à chaque fois d'expliciter que la caractéristique donnée n'est pas issue de la construction, mais de la lecture du dessin. Chaque prise d'information sur le dessin est ainsi repérée. Il s'agit notamment de montrer que, même dans une démarche que l'on veut déductive, il est facile de se faire « piéger » par le dessin et d'y lire des informations. C'est ce que Parzysz nomme la « contamination du su par le perçu » [Parzysz, 2002]. Il est indispensable que le formateur soit très vigilant pour que le travail se situe bien toujours dans le cadre de la géométrie déductive, et non dans celui de la géométrie perceptive à un moment ou à un autre.

L'accent est mis auprès des étudiants sur le fait que :

- Les procédures qu'ils utilisent de manière plus ou moins automatisée pour effectuer des constructions ont une justification mathématique.

- Les propriétés utilisées sont mobilisables pour tous mais le plus souvent non disponibles spontanément pour bon nombre d'étudiants.

- Le travail essentiel à effectuer n'est pas d'emmagasiner des connaissances nouvelles (ils sont généralement capables de citer, voire même d'énoncer, pratiquement tous les théorèmes classiques de géométrie plane), mais de développer leur raisonnement géométrique en créant des liens entre les constructions qu'ils savent effectuer et les propriétés sous-jacentes.

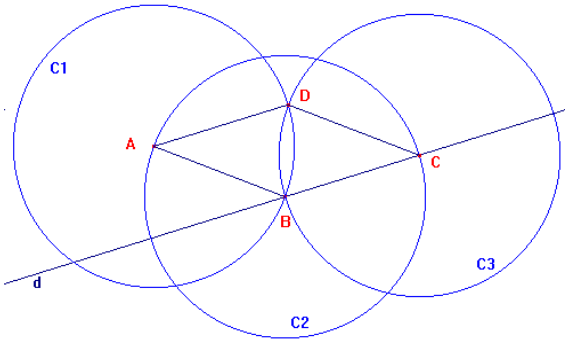
La même démarche est reprise pour les autres procédures proposées par les étudiants, puis d'autres constructions sont traitées suivant le même dispositif : tracer une hauteur dans un triangle quelconque, tracer une bissectrice, tracer un carré, tracer un hexagone, un octogone, etc.

2 Deuxième étape : choix de la propriété avant d'effectuer la construction

Une nouvelle contrainte est alors apportée dans la consigne. Il ne s'agit plus d'effectuer une construction, mais autant de constructions différentes que possible pour un même objet. Considérons par exemple la consigne : « soit une droite d et un point A n'appartenant pas à d. Tracer la droite parallèle à d passant par A. Trouver le plus de constructions différentes possibles ». Cette fois, les constructions possibles sont très nombreuses[7]. Comme lors des activités précédentes, l'accent est mis sur la formulation des scénarios de construction, puis sur la justification. Les hypothèses liées à la construction sont mises en évidence, puis les définitions et propriétés utilisées sont explicitées.

Considérons par exemple la construction suivante.

[7] Le lecteur trouvera de nombreuses constructions détaillées dans [Jore, 2006, pp. 389-397], disponible sur le net : http://www.ima.uco.fr/jore/



Scénario	Justification
Tracer un cercle C_1 de centre A, coupant la droite d. Soit B un des deux points d'intersection de C_1 et d.	
Tracer un cercle C_2 de centre B passant par A. Soit C un des deux points d'intersection de C_2 et de d.	On a donc : $BC = AB$
Tracer un cercle C_3 de centre C passant par B. Soit D le second point d'intersection de C_1 et C_3.	Et : $CD = BC = AD$
	ABCD a quatre côtés de même longueur AB. C'est donc un losange. Ses côtés opposés sont donc parallèles. Or B et C sont sur d. Donc la droite (AD) est parallèle à d et passe par A.

Pour cette procédure, on met en évidence que :

- la construction est basée sur la définition du losange comme quadrilatère avec quatre côtés isométriques ;
- une propriété du losange permet ensuite de conclure que les côtés sont parallèles.

D'autres constructions sont proposées par les étudiants et à chaque fois, le contrat pour le groupe est d'établir la justification.

En analysant les constructions proposées, on s'aperçoit que certaines ont été obtenues un peu par hasard, et le défi consiste alors à justifier pour s'assurer que « ça marche toujours ». D'autres procédures au contraire ont manifestement été mises en place en cherchant à appliquer une propriété ou un théorème particuliers. La règle du jeu change alors pour devenir :

« Au lieu d'effectuer d'abord une construction puis de chercher à la justifier, choisissez **d'abord** une propriété ou un théorème dont la conclusion est que deux droites sont parallèles, **puis** mettez en œuvre une construction utilisant cette propriété ou ce théorème. Vous avez ainsi à l'avance la justification. »

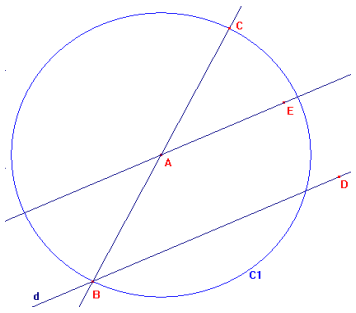
Le fait de demander des constructions différentes nombreuses a pour effet que cette nouvelle démarche se met en place quasiment d'elle-même.

A ce stade du dispositif, l'entrée par les figures, notamment les quadrilatères particuliers[8], a déjà été abondamment utilisée et c'est souvent plutôt l'entrée par les théorèmes qui est alors exploitée.

[8] Si on trace un carré, un rectangle, un losange, un parallélogramme, on sait que l'on a des droites parallèles.

Autrement dit, il s'agit de choisir un théorème qui permette une justification, puis de mettre en scène ce théorème pour élaborer une construction.

L'exemple est pris avec le théorème de la « droite des milieux ». Les étudiants sont invités à expliciter ce théorème - la « récitation » fonctionne en général très bien - puis à l'**utiliser** pour construire deux droites parallèles, puis une droite parallèle à d passant par A. On obtient par exemple la procédure suivante :



Scénario	Justification
Tracer un cercle de centre A qui coupe d en deux points. Soit B un de ces points.	$B \in d$
Tracer la droite (AB).	
Placer le point C à l'autre intersection de (AB) et du cercle.	A est donc le milieu de [BC].
Placer un point D sur d.	$D \in d$
Placer le milieu E de [DC] (on peut utiliser une construction de la médiatrice à la règle et au compas).	E est le milieu de [DC].
Tracer la droite (AE).	(AE) est la droite qui joint les milieux des côtés [BC] et [CD] du triangle BCD. Elle est donc parallèle au côté [BD]. C'est donc une droite parallèle à d passant par A.

Cette mise en situation permet aux étudiants de s'approprier ainsi les propriétés et théorèmes énoncés. De nombreux théorèmes sont ainsi revus et utilisés pour inventer et justifier des constructions. Petit à petit, les étudiants effectuent des démonstrations. L'accent est mis sur le fait que pour être valable, la justification ne doit pas prendre des arguments sur le dessin, mais dans le scénario, qui est ici une manière de formuler les hypothèses.

Cette étape permet donc de développer plusieurs compétences :

- rédiger un scénario de construction ;
- repérer des hypothèses et établir une démonstration ;
- **utiliser** un théorème pour mettre en place une construction.

Ces activités sont ainsi l'occasion de se réapproprier des connaissances et des compétences immédiatement utiles pour le concours. Les définitions et propriétés sont des outils pour résoudre les problèmes de géométrie qui leur sont présentés. Notons en outre qu'il s'agit ici de travailler les théorèmes sous un aspect fort utile dans les exercices de démonstration. La question posée : « quels sont les théorèmes dont la conclusion est « les droites (..) et (..) sont parallèles » ? » permet en effet aux étudiants de construire un répertoire de propriétés ou de théorèmes permettant de démontrer par exemple ici que deux droites sont parallèles, c'est-à-dire avec en entrée la conclusion plutôt

que les hypothèses. Cette réorganisation des connaissances participe du passage des connaissances mobilisables aux connaissances disponibles.

V - CONCLUSION

Nous avons présenté des activités qui permettent simultanément de raviver des connaissances et des compétences géométriques variées immédiatement utiles pour le concours de recrutement de professeurs des écoles (définitions, propriétés, théorèmes, procédures de construction à la règle et au compas) mais aussi en situation de responsabilité auprès d'élèves du primaire (rédaction de scénarios de construction).

Plusieurs caractéristiques de ce travail peuvent être repérées :

- les définitions, propriétés, théorèmes sont des **outils** pour résoudre les problèmes posés.
- Le vocabulaire géométrique est utilisé en situation fonctionnelle.
- Une attention particulière est portée sur le passage des connaissances géométriques mobilisables à disponibles, au sens de Robert [1995], notamment par la conscientisation des connaissances en acte, c'est-à-dire des objets et propriétés utilisés, ainsi que par la réorganisation des connaissances qui est proposée.
- Il y a une articulation entre activité de manipulation et activité intellectuelle, avec développement de l'activité intellectuelle dans l'activité de manipulation par une contrainte d'anticipation des résultats produits par la manipulation.

Ces différents éléments doivent favoriser une meilleure appropriation des objets et propriétés de la géométrie plane de la part des étudiants, à la fois en termes de compétences disciplinaires, mais également didactiques.

Une autre suggestion a été faite lors du débat avec les participants pour travailler sur ce même objectif : exploiter les constructions avec la règle à bords parallèles. D'autres pistes sont par ailleurs à explorer pour améliorer la rédaction des scénarios de construction, en particulier l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique fournissant des scénarios de construction.

VI - BIBLIOGRAPHIE

BOULE F. (1979). *Espace et géométrie : pour les enfants de 3 à 11 ans*. Cédic.

BOULE F. (2001). *Questions sur la géométrie et son enseignement*. Nathan.

DOUADY R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères Irem* n°6. Janvier 1992. Ed. Topiques.

HOUDEMENT C., PELTIER M.-L. (2002). Présentation d'une situation de formation par homologie. La somme de plus grand produit. *Les cahiers du formateur de la Copirelem*. Tome 6. P. 78. Séminaire de Pau. 2002.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Vol 11. 175-194.

JORE F. (2006). *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

JORE F. (2008). Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier crayon et informatique, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 2008, pp. 195-225.

PARZYSZ B. (2002). *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1*, Actes du 28ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres. Tours. Mai 2001. pp. 99-110. Ed. Presses Universitaires d'Orléans.

ROBERT A. (1995). *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques.* Tome I. Géométrie. Ed. Ellipses.

Programmes de l'école primaire. BO n°3 19 juin 2008.