COPIRELEM

Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

Concours de recrutement
des Professeurs des Écoles

Mathématiques

Annales 2014

Sujets, corrigés et éléments de formation

+

Exercices complémentaires avec corrigés issus des concours blancs et examens des ESPE

Ces annales ont été rédigées par :

Agnès BATTON (ESPE de l'Académie de Versailles)
Anne BILGOT (ESPE de l'Académie de Paris)
Jean-Claude AUBERTIN (ESPE d'Aquitaine)
Christophe BILLY (ESPE de l'Académie de Toulouse)
Laetitia BUENO-RAVEL (ESPE de Bretagne)
Richard CABASSUT (ESPE de l'Académie de Strasbourg)
Pierre DANOS (ESPE de l'Académie de Toulouse)
Nicolas DE KOCKER (ESPE de Lorraine)
Gwenaëlle GRIETENS (ESPE de l'Académie de Nantes)
Pascal GRISONI (ESPE de Bourgogne)
Christine MANGIANTE (ESPE de l'Académie de Lille)
Pascale MASSELOT (ESPE de l'Académie de Versailles)
Edith PETITFOUR (ESPE de Lorraine)
Arnaud SIMARD (ESPE de Franche-Comté)
Frédérick TEMPIER (ESPE de l'Académie de Poitiers)
Claire WINDER (ESPE de l'Académie de Nice)
Hélène ZUCCHETTA (ESPE de l'Académie de Lyon)

Chaque sujet a été pris en charge par plusieurs correcteurs.

La relecture finale du document a été effectuée par :

Pierre EYSSERIC (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)
Michel JAFFROT (retraité)

Coordination de l'ensemble :
Pierre EYSSERIC (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)

REMERCIEMENTS

Ces annales ont pu être menées à bien grâce aux contributions de personnes, associations et institutions :

- **Nos collègues formateurs en mathématiques** qui ont fait parvenir les sujets de concours blancs et d'examens proposés dans leurs ESPE.

- **L'ARPEME** (Association pour l'élaboration et la diffusion de Ressources Pédagogiques sur l'Enseignement des Mathématiques à l'École).
  Cette association a pour but de favoriser le développement de la réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des professeurs à l'enseignement des mathématiques :
  - en aidant à la communication d'expériences, à la diffusion de documents de formation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques ;
  - en apportant un soutien à l'organisation de colloques et séminaires de réflexion rassemblant les formateurs intervenant à divers titres dans la formation en mathématiques des professeurs ;
  - en prenant en charge l'élaboration, l'impression et la diffusion de tous documents utiles pour les formateurs en mathématiques des professeurs des écoles : documents pédagogiques écrits et audiovisuels, actes des colloques, comptes-rendus de séminaires.

- **La COPIRELEM** (Commission permanente des **IREM** pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire) et l'**IREM** (Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques) de l'Université de Paris VII Denis Diderot.

SOMMAIRE

Informations

Les sujets et leurs corrigés

EXERCICES ÉLABORÉS À PARTIR DES CONCOURS BLANCS ET EXAMENS PROPOSÉS DANS LES ESPE

L’ÉPREUVE DU CRPE EN AVRIL 2014

Nous reproduisons ici les principaux textes en vigueur relatifs à l’épreuve de mathématiques des concours de recrutement de professeurs des écoles, tels que vous pouvez les retrouver sur le site ministériel à partir de la page http://www.education.gouv.fr/pid97/siac1.html.

CONCOURS CONCERNÉS

- Concours externe de recrutement de professeurs des écoles.
- Concours externe spécial de recrutement de professeurs des écoles.
- Troisième concours de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne spécial de recrutement de professeurs des écoles.

1 – DÉFINITION DE L’ÉPREUVE

Référence : Annexes de l’arrêté du 19 avril 2013 fixant les modalités d’organisation des concours de recrutement de professeurs des écoles.

« L'ensemble des épreuves du concours vise à évaluer les capacités des candidats au regard des dimensions disciplinaires, scientifiques et professionnelles de l'acte d'enseigner et des situations d'enseignement. »

Épreuves d'admissibilité

« Le cadre de référence des épreuves est celui des programmes pour l'école primaire. Les connaissances attendues des candidats sont celles que nécessite un enseignement maîtrisé de ces programmes. Le niveau attendu correspond à celui exigé par la maîtrise des programmes de collège. Les épreuves d'admissibilité portent sur le français et les mathématiques. Certaines questions portent sur le programme et le contexte de l'école primaire et nécessitent une connaissance approfondie des cycles d'enseignement de l'école primaire, des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture et des contextes de l'école maternelle et de l'école élémentaire. »

Deuxième épreuve d’admissibilité : une épreuve écrite de mathématiques

« L'épreuve vise à évaluer la maîtrise des savoirs disciplinaires nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et la capacité à prendre du recul par rapport aux différentes notions. Dans le traitement de chacune des questions, le candidat est amené à s'engager dans un raisonnement, à le conduire et à l'exposer de manière claire et rigoureuse.

L'épreuve comporte trois parties :

1. Une première partie constituée d'un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture, permettant d'apprécier particulièrement la capacité du candidat à rechercher, extraire et organiser l'information utile.

2. Une deuxième partie composée d'exercices indépendants, complémentaires à la première partie, permettant de vérifier les connaissances et compétences du candidat dans différents domaines des programmes de l'école ou du collège. Ces exercices pourront être proposés sous forme de questions à choix multiples, de questions à réponse construite ou bien d'analyses d'erreurs-types dans des productions d'élèves, en formulant des hypothèses sur leurs origines.

3. Une analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques, choisis dans le cadre des programmes de l'école primaire qu'ils soient destinés aux élèves ou aux enseignants (manuels scolaires, documents à caractère pédagogique), et productions d'élèves de tous types, permettant d'apprécier la capacité du candidat à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement.

L'épreuve est notée sur 40 points : 13 pour la première partie, 13 pour la deuxième et 14 pour la troisième.

5 points au maximum peuvent être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.

Durée de l'épreuve : quatre heures. »

2 – PRÉSENTATION DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

Référence : note de présentation des épreuves d'admissibilité des concours de recrutement de professeurs des écoles.
(http://cache.media.education.gouv.fr/file/sujets_0(2014)/59/3/nc_crpe_260593.pdf)

« Le nouveau concours de recrutement des professeurs des écoles répond au besoin de recruter des enseignants polyvalents et aux principes généraux définis pour tous les concours enseignants : un concours qui constitue un jalon déterminant du parcours intégré de formation, et s'inscrit dans le cursus de professionnalisation progressive des candidats ; un concours qui est un acte de recrutement et non de certification universitaire ; un concours, situé en fin de S2 de Master, qui repose sur des épreuves tenant compte d'un parcours progressif de professionnalisation.

Les deux épreuves écrites d'admissibilité permettent de s'assurer de la maîtrise par le candidat d'un corpus de savoir adapté à l'exercice professionnel, de sa capacité à utiliser les modes d'expression écrite propres aux domaines évalués et de présenter une maîtrise avérée de la langue française écrite. Ces écrits portent sur le français et les mathématiques à savoir les deux domaines d'enseignements fondateurs de l'école primaire. L'admissibilité permet ainsi de déterminer un groupe de candidats présentant un niveau de maîtrise suffisant du français et des mathématiques pour exercer le métier de professeur des écoles. »

Présentation de la deuxième épreuve écrite : mathématiques

« Les notions mathématiques abordées à l'école primaire constituent les bases d'un corpus plus large qui sera développé au cours la scolarité obligatoire.
Pour pouvoir les enseigner, le futur professeur des écoles se doit d'en maîtriser les fondements théoriques et de connaître les développements qu'ils permettront dans les années de collège.
Il est donc demandé au candidat au professorat des écoles un niveau de connaissances et de raisonnement correspondant à celui exigé par la maîtriser les programmes de collège.
Exposer ce raisonnement de manière claire et rigoureuse est une des manifestations de cette maîtrise.

L'épreuve comporte trois parties :

1) La première partie consiste en un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture.
Ce problème peut, autour d'un thème donné, faire appel à plusieurs registres : numérique, algébrique, géométrique, graphique, etc.
Il permet au candidat de montrer sa capacité à mettre en relation ces différents registres, mais aussi de montrer une représentation correcte des différents statuts mathématiques des énoncés rencontrés : données, hypothèses, propriétés ou théorèmes.
Ce problème peut comporter plusieurs parties; il peut être demandé au candidat de démontrer des propriétés connues, de modéliser une situation en vue de la résolution d'un exercice concret ou de mener un raisonnement à portée plus générale.

2) La deuxième partie est composée d'exercices indépendants, complémentaires à la première partie, permettant de vérifier les connaissances et compétences du candidat dans différents domaines des programmes de l'école ou du collège. Ces exercices pourront être proposés sous forme de questions à choix multiples, de questions à réponse construite ou bien d'analyses d'erreurs-types dans des productions d'élèves, en formulant des hypothèses sur leurs origines.
Des exercices de types différents peuvent être proposés dans un même sujet.
Les questions à choix multiples sont accompagnées d'une demande de justification ; elles permettent de mettre en œuvre des types de raisonnement variés et notamment la preuve par présentation d'un contre exemple.
Les questions à réponse construite peuvent dans certains exercices être des questions ouvertes qui demandent pour leur résolution une prise d'initiative.

3) La troisième partie consiste en une analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques, choisis dans le cadre des programmes de l'école primaire qu'ils soient destinés aux élèves ou aux enseignants (manuels scolaires, documents à caractère pédagogique), et productions d'élèves de tous types, permettant d'apprécier la capacité du candidat à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement.
Cette partie peut porter sur une notion spécifique de l'un des trois cycles, ou sur une notion abordée de façon progressive au cours de plusieurs cycles.
La maîtrise des notions s'exprime notamment à travers la capacité du candidat à mettre en perspective ces notions et à expliciter les caractéristiques mathématiques des développements ou enrichissements successifs. »

3 – MATÉRIEL AUTORISÉ LORS DE L' ÉPREUVE

Références : Arrêté du 19 avril 2013 fixant les modalités d'organisation des concours de recrutement de professeurs des écoles.

« Lors des épreuves, il est interdit aux candidats :
1° D'introduire dans le lieu des épreuves tout document, note ou matériel non autorisé par le jury du concours ;
2° De communiquer entre eux ou de recevoir des renseignements de l'extérieur ;
3° De sortir de la salle sans autorisation du surveillant responsable et sans être accompagnés par un autre surveillant ;
4° De perturber par leur comportement le bon déroulement des épreuves.
Les candidats doivent se prêter aux surveillances et vérifications nécessaires. »

Aucune autre précision n'est donnée à ce jour dans la page Guide concours – Professeurs des écoles du site ministériel. Il en résulte que, pour l'usage des calculatrices, il convient de se référer la **circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999** (B.O.E.N. n° 42 du 25 novembre 1999) ; celle-ci définit les conditions d'utilisation des calculatrices dans les examens et concours organisés par le ministère de l'éducation nationale et dans les concours de recrutement des personnels enseignants.

« Le matériel autorisé comprend toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante. »

« Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.
Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices.
Les chefs de centre d'examen veilleront à ce que les candidats soient convenablement informés de cette règle qui doit être strictement respectée. »

« Dans le cadre de la réglementation des examens et concours, il appartient aux responsables de l'élaboration des sujets de décider, pour chacune des épreuves, si l'usage de l'ensemble des instruments de calcul (calculatrices, tables numériques, abaques…) est autorisé ou non. Ce point doit être précisé en tête des sujets. »

Pour l'épreuve de mathématiques, le sujet précisera donc si l'utilisation d'une calculatrice est autorisée ou non.

AVERTISSEMENT

Dans le corrigé des **exercices de mathématiques**, nous proposons souvent plusieurs méthodes de résolution pour une question. Certaines solutions sont plus longues que d'autres. Nous les donnons cependant pour que chacun puisse éventuellement reconnaître et valider la méthode qu'il a utilisée ou dans laquelle il s'est engagé sans peut-être savoir terminer.
Une méthode même longue donnera tous les points attribués à la question, du moment qu'elle a abouti au résultat demandé. Elle pénalise cependant le candidat car le temps passé à la rédiger n'est plus disponible pour traiter d'autres questions. Mais il est possible que le lecteur de ces annales la comprenne mieux qu'une méthode courte, même « élégante ». Le lecteur jugera donc par lui-même quelle(s) méthode(s) il lui convient de s'approprier.

En ce qui concerne les **analyses de productions d'élèves** et la partie 3 (**analyse de situations d'enseignement**), nous avons eu le souci de donner des réponses détaillées sur le plan didactique et donc, quelquefois, plus approfondies que ce que l'on peut attendre d'un candidat au CRPE. Certaines remarques des correcteurs sont alors ajoutées en italique.

CONSEILS AUX CANDIDATS

La lisibilité, la correction et la rigueur des réponses sur les plans mathématique et didactique sont, bien entendu, les critères principaux d'évaluation. Cependant, une écriture difficilement lisible, la présence de « fautes » d'orthographe par trop grossières et fréquentes, les coquilles fâcheuses, le verbiage pompeux et vide, l'abus d'expressions hors de propos, finissent par avoir une incidence sur l'évaluation, et cela, quelle que soit la précision du barème de notation appliqué. Nous conseillons donc de relire la copie en tenant compte de tout cela.

PROBLÈME

	Géométrie plane	Trigonométrie	Géométrie espace	Arithmétique	Numérations Opérations	Équations	Probabilités	Grandeurs Mesures	Vitesses-Échelles Pourcentages	Fonctions Graphiques	Tableur
Sujet « 0 » M.E.N.	**X**									**X**	
Sujet COPIRELEM 1				**X**		**X**	**X**				
Sujet COPIRELEM 2	**X**						**X**	**X**	**X**	**X**	
Sujet COPIRELEM 3					**X**						
Sujet 1 2014	**X**							**X**		**X**	**X**
Sujet 2 2014		**X**					**X**		**X**	**X**	
Sujet 3 2014								**X**	**X**	**X**	

QUESTIONS À RÉPONSES COURTES

	Probabilité	Statistique	Fonctions Graphiques	Équations	Tableur	Vitesses-Échelles Pourcentages	Géométrie plane	Géométrie espace	Grandeurs et mesures	Numérations Arithmétique	Analyse productions d'élèves
Sujet « 0 » M.E.N.	**X**	**X**				**X**					**Résolution de problèmes Cycle 3**
Sujet COPIRELEM 1 QCM							**X**	**X**	**X**		**Fractions Décimaux Cycle 3**
Sujet COPIRELEM 2 Vrai-Faux		**X**				**X**		**X**	**X**	**X**	**Calcul réfléchi Cycle 3**
Sujet COPIRELEM 3			**X**	**X**			**X**			**X**	**Aires et périmètres Cycle 3**
Sujet 1 2014 Vrai-Faux (Ex. 2)	**X**	**X**	**X**			**X**	**X**		**X**	**X**	
Sujet 2 2014					**X**			**X**	**X**	**X**	**Problème additif (techniques sans productions d'élèves) Cycle 3**
Sujet 3 2014 Vrai-Faux (Ex. 1)	**X**	**X**			**X**	**X**			**X**	**X**	

ANALYSE DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT

	Proportionnalité	Division	Nombre	Fractions Décimaux	Multiplication				Cycle
Sujet « 0 » M.E.N.	**X**								**3**
Sujet COPIRELEM 1	**X**								**3**
Sujet COPIRELEM 2		**X**							**3**
Sujet COPIRELEM 3			**X**						**1**
Sujet 1 2014			**X**	**X**					**1** **3**
Sujet 2 2014	**X**								**3**
Sujet 3 2014					**X**				**2** **3**

SEPT

SUJETS

COMPLETS

SUJET « 0 » PROPOSÉ PAR LE M.E.N.

Cet exemple de sujet a été mis en ligne en juin 2013 par le M.E.N. « pour aider les futurs candidats dans leur préparation. Il permet de comprendre les connaissances et compétences attendues des candidats. »

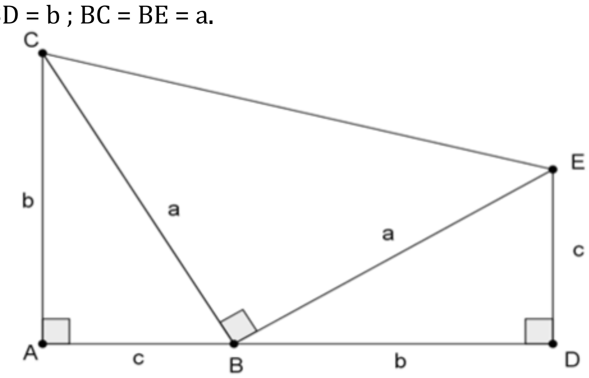
PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Autour du théorème de Pythagore

L'objet de ce problème est la démonstration, par une méthode classique, du théorème de Pythagore, et son utilisation pour calculer des distances une situation concrète.
Ce problème comprend deux parties A et B. Ces deux parties sont indépendantes.
Dans tout le problème, on désigne par Théorème de Pythagore l'énoncé suivant :
Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

PARTIE A : démonstration par la méthode attribuée à Abraham Garfield (1831-1881), 20e président des États-Unis

Dans la figure ci-dessous, les triangles ABC, BDE, BCE sont rectangles respectivement en A, D et B. On pose : AB = DE = c ; AC = BD = b ; BC = BE = a.



1) Justifier que les points A, B et D sont alignés.
2) Justifier que le quadrilatère ADEC est un trapèze.
3) Exprimer de deux manières différentes l'aire du trapèze ADEC en fonction de a, b et c.
4) En déduire l'égalité : $a^2 = b^2 + c^2$.

Partie B : une application du théorème de Pythagore

La courbure terrestre limite la vision lointaine sur Terre.
Plus l'altitude du point d'observation est élevée, plus la distance théorique de vision est grande.
Dans cet exercice, la Terre est assimilée à une sphère de centre A de rayon 6370 km.
La figure 1 ci-dessous représente une partie d'une vue en coupe de la Terre, qui ne respecte pas les échelles. (C) désigne le cercle de coupe, de centre A et de rayon 6370 km.

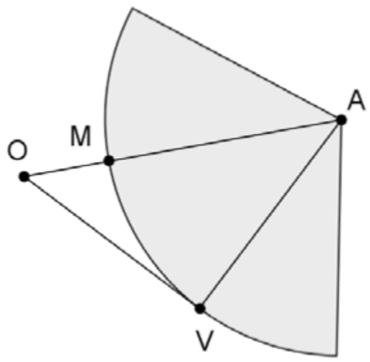


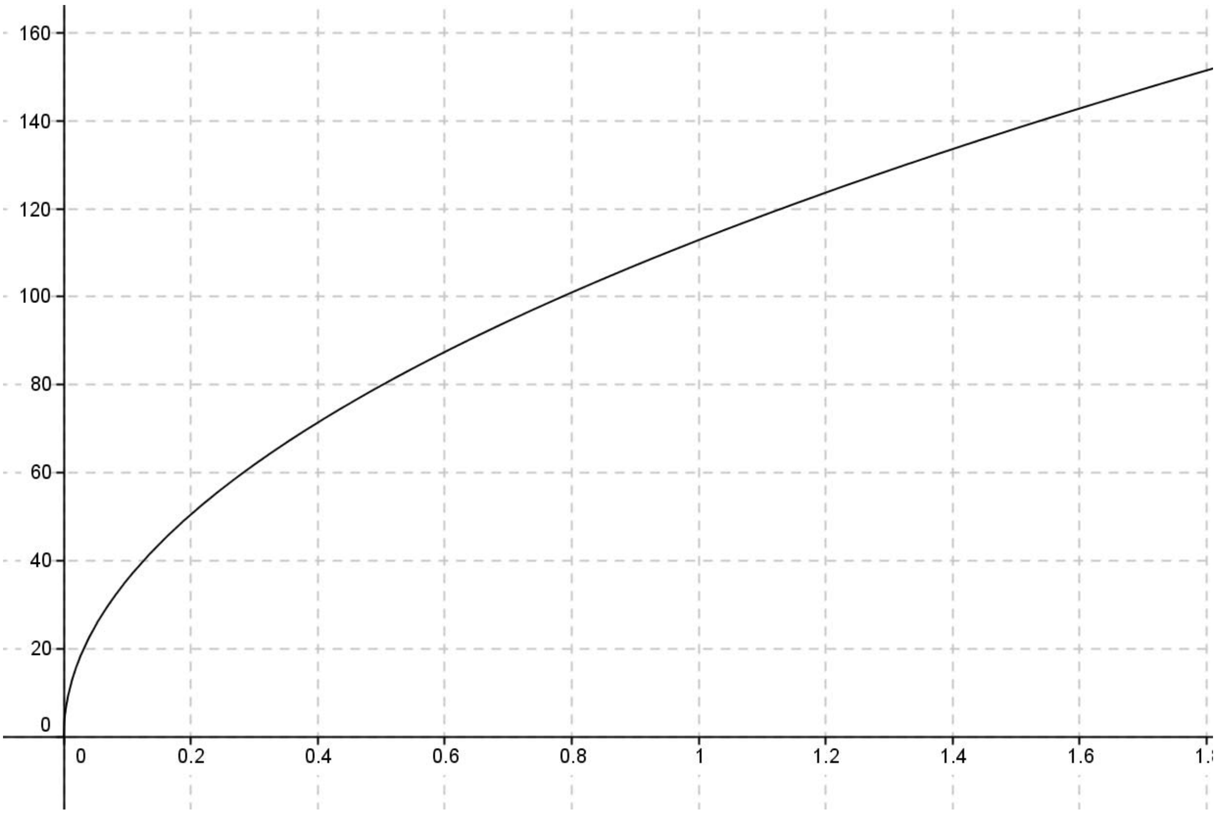
Figure 1

Le point O représente l'emplacement des yeux d'un observateur. Le point M est le point d'intersection de la demi-droite [AO) et du cercle (C).
On considère que M se situe au niveau de la mer ; la longueur OM représente alors l'altitude à laquelle se trouvent les yeux de cet observateur.
La droite (OV) est tangente en V au cercle (C).
Le point V représente le point limite de vision de l'observateur. La longueur OV est appelée *portée visuelle théorique*.

1) Les points O, M et V étant définis comme ci-dessus, montrer que la portée visuelle théorique OV, exprimée en km, est donnée par la formule :
$$OV = \sqrt{OM^2 + 12740 \times OM} \text{ où } OV \text{ et } OM \text{ sont exprimées en km.}$$

2) Calculer la portée visuelle théorique d'un observateur placé au niveau de la mer et dont les yeux sont situés à 1,70 m du sol (on arrondira au dixième de kilomètre près).

3) On considère la fonction f :
$$f : h \longmapsto \sqrt{h^2 + 12740h}$$
On a donc $OV = f(OM)$, où OV et OM sont exprimées en km.
On donne ci-après la représentation graphique de la fonction f.



<u>*Figure 2*</u>

En utilisant le graphique de la figure 2, répondre aux questions suivantes :

a) À quelle altitude doit-on se situer pour avoir une portée visuelle théorique de 100 kilomètres ?
b) Un observateur situé au dernier étage de la Tour Eiffel dont l'altitude est environ 350 mètres pourrait-il théoriquement voir la mer ?
c) L'affirmation suivante est-elle vraie : « si on est deux fois plus haut sur la Terre, alors on a une vision théorique deux fois plus grande » ?

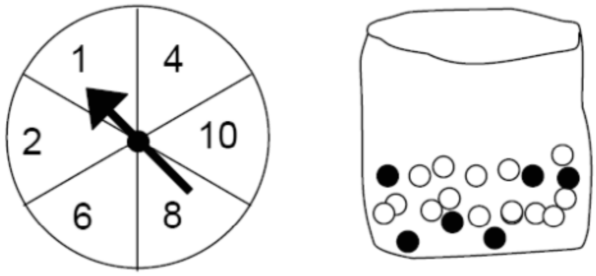
DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Un stand à la foire du printemps propose un jeu dans lequel il faut d'abord faire tourner une roulette. Ensuite, **si** la roulette s'arrête sur un nombre pair, le joueur peut tirer une bille dans un sac.
La roulette et le sac sont représentés ci-contre :
Des prix sont distribués aux joueurs qui tirent une bille noire. Suzy tente sa chance une fois.

Quelle est la probabilité que Suzy gagne un prix ?



D'après PISA M471Q01

EXERCICE 2.

Lors d'un tournoi de Bowling, on note les résultats des 15 joueurs.

268 220 167 211 266 152 270 279 192 191 164 229 223 222 246

Le nombre maximal de point réalisable par un joueur est 300.

Quel résultat peut-on supprimer sans modifier la moyenne des résultats ?

EXERCICE 3.

La longueur officielle d'un marathon est 42,195 km.
Lors d'un marathon un coureur utilise sa montre-chronomètre. Après 5 km de course, elle lui indique qu'il court depuis 17 minutes et 30 secondes.

1) Le coureur pense que s'il gardait cette allure tout au long de la course, il mettrait moins de 2 h 30 en tout. A-t-il raison ?
2) En réalité la vitesse moyenne du coureur pendant les vingt premiers kilomètres a été 16 km / h et cette vitesse a chuté de 10% pour le restant du parcours.
   Quel a été son temps de parcours ? Donner la réponse en heures, minutes, secondes, centièmes de seconde (le cas échéant).

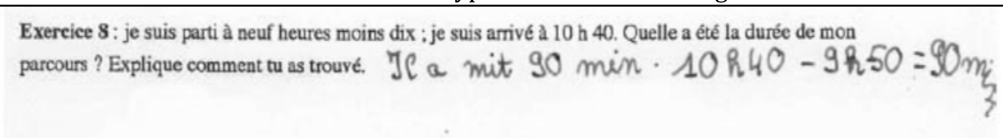
EXERCICE 4

Le problème suivant a été proposé à des élèves.

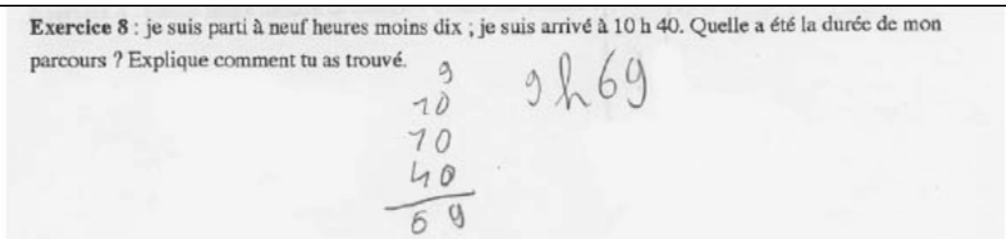
Je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10h40. *Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.*

1) Indiquer le cycle et le niveau de classe auxquels cet énoncé peut être proposé.
2) Pour chacune des deux productions d'élèves reproduites ci-dessous, décrire la procédure utilisée et analyser les erreurs commises en formulant des hypothèses sur leurs origines.

<u>Thomas</u> :


Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé. Il a mit 90 min · 10h40 – 9h50 = 90mn

<u>Kevin</u> :


Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

9
10
10
40
69

9h69

TROISIEME PARTIE (14 points)

Analyse d'exercices proposés à des élèves et de productions d'élèves relevant de la proportionnalité

Cette partie vise l'analyse mathématique de plusieurs situations mettant en œuvre le concept de proportionnalité.
Pour répondre aux différentes questions, le candidat pourra se référer s'il le souhaite à l'extrait du document d'accompagnement des programmes de collège présenté dans l'**annexe 1**.

I. Situation A

Le problème ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de cycle 3.

> *Énoncé A*
> *À chaque saut, une sauterelle avance de 30 cm. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?*

1) Dans cet énoncé, qu'est-ce qui indique que la situation est une situation de proportionnalité ?
2) Le problème a été proposé à 4 élèves, E1, E2, E3 et E4 dont les productions sont données en **annexe 2**. Pour chacun des 4 élèves :
    a) Expliquer, en argumentant à partir des traces écrites de l'élève, si la procédure qui semble avoir été utilisée témoigne d'une mise en œuvre correcte des propriétés mathématiques de la proportionnalité.
    b) Émettre une hypothèse sur la cause des erreurs éventuelles.
3) D'un point de vue théorique, cette situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire du nombre de sauts.
    a) Expliciter cette fonction.
    b) Donner la réponse attendue en utilisant cette fonction.

II. Situation B

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves à l'entrée en sixième.

> *Énoncé B*
> *6 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ?*

1) Dans cet énoncé, qu'est-ce qui indique que la situation est une situation de proportionnalité ?
2) D'un point de vue mathématique, qu'est-ce qui différencie cet énoncé du précédent ?
3) Proposer trois méthodes possibles pour résoudre cet exercice en cycle 3, et pour chacune expliciter les propriétés mathématiques utilisées.

III. Situation C

En classe de CM2, un professeur propose le travail suivant aux élèves :

> *Énoncé C*
> *Un pavé droit a pour base un carré de côté 2 cm. On fait varier sa hauteur et on s'intéresse à son volume.*
> *1) Complète le tableau de valeurs suivant :*

Hauteur du prisme droit	*2 cm*	*3cm*	*4cm*	*5cm*	*6cm*	*10cm*
Volume du prisme droit						

> *2) Place sur la feuille les six points correspondant aux six colonnes du tableau. [le professeur a distribué une feuille de papier quadrillé sur laquelle les deux axes gradués d'un repère orthogonal ont été tracés. Sur l'axe des abscisses il a indiqué : hauteur du pavé droit, et sur celui des ordonnées : volume du pavé droit]*
> *3) Que constates-tu ? Vérifie avec ta règle.*

1) Citer une nouvelle caractérisation de la proportionnalité mise en évidence dans cet exercice.
2) Dans cet énoncé, c'est la hauteur du pavé droit qui varie. Si le professeur avait choisi de faire varier la longueur du côté du carré de la base, qu'est-ce que cela aurait changé ? Justifier.

IV. Situation D

Dans le document ressource « le nombre au cycle 3 » on trouve, au chapitre *proportionnalité*, les lignes suivantes :

> Le terme de « proportionnalité » apparaît dans les programmes 2008 [BO2008] au cycle 3 [...] mais la notion de proportionnalité est présente dans les situations mathématiques depuis la maternelle. En effet, les jeux d'échange sont déjà des problèmes relevant de la proportionnalité.
> Exemple : Une bille bleue vaut deux billes rouges. Si je te donne 3 billes bleues, combien me donnes-tu de billes rouges ?

1) En quoi le problème ci-dessus est-il un problème de proportionnalité,
2) Expliciter une procédure de résolution envisageable en grande section de maternelle.

ANNEXE 1

Extrait du document :

Ressource pour les classes de 6e, 5e, 4e, 3e de collège La proportionnalité au collège – EDUSCOL

Niveau	Cadres	Types de nombres	Procédures de résolution
Cycle 3	Grandeurs	- Naturels - Décimaux simples (rapport scalaire ou coefficient du type 1,5 ou 2,5…)	Raisonnement proportionnel, utilisant : - Propriété additive - Propriété d'homogénéité - Passage par l'unité - Coefficient de proportionnalité « simple »
Sixième	Grandeurs	- Naturels - Décimaux simples - Quotients (plus le nombre pi)	Raisonnement proportionnel, utilisant : - Propriété additive - Propriété d'homogénéité - Passage par l'unité - Coefficient de proportionnalité
Cinquième	Grandeurs Numérique	- Naturels - Décimaux - Quotients (plus le nombre π)	Formulation et utilisation des propriétés : - Propriété additive - Propriété d'homogénéité - Passage par l'unité Coefficient de proportionnalité
Quatrième	Grandeurs Numérique Graphique	- Naturels - Décimaux - Quotients (plus le nombre π)	- Utilisation des propriétés travaillées en 6^e et 5^e - Egalité de quotients et produits en croix - Caractérisation graphique (sans justification)
Troisième	Grandeurs Numériques Graphiques	- Naturels - Décimaux - Quotients (plus les nombre π , $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; …)	- Modélisation et traitement à l'aide d'une fonction linéaire - Les procédures envisagées antérieurement restent disponibles

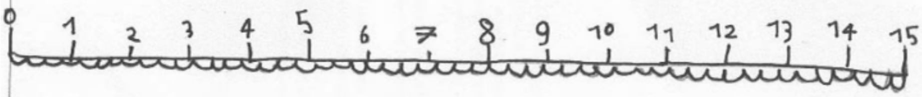
ANNEXE 2

Production de quatre élèves en réponse à l'exercice A

E1

A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.



Réponse : Elle va faire 52 bon

E2

A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times\ 50 \\ \hline 00 \\ +\ 1500 \\ \hline 1500 \end{array}$$

Réponse : Elle doit faire 50 sauts pour faire 15 mètres

E3

A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

$$\begin{array}{r} 30 \\ +\ 15 \\ \hline =\ 45 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \\ -\ 15 \\ \hline =\ 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \\ \times\ 15 \\ \hline =\ 30 \end{array}$$

Réponse : Le sauterelle sautera 20 mètre

E4

A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

3 s. = 90 cm
10 s. = 300 cm = 3 mètres
20 s. = 600 cm = 6 mètres
30 s. = 900 cm = 9 mètres
40 s. = 1200 cm = 12 "

50 s. = 13 mètres

Réponse : La sauterelle doit faire 50 sauts pour parcourir 15 mètres.

SUJET N°1 PROPOSÉ PAR LA COPIRELEM

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

L'objectif de ce problème est de résoudre mathématiquement différentes situations mettant en jeu des jetons.

PARTIE A : Disposer des jetons

Voici 16 jetons disposés « en carré » :

O O O O
O O O O
O O O O
O O O O

Maxime possède un certain nombre de jetons et souhaite les disposer « en carré » en les utilisant tous.
Il fait une première tentative : il dispose ses jetons en carré, mais son carré n'est pas assez grand et il lui reste 52 jetons qu'il ne peut pas placer.
Il fait une deuxième tentative : il essaie d'agrandir son premier carré en disposant 4 jetons de plus par côté, il lui manque alors 60 jetons pour finir son carré.

1) Calculer le nombre de jetons que possède Maxime.
2) Maxime peut-il placer tous ses jetons en carré ? Justifier la réponse.
3) Sans utiliser la calculatrice, expliquer s'il est possible de placer 2700 jetons en carré.

PARTIE B : Organiser des jetons

Dans un sac, il y a 84 jetons bleus, 60 jetons rouges et 48 jetons jaunes. Ces jetons sont indiscernables au toucher.

1) On souhaite répartir ces jetons dans des boîtes qui contiennent toutes la même quantité de jetons de chaque couleur. Donner le nombre possible de boîtes et pour chaque possibilité préciser le contenu de la boîte.
2) On pioche au hasard les jetons dans le sac et on les dépose dans l'une des boîtes.
   a) Combien de jetons au minimum faut-il piocher successivement pour être sûr d'avoir au moins un jeton jaune ? Justifier la réponse.
   b) Quelle est la probabilité de « piocher un jeton jaune en premier » ?

PARTIE C - Jouer avec les jetons bleus et rouges

Dans cette partie, des points sont affectés aux différents jetons.

- les jetons bleus font gagner 3 points,
- les jetons rouges font gagner 7 points.

Un meneur de jeu distribue à ses amis des jetons bleus et des jetons rouges et chacun doit calculer son total de points.

1) Bernard a autant de jetons bleus que de jetons rouges. Son total de points est 70. Combien a-t-il de jetons de chaque couleur ?
2) Paul dit qu'il a 29 jetons qui représentent un total de 159 points. Trouver la composition de la collection de jetons de Paul :
   a) par une résolution algébrique ;
   b) par une résolution arithmétique.
3) Céline possède des jetons bleus et des jetons rouges pour une valeur totale de 34 points.
   a) Combien de jetons de chaque couleur possède-t-elle ? Trouver toutes les solutions.
   b) Sur l'annexe 1, la droite d'équation $3x + 7y = 34$ a été représentée. En explicitant la méthode, retrouver graphiquement les solutions obtenues précédemment.
4) Pierre n'a que des jetons bleus et Jean n'a que des jetons rouges. Pierre doit donner 34 points à Jean. Comment Pierre et Jean peuvent-ils procéder ? Décrire une solution.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette deuxième partie est constituée de questions à choix multiples (partie A) et d'une analyse de productions d'élèves sur les décimaux (partie B).

PARTIE A - Questions à choix multiples (6 points)

Dans cette partie, aucune justification n'est demandée.
Chaque question appelle une ou deux réponses exactes.

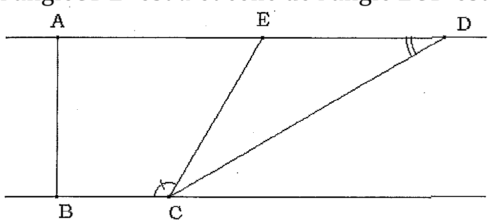
- *une bonne réponse rapporte soit 1 point, soit 0,5 point ;*
- *une absence de réponse ne pénalise pas (0 point) ;*
- *une réponse fausse enlève 0,5 point.*

Vous indiquerez Vrai ou Faux dans les cases qui correspondent aux affirmations A, B, C ou D dans le tableau réponse de chaque question.

1) Un quadrilatère ABCD est appelé isocervolant en A si l'angle $\widehat{A}$ est droit et si la droite (AC) est un axe de symétrie de la figure.
Parmi les affirmations suivantes indiquez celle(s) qui est (sont) exacte(s).
A : Tout carré est un isocervolant.
B : Tout rectangle est un isocervolant.
C : Tout isocervolant est un carré.
D : Tout isocervolant est un rectangle.

A	B	C	D

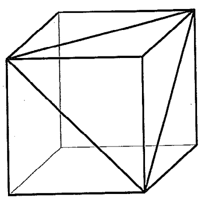
2) Sur la figure ci-dessous :
- les points A, E et D sont alignés dans cet ordre ;
- la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (AE) et à la droite (BC) ;
- le triangle DEC est isocèle en E ;
- la mesure, en degré, de l'angle$\widehat{CDE}$ est a et celle de l'angle $\widehat{ECB}$ est $4a$.



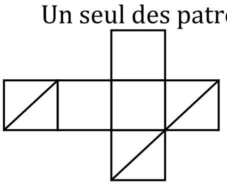
Parmi les affirmations suivantes une est vraie, laquelle ?
La valeur de a est :
A : 45°
B : 30°
C : 20°
D : 25°

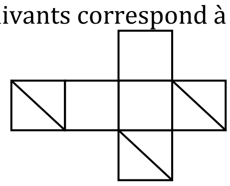
A	B	C	D

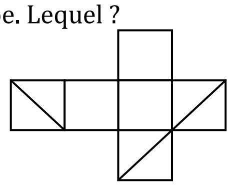
3) On considère le cube ci-dessous représenté en perspective cavalière.

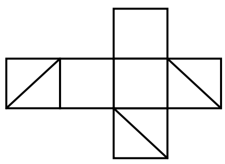


Un seul des patrons suivants correspond à ce cube. Lequel ?


Patron A

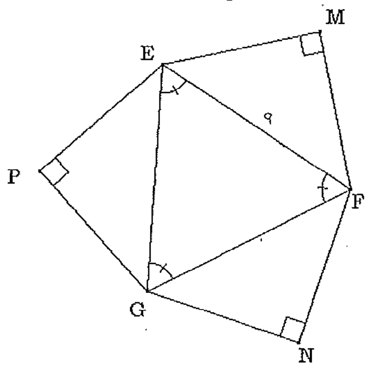

Patron B


Patron C


Patron D

A	B	C	D

4) EFG est un triangle équilatéral de côté de longueur a. Les triangles EMF, FNG et GPE sont des triangles rectangles isocèles respectivement en M, N et P et disposés comme la figure ci-dessous.



Parmi les affirmations suivantes indiquez celle(s) qui est (sont) exacte(s).

A : EM = $a\sqrt{2}$.

B : L'aire du triangle EMF est égale à $\frac{a^2}{4}$.

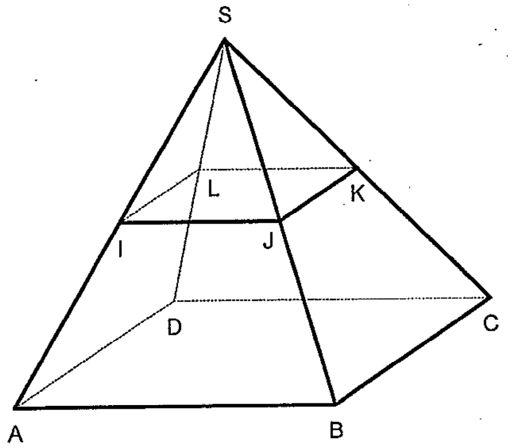
C : L'aire du triangle EFG est égale à $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

D : Le périmètre de l'hexagone EMFNGP est égal à $6a\sqrt{2}$.

E : L'aire de l'hexagone EMFNGP est égale à $\frac{3}{4}a^2$.

A	B	C	D	E

5) On considère la pyramide de sommet S et de base ABCD représentée ci-dessous.
Les points I, J, K et L sont respectivement les milieux des arêtes [SA], [SB], [SC] et [SD].



Parmi les affirmations suivantes indiquer celle(s) qui est (sont) exacte(s).

A : L'aire du quadrilatère ABCD est égale à quatre fois l'aire du quadrilatère IJKL.

B : L'aire du quadrilatère IJBA est égale à deux tiers de l'aire du triangle SAB.

C : Le volume de la pyramide SABCD est égal aux huit septièmes du solide ABCDIJKL.

D : Le volume de la pyramide SABCD est égal à trois fois celui de la pyramide SIJKL.

A	B	C	D

6) Parmi les affirmations suivantes indiquer celle(s) qui est (sont) exactes(s).

A : Tout quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

B : Tout parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

C : Tout quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leurs milieux est un losange.

D : Tout quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et de mêmes longueurs est un losange.

A	B	C	D

PARTIE B : analyse de production d'élèves sur les décimaux *(7 points)*

Cet exercice s'appuie sur les documents proposés en annexes 2 et 3.
Annexe 2 : Les réponses de deux élèves (Jeanne et Tiago) à un exercice extrait des cahiers des évaluations nationales des acquis des élèves de CM2 en janvier 2011.
Annexe 3 : Extrait des programmes de mathématiques de l'école (B.O. du 19 juin 2008).

1) Questions concernant l'exercice de Jeanne et Tiago.

    a) Pour chaque question A, B et C de l'exercice de Jeanne et Tiago présenté en annexe 2, identifier de façon précise la connaissance et la compétence issue des programmes de mathématiques de l'école de 2008 qu'elle permet d'évaluer.

    Dans une classe de CM1/CM2, voici les résultats obtenus par les 15 élèves de CM2.

Question A		**Question B**	
$\frac{60}{2}$	8 élèves	3,10	8 élèves
$\frac{62}{10}$	4 élèves	0,3	3 élèves
$\frac{602}{100}$	3 élèves	30,00	2 élèves
		3,00	1 élève
		0,03	1 élève

    b) Dans le tableau de résultats ci-dessus, les réponses à la question A et 3,10 à la question B apparaissent majoritairement. Quel renseignement nous donnent ces réponses sur la représentation du lien entre l'écriture à virgule et l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal pour les élèves qui commettent cette erreur ?

    c) Donner une hypothèse permettant d'expliquer l'absence de réponse de Tiago à la question C.

    d) Au regard de la réponse donnée par Jeanne à la question C, quel type de connaissances mathématiques faudrait-il retravailler ?

2) Des réponses argumentées d'élèves à qui il est demandé de calculer : 23,45 ×10 sont présentées en annexe 2.

Samia a écrit :	Julien a écrit :
23,450 parce que quand on multiplie par dix on met un zéro.	*230,450 car* $23 \times 10 = 230$ $45 \times 10 = 450$ *donc <u>ça fait 230,450</u>*

    a. Quelle règle semble appliquer les deux élèves Samia et Julien ?

    b. Préciser leurs erreurs et formuler une hypothèse sur la représentation du nombre décimal chez ces élèves.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Analyse d'éléments d'enseignement de la proportionnalité

Les différentes questions visent l'analyse de plusieurs énoncés de problèmes et d'une proposition de mise en œuvre en classe.

PARTIE A - Analyse d'un premier énoncé de problème et de productions d'élèves

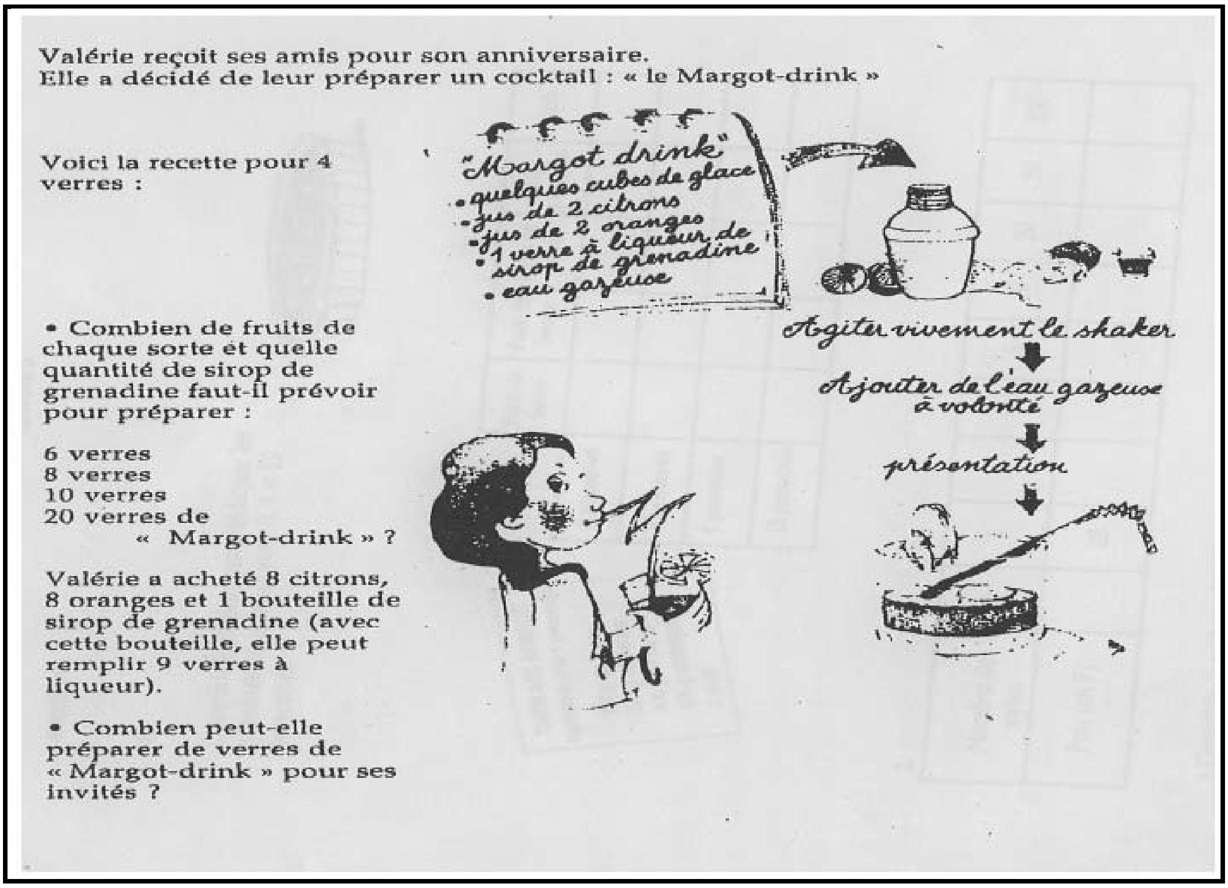
Le problème ci-dessous a été donné à des élèves de cycle 3 pour aborder la notion de proportionnalité.

> *Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 mètres de papier, et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 mètres de ce papier.*
> *a- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 mètres de papier ?*
> *b- Quelle longueur de papier lui faut-il pour emballer 50 livres ?*
> *c- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 mètres de papier ?*

1) Cette situation semble être une situation de proportionnalité. L'énoncé comporte une part d'implicite (non-dit) qu'il serait bon de préciser pour lever toute ambiguïté lors de la résolution de ce problème. Comment peut-on compléter cet énoncé pour lever cette ambiguïté ?
2) D'un point de vue mathématique, cette situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire ou par sa réciproque.
   a) Donner une expression de chacune de ces deux fonctions.
   b) Donner la réponse attendue aux questions a, b et c du problème en utilisant l'une ou l'autre de ces fonctions.
3) Le problème a été proposé à trois élèves, Laurène, Farida et Yann dont les productions sont données en annexe 4.
   a) Expliciter les procédures utilisées par Laurène pour répondre aux questions en vous référant aux propriétés mathématiques sous-jacentes à ces procédures.
   b) Donner une explication plausible aux erreurs commises par Farida pour répondre aux questions a et c.
   c) Comment interpréter la réponse de Yann à la question b ?

PARTIE B - Analyse d'une séance d'enseignement se référant à deux énoncés de problèmes

Pour introduire la notion de proportionnalité en classe de CM1, un enseignant décide d'utiliser le document suivant :



Valérie reçoit ses amis pour son anniversaire.
Elle a décidé de leur préparer un cocktail : « le Margot-drink »

Voici la recette pour 4 verres :

"Margot drink"
- quelques cubes de glace
- jus de 2 citrons
- jus de 2 oranges
- 1 verre à liqueur de sirop de grenadine
- eau gazeuse

Agiter vivement le shaker
Ajouter de l'eau gazeuse à volonté
présentation

- Combien de fruits de chaque sorte et quelle quantité de sirop de grenadine faut-il prévoir pour préparer :

6 verres
8 verres
10 verres
20 verres de « Margot-drink » ?

Valérie a acheté 8 citrons, 8 oranges et 1 bouteille de sirop de grenadine (avec cette bouteille, elle peut remplir 9 verres à liqueur).

- Combien peut-elle préparer de verres de « Margot-drink » pour ses invités ?

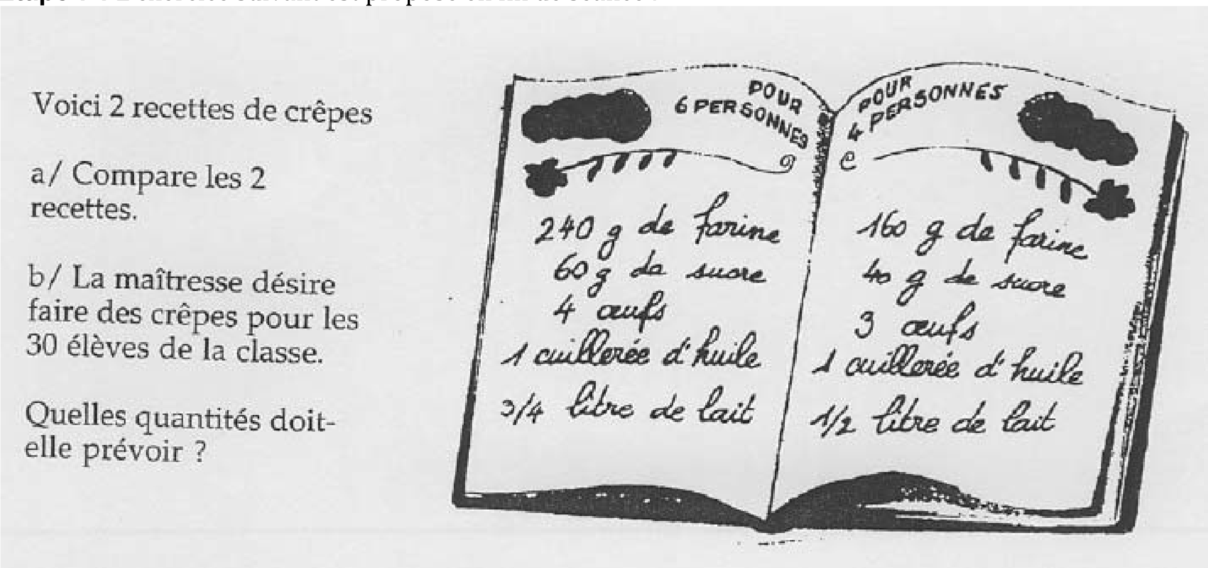
Il décide de préparer sa séance en se référant au canevas présenté ci-dessous.

Étape 1 : Seule la recette est affichée au tableau. Ensuite la première question portant sur le nombre de fruits et la quantité de sirop est écrite au tableau. Les élèves sont invités à rechercher les informations utiles pour répondre à cette question.
Étape 2 : Les élèves sont répartis en groupes hétérogènes. Ils cherchent une réponse à la question et rédigent une affiche pour présenter leur travail.

Étape 3 : Le maître procède à la mise en commun à partir des affiches rédigées dans chaque groupe. Des explications orales peuvent être demandées aux producteurs des affiches et des arguments portant sur la validité ou la non validité de la réponse sont échangés entre élèves.
Étape 4 : Une synthèse collective permet à l'enseignant de mettre en évidence les éléments pertinents et les erreurs contenus dans les affiches.

a- Il met en place un modèle de présentation qui permet d'écrire les données, les résultats calculés et de schématiser la méthode utilisée.

b- Il organise la correction de la première question en séparant le calcul des ingrédients pour 8 verres et 20 verres de celui pour 6 verres et 10 verres. Il fait intervenir comme intermédiaire le calcul pour 2 verres indiqués par une affiche. Il fait apparaître ainsi les propriétés qu'il veut mettre en place.
Étape 5 : Les élèves prennent connaissance de la deuxième question portant sur le nombre de verres et essaient d'y répondre individuellement. Le maître conduit une correction collective à partir des différentes propositions.
Étape 6 : Les élèves doivent ensuite résoudre trois exercices du même style.
Étape 7 : L'exercice suivant est proposé en fin de séance :



1) Caractériser chacune des étapes de cette séance en précisant leur intérêt spécifique.

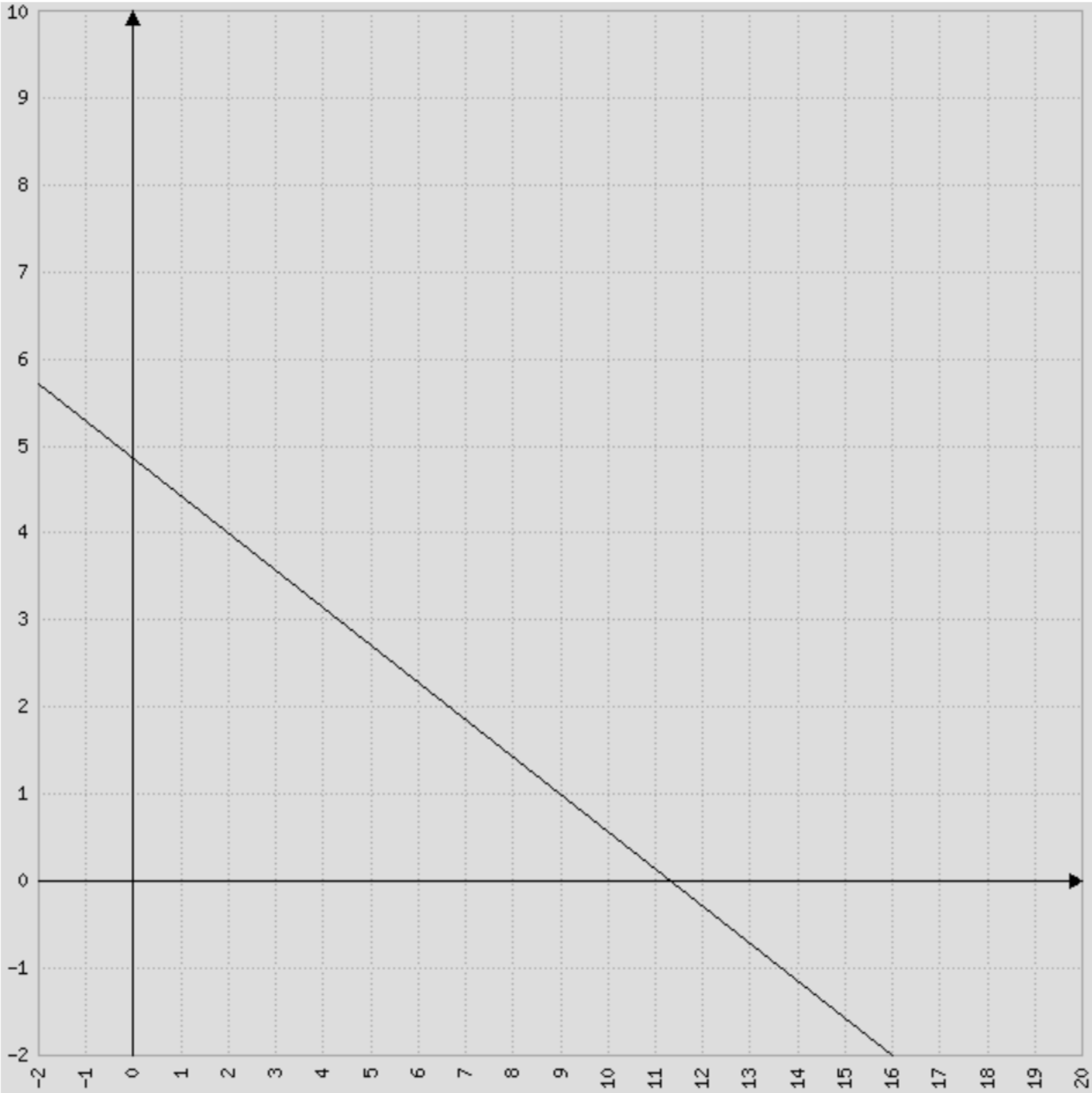
2) Concernant l'étape 1, recenser les informations utiles que le maître doit mettre en relief.

3) Proposer un modèle que l'enseignant peut mettre en place dans la partie a) de l'étape 4. Comment schématiser la méthode utilisée ?

4) À l'étape 7, le maître propose un nouvel exercice.
   a) En quoi cet exercice est-il différent de celui proposé dans l'étape 1 ?
   b) Décrire une procédure correcte qu'un élève de CM1 est susceptible de mettre en œuvre pour répondre à la question a) de cet exercice.

ANNEXE 1

Représentation graphique de la droite 3x + 7y = 34



ANNEXE 2

Réponses de deux élèves à l'exercice n°2 extrait des évaluations nationales des acquis des élèves de CM2 en janvier 2011.

Production de Jeanne

A/ Entoure la fraction égale à 6,02

$\frac{60}{2}$ $\frac{62}{10}$ $\frac{602}{100}$ $\frac{620}{100}$

B/ Entoure le nombre à virgule égal à $\frac{3}{10}$

3,10 0,3 0,03 30,00 3,0 3,00

C/ Écris $\frac{1}{4}$ sous forme de nombre à virgule :

$\frac{1}{4}$ = 0,4

Item 66			Item 67			Item 68		
1	9	0	1	9	0	1	9	0

Production de tiago

A/ Entoure la fraction égale à 6,02

$\frac{60}{2}$ $\frac{62}{10}$ $\frac{602}{100}$ $\frac{620}{100}$

B/ Entoure le nombre à virgule égal à $\frac{3}{10}$

3,10 0,3 0,03 30,00 3,0 3,00

C/ Écris $\frac{1}{4}$ sous forme de nombre à virgule :

$\frac{1}{4}$ =

Item 66			Item 67			Item 68		
1	9	0	1	9	0	1	9	0

ANNEXE 3

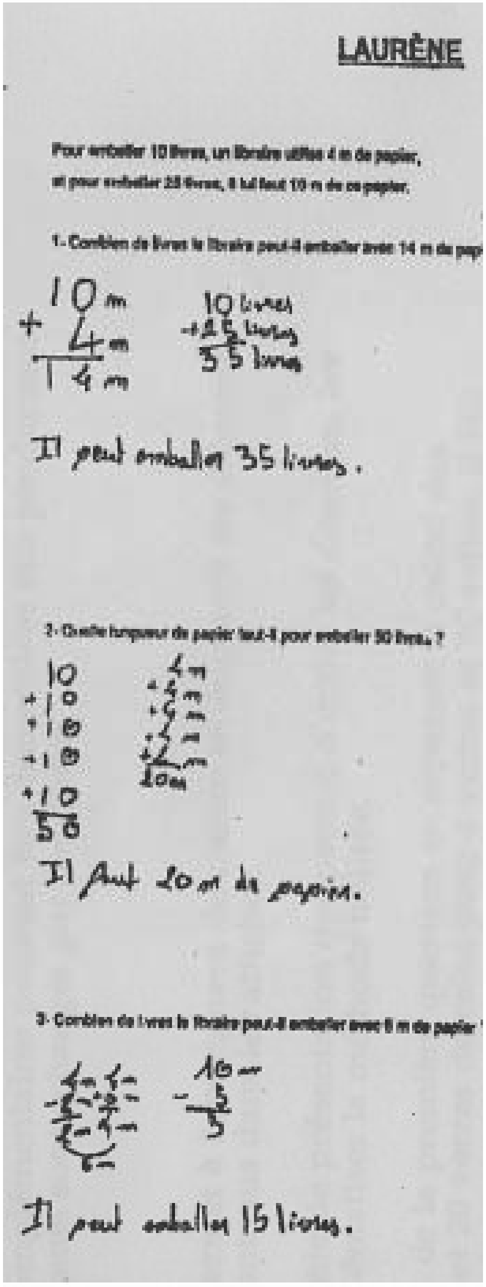
Extrait des programmes de l'école de mathématiques 2008

Les tableaux suivants donnent des repères pour l'organisation de la progressivité des apprentissages par les équipes pédagogiques.
Seules des connaissances et compétences nouvelles sont mentionnées dans chaque colonne.
Pour chaque niveau, les connaissances et compétences acquises dans la classe antérieure sont à consolider.
La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages.

	Cours élémentaire deuxième année	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
Nombres et calcul	**Les nombres entiers jusqu'au million** - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million. - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier. - Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30 et 60.	**Les nombres entiers jusqu'au milliard** - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard. - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - La notion de multiple : reconnaître les multiples des nombres d'usage courant : 5, 10, 15, 20, 25, 50.	**Les nombres entiers**
		Fractions - Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. - Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.	**Fractions** - Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs. - Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. - Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.
		Nombres décimaux - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème). - Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée, . les comparer, les ranger, . les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, . passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.	**Nombres décimaux** - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000ème). - Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, . les comparer, les ranger, . produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,01 ; 0,001... - Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.
	Calcul sur des nombres entiers **Calculer mentalement** - Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication. - Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits. **Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction et multiplication. - Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre. - Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental, posé, où à l'aide de la calculatrice. - Utiliser les touches des opérations de la calculatrice. **Problèmes** - Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.	**Calcul** **Calculer mentalement** - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat. **Effectuer un calcul posé** - Addition et soustraction de deux nombres décimaux. - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. - Division euclidienne de deux entiers. - Division décimale de deux entiers. - Connaître quelques fonctionnalités de la calculatrice utiles pour effectuer une suite de calculs. **Problèmes** - Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.	**Calcul** **Calculer mentalement** - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. - Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. **Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. - Division d'un nombre décimal par un nombre entier. - Utiliser sa calculatrice à bon escient. **Problèmes** - Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

ANNEXE 4

Productions des élèves : Laurène, Farida et Yann



LAURÈNE

Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 m de papier,
et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 m de ce papier.

1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papi

10 m + 4 m = 14 m

10 livres + 25 livres = 35 livres

Il peut emballer 35 livres.

2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?

10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50

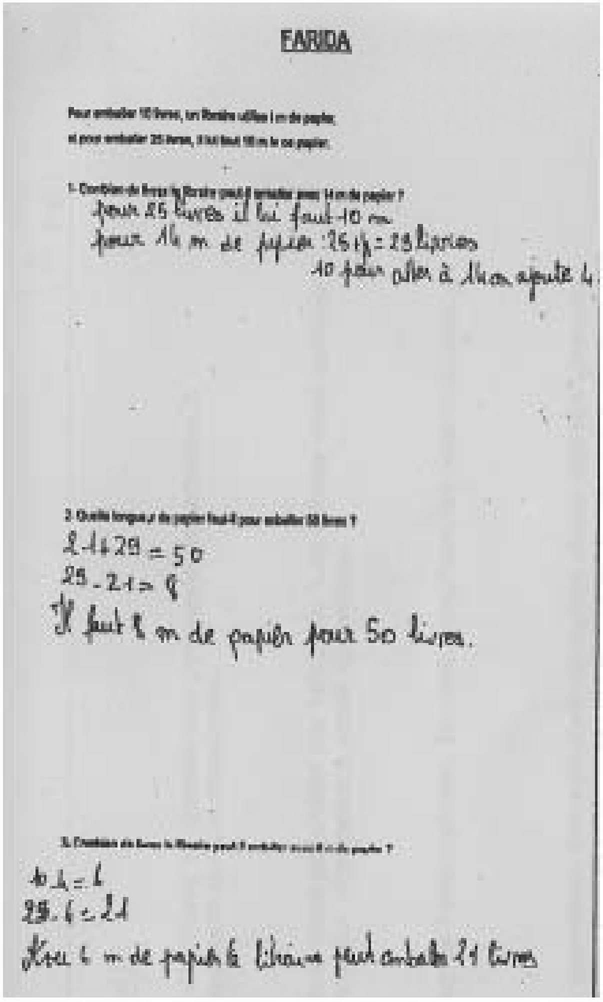
4 m + 4 m + 4 m + 4 m + 4 m = 20 m

Il faut 20 m de papier.

3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?

10 m − 5 = 5

Il peut emballer 15 livres.



FARIDA

Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 m de papier,
et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 m de ce papier.

1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?

pour 25 livres il lui faut 10 m

pour 14 m de papier 25+4 = 29 livres

10 pour aller à 14 on ajoute 4

2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?

21+29 = 50

29 − 21 = 8

Il faut 8 m de papier pour 50 livres.

3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?

10 − 4 = 6

25 − 4 = 21

Avec 6 m de papier le libraire peut emballer 21 livres

YANN

Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 m de papier,
et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 m de ce papier.

1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?

25 + 10 = 35

Le libraire a peut emballer 33 livre dans 14 m de papier.

2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?

4+4+4+4+4+4+4+ 4+ 4+4+4+4+4+4+4 + 2 = 125 m

Il lui fot 125 m pour emballe 50 livre.

3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?

Le libraire peut emballer avec 6 m de papier 15 livres

10 = 4 m   5 = 2 m

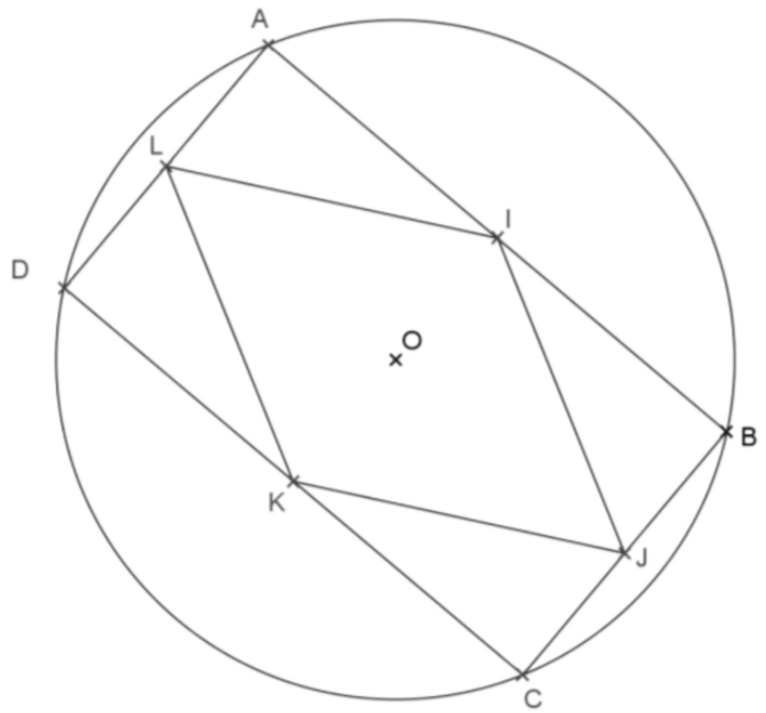
10 + 5 = 15 livres

SUJET N°2 PROPOSÉ PAR LA COPIRELEM

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Un problème de jardinier.

Un jardinier veut réaliser un parterre circulaire composé de différentes parties comme l'indique le dessin ci-contre.



Une plate-bande est représentée par le rectangle ABCD, inscrit dans un disque, et le quadrilatère IJKL représente un massif aménagé à l'intérieur de la plate bande.

PARTIE A : Construire le parterre

Le disque qui constitue le parterre a pour centre O et pour rayon *r*.

1) a) Prouver que AC = BD = 2*r*.

   b) Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA]. Déterminer la longueur des côtés de IJKL en fonction de *r*. Justifier la réponse.

   c) En déduire la nature du quadrilatère IJKL.

2) On souhaite que la largeur de la plate-bande soit égale aux $\frac{3}{4}$de sa longueur.

   a) Prouver qu'alors la longueur du rectangle est égale à $\frac{8}{5}r$ et que sa largeur est égale à $\frac{6}{5}$ *r.*

   b) À l'échelle 1/60, le disque a pour rayon 5 cm.
   Construire à la règle et au compas, le plan de ce parterre à cette échelle. *Les traits de construction resteront apparents.*
   Calculer, en vraie grandeur, l'aire de la toute la plate-bande. Les résultats seront donnés en m2 au centième près.

PARTIE B : Fleurir le parterre

Le jardinier décide de planter des tulipes sur le contour de la plate-bande et de semer du gazon à l'extérieur de celle-ci. Comme il souhaite tondre le moins possible, il envisage de changer les dimensions

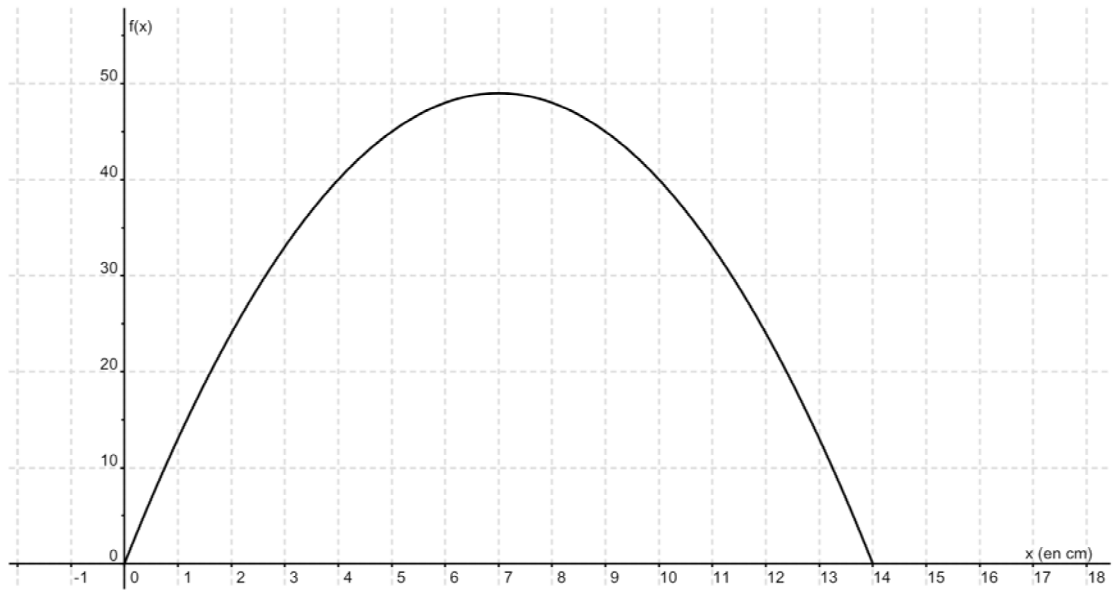
de la plate-bande pour que celle-ci ait une aire maximale tout en conservant son périmètre. Il cherche alors quelles pourraient être les dimensions de la plate-bande.
Une modélisation mathématique va permettre de répondre au problème du jardinier.
Ainsi pour les questions suivantes, les calculs se feront à partir des dimensions du plan réalisé précédemment (le rayon du disque est de 5 cm, et le périmètre du rectangle ABCD représentant la plate-bande est égal à 28 cm).

1) Montrer que si A'B'C'D' est un rectangle ayant le même périmètre que le rectangle ABCD alors son aire vérifie :

   $\text{aire}_{(A'B'C'D')} = 14x - x^2$

   où x désigne la mesure de la longueur d'un côté du rectangle A'B'C'D', l'unité de longueur étant le cm.

2) À partir du graphique suivant, déterminer graphiquement pour quelle valeur de x le rectangle A'B'C'D' a une aire maximum.



Représentation de la fonction f qui à un nombre x associe 14x $-$ x^2 pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 14].

3) En admettant que la valeur déterminée graphiquement est exacte, donner la nature du rectangle A'B'C'D' ayant même périmètre que ABCD et une aire maximale, ainsi que la nature du quadrilatère I'J'K'L' associé. Justifier les réponses.

4) Le jardinier peut-il construire une plate-bande représentée par ce quadrilatère A'B'C'D' et vérifiant la condition d'être inscrit dans le disque initial de rayon 5 cm? Justifier la réponse.

PARTIE C –Acheter des fleurs

Finalement, pour des raisons esthétiques, le jardinier choisit une plate-bande rectangulaire de 3,60 m sur 4,80 m et veut planter des tulipes sur le pourtour extérieur.

1) Sachant que les tulipes se plantent tous les 10 cm et qu'il y en a une à chaque coin de la platebande, déterminer le nombre de tulipes nécessaires. Justifier la réponse.

2) Par expérience, le jardinier sait que 25% des tulipes plantées ne fleuriront pas. Combien de tulipes devra-t-il commander pour disposer finalement du nombre de tulipes nécessaires ?

3) Les tulipes sont vendues dans des sacs de 100 bulbes de fleurs variées, dont un quart sont des bulbes de tulipes, un autre quart de jonquilles et le reste de jacinthes. On suppose que les bulbes sont indiscernables au toucher.
   À partir d'un lot, le jardinier souhaite commencer par planter les tulipes. Il tire au hasard un bulbe : si c'est un bulbe de tulipe, il le plante ; sinon, il le remet dans le sac.

   Après avoir tiré et planté quatre bulbes de tulipes, il tire au hasard dans le sac un nouveau bulbe. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un bulbe de tulipe ? Justifier la réponse.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette deuxième partie est constituée de questions appelées « Vrai – Faux – Justifier » (partie A) et d'une analyse de production d'élèves sur du calcul mental (partie B).

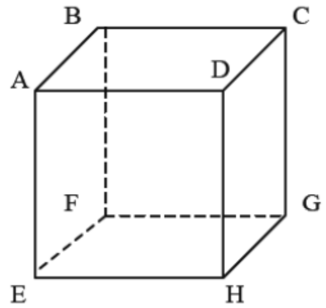
PARTIE A - Vrai – Faux – Justifier (6 points)

Dans cette partie, des affirmations sont proposées. Pour chacune d'entre elles, dire si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse fausse n'enlève aucun point.

1) Une classe a une moyenne de 9 sur 20 à un devoir surveillé.
   Affirmation 1 : La moitié de la classe a eu au moins 9 sur 20 à ce devoir.

2) Affirmation 2 : 1 cL de liquide occupe un volume égal à 0,001 dm3.

3) Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, l'arête AB mesure a cm.



   Affirmation 3 : On peut alors affirmer que le volume du solide dont les sommets sont A, B, D et E est égal à $\frac{a^3}{6}$ cm³.

4) Soit a, b, c trois entiers compris entre 0 et 9.
   Affirmation 4 : Les nombres qui s'écrivent $\overline{abcabc}$ en base dix sont des multiples de 13.

5) Sur une carte au 1/25000 deux villages sont distants de 7 cm.
   Affirmation 5 : Ces villages seront distants de $\frac{35}{8}$ cm sur une carte au 1/40000.

6) On considère le nombre $10^9 - 9$.
   Affirmation 6 : Lorsque l'on fait la somme des chiffres composant l'écriture usuelle de ce nombre, on obtient 73.

PARTIE B : analyse de production d'élèves sur un exercice de calcul réfléchi *(7 points)*

Lors d'une séance de calcul mental, un enseignant écrit au tableau le calcul. Après un moment de recherche, au signal, les élèves écrivent leur résultat sur l'ardoise et lèvent celle-ci. Afin de faire apparaître les différentes procédures, l'enseignant demande alors à certains élèves d'expliquer oralement comment ils ont obtenu leur résultat.
Les réponses et les explications orales fournies par huit élèves que l'on désignera par les lettres, A, B, C, D, E, F, G et H sont indiquées ci-après.

1) Relever et analyser les erreurs commises.

2) Identifier trois procédures qui ont permis d'obtenir le résultat et qui amènent à mobiliser des propriétés de la multiplication qui seront explicitées.

3) Pour chacune des procédures repérées, indiquer les élèves qui l'ont employée.

Calcul : 18 x 5

Élève A *Sur l'ardoise* : 90
Explications : 18 c'est presque 20, je calcule 20 x 5, c'est 100. Il faut enlever 5 et encore 5.

Élève B *Sur l'ardoise* : 90
Explications : 18 plus 18 ça fait 36 et encore 36, 72, et encore 18 , 90.

Élève C *Sur l'ardoise* : 45
Explications : je compte 5 fois 8 quarante et 5 fois 1 cinq. Ca fait 45.

Élève D *sur l'ardoise* : 90
Explications : 5 c'est la moitié de 10, je fais 18 multiplié par 10 ça fait 180 puis je prends la moitié 50 et 40.

Élève E *sur l'ardoise :* 94
Explications : j'ai posé l'opération dans ma tête: 5 fois 8 quarante, 0 et je retiens 4, 5 fois 1 cinq et 4 neuf.

Élève F *sur l'ardoise :* 90
Explications : 18 fois 5 c'est comme 9 fois 2 fois 5.

Élève G *sur l'ardoise* : 72
Explications : 18 plus 18, 36 plus 18 c'est comme 20 moins 2 ça fait 54, plus 18, 72 plus 18; 90. J'avais faux.

Élève H *sur l'ardoise* : 90
Explications : 10 multiplié par 5 cinquante, 8 multiplié par 5 quarante, 40 plus 50, 90.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Analyse de documents pédagogiques sur l'enseignement de la division

PARTIE A - Analyse d'une séance en CE2 (Annexe 1)

Dans l'annexe 1 figure un extrait du manuel *Cap Maths CE2* (Hatier, 2011) présentant le support écrit d'une séance. L'objectif de cette séance porte sur la résolution de problèmes de partage.

1) Exprimer les solutions de chaque problème de la partie « Chercher » au moyen d'une égalité.
2) Citer trois connaissances ou compétences préalables nécessaires à cette activité (partie « Chercher »).
3) Les élèves sont mis en équipes de deux. Ils sont d'abord invités à répondre à la première question de la partie « Chercher ». Après un temps de recherche, l'enseignant organise une mise en commun.
   a) Décrire trois procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour répondre à la question 1 concernant le nombre de rubans de Tim.
   b) Expliciter deux types d'erreurs envisageables.
   c) Quel est le rôle d'une mise en commun à l'issue de la première question ?
   d) De quelle manière peut-on envisager la vérification des réponses ?
4) Dans un deuxième temps, les élèves doivent résoudre les deux autres questions de la partie « Chercher ». Le déroulement est identique à celui de l'étape précédente.
   a) De quelle manière peut-on envisager la vérification des réponses de la question 3 ?
   b) Analyser le choix des nombres dans toute cette activité.
5) Quels éléments de synthèse pourrait-on mettre en avant à l'issue de cette activité ?
6) Six exercices numérotés de 4 à 9 sont proposés à la suite de l'activité de recherche. Analyser le choix de ces exercices en relevant un point commun et deux différences.

PARTIE B - La division en CM2

1) Analyse de deux exercices.

Les deux problèmes suivants (ERMEL CM2, Hatier) sont proposés aux élèves :

Problème 1 Michel veut faire des étagères de bibliothèque. Avec toute une planche de 350 cm, il découpe 8 étagères de même longueur. Quelle est la longueur des étagères ?	**Problème 2** Une planche mesure 350 cm. Combien de morceaux de 8 cm de long Jean peut-il faire avec cette planche ?

   a) Résoudre les deux problèmes proposés.
   b) Citer une ressemblance et une différence entre ces deux problèmes.
   c) La calculatrice peut-elle constituer une aide pour la résolution de ces problèmes ?

2) Dans le cadre de l'Évaluation nationale d'entrée en sixième, il a été proposé aux élèves d'effectuer, sans calculatrice, la division euclidienne de 4 584 par 8. En Annexe 2 sont reproduits les travaux d'Aliette et Christian.
   a) Décrire pour chaque élève les procédures utilisées pour effectuer la division proposée. Analyser les erreurs éventuelles.
   b) Quelle aide pourrait-on apporter à Christian ?

ANNEXE 1

Extrait de CapMaths CE2, Hatier 2011

CHERCHER Combien de parts ?

Maïa et Tim découpent des rubans dans des bandes de différentes couleurs.
Dans chaque bande, ils doivent découper le plus possible de rubans.
Maïa découpe des rubans qui mesurent tous 2 cm de long et Tim des rubans qui mesurent tous 6 cm de long.

1. Ils ont chacun une bande rouge de 32 cm.
Combien de rubans peuvent-ils découper ?

2. Ils ont chacun une bande bleue de 67 cm.
Combien de rubans peuvent-ils découper ?

3. Ils ont chacun une bande jaune de 248 cm.
Combien de rubans peuvent-ils découper ?

EXERCICES

4. Une bande mesure 30 cm.
Combien de rubans de 5 cm peux-tu découper ?

5. Une bande mesure 78 cm.
Combien de rubans de 5 cm peux-tu découper ?

6. Dans une bande, Maïa a découpé 9 rubans de 7 cm chacun.
À la fin, il lui reste un petit ruban de 4 cm de long.
Quelle était la longueur de la bande ?

*7. Une bande mesure 200 cm.
Combien de rubans de 9 cm peux-tu découper ?

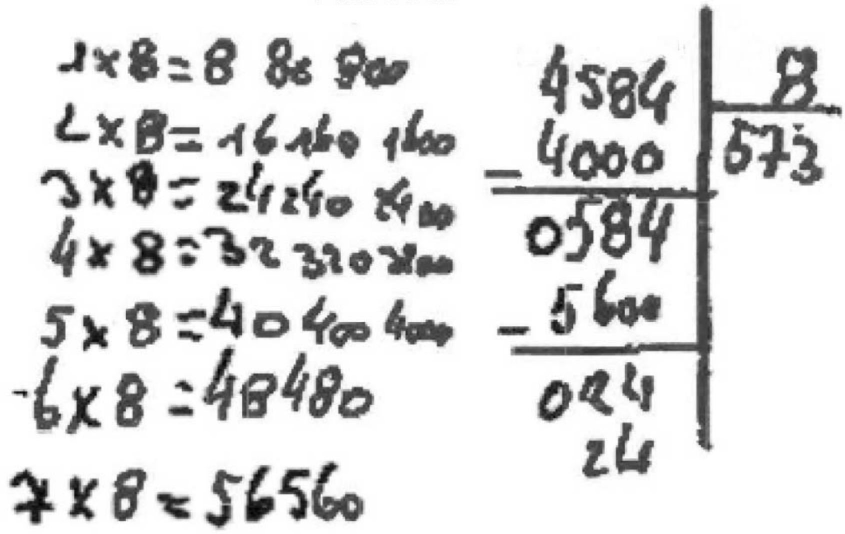
*8. Un mini-car permet de transporter 8 passagers.
Combien faut-il prévoir de mini-cars pour emmener 54 passagers en promenade ?

*9. Les 52 élèves de CE1 et de CE2 se répartissent en équipes de 7.
Les élèves restants seront arbitres.
Combien y aura-t-il d'arbitres ?

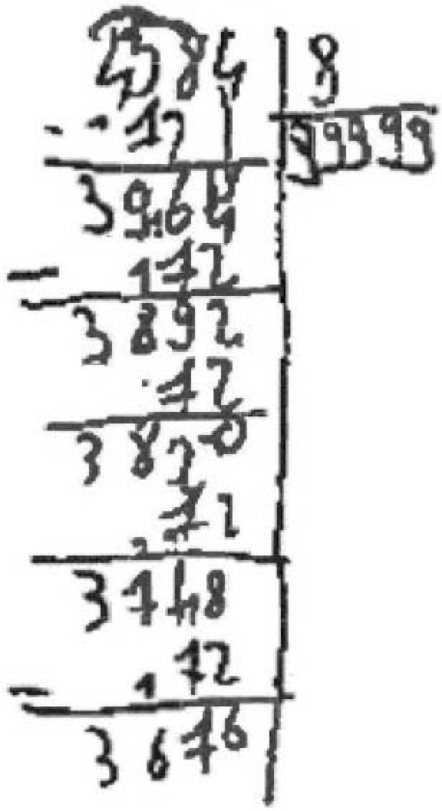
ANNEXE 2

Productions d'Aliette et Christian

Aliette



Christian



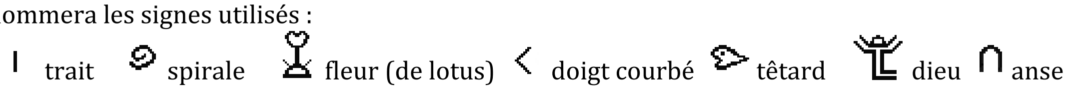
SUJET N°3 PROPOSÉ PAR LA COPIRELEM

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Numération et opérations

Dans le tableau ci-dessous, on a écrit quelques nombres entiers avec des hiéroglyphes appartenant à l'écriture égyptienne (vers 3000 av. JC), sans nécessairement respecter scrupuleusement la disposition des chiffres hiéroglyphiques de l'époque.

On nommera les signes utilisés :



42 209	
120 000	
1 422 000	
400 010	
30 031	

1) On admet qu'il existe une écriture unique de chaque nombre dans ce système (à l'ordre près des symboles utilisés), chaque symbole étant utilisé au maximum neuf fois.
   Traduire les nombres suivants :

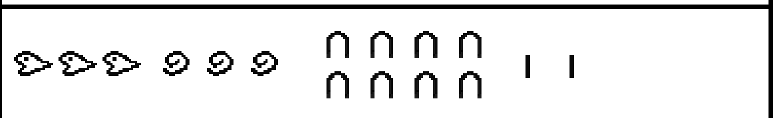
	
	2 154 813

2) a) Expliciter une règle permettant de comparer deux nombres quelconques écrits dans ce système de numération.

   b) Citer un avantage de notre système actuel de numération écrite par rapport au système égyptien du point de vue de la comparaison des nombres.

   c) Citer un nombre que l'on peut écrire dans notre système de numération mais qui ne peut s'écrire dans le système égyptien.

3) Calculer la différence entre les deux nombres A et B suivants, en utilisant exclusivement le système de numération égyptien (on laissera visibles les différentes étapes du calcul).

A	
B	

4) Pour multiplier deux nombres, les égyptiens utilisaient une méthode dite « par duplications successives ».
Exemples : pour effectuer les produits 35×47 et 89×25 (avec nos symboles de numération)

$\boxed{1}$	47
$\boxed{2}$	94
4	~~188~~
8	~~376~~
16	~~752~~
$\boxed{32}$	1504
35	1645

donc 35 × 47=1645

$\boxed{1}$	25
2	~~50~~
4	~~100~~
$\boxed{8}$	200
$\boxed{16}$	400
32	~~800~~
$\boxed{64}$	1600
89	2225

donc 89 × 25=2225

a) Effectuer ainsi le produit 28 × 34.

b) Montrer que cette méthode conduit au résultat correct, sur l'exemple de 35 × 47, en justifiant chacune des étapes du calcul.

c) Proposer un algorithme généralisant cette méthode pour calculer le produit de deux nombres entiers. Justifier qu'il est effectivement utilisable pour tout produit de deux nombres entiers.

5) Dans les exemples donnés, on a utilisé 6 et 7 lignes avant de pouvoir faire l'addition finale. En supposant que l'on ait à effectuer le produit d'un nombre à quatre chiffres par un nombre à trois chiffres, quel nombre minimal de lignes faut-il écrire ? Justifier.

6) Dans une classe de CE1, des élèves confrontés pour la première fois au calcul de 19×34, ont calculé ainsi :

34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34

68 + 68 + 68 + ...

136 + ...

....

a) Trouver deux points communs entre cette procédure et la méthode dite « par duplications successives ».

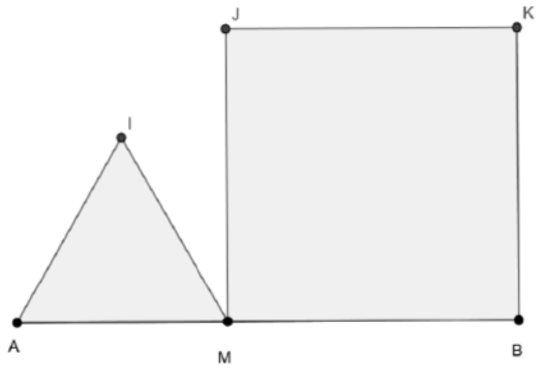
b) Donner une capacité supplémentaire nécessitée par la méthode dite « par duplications successives ».

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette deuxième partie est constituée d'exercices (partie A) et d'une analyse de production d'élèves sur la notion d'aire et de périmètre (partie B).

PARTIE A - Résoudre les exercices suivants en justifiant les réponses. (7 points)

Exercice 1



M est un point du segment [AB] de longueur 10,5 cm.
AIM est un triangle équilatéral et BMJK est un carré.
On se propose de rechercher la position du point M pour que AIM et BMJK aient le même périmètre.

1) On note x la mesure en cm de la longueur AM.
   Exprimer en fonction de x le périmètre de AIM et celui de MJBK, et résoudre le problème algébriquement.

2) Donner une résolution graphique du problème.

Exercice 2

En fin de marché, un maraîcher décide, alors qu'il lui reste 60 salades, 48 oignons et 36 bottes de radis, de constituer des lots identiques de légumes pour écouler sa marchandise.

1) Quel est le nombre maximum de lots identiques qu'il peut constituer ? Justifier la réponse.

2) Pour ce nombre maximum de lots identiques, quelle est la composition de chaque lot ?

Exercice 3

ABCD est un trapèze convexe isocèle dont une des bases est le segment [AB] et dont les diagonales se coupent en un point O, tel que :

AB = 5 cm ; OA= 3 cm et OC= 4 cm.

1) Calculer CD.

2) Construire aux vraies dimensions, en utilisant une règle graduée et un compas, ce trapèze.
   Les traits de construction resteront apparents.

Exercice 4

On considère les nombres entiers N et q tels que : $N < 4200$ et $q = 82$. Dans la division euclidienne de N par un nombre entier d, on obtient le quotient q et le reste r.

1) Dans cette question, $r = 45$.

   a) Déterminer d pour $N = 3899$.

   b) Dans le cas général où $N < 4200$, rechercher l'ensemble des couples (N, d) possibles dans cette division euclidienne. Justifier les réponses.

2) Dans cette question, $r = 112$. Dans le cas général où $N < 4200$, rechercher l'ensemble des couples (N, d) possibles dans cette division euclidienne. Justifier les réponses.

3) Discuter, selon la valeur de r, l'existence de couples (N, d) dans cette division euclidienne.

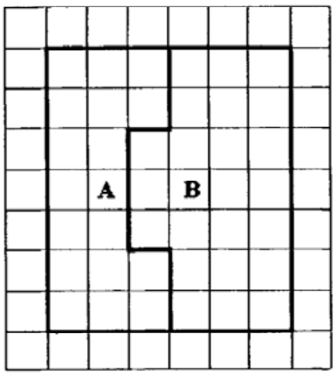
PARTIE B : analyse de production d'élèves sur les notions d'aire et de périmètre *(6 points)*

Les deux productions suivantes (élève n°1 et élève n°2) sont extraites des cahiers d'évaluation nationale de début 6e. Les compétences évaluées sont :

- *Mesurer l'aire d'une surface grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé.*
- *Calculer le périmètre d'un polygone.*
- *Différencier aire et périmètre (en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire).*
- *Formuler et communiquer sa démarche par écrit.*
- *Argumenter à propos de la validité d'une solution.*

1) Pour la comparaison des aires et des périmètres des parcelles A et B de l'évaluation :
   a) donner une solution utilisant des mesures (valeurs numériques),
   b) donner une solution n'utilisant pas les mesures.
2) Comment peut-on expliquer que les élèves privilégient les solutions numériques ?
3) Comment interpréter les réponses de l'élève n°1 ?
4) Comment interpréter les réponses de l'élève n°2 ?

Élève n° 1



Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre.

Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

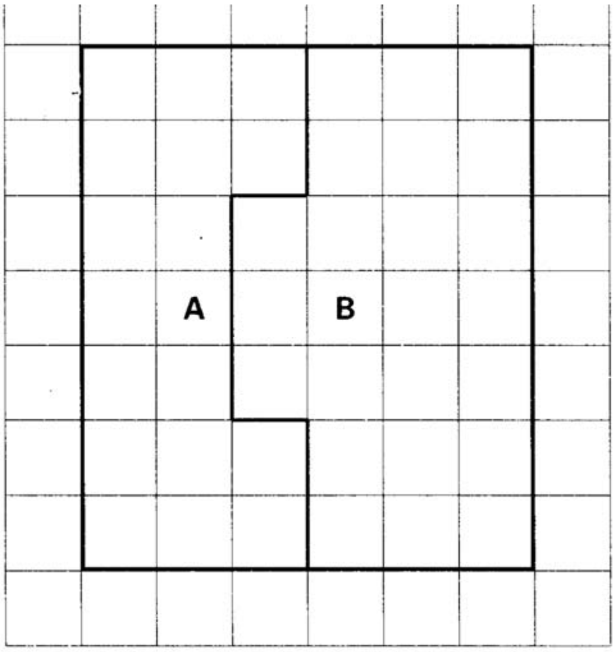
a. L'aire de la parcelle A est la plus grande. | Les deux parcelles ont la même aire. | L'aire de la parcelle B est la plus grande.

Explique ton choix : parce qu'il y a plus de carreaux dans la parcelle B.

b. Le périmètre de la parcelle A est le plus grand. | Les deux parcelles ont le même périmètre. | Le périmètre de la parcelle B est le plus grand.

Explique ton choix : Parce qu'il y a 17 carreaux dans la parcelle A.

Élève n° 2



Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre.

Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

a. L'aire de la parcelle A est la plus grande. | Les deux parcelles ont la même aire. | L'aire de la parcelle B est la plus grande.

Explique ton choix : Si le terrain serait coupé en deux au milieu, elles auraient toutes les deux la même aire mais comme la parcelle B possède un morceau de plus que A elle est plus grande

b. Le périmètre de la parcelle A est le plus grand. | Les deux parcelles ont le même périmètre. | Le périmètre de la parcelle B est le plus grand.

Explique ton choix : Comme ~~la~~ l'aire parcelle B est plus grande que A le périmètre de la parcelle B est aussi plus grand.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Analyse de situations de classe en maternelle

PARTIE A – Dénombrer des collections

Un élève de Grande Section, en fin d'année, est confronté successivement aux deux tâches suivantes :

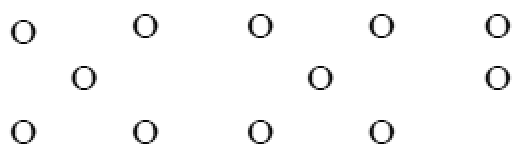
Tâche A :
Un tas d'une vingtaine de jetons est devant lui. On lui demande combien il y a de jetons.
Tâche B :
L'élève reçoit une barquette ; le maître dit à l'élève d'aller chercher douze jetons dans la réserve et de les rapporter dans son panier.

1) Pour chacune de ces tâches, décrire une procédure utilisant la comptine numérique permettant de réaliser la tâche.
2) Cette question porte sur la tâche A. Décrire deux erreurs qu'un élève peut faire en dénombrant par comptage la vingtaine de jetons qui est devant lui.
3) La tâche B est plus complexe que la tâche A. En s'appuyant sur les procédures décrites dans la question 1, donner un argument permettant de justifier cette affirmation.

PARTIE B – Variations autour de la tâche A

Dans cette partie, certaines valeurs des variables de la tâche A vont être modifiées. Il va s'agir d'analyser les effets de ces changements de valeur sur les procédures des élèves.

1) Le tas de jetons proposé contient moins de quatre jetons, quelle autre procédure peut utiliser un élève dans ce cas ?
2) Le nombre de jetons proposé :12. Par ailleurs, les jetons ne sont pas présentés en tas, mais organisés sur la table de l'élève comme ci-dessous :



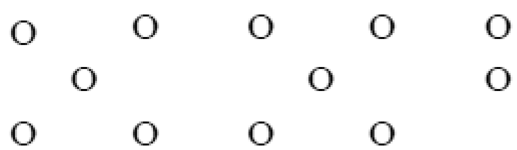
Quelle procédure, différente de celle décrite en question 1, peut alors être utilisée par un élève pour réaliser la tâche ?

3) On remplace le tas d'une vingtaine de jetons par une collection d'une vingtaine de points dessinée sur une feuille et non organisée. En quoi cela peut-il obliger à modifier une procédure possible dans le cas 1 ?

PARTIE C – Variations autour de la tâche B

Dans cette partie, certaines valeurs des variables de la tâche B vont être modifiées. Il va s'agir d'analyser les effets de ces changements de valeur sur les procédures des élèves.

1) Au lieu de dire à l'élève de ramener douze jetons, le maître donne à l'élève une carte constellation représentant une collection de douze éléments organisée ainsi :



et lui demande de rapporter autant de jetons que de points représentés sur la carte.

Décrire une procédure, différente de celle décrite dans la question 1, que l'élève peut utiliser pour réaliser la tâche.

2) Le maître place dans un sac des cartes sur lesquelles sont inscrites les écritures chiffrées des nombres jusqu'à 15. Un élève pioche dans le sac la carte « 12 » et doit apporter autant de jetons que le nombre inscrit sur la carte. Quelle connaissance le maître souhaite-t-il évaluer ?

PARTIE D – Variations autour de la tâche « Comparer des quantités »

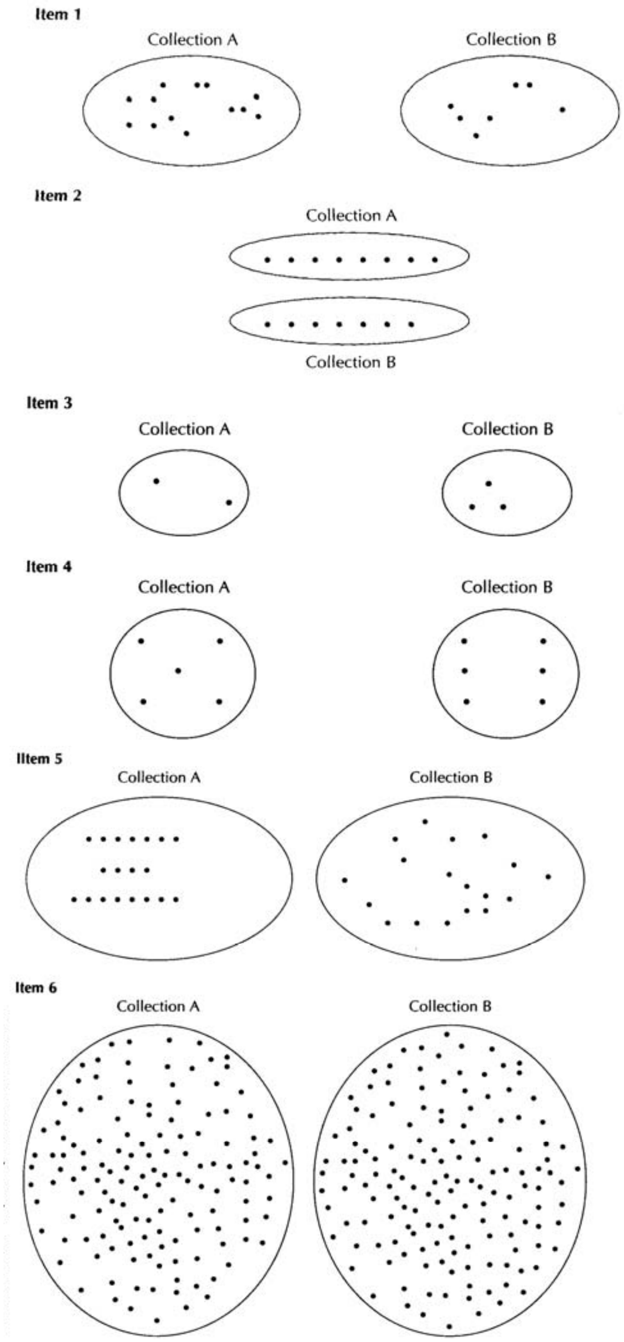
Dans cette partie, il va s'agir d'identifier différentes procédures non numériques et numériques permettant de comparer des quantités.
On considère deux collections de jetons que l'on désire comparer. Les deux collections comportent une quinzaine de jetons. Une collection est composée de jetons bleus, l'autre de jetons rouges.

1) Donner une procédure non numérique permettant de réaliser cette tâche lorsque les collections sont proches (sur une même table par exemple).

2) Donner une procédure permettant de réaliser cette tâche lorsque les collections sont éloignées (sur deux tables séparées).

3) Ci-après sont présentés six items portant sur la comparaison de collections selon leur quantité. Ces items sont donnés sur feuille. Par un jeu sur les valeurs des variables de la situation, chaque item induit une procédure de comparaison différente des autres.

   Pour chaque item, décrire la procédure de comparaison induite et expliquer quelle valeur des variables de la situation favorise cette procédure.



GROUPEMENT 1 – avril 2014

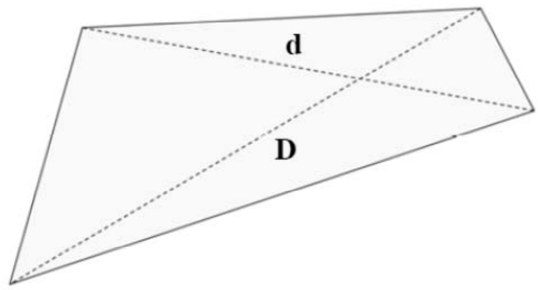
PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Dans ce problème, on s'intéresse à différentes méthodes de calcul ou d'estimation de l'aire de certains quadrilatères.

PARTIE A : Chez les Mayas

Les civilisations anciennes utilisaient divers procédés pour estimer les aires des champs. Les Mayas, par exemple, estimaient l'aire d'un quadrilatère en calculant le demi-produit des longueurs des diagonales.

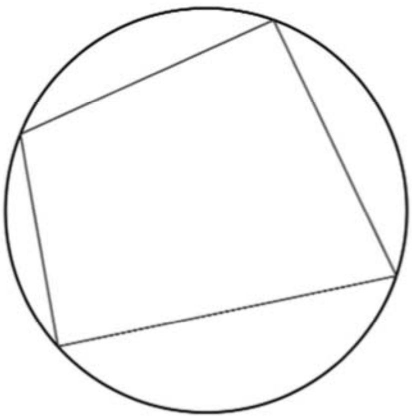
Aire $\approx \frac{D \times d}{2}$



1) Justifier que cette estimation Maya donne la valeur exacte de l'aire d'un carré de côté *a*.
2) On considère un rectangle de longueur 4 cm et de largeur 3 cm.
   La formule Maya donne-t-elle la valeur exacte de l'aire de ce rectangle ?

PARTIE B : Chez les Indiens

On dit qu'un quadrilatère est inscriptible dans un cercle si ses quatre sommets sont des points de ce cercle.
C'est le cas du quadrilatère ci-dessous.



Brahmagupta, mathématicien indien du VIIe siècle, a établi une formule donnant l'aire d'un tel quadrilatère lorsqu'il est non croisé :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

où a, b, c et d sont les longueurs des côtés du quadrilatère et p est son demi-périmètre.

1) **Étude d'une configuration particulière**

   a) Construire un cercle Γ et deux points A et C diamétralement opposés sur ce cercle.
   Placer un point B sur le cercle Γ distinct des points A et C.
   Construire le point D, symétrique du point B par rapport à la droite (AC).
   Laisser apparents les traits de construction.

   b) Justifier que le quadrilatère ABCD est inscriptible dans le cercle Γ.

c) Exprimer l'aire du quadrilatère ABCD en fonction des longueurs AB et BC en utilisant la formule de Brahmagupta. *On admettra que le quadrilatère ABCD est non croisé.*

d) Retrouver l'expression précédente de l'aire du quadrilatère ABCD par une autre méthode.

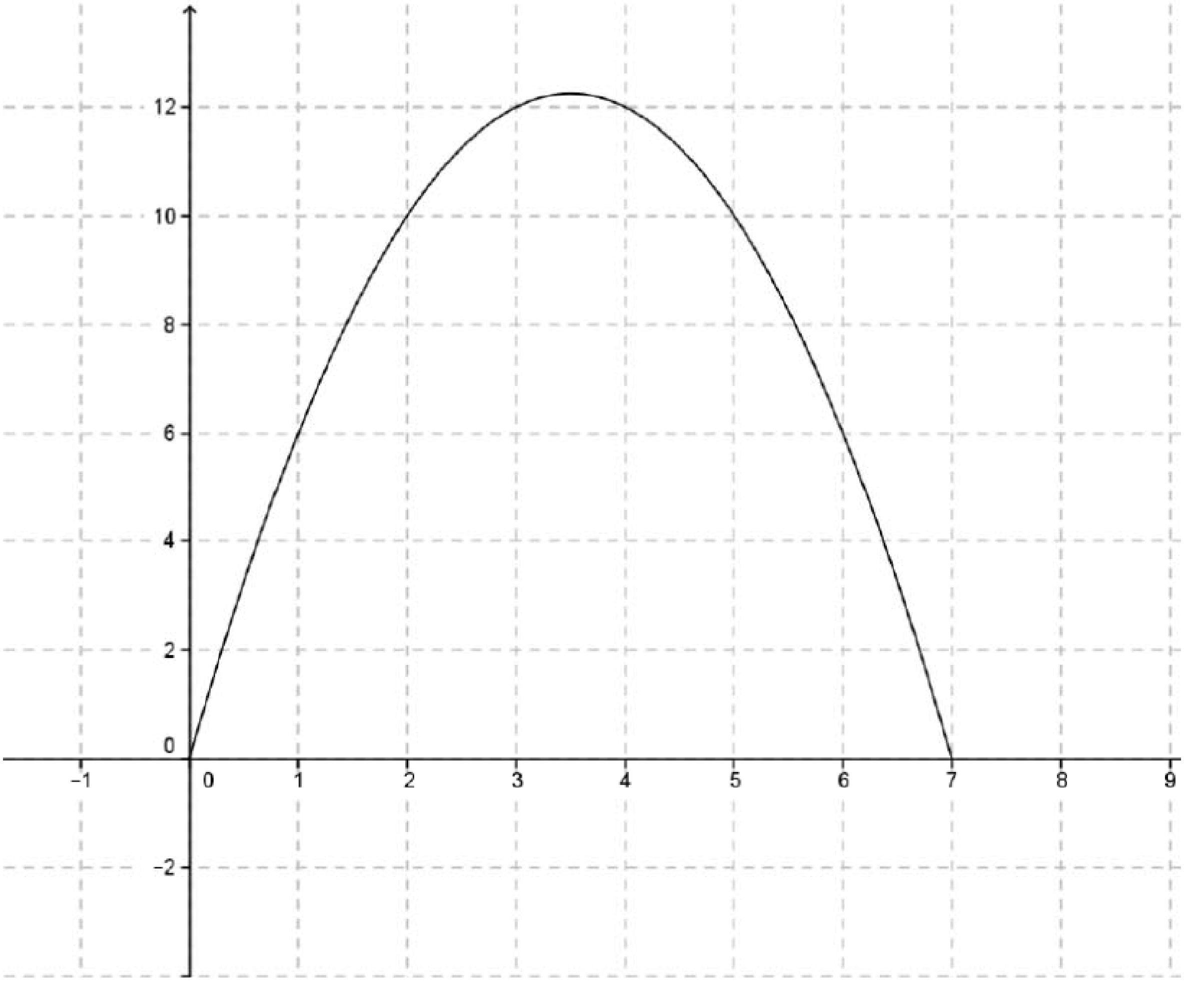
2) Étude d'une autre configuration particulière : le rectangle

a) Justifier qu'un rectangle est inscriptible dans un cercle.

b) À l'aide de la formule de Brahmagupta, retrouver l'expression usuelle de l'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur l.

PARTIE C : À l'ère du tableur

On s'intéresse à l'aire des rectangles dont le périmètre est 14 cm.
On note x la mesure en cm d'un des côtés d'un tel rectangle. La fonction A qui à x associe l'aire $A(x)$ en cm² du rectangle est représentée ci-dessous.



1) Pourquoi se limite-t-on à des valeurs de x comprises entre 0 et 7 ?

2) Étude graphique

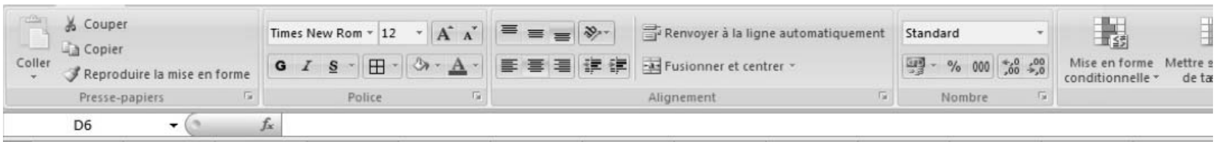
Répondre aux questions suivantes, par lecture de la représentation graphique de la fonction A.

a) Quelles sont les dimensions d'un rectangle de périmètre 14 cm et d'aire 10 cm² ?

b) Encadrer par deux nombres entiers consécutifs la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle semble maximale.

c) Encadrer par deux nombres entiers consécutifs la valeur de l'aire maximale du rectangle.

3) Poursuite de l'étude à l'aide d'un tableur



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	
2	A(x)	12	12,09	12,16	12,21	12,24	12,25	12,24	12,21	12,16	12,09	12	
3													
4													

a) Proposer une formule qui, entrée dans la cellule B2 et recopiée vers la droite, a permis d'obtenir les valeurs de A(x) sur la ligne 2.

b) À partir du tableau ci-dessus, améliorer l'encadrement de la valeur de x obtenu par lecture graphique à la question 2) b). Donner alors une estimation de la valeur de l'aire maximale.

4) Détermination des valeurs exactes

a) Justifier que pour tout x de l'intervalle [0 ; 7], on a $A(x) = \frac{49}{4} - (x - \frac{3}{2})^2$

b) Pour quelle valeur de x l'aire A(x) est-elle maximale ? Justifier.

Quelle est la valeur maximale de A(x) ?

c) Que peut-on dire du rectangle de périmètre 14 cm et d'aire maximale ?

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Le cross du collège a eu lieu. 200 élèves de troisième ont franchi la ligne d'arrivée.
Voici les indicateurs des performances réalisées en minutes.

Minimum	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Moyenne	Étendue
12,5	14,8	15,7	16,3	15,4	4,2

Répondre aux questions suivantes en justifiant.

1) Quelle est la performance en minutes du dernier arrivé ?
2) Quelle est la somme des 200 performances en minutes ?
3) Ariane est arrivée treizième. Donner l'encadrement le plus précis possible de sa performance en minutes.
4) L'affirmation suivante est-elle vraie ?
   Affirmation : Plus de 50% des élèves ont mis un temps supérieur au temps moyen.

Exercice 2

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1) **Affirmation 1 :** La somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5.
2) **Affirmation 2 :** La somme des angles d'un pentagone convexe est égale à 540°.
3) On dispose du plan d'une maison à l'échelle 1/50.
   Affirmation 3 : Les aires sur le plan sont 50 fois plus petites que les aires réelles.
4) Shéhérazade commence à lire un conte un lundi soir. Elle lit 1001 nuits consécutives.
   Affirmation 4 : Elle terminera un dimanche soir.

Exercice 3

Pour s'entraîner, un cycliste effectue un parcours aller-retour entre deux villes A et B distantes de 45 km. Il part de la ville A à 9h30 et on considère qu'à l'aller, il roule à une vitesse constante de 30 km/h. Après un repos d'une heure, il repart de la ville B et cette fois-ci rejoint la ville A à la vitesse constante de 50 km/h.

1) À quelle heure arrive-t-il à la ville B ?
2) Représenter graphiquement la distance entre le cycliste et la ville A sur l'intégralité du parcours. On placera en abscisse l'heure de la journée et en ordonnée la distance entre le cycliste et la ville A exprimée en km.
3) À quelle heure est-il de retour à la ville A ? Donner le résultat en heures et minutes.

Exercice 4

On considère un dé à quatre faces en forme de tétraèdre régulier. Ses quatre faces sont numérotées de 1 à 4. Le résultat d'un lancer est le nombre indiqué sur la face sur laquelle repose le dé.
Le dé est supposé équilibré.

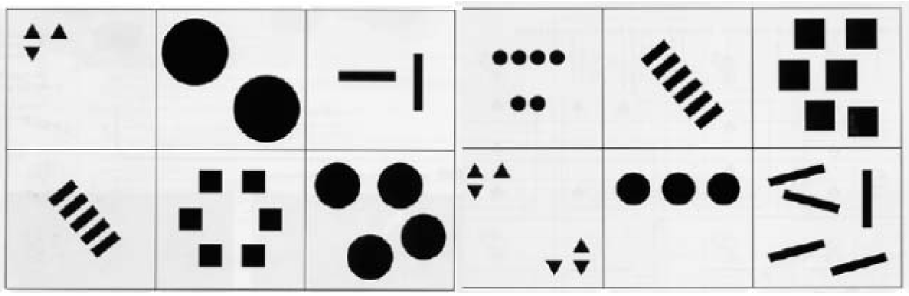
1) On a lancé le dé six fois et obtenu la série de résultats : 1 ; 2 ; 4 ; 1 ; 1 ; 2.
   Au 7^{e} lancer, la probabilité d'obtenir le nombre 1 et celle d'obtenir le nombre 3 sont-elles différentes ?
2) On lance le dé deux fois de suite.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois le nombre 1 lors de ces deux lancers ?
   b) Quelle est la probabilité que le nombre obtenu au deuxième lancer soit strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer ?

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est composée de deux exercices indépendants.

EXERCICE 1

Un enseignant propose un jeu de bataille à ses élèves de maternelle.
Il utilise un jeu de cartes représentant les nombres de 1 à 6. Voici douze cartes extraites du jeu : par exemple, la première carte (en haut à gauche) représente le nombre 3 et la dernière carte (en bas à droite) représente le nombre 5.

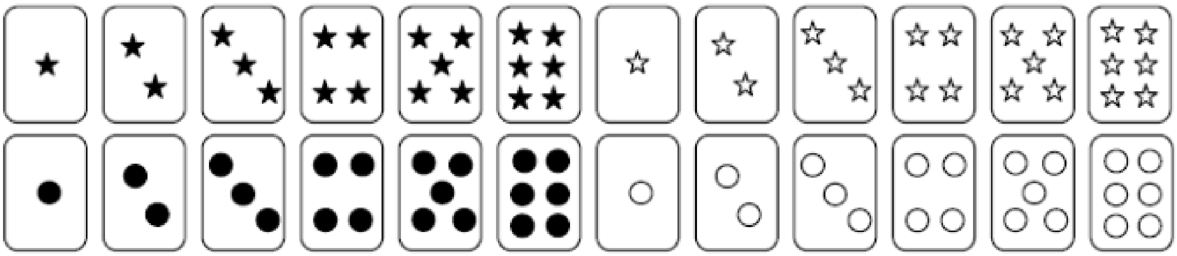


« Vers les maths, Maternelle moyenne section » p 130 et 131, Edition ACCES, 2009.

Voici la règle du jeu :

> Deux élèves s'opposent. Les cartes sont battues puis distribuées, puis chacun des deux élèves pose ses cartes, à l'envers, en tas devant lui.
> Ils retournent chacun une carte : celui dont la carte représente le nombre le plus grand remporte les deux cartes et les met sous son tas.
> En cas d'égalité, chaque élève retourne une nouvelle carte sur la table. Celui dont la nouvelle carte représente le nombre le plus grand remporte toutes les cartes retournées sur la table.
> À la fin, celui qui n'a plus de carte a perdu.
> *(On peut aussi arrêter le jeu au bout d'un certain temps et compter les cartes de chacun des deux élèves : celui qui a le plus de cartes a gagné).*

1) Citer deux compétences mathématiques travaillées par les élèves lors de ce jeu de bataille.
2) Pour chaque compétence citée en réponse à la question 1), donner deux causes possibles d'erreurs.
3) L'enseignant peut utiliser un autre jeu de cartes représenté ci-dessous :



Comparer les intérêts respectifs de chacun des jeux au regard des deux compétences citées en réponse à la question 1).

EXERCICE 2

A. En classe de CM1, un enseignant propose en application de la leçon sur les nombres décimaux les deux exercices suivants :

> **Exercice 1**
> Calcule les sommes suivantes : 0,3 + 0,8 1,3 + 0,12
> *Cadre n°1*

> **Exercice 2**
> Range dans l'ordre croissant les nombres décimaux suivants :
> 5,100 5,6 5,03
> *Cadre n°2*

1) Voici les réponses d'un élève à l'exercice 1 :

0,3 + 0,8 = 0,11 1,3 + 0,12 = 1,15 *Cadre n°3*

À partir de ces réponses, indiquer ce que cet élève semble maîtriser et ce qu'il lui reste à travailler.

2) Voici la réponse d'un élève à l'exercice 2 :

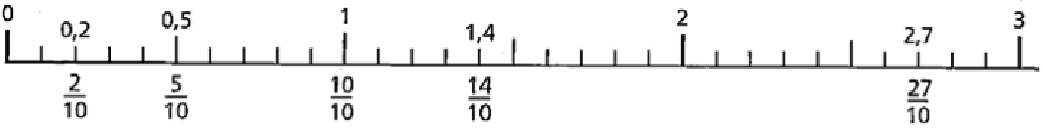
5,03 < 5,6 < 5,100 *Cadre n°4*

a) Quelle représentation erronée des nombres décimaux pourrait être à l'origine de l'erreur de cet élève ? Justifier.

b) Quelle désignation orale des nombres 5,03 ; 5,6 et 5,100 l'enseignant pourrait-il utiliser pour aider les élèves à se construire une bonne représentation des nombres décimaux ?

B. En classe de CM2, un autre enseignant propose l'exercice de réinvestissement suivant :

B Tu as appris au CM1 que la **fraction décimale** $\frac{2}{10}$ est égale au **nombre décimal** 0,2.
Observe cette droite graduée ; elle te permet de trouver les égalités entre fractions décimales et nombres décimaux.



a. Complète les égalités : $\frac{5}{10} = 0,\ldots$; $\frac{8}{10} = \ldots$; $\frac{1}{10} = \ldots$

$0,3 = \frac{\ldots}{10}$; $0,7 = \frac{\ldots}{\ldots}$; $0,9 = \frac{\ldots}{\ldots}$

Cadre n°5

Extrait du manuel « Pour comprendre les mathématiques CM2 », Hachette 2005.

1) Quelle définition d'un nombre décimal peut-on donner à l'école élémentaire ?

2) Un élève affirme que la somme de deux nombres décimaux ne pourra jamais être un nombre entier. Comment l'enseignant peut-il utiliser le support de l'exercice du *cadre n°5* pour lui apporter une réponse justifiée ?

3) Un autre élève se demande si la somme de deux nombres décimaux est toujours un nombre décimal. Quelle réponse argumentée l'enseignant peut-il lui apporter ?

4) Pour prolonger l'activité, l'enseignant demande aux élèves de placer le nombre 1,07 sur la droite graduée de l'exercice ci-dessus.
Citer deux intérêts qu'il pourrait y avoir à prolonger ainsi l'activité.

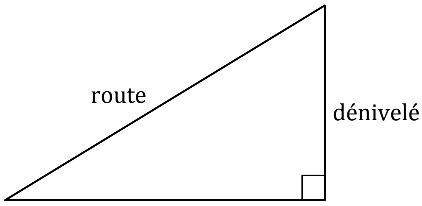
GROUPEMENT 2 – avril 2014

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

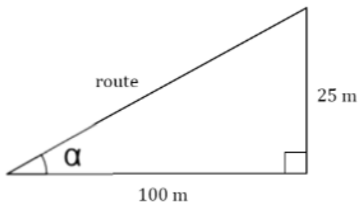
Albert part dans les Alpes Autrichiennes, dans la mythique station de ski de Kitzbühel. Suivons-le dans son périple et ses diverses activités.

PARTIE A : La montée à la station

Sur le dernier tronçon de route montant à la station en ligne droite, Albert a vu un panneau signalant une pente constante de 25%. La pente est le rapport entre le dénivelé et le déplacement horizontal (théorique).



Ainsi une pente de 25% indique un dénivelé de 25 m pour un déplacement horizontal de 100 m.



La figure n'est pas à l'échelle

On note α l'angle que la route forme avec l'horizontale. Cet angle est appelé l'inclinaison de la route.

1) Calculer, au degré près, l'inclinaison du dernier tronçon de la route empruntée par Albert.
2) Ce tronçon de route permet de s'élever de 145 m. Calculer sa longueur, au mètre près.

PARTIE B : Ski sur la Streif

Sitôt arrivé, Albert décide de dévaler la piste appelée Streif, réputée la plus difficile au monde.

Voici quelques caractéristiques de cette piste :

- Longueur totale : 3312 m
- Pente maximale : 85 %
- Pente minimale : 5 %
- Dénivelé : 862 m

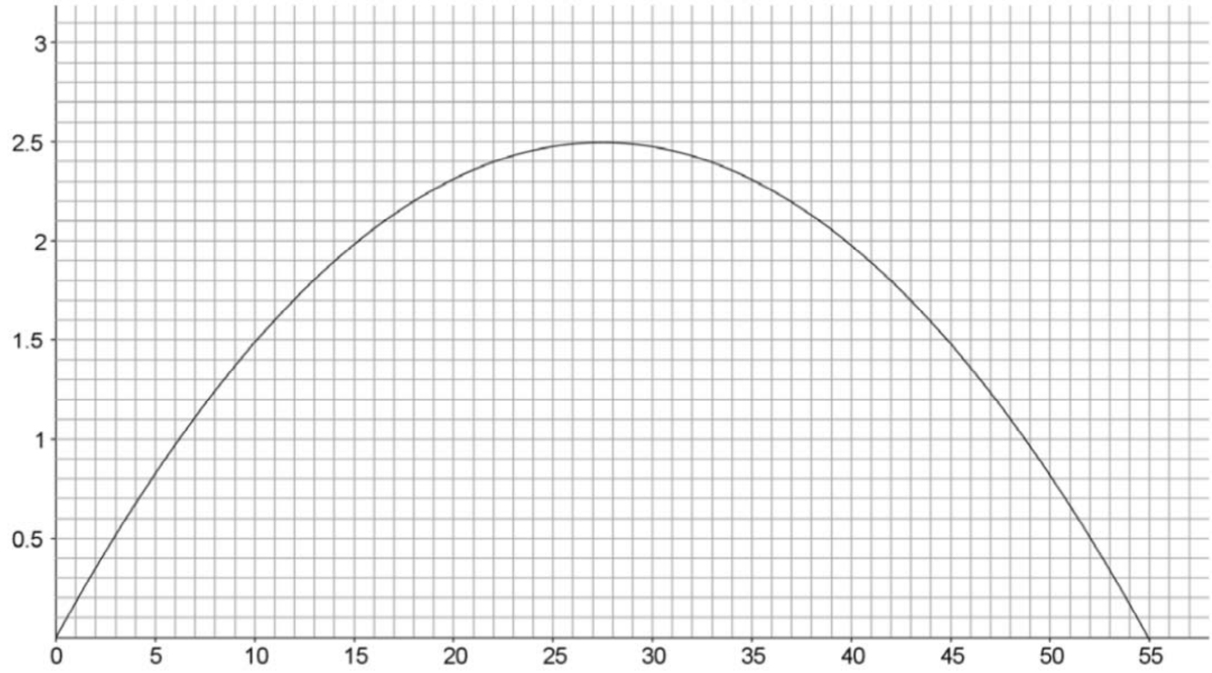
1) Albert s'élance dans la descente à 14 h 58 min 47 s et termine la descente à 15 h 03 min 08 s. Calculer sa vitesse moyenne durant cette descente, en km/h, arrondie au dixième.
2) Le meilleur skieur de la station a réalisé la descente à la vitesse moyenne de 100 km/h. S'il s'était lancé dans la descente au même instant qu'Albert, combien de temps avant lui serait-il arrivé ?

PARTIE C : Saut sur la Streif

Lors de sa descente de la Streif, Albert effectue un saut.
On admet que la hauteur du saut d'Albert par rapport au sol de la piste s'exprime en fonction du déplacement horizontal, x, par la fonction S suivante :

$$S : x \mapsto 2{,}5 - \frac{(2x-55)^2}{1210} \qquad x \text{ et } S(x) \text{ étant exprimés en mètre.}$$

1) Calculer l'image de 10 par la fonction S. Interpréter ce résultat en ce qui concerne le saut d'Albert.
2) On a tracé la courbe représentative de cette fonction S.



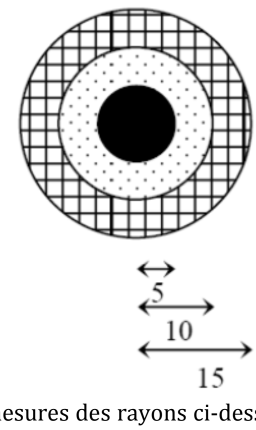
   a) Que représente, pour Albert, la valeur 55 sur l'axe des abscisses ?
   b) Déterminer graphiquement quelle a été la hauteur maximale du saut d'Albert. À quel déplacement horizontal cette valeur correspond-elle ?
3) À l'aide de l'expression de la fonction S, retrouver, par le calcul, la hauteur maximale du saut d'Albert.

PARTIE D : Tir à la carabine

Albert observe ensuite un entraînement au tir à la carabine sur une cible.
La cible est constituée de trois disques concentriques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm et 15 cm, comme schématisé ci-contre.

Un débutant touche la cible une fois sur deux.
Lorsqu'il atteint la cible, la probabilité qu'il atteigne une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1) Un tireur débutant touche la cible. Quelle probabilité a-t-il d'atteindre la couronne extérieure (partie quadrillée) ?
2) Un tireur débutant va appuyer sur la détente. Quelle probabilité a-t-il de toucher la cible et d'atteindre son cœur (partie noire) ?



Les mesures des rayons ci-dessus sont en centimètres.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

En classe de CM2, un professeur propose l'exercice suivant :

> Mathis a effeuillé des fleurs à 5 pétales en disant « j'aime les maths... un peu..., beaucoup..., passionnément..., à la folie ». Il a ôté 83 pétales en tout. Il n'est passé à la fleur suivante que lorsqu'il avait complètement effeuillé la fleur précédente.
>
> Combien de fleurs a-t-il effeuillées en totalité ? Sur la dernière fleur qu'il a effeuillée, reste-t-il des pétales ?

1) De quelle opération mathématique ce problème relève t-il ?
2) Proposer trois procédures possibles pour répondre à la question posée.

Exercice 2

Emma propose à son ami Jules de lui donner ses bonbons à la condition qu'il trouve exactement combien elle en a. Emma lui dit qu'elle a moins de 100 bonbons et que lorsqu'elle les regroupe par deux, trois, quatre, cinq ou six, il lui en reste toujours un.

1) Combien Emma a-t-elle de bonbons ? Justifier la réponse en explicitant la démarche utilisée.
2) Pour vérifier sa réponse, Jules décide d'utiliser un tableur. Pour cela, il utilise la fonction MOD (nombre ; diviseur), qui donne le reste de la division euclidienne du nombre par le diviseur.

   Jules a prévu de calculer en colonne les restes de la division euclidienne des nombres de la colonne A par 2, 3, 4, 5 et 6.

	A	B	C	D	E	F
1		2	3	4	5	6
2	1					
3	2					
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					
8	7					
9	8					
10	9					
11	10					
12	11					
13	12					
14	13					
15	14					

   a) Parmi les formules suivantes, en choisir une qui pourrait être insérée dans la cellule B2 et qui pourrait, en étant étendue vers le bas, compléter correctement la colonne B :

= MOD (1 ; 2)	= MOD (A2 ; B1)	= MOD (A2 ; 2)
= MOD (1 ; B1)	= MOD (A2 ; B$1)	= MOD (2 ; 1)

   b) Jules a rempli de la même façon le reste du tableau. Comment peut-il l'utiliser pour résoudre ce problème ?

Exercice 3

On effectue à la calculatrice les calculs ci-dessous :

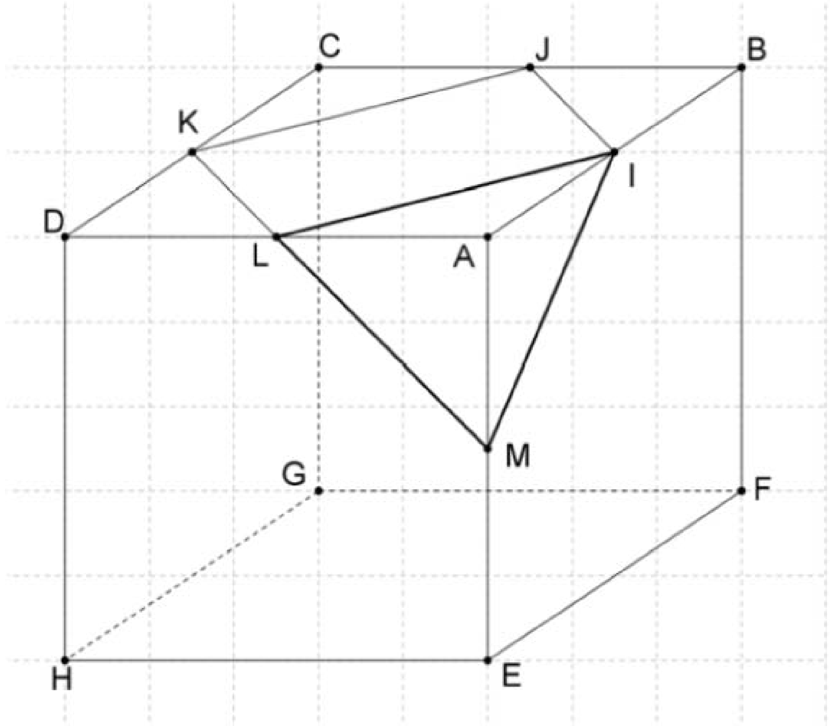
$123^2 - 122^2 - 121^2 + 120^2 = 4$

$45^2 - 44^2 - 43^2 + 42^2 = 4$

1) Tester ce résultat surprenant sur une autre série de quatre nombres consécutifs et émettre une conjecture.
2) Prouver que la conjecture faite précédemment est vraie.

Exercice 4

Soit ABCDEFGH un cube de côté 12 cm.
On note I le milieu de [AB], J celui de [BC], K celui de [CD], L celui de [AD] et M celui de [AE].



1) Démontrer que IJKL est un carré.
2) Calculer l'aire du carré IJKL (en cm²).
3) AILM est une pyramide à base triangulaire. Calculer le volume de cette pyramide (en cm3).

Rappel : volume d'une pyramide = $\frac{1}{3}$ × aire de la base × hauteur

4) On ôte au cube en chacun de ses huit sommets une pyramide identique à AILM pour créer un nouveau solide. Vérifier que le volume de ce nouveau solide est 1440 cm³.

TROISIEME PARTIE (14 points)

La proportionnalité avec des élèves de cycle 3.

Un enseignant traite la proportionnalité avec des élèves de cycle 3.

PARTIE A

L'enseignant s'interroge sur l'énoncé d'un exercice, pour lequel une phrase (notée [...]) reste à préciser :

> Pour une visite du Château de Versailles, la coopérative scolaire doit payer 105 € pour une classe de 25 élèves de CE1. Mais un groupe de 20 élèves de CE2 se joint finalement à cette classe.
> [...]
> Combien la coopérative devra-t-elle payer en tout ?

1) Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation soit sans ambiguïté une situation de proportionnalité.
2) Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation ne soit pas une situation de proportionnalité.

PARTIE B

L'enseignant propose l'institutionnalisation de la proportionnalité ci-dessous à partir de celle proposée dans le manuel « *Outils pour les maths* » - *CM1 – Magnard – édition 2011* :

On reconnaît une situation de proportionnalité lorsque le rapport entre les nombres ne change pas.

Exemple 1 : ***1 kg de pêches coûte 3 €.***

Nombre de kg de pêches	1	2	5
Prix (en €)	3	6	15

Le prix est proportionnel à la masse .
Pour trouver le prix, il faut multiplier par le même nombre (par 3).

Exemple 2 : ***4 gâteaux coûtent 6 €.***
Pour trouver le prix de 8 gâteaux, je calcule le double. → 6 × 2 = 12 €
Pour trouver le prix de 2 gâteaux, je calcule la moitié. → 6 divisé par 2 = 3 €

Exemple 3 : ***1 stylo coûte 2 €, 3 stylos coûtent 5 €, 6 stylos coûtent 6 €.***
Dans cette situation, 3 stylos ne coûtent pas **3 fois plus cher** qu'un stylo, 6 stylos ne coûtent pas 6 fois plus cher.
Cette situation n'est pas proportionnelle.

1) Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité le traitement de l'exemple 1 illustre-t-il ?
2) Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité le traitement de l'exemple 2 illustre-t-il ?
3) Dans cet extrait de manuel, l'expression « rapport entre les nombres » désigne dans le traitement des exemples 1 et 2, des coefficients jouant des rôles différents.
   Expliciter ces différents rôles.
4) Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité est utilisée dans le traitement de l'exemple 3 ? Donner une autre façon de mettre en évidence que la situation n'est pas une situation de proportionnalité, faisant appel à une autre propriété caractéristique.

PARTIE C

L'enseignant propose un autre exercice :

> Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 8 personnes, j'utilise 6 œufs.
> Quand je fais une mousse au chocolat pour 12 personnes, j'utilise 9 œufs.
> Combien faudra-t-il d'œufs si je fais une mousse au chocolat pour 20 personnes ?

Analyser les quatre productions des élèves ci-dessous, en précisant les propriétés mathématiques implicitement mobilisées.

Auriane	Emeric
Je cherche pour une personne 6 : 8 = 6 | 8 60 | 0,75 40 0 Je cherche pour 20 personnes 20×0,75 = 0,75 × 20 15,00 Il faut 15 oeufs	8 + 12 = 20 6 + 9 = 15 Il faut 15 oeufs
Nicolas	**Kévin**
8 + 12 = 20 6 + 12 = 18 Il faut 18 oeufs	Pour 8 persones, il faut 6 oeufs. Donc, pour 1 personne il en faut 8 fois moins pour 20 personnes, 20 fois plus. 6 × 20 : 8 = 6 × 20 120 120 | 8 40 | 15 0 Il faut 15 oeufs.

PARTIE D

L'enseignant propose un dernier exercice :

> Dans une ville, il y a deux médiathèques.
> Le service culturel de cette municipalité effectue un recensement des fonds d'ouvrages de chaque établissement. À cette fin, les documentalistes ont relevé les éléments suivants :
> - à la médiathèque Jean JAURÈS, on peut trouver 5000 ouvrages dont 40% de romans ;
> - à la médiathèque George SAND, on peut trouver 4000 ouvrages dont 60% de romans.
>
> Calculer le pourcentage de romans au sein du service culturel de la ville.

1) Pourquoi cet exercice s'inscrit-il dans une séquence d'apprentissage traitant de la proportionnalité ?

2) Après une phase de recherche individuelle, l'enseignant organise une phase de mise en commun.
Paul dit : « J'ai trouvé 50% parce que c'est exactement entre 40% et 60% ».

   a) Quelle erreur de raisonnement Paul commet-il ?

   b) Par quel nombre faudrait-il remplacer 5000 pour que 50% soit la bonne réponse ?
   Justifier la réponse.

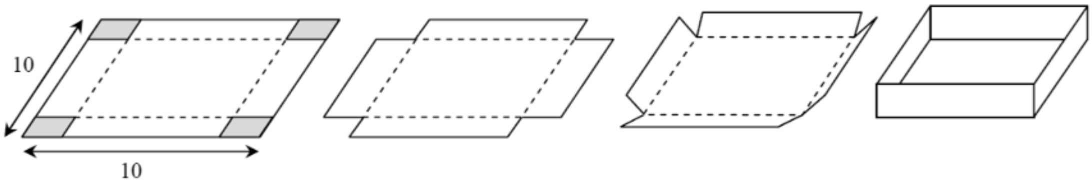
GROUPEMENT 3 – avril 2014

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

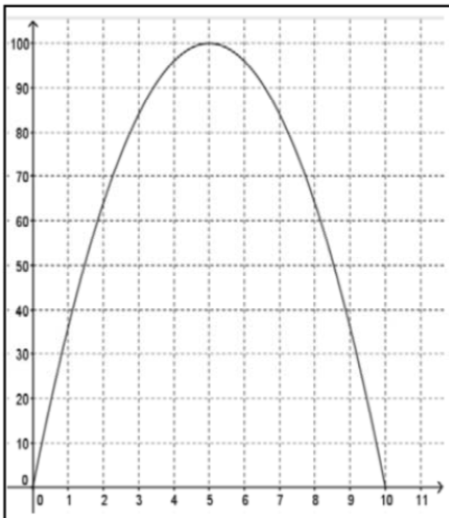
Ce problème est composé de trois parties indépendantes.

PARTIE A : Optimisation du volume d'un moule

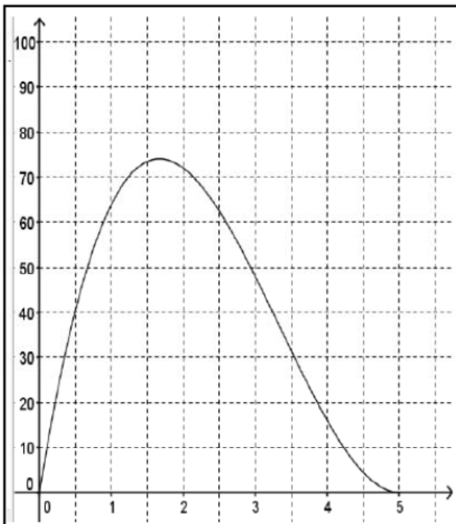
On fabrique un moule de pâtisserie (sans couvercle) dans une plaque de métal carrée de côté 10 cm en découpant un petit carré dans chaque coin puis en pliant comme suit :



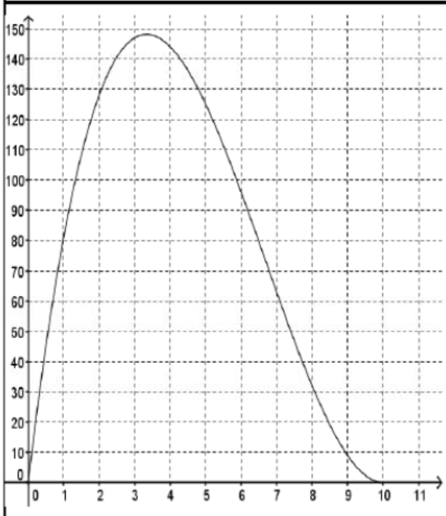
1) Parmi les quatre graphiques ci-dessous, quel est celui qui représente le volume du moule (en cm^3) obtenu en fonction de la longueur des côtés des carrés découpés (en cm) ? Justifier.



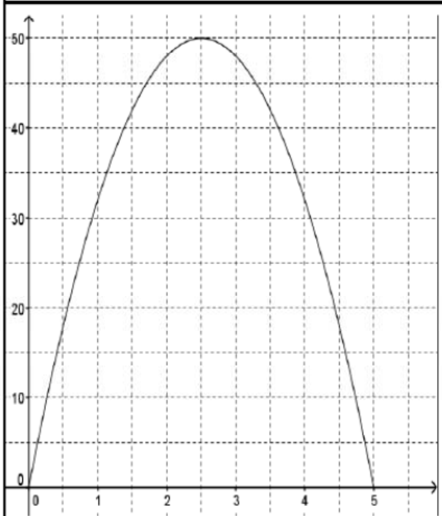
Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

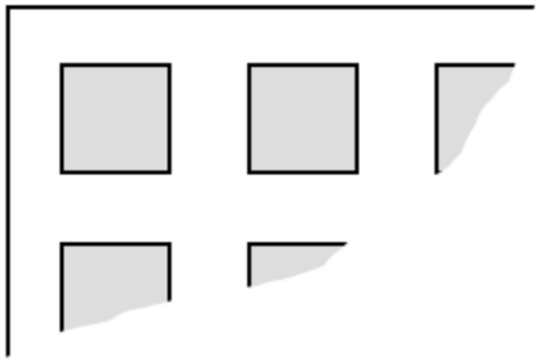


Graphique 4

2) Par lecture graphique, encadrer par deux entiers consécutifs la longueur du côté qui permet d'obtenir le volume maximal.

PARTIE B : Optimisation de la disposition des moules sur les plaques de cuisson

Les moules finalement choisis ont une forme de pavé droit de base carrée de côté 7 cm et de hauteur 1,5 cm.
Un four professionnel est composé de quatre plaques de cuisson rectangulaires de 40 cm par 70 cm. Le pâtissier veut disposer ses moules en lignes et en colonnes comme sur la figure ci-dessous en laissant au moins 1 cm entre deux moules et au moins 1 cm entre les moules et le bord des plaques.



Combien de moules pourra-t-il placer sur une plaque ? Justifier.

PARTIE C : Optimisation du coût du chocolat

Un particulier a prévu de recevoir dix-sept personnes et veut faire une ganache au chocolat.
Le pâtissier lui a donné sa recette. Voici la liste des ingrédients pour quatre personnes :
« 25 cL de crème fraîche épaisse, 1 cuillère à soupe de sucre, 50 g de beurre et 200 g de chocolat ».

1) Quelle masse de chocolat doit-il prévoir pour sa réception ?
2) Il a relevé les informations suivantes chez un commerçant :

Tablette	Chocolat Dégustation	Chocolat Saveur	Chocolat Pâtissier	Chocolat Intense	Chocolat À cuisiner
Prix d'une tablette (en €)	2,10	2,80	2,62	1,36	2,81
Quantité par tablette (en g)	150	200	200	100	200

a) Quel type de tablettes de chocolat doit-il acheter s'il veut dépenser le moins possible en achetant un seul type de tablettes ? Justifier.

b) Chez le commerçant, les tablettes de type « Chocolat Dégustation » sont en promotion avec une réduction du prix de 5%. Choisir ces tablettes devient-il plus avantageux ? Justifier.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Dans cet exercice, cinq affirmations sont proposées.
Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1) **Affirmation 1 :** Plus l'aire d'un rectangle est grande, plus son périmètre est grand.
2) Pour remplir un cube de 1 m d'arête, il faut exactement 40 sacs de ciment.
Affirmation 2 : Il faut exactement 5 sacs pour remplir un cube de 50 cm d'arête.

3) A et B sont deux nombres entiers strictement inférieurs à 100 dont les écritures à deux chiffres utilisent les mêmes chiffres dans l'ordre inverse.
   Comme, par exemple, 21 et 12 ou bien 40 et 04.
   Affirmation 3 : Le nombre A + B est divisible par 11.

4) La masse d'un ourson baisse de 30 % pendant l'hiver puis elle augmente de 30 % au printemps.
   Affirmation 4 : Finalement, à la fin du printemps, l'ourson a retrouvé la masse qu'il avait en début d'hiver.

5) Un verre est assimilé à un cône de révolution.
   Il est rempli à mi-hauteur.
   Affirmation 5 : Le volume du liquide représente le quart du volume total du verre.

Exercice 2

Voici la formule de l'énergie cinétique d'un objet :

$$E_C = \frac{1}{2} \times m \times v^2$$

dans laquelle

E_C désigne l'énergie cinétique en joule (J) ;
m désigne la masse de l'objet en kilogramme (kg) ;
v désigne la vitesse de l'objet en mètre par seconde (m/s).

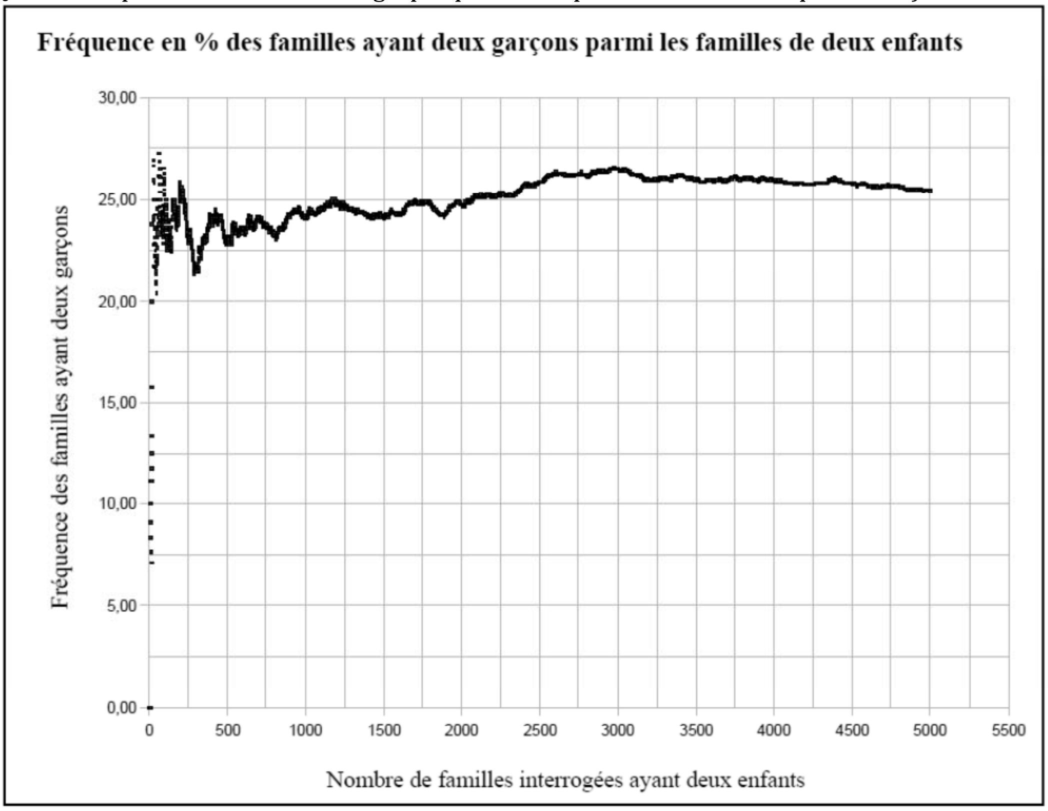
1) Calculer l'énergie cinétique en joule pour un camion d'une tonne qui roule à une vitesse de 100 km/h.

2) L'énergie cinétique est-elle proportionnelle à la vitesse ? Justifier.

Exercice 3

1) On suppose qu'un nouveau-né sur deux est un garçon.
   Calculer la probabilité d'avoir deux garçons dans une famille ayant deux enfants.

2) Une étude statistique de suivi des naissances a été menée dans une ville. On en a extrait le document suivant.
   Quels liens peut-on faire entre ce graphique et la réponse obtenue à la question 1) ?



Exercice 4

Le triathlon olympique est une discipline sportive qui consiste à enchaîner trois épreuves :

- 1re épreuve : 1,5 km de natation,
- 2e épreuve : 40 km de cyclisme,
- 3e épreuve : 10 km de course à pied.

Un entraineur de club a récapitulé les performances de ses athlètes lors d'une compétition dans la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D	E
1	BILAN DES RESULTATS DU CLUB				
2					
3		Natation	Cyclisme	Course à pied	Distance totale
4	Distances (en km)	1,5	40	10	51,5
5					
6	Tableau des temps de parcours (en minutes)				
7					
8	NOM	Natation	Cyclisme	Course à pied	Temps total sur les trois épreuves
9	Athlète 1	25	68	40	133
10	Athlète 2	27	70	41	138
11	Athlète 3	24	68	38	130
12	Athlète 4	25	72	43	140
13	Athlète 5	23	65	41	129
14	Moyenne des temps par épreuve	24,8	68,6	40,6	134
15					
16	Tableau des vitesses (en km/h)				
17					
18	NOM	Natation	Cyclisme	Course à pied	Vitesse moyenne sur les trois épreuves
19	Athlète 1	3,6	35,3	15,0	
20	Athlète 2	3,3	34,3	14,6	
21	Athlète 3	3,8	35,3	15,8	
22	Athlète 4	3,6	33,3	14,0	
23	Athlète 5	3,9	36,9	14,6	
24	Moyenne des vitesses par épreuve	3,6	35,0	14,8	
25					

1) a) Quelle formule peut-il avoir saisie dans la cellule E9 et étirée jusqu'en E13 ?

   b) Quelle formule peut-il avoir saisie dans la cellule B14 et étirée jusqu'en D14 ?

2) Quelle est la vitesse moyenne, en km/h, de l'athlète 1 sur l'ensemble des trois épreuves ?

TROISIEME PARTIE (14 points)

Analyse d'exercices proposés à des élèves et de productions d'élèves relevant de la maîtrise de la multiplication (sens et technique opératoire)

PARTIE A : en cycle 2

Dans cette partie, on considère une classe de CE1 dont tous les élèves connaissent les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5.
L'enseignant souhaite proposer les deux exercices ci-dessous et il s'interroge sur les valeurs numériques à choisir pour compléter les énoncés.

> ***Énoncé 1. Le goûter***
> *$\boxed{?}$ enfants sont réunis pour goûter. Chaque enfant reçoit 4 bonbons.*
> *Combien de bonbons a-t-on donnés ?*

> ***Énoncé 2. Les aimants***
> *Une maîtresse veut afficher des images dans la classe. Elle dispose de 36 aimants.*
> *Elle a besoin de $\boxed{?}$ aimants pour chaque image.*
> *Quel est le plus grand nombre d'images qu'elle peut afficher ?*

1) L'enseignant propose l'énoncé 1 dans un premier temps complété par « **3** enfants » puis dans un second temps complété par « **23** enfants ».
Indiquer en quoi ces deux choix sont susceptibles d'induire des procédures différentes chez les élèves.

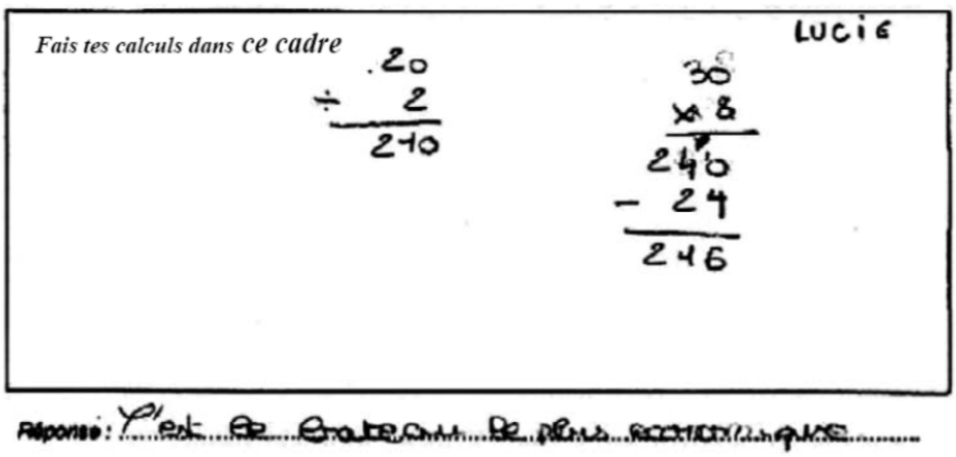
2) L'enseignant propose l'énoncé 2 dans un premier temps complété par « **4** aimants » puis dans un second temps complété par « **3** aimants ».
Indiquer en quoi ces deux choix sont susceptibles d'induire des procédures différentes chez les élèves.

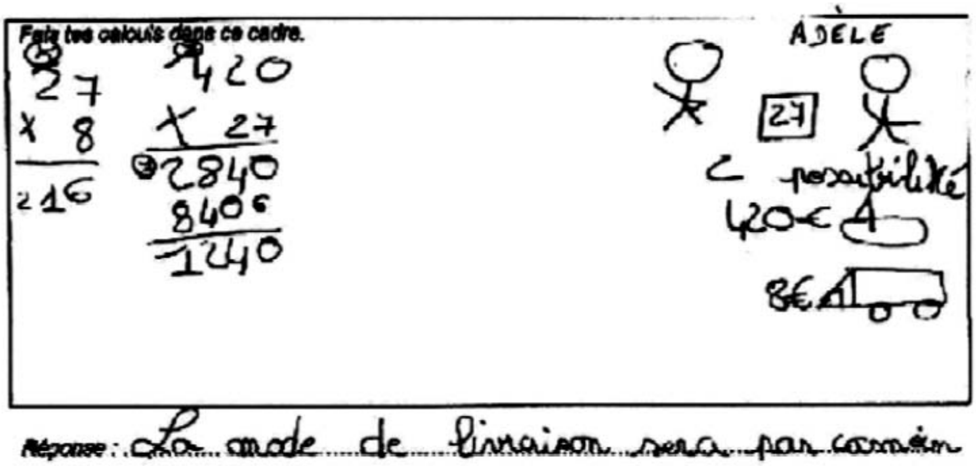
PARTIE B : en cycle 3

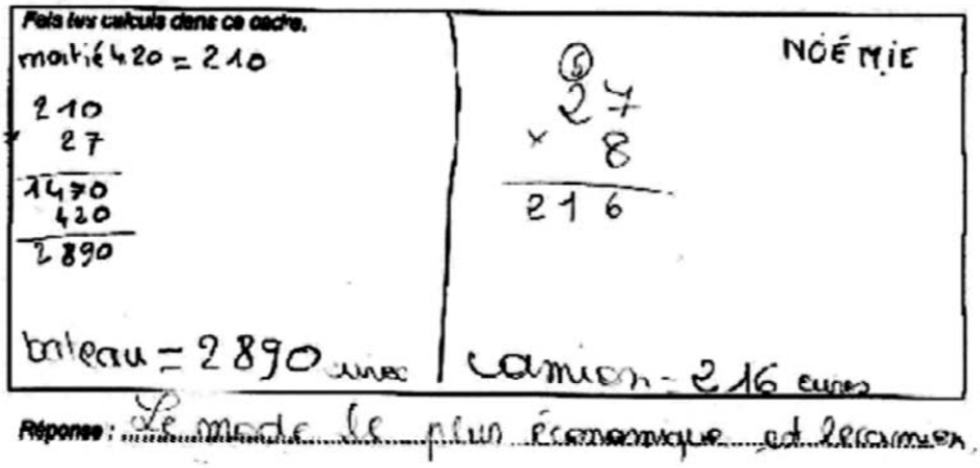
Un enseignant de Cycle 3 a donné le problème ci-dessous à ses élèves.

> *Un entrepreneur doit expédier 27 colis à un client. Il a deux possibilités pour faire livrer les colis :*
> *- par bateau, en mettant tous les colis dans un container ;*
> *- par la route, en mettant tous les colis dans un camion.*
> *Le prix du transport d'un container par bateau est 420 euros, mais l'entrepreneur sait que, s'il utilise ce mode de transport, alors il pourra partager pour moitié le coût de 420 euros avec un autre entrepreneur.*
> *Le prix du transport par camion est de 8 euros par colis.*
> *Quel mode de livraison sera le plus économique ?*

Voici les travaux de trois élèves :







1) Étude de la production de Lucie

Quelle(s) propriété(s) des opérations utilise-t-elle implicitement ?

2) Étude de la production d'Adèle

a) Indiquer trois connaissances et compétences correctement réinvesties dans le domaine de la résolution de problème ou dans celui de « nombres et calcul ».

b) Indiquer les erreurs commises.

3) Étude de la production de Noémie

a) Indiquer trois connaissances et compétences correctement réinvesties dans le domaine de la résolution de problème ou dans celui de « nombres et calcul ».

b) Indiquer les erreurs commises.

PARTIE C : « Per Gelosia »

Un maître propose à ses élèves la pratique de l'algorithme de multiplication « Per Gelosia » pour le calcul de 32×45. Il utilise la fiche de préparation reproduite sur la page suivante.

1) Retrouver le résultat par **un calcul en ligne** du produit 32×45 utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

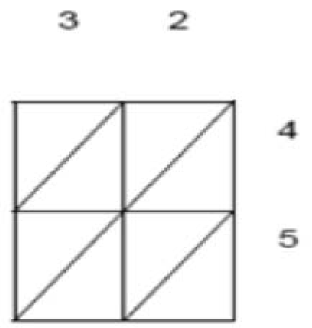
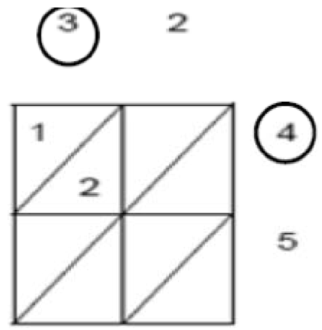
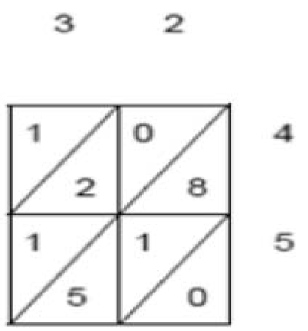
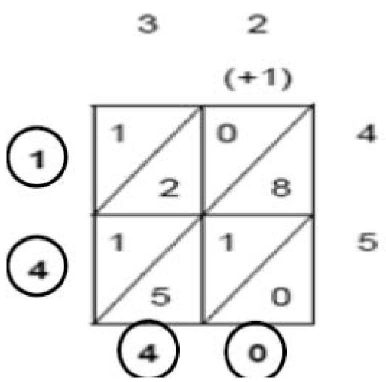
2) Expliquer pourquoi l'algorithme « Per Gelosia » garantit que le chiffre des unités de la somme $8 + 1 + 5$ est le chiffre des dizaines du produit 32×45.

3) Comment obtient-on le nombre des centaines du produit 32×45 dans le cadre de l'algorithme « Per Gelosia » ?Justifier.

4) En utilisant l'algorithme « Per Gelosia », poser et calculer 642×475.

Fiche de préparation de l'enseignant

La multiplication « Per Gelosia »

	*Dessiner un carré et placer les nombres à multiplier.*
	*Reporter dans une première case le produit des deux nombres écrits en bout de sa ligne et de sa colonne (ici 3 × 4).* *Dizaines et unités sont écrites de part et d'autre de la diagonale.*
	*Remplir toutes les cases du tableau selon le même principe.*
	*Additionner les nombres figurant sur chaque diagonale en commençant en bas à droite du carré.* *Écrire les résultats en regard à l'extérieur du tableau en recourant si nécessaire à une retenue.*

32 × 45 = 1440

CORRIGÉS DES SEPT SUJETS

MISE AU POINT À PROPOS DE LA PROPORTIONNALITÉ[1]

La notion de « proportionnalité » est très présente dans les sujets du CRPE 2014. Il nous semble important de faire une mise au point sur le vocabulaire utilisé pour parler des propriétés afférentes.

À toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire qui traduit la relation liant les deux grandeurs en présence. Cette fonction décrit et généralise la situation. De manière générique, on peut noter f cette fonction linéaire. Les deux propriétés principalement citées pour décrire une procédure ou analyser une situation sont les suivantes :

(A) $pour\ tous\ réels\ x\ et\ y\ \ on\ \ a\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
(B) $pour\ tous\ réels\ k\ et\ x\ on\ a\ f(k \times x) = k \times f(x)$

On montre, par exemple dans [simard2012] que les propriétés (A) et (B) sont des propriétés caractéristiques d'une fonction linéaire (sous réserve d'une condition de continuité de la fonction f).

La propriété (A) est communément appelée *propriété additive* ou *propriété linéaire additive.*
La propriété (B) est communément appelée *propriété multiplicative* ou *propriété linéaire multiplicative* ou encore *propriété d'homogénéité*.

La locution « propriété linéaire additive » est redondante, nous préférerons « propriété additive » pour désigner la propriété (A). Nous choisirons, de même, la locution « propriété multiplicative » pour désigner la propriété (B). Le terme mathématique « homogénéité » est moins connu du public auquel s'adresse ce document donc nous ne l'utiliserons pas.

Une situation de proportionnalité met en jeu deux grandeurs liées par un coefficient multiplicateur, on passe d'une grandeur à l'autre en multipliant par un nombre a. Ce nombre est appelé *coefficient de proportionnalité* de la situation. La fonction linéaire sous-jacente est définie par $f(x) = a \times x$. Ce nombre a a de multiples significations qu'il convient de distinguer :

- a est le *coefficient de proportionnalité* lorsque l'on considère la structure multiplicative de la situation
- a est la *valeur commune des rapports* des deux grandeurs en jeu lorsque l'on considère la situation en terme de *rapports égaux*
- a est le *coefficient* qui définit la *fonction linéaire* associée à la situation de proportionnalité lorsque l'on considère la situation d'un point de vue *fonctionnel*
- $a = f(1)$ est la *valeur de l'unité* (ou *valeur pour « un »*) lorsque l'on considère une procédure de *passage à l'unité*
- a est le *coefficient directeur de la droite représentative de la fonction linéaire* associée à la situation de proportionnalité lorsque l'on se place dans le cadre graphique. On peut également dire que a est la *pente* ou l'*inclinaison* de la droite représentative de la fonction linéaire associée.

Ces distinctions permettent d'être précis lorsque l'on décrit une procédure. Une procédure de retour à l'unité insiste sur la *valeur pour « un »*, alors qu'une procédure de recherche du coefficient de proportionnalité insiste sur le coefficient multiplicatif qui lie une grandeur à l'autre.

Le tableau de proportionnalité est un tableau de valeurs de la fonction linéaire associée à la situation. La construction d'un tel tableau relève d'une compétence d'organisation et de gestion de données. Cette structure s'avère efficace pour clarifier une situation de proportionnalité, en particulier identifier le statut des différentes données, éventuellement mieux « visualiser » des liens entre les nombres présents (correspondant à une même grandeur ou liés par la relation), et pour schématiser la procédure utilisée par l'élève. Les propriétés additive et/ou multiplicative sont généralement représentées par des flèches avec un symbole « $+$ » ou « $\times$ », le coefficient de proportionnalité par une flèche avec « $\times\, a$ » qui « fait passer » d'une grandeur à l'autre, le passage à l'unité est exprimé en ajoutant, le cas échéant, une ligne ou une colonne avec la valeur pour « un ». Un tableau de proportionnalité ne donne pas la réponse à la

[1] **Référence :**

[simard2012] Simard A., « Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique », Petit x, n° 89, 2012, 51-63 recherche d'une quatrième proportionnelle, c'est une schématisation mais pas une technique de résolution.

Remarque :

Lorsque l'élève considère l'utilisation d'un tableau comme une technique de résolution, il peut être amené à conclure que tout tableau à double entrée est un tableau de proportionnalité (ce qui est une erreur fréquente).

Finalement il semble important de faire le point sur trois procédures particulières « le passage à l'unité », « la règle de trois », et « le produit en croix ». Pour cela on se donne un exemple de situation tiré de la partie 3.C. du sujet du Groupement 2.

Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 8 personnes, j'utilise 6 œufs.
Quand je fais une mousse au chocolat pour 12 personnes, j'utilise 9 œufs.
Combien faudra-t-il d'œufs si je fais une mousse au chocolat pour 20 personnes ?

La procédure de *passage à l'unité* consiste à chercher le nombre d'œufs pour une personne puis à multiplier ce résultat par 20 pour répondre à la question. Dans cet exemple, s'il faut 6 œufs pour 8 personnes, il faut $6 : 8 = 0{,}75$ œuf par personne, et donc $0{,}75 \times 20 = 15$ oeufs pour 20 personnes.

Remarque :

- *Dans cette procédure, le premier calcul est une division, le second est une multiplication. Le résultat de la division peut être entier, décimal ou rationnel non décimal… ce qui représente une difficulté selon le niveau de l'élève,*
- *si le résultat de cette division est non décimal, l'utilisation d'une valeur approchée peut donner un résultat final approximatif et faux (par exemple : pour 3 personnes il faut 2 œufs, donc pour une personne il faut* $2 : 3 \approx 0{,}66$ *œufs donc pour 30 personnes il faut* $0{,}66 \times 30 = 19{,}8$ *œufs… au lieu de 20 œufs),*
- *le résultat de la division peut être difficile à re-contextualiser 0,75 œuf par personne n'a pas beaucoup de sens dans la réalité.*

La procédure de *la règle de trois* consiste à répondre à la question en trois temps sans faire de calculs intermédiaires.

S'il faut 6 œufs pour 8 personnes
alors il faut huit fois moins, donc $\frac{6}{8}$ œufs pour une personne
et il faut vingt fois plus, soit $20 \times \frac{6}{8} = \frac{20\times6}{8} = \frac{120}{8} = 15$ œufs pour 20 personnes.

Remarque sur le calcul du résultat :

- *Dans cette procédure, le premier calcul est une multiplication, le second est une division,*
- *le résultat de la multiplication* 20×6 *n'a aucun sens vis à vis du contexte de l'énoncé,*
- *l'utilisation de l'égalité* $20 \times \frac{6}{8} = \frac{20\times6}{8}$ *fait appel à une propriété du calcul fractionnaire,*
- *le fait de « multiplier puis diviser » peut donner des calculs plus simples que « diviser puis multiplier » (dans l'exemple cité* $\frac{20\times6}{8} = \frac{120}{8} = 15$ *est une suite de calculs dans les entiers, alors que* $20 \times \frac{6}{8} = 20 \times 0{,}75 = 15$ *nécessite un passage dans les décimaux).*

La procédure du *produit en croix* est vue au collège (programme de la classe de quatrième). Cette procédure consiste à ranger les valeurs en jeu dans un tableau (de proportionnalité) et à faire un calcul (multiplication puis division ou division puis multiplication).

$20 \times 6 : 8 = 15$

8	6
20	?

Remarque :

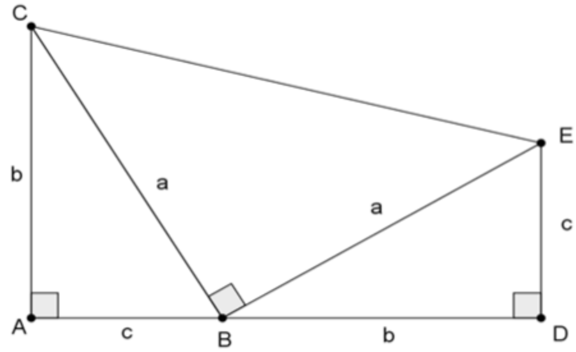
Il s'agit d'une procédure dé-contextualisée et purement technique qui masque le sens de la notion de proportionnalité. Cette procédure ne fait pas partie du programme de l'école élémentaire.

SUJET « 0 » PROPOSÉ PAR LE M.E.N.

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME

Autour du théorème de Pythagore

PARTIE A : Une démonstration



1) A, B et D sont alignés

D'après les données, les triangles rectangles ABC et BDE ont leurs cotés de même longueur, ils sont donc superposables et leurs angles sont égaux.

On a en particulier : $\widehat{ACB} = \widehat{EBD}$.

Dans le triangle ABC rectangle en A, comme la somme de ses angles vaut 180° (comme dans tout triangle), on a : $\widehat{ABC} = 180° - \widehat{BAC} - \widehat{ACB} = 90° - \widehat{ACB}$

Calculons maintenant la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$:

$\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBE} + \widehat{EBD} = 90° - \widehat{ACB} + 90° + \widehat{ACB} = 180°$

Cet angle est plat, donc **les points A, B et D sont alignés**.

2) ADEC est un trapèze

ABC est un triangle rectangle en A, (AC) est perpendiculaire à (AB).

EDB est un triangle rectangle en D, (ED) est perpendiculaire à (BD).

A, B et D sont alignés, les droites (AB) et (BD) sont confondues.

Ainsi les droites (AC) et (ED) sont perpendiculaires à une même troisième droite (AD), elles sont donc parallèles.

Le quadrilatère ACED a deux côtés [AC] et [DE] parallèles, **c'est un trapèze**.

Remarque :

Le quadrilatère ACED est un trapèze rectangle puisqu'il possède un angle droit.

3) Deux expressions de l'aire du trapèze ADEC en fonction de *a*, *b* et *c*

Pour calculer l'aire du trapèze, il est possible d'utiliser la formule donnant l'aire du trapèze ou de considérer que son aire est la somme des aires des figures qui le composent.

Calcul de l'aire de ADEC à partir de la formule donnant l'aire d'un trapèze :

La formule donnant l'aire du trapèze à partir des longueurs des deux côtés parallèles (petite base et grande base) et de la hauteur (distance entre les deux côtés parallèles) est :

$$\frac{(petite\ base + grande\ base) \times hauteur}{2}$$

Ici on a grande base : AC = b ; petite base : DE = c et hauteur : AD = $b + c$

On obtient l'expression :

$$\frac{(b + c) \times (b + c)}{2} = \frac{\boldsymbol{(b + c)^2}}{\mathbf{2}}$$

Calcul de l'aire de ADEC à partir du découpage proposé du trapèze en trois triangles :

L'aire du trapèze est la somme des aires des trois triangles rectangles ABC, CBE et BED qui le composent :

$$\frac{b \times c}{2} + \frac{a \times a}{2} + \frac{b \times c}{2} = \boldsymbol{\frac{a^2 + 2bc}{2}}$$

Rappel :

L'aire d'un triangle rectangle est la moitié de l'aire d'un rectangle.

4) L'égalité $a^2 = b^2 + c^2$:

Les deux expressions donnant l'aire du trapèze en fonction de a, b et c, sont égales, on a donc :

$$\frac{a^2 + 2bc}{2} = \frac{(b + c)^2}{2}$$

soit

$$\frac{a^2 + 2bc}{2} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc}{2}$$

Et, en simplifiant : $a^2 = b^2 + c^2$

Dans le triangle ABC rectangle en A, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

Partie B : Une application

1) Expression de la portée visuelle théorique

La droite (OV) est tangente en V au cercle (C) de centre A, elle est perpendiculaire au rayon [AV]. Le triangle OAV est donc rectangle en V.

D'après le théorème de Pythagore, dans ce triangle : $OA^2=OV^2+AV^2$

On a : $OV^2 = OA^2 - AV^2$

$OV^2 = (OM + MA)^2 - AV^2$

$OV^2 = (OM + 6370)^2 - 6370^2$

$OV^2 = OM^2 + 12740\ OM + 6370^2 - 6370^2$

$OV^2 = OM^2 + 12740\ OM$

$\mathbf{OV = \sqrt{OM^2 + 12740\ OM}}$ car OV est un nombre positif

2) Étude d'un cas particulier

L'observateur est placé au niveau de la mer et ses yeux sont situés à 1,70 m du sol. Pour utiliser l'expression précédente, il faut exprimer OM en km :

OM = 1,7 m = 0,0017 km

La portée visuelle théorique, en km, est alors : $OV = \sqrt{OM^2 + 12740\ OM}$ avec OM = 0,0017 km

$$OV = \sqrt{0{,}0017^2 + 12740 \times 0{,}0017}$$

$$OV \approx 4{,}65 \text{ km}$$

La portée visuelle théorique d'un observateur placé au niveau de la mer et dont les yeux sont situés à 1,70 m du sol est de 4,7 km (arrondi au dixième de km).

3) En utilisant la représentation graphique de la fonction f

3) a) Altitude pour avoir une portée visuelle théorique de 100 km

Sur le graphique, la portée visuelle théorique apparaît sur l'axe des ordonnées et l'altitude à laquelle se trouvent les yeux de l'observateur en abscisse. Le point de la courbe ayant pour ordonnée 100 a pour abscisse environ 0,8. On lit ainsi qu'**il faut se situer à une altitude d'environ 0,8 km, soit 800 m pour avoir une portée visuelle théorique de 100 km.**

3) b) Un observateur situé au dernier étage de la Tour Eiffel dont l'altitude est environ 350 mètres pourrait-il théoriquement voir la mer ?

350 m = 0,35 km

Sur le graphique, le point de la courbe d'abscisse 0,35 a pour ordonnée environ 60. La portée visuelle théorique d'un observateur situé au dernier étage de la tour Eiffel est environ de 60 kilomètres. **Ceci n'est pas suffisant pour voir la mer depuis Paris.**

Remarque :
D'après la question précédente, comme la mer est à plus de 100 km de Paris, il faut, pour la voir, être à une altitude supérieure à 800 m.

3) c) « Si on est deux fois plus haut sur la Terre, alors on a une vision théorique deux fois plus grande » L'affirmation est fausse.

Méthode 1 : Proposer un contre-exemple
Sur le graphique, on lit que pour une altitude de 0,2 km, on a une portée visuelle théorique d'environ 50 km. Pour une altitude double : 0,4 km, on a une portée visuelle théorique d'environ 70 km. 70 n'est pas le double de 50.

Méthode 2 : Utiliser un raisonnement par l'absurde
Si l'affirmation : « si on est deux fois plus haut alors on a une vision théorique deux fois plus grande » est vraie (pour toute hauteur), les deux grandeurs sont proportionnelles, la fonction est linéaire. Or la représentation graphique d'une telle fonction est une droite, ce qui n'est pas le cas ici donc l'affirmation est fausse.

DEUXIEME PARTIE

EXERCICE 1

Calcul de la probabilité que Suzy gagne un prix lorsqu'elle tente sa chance une fois
Si la roulette est équilibrée et les six secteurs angulaires équivalents, comme il y a cinq nombres pairs parmi les six nombres, la probabilité de tirer un nombre pair est $\frac{5}{6}$.
Dans le sac, si toutes les billes sont visibles sur l'illustration, il y a 20 billes dont 6 noires. Si les billes sont indiscernables au toucher, la probabilité de tirer une bille noire dans le sac est $\frac{6}{20}$.
Pour gagner un prix, il faut tirer un nombre pair, puis tirer une bille noire. La probabilité que Suzy gagne un prix est $\frac{5}{6} \times \frac{6}{20}$; soit $\frac{1}{4}$.

EXERCICE 2.

Nombre susceptible d'être supprimé sans modifier la moyenne des résultats
Calculons la moyenne des résultats des 15 joueurs :
$$\frac{268 + 220 + 167 + 211 + 266 + 152 + 270 + 279 + 192 + 191 + 164 + 229 + 223 + 222 + 246}{15} = 220$$
Soit N le nombre à supprimer. Il vérifie :
$$\frac{268 + 220 + 167 + 211 + 266 + 152 + 270 + 279 + 192 + 191 + 164 + 229 + 223 + 222 + 246 - N}{14} = 220$$
Or $268 + 220 + 167 + 211 + 266 + 152 + 270 + 279 + 192 + 191 + 164 + 229 + 223 + 222 + 246 = 220 \times 15$
Donc $220 \times 15 - N = 220 \times 14$
N = 220
220 figure dans la liste des résultats. C'est le nombre que l'on peut supprimer sans modifier la moyenne.

EXERCICE 3.

1) Durée de la course

Méthode 1 : Calcul de la distance

Dans un premier temps, on calcule la vitesse moyenne sur les 5 premiers kilomètres.
Le coureur a parcouru 5 km en 17 min 30 s, soit 17,5 min.
Sa vitesse moyenne en km/min a donc été :

$$\frac{5}{17{,}5} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

À cette allure, en 2 h 30 min, c'est-à-dire en 150 min, il parcourt la distance, en km :

$\frac{2}{7} \times 150 = \frac{300}{7} \approx 42{,}857$ km, c'est-à-dire plus de 42,195 km.

Le coureur dit vrai, il parcourra plus de 42,195 km en 2 h 30 min donc il mettra moins de 2 h 30 min pour parcourir les 42,195 km.

Méthode 2 : estimation de la durée de la course

À vitesse constante, si on parcourt 5 km en 17 min 30 s, en utilisant les propriétés de linéarité, on obtient :

2,5 km parcourus en 8 min 45 s	2,5 = 5 : 2	17 min 30 s : 2 = 8 min 45 s
10 km parcourus en 35 min	10 = 2 x 5	2 x 17 min 30 s = 35 min
20 km parcourus en 70 min soit 1 h 10 min	20 = 2 x 10	2 x 35 min = 70 min = 1 h 10 min
40 km parcourus en 2 h 20 min	40 = 2 x 20	2 x 1 h 10 min = 2 h 20 min

42,5 km parcourus en 2 h 28 min 45 s.
42,5 = 40 + 2,5 2 h 20 min + 8 min 45 s = 2 h 28 min 45 s

Le coureur mettrait alors moins de 2 h 30 min pour parcourir 42,195 km, il a donc raison.

Méthode 3 : Calcul de la durée pour parcourir les 5 km en supposant que le coureur dit vrai.

On cherche combien de temps mettrait le coureur pour parcourir 5 km, si il court le marathon en 2 h 30 min ; c'est-à-dire en 150 min.

Si le coureur parcourt 42,195 km en 150 min, alors il court 1 km en $\frac{150}{42{,}195}$ min

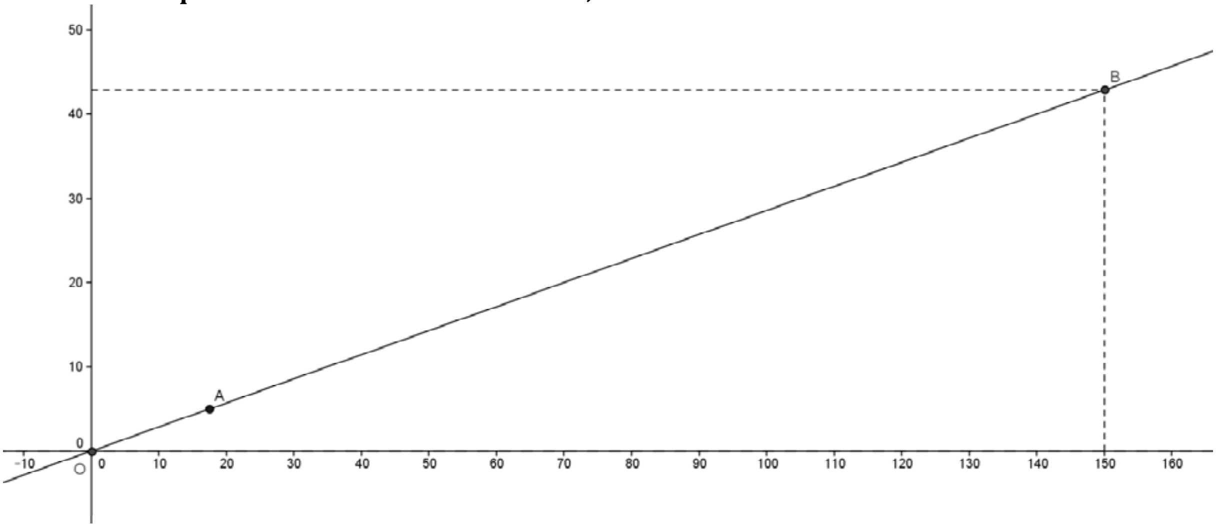
Et donc il court 5 km en $5 \times \frac{150}{42{,}195} min$, soit environ 17,7 minutes

Le coureur dit vrai puisqu'il met 17,5 minutes, durée qui est inférieure à 17,7 minutes.

Méthode 4 : Utilisation de la représentation graphique

Si l'on trace la représentation graphique de la fonction linéaire qui donne la distance en kilomètres en fonction de la durée en minutes, celle-ci est une droite passant par l'origine et par le point A de coordonnées (5 ; 17,5).
Sur cette représentation graphique, on lit l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 150 minutes (soit 2 h 30 min). Cette ordonnée est la distance parcourue en 150 minutes par le coureur. On lit environ 43 km.

On en conclut que le coureur dit vrai car 43 > 42,195



2) Durée du parcours

Pour les 20 km de la première partie du parcours, la vitesse moyenne est 16 km/h, donc la durée, en heures, pour parcourir ces 20 km est $\frac{20}{16} = 1{,}25\ h$

Soit 1 h 0,25 x 60 min = 1 h 15 min

La vitesse sur la seconde partie du parcours chute de 10 %, elle est donc, en km/h, de 16 x 0,9 = 14,4. La longueur de la seconde partie du parcours est 42,195 – 20 = 22,195 km.

La durée de la seconde partie du parcours, en h, est : $\frac{22{,}195}{14{,}4}$ h

$$\begin{aligned}\frac{22{,}195}{14{,}4}\,h = \frac{14{,}4+7{,}795}{14{,}4}\,h \quad &= 1h + \frac{7{,}795}{14{,}4} \times 60\ min \\ &= 1h + \frac{467{,}7}{14{,}4}\ min \\ &= 1h + \frac{32 \times 14{,}4 + 6{,}9}{14{,}4}\ min \\ &= 1h + 32\ min + \frac{6{,}9}{14{,}4}\ min \\ &= 1h + 32\ min + \frac{414}{14{,}4}\ s \\ &= 1h + 32min + 28{,}75\ s\end{aligned}$$

En tout, la durée du parcours en heures, minutes, secondes est :
1 h 15 min + 1h + 32min + 28,75 s = 2h 47 min 28,75 s.

EXERCICE 4

Le problème suivant a été proposé à des élèves.

> *Je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10h40.*
> *Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.*

1) Cycle et niveau de classe

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de s'appuyer sur les derniers programmes. Au cycle 2, on aborde la lecture de l'heure et les durées en se limitant aux heures et demi-heures. Cet exercice relève donc du cycle 3, où le programme précise que les élèves doivent connaitre les unités de durée (h, min, s), et savoir calculer la durée écoulée entre deux instants donnés, ce qui est le cas pour résoudre ce problème.
Ce problème pourra être proposé dès le CE2 comme un problème de recherche.
Dans les tableaux de progression, la compétence « Calculer une durée à partir de la donnée de l'instant initial et de l'instant final » est proposée pour le niveau CM2.
Cet exercice, donné comme évaluation ou exercice d'application, relève donc du CM2.

2) Analyse de productions

Nous présentons dans un tableau, pour chacun des deux élèves : la description de la procédure mise en œuvre, l'analyse des éventuelles erreurs ainsi que des hypothèses sur l'origine de ces dernières.

	Procédure	**Erreur / Analyse**	**Hypothèse sur l'origine de l'erreur**
Thomas	Calcul de la durée par soustraction : pour calculer l'écart entre l'heure de départ et l'heure d'arrivée, il soustrait l'heure de départ de l'heure d'arrivée	Erreur en traduisant neuf heures moins dix par 9 h 50 au lieu de 8 h 50	Cette erreur provient de la reprise du mot « neuf ». Cet élève ne donne pas encore de sens à l'expression « moins dix », qu'il traduit de manière automatique par « 50 minutes »
		Erreur en calculant la différence 10 h 40 – 9 h 50 Il a probablement commencé par enlever les 9 h des 10 h. Il reste alors 1 h 40.	Cette erreur est probablement due à la prégnance du système décimal chez cet élève. Il a probablement appris la technique opératoire de la soustraction avec « cassage » de dizaine (ou centaine) pour

		Pour pouvoir ensuite soustraire les 50 minutes, il convertit 1 h en 100 minutes, au lieu de 60. Il obtient alors 140 minutes, auxquelles il soustrait les 50 minutes pour trouver 90 minutes.	gérer les retenues, et il applique cette technique ici en « cassant » 1 heure en 100 minutes.
Kévin	Addition des quatre nombres présents dans l'énoncé : neuf, dix, 10 et 40 Il écrit le nombre trouvé à la suite de 9 h considérant peut-être que ce nombre désigne des minutes	Erreur de procédure	Difficile de déterminer l'origine de cette erreur car on ne dispose d'aucune information sur les conditions dans lesquelles l'élève a produit cette réponse : • niveau de classe ? • connaissances disponibles ?

TROISIEME PARTIE

I. Situation A

Le problème ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de cycle 3.

> *Énoncé A*
> *À chaque saut, une sauterelle avance de 30 cm. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?*

1) Indicateurs relatifs à la proportionnalité

Dans cet énoncé, ce qui indique que la situation est une situation de proportionnalité est la phrase « à chaque saut, une sauterelle avance de 30 cm », qui sous-entend que les sauts ont tous une longueur identique et que la longueur parcourue est proportionnelle au nombre de sauts.

Remarque :

Après avoir converti 15 mètres en 1 500 centimètres, comme la longueur d'un saut est donnée, c'est un problème de division quotition : on recherche le nombre de « parts » (les sauts), connaissant la valeur de la « part » (30 cm pour un saut).

2) a) Propriétés mathématiques de la proportionnalité mobilisées dans les procédures

L'élève E1 ne mobilise pas de propriété de la proportionnalité.
L'élève E2 a reconnu une situation qui relevait de la division euclidienne (en témoignent les traces d'une opération qui a été effacée). Le facteur 50 a été obtenu mentalement, ce qui ne permet pas de savoir comment l'élève l'a trouvé et s'il a utilisé implicitement les propriétés de la proportionnalité, ou s'il a utilisé simplement ses connaissances sur les tables de multiplication.
L'élève E3 ne trouve pas le résultat, et donne une réponse en mètres au lieu d'un nombre de sauts. Cet élève semble avoir « essayé » plusieurs opérations faisant intervenir les données de l'énoncé. Il choisit parmi les résultats celui qui lui parait le plus plausible, il choisit 20 (celui qui se trouve « entre » 15 et 30 ?). Cette procédure ne témoigne pas d'une mise en œuvre correcte des propriétés de la proportionnalité.
L'élève E4 trouve le bon résultat en utilisant correctement la propriété d'homogénéité. Il détermine successivement la distance parcourue pour 3 sauts, 10 sauts, 20 sauts, 30 sauts, 40 sauts, 50 sauts. Le passage par 20,30 et 40 peut témoigner aussi de l'utilisation de la propriété additive de linéarité (si j'ajoute 10 sauts, j'ajoute 3 mètres).

2) b) Hypothèse sur la cause des erreurs

Élève E1

Il ne trouve pas le bon résultat. Il a procédé en représentant les sauts sur un axe gradué en mètres jusque 15. Il a déterminé que 3 sauts faisaient moins d'un mètre, et quatre sauts plus d'un mètre. Il a peut-être calculé 30 + 30 + 30 = 90 (ou 30 → 60 →90) et 30 + 30 + 30 + 30 = 120 (ou 90 → 120). Ainsi, il dessine les sauts de la sauterelle en mettant 3 sauts et « un petit bout » par intervalle de 1 mètre. Il termine en comptant le nombre de sauts dessinés. Il a d'une part dessiné un saut de trop, et d'autre part, fourni une réponse erronée : 52 sauts pour 51 sauts dessinés.
Cet élève fait des **erreurs de précision** dans son dessin, car il devrait tenir compte que dans un mètre, il faut dessiner 3 sauts et un tiers de saut ou dans 3 mètres, 10 sauts... Or son dessin comporte 51 sauts. Il commet également une **erreur dans le comptage** de ses sauts, car il en dénombre 52.
Les nombres choisis dans l'énoncé, en particulier la longueur du saut qui n'est pas un diviseur de 100 (cm) ne favorisent pas la mise en œuvre de ce type de procédure.

Élève E2

Il trouve le bon résultat. Il a commencé par poser une division : 30 par 15. Devant l'invraisemblance du résultat, il a changé de procédure. Il a posé correctement la multiplication 30×50 et il a su interpréter son résultat (1500 cm sont égaux à 15 m). Toutefois, cette opération suppose d'avoir déjà déterminé le résultat cherché (50 sauts), elle en constitue une vérification et aucune information sur la manière de trouver ce nombre n'est donnée.
Cet élève a simplement fait l'erreur au départ d'effectuer la division du plus grand des deux nombres par le plus petit, sans effectuer la conversion en centimètres.

Élève E3

Ses erreurs résident dans le **choix de l'opération** et dans **les calculs**. Seule l'addition est correctement posée. Les autres contiennent des erreurs difficilement interprétables, y compris celles qui ont été effacées. La phrase réponse ne correspond pas à la question posée. Devant **l'absence d'une représentation du problème**, l'élève semble obéir à un contrat implicite : produire, dans le cadre, une opération et écrire une phrase réponse.

Élève E4

Il commet une erreur en écrivant le nombre de mètres parcourus avec 50 sauts. Mais cette erreur semble relever simplement de **l'erreur d'écriture** puisque la phrase réponse est juste. L'écriture du chiffre 3 a peut-être été déclenchée par le fait qu'il faut ajouter 3 m (pour 50 sauts, il n'y a plus de passage par les cm) ce qui confirmerait le raisonnement basé sur la propriété additive de la linéarité.

3) Utilisation de la fonction linéaire associée

D'un point de vue théorique, cette situation de proportionnalité peut être modélisée par la fonction linéaire définie par $f(x) = 0{,}3x$, où x est le nombre de sauts et $f(x)$ est la distance correspondante en mètres. Pour répondre à la question, on cherche x tel que $f(x) = 15$.
On résout alors l'équation : $0{,}3\,x = 15$, ce qui donne $x = \frac{15}{0{,}3} = 50$

Pour parcourir 15 mètres, la sauterelle doit faire 50 sauts.

Remarque :

Si la distance associée au nombre de saut est en cm, on définit : $f(x) = 30x$.
Ensuite on cherche x tel que $f(x) = 1500$
D'après l'extrait du document d'accompagnement des programmes de collège fourni en annexe1, cette procédure relève de la classe de troisième (« Modélisation et traitement à l'aide d'une fonction linéaire »).

II. Situation B

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves à l'entrée en sixième.

Énoncé B *6 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ?*

1) Indicateurs relatifs à la proportionnalité

La présence du mot « identiques » indique qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité. Toutefois, on peut relever une ambigüité dans cet énoncé. « 150 euros » est-il le prix des 6 objets ensemble, ou le prix d'un seul ? De plus, selon l'usage social, la proportionnalité est fréquente dans ce contexte, mais pas systématique, dans la détermination du prix d'un ensemble d'objets identiques. Il arrive que les lots plus importants conduisent à des rabais, que les prix soient dégressifs.

2) Ce qui différencie cet énoncé du précédent

Plusieurs différences peuvent être citées :

- Dans l'énoncé A, on dispose de la valeur de l'unité, ce qui n'est pas le cas dans l'énoncé B.
- La résolution de l'énoncé A demande des conversions d'unités de l'une des deux grandeurs, ce qui n'est pas le cas pour l'énoncé B.
- L'énoncé B ne peut pas se résoudre par l'utilisation de la seule propriété additive de linéarité, contrairement à l'énoncé A. L'énoncé B nécessite soit l'utilisation de la règle de trois (ou une procédure équivalente utilisant le coefficient de proportionnalité), soit une utilisation combinée de la propriété additive et de la propriété d'homogénéité (en passant par le prix de 3 objets par exemple).

3) Trois méthodes de résolution

On peut envisager plusieurs méthodes (trois sont demandées).

Méthode 1 : « Règle de trois »

« 6 objets coûtent 150 euros

1 objet coûte 6 fois moins $\frac{150}{6}$:

9 objets coûtent 9 fois plus : $9\times\frac{150}{6}$ =225€ »

Puis deux calculs successifs : 150 × 9 = 1350 et 1350 : 6 = 225 €

9 objets coûtent 225 €.

Méthode 2 : Recherche du coefficient de proportionnalité

Recherche du rapport entre 6 et 150 :

150 : 6 = 25

Pour obtenir le nombre correspondant à 9, il faut multiplier 9 par ce rapport et 25 × 9 = 225.

Le nombre associé à 9 est donc 225. 9 objets coûtent 225 €.

Méthode 3 : Retour à l'unité

Recherche du prix d'un objet : 150 : 6 = 25 €

Le prix d'un objet est 25 €.

Recherche du prix de 9 objets : 9 × 25 = 225 €.

9 objets coûtent 225 €.

Méthode 4 : Utilisation de la propriété d'homogénéité (ou propriété de linéarité multiplicative)

6 objets coûtent 150 euros

Comme 3 = 6 : 2, 3 objets coûtent 2 fois moins que 6 objets : 150 : 2 = 75 €

Comme 9 = 3 × 3, 9 objets coûtent 3 fois plus que 3 objets : 3 × 75 = 225 €

Méthode 5 : Utilisation combinée des deux propriétés de linéarité

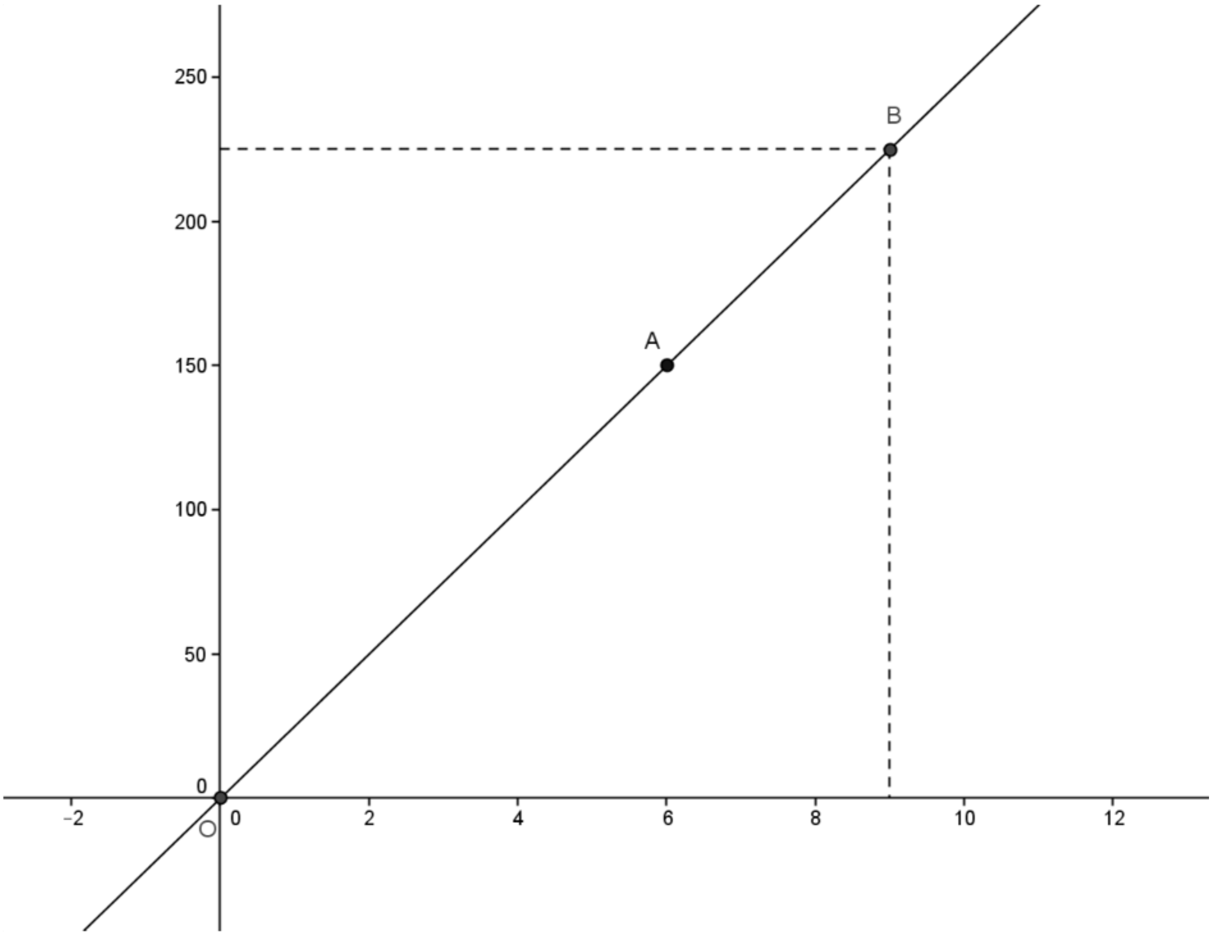
6 objets coûtent 150 euros

Comme 3 = 6 : 2, 3 objets coûtent 2 fois moins que 6 objets : 150 : 2 = 75

Comme 9 = 6 + 3, le prix de 9 objets est le prix de 6 objets plus le prix de 3 objets : 150 + 75 = 225 €

Méthode 6 : À partir de la représentation graphique

Dans un repère orthogonal d'origine O dont l'axe des abscisses est gradué selon le nombre d'objets, et l'axe des ordonnées selon le prix en euros, on place le point A de coordonnées (6 ; 150) traduisant « le prix de 6 objets est 150 euros ».
Les autres points de la représentation graphique de cette situation de proportionnalité sont alignés sur la droite (OA).
On place sur cette droite le point B d'abscisse 9.
Son ordonnée est le prix de 9 objets.
On lit 225 euros.



III. Situation C

En classe de CM2, un professeur propose le travail suivant aux élèves :

Énoncé C

Un pavé droit a pour base un carré de côté 2 cm. On fait varier sa hauteur et on s'intéresse à son volume.

a) Complète le tableau de valeurs suivant :

Hauteur du prisme droit	*2 cm*	*3cm*	*4cm*	*5cm*	*6cm*	*10cm*
Volume du prisme droit						

*b) Place sur la feuille les six points correspondant aux six colonnes du tableau. [*le *professeur a distribué une feuille de papier quadrillé sur laquelle les deux axes gradués d'un repère orthogonal ont été tracés. Sur l'axe des abscisses il a indiqué : hauteur du pavé droit, et sur celui des ordonnées : volume du pavé droit]*

c) Que constates-tu ? Vérifie avec ta règle.

1) Caractérisation de la proportionnalité mise en évidence

La caractérisation de la proportionnalité mise en évidence par ce nouvel énoncé est l'alignement des points de la représentation graphique de la fonction linéaire associée : les points dont les coordonnées sont données dans chaque colonne du tableau appartiennent à une droite et cette droite passe par l'origine du repère.

2) Relation entre la longueur du côté du carré de la base et le volume

Si le professeur avait choisi de faire varier la longueur du côté du carré de la base du pavé droit, la situation n'aurait pas été une situation de proportionnalité. En effet, la fonction modélisant alors la situation serait une fonction du type $f(x) = h \times x^2$ où x est la longueur du côté du carré et h la hauteur (fixe), fonction qui n'est pas linéaire. Sa représentation graphique serait constituée de points d'une parabole et non de points alignés sur une droite passant par l'origine.

IV. Situation D

Dans le document ressource « le nombre au cycle 3 » on trouve, au chapitre *proportionnalité*, les lignes suivantes :

> Le terme de « proportionnalité » apparaît dans les programmes 2008 [BO2008] au cycle 3 [...] mais la notion de proportionnalité est présente dans les situations mathématiques depuis la maternelle. En effet, les jeux d'échange sont déjà des problèmes relevant de la proportionnalité.
> Exemple : Une bille bleue vaut deux billes rouges. Si je te donne 3 billes bleues, combien me donnes-tu de billes rouges ?

1) Situation de proportionnalité

Ce problème est un problème de proportionnalité car le nombre de billes rouges est le double du nombre de billes bleues. Le nombre de billes rouges est proportionnel au nombre de billes bleues.

2) Procédures de résolution envisageables en Grande Section de maternelle

On peut envisager plusieurs procédures (une seule est demandée)

Procédure 1 : Appui sur le matériel

Dans le cas où l'on dispose des billes réelles, l'élève peut procéder en prenant 3 billes bleues, puis en plaçant deux billes rouges en face de chaque bille bleue. Il dénombre ensuite les billes rouges pour répondre à la question posée.

Procédure 2 : Appui sur le dessin

Si les billes ne sont pas physiquement disponibles, l'élève peut dessiner trois billes bleues, puis deux billes rouges à côté de chaque bille bleue (c'est-à-dire associer un groupe de deux billes rouges à chaque bille bleue), et dénombrer les billes rouges pour répondre à la question posée.

Procédure 3 : Appui sur les doigts, collection intermédiaire

L'élève peut utiliser ses doigts de deux façons :
- il lève trois fois deux doigts (deux doigts pour la première bille bleue, encore deux doigts pour la deuxième et encore deux doigts pour la troisième) puis il dénombre les doigts levés (6) pour répondre à la question posée.
- il lève d'abord trois doigts pour associer une première bille rouge à chaque bille bleue puis encore trois doigts pour associer une seconde bille rouge à chaque bille bleue, puis il dénombre les doigts levés (6) pour répondre à la question posée.

Procédure 4 : Appui sur des relations connues entre les nombres

L'élève peut s'appuyer sur la connaissance « le double de trois est six » (par exemple par la reconnaissance sur la constellation du six sur un dé de deux groupes de trois points, ou de trois groupes de deux points).

SUJET N°1 PROPOSÉ PAR LA COPIRELEM

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME

L'objectif de ce problème est de résoudre mathématiquement différentes situations mettant en jeu des jetons.

PARTIE A : Disposer des jetons

1) Nombre de jetons de Maxime.

Méthode 1 : Méthode algébrique.

On note N le nombre de jetons que possède Maxime. On note A le nombre de jetons constituant une ligne du premier carré. La première tentative de Maxime donne une relation entre N et A : on peut écrire le nombre N sous la forme $A^2 + 52$. La deuxième tentative donne une autre relation : $N = (A + 4)^2 - 60$

Il suffit alors de résoudre l'équation $A^2 + 52 = (A + 4)^2 - 60$

$(A + 4)^2 - A^2 = 112$

$8A + 16 = 112$

$A + 2 = 14$

$A = 12$

On en déduit alors la valeur de N : $N = 12^2 + 52 = 196$.

Méthode 2 : Méthode arithmétique.

Le nombre de jetons que possède Maxime vérifie deux conditions. Si on lui retranche 52, c'est un carré parfait et si on lui ajoute 60 c'est encore un carré parfait. On liste alors les carrés parfaits, et on essaie de trouver, dans cette liste deux carrés parfaits dont la différence est de 52 + 60 soit 112.

Les premiers carrés parfaits sont : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256…

On remarque que 256 – 144 = 112.

On en déduit que le nombre cherché peut être 144 + 52 soit 196 (ou alors 256 – 60 = 196).

Attention, cette méthode donne une solution, mais elle ne permet pas de conclure que c'est la seule solution. Pour cela, il faut un argument supplémentaire qui est : la différence entre deux carrés successifs est strictement croissante.

2) Disposition en carré des jetons de Maxime.

Maxime peut placer ses jetons en carré avec 14 jetons sur chaque côté, car $196 = 14^2$.

3) Placer 2700 jetons en carré.

Définition :

Un entier n est un carré parfait s'il peut s'écrire comme le carré d'un autre entier p

$n = p^2$.

La question peut donc se reformuler ainsi : 2700 est-il un carré parfait ?

Méthode 1 : Décomposition en produit de facteurs premiers

On décompose 2700 en produit pour faire apparaître les carrés qui le compose.

On a $2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$.

On remarque que dans la décomposition de 2700 en produit de facteurs premiers, le nombre 3 est au cube. On peut conclure que 2700 n'est pas un carré parfait, donc on ne peut pas placer 2700 jetons en carré.

Remarque :

Si n est un carré parfait, alors de l'écriture $n=p^2$, on déduit que dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n, tous les facteurs apparaissent avec une puissance paire.

Méthode 1 (bis) : Décompositions en produit

On décompose 2700 en produit pour faire apparaître le plus grand carré qui le compose.
On a $2700 = 3 \times 900 = 3 \times 30^2$.
On peut alors conclure que 2700 n'est pas un carré parfait, donc on ne peut pas placer 2700 jetons en carré.

Méthode 2 : Encadrement par des carrés parfaits consécutifs

On essaie d'encadrer 2700 par deux carrés parfaits consécutifs :
$2500 = 50^2$
$51^2 = 2601$ avec par exemple utilisation de l'identité remarquable $(a + b)^2$ appliquée à $(50 + 1)^2$
$52^2 = 2704$
On a donc : $51^2 < 2700 < 52^2$. Ceci nous permet de conclure que 2700 n'est pas un carré parfait, donc on ne peut pas placer 2700 jetons en carré.

PARTIE B : Organiser des jetons

1) Nombre de boîtes et leurs contenus

Soit respectivement b, r et j les nombres de jetons bleus, rouges et jaunes par boîte et n le nombre de boîtes (b, r, j et n sont des entiers naturels). On a donc :

$$84 = n \times b \,;\ 60 = n \times r \ et\ 48 = n \times j$$

Le nombre de boîtes doit donc être un diviseur commun à 84, 60 et 48. On en déduira le nombre de jetons par boîte. Les diviseurs communs à 84,60 et 48 sont les diviseurs de leur PGCD. On va donc dans un premier temps rechercher le PGCD de 84,60 et 48 puis chercher tous les diviseurs de ce nombre.
On décompose 84, 60 et 48 en produit de facteurs premiers.
On a $84 = 2^2 \times 3 \times 7$; $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et $48 = 2^4 \times 3$.
On en déduit PGCD(84,60,48) = $2^2 \times 3 = 12$, le nombre maximal de boîtes est 12. Les nombres possibles de boîtes sont donc les diviseurs de 12. Ainsi, on a les résultats suivants :

Nombre de boîtes	Relations numériques	Nombre de jetons bleus par boîte	Nombre de jetons rouges par boîte	Nombre de jetons jaunes par boîte
12 boîtes	$84 = 12\times7$ $60 = 12\times5$ $48 = 12\times4$	7	5	4
6 boîtes	$84 = 6\times14$ $60 = 6\times10$ $48 = 6\times8$	14	10	8
4 boîtes	$84 = 4\times21$ $60 = 4\times15$ $48 = 4\times12$	21	15	12
3 boîtes	$84 = 3\times28$ $60 = 3\times20$ $48 = 3\times16$	28	20	16
2 boîtes	$84 = 2\times42$ $60 = 2\times30$ $48 = 2\times24$	42	30	24
1 boîte	$84 = 1\times84$ $60 = 1\times60$ $48 = 1\times48$	84	60	48

Remarque :

Le cas de 1 boîte n'entraîne pas de répartition donc on peut ne pas tenir compte de ce nombre particulier de boîte.

2) a) Nombre de jetons à piocher pour être sûr d'en piocher un jaune

Pour être sûr de piocher un jeton jaune, il faut envisager le cas le plus défavorable : on peut imaginer piocher d'abord tous les jetons rouges (60) puis tous les jetons bleus (84). Cet événement sera irrémédiablement suivi du tirage d'un jeton jaune. Il faut donc piocher 145 jetons pour être sûr de piocher un jeton jaune.

2) b) Probabilité de « piocher un jeton jaune en premier »

Les tirages étant réalisés au hasard, on est en situation d'équiprobabilité et la probabilité de piocher un jeton jaune en premier est donnée par la formule $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Ici le nombre de cas favorables est 48 (nombre de jetons jaunes) et le nombre de cas possibles est :

$$(84 + 60 + 48) = 192.$$

Ainsi la probabilité d'obtenir un jeton jaune en premier est de $\frac{48}{(84+60+48)}$ soit 0,25 ou une chance sur quatre.

PARTIE C - Jouer avec les jetons bleus et rouges

1) Nombre de jetons de chaque couleur de Bernard

Méthode 1 : Méthode algébrique à une inconnue.

Soit n le nombre de jetons bleus et de jetons rouges (on sait que Bernard possède le même nombre de jetons bleus que de jetons rouges). Bernard totalise donc $(7n + 3n)$ points.
Or il a 70 points donc on cherche n tel que $7n + 3n = 70$. Ceci équivaut à $10n = 70$ ou encore $n = 7$.
Bernard possède 7 jetons rouges et 7 jetons bleus.

Méthode 1 bis : Méthode algébrique à deux inconnues.

Soit b le nombre de jetons bleus et r le nombre de jetons rouges de Bernard.
L'énoncé implique que $b = r$ (Bernard possède le même nombre de jetons rouges que de jetons bleus) et $3b + 7r = 70$ (car Bernard totalise 70 points).
On a donc $10b = 70$ et on en déduit $b = r = 7$.
Bernard possède 7 jetons rouges et 7 jetons bleus.

Méthode 2 : Méthode arithmétique.

On teste successivement les possibilités. On peut présenter la recherche sous forme d'un tableau.

Nombre de jetons bleus et de jetons rouges	Nombre de points
1	1×7 + 1×3 = 10
2	2×7 + 2×3 = 20
3	3×7 + 3×3 = 30
4	4×7 + 4×3 = 40
5	5×7 + 5×3 = 50
6	6×7 + 6×3 = 60
7	7×7 + 7×3 = 70

On remarque que le nombre de points est strictement croissant (en fonction du nombre de jetons) donc, on peut conclure que Bernard possède 7 jetons bleus et 7 jetons rouges.

Méthode 2 bis : Méthode arithmétique plus performante. (Méthode dite de fausse position)

Si Bernard possède 1 jeton rouge et 1 jeton bleu, il totalise 1×7 + 1×3 = 1×10 = 10 points.
Si Bernard possède 2 jetons rouges et 2 jetons bleus, il totalise 2×7 + 2×3 = 2×10 = 20 points.
À chaque fois que l'on ajoute un jeton bleu (et donc un jeton rouge), le total des points augmente de 10. Comme on veut atteindre 70 points, il faut augmenter de 50 points donc ajouter 5 jetons bleus et 5 jetons rouges. On en déduit que Bernard possède (2+5) jetons bleus et (2+5) jetons rouges.

2) a) Nombre de jetons de chaque couleur de Paul (méthode algébrique)

Soit b le nombre de jetons bleus et r le nombre de jetons rouges de Paul.
Paul possède 29 jetons donc $b + r = 29$.

Il totalise 159 points donc $3b + 7r = 159$.
Il s'agit de résoudre le système de deux équations à deux inconnues :
$b + r = 29$ et $3b + 7r = 159$.

Méthode 1 : Par substitution du nombre de jetons bleus

$b + r = 29$ donc $b = 29 - r$.
On remplace dans la seconde équation pour trouver :
$3 \times (29 - r) + 7r = 159$ ou encore $87 - 3r + 7r = 159$.
Ceci donne $4r = 72$ ou encore $r = 18$.
Comme $b = 29 - r$, on en déduit que $b = 11$.
Paul possède 11 jetons bleus et 18 jetons rouges.

Méthode 1 bis : Par substitution du nombre de jetons rouges

$b + r = 29$ donc $r = 29 - b$.
On remplace dans la seconde équation pour trouver :
$3 \times b + 7 \times (29 - b) = 159$ ou encore $3b + 203 - 7b = 159$.
Ceci donne $4b = 44$ ou encore $b = 11$.
Comme $r = 29 - b$, on en déduit que $r = 18$. Paul possède 11 jetons bleus et 18 jetons rouges.

Méthode 2 : Par combinaison

On multiplie par 3 chaque membre de la première équation $b + r = 29$ pour trouver $3b + 3r = 87$.
On soustrait alors membre à membre cette équation à la seconde équation. :
$(3b + 7r) - (3b + 3r) = 159 - 87$ ce qui donne $4r = 72$ ou encore $r = 18$.
Comme $b = 29 - r$, on en déduit que $b = 11$.
Paul possède 11 jetons bleus et 18 jetons rouges.

Méthode 2 bis : Par combinaison

On multiplie par 7 chaque membre de la première équation $b + r = 29$ pour trouver $7b + 7r = 203$. On soustrait alors membre à membre la seconde équation à cette équation.
$(7b + 7r) - (3b + 7r) = 203 - 159$ ce qui donne $4b = 44$ ou encore $b = 11$.
Comme $r = 29 - b$, on en déduit que $r = 18$.
Paul possède 11 jetons bleus et 18 jetons rouges.

2) b) Nombre de jetons de chaque couleur de Paul (méthode arithmétique)

Méthode 1 : Tests avec nombre croissant de jetons bleus.

On teste successivement, et de manière ordonnée, les différentes possibilités en faisant décroître le nombre de jetons rouges. On peut présenter la recherche sous forme synoptique :

Nombre de jetons rouges	Nombre de jetons bleus	Nombre total de points
29	0	29×7 + 0×3 = 203
28	1	28×7 + 1×3 = 199
27	2	27×7 + 2×3 = 195
26	3	26×7 + 3×3 = 191
25	4	25×7 + 4×3 = 187
24	5	24×7 + 5×3 = 183
23	6	23×7 + 6×3 = 179
22	7	22×7 + 7×3 = 175
21	8	21×7 + 8×3 = 171
20	9	20×7 + 9×3 = 167
19	10	19×7 + 10×3 = 163
18	11	18×7 + 11×3 = 159

Le nombre de points est une fonction décroissante du nombre de jetons rouges. On peut ainsi conclure que Paul possède 18 jetons rouges et 11 jetons bleus.

Remarque :

On peut également faire un tableau qui présente de manière exhaustive toutes les possibilités de répartition. Ce tableau aurait l'intérêt de justifier qu'il n'y a qu'une seule répartition qui totalise 159 points.
On peut également présenter une recherche en partant de 29 jetons bleus et 0 jeton rouge et faire croître le nombre de jetons rouges.
On peut également partir d'une répartition « moitié – moitié » de 15 jetons bleus et 14 jetons rouges (soit 143 points) et ensuite faire varier les nombres de jetons pour obtenir le nombre de points voulus.

Méthode 2 : Fausse position

On suppose, dans une situation initiale, que tous les jetons sont bleus. Cette répartition totalise 3×29 = 87 points, ce qui est insuffisant. Si on échange un jeton bleu contre un jeton rouge, on augmente le total de points de 4 points (7-3). Il s'agit d'augmenter de 72 points (159-87) le total initial, il faut donc échanger (72 : 4) jetons soit 18 jetons bleus contre 18 jetons rouges. On obtient alors la répartition suivante : 18 jetons rouges et 11 jetons bleus (29 – 18).

3) a) Nombre de jetons de chaque couleur de Céline

Méthode 1 : Méthode algébrique.

Soit b le nombre de jetons bleus et r le nombre de jetons rouges de Céline. On sait que $3b + 7r = 34$.

Valeur de « r »	Valeur de « b » d'après l'équation	Répartition
0	(34 – 0×7) : 3 non entier	Impossible
1	(34 – 1×7) : 3 = 9	1 rouge et 9 bleus
2	(34 – 2×7) : 3 non entier	Impossible
3	(34 – 3×7) : 3 non entier	Impossible
4	(34 – 4×7) : 3 = 2	4 rouges et 2 bleus
5	(34 – 5×7) : 3 résultat négatif…	Impossible

On remarque que le nombre de jetons rouges maximal est 4. On obtient donc les deux possibilités suivantes, Céline possède « 1 jeton rouge, 9 jetons bleus » ou alors « 4 jetons rouges, 2 jetons bleus ».

Méthode 2 : Méthode arithmétique.

Cette méthode est délicate à conduire de manière rigoureuse car on doit envisager tous les cas possibles. Nous présentons une recherche systématique résumée (on commence par regarder les différentes répartitions avec 0 jeton rouge jusqu'à obtenir un total de points supérieur à 34, puis toutes les répartitions avec 1 jeton rouge etc…).

Nombre de jetons rouges	Nombre de jetons bleus	Nombre total de points
0	0	0×7 + 0×3 = 0
0	1	0×7 + 1×3 = 3
0	2	0×7 + 2×3 = 6
…	…	…
0	12	0×7 + 12×3 = 36
1	0	1×7 + 0×3 = 7
…	…	…
1	9	1×7 + 9×3 = 34
2	0	2×7 + 0×3 = 14
…	…	…
2	7	2×7 + 7×3 = 35
3	0	3×7 + 0×3 = 21
…	…	…
3		3×7 + 5×3 = 36
4	0	4×7 + 0×3 = 28
…	…	…
4	2	4×7 + 2×3 = 34
5	0	5×7 + 0×3 = 35

On obtient les deux répartitions possibles « 1 jeton rouge, 9 jetons bleus » et « 4 jetons rouges, 2 jetons bleus ».

Méthode 2' :

On peut présenter les résultats dans un tableau à double entrée tel que celui ci-dessous construit à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G
1	nombre de jetons rouges / nombre de jetons bleus	0	1	2	3	4	5
2	0	0	7	14	21	28	35
3	1	3	10	17	24	31	38
4	2	6	13	20	27	34	41
5	3	9	16	23	30	37	44
6	4	12	19	26	33	40	47
7	5	15	22	29	36	43	50
8	6	18	25	32	39	46	53
9	7	21	28	35	42	49	56
10	8	24	31	38	45	52	59
11	9	27	34	41	48	55	62
12	10	30	37	44	51	58	65
13	11	33	40	47	54	61	68
14	12	36	43	50	57	64	71

Remarque :

*En saisissant en B2 la formule =3*$A2+7*B$1, on complète le tableau par un simple copier-coller sur les lignes et les colonnes.*

3) b) Nombre de jetons de chaque couleur de Céline (méthode graphique)

L'annexe 1 donne une représentation graphique de la droite d'équation $3x + 7y = 34$. Les abscisses sont une extension du nombre possible de jetons bleus à l'ensemble des réels (qui doit normalement être restreint aux nombres entiers naturels). Les ordonnées sont une extension du nombre possible de jetons rouges à l'ensemble des réels (qui doit normalement être restreint aux nombres entiers naturels). On cherche sur cette représentation graphique les points dont les coordonnées (abscisse ; ordonnée) sont des entiers positifs ou nuls. Les seules possibilités sont (2 ; 4) et (9 ; 1). Ceci nous permet de conclure (aux erreurs de précisions de la représentation graphique prés) que les seules répartitions possibles sont « 2 jetons bleus, 4 jetons rouges » et « 9 jetons bleus, 1 jeton rouge ».

4) Échange de 34 points

Méthode 1 : Essai – erreurs.

Pierre donne 16 jetons bleus à Jean (soit 48 points) et Jean lui rend 2 jetons rouges (14 points). Ainsi, Pierre aura donné 34 points à Jean.

Méthode 2 : Méthode algébrique.

Soit b le nombre de jetons bleus que Pierre donne à Jean et r le nombre de jetons rouges que Jean donne à Pierre. Le total de points que Pierre donne à Jean est ainsi $3b - 7r$. Il s'agit donc de trouver des couples d'entiers qui vérifient $3b - 7r = 34$. On peut commencer par circonscrire les valeurs de b aux valeurs supérieures à 12 (car 11×3 = 33 et 33 points est inférieur à 34 points).

Puis on fait des essais successifs (pour $b = 12$, aucune valeur de r ne convient, il suffit d'essayer pour $r = 0$ et $r = 1$) :

Valeur de « b »	Valeur de « r » dans l'équation	Échange
13	(3×13 – 34) : 7 non entier	Impossible
14	(3×14 – 34) : 7 non entier	Impossible
15	(3×15 – 34) : 7 non entier	Impossible
16	(3×16 – 34) : 7 = 2	Échange de 16 bleus contre 2 rouges
17	(3×17 – 34) : 7 non entier	Impossible
…	…	…
23	(3×23 – 34) : 7 = 5	Échange de 23 bleus contre 5 rouges
…	…	…
30	(3×30 – 34) : 7 = 8	Echange de 30 bleus contre 8 rouges
…	…	…

Remarque :

*Ce système de raisonnement se prête bien à l'utilisation d'un tableur. En case A1 on note 13. En case B1 on note « = (3*A1-34)/7 ». En case A2 on note « =A1+1 ». On étire successivement la colonne A jusqu'à une valeur voulue puis on étire la colonne B. Les valeurs entières dans la colonne B donne les échanges possibles de jetons (on lit le nombre de jetons bleus dans la colonne A et le nombre de jetons rouges dans la colonne B).*

Méthode 3 : Méthode graphique.

On trace la droite d'équation $3x - 7y = 34$ en se limitant au cadre $x > 12$ (sinon on obtient des valeurs de y négatives). Les abscisses sont une extension du nombre possible de jetons bleus à l'ensemble des réels (qui doit normalement être restreint aux nombres entiers naturels). Les ordonnées sont une extension du nombre possible de jetons rouges à l'ensemble des réels (qui doit normalement être restreint aux nombres entiers naturels). Et on trouve des points de cette droite dont les coordonnées sont entières.

DEUXIEME PARTIE

PARTIE A - Questions à choix multiples

1) L'isocervolant

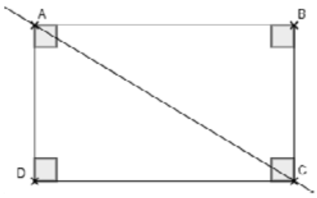
A- ABCD étant un carré, on peut affirmer que l'angle $\widehat{A}$ est droit. Par ailleurs les droites supports des diagonales d'un carré sont aussi axes de symétrie de ce carré donc la droite (AC) est un axe de symétrie de la figure. ABCD est bien un isocervolant car il en vérifie les propriétés caractéristiques.
L'affirmation A est vraie.

B- Méthode 1 : Démonstration générale

Les droites supports des diagonales d'un rectangle qui n'est pas un carré ne sont pas axe de symétrie du rectangle donc de façon générale un rectangle n'est pas un isocervolant. **L'affirmation B est fausse.**

B- Méthode 2 : Contre-exemple

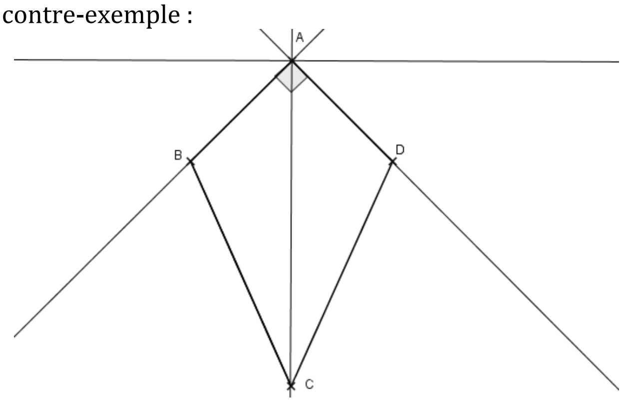
Il suffit de tracer un rectangle qui ne soit pas un isocervolant pour prouver que l'affirmation B est fausse. Dans la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle, l'angle $\widehat{A}$ est droit mais (AC) n'est pas axe de symétrie de la figure. **L'affirmation B est fausse.**



Remarque :

Il existe des rectangles qui sont des isocervolants (exemple, le carré d'après A-). La phrase "Tout rectangle n'est pas isocervolant" aurait donc été elle aussi fausse.

C- Dans un isocervolant, les angles ne sont pas forcément tous droits. Donc il suffit, pour infirmer cette affirmation, de produire un contre-exemple :



Le quadrilatère ABCD ci-dessus admet (AC) comme axe de symétrie et l'angle $\widehat{A}$ est droit, il s'agit d'un isocervolant, mais ce n'est pas un carré. En effet, les angles $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ ne sont pas droits (ou les longueurs AB et BC ne sont pas égales). **L'affirmation C est fausse.**

D- Le contre-exemple proposé pour l'affirmation C- convient également pour contredire l'affirmation D. **L'affirmation D est fausse.**

En conclusion :

A	B	C	D
V	F	F	F

2) Valeur de a

La droite (AB) est perpendiculaire à la droite (AE) et à la droite (BC) donc les droites (AE) et (BC) sont parallèles entre elles. A, E et D étant alignés, (AD) et (AE) sont confondues et donc (AD) et (BC) sont parallèles entre elles.
Le triangle DEC est isocèle en E donc $\widehat{CDE} = \widehat{DCE}$.

Méthode 1 : Calcul basé sur l'angle $\widehat{CED}$

La droite (EC) étant sécante aux droites (AD) et (BC) et ces deux droites étant parallèles, les angles alternes-internes $\widehat{ECB}$ et $\widehat{CED}$ sont égaux et donc $\widehat{CED} = \widehat{ECB} = 4a$ (en degré).
La somme des mesures des angles d'un triangle, en degré, est égale à 180 donc, dans le triangle EDC on a : $a + 4a + a = 180$ d'où $6a = 180$, soit $a = 30$ (en degré).

Méthode 1' : Autre calcul de la mesure de l'angle $\widehat{CED}$.

Dans le quadrilatère convexe ABCE, la somme des mesures des angles, en degré, est 360 et les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{CBA}$ ont pour mesure, en degré, 90. On en déduit que $\widehat{AEC} = 360 - 90 - 90 - 4a = 180 - 4a$ (en degré).
Les points A, E et D sont alignés dans cet ordre donc l'angle $\widehat{AED}$ a pour mesure 180 (en degré) et on a $\widehat{AEC} + \widehat{CED} = \widehat{AED}$. On en déduit $\widehat{CED} = \widehat{AED} - \widehat{AEC}$ donc $\widehat{CED} = 180 - (180 - 4a) = 4a$ (en degré).
La somme des mesures des angles d'un triangle, en degré, est égale à 180 donc, dans le triangle EDC on a : $a + 4a + a = 180$ d'où $6a = 180$, soit $a = 30$ (en degré).

Méthode 2 :

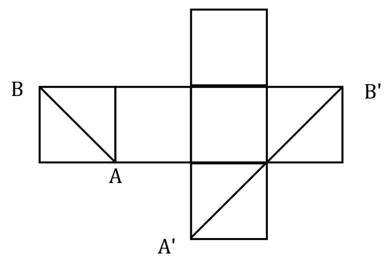
Considérons un point B' appartenant à (CB) mais n'appartenant pas à [CB]. La droite (EC) étant sécante aux droites (AD) et (BC) et ces deux droites étant parallèles, les angles alternes-internes $\widehat{EDC}$ et $\widehat{DCB'}$ sont égaux et donc $\widehat{DCB'} = \widehat{EDC} = a$ (en degré). L'angle $\widehat{BCB'}$ étant plat, il a pour mesure, en degré, 180. On a alors $\widehat{BCB'} = \widehat{BCE} + \widehat{ECD} + \widehat{DCB'} = 180$ et donc $4a + a + a = 180$ soit $a = 30$ (en degré).

En conclusion :

A	B	C	D
F	V	F	F

3) Patrons d'un cube

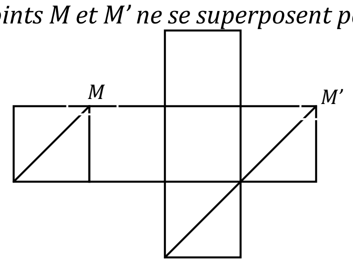
Patron C



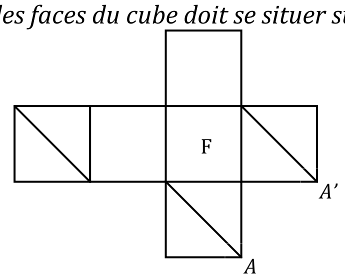
Après pliage, les points A et A' vont se superposer de même que les points B et B' et on retrouve pour ce patron C, le développement du cube initial (avec respect de l'orientation des diagonales). Comme l'énoncé indique qu'un seul des patrons correspond à celui du cube proposé, seul le patron C convient.

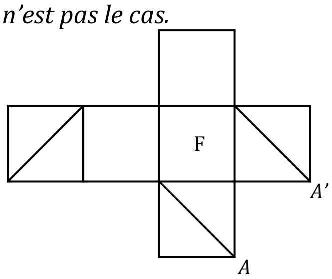
Remarque :

Avec le patron A, après pliage, les points M et M' ne se superposent pas.



Avec les patrons B et D, après pliage, les points A et A' se superposent, donc le troisième côté du triangle dessiné sur les faces du cube doit se situer sur la face F, ce qui n'est pas le cas.



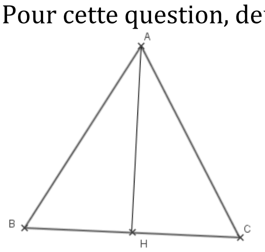


En conclusion :

A	B	C	D
F	F	V	F

4) Autour d'un triangle équilatéral…

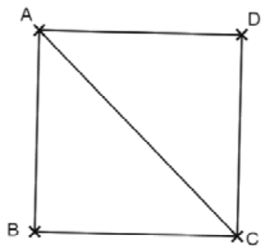
Pour cette question, deux résultats sur des configurations de base seront utilisés :



ABC étant un triangle équilatéral de longueur de côté a et (AH) la hauteur issue de A, on a d'après le théorème de Pythagore dans le triangle AHB, rectangle en H : $AH^2 + HB^2 = AB^2$.Comme (AH) est aussi la médiatrice issue de A dans le triangle ABC, elle coupe [BC] en son milieu et on a donc :

$AH^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ d'où $AH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

soit $AH^2 = \frac{3}{4}a^2$ ou encore $\boxed{AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a.}$



Dans un carré ABCD, de longueur de côté a, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC, on obtient :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ d'où $AC^2 = a^2 + a^2$et ainsi $AC^2 = 2a^2$.

On en déduit $\boxed{AC = a\sqrt{2}.}$

A- Méthode 1 : Calcul de EM en fonction de a

Dans le triangle EMF, rectangle isocèle en M, on a d'après les rappels précédents, $EF = EM\sqrt{2}$ d'où $EM = \frac{EF}{\sqrt{2}}$ soit $EM = \frac{\sqrt{2}EF}{2}$ et ainsi $EM = \frac{\sqrt{2}a}{2}$. **L'affirmation A est fausse.**

A-Méthode 2 : Raisonnement par l'absurde

On suppose que $EM = a\sqrt{2}$, alors, par le rappel précédent, $EF = EM\sqrt{2} = a\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2a$ ce qui est faux. Ainsi **l'affirmation A est fausse**.

B- L'aire du triangle EMF est égale à $\frac{EM \times MF}{2}$ soit $\frac{\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2}{2}$ soit $\frac{a^2}{4}$. **L'affirmation B est vraie.**

C- L'aire A du triangle EFG est égale à $\frac{EH \times FG}{2}$ où H est le pied de la hauteur issue de E dans le triangle EFG. Le rappel précédent donne la mesure de la hauteur d'un triangle équilatéral en fonction de la mesure de son côté, on obtient donc : $A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a \times a}{2}$ soit $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
L'affirmation C est fausse.

D- Par construction les triangles AMF, FNG et GPE sont isométriques. Les longueurs des côtés de l'hexagone EMFNGP sont toutes égales à EM. La méthode 1 vue lors de l'examen de l'affirmation A donne $EM = \frac{\sqrt{2}a}{2}$. Le périmètre de l'hexagone est égal à $6 \times EM$, soit $6 \times \frac{\sqrt{2}a}{2}$, soit $3a\sqrt{2}$.

L'affirmation D est vraie.

En conclusion :

A	B	C	D
F	V	F	V

5) Pyramides

Rappel : Dans un agrandissement ou une réduction de rapport *k,* les longueurs sont multipliées par *k,* les aires par k^2 et les volumes par k^3.

A- Les points I, J, K et L sont respectivement les milieux des arêtes [SA], [SB], [SC] et [SD] donc le quadrilatère IJKL est une réduction dans le rapport $\frac{1}{2}$ du quadrilatère ABCD. Autrement formulé, ABCD est un agrandissement de IJKL dans le rapport 2 et ainsi l'aire de ABCD est égale à quatre fois l'aire du quadrilatère IJKL. **L'affirmation A est vraie.**

B- En raisonnant de même, l'aire du triangle SIJ est égale au quart de l'aire de SAB. Or l'aire de IJBA s'obtient en soustrayant l'aire de SIJ à celle de SAB donc l'aire de IJBA est égale aux trois-quarts de l'aire de SAB. **L'affirmation B est fausse**.

C- $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ donc le volume du solide SIJKL est égal au huitième du volume du solide SABCD.
Le volume de ABCDIJKL s'obtient en soustrayant du volume de SABCD le volume de SIJKL. On a donc :
$V_{ABCDIJKL} = \left(1 - \frac{1}{8}\right)V_{SABCD}$ soit $V_{ABCDIJKL} = \frac{7}{8}V_{SABCD}$ d'où $\frac{8}{7}V_{ABCDIJKL} = V_{SABCD}$
Le volume de la pyramide SABCD est donc bien égal aux huit septièmes du volume du solide ABCDIJKL. **L'affirmation C est vraie.**

D- D'après le rappel effectué, le volume de la pyramide SABCD est égal à huit fois celui de la pyramide SIJKL. **L'affirmation D est fausse**.

En conclusion :

A	B	C	D
V	F	V	F

6) Quadrilatères particuliers

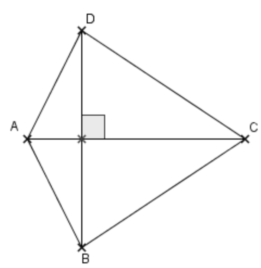
A- Méthode 1 : Démonstration générale

Les diagonales d'un tel quadrilatère peuvent ne pas se couper en leur milieu, et ainsi le quadrilatère peut ne pas être un losange.

Méthode 2 : Contre-exemple

Il suffit de proposer un contre-exemple pour infirmer l'affirmation.

Les diagonales du quadrilatère convexe ABCD sont perpendiculaires mais ABCD n'est pas un losange. **L'affirmation A est fausse.**



B- Tout parallélogramme a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. Si de plus elles sont perpendiculaires alors le quadrilatère est un losange. **L'affirmation B est vraie.**

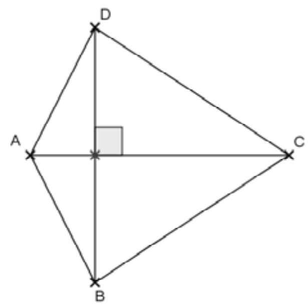
C- Tout quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu est un losange, c'est une propriété caractéristique des losanges. **L'affirmation C est vraie**.

D- Méthode 1 : Démonstration générale

Les diagonales d'un tel quadrilatère peuvent ne pas se couper en leur milieu et ainsi le quadrilatère peut ne pas être un losange.

D- Méthode 2 : Contre exemple

Le quadrilatère ABCD ci-dessous a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur mais ce n'est pas un losange.



L'affirmation D est fausse.

En conclusion :

A	B	C	D
F	V	V	F

PARTIE B : analyse de production d'élèves sur les décimaux

1) Questions concernant l'exercice de Jeanne et Tiago.

1) a) Connaissance et compétence

Dans "Les progressions pour le cours élémentaire" qui accompagne les programmes en vigueur (B.O. Juin 2008), on peut lire en CM1 pour les nombres décimaux "passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement". C'est dans le cas d'une fraction décimale pour A et B et d'une « fraction simple » pour C.

1) b) Représentation du lien entre écriture à virgule et écriture fractionnaire

Dans les deux cas il y a confusion entre l'utilisation de deux symboles : la barre de fraction et la virgule. Dans le cas A, l'erreur peut provenir du fait que l'élève pense qu'une autre écriture d'un nombre doit comporter les mêmes chiffres que l'écriture initiale et uniquement ceux-là. Comme l'écriture $\frac{6}{02}$ n'a jamais dû être rencontrée par l'élève, celui-ci propose l'écriture $\frac{60}{2}$.

Dans le cas B, on peut penser que l'élève assimile, à tort, la virgule à la barre de fraction.

1) c) Absence de réponse

On peut noter que Tiago propose des réponses correctes aux deux premières questions pour lesquelles la fraction à sélectionner (A) ou proposée (B) comportent un dénominateur écrit sous forme de puissance de 10. La virgule ayant pu être représentée comme un séparateur entre l'unité et les fractions de l'unité (dixième, centième...). Tiago a sans doute bien compris ce code et est capable de "passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement" dans le cas d'une fraction décimale. Le seul changement dans la question C réside dans la nature de la fraction qui n'est pas présentée avec un dénominateur écrit sous forme de puissance de 10. Pour ces fractions non décimales, Tiago n'a peut-être pas construit le sens de la barre de fraction et se montre incapable d'en produire une autre écriture comportant une virgule.

1) d) Connaissances à retravailler avec Jeanne

Au regard de sa production, il faudra sûrement retravailler avec Jeanne le sens des fractions simples ainsi que la numération décimale.

Il est possible que Jeanne ait rencontré l'égalité $\frac{1}{10} = 0{,}10$ et qu'elle l'étende à $\frac{1}{4} = 0{,}4$.

Il faudra retravailler avec elle la signification des codes portés par la virgule et la barre de fraction (comme en attestent aussi ses réponses aux questions A et B).

2) Réponses argumentées d'élèves à qui il est demandé de calculer : 23,45 ×10

2) a) Règle utilisée par Samia et Julien

Samia « écrit un zéro à la droite du nombre » quand elle multiplie par 10 : elle semble appliquer la règle parfois nommée "règle des zéros" énoncée de la façon suivante "pour multiplier un nombre par 10, on ajoute un zéro à droite du nombre". Cette "règle" a un domaine de validité restreint à l'ensemble des nombres entiers, ce qui conduit Samia à une erreur.

Julien, quant à lui écrit un zéro à la droite de chaque partie du nombre, située de chaque côté de la virgule. Il multiplie chacune des deux parties du nombre séparées par une virgule par 10.

2) b) Erreur et représentation des décimaux chez Samia et Julien

Ces deux élèves ne conçoivent pas un décimal comme un « nouveau nombre ». L'erreur commise est une généralisation abusive aux décimaux d'une technique correcte dans l'ensemble des nombres entiers.

Pour Samia, un nombre décimal semble considéré comme un entier. La virgule est ignorée.

Pour Julien, un nombre décimal semble considéré comme étant constitué de deux entiers accolés. La virgule sert à les séparer et il les traite séparément.

TROISIEME PARTIE

PARTIE A - Analyse d'un premier énoncé de problème et de productions d'élèves

1) Implicites de l'énoncé

Nous pouvons préciser l'énoncé de la manière suivante :

- tous les livres sont les mêmes
- le libraire emballe les livres un par un avec la même longueur de papier pour chaque livre
- on suppose que le libraire possède un rouleau de papier de largeur constante et qu'il découpe à chaque fois le même rectangle de papier pour emballer un livre.

Remarque :

Pour traiter cette question il faut identifier « l'invariant » qui caractérise la proportionnalité, c'est-à-dire :

- *« tous les livres sont les mêmes » définit l'unité ;*
- *« un par un avec la même longueur de papier » : élément invariant qui détermine le coefficient.*

2) a) Fonctions linéaires sous-jacentes

La fonction (notée « f ») qui au nombre de livres (noté « x ») fait correspondre le métrage de papier (noté « $f(x)$ ») est $f(x) = 0{,}4 \times x$.

La fonction (notée « g »), qui au nombre de mètres de papier (noté « y ») donne le nombre de livres maximum (noté « $g(y)$ ») que l'on peut emballer est $g(y) = 2{,}5 \times y$.

Remarque :

Ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre ce qui signifie que $f(g(y)) = y$ et $g(f(x)) = x$.

2) b) Réponse aux questions a, b et c en utilisant les fonctions f et g

Réponses aux questions a, b et c en utilisant la fonction f.

Question a)
Il s'agit de trouver le nombre « x » de livres tel que $f(x) = 14$.
Ainsi doit-on résoudre l'équation $0{,}4 \times x = 14$, soit $x = \frac{1{,}4}{0{,}4} = 35$.
Avec 14 m de papier on peut emballer 35 livres.
Question b)
Le nombre de livres est $x = 50$. On a $f(50) = 0{,}4 \times 50 = 20$.
Il faut 20 mètres de papier pour emballer 50 livres
Question c)
Il s'agit de trouver le nombre « x » de livres tel que $f(x) = 6$.
Ainsi doit-on résoudre l'équation $0{,}4x = 6$, soit $x = \frac{6}{0{,}4} = 15$.
Avec 6 mètres de papier, on peut emballer 15 livres.

Réponses aux questions a, b et c en utilisant la fonction g.

Question a)
Le nombre de mètres de papier est $y = 14$. On a $g(14) = 2{,}5 \times 14 = 35$.
Avec 14m de papier on peut emballer 14 livres.
Question b)
On cherche le nombre « y » de mètres de papier tel que g(y) = 50.
Ainsi on doit résoudre $2{,}5y = 50$, soit $y = \frac{50}{2{,}5} = 20$.
Il faut 20 mètres de papier pour emballer 50 livres
Question c)
Le nombre de mètres de papier est $y = 6$. On a $g(6) = 2{,}5 \times 6 = 15$.
Avec 6 mètres de papier, on peut emballer 15 livres.

Remarque :

Il est naturel d'utiliser la fonction g pour les questions a et c et la fonction f pour la question b.
Pour les questions a) et c) la longueur de papier est donnée et on cherche le nombre de livres, c'est donc la fonction g qui fournit les images cherchées alors que pour la question b), le nombre de livres étant donné, c'est la fonction f qui fournit l'image correspondante.

3) a) Analyse de la production de Laurène

Pour la question a) :
Laurène utilise, de manière implicite, la propriété additive de linéarité de la fonction g. Sa procédure peut être analysée de ma manière suivante :
$g(14) = g(10 + 4) = g(10) + g(4) = 25 + 10 = 35$.
Pour la question b) :
Laurène utilise en acte la propriété additive de linéarité de la fonction f.

$$f(50) = f(10 + 10 + 10 + 10 + 10) = f(10) + \cdots + f(10) = 4 + \cdots + 4 = 20.$$

Pour la question c) :
Laurène décompose 6 en 4 + 2. Elle ne détaille pas sa façon de trouver qu'avec 2 m de papier on emballe 5 livres. Cela semble être une évidence pour elle : avec 4 m, on emballe 10 livres, donc avec 2 m, on emballe 5 livres. Ce qui revient au même de dire, « avec la moitié de 4 m, j'emballe la moitié de 10 livres ».
Pour résumer ses opérations, elle utilise de manière implicite la fonction g :

$$g(6) = g(2 + 4) = g(2) + g(4) = g\left(\frac{4}{2}\right) + g(4) = \frac{g(4)}{2} + 10 = 5 + 10 = 15.$$

Elle semble écrire 4m - 2m=2m et en regard 10 - 5 = 5, ce qui traduit la relation :

$$g(2) = g(4 - 2) = g(4) - g(2) = 10 - g\left(\frac{4}{2}\right) = 10 - \frac{g(4)}{2} = 10 - 5$$

3) b) Analyse de la production de Farida

Il semble que Farida n'ait pas reconnu une situation de proportionnalité.
Pour la question a) Farida traduit la phrase « avec 4 mètres de plus, j'emballe 4 livres de plus ».

En acte, elle fait l'erreur suivante $g(14) = g(10 + 4) = g(10) + 4 = 25 + 4 = 29$.
(Persistance du modèle additif).
Pour la question c) :
Même style d'erreur $g(6) = g(10 - 4) = g(10) - 4 = 25 - 4 = 21$
(« avec 4 mètres de moins, j'emballe 4 livres de moins »).

3) c) Analyse de la production de Yann

Yann utilise la même procédure que Laurène en a) et c) (en moins explicite). En revanche, pour le b) il a tenté d'utiliser la propriété d'additivité de la proportionnalité mais mélange le nombre de livres et le nombre de mètres de papier.
En fait, sa réponse correspondrait (en échangeant les unités dans la phrase réponse) à la question : « combien de livres peut-on emballer avec 50 mètres de papier ? ». Ainsi il décompose 50 en additions de 4 et à chaque 4 fait correspondre 10 (il fait correspondre 5 au 2). Il répond cependant avec les bonnes unités.
Il écrit sous forme d'additions :
50 livres = 12× 4 livres+2 livres qu'il fait correspondre à 12× 10 mètres+5 mètres.
Théoriquement, il confond les fonctions f et g en supposant que $f(x) = 2{,}5x$

PARTIE B - Analyse d'une séance d'enseignement se référant à deux énoncés de problèmes

1) Caractérisation et intérêt spécifique de chaque étape

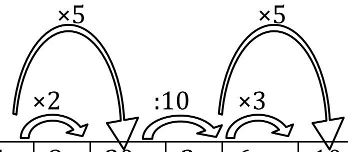
Étape 1 :
Appropriation individuelle (lecture et recherche d'informations pertinentes). Les élèves se familiarisent avec l'énoncé.
Étape 2 :
Recherche par groupe. Il s'agit d'une phase d'action et de formulation écrite. Les groupes travaillent ensemble, les élèves échangent pour confronter leurs points de vue et construire une solution.
Étape 3 :
Mise en commun. Il s'agit d'une phase de formulation orale, de débat et d'argumentation. Les élèves prennent conscience des autres procédures.
Étape 4 :
Synthèse collective. Le maître met en évidence une procédure « experte » si possible en se basant sur les écrits des élèves.
Étape 5 :
Approfondissement individuel. Les élèves ré-investissent ce qu'ils ont appris notamment lors de la synthèse.
Étape 6 :
Consolidation. Entraînement.
Étape 7 :
Ré-investissement. Les élèves transposent ce qu'ils viennent d'apprendre dans un autre contexte.

2) Informations utiles à mettre en relief au cours de l'étape 1

Le terme « **recette** » qui permet de reconnaître la proportionnalité.
Les données numériques de l'énoncé ainsi que les objets qui y sont associés : nombre de verres (4), nombre de citrons (2), nombre d'oranges (2), nombre de verres à liqueur (1).
Les données numériques présentes dans les questions : nombre de verres à préparer (6, puis 8, 10, 20).
Les objets en jeu dans les questions : nombre de citrons ; nombre d'oranges ; nombre de verres à liqueur.

3) Modèle mis en place et schéma de méthode

Le maître peut récapituler les données et les questions sous forme d'un tableau. Il peut également schématiser la méthode utilisée au moyen de flèches pour passer d'une colonne à l'autre...



Nombre de verres	4	8	20	2	6	10
Nombre de citrons	2					
Nombre d'oranges	2					
Nombre de verres à liqueur	1					

Dans ce tableau, les données de l'énoncé sont présentées, puis les questions apparaissent dans un ordre choisi.
D'abord pour 8 verres (propriété multiplicative ou propriété additive), puis pour 20 verres (propriété multiplicative « ×5 » ciblée).
Ensuite intervient une colonne qui n'est pas demandée dans les questions : quantité pour 2 verres ? Cette colonne est complétée par propriété multiplicative (« × ½ » depuis la colonne 4 ou « : 10 » depuis la colonne 20).
Ces résultats interviendront pour trouver les quantités pour 6 verres (« ×3 ») et pour 10 verres (« ×5 »).

4) a) En quoi cet exercice est-il différent de celui proposé dans l'étape 1 ?

L'exercice proposé à l'étape 7 utilise la proportionnalité en tant qu'outil. Les élèves doivent trouver un raisonnement qui leur permet de comparer les deux recettes. On ne leur demande pas de calculer les quantités pour un certain nombre de personnes, ce qui était le cas dans l'exercice 1. Les travaux faits dans la première partie devraient aider à la mise en œuvre d'une procédure correcte. En effet pour comparer les recettes, il suffit de calculer les quantités pour un même nombre de personnes pour les deux recettes. La difficulté est de percevoir cette nécessité de se donner un nombre de personnes identique pour les deux recettes et ensuite de choisir habilement ce nombre de personne.

4) b) Exercice de ré-investissement

Pour comparer les recettes, un élève peut choisir d'exprimer ces recettes pour 2 ou 12 personnes pour avoir des calculs simples (« : 3 » et « : 2 » ou « ×2 » et « ×3 »). On remarquera cependant que le choix de 2 personnes conduit à diviser des nombres fractionnaires par 3 ou 2 ce qui est peu familier des élèves. Il peut ensuite comparer les quantités trouvées. Si les quantités différent, les deux recettes ne sont pas les mêmes.
Il peut aussi choisir de revenir à la recette pour une personne (surtout si la "règle de trois" a été travaillée de manière préférentielle par l'enseignant) avec la même remarque sur les opérations sur les nombres fractionnaires que cette méthode implique.
Une autre procédure envisageable consiste à établir la relation suivante entre 6 et 4 : 6 est égal à 4 plus la moitié de 4 donc pour qu'il y ait proportionnalité, les quantités pour 6 personnes doivent être égale à celles pour 4 personnes plus la moitié de celles-ci.

Dans tous les cas, s'il s'agit de se prononcer sur le fait qu'il y ait ou non proportionnalité entre les deux recettes, la seule comparaison des quantités d'huile suffit à conclure par la négative ! On peut affiner en indiquant qu'entre les deux recettes, il y a proportionnalité entre les quantités de farine, de sucre et de lait.

SUJET N°2 PROPOSÉ PAR LA COPIRELEM

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME

PARTIE A : Construire le parterre

1) Un parterre géométrique

a) AC = BD = 2*r*

ABCD est un rectangle donc le triangle ABC est rectangle en B. Son hypoténuse [AC] est donc un diamètre de son cercle circonscrit.
Or ce cercle correspond au disque que forme le parterre : il a comme rayon r.
On en déduit que AC est égal à $2r$.
Par un raisonnement identique (le triangle BDC est rectangle en C), on obtient : BD = $2r$.

b)* Longueur des côtés de IJKL en fonction de *r

Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J milieu de [BC], donc par la propriété de la droite des milieux d'un triangle, le segment [IJ] est parallèle à la droite (AC) et : IJ = $\frac{1}{2}$AC.

Donc IJ = r.
On montre de même que KL = r (triangle ADC), puis IL = r (triangle ADB) et JK = r (triangle DCB).

c) Nature du quadrilatère IJKL

Un quadrilatère dont les quatre côtés ont même longueur est un losange. On vient de montrer que IJ = JK = KL = IL (= r) donc IJKL est un losange.

2) La plate-bande

a) Longueur et largeur du rectangle

On sait que la largeur de ABCD est égale aux $\frac{3}{4}$ de sa longueur : BC = $\frac{3}{4}$AB.

Dans le triangle ABC rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ avec AC = $2r$ et BC = $\frac{3}{4}$AB.

$(2r)^2 = AB^2 + (\frac{3}{4}AB)^2$ donc $4r^2 = AB^2 + \frac{9}{16}AB^2 = \frac{25}{16}AB^2$

D'où $AB^2 = \frac{25}{16} \times 4r^2 = (\frac{8}{5}r)^2$

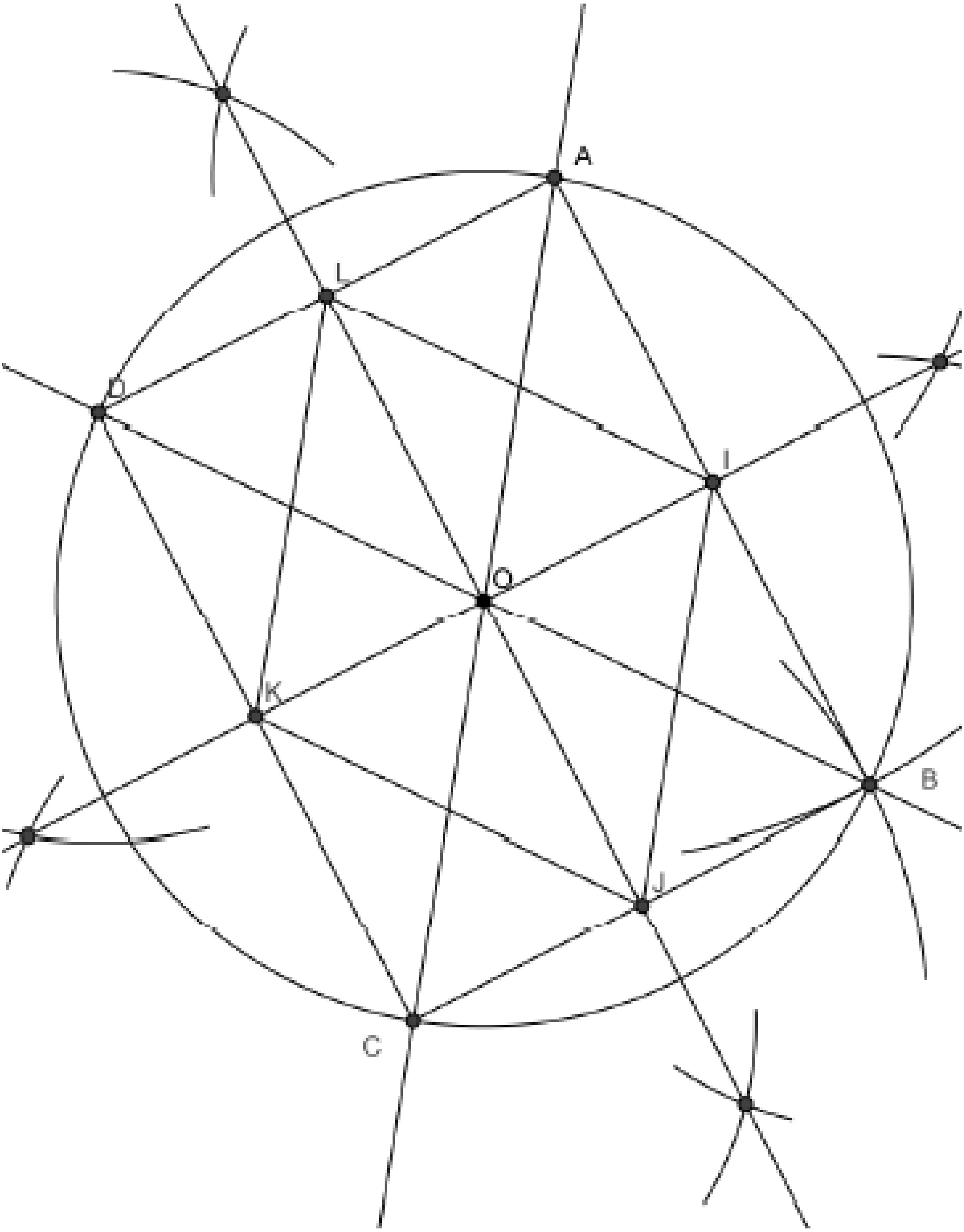
On en déduit, comme AB>0 et r>0, que AB = $\frac{8}{5}r$ et donc BC = $\frac{6}{5}r$.

b) Plan du parterre et aire de la plate-bande

Pour la construction, en prenant r = 5 cm, on obtient AB = 8 cm et BC = 6 cm sur le plan.

Remarque :

On trace un cercle de centre 0 et de rayon 5 cm. On place un point A sur le cercle et on obtient le point C diamétralement opposé. Le point B est obtenu par intersection de deux arcs, l'un de centre A et de rayon 8 cm, l'autre de centre C et de rayon 6 cm. Le reste de la construction se lit sur la figure.



L'aire du rectangle ABCD représenté sur le plan est égale : 6 cm × 8 cm = 48 cm².
Comme le plan est à l'échelle 1/60, pour passer aux dimensions réelles, il faut multiplier les longueurs par 60 donc les aires par 60^2 c'est-à-dire par 3 600.
Donc la vraie grandeur de l'aire du parterre rectangulaire est de :
48 cm² × 3600 = 172 800 cm² = 17,28 m². <u>Le résultat est exact</u>.

Remarque :

On pourrait aussi calculer d'abord les dimensions réelles de la plate-bande, avant de faire le calcul de l'aire.

PARTIE B : Fleurir le parterre

1) Aire de rectangles de même périmètre que le rectangle ABCD

Si on appelle x la mesure de la longueur d'un des côtés du rectangle A'B'C'D' et y celle de la longueur de l'autre côté (l'unité de longueur étant le cm), on sait que : $x + y = 14$ (mesure du demi-périmètre du rectangle ABCD avec le cm comme unité de longueur).
La mesure de l'aire de A'B'C'D' est donnée, avec le cm^2 comme unité d'aire, par : $x \times y$ où $y = 14 - x$.
D'où : aire$_{(A'B'C'D')} = 14\,x - x^2$.

2) Lecture de la solution du problème sur la représentation graphique

Sur le graphique représentant la fonction qui à un nombre x associe $14x - x^2$, on constate que l'aire semble maximale pour la valeur $x = 7$.

3) Nature du rectangle A'B'C'D' d'aire maximale - Nature du quadrilatère I'J'K'L' associé

Lorsque $x = 7$, on obtient $y = 7$ donc $x = y$, c'est-à-dire que le rectangle A'B'C'D' est un carré car un rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un carré.
On sait que I'J'K'L' est un losange, montrons que ce losange est un carré. Dans un carré, les médianes ont même longueur. Or les médianes [I'K'] et [J'L'] du carré A'B'C'D' sont les diagonales du losange I'J'K'L'. Or un losange dont les diagonales ont même longueur est un carré : I'J'K'L' est un carré.

Autre méthode :

Dans le carré A'B'C'D', les triangles A'I'L', B'I'J', C'J'K' et D'L'K' sont rectangles isocèles, donc leurs angles « à la base » sont égaux à 45° (somme des angles d'un triangle égale à 180°). Prenons les angles $\widehat{D'L'K'}$ et $\widehat{A'L'I'}$, tous deux égaux à 45° et utilisons l'alignement des points A', L' et D' : $\widehat{I'L'K'} = 180° - 45° - 45° = 90°$.
Le losange I'J'K'L' possède donc un angle droit, c'est un carré.

4) Carré inscriptible dans un cercle

Le jardinier ne peut pas construire une plate-bande représentée par le carré A'B'C'D' car on constate que le carré A'B'C'D' de côté 7 cm n'est pas inscriptible dans le cercle de rayon 5 cm.
En effet ses diagonales [A'C'] et [B'D'] vérifient : A'C' = B'D' = $\sqrt{98}$ cm = $7\sqrt{2}$ cm.
Or le diamètre devrait être 10 cm et $7\sqrt{2} < 10$ puisque $98 < 100$.

Partie C –Acheter des fleurs

Le rectangle choisi de 3,60 m sur 4,80 m vérifie bien les caractéristiques fixées dans la question A.2)

1) Bornes, intervalles et tulipes

Le périmètre de la plate-bande est de : 2 × (3,60 m + 4,80 m) = 16,80 m = 1680 cm. En mettant une fleur par coin, il y a autant de fleurs que d'intervalles de 10 cm sur le périmètre, soit **168 tulipes**.

2) Pourcentage et nombre de tulipes

25% des fleurs commandées ne fleurissent pas, donc 75% d'entre elles fleurissent. Le nombre n de fleurs à commander est tel que : $n \times 75\% = 168$. Donc $n = \frac{168}{0{,}75}$. Il faut commander **224 tulipes** pour que 168 tulipes fleurissent.

3) Probabilité et tulipes

Dans un paquet de 100 bulbes, 25 bulbes sont des tulipes. Le jardinier a déjà pris 4 bulbes de tulipes, donc il reste 21 bulbes de tulipes parmi les 96 bulbes restants. On suppose que les bulbes sont indiscernables au toucher, donc la probabilité que le jardinier tire au hasard un bulbe de tulipe est $\frac{21}{96} = \frac{7\text{x}3}{3\text{x}32} = \frac{7}{32}$.

DEUXIEME PARTIE

PARTIE A - Vrai – Faux – Justifier

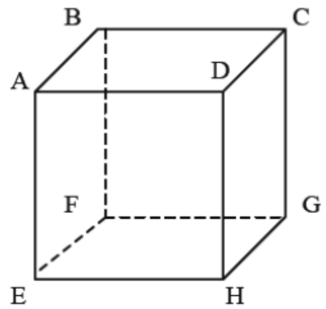
1) Une classe a une moyenne de 9 sur 20 à un devoir surveillé.
   Affirmation 1 : La moitié de la classe a eu au moins 9 sur 20 à ce devoir.

L'affirmation 1 est fausse.
Contre-exemple : classe de quatre élèves dont les notes sont 6, 7, 8 et 15.

2) Affirmation 2 : 1 cL de liquide occupe un volume égal à 0,001 dm^3.

L'affirmation 2 est fausse.
1 L = 1 dm^3.
1 cL = $\frac{1}{100}$ L = $\frac{1}{100}$ dm^3 = 0,01 dm^3.

3) Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, l'arête AB mesure a cm.



Affirmation 3 : On peut alors affirmer que le volume du solide dont les sommets sont A, B, D et E est égal à $\frac{a^3}{6}$ cm^3.

L'affirmation 3 est vraie.
ABDE est une pyramide de base ABD (triangle rectangle isocèle en A, avec AB = a cm, dont l'aire est $\frac{1}{2}a^2$ cm^2), et de hauteur AE = a cm. Son volume est donc égal à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ a^2 cm^3, soit $\frac{a^3}{6}$ cm^3.

4) Soit a, b, c trois entiers compris entre 0 et 9.
   Affirmation 4 : Les nombres qui s'écrivent $\overline{abcabc}$ en base dix sont des multiples de 13.

L'affirmation 4 est vraie.
$\overline{abcabc} = \overline{abc} \times 1000 + \overline{abc} = \overline{abc} \times (1000 + 1) = 1001 \times \overline{abc}$
et 1001 = 7 × 11 × 13.
Donc $\overline{abcabc} = 13 \times (7 \times 11\ \overline{abc})$.

5) Sur une carte au 1/25000 deux villages sont distants de 7 cm.
   Affirmation 5 : Ces villages seront distants de $\frac{35}{8}$ cm sur une carte au 1/40000.

L'affirmation 5 est vraie.
Pour passer d'une carte au 1/25000 à une carte au 1/40000, il suffit de multiplier toutes les distances de la 1ère carte par $\frac{25000}{40000} = \frac{5}{8}$.

Donc sur la carte au 1/40000, les deux villages seront distants de : 7 cm × $\frac{5}{8} = \frac{35}{8}$ cm.

Remarque :

On peut bien sûr expliciter, en étape intermédiaire, la distance réelle entre les deux villages : 7 cm × 25000.

6) On considère le nombre $10^9 - 9$.
   Affirmation 6 : Lorsque l'on fait la somme des chiffres composant l'écriture usuelle de ce nombre, on obtient 73.

L'affirmation 6 est vraie.
$10^9 = 1\,000\,000\,000$ donc $10^9 - 9 = 999\,999\,991$.
La somme des chiffres du nombre obtenu est $8 \times 9 + 1 = 73$.

PARTIE B : analyse de production d'élèves sur un exercice de calcul réfléchi

1) Les erreurs commises

Les élèves C, E et G ont commis des erreurs.

- Multiplication incorrecte des dizaines, mauvaise compréhension de la numération décimale.

L'élève C semble appliquer la technique posée de la multiplication de 18 par 5 en calculant deux produits (« 5 fois 8, puis 5 fois 1 ») puis en ajoutant les deux résultats partiels obtenus, sans prendre en compte les rôles respectifs des dizaines et des unités. Il semble qu'il ne donne pas de sens à la technique qu'il essaie d'appliquer.

- Défaut de mémorisation de résultats intermédiaires.

C'est le cas de l'élève E. Il effectue « dans sa tête » l'algorithme de la multiplication posée en colonnes, mais utilise deux fois la retenue de 4 : une première fois correctement pour l'ajouter à 5, et une seconde fois de façon erronée comme chiffre des unités du résultat. Il a certainement trop à mémoriser pour utiliser ainsi « dans sa tête » cet algorithme.

- « Double comptage » incorrect.

C'est le cas de l'élève G, dans son résultat écrit sur l'ardoise. Mais en expliquant sa procédure, il se rend compte de son erreur.
La procédure utilisée s'appuie sur la définition de la multiplication comme addition itérée.
Si l'on considère qu'il a obtenu son résultat sur l'ardoise par un procédé analogue à celui qu'il explique, cela signifie qu'il a ajouté 18 quatre fois et non cinq.
C'est donc une erreur dans le double comptage : comptage des cinq termes 18, et des quatre sommes successives.
Cette erreur s'explique probablement par la difficulté à gérer à la fois ce double comptage et les additions ; sa procédure additive demande des mises en mémoire.

2) Procédures et propriétés mobilisées

- Procédures utilisant l'associativité : pour tous nombres a, b, c,

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = a \times b \times c$.
Il s'agit de la procédure utilisée par l'élève F et que l'on peut formaliser par :
$18 \times 5 = (9 \times 2) \times 5 = 9 \times (2 \times 5) = 9 \times 10 = 90$ (règle des zéros pour terminer).
La procédure utilisée par l'élève D est du même type, mais avec la division au lieu de la multiplication et dans un cas particulier : pour multiplier par 5, on multiplie par 10 et on divise par 2.
Il utilise de plus une décomposition additive habile de 180 pour calculer facilement sa moitié en appliquant en acte la distributivité de la division sur l'addition.
On peut la traduire par :
$18 \times 5 = 18 \times (10 : 2) = (18 \times 10) : 2 = 180 : 2 = (100 + 80) : 2 = 100 : 2 + 80 : 2 = 50 + 40$.

- Procédures passant par une addition itérée.

Il s'agit de la procédure utilisée par l'élève B, procédure que l'on peut expliciter par :
$18 \times 5 = 18 + 18 + 18 + 18 + 18 = 36 + 36 + 18 = 72 + 18 = 90$
On a vu dans la question 1 que l'élève G utilise aussi cette procédure, mais avec un succès mitigé.

- Procédures utilisant la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction :

Pour tous nombres a, b, c,
$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ou $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$.
Il s'agit des procédures utilisées par les élèves A (distributivité sur la soustraction) et H (distributivité sur l'addition).

La procédure de A, par exemple, peut se traduire par :
$18 \times 5 = (20 - 2) \times 5 = 20 \times 5 - 5 - 5$ (il remplace 2×5 par $5 + 5$) ;
et celle de H par :
$18 \times 5 = (10 + 8) \times 5 = 10 \times 5 + 8 \times 5 = 50 + 40$.

Remarque :
La réponse à la question 3) est intégrée à la réponse précédente.

TROISIEME PARTIE

PARTIE A - Analyse d'une séance en CE2

1) Solutions de chaque problème de la partie « Chercher »

	Maïa	Tim
Bande rouge	32 cm =16 × 2 cm, donc 16 rubans	32 cm = 5 × 6 cm + 2 cm, donc 5 rubans
Bande bleue	67 cm = 33 × 2 cm + 1 cm, donc 33 rubans	67 cm = 11 × 6 cm + 1 cm, donc 11 rubans
Bande jaune	248 cm = 124 × 2 cm, donc 124 rubans	248 cm = 41 × 6 cm + 2 cm, donc 41 rubans

Remarque :
Il faut prêter attention à l'exactitude et la cohérence des écritures mathématiques. En particulier les deux membres d'une égalité doivent être de même nature, soit des nombres soit des grandeurs (ici des longueurs). Par exemple l'écriture « 16 × 2 cm = 32 » est incorrecte.
Il faut également prêter attention aux écritures exprimant une division, en particulier euclidienne. Ainsi l'écriture suivante « 32 : 6 = 5 reste 2 » est erronée car les deux membres de chaque côté du signe égal ne sont pas un nombre. Idem pour « 32 : 6 = 5×6 + 2 » !
Ou encore pour « 32 : 6 = 5,33 », qui utilise les nombres décimaux, ce qui ne peut pas être attendu d'élèves de CE2 et qui exprime faussement l'égalité entre un nombre et une valeur approchée de ce nombre.
Il était bien-sûr attendu ici une réponse qui soit possible pour des élèves de CE2.

2) Connaissances et compétences préalables des élèves

Les connaissances et les compétences sont essentiellement liées à la multiplication :
- connaître le sens « addition itérée » de la multiplication, en lien ici avec le découpage successif ou la juxtaposition des morceaux.
- connaître les tables de multiplication (notamment de 6), c'est-à-dire connaître le résultat d'une multiplication ($6 \times 5 = ?$) et être capable de dire « dans 30 combien de fois 6 ? » ou de savoir résoudre « $6 \times ? = 30$ ».
- savoir multiplier un nombre à un chiffre par un multiple de 10 (techniques, procédures automatisées).
- être capable de calculer des produits en s'appuyant sur des résultats connus (par exemple « $6 \times 541 = 6 \times 500 + 6 \times 40 + 6$; $6 \times 4 = 24$ donc $6 \times 40 = 240$; puis $6 \times 5 = 30$ donc $6 \times 500 = 3\,000$ »), donc avoir une certaine maîtrise du calcul réfléchi.

Remarque :
D'autres connaissances sont également à l'œuvre (mesures de longueurs, connaissance des nombres, etc.) mais il a été ici ciblé celles qui sont les plus directement utiles pour la résolution.

3) Premier temps de recherche des élèves

a) L'éventail des procédures concernant le nombre de rubans de Tim est très large :
- utilisation d'un dessin en vraie grandeur ;
- utilisation d'un schéma ;

- addition itérée de 6 ou soustraction itérée de 6 ;
- utilisation d'un résultat connu : 6 × 5 = 30 ;
- essais de produits par 6 ;
- appui sur des résultats connus et ajouts de multiples de 6 :
- 12 + 12 = 24 ; 24 + 6 = 30 ; et 30 + 2 = 32 ;

... avant de conclure en mettant en relation les calculs avec la question posée.

Remarque générale :

Pour mener une analyse a priori (même modeste), il s'agit d'effectuer momentanément un changement de posture : envisager les procédures correctes susceptibles d'être mises en œuvre <u>par un élève</u> d'un niveau donné, les erreurs en référence à des connaissances relatives à l'apprentissage d'une notion donnée. Cela permettra au futur enseignant (candidat) de se projeter dans la mise en œuvre et le déroulement de la séance et notamment d'anticiper la gestion des phases de mise en commun (validation ou invalidation des réponses, des procédures…) et de synthèse, voire le contenu de l'institutionnalisation, même si ce dernier sera à réguler en fonction du travail effectif des élèves.

Remarque :

Ici le candidat doit proposer des procédures vraiment différentes. Par exemple éviter de mettre la 1 et la 2 car elles sont assez proches. L'idéal ici est de donner une procédure de type dessin/schéma, une de type addition ou soustraction et une de type multiplication.

b) On peut envisager ces trois types d'erreurs :

- Mauvaise compréhension du problème qui conduit au choix d'une procédure inadaptée : ajouter ou multiplier les données.
- Difficulté à interpréter une procédure adaptée : par exemple dans la procédure « 12 + 12 = 24 », il faut associer 24 à 4 rubans et 12 à 2 rubans. Etc.
- Erreurs de calculs.

c) La mise en commun doit être l'occasion de collecter toutes les réponses, de les valider ou de les invalider collectivement (et non par l'enseignant seul), de discuter de quelques procédures significatives. Proposer la mise en commun à l'issue de la question 1 permet de corriger certaines erreurs et de favoriser certaines procédures pour les questions suivantes. Elle permet ainsi à certains élèves de se réengager dans la suite, même s'ils ont faits des erreurs précédemment.

Remarque :

Le candidat ne doit pas se limiter à dire ici que la mise en commun permet l'échange des procédures utilisées par les élèves. Il doit aussi préciser l'importance d'un échange collectif sur la validité des réponses.

d) La vérification des réponses peut se faire par découpage effectif d'une bande de 32 cm. Elle peut également se réaliser par le calcul additif 6 cm + 6 cm + 6 cm + 6 cm + 6 cm + 2 cm qui représente le découpage (« une bande, 6 cm, … »).
Elle peut également se réaliser par un calcul multiplicatif : 5 × 6 cm = 30 cm, il reste 2 cm de tissu, ce qui se traduit par 32 cm = 6 × 5 cm + 2 cm.

Remarque :

Il ne suffit pas de dire qu'il faut s'appuyer sur les productions des élèves pour vérifier les réponses. Il faut être plus précis et expliquer comment être sûr que les réponses qui apparaissent justes suite à la discussion collective peuvent être vérifiées. Idem pour la question 4.a.

4) Deuxième temps de recherche des élèves

a) Vue la longueur 248 cm de la bande jaune, on peut vérifier les réponses <u>uniquement</u> en utilisant l'égalité de longueurs « 41 × 6 cm + 2 cm = 248 cm » ou bien l'égalité numérique « 41 × 6 + 2 = 248 ».

b) Dans la question 1, le choix de 32 permet une validation effective, ce qui n'est plus le cas ensuite. Et les nombres 6 et 32 permettent une matérialisation de la situation.
Cette matérialisation est très difficile (longue et complexe) dans la question 2. De même l'addition itérée devient plus fastidieuse. Dans la question 3, elle n'est plus envisageable.
Ainsi dans les questions 1 – 2 – 3, les nombres sont choisis de manière à bloquer progressivement les procédures les plus primitives (dessins et schémas par exemple).

Le choix du nombre 6 : les résultats multiplicatifs mémorisés peuvent être utilisés ; le nombre n'est pas trop grand.
Le choix du nombre 2 : la table de 2 est parfaitement connue ; le travail sur les doubles et les moitiés, commencé dès le CP, permet le recours à la multiplication tout en rendant très rapidement fastidieuse l'addition itérée.

5) Une synthèse en classe

En rattachant la synthèse à la situation contextualisée, et en s'appuyant sur les productions des élèves, on pourrait montrer que les différentes procédures apparues peuvent toutes être traduites par une égalité numérique du type « $32 = 5 \times 6 + 2$ », qui répond à la question « Combien de rubans de 6 cm dans 32 cm ? ».
On peut aussi profiter de ce travail pour introduire la notion de division (mais pas le calcul posé pour le moment !), en expliquant que l'on effectue la division de 32 par 5. Les mots « quotient » et « reste » sont alors introduits en lien avec le contexte des rubans.

Remarque :

On n'attend pas ici une description de la gestion de cette phase par l'enseignant mais bien les éléments de savoirs à institutionnaliser.

6) Analyse des 6 exercices

Pour les six exercices (n°4 à n°9) qui suivent l'activité de recherche, on peut relever un point commun et deux différences parmi :

- Points communs :
  - point commun principal : tous les problèmes ont la même structure (problème de division-quotition), et peuvent être traduits par une égalité de la forme $a = b.q + r$ avec $0 \leq r < b$ (division euclidienne).
  - les valeurs numériques sont telles que chaque problème peut être résolu par des procédures de calcul réfléchi.
- Différences :
  - Contexte : les quatre premiers exercices reprennent le contexte de la situation de découverte, tandis que les deux autres sont dans des contextes différents.
  - Les termes recherchés dans l'égalité caractéristique de la division euclidienne sont différents d'un exercice à l'autre : dans certains exercices, on recherche le quotient (ou le quotient + 1), dans un autre le reste, dans un autre le dividende.

Les exercices 4 – 5 – 7 reprennent les questions de l'activité mais avec un diviseur différent (exercices d'application) :

- d'abord 30 divisé par 5 (exercice 4) revient sur le résultat connu $6 \times 5 = 30$;
- puis 78 divisé par 5 (exercice 5) dans lequel les élèves peuvent s'appuyer sur la table de 5 bien connue (même au delà de 5 x 10) ;
- enfin 200 divisé par 9 (exercice 7) plus difficile au niveau du calcul « dans 200 combien de fois 9 ? ».

L'exercice 6 reprend le même contexte, mais propose la situation « retournée » : connaissant quotient, reste et diviseur, on cherche le dividende (calcul simple relevant de la table de 9 ou de 7).

L'exercice 8 est un problème de division-quotition dans un autre contexte où il faut trouver le quotient mais dans un champ numérique simple (la table de 8).

L'exercice 9 est un problème de recherche du reste dans une division-quotition, présenté dans un troisième contexte où il faut trouver le reste dans un champ numérique simple (la table de 7).

PARTIE B - La division en CM2

1) Analyse de deux exercices.

a) Problème 1 : 350 cm = 8 × 43,75 cm donc chaque étagère a pour longueur 43,75 cm.

Remarque :

Il n'y a pas de raison de s'arrêter aux cm ici. La longueur est une grandeur continue (et non discrète). Il faut donner le quotient exact car il s'agit d'un nombre à deux chiffres.

Problème 2 : 350 cm = 43 × 8 cm + 6 cm donc il est possible de faire 43 morceaux.

b) Ces deux problèmes sont énoncés dans le même contexte, et se résolvent par la même opération : la division de 350 par 8.
Il ne s'agit cependant pas de la même division. Le problème 1 renvoie à une division décimale (résultat 43,75) tandis que le problème 2 renvoie à une division euclidienne (recherche du quotient 43).
C'est l'interprétation de la situation qui oriente vers le type de division (le résultat est un nombre décimal ou un nombre entier).
Ces deux problèmes de divisions relèvent de deux catégories différentes du champ multiplicatif (Vergnaud) : le problème 1 est un problème de division-partition (recherche de la valeur d'une part), tandis que le suivant est un problème de division-quotition (recherche du nombre de parts).

c) L'enjeu est de donner du sens aux nombres (données et résultats) et aux calculs selon le contexte. C'est aux élèves d'interpréter la situation pour savoir quel type de division effectuer.
Pour la division « 350 : 8 », la calculatrice donne le résultat 43,75 quel que soit le contexte : elle permet ainsi d'alléger la charge de calcul de l'élève, mais ne prend pas en charge l'interprétation du résultat. Cette tâche reste à la charge de l'élève.

Remarques :

- *C'est un des intérêts de l'utilisation de la calculatrice en général : alléger la tâche de l'élève sur le calcul pour lui permettre de se concentrer sur la résolution du problème.*
- *Certaines calculatrices pour l'école primaire possèdent une touche pour la division euclidienne, ce qui renforce l'argument d'utilisation : l'élève doit savoir quelle division utiliser en fonction de son interprétation du problème.*

2) Les divisions d'Aliette et de Christian

Les deux élèves essaient d'appliquer la technique opératoire qu'ils ont apprise avec plus ou moins de succès.

Aliette applique la procédure attendue avec la « méthode des meilleurs multiples » (ou des soustractions de multiples). Dans cette méthode on considère le diviseur dans son ensemble (4584) et non une décomposition en milliers, centaines …
Elle construit au fil des étapes une table partielle de multiplication par 8 en fonction de ses besoins : de 1 × 8 à 7 × 8, 7 étant le chiffre le plus élevé du quotient. Elle en déduit les multiples de 80 et de 800.
Les écritures « 5 × 8 = 40 400 4000 » ou « 7 × 8 = 56 560 » montrent que cette élève sait à chaque étape dans quel ordre d'unité elle travaille. Ceci lui permet de soustraire le nombre maximum de paquets de centaines de 8 du dividende. Elle poursuit cette technique soustractive. Elle ne calcule pas explicitement la dernière soustraction et n'indique pas le reste 0 de la division. Le quotient est exact. Elle ne commet aucune erreur.

Christian utilise la « méthode du partage des groupements de numération ».
Dans cette méthode on considère une décomposition en milliers, centaines… du diviseur (plus précisément ici 4 584 = 45 centaines 8 dizaines 4 unités).
Il ne voit pas qu'il peut commencer par rechercher le quotient de 45 centaines par 8. Il retire 72 dizaines à 458 dizaines (72 = 9 × 8 représente pour lui le plus grand multiple de 8 qu'il peut retirer). Puis il continue sa technique en retirant 72 unités jusqu'à … épuisement ?
Pour arriver au bout, une bonne cinquantaine d'opérations seraient nécessaires…
En fait, il utilise une procédure soustractive.
De plus, alors qu'Aliette n'a pas su où écrire les chiffres des quotients partiels, Christian les juxtapose en une suite de 9 (au lieu de les additionner). La procédure est donc incorrecte.
Enfin, on note une erreur de calcul dans la première soustraction (15 – 7 = 9 au lieu de 8).

Remarque générale :

Pour amener le candidat à s'interroger sur les élèves, il est ici difficile de proposer seulement quelques productions relevées dans une classe donnée à un moment donné de l'apprentissage car beaucoup de choses sur le contexte mériteraient alors d'être précisées. En revanche, le contexte d'une évaluation « différée », à travers l'analyse de réponses à des items très ciblés (ici mise en œuvre d'une technique opératoire) peut permettre d'évaluer les capacités du candidat à interpréter certaines erreurs et appréhender certaines difficultés en lien avec ses connaissances sur l'apprentissage de la notion.

b) Envisager une remédiation.
Christian n'a apparemment pas compris le sens de la technique posée qu'il essaie d'utiliser, technique qui s'appuie sur des connaissances en numération et la décomposition du dividende en milliers, centaines, dizaines et unités.
Pour aider cet élève à (re)construire du sens, on pourrait contextualiser l'opération dans un problème de partage équitable entre 8 personnes d'une collection de 4584 objets, organisée en paquets de mille, cent, dix, et unités isolées (ou dans un problème de partage équitable d'une collection valant 4584 organisée en supports valant 1000, 100, 10 et 1), en lui demandant d'effectuer le partage tout en traduisant ses actions sous forme d'une division posée.

Remarques :

- *D'autres propositions peuvent bien sûr être faites mais il faut qu'elles s'appuient sur les difficultés identifiées à la question précédente. Par exemple poser la table de 8 n'est pas une aide suffisante au vu des difficultés de Christian.*
- *Il faut que les aides proposées soient vraiment des aides ! Il ne suffit pas, par exemple, de dire à Christian de prendre les deux premiers chiffres de 4584. Cela ne l'aidera pas à réussir pour une autre division s'il n'a pas compris pourquoi…*
- *Il est faux de dire à Christian de « toujours prendre les deux premiers chiffres du dividende ». Cela fonctionne pour cette division mais lorsqu'il s'agit par exemple de diviser 9584 par 8 ce n'est plus vrai …*

SUJET N°3 PROPOSÉ PAR LA COPIRELEM

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME

Remarque préliminaire :

Cette première partie aborde les notions suivantes :

- *Analyse d'un système de numération : symboles utilisés, signification de ces symboles, règles d'écriture et de comparaison ;*
- *Analyse et production d'algorithmes liés aux opérations dans l'ensemble des entiers naturels.*

Il s'agit d'évaluer des connaissances disciplinaires relatives aux systèmes de numération et à celui de techniques opératoires dans l'ensemble des entiers naturels à travers l'exploration et l'analyse d'un système hors des usages du candidat.
Des questions de nature épistémologique visent à apprécier l'aptitude du candidat à analyser des caractéristiques d'un tel système de numération.
Ces différentes questions permettent de revenir sur les caractéristiques de notre système usuel de numération écrite avec des chiffres et l'influence de celles-ci sur les règles liées aux comparaisons de nombres et aux calculs sur ces nombres. Elles peuvent susciter a posteriori un questionnement sur l'apprentissage et l'enseignement de ces notions.

1) De la numération égyptienne à notre numération écrite et réciproquement

Le codage du nombre 42 209 permet de déduire que le trait 𓏺 représente une unité, et que le doigt courbé 𓂭 représente une dizaine de milliers. La spirale 𓍢 peut représenter un millier ou une centaine, de même pour la fleur de lotus 𓆼 .
Le codage du nombre 120 000 permet de déduire que le têtard 𓆐représente une centaine de milliers.

Le codage du nombre 1 422 000 permet de déduire que le dieu 𓁨représente un million. Il permet également de trancher sur la fleur de lotus : celle-ci représente un millier. On peut maintenant trancher aussi pour la spirale qui représente une centaine.
Le codage du nombre 400 010 permet de déduire que l'anse 𓎆 représente une dizaine.

On a donc le tableau de correspondance suivant :

𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

Ainsi :

𓆼𓆼𓆼𓆼 𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	4 258
𓁨𓁨 𓆐 𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭 𓆼𓆼𓆼𓆼 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢 𓎆 𓏺𓏺𓏺	2 154 813

2) a) Règle permettant de comparer deux nombres quelconques

Voici une règle permettant de comparer deux nombres entiers quelconques écrits dans ce système de numération.

> L'ordre croissant des unités numérales présentées ici est : trait, anse, spirale, fleur, doigt, têtard, dieu. Dans chaque nombre, on repère l'unité numérale d'ordre supérieur.
> Si ces unités numérales sont différentes, le nombre le plus grand est celui qui a utilisé l'unité numérale de plus grand ordre.
> Si elles sont identiques, on dénombre leurs occurrences : le nombre le plus grand est celui où l'unité numérale apparaît le plus.

En cas d'égalité des occurrences, on reprend la comparaison avec les unités numérales d'ordre immédiatement inférieur et ainsi de suite en cas de nouvelle égalité.

2) b) Avantage de notre système actuel

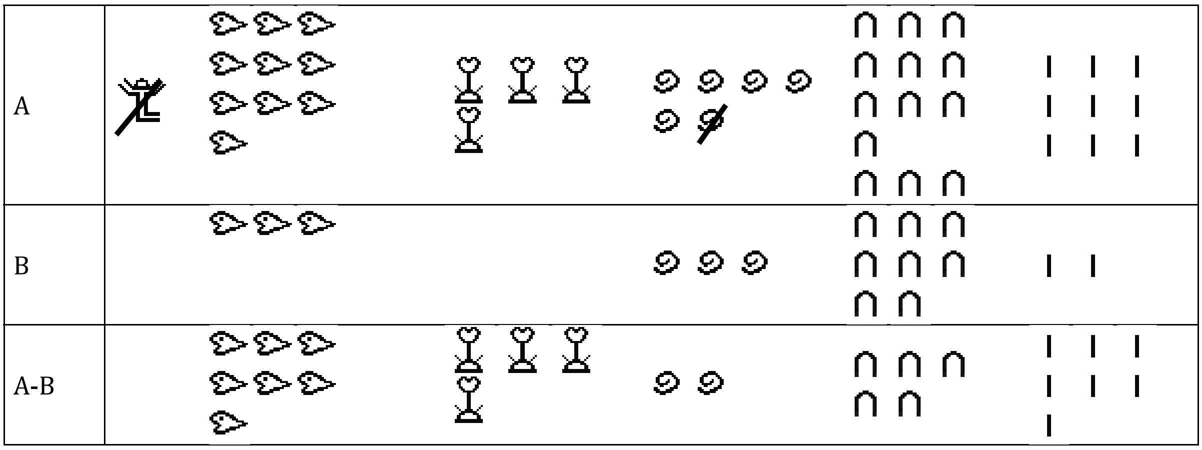
Dans notre système usuel de numération écrite (avec des chiffres), la longueur de l'écriture du nombre est suffisante pour comparer deux nombres entiers (s'ils sont de longueurs différentes). On n'a pas besoin de dénombrer des symboles de même ordre (rang).

2) c) Nombre qui ne peut pas s'écrire dans le système égyptien

Le « 0 ».
On peut aussi citer tout nombre supérieur à dix millions pour lesquels de nouveaux symboles seraient nécessaires.

3) Calcul de la différence de deux nombres

Pour pouvoir calculer la différence de ces deux nombres, où A est supérieur à B, on va réorganiser A pour avoir plus de symboles de chaque sorte que dans B. Chaque symbole d'un certain ordre vaut dix symboles de l'ordre immédiatement inférieur.



4) a) Calcul du produit 28 × 34

On peut procéder de deux manières :

Manière 1 :

1	~~28~~
2	56
4	~~112~~
8	~~224~~
16	~~448~~
32	896
34	952

donc 34 × 28 = 56 + 896 = 952

Manière 2 :

1	~~34~~
2	~~68~~
4	136
8	272
16	544
28	952

donc
28 × 34 = 136 + 272 + 544 = 952

4) b) Justification des étapes du calcul du produit 35 × 47

35×47 = (1 + 2 + 32)×47 : décomposition de 35 en somme de puissances de 2.
35×47 = (1×47) + (2×47) + (32×47) : distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

$35\times 47 = (1\times 47) + (2\times 47) + ((2\times 2\times 2\times 2\times 2)\ \times 47)$: décomposition de 32 en produit de facteurs premiers
$35\times 47 = 47 + 94 + 1504$: calcul et associativité généralisée à n facteurs
$35\times 47 = 1645$

4) c) Description de l'algorithme

Dans la colonne de gauche, on écrit successivement la suite des puissances de 2 inférieures au premier facteur, à partir de $2^0=1$. On entoure celles dont la somme est égale à ce facteur.
Dans la colonne de droite, on écrit le second facteur sur la première ligne en correspondance de $2^0=1$, puis, sur les lignes suivantes, la suite des doubles du nombre précédent.
Le produit des deux nombres est alors égal à la somme des nombres de la colonne de droite qui correspondent aux nombres entourés dans la colonne de gauche.

Justification :

Tout nombre a une écriture unique en base 2 (ou tout nombre peut se décomposer en somme de puissances de 2).

5) Nombre minimal de lignes pour effectuer le produit d'un nombre à quatre chiffres par un nombre à trois chiffres

La décomposition additive d'un nombre à trois chiffres avec des puissances de 2 nécessite d'utiliser au minimum le nombre $64 = 2^6$, il faudra donc écrire au minimum 7 lignes.

6) a) Points communs entre les deux procédures

Dans les deux procédures :

- On utilise les doubles successifs de l'un des deux facteurs.
- On calcule une somme de résultats intermédiaires.

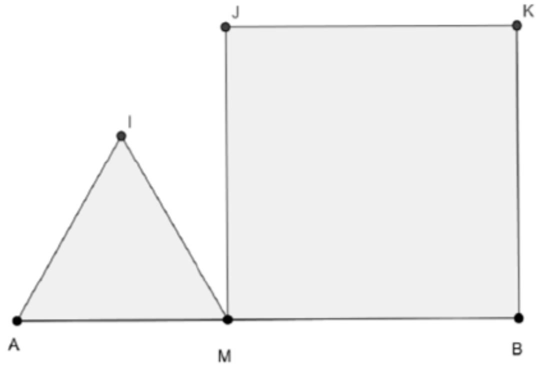
6) b) Capacité supplémentaire nécessitée par la méthode dite « par duplications successives »

La procédure « par duplication successive » nécessite de savoir décomposer un nombre entier en somme de puissances de 2, ce qui n'est pas nécessaire pour mettre en œuvre la procédure utilisée par les élèves de CE1.

DEUXIEME PARTIE

PARTIE A

Exercice 1

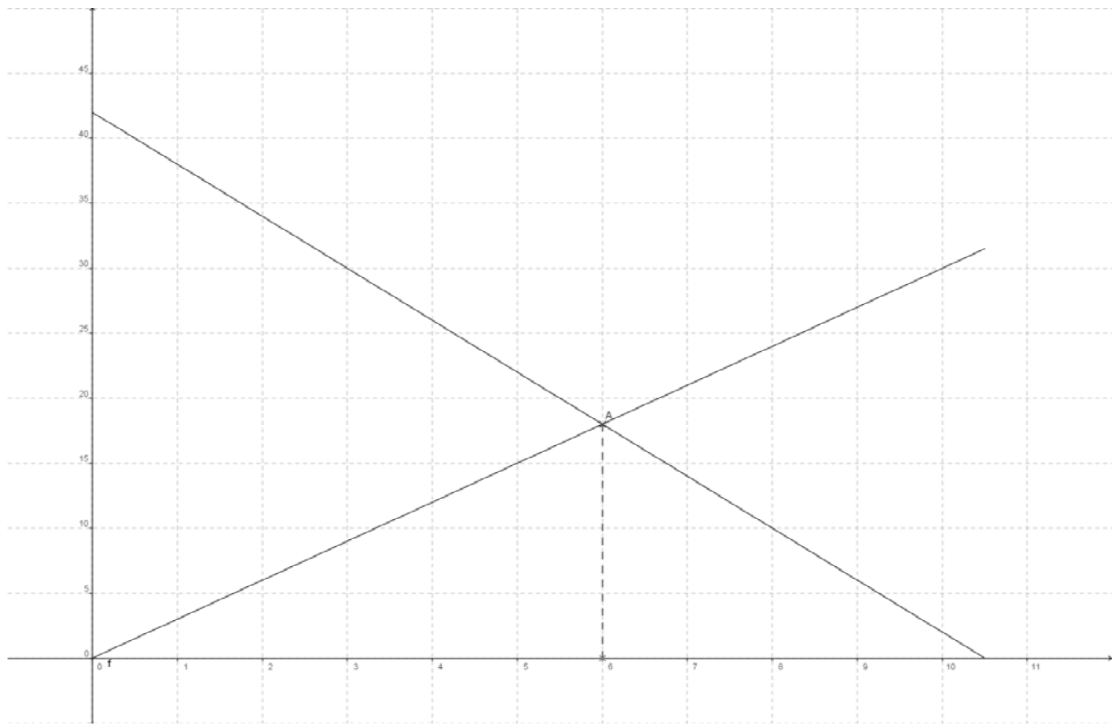


1) Expressions des périmètres de AIM et de MJBK, en fonction de x et résolution du problème

Si x la mesure en cm de la longueur AM, on a :
AIM est un triangle équilatéral donc la mesure en cm de son périmètre est $3x$.
$M \in [AB]$ donc $MB = 10{,}5 - x$.
La mesure en cm du périmètre du carré MJKB est donc $4 \times (10{,}5 - x)$
Les deux périmètres sont égaux ; cela se traduit par :
$3x = 42 - 4x$ d'où $7x = 42$ puis $x = 6$ (en cm).

2) Résolution graphique

Pour résoudre graphiquement l'équation $3x = 42 - 4x$, on trace les deux droites d'équations $y = 3x$ et $y = 42 - 4x$ dans un repère, puis on lit l'abscisse du point d'intersection des deux droites : 6.



Exercice 2

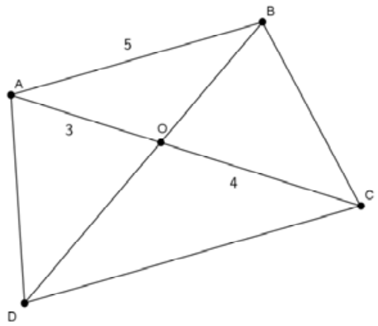
1) Nombre maximum de lots identiques

Le nombre de lots doit être un diviseur commun à chacun des nombres donnés et ici le plus grand possible, donc le nombre maximum de lots est le PGCD des nombres 60, 48 et 36.
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 12 \times 5$
$48 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 12 \times 4$
$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 12 \times 3$
3, 4 et 5 sont premiers entre eux donc le PGCD de 60, 48 et 36 est 12.
Le maraicher pourra constituer 12 lots identiques au maximum.

2) Composition de chaque lot

Comme $60 = 12 \times 5$: il y aura 5 salades par lot.
Comme $48 = 12 \times 4$: il y aura 4 oignons par lot.
Comme $36 = 12 \times 3$: il y aura 3 bottes de radis par lot.
Chaque lot sera constitué de 5 salades, 4 oignons et 3 bottes de radis.

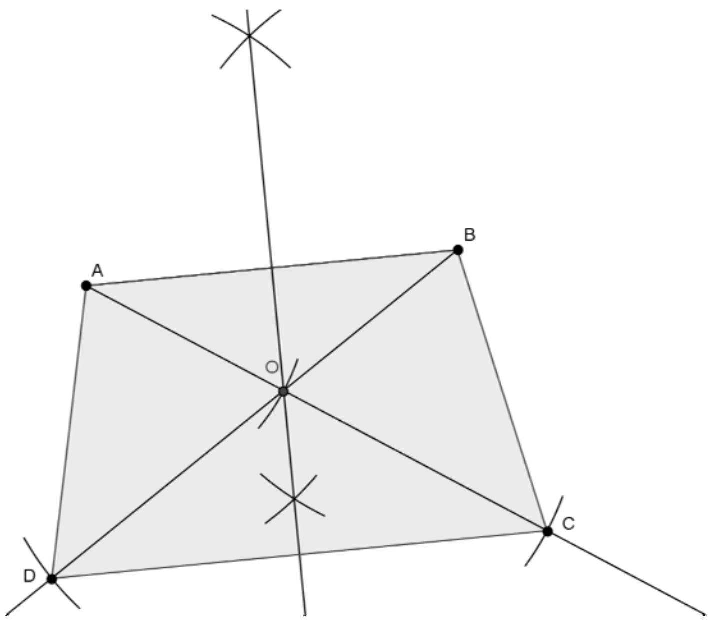
Exercice 3



1) Calcul de CD

Dans le trapèze ABCD, on a :
(AB) // (CD) car [AB] est une des bases du trapèze.
(BD) et (AC) sont sécantes en O car [BD] et [AC] sont les diagonales du trapèze.
D'après le théorème de Thalès, on a les égalités suivantes :
$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$ donc $CD = \frac{AB \times OC}{OA}$ soit $CD = \frac{20}{3}$ cm.

2) Construction



La construction est basée sur les propriétés du trapèze isocèle et notamment son axe de symétrie.
Le programme de construction est le suivant (celui-ci n'est pas demandé) :
Construire le segment [AB] de longueur 5 cm.
Tracer sa médiatrice.
Sur cette médiatrice, placer le point O tel que AO=3cm.
Sur la demi-droite [AO), placer le point C tel que OC=4cm. Sur la demi-droite [BO), placer le point D tel que OD=4cm.

Exercice 4

1) a) Détermination de d pour $N = 3899$

La division euclidienne de N par d a pour quotient q et pour reste r, on a donc l'égalité :

$$N = d \times q + r \quad \text{avec } 0 \leq r < d$$

Dans cette question, $N = 3899$, $q = 82$ et $r = 45$, ce qui donne :

$3899 = d \times 82 + 45$
$82\,d = 3899 - 45$
$82\,d = 3849$
$d = 47$

1) b) Ensemble des couples (N, d) possibles

On a $N = d \times 82 + 45$ et $0 \leq 45 < d$
$N < 4200$ donc $d \times 82 + 45 < 4200$ soit $d \leq 50$. Ainsi : $45 < d \leq 50$.
Les cinq couples (N ; d) vérifiant ces contraintes sont les suivants :
(3817 ; 46), (3899 ; 47), (3981 ; 48), (4063 ; 49), (4145 ; 50)

2) Cas où $r = 112$

On a $N = d \times 82 + 112$ et $0 \leq 112 < d$.
$d > 112$
donc $82\,d > 9184$
soit $82\,d + 112 > 9296$
c'est-à-dire $N > 9296$
Ceci est en contradiction avec $N < 4200$.
Il n'y a pas de couple solution dans ce cas.

3) Existence de couples (N, d) dans cette division euclidienne selon la valeur de r

$N = d \times 82 + r$ et $0 \leq r < d$

On a donc : $0 \leq r < \frac{(N - r)}{82}$

$0 \leq 82\,r < N - r$
$83\,r < N$
$83\,r < 4200$
$r \leq 50.$

Pour qu'un couple (N ; d) existe, avec $N < 4200$ et $q = 82$, **il faut que r soit inférieur ou égal à 50**.
Cependant, ce n'est qu'une condition nécessaire, elle n'est pas forcément suffisante.
Ainsi, on peut vérifier que la valeur $r = 50$ ne convient pas ($51 \times 82 + 50 > 4200$) au contraire de $r = 49$ et toutes les valeurs inférieures à 49.
On peut conclure que :
Pour qu'un couple (N ; d) existe, avec $N < 4200$ et $q = 82$, il faut et il suffit que r soit inférieur ou égal à 49.

PARTIE B : analyse de production d'élèves sur les notions d'aire et de périmètre

1) a) Solution utilisant des mesures

Choisissons pour unité d'aire, l'aire du carreau carré du quadrillage et comme unité de longueur, la longueur de son côté.

- Pour l'aire :

Dénombrement des petits carreaux à l'intérieur de chaque partie : 18 pour A et 24 pour B :

- par comptage un à un ;
- ou par décomposition en morceaux « bien choisis » ;
- ou par calcul du nombre total de carreaux en utilisant la formule de l'aire du rectangle : 6 × 7 = 42 ; la partie A correspond à la moitié moins 3 carreaux (42/2 – 3 = 18) et la partie B à la moitié plus trois carreaux (42/2 + 3 = 24).

Comparaison des deux nombres obtenus : l'aire de la parcelle A a pour mesure 18 et la parcelle B 24 (l'unité étant l'aire du carreau carré), donc l'aire de la parcelle B est la plus grande.

- Pour le périmètre :

Dénombrement des segments correspondant au côté du petit carreau : 22 pour A et 22 pour B.

Autre possibilité :

Calcul du demi-périmètre du rectangle plus longueur de la ligne adjacente aux deux parties… (7 + 6 + 9)…

Comparaison des deux nombres obtenus : les périmètres des parcelles A et B ont pour mesure 22 (l'unité de longueur étant la longueur du côté d'un carreau), les deux parcelles ont donc même périmètre.

1) b) Solution n'utilisant pas les mesures

- Pour l'aire :

Si on envisage la superposition, on constate que la parcelle B recouvre entièrement la parcelle A (la surface A est incluse dans la surface B), on peut donc dire que l'aire de la parcelle B est la plus grande.

Autre méthode : décomposition / recomposition des surfaces

On obtient la parcelle A en enlevant trois carreaux à un rectangle.
On obtient la parcelle B en ajoutant trois carreaux à un rectangle superposable à celui dont est issue la parcelle A.
On peut donc dire que la parcelle B a une aire plus grande que celle de la parcelle A.

- Pour le périmètre :

Les côtés des parcelles sont deux à deux superposables ; les deux parcelles ont donc même périmètre.

2) Pourquoi les élèves privilégient-ils les solutions numériques ?

La présentation utilisant le quadrillage renforce l'idée de dénombrement de carreaux ou de côtés de carreaux.
De plus, les nombres sont dans un domaine accessible pour l'élève et le dénombrement n'est pas trop fastidieux.
Les élèves privilégient donc l'utilisation de la mesure pour comparer les grandeurs.

3) Interprétation des réponses de l'élève n° 1

Sa réponse à la question a) est correcte. On peut interpréter son explication de deux manières :

- soit par dénombrement effectif et comparaison des résultats,
- soit par recours à la perception globale des deux parcelles.

Pour les périmètres, la réponse est erronée.
L'élève a certainement dénombré les carreaux intérieurs bordant la surface et non les côtés des carreaux. Et il a vraisemblablement fait une erreur dans l'énumération de ces carreaux (ce qui permet d'interpréter le nombre 17).

4) Interprétation des réponses de l'élève n° 2

Pour cet élève, la réponse à la question a) est correcte et la justification par décomposition/recomposition aussi.
Pour la question b), pour cet élève, aires et périmètres sont deux grandeurs qui évoluent dans le même sens (c'est-à-dire si l'aire de la parcelle B est la plus grande, son périmètre le sera aussi), ce qui est faux.

TROISIEME PARTIE

PARTIE A – Dénombrer des collections

1) Procédure utilisant la comptine numérique

Tâche A :
Énumérer chacun des jetons (le toucher voire le déplacer) et lui associer un mot-nombre de la comptine. Arrêter l'énumération et la récitation de la comptine lorsque le tas est épuisé et énoncer le dernier mot-nombre prononcé (reconnu comme la réponse attendue à la question).
Tâche B :
Mémoriser le nombre douze qui est le nombre de jetons demandés.
Prendre un jeton et le mettre dans le panier tout en énonçant un mot-nombre de la comptine, s'arrêter après avoir énoncé « douze » et placé ce dernier jeton dans le panier.

2) Erreurs possibles lors du dénombrement

Différentes erreurs sont possibles, deux seulement sont demandées ici :
- faire une erreur dans la récitation de la comptine ;
- faire une erreur dans l'énumération des jetons : par exemple, ne pas énoncer un seul mot-nombre pour chaque jeton désigné, compter plusieurs fois le même jeton, oublier des jetons ;
- ne pas associer le dernier mot-nombre prononcé avec le cardinal de la collection.

3) Argument justifiant la complexité de la tâche B

Même si, dans les deux cas, la procédure est basée sur la récitation de la comptine numérique avec mise en correspondance terme à terme de chaque mot-nombre énoncé avec un jeton, la tâche B est plus complexe à réaliser car elle nécessite la conservation dans la mémoire de l'élève du nombre « douze » comme but à atteindre.
De plus dans la tâche A, c'est la situation qui prend en charge l'arrêt de l'action répétée « prendre un jeton et énoncer le mot-nombre suivant » (on arrête parce qu'il n'y a plus de jeton à prendre), alors que dans la tâche B, c'est l'élève qui doit décider, en utilisant l'information conservée en mémoire, du moment où il arrête cette répétition (arrivé à « douze », il reste des jetons qu'il peut prendre dans la réserve). On peut parler d'une « double » action incluant un contrôle.

PARTIE B – Variations autour de la tâche A

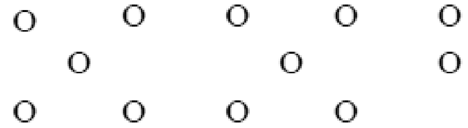
Remarque :

Globalement dans cette partie, il s'agit de mobiliser des connaissances sur les différentes procédures correctes susceptibles d'être mises en œuvre par un élève de GS dans une tâche de dénombrement d'une collection en les référant aux contraintes énoncées.

1) Procédure pour un tas de moins de quatre jetons

L'élève peut percevoir globalement la quantité (*subitizing*) sans recourir au comptage un à un.

2) Procédure pour un tas de jetons organisés comme ci-dessous



Les jetons sont ici organisés par paquets de cinq. L'élève peut reconnaitre les constellations, associer directement la quantité et s'appuyer sur certains résultats mémorisés. Il en voit ainsi cinq et encore cinq et puis deux : cinq et cinq, dix et deux, cela fait douze.

3) Incidence du remplacement des jetons par des points dessinés sur une feuille

Les objets ne sont plus déplaçables, l'élève doit organiser son pointage pour énumérer la collection. Il pourra par exemple cocher les éléments au fur et à mesure du comptage ou les relier.

PARTIE C – Variations autour de la tâche B

Remarque :

Globalement dans cette partie, il s'agit de mobiliser des connaissances sur les différentes procédures correctes susceptibles d'être mises en œuvre par un élève de GS dans une tâche de construction d'une collection en les référant à la façon dont le cardinal est présenté (mot-nombre prononcé, carte « constellation », écriture chiffrée…).

1) Procédure, différente de celle décrite dans la question 1, utilisable pour réaliser la tâche

Remarque :

Le fait que la carte puisse être à la disposition de l'élève tout le temps ou non est une variable de la situation. De même pour le nombre de voyages possibles pour réaliser la tâche.

Si la carte peut être transportée par l'élève :

Une procédure possible consiste en faire de l'appariement un à un (entre les points de la carte et les jetons).

Si la carte ne peut pas être transportée par l'élève :

L'élève doit d'abord dénombrer sur la carte le nombre de points ou mémoriser une décomposition de la collection elle-même grâce à la carte « constellation ». Il doit constituer ensuite une collection de même cardinal, par exemple en prenant 5 jetons, puis 5 jetons, puis 2 jetons.

Remarque :

Si l'élève dispose de la carte, il peut réaliser un contrôle de son résultat en superposant les jetons sur les points de la carte, soit au cours du jeu, soit à la fin.

2) Connaissance évaluée

Le maître souhaite vérifier que l'élève reconnait l'écriture chiffrée d'un nombre à deux chiffres ou sait associer le nom des nombres (mot-nombre) à leur écriture chiffrée.

PARTIE D – Variations autour de la tâche « Comparer des quantités »

Remarque :

Globalement dans cette partie, il s'agit de mobiliser des connaissances sur les différentes procédures correctes susceptibles d'être mises en œuvre par un élève de GS dans une tâche de comparaison de deux collections en les référant à la façon dont ces collections sont présentées. Dans les questions 1 et 2, les variables sont énoncées (proximité ou éloignement des deux collections constituées d'objets mobiles) dans la question alors que dans la question 3 le candidat doit identifier les variables (collections dessinées, cardinal de chaque collection, écart entre les deux, disposition des éléments dans les collections…) et les choix relatifs à celles-ci pour chaque item.

1) Procédure lorsque les collections sont proches

L'élève peut apparier parallèlement un élément d'une collection à un élément et un seul de l'autre et continuer tant que l'une collection n'est pas épuisée. À la fin, la collection qui contient encore des jetons est celle qui a le plus grand nombre d'éléments.

2) Procédure lorsque les collections sont éloignées

Si les collections sont éloignées l'une de l'autre, on peut procéder ainsi : isoler un élément de la première collection, puis isoler un élément de la seconde collection et recommencer ainsi jusqu'à ce que tous les éléments d'au moins une collection soient séparés. S'il reste des éléments non séparés dans une collection, alors cette collection a plus d'éléments que l'autre. (Remarque : si tous les éléments des deux collections ont pu être ainsi isolés par paire, alors les deux collections ont le même nombre d'éléments).
On peut également dénombrer chacune des deux collections et comparer les nombres obtenus.

3) Procédure de comparaison et variable didactique l'induisant

- Item 1 :
Comparaison perceptive des collections.
Les collections sont non organisées, la différence entre les nombres d'éléments est grande pour que la comparaison par la perception soit possible.

- Item 2 :
Comparaison directe des collections
La différence entre les nombres d'éléments est faible mais le fait que les collections soient organisées en parallèle (favorisant l'appariement un à un) permet de voir facilement l'élément en plus.

- Item 3 :
Reconnaissance immédiate (*subitizing*) de la collection de cardinal le plus important.
C'est la faible taille des collections qui permet cette procédure.

- Item 4 :
Reconnaissance immédiate des constellations et comparaison (soit en passant par le nombre, soit à partir d'une connaissance ordonnée des constellations).
C'est l'organisation en constellations qui permet cette procédure.

- Item 5 :
Recours au comptage et à la comparaison des nombres obtenus.
C'est le fait que les cardinaux des collections soient grands, que leur différence soit faible et que l'une des collections soit désorganisée qui induisent une procédure par comptage.

- Item 6 :
Recours à l'appariement paquet par paquet, ou au dénombrement des deux collections.
La grande taille des collections, ainsi que le fait qu'elles soient non organisées et de cardinaux apparemment proches incitent à faire des groupements pour dénombrer ou apparier des sous-collections.

GROUPEMENT 1 – avril 2014

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME

PARTIE A : Chez les Mayas

1) Aire d'un carré de côté de longueur *a*

L'aire d'un carré de côté de longueur a est a^2.
Les diagonales d'un carré ont la même longueur. Pour un carré de côté a, cette longueur est $a\sqrt{2}$.
On a donc, avec l'estimation Maya :

$$\frac{\mathrm{D} \times \mathrm{d}}{2} = \frac{a\sqrt{2} \times a\sqrt{2}}{2} = a^2$$

L'estimation Maya donne donc la valeur exacte de l'aire d'un carré de côté de longueur *a*.

Remarque :
On peut retrouver la longueur de la diagonale d'un carré de côté a en appliquant le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle isocèle formé de deux côtés consécutifs du carré et d'une diagonale.

2) Aire d'un rectangle de longueur 4 cm et de largeur 3 cm

L'aire d'un rectangle de longueur 4 cm et de largeur 3 cm est de 4 cm × 3 cm, soit 12 cm^2.
Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.
On applique le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle formé d'une longueur, d'une largeur et d'une diagonale du rectangle. La diagonale est l'hypoténuse du triangle rectangle, elle a pour longueur $\sqrt{4^2 + 3^2}$ cm, soit 5 cm.
On a donc, avec l'estimation Maya :

$$\frac{\mathrm{D \, x \, d}}{2} = \frac{5\text{ cm} \times 5\text{ cm}}{2}$$

soit une aire de 12,5 cm^2.
12,5 ≠ 12 donc l'estimation Maya ne donne pas la valeur exacte de l'aire du rectangle.

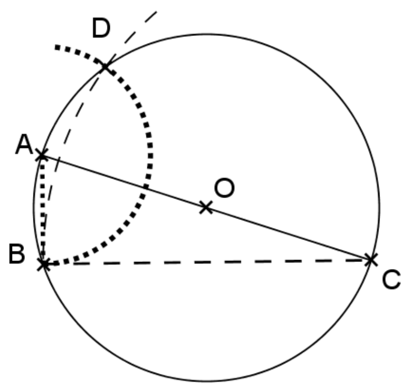
Remarque :
La longueur de la diagonale du rectangle de longueur 4 cm et de largeur 3 cm peut être aussi déterminée en faisant référence au triplet pythagoricien (3, 4, 5).

PARTIE B : Chez les indiens

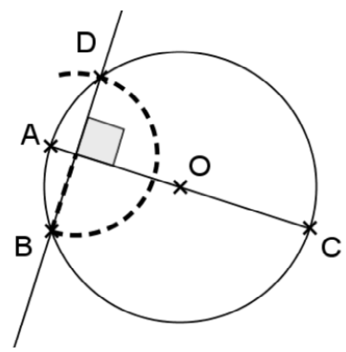
1) Étude d'une configuration particulière

a) Construction

Méthode1



Méthode 2



b) Le quadrilatère ABCD est inscriptible dans le cercle Γ

Par définition, les points A et C sont diamétralement opposés sur le cercle Γ et B est un point de ce cercle. Il reste donc à prouver l'appartenance du point D au cercle Γ.

Méthode 1

[AC] est un diamètre du cercle Γ donc la droite (AC) est un axe de symétrie du cercle Γ.
Ainsi, le symétrique d'un point du cercle par rapport à l'axe (AC) est un point du cercle.
Or B appartient au cercle Γ, donc son symétrique par rapport à (AC), le point D, appartient aussi au cercle Γ.

Méthode 2

Soit O le centre du cercle Γ.
O, centre du cercle Γ, appartient au diamètre [AC]. Le symétrique du point O par rapport à la droite (AC) est donc le point O lui-même. Or D est le symétrique de B par rapport à la droite (AC), donc le segment [OD] est le symétrique du segment [OB] par rapport à la droite (AC). Or la symétrie conserve les longueurs, donc OD = OB et par conséquent, D est sur le cercle de centre O passant par B, c'est-à-dire sur le cercle Γ.

Méthode 3

B est un point du cercle de diamètre [AC], distinct des points A et C, donc le triangle ABC est rectangle en B.
Les points A et C sont invariants par la symétrie d'axe (AC), le point D est le symétrique du point B par la symétrie d'axe (AC), donc le triangle ADC est le symétrique du triangle ABC par la symétrie d'axe (AC).
Or la symétrie conserve la nature des figures donc le triangle ADC est rectangle en D. On en déduit que le point D appartient au cercle de diamètre [AC].

c) Aire de ABCD avec la formule de Brahmagupta

Le périmètre de ABCD est égal à AB + BC + CD + DA.
Le point D est le symétrique du point B par rapport à l'axe (AC) donc AD = AB et CB = CD.
On a donc :
$p = \frac{\text{AB+BC+CD+DA}}{2} = \frac{\text{AB+BC+BC+AB}}{2} = \frac{\text{2AB+2BC}}{2} = \text{AB + BC}$.
En appliquant la formule de Brahmagupta avec p = AB + BC, $a = b$ = AB et $c = d$ = BC, on obtient :

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(\text{AB} + \text{BC} - \text{AB})(\text{AB} + \text{BC} - \text{AB})(\text{AB} + \text{BC} - \text{BC})(\text{AB} + \text{BC} - \text{BC})} \\ &= \sqrt{\text{BC}^2 \times \text{AB}^2} \\ &= \text{BC} \times \text{AB} \end{aligned}$$

d) Aire de ABCD par une autre méthode

On décompose le quadrilatère ABCD en deux triangles : ABC et ADC.
B est un point du cercle de diamètre [AC], distinct des points A et C donc le triangle ABC est rectangle en B.
Le point D est le symétrique du point B par la symétrie d'axe (AC), donc le triangle ADC est le symétrique du triangle ABC par la symétrie d'axe (AC).
Or la symétrie axiale conserve les aires, donc les triangles ADC et ABC ont la même aire.
L'aire du quadrilatère ABCD est donc égale à deux fois l'aire du triangle rectangle ABC, soit à AB × BC.

2) Étude d'une autre configuration particulière : le rectangle

a) Rectangle inscriptible dans un cercle

Les diagonales d'un rectangle sont de la même longueur et se coupent en leurs milieux. Les sommets du rectangle sont donc tous situés à la même distance du point d'intersection des diagonales. Ces points appartiennent donc à un même cercle : le cercle qui a comme centre le point d'intersection des diagonales, et comme rayon la demi-longueur d'une diagonale. Un rectangle est donc inscriptible dans un cercle.

b) Aire d'un rectangle avec la formule de Brahmagupta

Un rectangle est un quadrilatère non croisé.
En appliquant la formule de Brahmagupta avec $p = L + l$, $a = b = L$ et $c = d = l$, on obtient :

S = $\sqrt{(L+l-L)(L+l-L)(L+l-l)(L+l-l)}$
  = $\sqrt{l^{2}L^2}$
  = $l \times L$
On retrouve bien l'expression usuelle de l'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur l.

PARTIE C : À l'ère du tableur

1) Valeurs de *x*

x est la mesure d'un des côtés du rectangle donc les valeurs de x sont positives.
Soit y la mesure de l'autre côté du rectangle. Le périmètre du rectangle est 14 cm, donc $2x + 2y = 14$, soit $x + y = 7$ et donc $y = 7 - x$. Les valeurs de y sont positives : x doit donc être inférieur à 7.
Les valeurs de x sont donc comprises entre 0 et 7 (strictement si on exclut le cas des rectangles aplatis).

2) Étude graphique

a) Dimensions d'un rectangle de périmètre 14 cm et d'aire 10 cm²

La courbe admet deux points d'ordonnée 10. Les abscisses de ces points sont 2 et 5.
Si $x = 2$, alors $y = 7 - 2 = 5$: cela correspond à un rectangle de dimensions 2 cm et 5 cm.
Si $x = 5$, alors $y = 7 - 5 = 2$: on obtient les mêmes dimensions que le rectangle précédent.
Un rectangle de périmètre 14 cm et d'aire 10 cm² a donc comme dimensions 2 cm et 5 cm.

b) Encadrement de x

La valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle est maximale est comprise entre les entiers consécutifs 3 et 4.

c) Encadrement de l'aire maximale

L'aire maximale est comprise entre 12 cm² et 13 cm².

3) À l'aide du tableur

a) Formule

Quelle que soit la valeur de x comprise entre 0 et 7, la mesure de l'aire du rectangle A(x) est égale à xy avec $y = 7 - x$ (question C1), donc A(x) = $x.(7 - x)$.

La formule à entrer dans la cellule B2 est donc $\boxed{\text{= B1 * (7 – B1)}}$ ou $\boxed{\text{= 7*B1 – B1^2}}$

ou encore $\boxed{\text{= B\$1*(7 – B\$1)}}$ ou $\boxed{\text{= 7*B\$1 – B\$1^2}}$.

b) Encadrement de *x*

D'après la courbe, la fonction A semble être croissante puis ensuite décroissante.
D'après le tableau, l'aire semble être maximale pour une valeur de x comprise entre 3,4 et 3,6.
L'aire maximale semble être environ égale à 12,25 cm²

4) Détermination des valeurs exactes

a) Pour tout x de l'intervalle [0 ; 7],

$$\frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} - \left(x^2 - 2 \times \frac{7}{2} \times x + \left(\frac{7}{2}\right)^2\right) = \frac{49}{4} - x^2 + 7x - \frac{49}{4} = -x^2 + 7x = x(7-x) = \mathrm{A}(x)$$

b) La mesure de l'aire $\frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$ est maximale lorsque le nombre positif $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$ est le plus petit possible, donc lorsque $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 0$, soit lorsque $x = \frac{7}{2}$.

$$A\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4} - \left(\frac{7}{2} - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} = 12{,}25$$

L'aire maximale est donc égale à 12,25 cm².

c) Le rectangle de périmètre 14 cm et d'aire maximale 12,25 cm^2 a un côté de longueur $\frac{7}{2}$ cm, soit 3,5 cm et l'autre de longueur 7 cm – 3,5 cm = 3,5cm.

Or un rectangle avec deux côtés consécutifs de même longueur est un carré, il s'agit donc d'un carré de côté 3,5 cm.

DEUXIEME PARTIE

Exercice 1

1) Performance (en minutes) du dernier arrivé.

Le dernier arrivé est l'élève dont la durée de parcours a été la plus longue. On cherche donc la valeur maximale de la série de données.
On connaît la valeur minimale : 12,5 min.
On connaît l'étendue, qui est par définition la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale : 4,2 min.
On en déduit la valeur maximale de la série : $12{,}5 \text{ min} + 4{,}2 \text{ min} = 16{,}7 \text{ min}$.
Le dernier arrivé a donc couru pendant 16,7 minutes.

2) Somme (en minutes) des 200 performances.

On connaît la valeur moyenne de la série : 15,4 min.
Or, par définition, la valeur moyenne est égale au quotient décimal de la somme des données par l'effectif de la série (ici égal à 200).
$200 \times 15{,}4 \text{ min} = 3\,080 \text{ min}$: la somme des 200 performances est donc égale à 3 080 minutes.

3) Encadrement le plus précis possible de la performance en minutes de l'élève arrivée treizième.

On considère que le premier quartile d'une série est la plus petite valeur Q_1 de la série telle qu'au moins un quart (25%) des valeurs de la série soient inférieures ou égales à Q_1.

Ici il vaut 14,8 min, et l'effectif de la série est égal à 200.
Or 200 : 4 = 50 : l'élève qui est arrivé 50ème a donc mis 14,8 min.

Ariane, arrivée treizième, a donc mis au plus 14,8 min.
Par ailleurs, le gagnant du cross a mis 12,5 min (cf. minimum de la série).
On en déduit que la performance d'Ariane est comprise entre 12,5 min et 14,8 min.
Les informations fournies ne permettent pas d'en dire plus.

4) Vrai ou faux ? « Plus de 50% des élèves ont mis un temps supérieur au temps moyen ».

On rappelle que la médiane d'une série numérique est une valeur *m* telle que le nombre des valeurs de la série inférieures ou égales à *m* est égal au nombre des valeurs de la série supérieures ou égales à *m*.

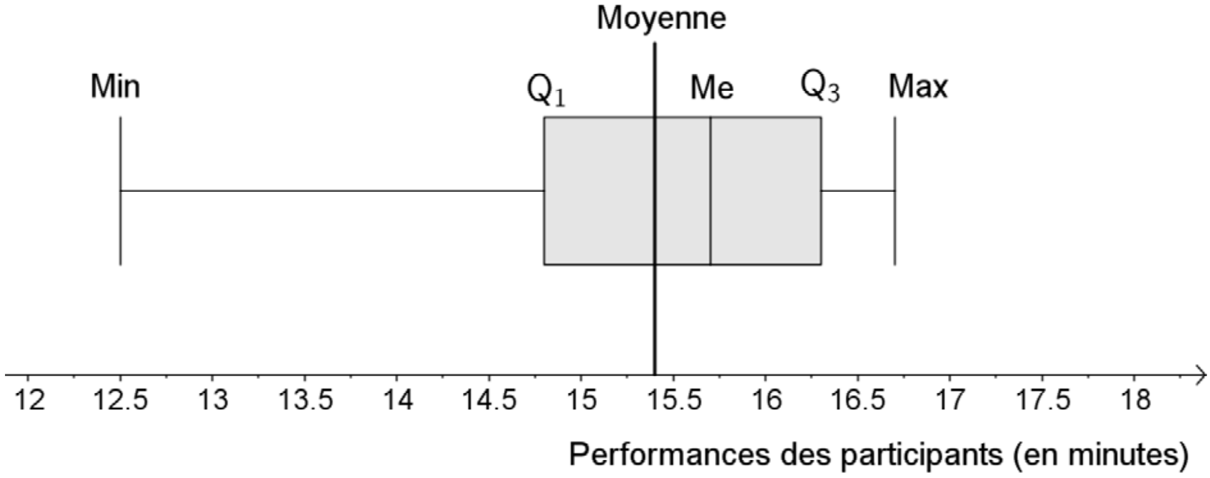
Ici, la médiane de la série est égale à 15,7 min : on peut en déduire que 50% des valeurs de la série sont supérieures ou égales à 15,7 min. *A fortiori*, on peut donc affirmer que 50% des valeurs de la série sont supérieures ou égales à 15,4 min, qui est la valeur moyenne de la série.

Les affirmations « 50% ou plus des élèves ont mis un temps supérieur ou égal au temps moyen » ou « Au moins 50% des élèves ont mis un temps supérieur ou égal au temps moyen » sont donc vraies.

En revanche, on ne peut pas se prononcer sur l'affirmation « <u>Plus de</u> 50% des élèves ont mis un temps supérieur au temps moyen » (comprise comme « Strictement plus de 50% des élèves … ») : étant donné les valeurs connues, elle peut en effet être vraie (par exemple si l'élève arrivé 100ème a mis 15,6 min) ou fausse (par exemple si l'élève arrivé 100ème a mis 15,3 min).

Remarque :

Pour faciliter le raisonnement tout au long de cet exercice, on peut réaliser un diagramme en boîtes de la série - où l'on représente les valeurs extrêmes (Min et Max), la médiane (Me) et les premier et troisième quartiles (Q_1 et Q_3) de la série - en ajoutant une représentation de la moyenne.



Exercice 2

1) **Affirmation 1 : « La somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5 ».**

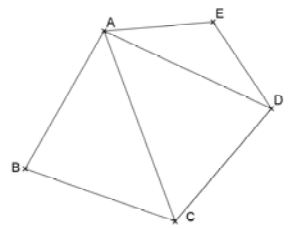
On considère un nombre entier quelconque, que l'on note n.
Ses successeurs sont $n+1, n+2, n+3, n+4$.
On calcule la somme de ces cinq nombres :

$$n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 = 5n + 10 = 5(n + 2).$$

Quelle que soit la valeur de l'entier n, $n + 2$ est aussi un nombre entier.
$5(n + 2)$ est donc un multiple de 5.
La somme du nombre n et de ses quatre successeurs est donc un multiple de 5.
L'affirmation est donc vraie.

2) **Affirmation 2 : « La somme des angles d'un pentagone convexe est égale à 540°.**

Soit ABCDE un pentagone convexe quelconque.
Comme il est convexe, les diagonales [AC] et [AD] sont entièrement situées à l'intérieur du pentagone.
On admet alors que le pentagone ABCDE peut être pavé par les trois triangles ABC, ACD et ADE, et que la somme des angles du pentagone est égale à la somme des angles des trois triangles.
On sait que la somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°.
Comme $180° \times 3 = 540°$, **l'affirmation est vraie.**



3) **Affirmation 3 « Sur un plan fait à l'échelle 1/50, les aires sur le plan sont 50 fois plus petites que les aires réelles ».**

Une première justification possible, en s'appuyant sur les propriétés des agrandissements / réductions.

Dire que le plan est réalisé à l'échelle 1/50 signifie que pour construire le plan, les longueurs réelles sont divisées par 50. On sait qu'alors les aires sur le plan sont divisées par 50^2, soit 2500, et non par 50. L'affirmation est donc fausse.

Une deuxième justification possible, en ayant recours à un contre-exemple.

Considérons par exemple une surface carrée, dont le côté a pour longueur 5 m dans la réalité.
Sur le plan, elle est représentée par un carré dont la longueur est 50 fois plus petite, soit 10 cm.
La surface réelle a comme aire $(5\text{m})^2$, soit 25 m^2, tandis que la surface représentée a comme aire $(10\text{ cm})^2$, soit 100 cm^2.
Or 25 m^2 = 250 000 cm^2 = 2500×100 cm^2. L'aire a donc été divisée par 2500, et non par 50. L'affirmation est donc fausse.

4) Shéhérazade commence à lire un conte un lundi soir. Elle lit 1001 nuits consécutives.
Affirmation 4 : « Elle terminera un dimanche soir ».

Shéhérazade commence à lire un lundi soir ; sa première nuit de lecture est donc la nuit du dimanche au lundi, et sa 7ème nuit de lecture est la nuit du dimanche au lundi suivants.

On effectue la division euclidienne de 1001 nuits par 7 : $1001 = 7 \times 143$.
Shéhérazade va donc lire tous les soirs de 143 semaines, et sa dernière nuit de lecture sera la nuit du dimanche au lundi achevant sa 143ème semaine de lecture.

Si elle termine sa lecture avant minuit, elle terminera donc sa lecture un dimanche soir : dans ce cas l'affirmation est vraie.
Si elle termine après minuit, elle terminera sa lecture un lundi matin : dans ce cas l'affirmation est fausse.
On ne peut donc pas répondre de manière ferme à la question posée.

Exercice 3

1) Heure d'arrivée du cycliste à la ville B.

Calcul de la durée du parcours sans formule.

Le cycliste roule à 30 km/h. Cela signifie qu'en une heure il effectue 30 km, et qu'en une demi-heure, il effectue la moitié de 30 km, soit 15 km. Il met donc 1h30 pour effectuer les 45 km qui séparent les villes A et B.

Calcul de la durée du parcours à l'aide de la formule reliant la distance parcourue, la durée du parcours et la vitesse sur le parcours..

La durée du parcours est égale au quotient de la distance parcourue par la vitesse du parcours :

$$\frac{45 \text{ km}}{30 \text{ km/h}} = 1{,}5 \text{ h}$$

Conclusion :
Le cycliste part de la ville A à 9h30 et il roule pendant 1h 30. Il arrive donc dans la ville B à 11h.

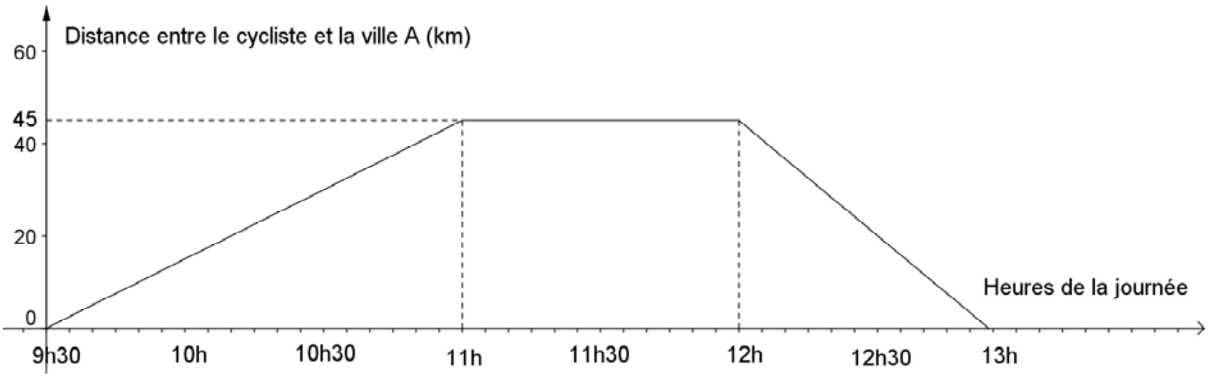
2) Représentation graphique de la distance entre le cycliste et la ville A en fonction de l'heure de la journée.

On découpe l'intégralité du parcours en trois intervalles de temps : l'aller, la pause et le retour.
Pendant l'aller (c'est-à-dire entre 9h30 et 11h), la vitesse est constante, donc la distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours. Dans un repère dont l'origine a pour abscisse 9h30, la représentation graphique de la distance parcourue en fonction de l'heure (instant) est donc un segment. Ce segment a pour extrémités le point de coordonnées (9h30 ; 0 km) et le point de coordonnées (11h ; 45 km).

Pendant la pause (qui dure 1 heure, et qui s'étend donc entre 11h et midi), la distance à la ville A reste constante, égale à 45 km. Sa représentation graphique est donc le segment qui relie le point de coordonnées (11h ; 45 km) au point de coordonnées (12h ; 45 km).

Enfin, pendant le retour, la vitesse est constante, donc la distance parcourue depuis la pause est proportionnelle à la durée du parcours écoulée depuis la pause. La distance entre le cycliste et la ville A, qui est la différence entre 45 km et la distance parcourue depuis la pause, est donc une fonction affine de l'heure (instant) entre le départ de B et l'arrivée en A, et la représentation graphique de cette relation est un segment qui a comme extrémités les points de coordonnées (12h ; 45 km) et (H ; 0 km), où H est l'heure d'arrivée en A.

Pour déterminer H, on calcule la durée du retour. La vitesse est alors 50 km/h. Le cycliste effectue ainsi 5 km en un dixième d'heure, donc en 6 minutes ; il lui faut donc 54 minutes (9 fois plus) pour effectuer 45 km.
Le cycliste, parti à 12h, arrive donc en A à 12h54 (H = 12h54).



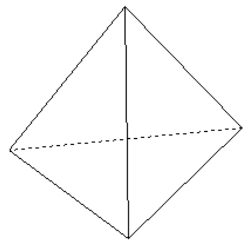
Remarque :

En procédant ainsi, on anticipe la réponse à la question 3 à suivre. On aurait aussi pu construire la représentation graphique sur la dernière tranche sans calculer la durée du parcours, par exemple en remarquant que, comme le cycliste se déplace à 50 km/h, il parcourt 25 km en 30 min. Le segment représentant le trajet du retour a donc comme première extrémité le point de coordonnées (12h ; 45 km), passe par le point de coordonnées (12h 30 ; 20 km) (car 45 km – 25 km = 20 km), et a comme deuxième extrémité le point d'ordonnée nulle situé sur la demi-droite ainsi amorcée.

Exercice 4

1) Comparaison entre la probabilité d'obtenir le nombre 1 et celle d'obtenir le nombre 3 au septième lancer.

Le dé tétraédrique est supposé équilibré : cela signifie qu'à chaque lancer (et quel que soit le rang de ce lancer dans la suite des lancers successifs), chacune des faces du dé a la même probabilité d'être obtenue : $\frac{1}{4}$.
En particulier, les probabilités d'obtenir 1 et 3 au septième lancer sont égales.



Remarque :

Pour répondre à la question, on a supposé implicitement que les lancers successifs sont indépendants : les résultats des lancers précédents n'ont aucune influence sur les probabilités d'apparition de chacune des faces au septième lancer.

2) Étude des issues de deux lancers consécutifs.

a) Probabilité d'obtenir une seule fois le nombre 1 lors des deux lancers.

On peut représenter l'ensemble des résultats possibles à l'aide d'un tableau à double entrée, dans lequel on indique par une croix les couples de résultats pour lesquels on obtient une seule fois le nombre 1.

Résultat du premier lancer / Résultat du deuxième lancer	1	2	3	4
1		x	x	x
2	x			
3	x			
4	x			

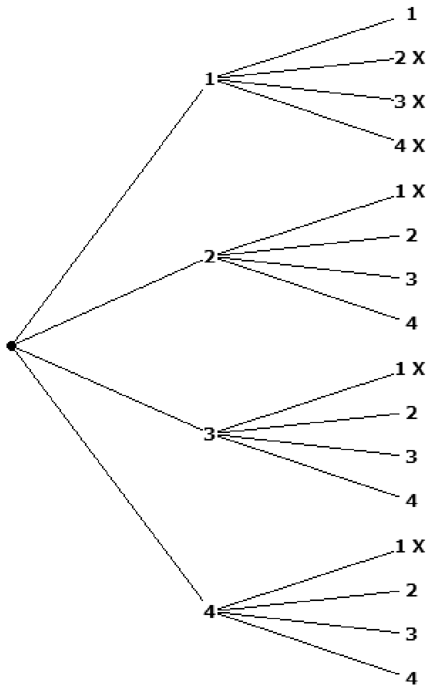
Parmi les seize couples de résultats possibles, six satisfont la condition « on obtient une seule fois le nombre 1 ». Tous les couples de résultats sont équiprobables (car le dé est équilibré et le résultat du premier lancer n'a pas d'influence sur le résultat du 2ème). On peut donc en déduire que la probabilité d'obtenir une seule fois le nombre 1 au cours des deux lancers est égale à $\frac{6}{16}$ (soit $\frac{3}{8}$ ou 0,375).

Remarque :

On peut raisonner de la même manière avec un arbre des résultats possibles (à gauche ci-dessous) ou avec un arbre de probabilités (à droite ci-dessous) :

Arbre des possibles

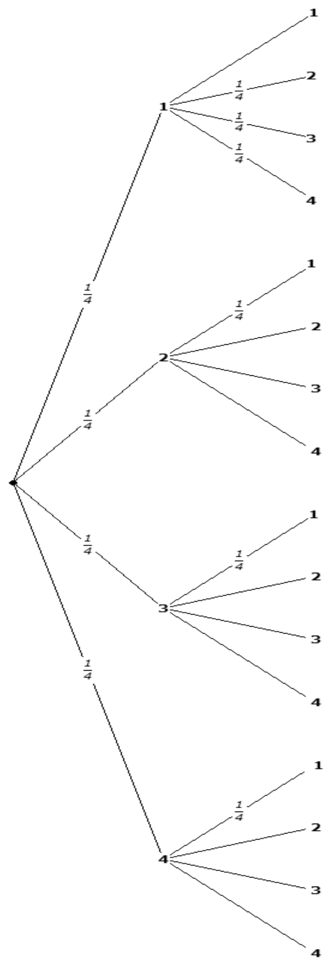
Résultat du 1er lancer *Résultat du 2nd lancer*



L'événement « on obtient une seule fois le nombre 1 » est réalisé pour 6 chemins parmi 16 équiprobables, donc la probabilité de cet événement est égale à $\frac{6}{16}$.

Arbre de probabilités

Résultat du 1er lancer *Résultat du 2nd lancer*



On retrouve le résultat obtenu par les deux méthodes précédentes : $6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{16}$.

b) Probabilité d'obtenir au deuxième lancer un nombre strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer.

On peut adapter chacune des démarches décrites dans la question précédente. On présente seulement ici la démarche qui s'appuie sur le tableau à double entrée, dans lequel on repère cette fois-ci les couples de résultats pour lesquels le nombre obtenu au deuxième lancer est strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer.

Résultat du premier lancer / **Résultat du deuxième lancer**	**1**	**2**	**3**	**4**
1				
2	x			
3	x	x		
4	x	x	x	

Parmi les seize couples de résultats possibles, six satisfont la condition « le nombre obtenu au deuxième lancer est strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer». Comme ci-dessus, on en déduit que la probabilité que cet événement soit réalisé est égale à $\frac{6}{16}$ (soit $\frac{3}{8}$ ou 0,375).

TROISIEME PARTIE

EXERCICE 1

1) Compétences mathématiques travaillées lors de ce jeu.

Remarque :

L'énoncé demandait de citer deux compétences. Il n'est pas évident de n'en distinguer que deux, car si une compétence générale s'impose (« comparer des quantités »), il est ensuite délicat de privilégier une compétence parmi les compétences diverses permettant d'effectuer la comparaison de deux quantités : tout dépend de la procédure choisie… qui elle-même dépend des cartes à comparer.

Cependant, si l'on se réfère aux compétences mentionnées explicitement dans les programmes officiels de 2008, on peut dégager les deux compétences suivantes, qui étaient probablement les deux compétences attendues :

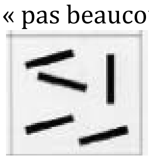
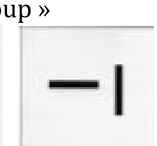
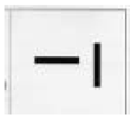
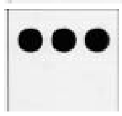
- comparer des quantités ;
- dénombrer une quantité (par reconnaissance immédiate des quantités ou par comptage ; cette compétence n'est pas toujours utile selon les couples de cartes tirées, mais elle peut l'être à certains moments du jeu).

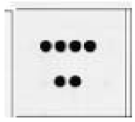
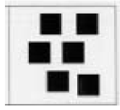
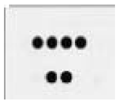
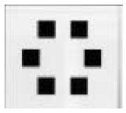
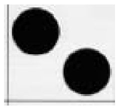
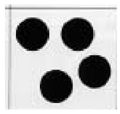
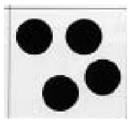
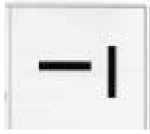
Cependant, il paraît aussi possible de distinguer les deux compétences suivantes, comme les programmes de 2002 le faisaient :

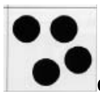
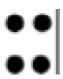
- comparer des quantités en utilisant des procédures non numériques ;
- comparer des quantités en utilisant des procédures numériques.

Remarque :

On peut penser que l'on n'attendait pas plus de détails de la part des candidats (dans la mesure où il était simplement demandé de « citer » deux compétences). En particulier, dans cette question, ***<u>il n'était pas demandé de décrire des procédures</u>****. Dans la suite, nous en explicitons néanmoins plusieurs : ceci nous permet de mentionner d'autres compétences qui peuvent être travaillées dans ce jeu de bataille, et ceci nous parait utile pour pouvoir ensuite anticiper et comprendre certaines difficultés ou erreurs d'élèves.*

Des procédures de **comparaison** possibles, et des compétences associées	Des couples de cartes pour lesquelles elles peuvent être utilisées.
Comparaison perceptive immédiate quand l'écart entre les deux quantités est grand ; cette procédure met en jeu des compétences visuo-spatiales permettant de faire une distinction entre « beaucoup » et « pas beaucoup ».	Exemple : «beaucoup » / « pas beaucoup »  
Reconnaissance et comparaison directe pour les quantités un, deux ou trois (sans mention de la désignation orale). Cette procédure met en jeu des compétences visuo-spatiales où la reconnaissance de petites collections se fait de façon visuelle globale (par subitizing).	 moins que 

Comparaison directe des collections, en utilisant une correspondance terme à terme ou groupe à groupe : ceci requiert notamment des compétences d'énumération des collections (qui sont différentes selon que la collection à énumérer est organisée ou « en vrac ».)	 et  par comparaison deux par deux ou quatre et deux
Comparaison indirecte des collections par utilisation d'une collection de doigts intermédiaire : ceci requiert aussi des compétences d'énumération des collections.	 et 
Comparaison par repérage de l'inclusion d'une collection dans une autre.	 et  ici voir 2 dans 4 et donc 4 l'emporte.
Comparaison par dénombrement des deux collections, puis comparaison des nombres ainsi obtenus : ceci requiert des compétences en dénombrement (cf. ci-dessous) puis des compétences pour comparer deux nombres. A l'école maternelle, la comparaison de deux nombres peut se faire par différentes procédures : - soit par appui sur les désignations orales : en récitant la comptine numérique, et en sachant que plus on est loin dans la comptine, plus le nombre est grand (en effet on ajoute un en prononçant le mot-nombre suivant) … - soit par appui sur les désignations orales en sachant directement quel est le plus grand nombre (après des expériences multiples ayant conduit à la mémorisation de certains faits numériques) ; - soit par appui sur les écritures chiffrées (pour des nombres dont le passage de la désignation orale à l'écriture chiffrée est maîtrisé), en sachant que plus un nombre est situé « à droite » sur une bande numérique orientée, plus il est grand (équivalent de ce qui se passe à l'oral sur le support écrit).	  c'est 4 et c'est 2 et 4 est plus grand que 2

Des procédures de **dénombrement** possibles.	Des cartes pour lesquelles elles peuvent être mobilisées.
Dénombrement par subitizing avec la reconnaissance globale du cardinal d'une collection comportant un, deux ou trois objets.	
Dénombrer en utilisant la suite orale des nombres connues : ceci requiert notamment des compétences d'énumération des collections, la connaissance de la comptine numérique sur un champ suffisant, et la compréhension que le dernier-mot nombre prononcé correspond au cardinal de la collection. Ceci nécessite donc d'avoir repéré les unités (ce que l'on va dénombrer) et de totaliser.	
Dénombrement par reconnaissance de constellations connues (configurations spatiales particulières, par exemple du dé) par déplacement mental	 devient 
Dénombrement par usage d'une collection témoin de doigts dont le cardinal est connu et mémorisé.	 on peut énumérer (sans nombre) les objets de

	cette carte avec les doigts de la main et on reconnaît  qui correspond directement à 5.
Dénombrement en deux temps : dénombrement d'une partie de la collection, puis surcomptage .	 trois (reconnaissance immédiate pour la collection en haut à gauche), quatre, cinq, six : ça fait six.
Dénombrement par usage de faits numériques mémorisés.	 ici trois et trois font six

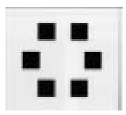
Enfin, il nous semble important de mentionner qu'avant de pouvoir faire un travail sur la comparaison de quantités, l'élève doit avoir compris sur quel « aspect » des collections on souhaite qu'il porte son attention : la notion de quantité doit avoir du sens. L'élève doit notamment avoir compris que lorsqu'on travaille sur les quantités et sur le nombre, on ne se préoccupe pas de l'espace occupé, ni de la taille des objets (autrement dit, l'élève doit être capable « d'inhiber ses impressions »). Cette compétence n'était sans doute pas une des réponses attendues dans ce sujet mais est nécessaire à toute comparaison de quantités.

2) Des causes d'erreurs possibles.

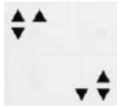
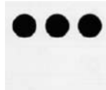
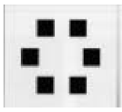
Remarque :

L'énoncé demandait de répondre en référence aux deux compétences citées dans la question 1.

Erreurs en lien avec la compétence « comparer des quantités »

Caractérisation d'une erreur	Exemple
L'élève se laisse tromper par ses premières impressions sur la qualité (et non la quantité) de la collection (espace occupé par les objets, taille des objets, forme des objets ...)	Il y a plus dans  que dans  car il y a plus d'espace utilisé, « cela prend plus de place ».
L'élève pense que deux collections qui ont été rangées, organisées de manière identique sont les mêmes.	 et  : c'est pareil, car cela se ressemble.
L'élève se trompe dans la comparaison de deux nombres après avoir dénombré correctement les deux collections.	«Là il y a 8, là il y a 7, et 8 c'est plus petit que 5. »
L'élève oublie un objet, ou le prend en compte plusieurs fois (erreur dans l'énumération)	 L'élève peut oublier par quel carré il a commencé.

Erreurs en lien avec la compétence « dénombrer une quantité »

Une caractérisation d'une erreur	Un exemple
L'élève voit la collection comme un tout et ne repère pas les unités.	 une diagonale
L'élève se trompe dans la lecture de la carte, il ne prend en compte qu'une partie des éléments.	 et  sont « pareils » si un seul des deux trios est « lu » sur la première carte.
L'élève se trompe dans la récitation de la comptine dans une procédure par comptage.	exemple : « un, deux, quatre … »)
L'élève synchronise mal la récitation de la comptine et de l'énumération de la collection.	L'élève dit « quatre, cinq, six » pendant que son doigt glisse du quatrième au cinquième objet.
L'élève se trompe en restituant un fait numérique mal mémorisé (premiers éléments de la « table » d'addition et/ou des doubles).	« quatre et trois ça fait huit ».
L'élève oublie un objet, ou le prend en compte plusieurs fois (erreur dans l'énumération)	 L'élève peut oublier par quel carré il a commencé.

Remarque :
Une erreur de dénombrement peut générer une erreur du résultat de la comparaison.

3) Comparaison des intérêts respectifs de chacun des jeux au regard des compétences envisagées dans la première question.

1) Dans le premier jeu, les éléments de chaque carte sont de formes mais surtout de tailles différentes, tandis que dans le deuxième jeu, les éléments de chaque carte ont des dimensions à peu près identiques.
   Cette variable « espace occupé » du premier jeu peut être un enjeu du travail sur la compétence « comparer des quantités » (apprendre à construire la quantité indépendamment de l'espace occupé, de la disposition et de la nature des objets). Cette variable peut néanmoins constituer un obstacle à la réussite des élèves dans la comparaison.

2) Dans le premier jeu, la disposition des éléments ne correspond pas aux constellations classiques (ou demande un travail mental pour s'y rapprocher) et donc le jeu est de nature à développer une plus grande variété de procédures pour comparer les collections. Ce jeu favorise donc la diversité des procédures de comparaison.
   Dans le deuxième jeu, en revanche, la disposition des objets correspond à celle des points des faces de dés : si ces constellations sont connues de l'élève, et si l'élève a mémorisé comment les quantités associées sont rangées, rien ne l'incitera à mettre en œuvre une autre procédure de comparaison. On peut donc penser que le deuxième jeu peut être choisi dans le but de favoriser la comparaison par reconnaissance des constellations de dés ou l'entraînement à la reconnaissance de ces constellations.

3) Les deux jeux permettent d'observer des décompositions des nombres : par exemple dans le deuxième jeu, 5 est par exemple formé avec la configuration 4 à laquelle on rajoute un point au centre. 5 c'est 4 et encore 1, c'est plus que 4. Dans le premier jeu 6 c'est 3 et encore 3 donc 6 c'est plus que 3.
   Cette compétence favorise la compréhension de la notion de quantité et constitue les prémices au « calcul ».

EXERCICE 2

Partie A

1) **Éléments maîtrisés et éléments à travailler que l'on peut détecter sur la première production**

Dans l'exercice 1, l'élève semble maîtriser le calcul de somme de certains entiers inférieurs à 12 :
8 + 3 = 11 ; 3 + 12 = 15.

Il semble interpréter chaque nombre décimal comme une juxtaposition de deux entiers séparés par une virgule. Il effectue deux additions séparées de chaque côté de la virgule pour calculer d'une part la somme des nombres écrits avant la virgule, d'autre part la somme des nombres écrits après la virgule.
Il lui reste donc à retravailler le sens de l'écriture à virgule des nombres décimaux. Il faut qu'il prenne conscience que, avec ou sans virgule, dans la numération de position qui est la nôtre, le rapport entre les valeurs de deux chiffres consécutifs est 10 ou 1/10. Quelle que soit la position d'un chiffre, la règle d'écriture se fait par groupements de dix ou partage en dixièmes, avec franchissement de la virgule si nécessaire.
Il faut également que l'élève prenne conscience que les nombres entiers sont des cas particuliers des nombres décimaux.

2) **Analyse de la réponse de l'élève à l'exercice 2**

(a) L'élève semble interpréter l'écriture à virgule comme celle de deux nombres entiers juxtaposés et séparés par une virgule : 5,100 c'est 5 et 100 séparés par une virgule.
Dans cette conception, il est cohérent de considérer qu'à partie entière égale, « 5 et 100 » est plus grand que « 5 et 6», lui-même plus grand que «5 et 3 » car 3 < 6 < 100.

Cette conception erronée est renforcée par l'emploi d'expressions impropres à l'oral utilisant le mot « virgule ». Par exemple, si l'on prononce « cinq virgule cent », le « cent » n'a aucune valeur « apparente », « audible » et le nombre s'entend bien comme deux entiers séparés par une virgule.

(b) Désigner oralement 5,03 comme « cinq et trois centièmes » ou comme « cinq, zéro dixième et trois centièmes » (et non « cinq virgule zéro trois ») et 5,6 comme « cinq et six dixièmes » peut aider les élèves à se construire une meilleure représentation de décimaux. En effet, une oralisation correcte de la partie décimale, ou des chiffres de la partie décimale, peut alerter les élèves sur la valeur de cette partie ou des chiffres qui la composent. Ce n'est pas « cinq et trois » mais « cinq unités et trois centièmes » et « cinq et six dixièmes ». Il reste donc à comparer au final « trois centièmes » et « six dixièmes » et non « six » et « trois ».

Partie B

1) **Définition d'un nombre décimal accessible à l'école primaire**

Un nombre décimal, comme tous les nombres, peut avoir plusieurs écritures différentes mais équivalentes pour le représenter. A l'école primaire, on peut le caractériser en donnant certaines des propriétés suivantes :

- un nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale (numérateur entier, dénominateur 10, 100, 1000…). Exemple : 3,12 = $\frac{312}{100}$.
- un nombre décimal peut s'écrire sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction décimale inférieure à 1. Exemple : $3,12 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$ ou 3,12 = 3 + $\frac{12}{100}$.
- un nombre décimal peut s'écrire sous forme d'une somme de fractions décimales.
- un nombre décimal peut s'écrire avec une écriture à virgule « qui s'arrête », c'est-à-dire qui utilise un nombre fini de chiffres. Exemple : 3,12 (qui peut s'écrire avec trois chiffres seulement en écriture à virgule) ; on peut le lire « trois unités et douze centièmes » ou « trois unités un dixième et deux centièmes ».

Remarques :

- *La définition utilisée en M1 n'est en aucun cas une définition envisageable à l'école élémentaire « Quotient d'un entier par un produit de puissances de cinq et de deux » ;*

- *La définition donnée ici n'est pas une définition formelle (conditions nécessaires et suffisantes) mais une définition fonctionnelle.*
  On peut par exemple dire aux élèves que :
  - *les nombres ont toujours plusieurs représentations chiffrées : 5 c'est aussi 3+2 par exemple ;*
  - *un nombre entier est un nombre d'unités entières (qui n'ont pas eu besoin d'être partagées), le mot-nombre correspondant fait partie de la comptine numérique et il peut se représenter sur les doigts.*
- *À l'école élémentaire, il est souvent plus efficace d'avoir recours à des exemples génériques que de donner une « définition ». Exemple : « 3,12 est un nombre décimal car il est égal à la fraction décimale* $\frac{312}{100}$.

2) Réfutation de l'affirmation « la somme de deux décimaux ne peut jamais être un nombre entier ».

Dans l'exercice du cadre 5 figurent pour la même graduation les écritures $\frac{5}{10}$ et 0,5. On peut donc écrire $\frac{5}{10}$= 0,5. L'enseignant peut utiliser cette double écriture du même nombre pour montrer que 0,5 + 0,5 c'est « cinq dixièmes plus cinq dixièmes, c'est à dire dix dixièmes » qui est pour la même graduation que 1.

Il peut aussi choisir un exemple plus générique avec 0,1 + 0,9 = $\frac{1}{10} + \frac{9}{10} = \frac{10}{10}$ = 1.

3) Réponse à la question : « La somme de deux nombres décimaux est-elle toujours un nombre décimal ? »

Ici, l'élève entend sans doute « nombre décimal » dans le sens de « nombre à virgule », par opposition à nombre entier et sa question fait donc probablement référence au cas où la somme de deux décimaux est un entier.
La question a sans doute pour but de savoir si la somme de deux décimaux peut être ou non un entier et/ou de savoir si un entier est un nombre décimal ou non.
Avec l'exemple pris précédemment, on a vu avec les élèves que 0,5 + 0,5 = $\frac{5}{10} + \frac{5}{10} = \frac{10}{10}$ = 1.
La somme de deux nombres décimaux peut donc être un nombre entier.
On peut ajouter à cela que :
1 = 1 + $\frac{0}{10}$ (somme d'un entier et d'une fraction décimale donc décimal également)
ou que 1 = 1+ $\frac{0}{10}$ = 1,0 écriture à virgule utilisant un nombre fini de chiffres.
Tous les nombres entiers sont des nombres décimaux.

Néanmoins, il faudra revenir à l'analyse mathématique de la question avec la classe car si l'on veut réellement répondre à la question « la somme de deux nombres décimaux est-elle toujours un nombre décimal ? » il ne suffit pas de répondre que les entiers sont des nombres décimaux ! Il faudrait en revanche, à partir d'exemples correspondants aux « définitions » données dans la question 1, illustrer le fait que la somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal (entier ou non).

4) Intérêts du prolongement de l'activité

Ce prolongement peut avoir plusieurs intérêts.

- Il permet de prendre conscience (ou de rappeler) que pour graduer la droite de centième en centième, il faut partager en dix parties égales les intervalles entre deux graduations en dixièmes (ce qui peut se traduire par $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$). Ce fractionnement des dixièmes en centièmes est en effet nécessaire pour placer le nombre 1,07.

Remarque :

Ce partage en dixièmes n'est pas faisable physiquement ici. Il faut ainsi concevoir mentalement ce phénomène de zoom et/ou utiliser du matériel permettant de le « montrer » :
- *avec une deuxième droite graduée posée en dessous à une échelle différente, sur laquelle on peut représenter un dixième et le partager effectivement en dix dixièmes ;*
- *avec un logiciel qui montre effectivement ce phénomène de zoom ou de loupe sur la droite numérique.*

- Il permet d'encadrer 1,07 entre les deux entiers 1 et 2 et de travailler ainsi la compétence « encadrer une fraction entre deux entiers consécutifs », puis de trouver également un encadrement plus fin : 1,07 est compris entre 1 et 1,1 (qui ne sont pas consécutifs car cette propriété n'existe pas sur l'ensemble des nombres décimaux contrairement à ce que pensent de nombreux élèves).
- Il permet de mettre en évidence qu'il existe d'autres nombres entre 1 et 1,1 et ainsi amorcer la prise de conscience que l'on peut toujours intercaler un nombre décimal entre deux nombres décimaux (densité des décimaux dans l'ensemble des réels).
- Il permet de travailler la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture décimale en distinguant 1,07 et 1, 7 (7 dixièmes ≠ 7 centièmes).

Compléments : autres prolongements possibles de l'activité

Ce travail peut être poursuivi (ou introduit) par un jeu du « qui est-ce ? » sur l'intercalation.

Version 1 :
Le maître du jeu choisit un nombre mystère. Les élèves proposent à tour de rôle des nombres. Le maître du jeu répond « … est plus grand que mon nombre » ou « … est plus petit que mon nombre ». Ainsi de suite, jusqu'à ce qu'un élève (ou tous les élèves) trouve(nt) le nombre mystère.

Version2 :
Les élèves posent les questions : « ton nombre est-il plus petit que … ? » ou « ton nombre est-il plus grand que … ? » et le meneur de jeu ne répond que par oui ou non. Cette version est plus difficile pour les élèves car les réponses négatives sont plus complexes à analyser.

Il est possible (selon le moment de l'année, la phase d'apprentissage…) :

- *de prévoir une droite graduée commune au tableau afin d'y marquer les intervalles dans lequel peut se trouver le nombre et qui se précisent au fur et à mesure du questionnement ;*
- *laisser le choix de cet outil aux élèves qui en auraient besoin ;*
- *l'interdire pour certains élèves, plus à l'aise.*

GROUPEMENT 2 – avril 2014

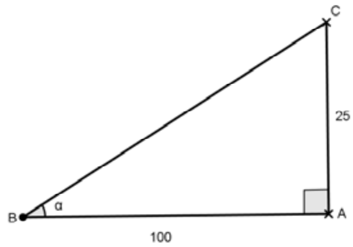
PREMIERE PARTIE : PROBLÈME

Dans cette partie, pour toutes les mesures de longueurs, l'unité est le mètre ; pour toutes les mesures d'angles, l'unité est le degré.

PARTIE A : La montée à la station

1) Calcul de l'inclinaison du dernier tronçon de la route au degré près

Une pente de 25 % peut se représenter par le triangle ABC suivant *(la figure n'est pas à l'échelle)* :



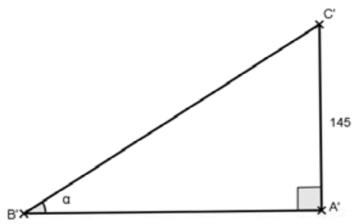
Par hypothèse, le triangle ABC est rectangle en A. La mesure de la longueur du côté opposé et celle du côté adjacent à l'angle α dans ce triangle sont connues. On en déduit la tangente de cet angle :

$$tan\ \alpha = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

Il suffit alors de taper « inv tan 0,25 » sur une calculatrice scientifique pour trouver le résultat.
L'inclinaison de la route exprimée en degrés est d'environ 14 (au degré près par défaut). **On a $\boldsymbol{\alpha} \approx$ 14**°.

2) Longueur du dernier tronçon de la route au mètre près

On peut modéliser la situation par le triangle A'B'C' suivant *(la figure n'est pas à l'échelle)* :



En effet, l'angle α correspond à l'inclinaison de la route, A'C' à « l'élévation » et la question porte sur B'C'.

Méthode 1 : méthode trigonométrique

Dans le triangle A'B'C' rectangle en A', on a :

$$sin\ \alpha = \frac{A'C'}{B'C'}$$

D'après la question précédente : $\alpha \approx 14°$. On en déduit :

$$\mathrm{B'C'} \approx \frac{145}{\sin 14°}$$

Ainsi **la longueur du tronçon est d'environ 599 mètres** (valeur approchée au mètre près par défaut).

Méthode 2 : mise en œuvre de la proportionnalité

Dans une pente à 25 %, le déplacement horizontal et le déplacement vertical sont proportionnels :

Déplacement vertical	25	145
Déplacement horizontal	100	$\frac{100 \times 145}{25} = 580$

Ainsi, pour un déplacement vertical de 145, le déplacement horizontal est de 580.
Dans le triangle A'B'C' rectangle en A', le théorème de Pythagore conduit à : $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$
Soit : $B'C'^2 = 580^2 + 145^2$
Donc B'C' $= \sqrt{580^2 + 145^2}$.
Soit $B'C' \approx 598$ (valeur approchée par excès à 1 près).
Ainsi **la longueur du tronçon est d'environ 598 mètres** (valeur approchée au mètre près par excès).

Méthode 3 : utilisation de l'agrandissement du triangle ABC
Le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore : BC $= \sqrt{100^2 + 25^2}$
Donc $BC = \sqrt{10625}$
Le triangle A'B'C', rectangle en A', est un agrandissement du triangle ABC, rectangle en A. Par conséquent :

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$\frac{B'C'}{\sqrt{10625}} = \frac{145}{25}$$

$$\text{B'C'} = \frac{145 \times \sqrt{10625}}{25}$$

Donc $B'C' \approx 598$ (valeur approchée au mètre près par excès).
Ainsi **la longueur du tronçon est d'environ 598 mètres** (valeur approchée au mètre près par excès).

Remarque :
Selon la procédure utilisée, l'emploi répété de valeurs approchées dans les différents calculs engendre une plus grande approximation du résultat.

PARTIE B : Ski sur la Streif

1) Calcul de la vitesse moyenne sur la piste

Dans un premier temps, on calcule la durée t de la descente.

Méthode 1 : calcul de l'écart entre les deux instants exprimé en h, min, s
t = 15 h 03 min 08 s – 14 h 58 min 47 s
t = 1 h 03 min 08 s – 58 min 47 s
t = 63 min 08 s – 58 min 47 s
t = 5 min 08 s – 47 s
t = 4 min 68 s – 47 s
t = 4 min 21 s

Méthode 2 : calcul de l'écart entre les deux instants exprimé en h, min, s
t = 15 h 03 min 08 s – 14 h 58 min 47 s
t = 15 h 03 min 21 s – 14 h 59 min *ajout de 13 s aux deux instants*
t = 15 h 4 min 21 s – 15 h *ajout de 1 min aux deux instants*
t = 4 min 21 s

Méthode 3 : calcul de la différence entre les deux durées par passage à l'expression en s
1 min = 60 s
1 h = 3600 s
15 h 03 min 08 s = (15 × 3600 + 3 × 60 + 8) s = 54188 s
14 h 58 min 47 s = (14 × 3600 + 58 × 60 + 47) s = 53927 s
Ainsi t = 54188 s – 53927 s = 261 s
Or 261 = 60 × 4 + 21 Donc t = 4 min 21 s.

Méthode 4 : calcul de la durée par utilisation du repère 15 h
Albert part à 14 h 58 min 47 s et achève sa course à 15 h 03 min 08 s.
Il skie pendant 1 min 13 s avant 15 h et pendant 3 min 08 s après 15 h.
Au total, il skie pendant 4 min 21 s.

Dans un second temps, on calcule la vitesse moyenne v du skieur.

Méthode 1 : calcul de la vitesse moyenne en m/s, puis en km/h
On exprime la durée de la descente en secondes : t = $4 \times 60 + 21$ = 261.
En 261 s, Albert descend 3312 m.
En 1 s, il descend $\frac{3312}{261}$ m. Exprimée en m/s, la vitesse du skieur est $\frac{3312}{261}$ m/s (ou $\frac{1104}{87}$ m/s ou $\frac{368}{29}$ m/s).
En 3600 s, il descend $3600 \times \frac{3312}{261}$ m, ou encore $3600 \times \frac{3312}{261} \times 10^{-3}$ km.
Exprimée en km/h, la vitesse v du skieur est alors : $v = 3600 \times \frac{3312}{261} \times 10^{-3}$.
Donc : $v \approx 45{,}68$.
On en déduit que **la vitesse du skieur est d'environ 45,7 km/h** (arrondi au dixième).

Méthode 2 : calcul de la durée en h et de la distance en km, puis de la vitesse en km/h
On exprime la durée de la descente en heures : $\mathrm{t} = \frac{261}{3600}$.
On exprime la longueur de la descente en km : $d = 3{,}312$.
La vitesse v exprimée en km/h est alors : $v = \frac{d}{t} = \frac{3{,}312}{\frac{261}{3600}} = 3{,}312 \times \frac{3600}{261} \approx 45{,}68$.
On en déduit que **la vitesse du skieur est d'environ 45,7 km/h** (arrondi au dixième).

2) Écart de temps entre le meilleur skieur de la station et Albert

Dans un premier temps, on calcule la durée de la descente du meilleur skieur.

Méthode 1 : expression de la durée en heures
Le meilleur skieur de la station parcourt100 km en 1 h.
Il parcourt la piste longue de 3,312 km en $\frac{3{,}312}{100}$ h, soit en 0,03312 h.

Méthode 2 : expression de la durée en secondes
À 100 km/h, le skieur parcourt 1 km en 1/100 d'heure, c'est-à-dire en 36 s.
Pour parcourir 3,312 km, le meilleur skieur aura donc besoin de $3{,}312 \times 36\ s = 119{,}232\ s$.

Dans un second temps, on calcule la différence de durée entre le meilleur skieur et Albert.

Méthode 1 : calcul des durées en secondes, puis expression du résultat en minutes et secondes
$0{,}03312\ h = 0{,}03312 \times 3600\ s = 119{,}232\ s$
Le meilleur skieur met 119,232 s pour réaliser la descente, alors qu'Albert met 261 s.
La différence de temps est donc : 261 s – 119,232 s = 141,768 s = 2 min 21,768 s.
Si le meilleur skieur était parti en même temps qu'Albert, **il serait donc arrivé 2 min 21 s et $\frac{768}{1000}$ s avant Albert**.

Méthode 2 : calcul des durées en minutes et secondes
0,03312 h = 0,03312 × 60 min = 1,9872 min = 1 min 0,9872 × 60 s = 1 min 59,232 s
Le meilleur skieur met 1 min 59,232 s pour réaliser la descente, alors qu'Albert met 4 min 21 s
La différence de temps est donc :
4 min 21 s – 1 min 59,232 s = 3 min 21 s – 59,232 s = 2 min 81 s – 59,232 s = 2 min 21,768 s

Si le meilleur skieur était parti en même temps qu'Albert, **il serait donc arrivé 2 min 21 s et $\frac{768}{1000}$ s avant Albert**.

PARTIE C : Saut sur la Streif

1) Calcul de l'image de 10 par la fonction S

Il s'agit de trouver la valeur de S(x) lorsque x vaut 10. On la trouve en remplaçant x par 10 dans la formule donnée.

Méthode 1 :

$$S(10) = 2{,}5 - \frac{(2 \times 10 - 55)^2}{1210} = 2{,}5 - \frac{35^2}{1210} = 2{,}5 - \frac{7^2 \times 5}{242} = \frac{2{,}5 \times 242 - 49 \times 5}{242} = \frac{605 - 245}{242} = \frac{360}{242} = \frac{180}{121}$$

Lors de son saut, lorsqu'Albert s'est déplacé horizontalement de 10 m, il se trouve à S(10) m du sol, c'est-à-dire à environ **1,49 m** (arrondi au centième ou valeur approchée au centième de mètre près par excès) du sol.

Méthode 2 :

On peut également donner le calcul suivant :

$$S(10) = 2{,}5 - \frac{(2 \times 10 - 55)^2}{1210} = 2{,}5 - \frac{35^2}{1210} = 2{,}5 - \frac{1225}{1210} \approx 2{,}5 - 1{,}01$$

Soit $S(10) \approx 1{,}48$.

Ce second calcul donne une hauteur de **1,48 m** (valeur approchée au centième de mètre près par défaut).

2) a) Ce que représente la valeur 55 sur l'axe des abscisses pour Albert

Remarque préalable :

La formulation de la question est ambigüe car la réponse peut porter sur une longueur (celle du saut d'Albert exprimée en mètres) ou sur un événement (la fin du saut).

D'après la représentation graphique, la valeur 55 correspond au moment où Albert retrouve le sol après son saut. En effet l'ordonnée de ce point, correspondant à la hauteur par rapport au sol, est « 0 ». Ainsi, **la longueur totale du saut d'Albert est de 55 mètres**.

2) b) Détermination de la hauteur maximale du saut grâce à la représentation graphique de la fonction S

La hauteur maximale du saut correspond au maximum atteint par la courbe (une parabole) : il s'agit de l'ordonnée du sommet de cette parabole sur la représentation graphique. L'abscisse de ce point particulier correspond alors au déplacement horizontal auquel est associée cette hauteur.

Une lecture graphique conduit aux coordonnées (approximatives) suivantes : (27,5 ; 2,5).

Ainsi la hauteur maximale du saut d'Albert est d'environ 2,5 mètres. **Cette hauteur maximale est atteinte pour un déplacement horizontal d'environ 27,5 mètres**.

Remarque :

Une lecture graphique est toujours soumise à l'imprécision du tracé et de la lecture. On peut estimer que la réponse 27 m peut être correcte.

3) Détermination de la hauteur maximale du saut grâce à l'expression de la fonction S

L'expression de la fonction S est :

$$S(x) = 2{,}5 - \frac{(2x - 55)^2}{1210}$$

Un carré est toujours positif ou nul, donc pour rendre maximale la valeur de S, il faut chercher à minimiser l'expression $(2x - 55)^2$, ce qui est le cas lorsqu'on rend nulle l'expression $(2x - 55)$. Le maximum de $S(x)$ est alors atteint lorsque $x = 27{,}5$ m.
Pour $x = 27{,}5$, on a $S(27{,}5) = 2{,}5$.
Ainsi, **la hauteur maximale du saut d'Albert est 2,5 m**.

PARTIE D : Tir à la carabine

2) Probabilité qu'un tireur débutant qui touche la cible, atteigne la zone extérieure

Par hypothèse, la probabilité pour qu'un joueur débutant, lorsqu'il touche la cible, atteigne une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

Méthode 1 : Calcul de l'aire de la couronne quadrillée

On note A_Q l'aire de la couronne quadrillée ; D(10) est le disque de rayon 10 cm et D(15) le disque de rayon 15 cm.
La zone quadrillée est une couronne de rayon intérieur 10 cm et de rayon extérieur 15 cm. Son aire est donc égale à la différence entre l'aire du disque de rayon 15 cm et l'aire du disque de rayon 10 cm.
A_Q = aire $(D(15))$ – aire $(D(10))$
Donc : $A_Q = \pi \times 15^2\ cm^2 - \pi \times 10^2\ cm^2$.
Soit : $A_Q = 125\pi$ cm².
L'aire de la cible correspond à celle du disque de rayon 15, soit D(15). La probabilité de toucher la zone quadrillée (lorsqu'on atteint la cible) est alors :

$$\text{p(Q)} = \frac{A_Q}{aire(D(15))}$$
$$\text{p(Q)} = \frac{125\pi}{225\pi}$$
$$\text{p(Q)} = \frac{25 \times 5}{25 \times 9}$$
$$\text{p(Q)} = \frac{5}{9}$$

La probabilité pour un joueur débutant touchant la cible d'atteindre la zone quadrillée est $\frac{5}{9}$.

Méthode 2 : Utilisation de la proportionnalité

On sait que l'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son rayon.
Le rayon du disque central (10 cm) est 2 fois plus grand que le rayon du disque intérieur noir (5 cm), donc son aire est 4 fois plus grande.
De même, le rayon du disque extérieur (15 cm) est 3 fois plus grand que le rayon du disque noir (5 cm), donc son aire est 9 fois plus grande.
Ainsi, par différence, l'aire la couronne quadrillée est 9 – 4 = 5 fois plus grande que l'aire du disque noir.
Si l'unité d'aire est l'aire du disque noir, alors la couronne quadrillée à une aire de mesure 5 et le disque extérieur a une aire de mesure 9.

La probabilité de toucher la zone quadrillée (lorsqu'on atteint la cible) est alors : p(Q) = $\frac{5}{9}$.

3) Probabilité qu'un tireur débutant touche la cible et atteigne son cœur

Par hypothèse, la probabilité pour qu'un joueur débutant, lorsqu'il atteint la cible, atteigne une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

Méthode 1 : Calcul de l'aire du disque noir

Il s'agit de l'aire du disque de rayon 5 cm :

Aire (D(5)) = $\pi \times 5^2$ cm^2
Aire (D(5)) = 25π cm^2

La probabilité de toucher le cœur (lorsqu'on atteint la cible) est alors : p(C) = $\dfrac{aire\ (D(5))}{aire(D(15))}$

Soit p(C) = $\dfrac{25\pi}{225\pi}$ Donc p(C) =$\dfrac{1}{9}$

Or un joueur débutant a une chance sur deux de toucher la cible.
Par conséquent, **la probabilité de toucher la cible et d'atteindre son cœur est :**

$$\mathbf{\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}}$$

Méthode 2 : Utilisation de la proportionnalité

Le raisonnement suit la méthode 2 de la question précédente. L'unité d'aire est l'aire du disque noir. Ainsi la mesure de l'aire du disque noir est 1. La mesure du disque extérieur est 9.

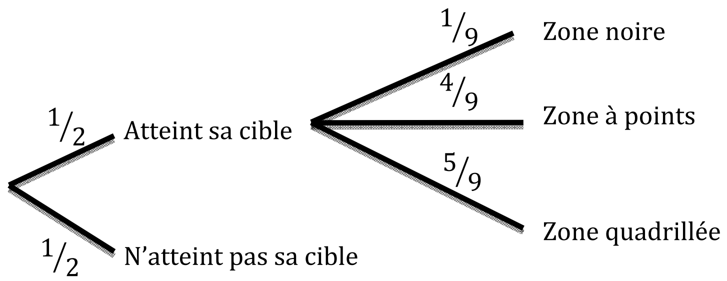
Lorsque le tireur touche la cible il touche le cœur (C) avec une probabilité de p(C) = $\frac{1}{9}$.

Or un joueur débutant a une chance sur deux de toucher la cible.
Par conséquent, **la probabilité de toucher la cible et d'atteindre son cœur est :**

$$\mathbf{\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}}$$

Méthode 3 : Utilisation d'un arbre de probabilité

On suppose que les probabilités d'atteindre les zones noire, à points et quadrillée ont été calculées par une des méthodes précédentes. La situation proposée peut se modéliser par l'arbre de probabilité suivant :



Il suffit alors de suivre la branche « atteint sa cible » puis « zone noire » et de multiplier les probabilités correspondantes pour obtenir le résultat cherché.

La probabilité de toucher la cible et d'atteindre son cœur est :

$$\mathbf{\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}}$$

DEUXIEME PARTIE

Exercice 1

Remarque préalable :
Dans cet exercice, il n'est pas demandé de résoudre le problème posé aux élèves. Nous le faisons toutefois pour permettre une meilleure compréhension des questions posées.

Il s'agit de trouver combien de fleurs ont été effeuillées en totalité. On sait que 83 pétales ont été ôtés, une fleur a 5 pétales et il n'est passé à la fleur suivante que lorsqu'il avait complètement effeuillé la fleur précédente. Il s'agit donc de trouver le multiple de 5 le plus proche de 83 et inférieur ou égal à 83. Autrement dit, ceci peut conduire à réaliser une division euclidienne de 83 par 5 soit $83 = 16 \times 5 + 3$. Ainsi 16 fleurs sont effeuillées en totalité. Le reste de la division euclidienne (3) correspond au nombre de pétales ôtés sur la dernière fleur effeuillée. Ainsi il reste 5 – 3 = 2 pétales sur une 17ème fleur.

Remarque :
Pour trouver combien il reste de pétales sur la dernière fleur effeuillée, on peut également trouver le multiple de 5 le plus proche de 83 et supérieur ou égal à 83. La différence entre ce nombre et 83 correspond au nombre de pétales restants sur la dernière fleur effeuillée.

2) Opération mathématique dont relève ce problème

Ce problème relève du cadre des **structures multiplicatives**. La recherche du nombre de fleurs totalement effeuillées correspond à un problème de **division quotition** : on recherche le nombre de « parts » (les fleurs), connaissant la valeur de la « part » (5 pétales dans une fleur).
Pour le niveau CM2, la réponse à chacune des deux questions peut donc être obtenue en effectuant une **division euclidienne.** Cependant il est possible que certains élèves de CM2 n'identifient pas un problème de division et recourent à des soustractions, des additions, voire des multiplications pour donner la réponse à chaque question.

3) Trois procédures possibles pour répondre à la question posée

Voici différentes procédures possibles (*trois seulement sont demandées*) :

Procédure utilisant la numération :
83, c'est 8 dizaines et 3 unités, et une dizaine, c'est dix, le double de 5. Ainsi une dizaine de pétales correspond à deux fleurs et 8 dizaines correspondent à 16 (8×2) fleurs. Les 3 unités sont les pétales ôtés de la dernière fleur, il reste donc $5 - 3 = 2$ pétales sur la dernière fleur effeuillée.

Procédure utilisant la division euclidienne :
Le nombre cherché est le quotient de la division euclidienne de 83 par 5. On pose la division de 83 par 5. On trouve un quotient égal à 16 et un reste égal à 3. Cette division euclidienne s'écrit $83 = 16 \times 5 + 3$.
La réponse est : 16 fleurs entièrement effeuillées.
Le reste de la division euclidienne (3) correspond au nombre de pétales ôtés sur une dernière fleur effeuillée. Ainsi il reste $5 - 3 = 2$ pétales sur la dernière fleur effeuillée.

Procédures utilisant la multiplication :
Pour trouver le multiple de 5 le plus proche de 83 et inférieur ou égal à 83 :

- Soit on cherche à approcher 83 par des multiples de 5 ; par exemple :
  $5 \times 10 = 50$; $5 \times 20 = 100$; $5 \times 14 = 70$; $5 \times 16 = 80$ et $5 \times 17 = 85$
  donc 16 est le nombre cherché.
- Soit on cherche une décomposition de 83 comportant des multiples de 5 :
  $83 = 50 + 30 + 3$
  $83 = 5 \times 10 + 5 \times 6 + 3$

$83 = 5 \times 16 + 3$

donc 16 est le nombre cherché.

Il y a 16 fois 5 dans 83, la réponse est 16 fleurs entièrement effeuillées.

Le multiple de 5 le plus proche et inférieur ou égal à 83 est 80 donc le multiple de 5 le plus proche et supérieur ou égal à 83 est 85.

Le nombre de pétales restant sur la dernière fleur effeuillée est : $85 - 83 = 2$.

Remarque :

Cette dernière procédure peut également être utilisée grâce au répertoire (table de multiplication du 5). L'élève utilise 50 (5×10) *et* 30 (5×6).

Procédures utilisant la soustraction :

On enlève 5 pétales ou des multiples de 5 aux 83 pétales, autant de fois que cela est possible, et on compte le nombre de « paquets » de 5 pétales retirés car chacun correspond à une fleur entièrement effeuillée :

- soit par « blocs », par exemple :

$83 - 10 = 73$ 2 fleurs
$73 - 20 = 53$ 4 fleurs
$53 - 40 = 13$ 8 fleurs
$13 - 10 = 3$ 2 fleurs

On a donc comptabilisé : $2 + 4 + 8 + 2 = 16$ fleurs entièrement effeuillées.

Le dernier reste obtenu (3) correspond au nombre de pétales ôtés sur la dernière fleur effeuillée. Ainsi il reste $5 - 3 = 2$ pétales sur une dernière fleur effeuillée.

- soit pas à pas (exemple par « pas » de une fleur, mais on peut envisager des « pas » de 2 fleurs…) :

$83 - 5 = 78$ 1 fleur
$78 - 5 = 73$ 1 fleur
…
$13 - 5 = 8$ 1 fleur
$8 - 5 = 3$ 1 fleur

Il suffit de comptabiliser le nombre de fleurs, la réponse est 16 fleurs entièrement effeuillées. Il reste 3 pétales enlevés à la dernière fleur.

La dernière fleur ne compte plus que $5 - 3 = 2$ pétales.

Procédures utilisant l'addition :

On fait une addition itérée de 5 ou de multiples de 5, autant de fois que nécessaire pour s'approcher le plus près possible de 83 sans le dépasser :

- soit par « blocs » (exemple de comptage par blocs de taille croissante) :

$5 + 5 = 10$ 2 fleurs
$10 + 10 = 20$ 4 fleurs
$20 + 20 = 40$ 8 fleurs
$40 + 40 = 80$ 16 fleurs

Or $83 < 80 + 5$ donc 16 est le nombre cherché.

L'écart entre 83 et 85 correspond au nombre de pétales restant à effeuiller sur la dernière fleur : $85 - 83 = 2$.

- soit pas à pas (exemple par « pas » de 2 fleurs…) :

10 2 fleurs
…
70 2 fleurs
80 2 fleurs

Il suffit de comptabiliser le nombre de fleurs, la réponse est 16 fleurs entièrement effeuillées. Les 3 pétales restants sont effeuillés de la dernière fleur. Il reste donc $5 - 3 = 2$ pétales sur la dernière fleur.

- soit en comptant de 5 en 5 et en dénombrant les nombres ainsi énumérés (éventuellement par double comptage) :

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**

Remarque :
D'autres procédures plus primitives peuvent être envisagées :
- dessin des 83 pétales (y compris en les symbolisant par des croix), puis en faisant des paquets de 5 pétales, le paquet de 3 pétales restant doit être interprété comme ce qui a été enlevé de la dernière fleur (il reste donc 2 pétales sur la dernière fleur)
- dessin des 83 pétales puis en barrant des groupes de 5 pétales (et en notant par un bâtonnet chaque groupe barré), le paquet de 3 pétales restant doit être interprété comme ce qui a été enlevé de la dernière fleur (il reste donc 2 pétales sur la dernière fleur)
- en reconstituant (par dessin) les fleurs avec 5 pétales et en dénombrant les pétales au fur et à mesure : 1, 2, 3, 4, 5… 6, 7, 8, 9, 10… 11, 12, 13, 14, 15… (…) 76, 77, 78, 79, 80… 81, 82, 83 pour en conclure que 16 fleurs ont été effeuillées en totalité, le paquet de 3 pétales restant doit être interprété comme ce qui a été enlevé de la dernière fleur (il reste donc 2 pétales sur la dernière fleur).

Exercice 2

1) Nombre de bonbons de Emma

On note N le nombre de bonbons que possède Emma. L'expression « lorsqu'on regroupe ces N bonbons par 2, il en reste un », peut se traduire mathématiquement par : la division euclidienne de N par 2 a pour reste 1. Autrement dit, on peut écrire $\mathrm{N} = 2 \times \mathrm{q} + 1$, où q est un entier naturel.
Ou encore $\mathrm{N} - 1 = 2 \times \mathrm{q}$, ce qui signifie que N – 1 est un multiple de 2.
Par un raisonnement identique avec les regroupements par 3, 4, 5 ou 6, on en déduit que N – 1 est un multiple de 3, de 4, de 5 et de 6.
Par conséquent, il s'agit de trouver le (ou les) nombres N satisfaisant à toutes les contraintes de l'énoncé, à savoir :

- N est un nombre entier
- N ≤ 100
- N – 1 est un multiple de 2, de 3, de 4, de 5 et de 6 (*)

Méthode 1 : recherche du PPCM des cinq nombres 2, 3, 4, 5 et 6
Puisque N est un multiple commun à 2, 3, 4, 5 et 6, alors N est un multiple du PPCM de ces cinq nombres.
Nous cherchons donc le PPCM de ces cinq nombres :

- 2, 3 et 5 sont des nombres premiers
- $4 = 2^2$
- $6 = 2 \times 3$

Le PPCM de 2, 3, 4, 5 et 6 est le produit de tous les nombres premiers présents dans leurs décompositions avec leur plus grande puissance, ce qui vaut : $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.
Ainsi, $N - 1$ est un multiple de 60.
Comme N est inférieur à 100, 60 est le seul nombre qui convienne.
Le nombre N de bonbons est donc 61.

Méthode 2 : recherche des multiples de 4, 5 et 6 inférieurs à 100
Tout multiple de 4 est multiple de 2 et tout multiple de 6 est multiple de 2 et de 3. Ainsi la dernière contrainte (*) se traduit par « $N -\ 1$ est multiple à la fois de 4, de 5 et de 6 ».
Il est possible d'écrire la liste des multiples de 4 inférieurs à 100, celle des multiples de 5 inférieurs à 100 et celle des multiples de 6 inférieurs à 100.

Les listes peuvent être croissantes ou décroissantes, écrites intégralement ou pas, par exemple :

- listes décroissantes écrites intégralement :

Comme 100 = 4 × 25 et 100 = 5 × 20 et 100 = 6 x 16 + 4
Multiples de 4 inférieurs à 100 :
100 ; 96 ; 92 ; 88 ; 84 ; 80 ; 76 ; 72 ; 68 ; 64 ; **60** ; 56 ; 52 ; 48 ; 44 ; 40 ; 36 ; 32 ; 28 ; 24 ; 20 ; 16 ; 12 ; 8 ; 4
Multiples de 5 inférieurs à 100 :
100 ; 95 ; 90 ; 85 ; 80 ; 75 ; 70 ; 65 ; **60** ; 55 ; 50 ; 45 ; 40 ; 35 ; 30 ; 25 ; 20 ; 15 ; 10 ; 5
Multiples de 6 inférieurs à 100 :
96 ; 90 ; 84 ; 78 ; 72 ; 66 ; **60** ; 54 ; 48 ; 42 ; 36 ; 30 ; 24 ; 18 ; 12 ; 6
Le seul nombre commun à ces trois listes est : 60. **Le nombre N de bonbons est donc 61**.

- listes croissantes écrites partiellement :

La liste des multiples de 4 est écrite intégralement. Dans cette liste, les multiples de 5 sont soulignés et parmi eux, les multiples de 6 sont écrits en gras :
4 ; 8 ; 12 ; 16 ; <u>20</u> ; 24 ; 28 ; 32 ; 36 ; <u>40</u> ; 44 ; 48 ; 52 ; 56 ; <u>**60**</u> **;** 64 ; 68 ; 72 ; 76 ; <u>80</u> ; 84 ; 88 ; 92 ; 96 ; <u>100</u>
Le seul nombre qui apparaît surligné et en gras est 60. **Le nombre N de bonbons est donc 61.**

Méthode 3 : recherche à partir de la liste de tous les nombres jusqu'à 100 (technique identique au crible d'Ératosthène)

Une méthode un peu moins rapide pourrait consister à écrire la liste de tous les nombres de 1 à 100, puis à éliminer successivement tous ceux qui ne sont pas pairs, ni multiples de 3, ni multiples de 4, ni multiples de 5, ni multiples de 6. Seul 60 subsiste dans la liste.
De manière analogue, on peut aussi entourer successivement les multiples de 2, puis de 3 puis de 4 puis de 5 puis de 6. Seul 60 serait entouré 5 fois. **Le nombre N de bonbons est donc 61**.

2) a) Formule possible dans la cellule B2

Dans la colonne B doivent apparaître les restes de la division par 2 des nombres de la colonne A.
Deux formules conviennent : **= MOD(A2 ; 2)** et **= MOD(A2 ; B$1)**.

Remarque :
Dans cette question, il est seulement demandé de choisir une méthode et aucune justification n'est exigée… Pour la formation du candidat, nous proposons dans ce corrigé des justifications ainsi que des arguments invalidant les autres propositions. Bien entendu, il est conseillé de vérifier effectivement dans un tableur les explications suivantes.

Justification des deux formules :

- dans la cellule B2, la formule = MOD(A2 ; 2) est seulement assujettie à la cellule A2 (référence relative) ; sa recopie vers le bas implique dans la cellule B3 la formule correcte suivante : = MOD(A3 ; 2) ; par conséquent, la formule sera correcte pour la cellule B4, et ainsi de suite,
- dans la cellule B2, la formule = MOD(A2 ; B$1) est assujettie à la cellule A2 (référence relative) et à la valeur de la cellule B1 (référence absolue) ; sa recopie vers le bas implique dans la cellule B3 la formule correcte suivante : = MOD(A3 ; B$1) ; par conséquent, la formule sera correcte pour la cellule B4, et ainsi de suite.

Remarque :
Les formules proposées = MOD(A2 ; 2) et = MOD(A2 ; B$1) donnent les résultats souhaités par extension vers le bas mais pas par extension vers la droite. La formule = MOD($A2 ; B$1) conviendrait pour une extension vers la droite et vers le bas dans chacune des colonnes.

Invalidation des autres formules :

- dans la cellule B2, la formule = MOD(1 ; 2) n'est pas assujettie à une cellule particulière. Sa recopie vers le bas se fait à l'identique ; ainsi on retrouvera dans les cellules de la colonne B la formule = MOD(1 ; 2). On peut noter que MOD(1 ; 2) est le reste de la division euclidienne de 1 par 2, sa valeur est 1,

- dans la cellule B2, la formule = MOD(1 ; B1) est assujettie à la cellule B1 (référence relative) ; sa recopie vers le bas implique alors la formule incorrecte suivante dans la cellule B3 : = MOD(1 ; B2),
- dans la cellule B2, la formule = MOD(A2 ; B1) est assujettie aux deux cellules A2 et B1 (références relatives) ; sa recopie vers le bas implique alors la formule incorrecte suivante dans la cellule B3 : = MOD(A3 ; B2)
- la formule = MOD(2 ; 1) n'est pas assujettie à une cellule particulière. Sa recopie vers le bas se fait à l'identique ; ainsi on retrouvera dans les cellules de la colonne B la formule : = MOD(2 ; 1). En outre, on peut noter que MOD(2 ; 1) est le reste de la division euclidienne de 2 par 1, sa valeur est 0.

2) b) Utilisation du tableau pour résoudre le problème

Dans la colonne A, on trouve la liste croissante des entiers (au moins jusqu'à 100 placé en case A101).
On suppose que dans les cases B2, C2, D2, E2 et F2 les formules = MOD(A1, B$1) ; = MOD(A1, C$1) ; = MOD(A1, D$1) ; = MOD(A1, E$1) et = MOD(A1, F$1) sont écrites et étendues vers le bas jusqu'à la ligne 101.
Chaque ligne présentera donc successivement un nombre entier (colonne A), son reste dans la division euclidienne par 2 (colonne B), son reste dans la division euclidienne par 3 (colonne C), son reste dans la division euclidienne par 4 (colonne D), son reste dans la division euclidienne par 5 (colonne E) et son reste dans la division euclidienne par 6 (colonne F).
Le (ou les) nombre(s) cherché(s) ont pour reste 1 dans les divisions euclidiennes par 2, 3, 4, 5 et 6. Ainsi, Jules doit ensuite chercher les « 1 » dans les colonnes B à F.
La ligne ne contenant que des « 1 » de la colonne B à la colonne F donne la solution.
Il lira cette solution à l'intersection de cette ligne et de la colonne A.
D'après la question précédente, ce sera le contenu de la case A62 à savoir **61**.

Exercice 3

2) Test et conjecture

Dans la première partie de cette question, il suffit de choisir une série de quatre nombres entiers consécutifs et de réaliser le calcul en respectant la suite des opérations *(rien ne sert de choisir des entiers trop grands qui compliquent les calculs)*. Nous considérons ici les quatre nombres consécutifs : 0, 1, 2 et 3.
On a :
$3^2 - 2^2 - 1^2 + 0^2 = 9 - 4 - 1$
Et $9 - 4 - 1 = 4$
Le résultat est donc vérifié sur cette suite de quatre entiers consécutifs.

Remarque :
On peut également choisir les entiers 1, 2, 3 et 4.
En effet $4^2 - 3^2 - 2^2 + 1^2 = 16 - 9 - 4 + 1$ et $9 - 4 - 1 = 4$

Conjecture :
Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ on a : $\mathbf{(n+3)^2 - (\boldsymbol{n}+2)^2 - (\boldsymbol{n}+1)^2 + \boldsymbol{n}^2 = 4}$ (1).

Remarque :
On peut également formuler la conjecture des manières suivantes :

- *Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a :*
  $(n+2)^2 - (n+1)^2 - n^2 + (n-1)^2 = 4$ *(2),*
- *Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2,on a :*
  $(n+1)^2 - n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 = 4$ *(3),*
- *Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 3, on a :*
  $n^2 - (n-1)^2 - (n-2)^2 + (n-3)^2 = 4$ *(4).*

3) Preuve

Nous considérons ici l'énoncé (1) de la conjecture.

Méthode 1 : développement et simplification de l'expression algébrique

Pour prouver cette conjecture, il s'agit de développer et de simplifier l'expression :
$(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2$.
Pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned}(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2 &= n^2+6n+9-(n^2+4n+4)-(n^2+2n+1)+n^2\\ &= n^2+6n+9-n^2-4n-4-n^2-2n-1+n^2\\ &= 9-4-1\\ &= 4\end{aligned}$$

Méthode 2 : factorisation puis développement et simplification de l'expression algébrique

Pour prouver cette conjecture, il s'agit de transformer l'expression :
$(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2$ par des factorisation et des simplifications.
Pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned}(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2 &= (n+3)^2-(n+2)^2+n^2-(n+1)^2\\ &= (n+3+n+2)(n+3-n-2)+(n+n+1)(n-n-1)\\ &= (2n-5)(1)+(2n+1)(-1)\\ &= 2n+5-2n-1\\ &= 4\end{aligned}$$

Méthode 3 : calcul algébrique

Pour prouver cette conjecture, il suffit de calculer :
$(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2-4$. Ce calcul peut être effectué de la même manière que dans les méthodes 1 et 2 pour obtenir un résultat nul.

Remarque :

Les méthodes présentées ci-dessus peuvent être rédigées à partir des conjectures (2), (3) ou (4).

Exercice 4

1) IJKL est un carré

Un cube possède six faces carrées, le quadrilatère ABCD, face du cube ABCDEFGH, est donc un carré dont les longueurs des côtés mesurent 12 cm.

Méthode 1 : utilisation du théorème de la droite des milieux

Dans un carré, les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur. Si la mesure de la longueur du côté du carré est c alors la mesure de la longueur des diagonales est $c\sqrt{2}$.
Dans le carré ABCD, on a : $AC = BD = 12\sqrt{2}\ cm$.
Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux de deux côtés [AB] et [BC].
D'après le théorème de la droite des milieux, (IJ) est parallèle à (AC)et

$$IJ = \frac{AC}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\ cm$$

Par un raisonnement analogue dans les triangles BCD, CDA, DAB, on démontre que :
(KJ) est parallèle à (DB) et KJ = $\frac{DB}{2} = 6\sqrt{2}$ cm,
(KL) est parallèle à (CA) et LK = $\frac{AC}{2} = 6\sqrt{2}$ cm,
(LI) est parallèle à (DB) et LI = $\frac{DB}{2} = 6\sqrt{2}$ cm.
Ainsi les quatre côtés du quadrilatère IJKL ont même longueur, par conséquent c'est un losange.

(AC) et (BD) sont perpendiculaires, (IJ) est parallèle à (AC), (KJ) est parallèle à (BD), donc (IJ) est perpendiculaire à (JK).
Le losange IJKL a un angle droit, par conséquent **IJKL est un carré** dont les côtés ont pour longueur $6\sqrt{2}$ cm.

Méthode 2 : utilisation du théorème de Pythagore
Dans le carré ABCD, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC]. Alors le triangle IJB est rectangle et isocèle en B, avec $BI = BJ = 6$ cm.
D'après le théorème de Pythagore : $\mathrm{IJ}^2 = \mathrm{IB}^2 + \mathrm{BJ}^2$
Autrement dit : $\mathrm{IJ}^2 = 6^2 + 6^2$
Ainsi la mesure de IJ (l'unité de longueur étant le cm) est : $IJ = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$
Par un raisonnement identique dans les triangles rectangles isocèles JKC, KLD et LIA, on obtient l'égalité des quatre côtés du quadrilatère IJKL. On en déduit que ce quadrilatère est un losange.
Par ailleurs, puisque I et K sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [CD] du carré ABCD, KI correspond à la distance entre les deux droites parallèles (AB) et (CD). On en déduit que : $KI = 12$ cm.
Or : $IJ^2 + JK^2 = 72 + 72 = 144$ ou encore $IJ^2 + JK^2 = KI^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est alors rectangle en J.
Le losange IJKL possède donc un angle droit, par conséquent **IJKL est un carré**.

Méthode 3 : utilisation des médiatrices des côtés du carré ABCD
Les deux droites (IK) et (JL) correspondent aux deux médiatrices des côtés du carré ABCD. Elles se coupent perpendiculairement en O le centre du carré. De plus $KI = JL = 12$ cm et O est le milieu de [KI] et [JL].
Dans le quadrilatère IJKL, les diagonales [KI] et [JL] ont même longueur et se coupent perpendiculairement en leur milieu. Alors **IJKL est un carré**.

Méthode 4 : utilisation de la rotation de centre O
Le carré ABCD est invariant par la rotation de centre O (point d'intersection des diagonales du carré) et d'angle 90°.
Par cette rotation, l'image du point A est le point B, l'image du point B est le point C, l'image du point C est le point D, l'image du point D est le point A.
La rotation conserve les longueurs et l'alignement. Ainsi le milieu du segment [AB] (le point I) a pour image le milieu du segment [BC] (le point J). De même, l'image du point J est le point K, l'image du point K est le point L et l'image du point L est le point I.
Par conséquent : $\widehat{IOJ} = \widehat{JOK} = \widehat{KOL} = \widehat{LOI} = 90°$
Donc : $\widehat{IOK} = \widehat{IOJ} + \widehat{JOK} = 180°$ et $\widehat{JOL} = \widehat{JOI} + \widehat{IOL} = 180°$.On en déduit que les points O, I, K d'une part et les points O, J, L d'autre part sont alignés.
De plus : OI = OJ = OK = OL.
Par conséquent, dans le quadrilatère IJKL, les diagonales ont même longueur et se coupent perpendiculairement en leur milieu. Le quadrilatère **IJKL est un carré**.

2) Aire du carré IJKL

Méthode 1 : utilisation de la formule de l'aire du carré
IJKL est un carré de côté $6\sqrt{2}$ cm, par conséquent, son aire a pour mesure (l'unité d'aire étant le cm^2) : $(6\sqrt{2})^2 = 36 \times 2 = \mathbf{72}$.

Méthode 2 : mise en œuvre de la proportionnalité
Lorsque le côté d'un carré est multiplié par un nombre k, l'aire de ce carré est multipliée par k^2.
IJKL est un carré de côté $6\sqrt{2}$ cm et ABCD est un carré de coté 12 cm.

Par conséquent, IJKL est une réduction de ABCD de coefficient $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Alors l'aire de IJKL correspond à l'aire de ABCD multipliée par $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

L'aire de IJKL est donc la moitié de l'aire de ABCD.

Or aire (ABCD) = 144 cm^2 donc **aire (IJKL)** $= \frac{144}{2} = \mathbf{72\ cm^2}$.

Méthode 3 : utilisation de la formule de l'aire du triangle

On note O le centre du carré IJKL.

Le carré IJKL est décomposé en quatre triangles superposables OIJ, OJK, OKL et OLI.

Alors : aire (IJKL) = 4 × aire (OIJ)

Or $aire(OIJ) = \frac{1}{2} \times OI \times OJ = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$ cm^2

Donc $\boldsymbol{aire\ (IJKL)} = \mathbf{72\ cm^2}$.

Méthode 3 : mise en œuvre de l'additivité des aires

On note O le centre du carré ABCD.

Le carré ABCD est formé par quatre carrés de même aire AIOL, BJOI, CKOJ et DLOK.

Ainsi aire (ABCD) = aire (AIOL) + aire (BJOI) + aire (CKOJ) + aire (DLOK).

Chacun de ces carrés est partagé par sa diagonale en deux triangles rectangles isocèles de même aire :

- AIOL est partagé en AIL et ILO ;
- BJOI est partagé en BIJ et IJO ;
- CKOJ est partagé en CJK et JKO ;
- DLOK est partagé en DLK et LKO.

Or aire (IJKL) = aire (ILO) + aire (IJO) + aire (JKO) + aire (LKO).

Donc aire (IJKL) = $\frac{1}{2}$ aire (AIOL) + $\frac{1}{2}$ aire (BJOI) + $\frac{1}{2}$ aire (CKOJ) + $\frac{1}{2}$ aire (DLOK).

Ainsi aire (IJKL) = $\frac{1}{2}$ aire (ABCD), or aire (ABCD) = 144 cm^2 donc $\boldsymbol{aire\ (IJKL)} = \mathbf{72\ cm^2}$.

3) Volume de la pyramide AILM

Pour utiliser la formule donnée, on peut considérer :

- la face triangulaire ALM comme la base. La hauteur de la pyramide relativement à cette base est AI,
- la face triangulaire AMI comme la base. La hauteur de la pyramide relativement à cette base est AL,
- la face triangulaire ALI comme la base. La hauteur de la pyramide relativement à cette base est AM.

Dans ce corrigé, la base considérée est la face triangulaire ALM. La hauteur de la pyramide relative à cette base est AI avec AI = 6 cm.

ALM est un triangle isocèle et rectangle en A. En effet, L et M sont les milieux des arêtes [AD] et [AE] du cube, on a AL = AM = 6 cm, le triangle ALM est isocèle. De plus, ADHE, face du cube, est un carré donc le triangle ALM est rectangle en A. On a alors :

aire (ALM) = $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$ cm^2.

Le volume de la pyramide est donc $\mathbf{\frac{1}{3} \times 18 \times 6 = 36\ cm^3}$.

Remarque :

- *On peut faire exactement les mêmes calculs avec les deux autres bases AMI et ALI.*
- *Le calcul de la mesure de l'aire de ALM peut se faire de différentes méthodes (moitié de l'aire du carré ALOI ou huitième de la mesure de l'aire du carré ABCD, ou encore quart de l'aire du carré IJKL).*
- *L'utilisation de la face IML comme base de la pyramide est possible mais ce choix n'est pas efficace ici car le calcul de son aire mène à une série de calculs délicats.*

4) Volume du nouveau solide

Selon la définition du nouveau solide, il est possible de calculer son volume qui sera égal au volume du cube auquel on aura ôté huit fois le volume de la pyramide.
Le volume du cube ABCDEFGH est égal à 12^3cm^3.
La mesure du volume du nouveau solide est alors (l'unité de volume étant le cm^3) :

$$12^3 - 8 \times 36 = 1728 - 288 = 1440.$$

TROISIEME PARTIE

PARTIE A

1) Proposition de phrase pour compléter l'énoncé en une situation de proportionnalité

Il s'agit de donner une indication qui orientera sans ambigüité vers la notion de proportionnalité. L'idée est d'insister sur le fait que le prix à payer pour les entrées est proportionnel au nombre d'élèves et qu'il n'y a pas de réduction pour le groupe. On peut compléter par exemple par une des phrases suivantes :

- « La coopérative paie le même tarif pour chaque élève, il n'y a pas de tarif de groupe ».
- « Le tarif d'entrée est le même pour chaque élève (de CE1 et de CE2), il n'y a pas de tarif de groupe ».
- « Les entrées sont payantes par élève, à tarif unique ».
- « Il n'y a pas de réduction possible : le tarif d'entrée est le même pour chaque élève ».
- « Le tarif d'entrée est unique : le prix à payer est le même pour chaque élève ».

2) Proposition de phrase pour compléter l'énoncé en une situation non proportionnelle

Pour que la situation ne soit pas proportionnelle, le tarif par élève ne doit pas être une constante indépendante du nombre d'élèves. On peut jouer sur plusieurs possibilités (en tenant compte des données de l'énoncé et de la « plausibilité » relativement à la vie courante) :

- « Le tarif d'entrée est le même pour chaque élève, mais à partir d'un groupe de 40 élèves, le tarif global est diminué de 10 % ».
- « Le tarif d'entrée est le même pour chaque élève, mais pour un groupe aussi important, 5 places sont offertes ».
- « En dessous de 30 entrées, le tarif est le même pour chaque élève. Toutes les 30 places achetées, 5 places sont offertes ».
- « Les 30 premières entrées sont toutes payées au même tarif, les places suivantes sont diminuées de 50 % ».
- « Au Château de Versailles, le tarif scolaire est calculé par groupe de 15 élèves. Le premier groupe de 15 élèves paye 55 euros. Le second groupe de 15 élèves paye 50 euros, le troisième 45 euros… et ainsi de suite. »

Remarque :
Dans les quatre premières propositions, même si les situations proposées ne relèvent pas globalement de la proportionnalité, il faudra tout de même utiliser cette notion pour pouvoir répondre à la question. Seule la dernière proposition n'a pas de lien avec la proportionnalité.

PARTIE B

1) Propriété caractéristique de la proportionnalité dans l'exemple 1

La valeur unitaire fixe (« 1 kg de pêches coûte 3€ ») est mise en avant. Mais, la phrase « Pour trouver le prix, il faut multiplier par 3 » indique que, dans cet exemple, les auteurs choisissent de mettre en évidence le coefficient de proportionnalité (aucune unité n'est associée au nombre 3). La notion sous-jacente est la fonction linéaire associée à cette situation $f: x \rightarrow 3x$. Il s'agit d'une conception fonctionnelle (ou opérateur) de la proportionnalité. Cette conception est renforcée par la présentation des informations dans un tableau… À chaque nombre (antécédent) de la première ligne correspond un nombre (image) dans la seconde ligne.

2) Propriété caractéristique de la proportionnalité dans l'exemple 2

Dans l'exemple 2, les auteurs du manuel insistent sur la propriété multiplicative de la fonction linéaire sous-jacente dans cette situation de proportionnalité. Cette propriété porte également le nom d'homogénéité. On notera qu'ici, l'information sur le prix de un gâteau n'est pas donnée.
De manière théorique, si h est la fonction linéaire associée à cette situation (h donne le prix à payer en fonction du nombre de gâteaux achetés), la propriété caractéristique mise en avant est la suivante : pour tous les nombres réels k et x, on a : $h(k \times x) = k \times h(x)$.

3) Rapport entre les nombres

Dans l'exemple 1, le rapport entre les nombres envisagé est un rapport « externe » (rapport entre des mesures de grandeurs différentes, ici des « pêches » et des « euros »). Ce rapport correspond au coefficient de proportionnalité ou le coefficient de linéarité de la fonction sous-jacente. Ce rapport joue un rôle d'opérateur multiplicatif qui fait passer du nombre de kilos de pêches achetés au nombre d'euros dus. Ce rapport est une grandeur quotient qui peut être exprimé avec une unité (dans cet exemple précis, c'est le « prix au kilo » de pêches, son unité est €/kg).

Dans l'exemple 2, le rapport entre les nombres présenté est un rapport « interne » (rapport entre des mesures d'une même grandeur : ici le rapport entre des nombres de gâteaux). Ce rapport est aussi appelé le rapport scalaire. Ce rapport n'a pas d'unité. On identifie ce genre de rapport pour faciliter les calculs en formulant des réponses du type « pour n fois plus (ou moins) de gâteaux, je dois n fois plus (ou moins) d'euros »).

Remarques :
Le terme de « rôle » est mal choisi dans cette question.
Dans l'exemple 2, les deux cas envisagés ont un rapport 2 (double ou moitié), ce qui est très réducteur. Il aurait été judicieux de donner un cas avec un autre rapport numérique.
La propriété (de linéarité) additive n'est pas mise en évidence sur ces exemples sauf si on envisage 8 comme $4 + 4$ *et pas comme* 2×4.

4) Propriété caractéristique de la proportionnalité dans l'exemple 3

Dans l'exemple 3, les auteurs insistent sur le passage à l'unité (« la valeur pour un ») et la propriété multiplicative. Les expressions « 3 fois plus / 6 fois plus » renvoient à la propriété multiplicative.
Si l'on note f la fonction qui associe le prix en euros au nombre de stylos achetés, les auteurs mettent en avant $f(3) \neq 3 \times f(1)$ et $f(6) \neq 6 \times f(1)$. Ce qui prouve que la fonction f ne vérifie pas la propriété multiplicative, donc qu'elle n'est pas linéaire. Ainsi, la situation n'est pas une situation de proportionnalité.

Remarque :

Il suffit d'un contre-exemple (ici $f(3) \neq 3 \times f(1)$ *ou* $f(6) \neq 6 \times f(1)$*) pour montrer que la fonction n'est pas linéaire.*

Pour montrer que cette situation n'est pas liée à la proportionnalité, on pourrait dire indifféremment (à l'attention d'un élève de cycle 3) :

- Le prix de 6 stylos n'est pas le double du prix de 3 stylos. La propriété multiplicative de la proportionnalité n'est pas respectée.
- Le prix de 3 stylos (5 euros) plus celui de 3 stylos (5 euros), n'est pas le prix de 6 stylos (6 euros). La propriété additive de la proportionnalité n'est pas respectée.

- Les rapports $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$ et $\frac{6}{6}$ ne sont pas égaux. La propriété des rapports égaux n'est pas respectée (il suffit que deux des rapports soient différents pour que la situation ne soit pas une situation de proportionnalité).
- Si l'on se place dans un repère avec le nombre de stylos en abscisse et le prix correspondant en ordonnée, on constate que les points de coordonnées (1 ; 2), (3 ; 5) et (6 ; 6) ne sont pas alignés sur une droite passant par (0 ; 0). La propriété graphique de la proportionnalité n'est pas respectée.

PARTIE C

Remarque préalable :
La situation proposée par l'enseignant est implicitement une situation de proportionnalité : la quantité d'œufs à utiliser est proportionnelle au nombre de personnes. La donnée de deux couples (8 personnes, 6 œufs) et (12 personnes, 9 œufs) renforce l'impression de proportionnalité dans cette situation. La proportionnalité est une modélisation de cette situation issue du réel. La fonction qui modélise cette situation est notée $g(x)$ et définie par $g(x) = \frac{3}{4}x$.

Auriane :
Cette élève identifie de manière implicite (*a priori*) une situation de proportionnalité.
Elle cherche le nombre d'œufs pour une personne en réalisant la division 6 : 8. Son calcul (posé) est exact. On notera cependant que ce nombre perd son sens pratique (« 0,75 œuf par personne » n'a pas de sens réel). Il lui suffit alors de multiplier par le nombre de personnes souhaité (20) pour trouver le résultat. Cette multiplication est également posée et le résultat est correct.
Il y a plusieurs façons d'interpréter la procédure d'Auriane.

- soit elle réalise une « règle de trois » en version « retour à l'unité » (elle commence par diviser pour trouver le nombre d'œufs par personne) puis elle multiplie ce résultat pour trouver le nombre d'œufs pour 20 personnes ; elle utilise donc en acte la propriété multiplicative (diviser par 8 chaque grandeur, puis multiplier par 20 chaque grandeur) ;
- soit elle utilise de manière implicite le coefficient de proportionnalité de la situation. Ce coefficient est 0,75. Ce qui lui permet de trouver le nombre d'œufs pour 20 personnes.

Emeric :
Cet élève note que 20 personnes, c'est 8 personnes plus 12 personnes (mise en évidence d'une relation entre les nombres, ici décomposition additive de 20 faisant intervenir les nombres de l'énoncé). Or il sait que pour 8 personnes, il faut 6 œufs et que pour 12 personnes, il en faut 9. Il conclut donc que pour 20 personnes, il faut : 6 + 9 = 15 œufs.
Il utilise de manière implicite la propriété additive de la proportionnalité. En reprenant la notation fonctionnelle : $\mathrm{g}(8 + 12) = \mathrm{g}(8) + \mathrm{g}(12)$.
On note que dans cette procédure, aucune opération n'est posée, Emeric écrit des égalités pour traduire sa procédure et formule une phrase réponse.

Nicolas :
Il semble que Nicolas ne prenne en compte que la première donnée de l'énoncé, à savoir « pour 8 personnes, j'utilise 6 œufs ». Même si la première égalité qu'il a écrite est la même que Emeric, elle ne « traduit » pas la même démarche. Ici, elle lui a permis de trouver l'écart entre 8 et 20, mais ce nombre (12) n'est pas une donnée de l'énoncé. Ensuite, son raisonnement peut être « pour 12 personnes de plus, j'utilise 12 œufs de plus ». Il ne reconnaît pas une situation de proportionnalité et reste sur un schéma additif (incorrect) :
$\mathrm{g}(8 + 12) = \mathrm{g}(8) + 12$.

Kévin :
Cet élève utilise la règle de trois (attention, ce n'est pas un passage à l'unité car il ne calcule pas le « nombre d'œufs pour une personne »). La « ritournelle » associée est entièrement rédigée. La présence d'une seule écriture (d'un seul calcul) « $6 \times 20 : 8$ » conforte cette interprétation. On peut supposer qu'il a d'abord écrit « $20 : 8$ » puis inséré « $6 \times$ » devant cette écriture. Il semble donc respecter un « format » imposé du début à la fin de la résolution (comme s'il ne restait qu'à inscrire les bons nombres au bon endroit…). Il commence par multiplier puis il divise. Notons ici que le nombre 120 ne correspond à « rien » en référence à la situation.

Remarque :
Les procédures d'Auriane et Kévin donnent le résultat exact au prix de calculs peu évidents. La procédure d'Emeric est nettement plus efficace (plus « économique ») dans cet exemple. Emeric analyse les données en termes de relation à trouver entre les nombres donnés.

PARTIE D

1) L'exercice s'inscrit dans une séquence sur la proportionnalité

La résolution de ce problème nécessite trois étapes :

- le calcul du nombre de romans à la médiathèque Jean Jaurès : application d'un pourcentage à un nombre de livres donné ;
- le calcul du nombre de romans à la médiathèque George Sand : application d'un pourcentage à un nombre de livres donné ;
- le calcul du pourcentage de romans dans la ville à partir du nombre total de romans et du nombre total de livres des deux médiathèques.

Les problèmes faisant intervenir des calculs de pourcentages font partie du champ conceptuel de la proportionnalité. À ce titre, cet exercice peut faire partie d'une séquence sur ce thème. D'autre part, avec les données dont on dispose, il semble que la démarche de l'enseignant soit : la proportionnalité, d'abord vue en tant qu'outil (partie A) puis institutionnalisée en tant qu'objet (partie B). Maintenant, avec cet exercice, l'enseignant peut chercher à voir si les élèves réussissent à utiliser la proportionnalité dans un autre contexte (en référence aux programmes : pourcentages, échelles, vitesses moyennes). Il s'agit de voir si l'élève peut utiliser la notion de proportionnalité de nouveau en tant qu'outil mais dans une situation complexe.

2) a) L'erreur de raisonnement de Paul

Paul fait implicitement la moyenne des pourcentages (recherche du nombre « à égale distance » de 40 et 60) sans référence au nombre d'ouvrages dans chaque médiathèque. Sa procédure relève d'une propriété erronée des proportions, à savoir : *« la proportion dans un ensemble est la moyenne des proportions dans les parties qui le composent »*.

Remarque :
Son résultat pourrait être juste si les deux médiathèques possédaient le même nombre d'ouvrages.
L'erreur de Paul est classique dans le cadre des vitesses moyennes : « la vitesse moyenne sur un trajet est la moyenne des vitesse sur les parties qui le composent ».

2) b) Comment trouver 50 % en remplaçant 5000 par un autre nombre

Remarque préalable :
Deux démarches peuvent être envisagées. La première démarche consiste à faire l'hypothèse que les deux médiathèques ont le même nombre d'ouvrages (4000) et à vérifier que ce résultat donne la réponse attendue (méthodes 1, 2 et 3). La seconde démarche consiste à chercher le nombre N d'ouvrages dans la médiathèque Jean JAURÈS qui permet d'obtenir la réponse attendue (méthode 4).

<u>Première démarche :</u>

Si les deux médiathèques ont le même nombre d'ouvrages, la bonne réponse est 50 %. Ainsi, si la médiathèque Jean JAURÈS possède 4000 ouvrages, la bonne réponse est 50 %.

Méthode 1 :

Médiathèque Jean JAURES : 40 % de 4000 ouvrages donne 1600 romans.
Médiathèque Georges SAND : 60 % de 4000 ouvrages donne 2400 romans.
Au total, il y a 1600 + 2400 = 4000 romans sur 8000 ouvrages. Il y a bien 50 % de romans au sein du service culturel de la ville.

Méthode 2 :

Les médiathèques possèdent le même nombre d'ouvrage noté N. À la médiathèque Jean JAURÈS, il y a 0,4 × N romans ; à la médiathèque Georges SAND, il y a 0,6 × N romans. Ainsi, il y a en tout 0,6 × N + 0,6 × N romans, soit une proportion de : $\frac{0{,}4\times N+0{,}6\times N}{N+N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$. Il y a donc 50 % de romans au sein du service culturel de la ville.

Méthode 3 :

Si les deux médiathèques possèdent chacune 4000 ouvrages, alors les 40 % de romans de la médiathèque Jean JAURÈS donnent 20 % de romans de la totalité. De même 60 % de romans de la médiathèque Georges SAND apportent 30 % de romans de la totalité. Finalement il y a 20 % + 30 %, soit 50 % de romans au sein du service culturel de la ville.

Remarque :

La méthode 3 donne le bon résultat mais peut être source de confusion. Ajouter des pourcentages n'est pas une procédure recommandée.

<u>Seconde démarche :</u>

Méthode 4 :

Soit N, le nombre d'ouvrages dans la médiathèque Jean JAURÈS. On cherche N tel que :

$$\frac{0{,}4 \times N + 0{,}6 \times 4000}{N + 4000} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Cette équation implique $2 \times (0{,}4 \times N + 2400) = N + 4000$ ou encore $0{,}2 \times \mathrm{N} = 800$ ce qui donne $\mathrm{N} = 4000$.
S'il y a 4000 ouvrages dans la médiathèque Jean JAURÈS, le résultat du problème est 50 %.

GROUPEMENT 3 – avril 2014

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME

PARTIE A : Optimisation du volume d'un moule

1) Détermination du bon graphique.

Méthode 1 :

Il s'agit ici de faire le calcul exact d'une valeur particulière du volume choisie de façon à pouvoir discriminer la bonne réponse parmi les différents graphiques proposés.
De nombreuses valeurs sont possibles. Si par exemple, les côtés de chacun des carrés découpés mesurent 1 cm , le moule a pour base un carré de 8 cm et pour hauteur 1 cm.
Son volume est alors de $8^2 \times 1 = 64$ (en cm^3).
Le point de coordonnées $(1\ ;\ 64)$ doit donc appartenir au graphique. Parmi ceux proposés, seul le graphique 2 convient.

Méthode 2 :

Notons x la mesure en cm de la longueur des côtés des carrés découpés dans chacun des coins de la plaque.
Notons $V(x)$ le volume de ce moule exprimé en fonction de x.
On peut faire une remarque préliminaire sur l'intervalle de définition de cette fonction. Comme il y a deux carrés sur chacun des bords de longueur 10 cm de la plaque, la valeur maximale que peut prendre x est 5 cm.
Ainsi, comme x varie entre 0 et 5 cm, on peut remarquer d'entrée que seuls les graphiques 2 et 4 peuvent représenter le volume du moule en fonction de x. En effet, les graphiques 1 et 3 ne conviennent pas, car correspondent à des fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;10]$.

On détermine ensuite l'expression générale de V en fonction de x.
Le moule est un parallélépipède rectangle.
Sa base est un carré de côté $c = 10 - 2x$ et sa hauteur est $h = x$.
Le volume $V(x)$ de ce moule, exprimé en fonction de x, est donc

$$V(x) = c^2 \times h = (10 - 2x)^2 \times x = (100 - 40x + 4x^2) \times x = 100x - 40x^2 + 4x^3$$

On peut alors comme dans la première méthode calculer $V(x)$ pour une valeur particulière de x
En choisissant ici aussi $x = 1$, on a alors :

$$V(1) = 100 \times 1 - 40 \times 1^2 + 4 \times 1^3 = 100 - 40 + 4 = 64 \text{ cm}^3$$

Le graphique représentant le volume du moule en fonction de la longueur des côtés des carrés est le graphique 2.

Remarque 1 :

La méthode 1 montre que la discrimination préalable portant sur l'intervalle de définition pour éliminer les graphiques 1 et 3 n'était ici pas nécessaire.

Remarque 2 :

On pouvait aussi étudier la pente de la tangente en un point de la courbe, par exemple d'abscisse 5.
La dérivée de V a pour expression en fonction de x :
$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100$
$V'(5) = 12 \times 5^2 - 80 \times 5 + 100 = 0$
La tangente à la courbe au point d'abscisse 5 est donc horizontale, ce qui n'est pas le cas sur le graphique 4.
Comme les graphiques 1 et 3 ont déjà été éliminés, ne reste alors que le graphique 2.
Le calcul de la pente d'une tangente à une courbe en utilisant la dérivée d'une fonction n'est pas au programme du CRPE mais un tel raisonnement, s'il est correctement rédigé, devrait être accepté par un correcteur du jury.

2) Encadrement du volume maximal.

La lecture du graphique 2 permet d'affirmer que le volume maximal est compris entre 70 cm^3 et 80 cm^{3}et que cette valeur maximale est obtenue pour une longueur du côté comprise entre 1,5 cm et 2 cm.
L'encadrement cherché doit être un encadrement par deux entiers consécutifs.
La longueur du côté qui permet d'obtenir le volume maximal est comprise entre 1 cm et 2 cm.

PARTIE B : Optimisation de la disposition des moules sur les plaques de cuisson

Remarque préalable :

Selon l'intitulé de cette partie parlant d' « optimisation », on peut supposer que la question est de rechercher le nombre maximum de moules qu'il pourra placer sur une plaque.

Méthode 1 :

Déterminons dans un premier temps, combien l'on peut disposer de moules dans le sens de la longueur. On déterminera ensuite par un raisonnement analogue le nombre de moules que l'on pourra disposer dans le sens de la largeur.
Laisser 1cm entre chaque moule et sur chaque bord conduit à compter ces 1 cm une fois de plus qu'il n'y a de moules.
Cela revient à décompter 1cm des 70 cm de la longueur, restent donc 69 cm disponibles, et à considérer ensuite que l'encombrement de chaque moule dans le sens de la longueur est de 8 cm.
La question est alors : combien peut-on placer de moules carrés de 8 cm de côté sur une longueur de 69 cm ? La division euclidienne de 69 par 8 donne : $69 = 8 \times 8 + 5$.
On pourra donc disposer au maximum 8 moules dans le sens de la longueur.
Dans le sens de la largeur, une fois décompté 1 cm des 40 cm, la question devient : combien peut-on placer de moules carrés de 8 cm de côté sur une largeur de 39 cm ?
La division euclidienne de 39 par 8 donne : $39 = 4 \times 8 + 7$.
On pourra donc disposer au maximum 4 moules dans le sens de la largeur.

Finalement, **on pourra disposer au maximum $8 \times 4 = 32$ moules** sur chacune des plaques de cuisson.

Méthode 2 :

On peut effectuer des essais dans la longueur.
Puisque la longueur de la plaque mesure 70 cm et qu'on doit considérer les écarts entre les moules dont les côtés mesurent 7 cm, le pâtissier placera moins de 10 moules dans la longueur.
On essaie avec 9 moules en comptant 10 écarts entre les moules et les bords :
$9 \times 7 + 10 \times 1 = 73$ cm, c'est trop.
On essaie avec 8 moules en comptant 9 écarts entre les moules et les bords :
$8 \times 7 + 9 \times 1 = 65$ cm, ça convient.
Il peut donc placer au maximum 8 moules dans la longueur.
On fait de même pour la largeur.
Le quotient de la division euclidienne de 40 par 7 est 5.
On essaie avec 5 moules en comptant 6 écarts entre les moules et les bords
$5 \times 7 + 6 \times 1 = 41$ cm, c'est trop.
Puisqu'il n'y a qu'un centimètre de trop, on peut ainsi, sans calcul, dire qu'on peut placer au maximum 4 moules dans la largeur.
Le pâtissier pourra placer au maximum 32 moules sur cette plaque.

PARTIE C : Optimisation du coût du chocolat

1) Masse de chocolat à prévoir pour la réception.

Il s'agit d'une situation de proportionnalité dont on peut classer les données dans un tableau.
On est ici face à un problème de recherche de quatrième proportionnelle.

Nombre de personnes	4	17
Masse de chocolat (en g)	200	*?*

<u>Méthode 1</u> : (retour à l'unité ou recherche du coefficient de proportionnalité)

Puisque 200g de chocolat sont nécessaires pour 4 personnes, il faut $\frac{200\text{ g}}{4} = 50$ g de chocolat par personne et donc 17×50 g $= 850$ g de chocolat pour 17 personnes.

<u>Méthode 2</u> : (propriété multiplicative de la linéarité)

Pour passer de 4 à 17 personnes, on multiplie par $\frac{17}{4}$.
Ainsi 200g $\times \frac{17}{4} = 850$ g . Pour 17 personnes, il faut donc 850 grammes.

<u>Méthode 3</u> : « égalité des produit en croix »

La quantité x de chocolat nécessaire pour 17 personnes vérifie l'équation :
$\frac{4}{200} = \frac{17}{x}$ d'où $4x = 17 \times 200$ et $x = \frac{17\times 4}{4} = 850$..
Il faut donc prévoir 850 grammes de chocolat pour 17 personnes.

Remarque :

Il est tout à fait acceptable de considérer que le particulier recevant 17 personnes souhaite manger de sa ganache avec ses convives. Dans ce cas, il faut calculer la masse de chocolat pour 18 personnes et non 17.
On obtient alors 18 x 50 g= 900 g.
Dans cette situation une autre méthode est alors possible basée sur la propriété additive de la linéarité :
$18 = 4 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4$ *donc il faut* $4 \times 200\text{ g} + \frac{1}{2} \times 200\text{ g} = 900\text{ g}$

2) a) Type de tablettes à acheter pour dépenser le moins possible.

Pour déterminer la dépense correspondant à chaque type de tablettes, il faut commencer par déterminer dans chaque cas le nombre de tablettes nécessaires pour disposer effectivement d'au moins 850 grammes de chocolat.
Ainsi par exemple, comme $5 \times 150 = 750$ et $6 \times 150 = 900$, il faut acheter 6 tablettes de « Chocolat Dégustation » pour réaliser la recette pour 17 personnes.
Cela revient à rechercher le quotient de la division euclidienne de 850 par la masse d'une tablette et lui ajouter un.
Ainsi pour le chocolat « saveur », « pâtissier » et « à cuisiner » $850 = 200 \times 4 + 50$, il faut donc 5 tablettes.
Pour le chocolat « intense », $850 = 100 \times 8 + 50$, il faut 9 tablettes.

On calcule ensuite le prix des tablettes à acheter pour chaque type de chocolat.
On peut présenter l'ensemble des calculs sous la forme d'un tableau venant compléter les données initiales :

Tablette	Chocolat Dégustation	Chocolat Saveur	Chocolat Pâtissier	Chocolat Intense	Chocolat À cuisiner
Prix d'une tablette (en €)	2,10	2,80	2,62	1,36	2,81
Quantité par tablette (en g)	150	200	200	100	200
Nombre de tablettes à acheter	6	5	5	9	5
Dépense totale (en €)	12,60	14	13,40	12,24	14,05

C'est en achetant des tablettes de type « Chocolat Intense » que la dépense est la moins onéreuse.

Remarque :

On pouvait aussi éviter de faire les calculs pour les types « Chocolat Saveur » et « Chocolat à cuisiner » puisque ces tablettes ont même masse que celles du type « Chocolat Pâtissier » mais leur prix unitaire est plus cher.

2) b) Les tablettes de« Chocolat Dégustation » en promotion sont-elles plus avantageuses ?

Effectuer une réduction de 5% sur un prix revient à lui appliquer le coefficient multiplicateur 0,95.
Ainsi avec cette réduction le coût de 6 tablettes de « Chocolat Dégustation » devient :

$$12{,}60\text{ €} \times 0{,}95 = 11{,}97\text{ €}$$

Oui, avec cette promotion, le « Chocolat Dégustation devient effectivement le plus avantageux.

Remarque :

Les réponses aux questions 2)a) et 2)b) sont les mêmes en prenant la recette pour 18 personnes.

DEUXIEME PARTIE

Exercice 1

1) **Affirmation 1 :** Plus l'aire d'un rectangle est grande, plus son périmètre est grand.

On exhibe un contre-exemple :
Un rectangle de 8cm de long pour 2cm de large a une aire de 16cm^2 et un périmètre de 20cm.
Un rectangle de 5cm de long pour 4cm de large a une aire de 20cm^2 pour un périmètre de 18cm.
L'aire du second rectangle est plus grande que celle du premier mais son périmètre est plus petit que celui du premier.
L'affirmation 1 est fausse.

2) Pour remplir un cube de 1 m d'arête, il faut exactement 40 sacs de ciment.
Affirmation 2 : Il faut exactement 5 sacs pour remplir un cube de 50 cm d'arête.

Méthode 1 :

On divise par 2 les arêtes du cube, soit une réduction de rapport $\frac{1}{2}$.
Le volume du cube est donc multiplié par $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
Le volume du cube est divisé par 8 tout comme le nombre de sacs de ciment, 40 :8=5.

Méthode 2 :

Un cube de 1m d'arête a un volume de 1m^3 = 1 000 000 cm^3
Le volume d'un cube de 50 cm d'arête est de (50 cm)^3 = 125 000 cm^3
Le rapport entre les deux volumes est : 1 000 000 : 125 000 = 8
Le nombre de sacs de ciment nécessaire pour remplir le second cube d'arête 50 cm est donc : 40 : 8 = 5
Il faut donc exactement 5 sacs de ciment pour remplir un cube de 50 cm d'arête.
L'affirmation 2 est vraie.

3) A et B sont deux nombres entiers strictement inférieurs à 100 dont les écritures à deux chiffres utilisent les mêmes chiffres dans l'ordre inverse.
Comme, par exemple, 21 et 12 ou bien 40 et 04.
Affirmation 3 : Le nombre A + B est divisible par 11.

Si l'on note respectivement *d* et *u* les chiffres des dizaines et des unités de A, on a $A = \overline{du}$.
Et on a ainsi B = $\overline{ud}$
D'où A + B = 10d + u + 10u + d = 11d + 11u = 11(d + u)
A + B est donc bien divisible par 11.
L'affirmation 3 est vraie.

4) La masse d'un ourson baisse de 30 % pendant l'hiver puis elle augmente de 30 % au printemps.
Affirmation 4 : Finalement, à la fin du printemps, l'ourson a retrouvé la masse qu'il avait en début d'hiver.

Baisser de 30% la masse d'un ourson revient à la multiplier par 0,70.
L'augmenter de 30% revient à la multiplier par 1,30.
Effectuer successivement une baisse de 30% et une augmentation de 30% revient donc à multiplier sa masse par $0{,}70 \times 1{,}30 = 0{,}91$.
L'ourson ne retrouve pas sa masse initiale. On peut même affirmer que sa masse a diminué de 9%.
L'affirmation 4 est fausse.

5) Un verre est assimilé à un cône de révolution.
   Il est rempli à mi-hauteur.
   Affirmation 5 : Le volume du liquide représente le quart du volume total du verre.

Le liquide peut être assimilé à un cône de révolution. C'est une réduction du cône représentant le verre de rapport $\frac{1}{2}$. Son volume est donc multiplié par $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ soit $\frac{1}{8}$ et non pas $\frac{1}{4}$.
L'affirmation 5 est fausse.

Exercice 2

1) Calcul de l'énergie cinétique d'un camion d'une tonne roulant à 100 km/h.

On convertit les données dans les unités adaptées à la formule de l'énergie cinétique.
1 tonne = 1000 kg
100 km = 100 000 m
1h = 3600 s

100 km/h = $\frac{100\,000}{3600}$ m/s = $\frac{1000}{36}$ m/s (on garde une écriture fractionnaire pour ne pas utiliser une valeur approchée dans les calculs).

$\frac{1}{2} \times 1000 \times \left(\frac{1000}{36}\right)^2 \approx 385\,802$ arrondi à l'unité près.
L'énergie cinétique d'un camion d'une tonne roulant à 100 km/h est donc environ de 385 802 joules.

2) L'énergie cinétique est-elle proportionnelle à la vitesse ?

Méthode 1 :

Si l'énergie cinétique était proportionnelle à la vitesse, il existerait une constante réelle k telle que $E_c = k \times v$. La formule donnée n'est clairement pas de cette forme. De façon plus précise, cette formule montre que l'énergie cinétique n'est proportionnelle à la vitesse, mais proportionnelle au carré de la vitesse.

Méthode 2 :

S'il y avait proportionnalité entre l'énergie cinétique et la vitesse, pour un camion d'une tonne nous devrions trouver pour une vitesse de 50 km/h une énergie cinétique égale à la moitié de celle correspondant à une vitesse de100 km/h, soit à la moitié de 385 802 joules, c'est-à-dire nous devrions obtenir 192 901 joules.
Mais lorsque l'on calcule à l'aide la formule l'énergie cinétique d'un camion d'une tonne roulant à une vitesse de 50 km/h , c'est-à-dire à $\frac{500}{36}$ m/s, on obtient :

$E_c = \frac{1}{2} \times 1000 \times \left(\frac{500}{36}\right)^2 \approx 96\,451$ J arrondi à l'unité près.
L'énergie cinétique n'est pas proportionnelle à la vitesse.

Remarque :

De façon plus précise, le rapport entre les deux énergies cinétique est $\frac{385\,802}{96\,451} = 4$.
La vitesse de ce camion a été divisée par 2 par rapport à celle du camion de la question 1), alors que l'énergie cinétique a été divisée par 4. Il ne s'agit donc pas d'une situation de proportionnalité et ce calcul confirme que l'énergie cinétique est proportionnelle au carré de la vitesse.

Exercice 3

1) Probabilité d'avoir deux garçons dans une famille ayant deux enfants.

Méthode 1 :

On considère le fait d'avoir 2 enfants comme une expérience aléatoire dont l'univers ou l'ensemble des résultats possibles est : {(F,F),(G,G),(F,G),(G,F)} en notant par exemple (F,G) l'évènement consistant à avoir une fille puis un garçon.
La probabilité d'obtenir un garçon étant égale à celle d'obtenir une fille, ces quatre évènements possibles sont équiprobables .On compte un seul évènement favorable (G,G).
soit une probabilité de :

$$\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombres\ de\ cas\ possibles} = \frac{1}{4}$$

Méthode 2 :

On peut considérer le fait d'avoir deux enfants comme une expérience aléatoire qu'on répète deux fois.
Les évènements « avoir un garçon pour premier enfant », qu'on notera G1, et « avoir un garçon pour deuxième enfant », qu'on notera G2, sont indépendants.
Ainsi en notant P(G1 ∩ G2) la probabilité d'avoir 2 garçons on a :
$P(G1 \cap G2) = P(G1)\times P(G2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

La probabilité d'avoir deux garçons dans une famille ayant deux enfants est donc de $\frac{1}{4}$.

Remarque :

Le raisonnement à ne pas faire serait le suivant.
Il y a 3 issues possibles, deux garçons, un garçon et une fille, deux filles.
Parmi ces trois issues une seule est favorable mais on ne peut pas en conclure que la probabilité est de $\frac{1}{3}$ car ces trois issues possibles ne sont pas équiprobables (il y a deux façons d'avoir un garçon et une fille : un garçon puis une fille ou l'inverse).

2) Lien entre le graphique et la réponse 1).

L'étude statistique montre que, quand le nombre de familles devient important, la fréquence des familles ayant deux garçons parmi les familles de deux enfants se rapproche de 25%, c'est-à-dire de $\frac{1}{4}$, soit la probabilité calculée en 1).
Il y a cohérence entre le calcul de probabilité effectué à la question précédente et l'étude statistique présentée.

Remarque :

Cette observation illustre un résultat classique : la loi des grands nombres.

Exercice 4

1) a) Formule saisie dans la cellule E9.

La formule saisie dans la cellule E9 peut être **« = B9 + C9 +D9 »** ou **« =SOMME(B9 :D9) »**.

Remarque :

La formule « = $B9 + $C9 + $D9 » est également valable même si les $ sont ici inutiles.

b) Formule saisie dans la cellule B14.

La formule saisie dans la cellule E9 peut être **« = (B9 + B10 + B11 + B12 + B13)/5 »** ou **« =SOMME(B9 :B13) /5»** ou **« =MOYENNE(B9 :B13) »**

Même remarque que précédemment pour la formule « = (B$9 + B$10 + B$11 + B$12 + B$13)/5».

2) Vitesse moyenne de l'athlète 1 sur l'ensemble des trois épreuves.

A la lecture du tableau, l'athlète 1 a parcouru 51,5 km (donné en E4) en 133 min (donné en E9).

Sa vitesse est de $\frac{51,5}{133}$ km/min.

$\frac{51,5}{133} \times 60 \approx 23,2$ arrondi au dixième près.

La vitesse moyenne de l'athlète 1 est environ de 23,2 km/h.

Remarque :

L'erreur à ne pas faire ici aurait été de calculer la moyenne des 3 vitesses données à la ligne 19.

TROISIEME PARTIE

PARTIE A : en cycle 2

1) Dans l'énoncé 1, en quoi les valeurs numériques choisies induisent des procédures différentes.

L'énoncé 1, lorsqu'il est complété par 3 enfants, peut être résolu de différentes manières.

- Par une procédure schématique, l'élève dessine 3 séries de 4 bonbons et dénombre la collection obtenue.
- En reconnaissant le modèle multiplicatif 3×4,
  - il peut opérer par une procédure d'addition itérée: $4 + 4 + 4$ car le nombre 3 étant petit, la répétition ne sera pas longue ;
  - à ce niveau, il peut aussi utiliser la table de multiplication par 4 pour calculer 3×4.

L'énoncé 1, lorsqu'il est complété par 23 enfants, peut être modélisé par le problème multiplicatif 23×4.

Dans ce cas la procédure schématique et la procédure d'addition répétée 23 fois $4 + \cdots + 4$ sont longues et fastidieuses à réaliser sans erreur.

Pour obtenir le résultat de 23×4, plusieurs procédures sont possibles.

- Après avoir, par commutativité, remplacé le produit 23×4 par le produit 4×23, l'élève peut, à l'aide de matériel de numération ou schématiquement, représenter 4 groupes de 2 dizaines et 3 unités. Échanger dix unités contre 1 dizaine. Dénombrer les 9 dizaines et les 2 unités pour conclure.
- Il peut aussi effectuer, mentalement ou en la posant, l'addition $23 + 23 + 23 + 23$.
- Par ailleurs s'il connaît la propriété de commutativité de la multiplication, il pourra utiliser la procédure suivante :
  - Modéliser le nombre de bonbons donnés à trouver par la multiplication 4x23.
  - Utiliser la commutativité : 4x23 = 23x4.
  - Utiliser la table de multiplication par 4 pour calculer le produit 23x4 , par exemple en utilisant la distributivité de la multiplication sur l'addition :

$$23 \times 4 = 10 \times 4 + 10 \times 4 + 3 \times 4$$

Selon les programmes 2008, un élève connaît en fin de CE1 « une technique opératoire de la multiplication et l'utilise pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre ». Sans indication sur le moment où a lieu cette séance dans la progression, on peut donc supposer qu'un élève puisse poser l'opération.

En conclusion, la taille du nombre (3 ou 23) est susceptible d'induire des procédures différentes. On dira que la taille du nombre est une variable didactique dans cette situation.

2) **Dans l'énoncé 2, en quoi les valeurs numériques choisies induisent des procédures différentes.**

Quelle que soit la façon dont cet énoncé est complété, l'élève peut reconnaître un problème de multiplication à trou.

Si l'énoncé est complété par 4 aimants, il peut être modélisé par: 4x … =36. Par commutativité, si l'élève reconnaît en 36 un nombre présent dans la table de multiplication par 4, sa procédure peut utiliser cette table pour établir que 4x9=36.

Par contre, si l'énoncé 2 est complété par 3 aimants il ne reconnaîtra pas 3x12=36 dans la table, car la table s'arrête à 3x10. Par contre, il pourra utiliser, une procédure s'appuyant sur la décomposition additive de 36 en 36 = 30 + 6, ces deux nombres étant à la fois présent dans la table de multiplication par 3 et des multiples simples de 3.
En utilisant la distributivité, son calcul peut être du type : 36=30+6=3x10+3x2=3x(10+2)=3x12.

Remarques :

- *On voit cependant que cette procédure est plus aléatoire, notamment si l'élève décompose en 36=20+16.*
- *L'élève peut aussi tester, mentalement ou en posant les opérations, différents produits de la table du 3 au-delà de* 10 *:* $3 \times 11 = 33$; $3 \times 12 = 36$ *et conclure.*
- *Dans les deux cas, l'énoncé complété par 4 aimants ou avec 3 aimants, un élève peut faire des additions successives de 4 ou de 3: par exemple* $4 + 4 = 8$; $8 + 4 = 12$; $12 + 4 = 16$ … *jusqu'à obtenir 36 et alors dénombrer le nombre de fois où il a ajouté 4 pour conclure, mais cette procédure n'avait pas être citée puisque possible dans les deux cas.*
- *Comme le précise le programme, il s'agit ici d' « approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage » mais on ne peut pas envisager une procédure basée sur la division telle que l'élève fait 36 divisé par 3 et trouve 12.*

PARTIE B : en cycle 3

1) **Propriétés des opérations utilisées par Lucie**

Pour le calcul du coût de la route, Lucie semble utiliser implicitement la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction
Elle pose 30×8 pour trouver 240 auquel elle soustrait 24, résultat du calcul mental de 3×8.
Ce qu'on peut traduire algébriquement par
$27 \times 8 = (30 - 3) \times 8 = 30 \times 8 - 3 \times 8 = 240 - 24 = 216$

Par ailleurs, pour le calcul par bateau, elle effectue le calcul 420 :2=210. On peut faire l'hypothèse suivante, Lucie s'appuie mentalement sur la décomposition additive de 420 =400 +20 et effectue le calcul : 420 :2=400 :2+20 :2=200+10=210.
La propriété sous-jacente peut être formulée en « la moitié d'une somme est égale à la somme des moitiés de chaque terme de cette somme ». De façon théorique, c'est un cas particulier de la distributivité à gauche de la division par rapport à l'addition.

2) **a) Trois connaissances et compétences réinvesties par Adèle.**

Dans le domaine de la résolution de problèmes, Adèle met en œuvre un raisonnement et articule les différentes étapes d'une solution : elle schématise le problème, calcule le coût par bateau et par la route (où elle reconnait une situation multiplicative), compare les deux et conclue.

Dans le domaine « nombres et calcul », Adèle connaît ses tables de multiplication.
Elle effectue correctement les multiplications posées en colonne dans le calcul 27×8 (multiplication d'un nombre à 2 chiffres par un nombre à un chiffre).
Elle connaît la technique de la multiplication d'un entier par un nombre à deux chiffres. Dans la quatrième ligne de son opération 420×27 , le point (ou zéro ?) traduit le calcul de 420 fois 2 dizaines.
Adèle compare correctement les nombres 1240 et 216.

2) **b) Les erreurs commises par Adèle.**

On peut relever des erreurs de calcul.

Dans la multiplication posée 420×27,

- Adèle oublie de reporter des retenues qu'elle avait pourtant notées : à la troisième ligne en calculant 420×7.
- Adèle fait une erreur dans l'addition des produits intermédiaires au niveau des milliers et dizaines de mille (2+8+la retenue donnent 1).

On peut aussi relever des erreurs de raisonnement.
Adèle résout incorrectement le problème consistant à trouver le coût du transport par bateau. Elle comprend 420 comme le prix unitaire d'un colis transporté par bateau alors qu'il s'agit du coût de la cargaison totale.
Dans le problème elle ne tient pas compte de la réduction de moitié du prix du container.

3) a) Trois connaissances et compétences réinvesties par Noémie.

On peut noter les mêmes compétences qu'Adèle dans le domaine de la résolution de problème même si Noémie ne ressent pas le besoin de schématiser la situation.
Elle résout correctement le problème multiplicatif consistant à trouver le coût du transport par route. Contrairement à Adèle, elle prend en compte la donnée que le prix du container en bateau coûte moitié par rapport au prix initial.

Dans le domaine « nombres et calcul », Noémie effectue correctement les multiplications posées en colonnes dans le calcul 27×8 (multiplication d'un nombre à 2 chiffres par un nombre à un chiffre).
Elle sait calculer mentalement la moitié de 420.
Elle compare correctement les nombres 2890 et 216.

3) b) Les erreurs commises par Noémie.

On peut relever des erreurs de calcul.
Noémie effectue incorrectement la multiplication en colonnes 210×27 en alignant incorrectement les colonnes pour le calcul du second produit intermédiaire 210x20, soit elle n'a pas compris la technique et elle a écrit le résultat de 210×2 , soit la présence d'un zéro à la fin du résultat de 210×2 lui a fait oublier le décalage.
Dans l'addition des produits intermédiaires, elle reporte 2 milliers au lieu d'un.

Il y a aussi des erreurs de raisonnement.
Noémie résout incorrectement le problème consistant à trouver le coût du transport par bateau. Elle comprend 210 comme le prix unitaire d'un colis transporté par bateau alors qu'il s'agit du coût de la cargaison totale.

PARTIE C : « Per Gelosia »

1) Calcul en ligne du produit 32×45.

$$
\begin{aligned}
32 \times 45 &= (30 + 2) \times 45 \\
&= 30 \times 45 \quad + \; 2 \times 45 && \text{(par distributivité de la multiplication sur l'addition)} \\
&= 30 \times (40 + 5) \quad + 2 \times (40 + 5) \\
&= 30 \times 40 + 30 \times 5 \; + 2 \times 40 + 2 \times 5 && \text{(par distributivité de la multiplication sur l'addition)} \\
&= 1200 \quad + 150 \quad + 80 \quad + 10 \\
&= 1200 \quad + 230 \quad + 10 \\
&= 1440
\end{aligned}
$$

Remarque :

On pouvait aussi développer directement le produit $(30 + 2) \times (40 + 5)$ *pour arriver au même résultat, mais la propriété mobilisée est la double distributivité, ce qui s'éloigne en partie de la consigne d'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.*
Par ailleurs, le premier calcul proposé est réalisable par des élèves de cycle 3, ce qui n'est pas le cas du second développement.

2) Pourquoi le chiffre des unités de $8 + 1 + 5$ est le chiffre des dizaines de 32×45.

Dans la décomposition de 32×45 précédente : $32 \times 45 = 30 \times 40 + 30 \times 5 + 2 \times 40 + 2 \times 5$,
les contributions (additives) au chiffre des dizaines proviennent :

- du chiffre des dizaines de $2 \times 5 = 10$, c'est-à-dire 1 qui est écrit dans la partie supérieure du carré inférieur droit, soit dans la case triangulaire milieu de la diagonale des triangles chiffrés 5, 1 et 8 ;
- du chiffre des dizaines de $2 \times 40 = 80$, qui correspond au chiffre des unités de 2×4, c'est-à-dire 8 qui est écrit dans la partie inférieure du carré supérieur droit, soit dans la case triangulaire supérieure de la diagonale des triangles chiffrés 5, 1 et 8 ;
- du chiffre des dizaines de 30x5=150, qui correspond au chiffre des unités de $3 \times 5 = 15$, c'est-à-dire 5 qui est écrit la partie inférieure du carré inférieur gauche, soit dans la case triangulaire inférieure de la diagonale des triangles chiffrés 5, 1 et 8 ;
- 30×40 étant un nombre exact de centaines, 30×40 ne contribue pas au chiffre des dizaines.

On a donc la garantie que la somme des nombres de la diagonales (5, 1, 8) a pour chiffre des unités le chiffre des dizaines du produit 32×45 et le chiffre 1 des dizaines de cette somme contribue, comme retenue +1 , à la diagonale suivante (1, 2, 0) qui exprimera le chiffre des centaines, comme nous l'allons justifier dans la réponse suivante.

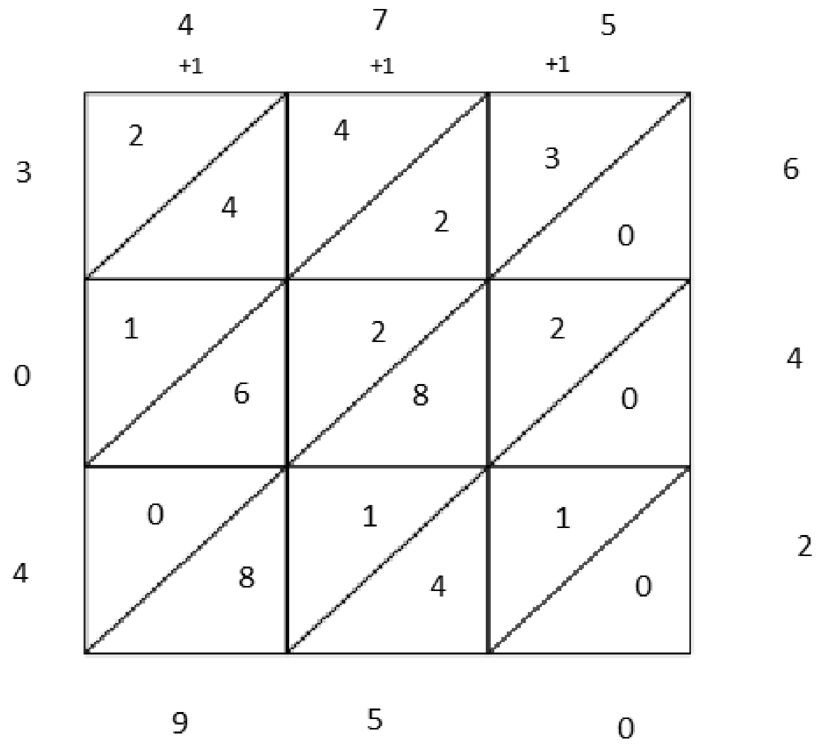
3) Nombre des centaines du produit 32×45.

Dans la décomposition de 32×45 de la réponse 1), les contributions (additives) au nombre des centaines proviennent :

- de la retenue +1 de la somme $1 + 5 + 8$ du nombre de dizaines évoquée dans la question précédente et placée au regard de la diagonale (1, 2, 0),
- du nombre de centaines de 30×40, à savoir 12, qui est écrit dans le carré supérieur gauche comme résultat de 3×4 (produit des nombres de dizaines de chaque facteur), avec 2 écrit dans le triangle milieu de la diagonale (1, 2, 0), et 1, chiffre des dizaines du nombre de centaines de 30×40 est écrit dans la diagonale suivante (réduit au triangle supérieur gauche chiffré 1),
- du nombre de centaines de 30×5, à savoir 1, correspondant au nombre de dizaines de 3×5, qui est écrit dans la partie supérieure du carré inférieur gauche, soit le triangle inférieur de la diagonale (1, 2, 0),
- du nombre de centaines de 2×40, à savoir 0, correspondant au nombre de dizaines de 2×4, qui est écrit dans la partie supérieure du carré supérieur droit, soit le triangle supérieur de la diagonale (1, 2, 0),
- 2×5 ne contribue pas aux centaines.

On a donc la garantie que la somme des 0, 12 et 1 et 1 écrits pour leurs chiffres des unités dans la diagonale (1,2,0,+1) et pour leur chiffre des dizaines dans la diagonale 1 (partie supérieure du carré supérieur gauche) correspond au nombre de centaines de 32×45 soit 1+12+0+1=14.

4) Calcul de 642 × 475 avec l'algorithme « Per Gelosia ».



642x475=304950

EXERCICES ÉLABORÉS
À PARTIR
DES CONCOURS BLANCS
ET EXAMENS
PROPOSÉS DANS LES ESPE

SUJETS p. 163
CORRIGÉS p. 199

QUESTIONS À RÉPONSES COURTES

À partir de divers sujets d'examens

PARTIE 1 : DOUZE AFFIRMATIONS : VRAI-FAUX ? JUSTIFIER !

Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou fausse.
Justifier cette réponse.

1) ABCD est un rectangle de longueur a cm et de largeur b cm. Les nombres a et b sont deux entiers strictement supérieurs à 1.
Affirmation 1 : la mesure de l'aire du rectangle, l'unité d'aire étant le cm^2, n'est jamais un nombre premier.

2) Le chien mange un tiers de sa pâtée. Le chat lui mange alors la moitié de ce qui reste dans la gamelle.
Affirmation 2 : il reste $\frac{1}{6}$ de la pâtée dans la gamelle.

3) Les nombres p et q sont des nombres entiers strictement positifs.
Affirmation 3 : le nombre $\frac{105480}{5^q 2^p}$ est toujours un nombre décimal non entier.

4) ABCD est un rectangle de longueur a cm et de largeur b cm. Les nombres a et b sont deux entiers strictement supérieurs à 1.
Affirmation 4 : la mesure de la diagonale du rectangle, avec le cm comme unité de longueur, est toujours un nombre rationnel.

5) ABCD est un rectangle de longueur a cm et de largeur b cm. Les nombres a et b sont des nombres réels positifs tels que $a + b = 7$.
Affirmation 5 : la mesure de l'aire du rectangle, l'unité d'aire étant le cm^2, est toujours inférieure à 10.

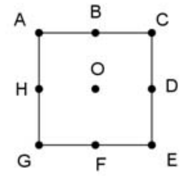
6) **Affirmation 6 :** tout quadrilatère non croisé dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur et qui a deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un carré.

7) **Affirmation 7 :** en traçant les diagonales d'un quadrilatère convexe, on partage celui-ci en quatre parties d'aires égales.

8) On considère un parallélogramme ABCD, de centre O. On appelle M le milieu de [AB] et R l'intersection de [DM] et [AC].
Affirmation 8 : RC = 2 AR.

9) **Affirmation 9 :** la mesure du volume d'un cube, l'unité de volume étant le cm^3, est toujours un nombre supérieur à la mesure de l'aire d'une face de ce cube, l'unité d'aire étant le cm^2.

10) On considère une configuration de 9 points ainsi constituée : les sommets d'un carré, les milieux des côtés de ce carré et le centre de ce carré. On veut tracer tous les cercles ayant pour centre un de ces neuf points et passant par au moins un autre de ces 9 points.
Affirmation 10 : le nombre de cercles que l'on peut tracer est 38.



11) On dépose un saladier en terre cuite vide sur une balance à affichage digital.
On constate alors que :
- quand on verse dans le saladier vide deux verres d'eau identiques pleins, la balance affiche 950 g ;
- quand on verse dans le saladier vide cinq mêmes verres d'eau identiques et pleins, la balance affiche 1325 g.

Affirmation 11 : la balance affiche 2 275 g lorsque l'on verse dans le saladier vide sept verres d'eau identiques et pleins.

12) On s'intéresse aux masses d'une citrouille, d'une pastèque et d'un melon.

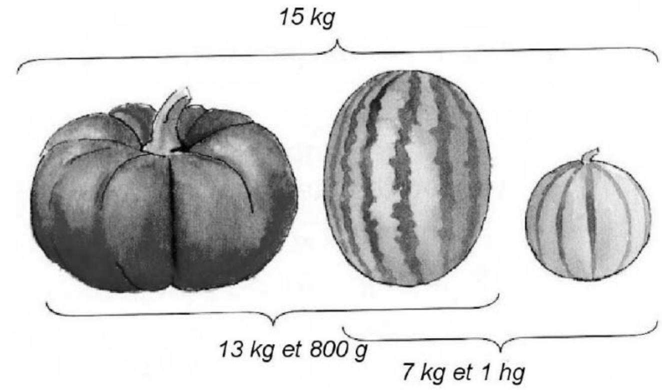


Image adaptée du manuel Hélice 6ème Didier 2009
Affirmation 12 : la pastèque pèse 5,9 kg.

PARTIE 2 : DOUZE QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chaque question ou situation proposée, il peut y avoir une ou plusieurs bonnes réponses. Donner la ou les bonnes réponses.

1) Le pgcd (plus grand commun diviseur) de deux nombres entiers naturels est 54. Le plus grand des deux nombres est 810.
Quel peut être l'autre nombre ?
A : 162 **B** : 108 **C** : 405 **D** : 2 **E** : 378

2) a, b, c et d désignent quatre nombres non nuls.
Le nombre $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ est égal à :
A: $\frac{4}{a+b+c+d}$ **B**: $\frac{a+b+c+d}{abcd}$ **C** : $\frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd}$ **D** : $\frac{4}{abcd}$ **E** : $\frac{4(a+b+c+d)}{abcd}$

3) ABCD est un carré. Les points I, J, K, L, M, N, O, P sont tels que :
I ∈ [AB], J ∈ [AB], K ∈ [BC], L ∈ [BC], M ∈ [CD], N ∈ [CD], O ∈ [DA], P ∈ [DA]
et tels que :
AI = IJ = JB ; BK = KL = LC ; CM = MN = ND ; DO = OP = PA.
Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont **FAUSSES** ?
A : l'octogone IJKLMNOP est régulier ;
B : le quadrilatère IJOP est un trapèze ;
C : le quadrilatère JKNO est un rectangle ;
D : le quadrilatère IKMO est un carré ;
E : le quadrilatère BLDP est un parallélogramme.

4) On considère les cinq nombres suivants :

$$a=\frac{-4\times10^{-2}\times(-5)\times10^{7}}{3\times10^{5}} \qquad b=\frac{\left(3+\sqrt{10}\right)^{2}-6\sqrt{10}}{5}$$

$$c=\frac{2+\frac{3}{1+\frac{1}{2}}}{2+\frac{1}{6}} \qquad d=\frac{7429}{1955} \qquad e=\frac{2-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}$$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont justes ?
A: a = b **B**: a = c **C**: a = d **D**: a = e

5) On considère la « division à trous » posée ci-dessous :

8	□	5	□	□	1	
	□	□	□	4	□	2
		1	4			

Dans cette division, le dividende est :
A : 21 **B** : 8356 **C** : 8456 **D** : 8454

6) On pose N = 63 042.
Parmi les affirmations ci-dessous indiquez celle(s) qui est (sont) exacte(s) :
A : N est divisible par 7. **B** : N est un multiple de 4.
C : 9 est un diviseur de N. **D** : N est divisible par 6.

7) La somme $2x^2 + 3x^3$ peut aussi s'écrire :
A : $5x^3$ B : $5x^5$ C : $6x^5$ D : $x^2(3x + 2)$

8) Le système $\begin{cases} \frac{3}{4}x + 6y = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2}x + 4y = 3 \end{cases}$
A : admet une infinité de solutions **B** : admet une solution
C : admet deux solutions **D** : n'a pas de solution

9) Si ABC est un triangle rectangle en A avec BC = 5 cm et $\widehat{ABC} = 30°$, alors :
A : les données sont insuffisantes pour calculer AB **B** : $AB = 2{,}5$ cm
C : $AB = 4{,}33$ cm **D** : $AB = 5 \text{ cm} \times \cos 30°$

10) Un entier est égal à vingt-cinq centaines et dix-huit dizaines. Son écriture en base dix est :
A : 2518 **B** : 25 180 **C** : 268 **D** : 2680

11) Le nombre N dont la décomposition en produit de facteurs premiers est égale à :
$$2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 13$$
A : est divisible par 21.
B : est un multiple de 100.
C : est divisible par 55.
D : est un multiple de 640.
E : possède exactement 540 diviseurs.

12) $\frac{\sqrt{16}}{8}$ est :
A : entier B : rationnel C : décimal D : irrationnel

EXERCICES D'APRÈS DIVERS SUJETS D'EXAMEN

Probabilités – Bases – Systèmes d'équations – Techniques opératoires - Décimaux

EXERCICE 1

On dispose de deux urnes avec dans chacune d'elle 4 boules numérotées.
Dans la première, les numéros portés par les boules sont 2, 4, 7 et 9.
Dans la seconde, les numéros portés par les boules sont 1, 11, 13 et 20.
On pioche une boule dans la première urne et une boule dans la seconde urne. On additionne alors les deux nombres portés par les boules et on obtient un résultat.

1) Quelle est la probabilité que ce résultat soit un nombre pair ?
2) Quelle est la probabilité que ce résultat soit un nombre premier ?
3) Est-il possible de modifier le numéro porté par une boule de la première urne pour que la probabilité d'obtenir un résultat multiple de 17 soit $\frac{1}{8}$? (on ne veut pas deux boules portant le même numéro dans l'urne).
4) Est-il possible de modifier le numéro porté par une boule de la première urne ou de la seconde urne pour que la probabilité d'obtenir un résultat multiple de 3 soit nulle ?

EXERCICE 2

Voici le descriptif rapide d'un jeu appelé le jeu du banquier, très souvent proposé aux élèves de CP :

Les élèves sont répartis en équipes de quatre : trois joueurs et un « banquier » qui dispose d'une boîte contenant des jetons jaunes, rouges, bleus et verts. Chaque joueur jette un dé (à tour de rôle) et le banquier lui donne autant de jetons jaunes qu'il y a de points sur la face supérieure du dé. De plus, dès qu'un joueur possède 5 jaunes, il doit les échanger auprès du banquier contre un jeton rouge ; de même il devra échanger 5 rouges contre un bleu, puis 5 bleus contre un vert.

5 jaunes	→	*1 rouge*
5 rouges	→	*1 bleu*
5 bleus	→	*1 vert*

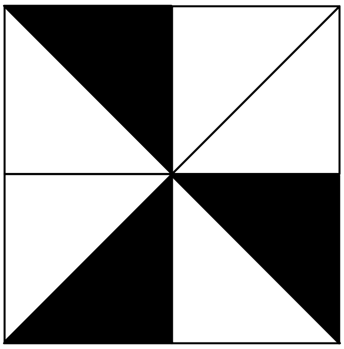
Le maître fait jouer les élèves pendant environ 10 minutes puis demande à chaque équipe de regrouper l'ensemble des jetons obtenus et de procéder aux échanges. À partir d'une mise en commun des résultats il va s'agir ensuite de désigner en le justifiant l'équipe gagnante.
Voici les collections de jetons obtenues par six équipes après le déroulement d'un jeu ; tous les échanges ont été correctement effectués :

Équipe 1	Équipe 2	Équipe 3	Équipe 4	Équipe 5	Équipe 6
B J B V B J J J	J R R J	B B	J R B R J B	J J V	J R R B J B

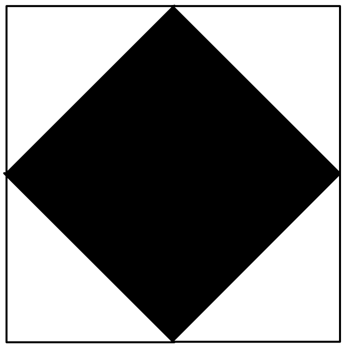
1) En faisant appel uniquement au nombre de jetons de chaque couleur (c'est-à-dire sans réaliser aucun échange supplémentaire), ordonner ces résultats du 1er au 6e en explicitant votre méthode.
2) Montrer que l'on peut construire à partir de la donnée de cette règle d'échange un système de numération en base cinq ; écrire alors le score de chaque équipe en utilisant les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4 et retrouver la réponse donnée à la question précédente.
3) En ne travaillant qu'avec les écritures chiffrées des scores en base cinq, déterminer l'écriture en base cinq de la quantité totale de jetons obtenue en regroupant tous les jetons des six équipes.
4) En jouant à ce jeu, un élève n'a pas respecté la consigne et possède en fin de partie 37 jetons jaunes. Quelle aurait dû être sa collection de jetons en fin de partie ?

EXERCICE 3

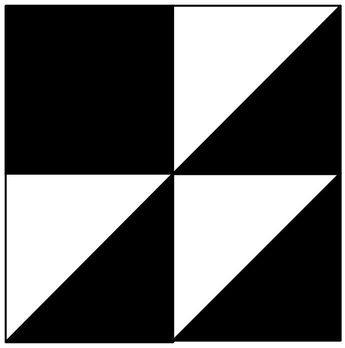
On fabrique des badges à l'aide de triangles, tous de même forme. Certains sont en métal noir, d'autres sont en métal blanc. Les figures ci-dessous représentent les trois formes de badges réalisés.



Numéro 1



Numéro 2



Numéro 3

Le badge numéro 1 revient à 17,5 € ; le badge numéro 2 revient à 16 €.
À combien revient le badge numéro 3 ?
La procédure adoptée pour la résolution sera clairement explicitée.

EXERCICE 4

Voici deux techniques anciennes appliquées au calcul de la différence 6 483 – 2 857

Technique de Ramus (vers 1550)	**Par emprunt (vers 1100)**
6 4 8 3 → 6 9 8 9 - 2 8 5 7 → 3 3 6 3 3 6 2 6 ← 3 6 2 6	*5* *7* $\cancel{6}\ {}_{1}4\ \cancel{8}\ {}_{1}3$ - 2 8 5 7 3 6 2 6

1) Effectuer les différences suivantes en utilisant pour chacune d'elles les deux techniques présentées ci-dessus : 12 856 – 8 378 et 1005 – 847.
2) Décrire en quelques lignes chacune de ces techniques.
3) Identifier les propriétés mathématiques qui permettent de justifier ces techniques.

EXERCICE 5

Simon Stevin (1548-1620) publie en 1582 un bref traité rédigé en flamand, intitulé *De Thiende* ; il en donne rapidement une version en français sous le titre *La Disme* (ce qui signifie *le dixième*). Quoique Stevin n'ait pas été le premier à préconiser l'usage systématique des fractions décimales et à proposer des notations nouvelles adaptées à cette famille de nombres, son traité a joué un rôle important dans la diffusion progressive des nombres décimaux.
Le traité s'ouvre sur quelques définitions, explique ensuite comment étendre aux nombres décimaux les algorithmes de calcul connus pour les entiers, et se termine sur des exemples illustrant l'utilité de ces nombres pour différents corps de métiers (arpenteurs, tapissiers, astronomes, marchands, changeurs …).
On trouvera en annexe trois extraits[1], provenant des deux premières parties.

1) a) Comment écrivons-nous aujourd'hui, avec une écriture « à virgule », le nombre que Stevin propose d'écrire 3 ① 7 ② 5 ③ 9 ④ ?

[1] Source : Simon Stevin, *La Disme*, in *Les Œuvres mathématiques de Simon Stévin, augmentées par Albert Girard*, Bonaventure & Elsevier, Leyde, 1634. p.206-213. Disponible sur http://architectura.cesr.univ-tours.fr/Traite/Images/B250566101_11463Index.asp

1) b) Concernant la citation : « nous n'écrivons pas 7 ① 12 ②, mais en leur lieu 8 ① 2 ②, car ils valent autant », justifier l'égalité entre 7 ① 12 ② et 8 ① 2 ②.

1) c) Dans la partie « *Explication* » sous la définition III, quels sont les savoir-faire mathématiques que Stevin suppose connus de ses lecteurs ?

2) a) En n'utilisant que le calcul sur les fractions, justifiez en quelques étapes l'affirmation

$$« \; 27\frac{847}{1000},\; 37\frac{675}{1000},\; 875\frac{782}{1000} \; \textit{font ensemble[...]} \; 941\frac{304}{1000} \; »$$

2) b) Quelle est la stratégie de « *démonstration* » que Stevin adopte ? Est-ce une « démonstration » au sens actuel ?

3) a) En utilisant les notations, la méthode et la disposition graphique proposées par Stevin dans la *Nota*, posez et effectuez le produit de 3,07 par 0,102.

3) b) Expliquez comment vous avez déterminé, dans le calcul précédent, les nombres cerclés en-dessous du résultat que vous avez obtenu ? Citez la règle générale de calcul algébrique, étudiée aujourd'hui au collège, permettant de le justifier.

ANNEXE

Extrait n°1

DEFINITION I.

DISME est une espece d'Arithmetique, inventée par la Disiesme progression, consistente es characteres des ciffres, par lesquels se descript quelque nombre, & par laquelle l'on depesche par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des hommes.

EXPLICATION.

Soit quelque nombre de mille cent & onze, descript par characteres des cyffres en ceste sorte 1111, ausquels appert que chasque 1 est la dixiesme part de son prochain charactere precedent. Semblablement en 2378, chasque unité du 8, est la dixiesme de chasque unité du 7. Et ainsi de tous les autres. Mais parce qu'il est convenable que les choses desquelles on veut traicter, ayent des noms, & que ceste maniere de computation est trouvée par consideration de telle dixiesme ou disme progression, voire qu'elle consiste entierement en icelle, comme apparoistra cy apres, nous nommons ce traicté proprement & convenablement la DISME, par la mesme on peut operer avec nombres entiers sans rompuz en tous les comptes se rencontrans en nos affaires, comme sera demonstré au suyvant.

DEFINITION II.

Tout nombre entier proposé se dict COMMENCEMENT, *son signe est tel* ⓪.

EXPLICATION.

Par exemple quelque nombre proposé de trois cens soixantequatre, nous le nommons trois cens soixantequatre COMMENCEMENS, les descrivant en ceste sorte 364 ⓪. Et ainsi de tous autres semblables.

DEFINITION III.

Et chasque dixiesme partie de l'unité de commencement nous la nommons PRIME, *son signe est tel* ①; *& chasque dixiesme partie de l'unité de prime nous la nommons* SECONDE, *son signe est tel* ②. *Et ainsi des autres chasque dixiesme partie, de l'unité de son signe precedent, tousiours en l'ordre un d'avantage.*

EXPLICATION.

Comme 3 ① 7 ② 5 ③ 9 ④, c'est à dire 3 *Primes* 7 *Secondes* 5 *Tierces* 9 *Quartes*; & ainsi se pourroit proceder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire, que selon ceste definition, lesdicts nombres sont $\frac{3}{10}$ $\frac{7}{100}$ $\frac{5}{1000}$ $\frac{9}{10000}$, ensemble $\frac{3759}{10000}$. Semblablement 8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③ vallent 8 $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{100}$ $\frac{7}{1000}$, ensemble 8 $\frac{937}{1000}$. Et ainsi d'autres semblables. Il faut aussi sçavoir que nous n'usons en la DISME d'aucuns nombres rompuz, aussi que le nombre de multitude des signes, excepté ⓪, n'excede jamais le 9. Par exemple nous n'escrivons pas 7 ① 12 ②, mais en leur lieu 8 ① 2 ②, car ils vallent autant.

DEFINITION IV.

Les nombres de la precedente seconde & troisiesme Definition se disent en general NOMBRES DE DISME.

Fin des Definitions.

Extrait n°2

PROPOSITION I, DE
L'ADDITION.

Eſtant donnez nombres de Diſme à ajouſter : Trouver leur ſomme :

Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Diſme, deſquels le premier 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, le deuxieſme 37 ⓪ 8 ① 7 ② 5 ③, le troiſieſme 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur ſomme. *Conſtruction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aiouſtant ſelon la vulgaire maniere d'aiouſter nombres entiers, en ceſte ſorte :

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & ⓪ & ① & ② & ③ \\
 & 2 & 7 & 8 & 4 & 7 \\
 & 3 & 7 & 6 & 7 & 5 \\
8 & 7 & 5 & 7 & 8 & 2 \\
\hline
9 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4
\end{array}
$$

Donne ſomme (par le 1 probleme de l'Arithmetique) 941304, qui ſont (ce que demonſtrent les ſignes deſſus les nombres) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ie di, que les meſmes ſont la ſomme requiſe. *Demonſtration.* Les 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③ donnez, ſont (par la 3e definition) 27 $\frac{8}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{7}{1000}$, enſemble 27 $\frac{847}{1000}$, & par meſme raiſon les 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ vallent 37 $\frac{675}{1000}$, & les 875 ⓪ 7 ① 8 ② 4 ③ feront 875 $\frac{782}{1000}$, leſquels trois nombres, comme 27 $\frac{847}{1000}$, 37 $\frac{675}{1000}$, 875 $\frac{782}{1000}$, font enſemble (par le 10e probleme de l'Arith.) 941 $\frac{304}{1000}$, mais autant vaut auſſi la ſomme 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③, c'eſt

c'eſt doncques la vraye Somme, ce qu'il falloit demonſtrer. *Concluſion.* Eſtant doncques donnez nombres de Diſme à ajouſter, nous avons trouvé leur Somme, ce qu'il falloit faire.

Extrait n°3

PROPOSITION III, DE LA
MULTIPLICATION.

Eſtant donné nombre de Diſme à multiplier, & multiplicateur : Trouver leur produict.

Explication du donné. Soit le nombre à multiplier 32 ⓪ 5 ① 7 ②, & multiplicateur 89 ⓪ 4 ① 6 ②. *Explication du requis.* Il faut trouver leur produict. *Conſtruction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme cy joignant, multipliant ſelon la vulgaire maniere de multiplication par nombres entiers, en ceſte ſorte :

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & & & ⓪ & ① & ② \\
 & & & & 3 & 2 & 5 & 7 \\
 & & & & 8 & 9 & 4 & 6 \\
\hline
 & & & 1 & 9 & 5 & 4 & 2 \\
 & & 1 & 3 & 0 & 2 & 8 & \\
 & 2 & 9 & 3 & 1 & 3 & & \\
2 & 6 & 0 & 5 & 6 & & & \\
\hline
2 & 9 & 1 & 3 & 7 & 1 & 2 & 2 \\
 & & & ⓪ & ① & ② & ③ & ④
\end{array}
$$

Donne produict (par le 3 probleme de l'Arithmetique) 29137122. Or pour ſçavoir que ce ſont, on ajouſtera les deux derniers ſignes donnez, l'un ②, & l'autre auſſi ②, font enſemble ④, nous dirons donc que le ſigne du dernier charactere du produict ſera ④, lequel eſtant cogneu, tous les autres ſeront notoires, à cauſe de leur ordre continu; De ſorte que 2913 ⓪ 7 ① 1 ② 2 ③ 2 ④ ſont le produict requis.

(…)

NOTA.

Si le dernier ſigne du nombre à multiplier fuſt inegal au dernier ſigne du multiplicateur ; par exemple l'un 3 ④ 7 ⑤ 8 ⑥, l'autre 5 ① 4 ②, l'on fera comme deſſus, & la diſpoſition des characteres de l'operation ſera telle :

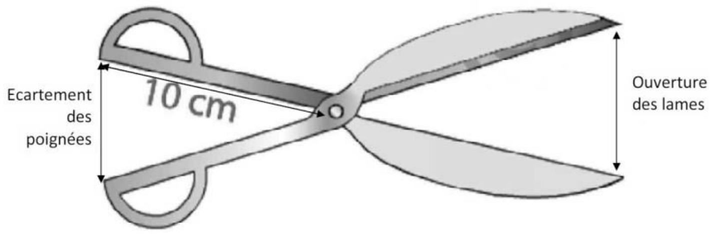
$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & ④ & ⑤ & ⑥ \\
 & & 3 & 7 & 8 \\
 & & & 5 & 4 ② \\
\hline
 & 1 & 5 & 1 & 2 \\
1 & 8 & 9 & 0 & \\
\hline
2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\
④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧
\end{array}
$$

EXERCICES D'APRÈS DIVERS SUJETS D'EXAMEN

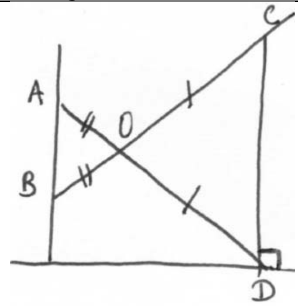
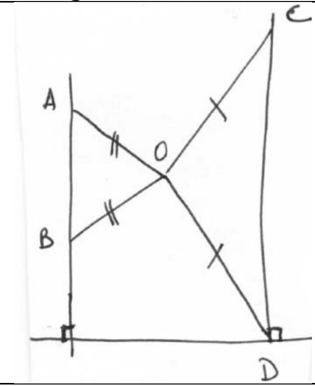
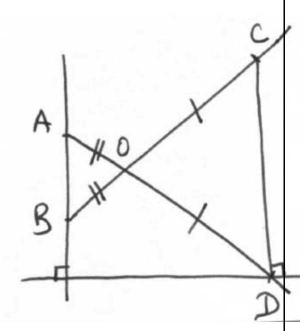
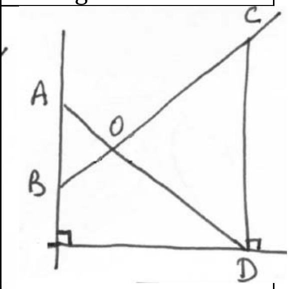
Géométrie plane – Géométrie dans l'espace

EXERCICE 1

On souhaite fabriquer des cisailles de telle sorte qu'un écartement de 14 cm des poignées corresponde à une ouverture de 50 cm des lames (le dessin ci-contre n'est pas à l'échelle; on a indiqué sur ce dessin la longueur des poignées.)



1) Vous trouverez ci-dessous quatre propositions de modélisation de la situation réelle (figure codée et hypothèses complémentaires). <u>Sans justifier</u>, indiquez celle qui vous paraît la plus adaptée pour résoudre le problème posé.

Configuration 1	Configuration 2	Configuration 3	Configuration 4
			
A, O, et D alignés ; B, O et C alignés ; AB = 14 cm ; CD = 50 cm ; AO = 10 cm.	AB = 14 cm ; CD = 50 cm ; AO = 10 cm.	A, O et D alignés ; B, O et C alignés ; AB = 14 cm ; CD = 50 cm ; AO = 10 cm.	A, O et D alignés ; B, O et C alignés ; AB = 14 cm ; CD = 50 cm ; AO = 10 cm.

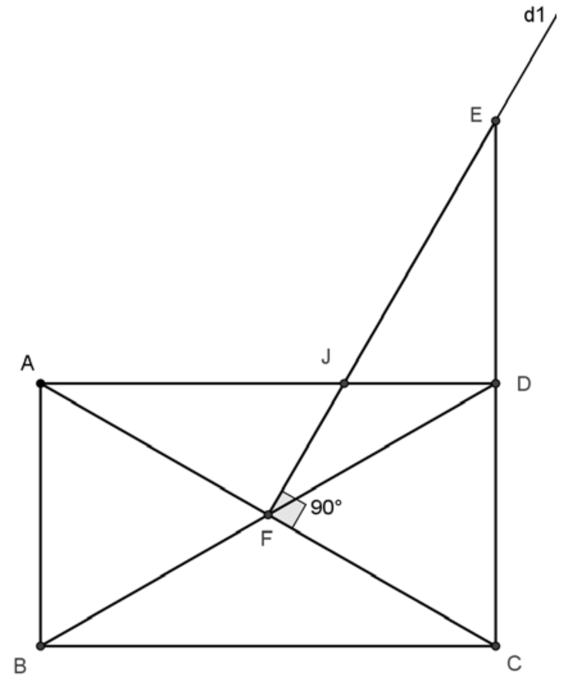
2) En utilisant la modélisation choisie dans la question précédente, calculez la longueur des lames pour que l'on obtienne l'ouverture souhaitée (en arrondissant au millimètre).

EXERCICE 2

Sur la figure (voir page suivante) :

- ABCD est un rectangle dont les diagonales se coupent en F et tel que ABF est un triangle équilatéral ;
- (d1) est la droite perpendiculaire à (AC) passant par F ;
- (d1) coupe (CD) en E ;
- Les droites (FE) et (AD) sont sécantes en J.

Construire cette figure sur l'annexe où le segment [AC] est déjà tracé, en utilisant seulement une règle non graduée et un compas. On ne demande pas d'explicitation rédigée de la construction.
(On ne tiendra pas compte des dimensions du dessin ci-contre et les traits de construction resteront apparents).



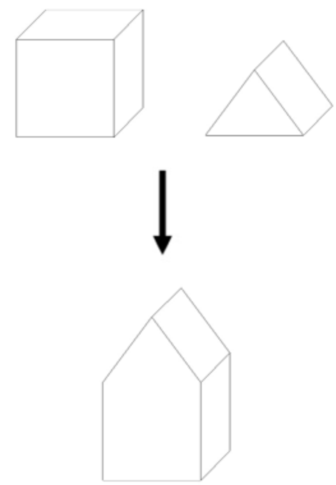
ANNEXE :

EXERCICE 3

Dans cet exercice, on s'intéresse à un solide constitué d'un cube surmonté d'un prisme droit.

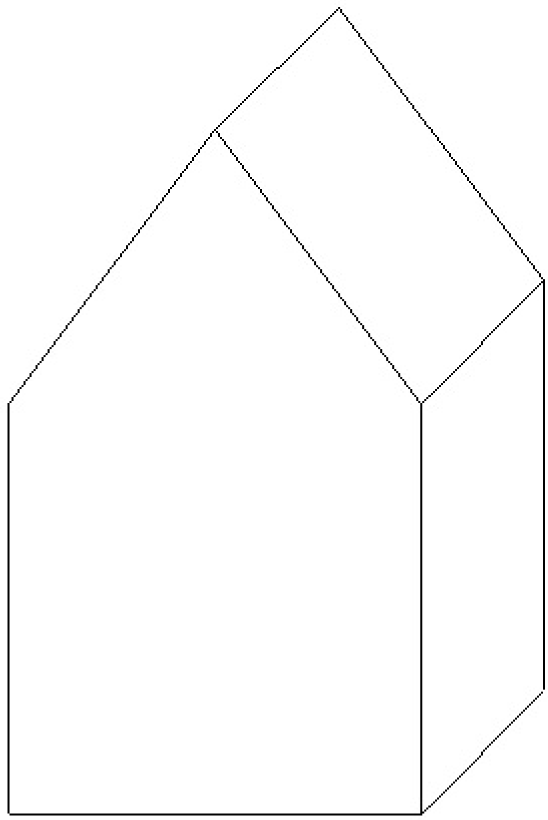
- La longueur des arêtes du cube est égale à 3 cm.
- La hauteur du prisme droit est égale à 3 cm.
- La base du prisme droit est un triangle isocèle ; ce triangle isocèle a une base de longueur 3 cm, et la hauteur du triangle relative à cette base est égale à 2 cm.

Plus précisément, lors de la constitution du solide, on superpose l'une des faces du cube avec la face carrée du prisme droit, puis on supprime les deux faces carrées ainsi en contact, de manière à obtenir un solide ***S*** dont l'intérieur est "en un seul morceau". Des représentations opaques du cube, du prisme droit et du solide ***S*** ainsi obtenu sont données ci-contre.



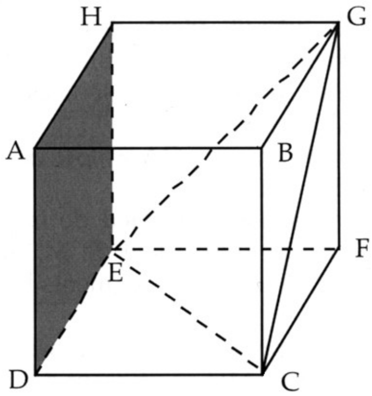
1) Compléter la représentation du solide ***S*** donnée ci-dessous pour en faire une représentation en perspective cavalière.
2) Dénombrer les faces, les arêtes et les sommets du solide ***S.***
3) Construire avec la règle graduée, l'équerre et le compas un patron en vraie grandeur du solide ***S.***

Représentation du solide *S* à compléter :

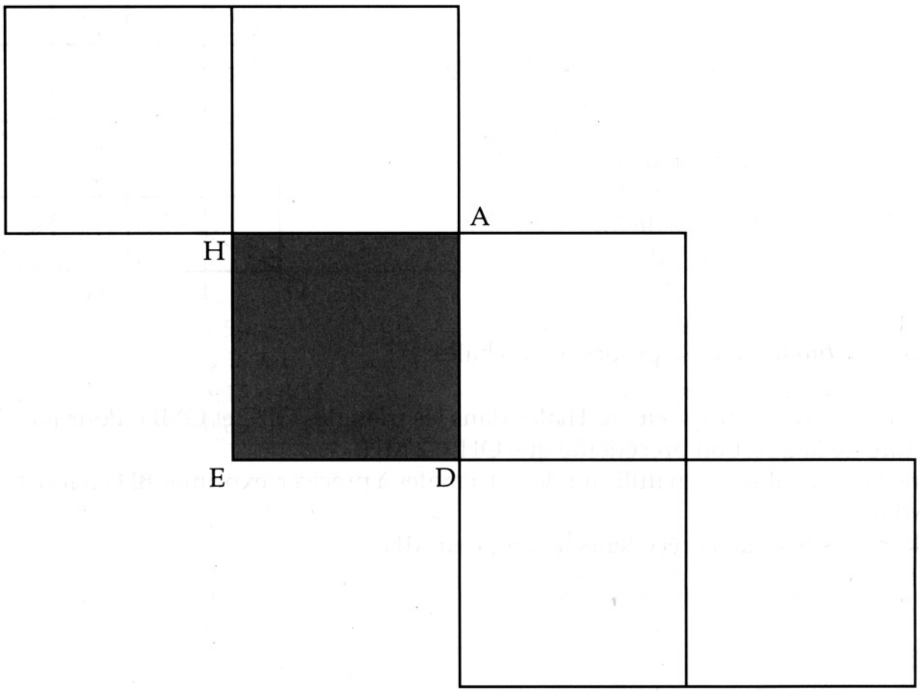


EXERCICE 4

On considère un cube $ABCDEFGH$, dont les arêtes ont pour longueur a. Il est représenté ci-contre en perspective cavalière.



1) Quelle est la nature du triangle EGC ? Justifier.
2) Pour cette question et les questions 4, 6 et 7, on demande des valeurs en fonction de a.
   a) Quel est le périmètre du triangle EGC ?
   b) Quelle est l'aire du triangle EGC ?
3) Quelle est la nature du solide ECGF ?
4) Quel est le volume du solide ECGF?
5) La figure ci-dessous est un patron de ce cube. A partir de ce dernier, construire le patron du solide S obtenu par retrait du solide ECGF au cube.
6) Quel est le volume du solide S ?
7) Quelle est l'aire totale du solide S ?

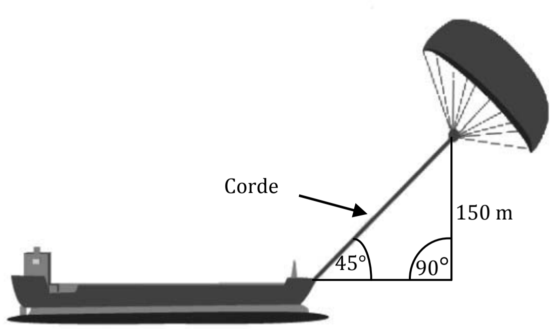


PROBLÈME D'APRÈS UN CONCOURS BLANC DE LYON

CARGO À VOILE (d'après un exercice de Pisa 2012)

Quatre-vingt-quinze pour cent du commerce mondial s'effectue par voie maritime, par environ 50 000 bateaux-citernes, vraquiers et porte-conteneurs. La plupart de ces cargos fonctionnent au diesel.
Des ingénieurs ont l'intention de mettre au point un système utilisant la puissance du vent pour assister les cargos. Ils proposent de fixer un cerf-volant servant de voile sur les cargos et ainsi d'utiliser la puissance du vent pour diminuer la consommation de diesel ainsi que l'impact de ce carburant sur l'environnement.
Les cerfs-volants ont l'avantage de voler à une hauteur de 150 m. Là-haut, la vitesse du vent est approximativement de 25 % supérieure à celle au niveau du pont du cargo.

1) Quelle est la vitesse approximative à laquelle le vent souffle sur le pont du cargo lorsque la vitesse du vent dans le cerf-volant est de 30km/h ?
2) Quelle doit être, approximativement, la longueur de la corde du cerf-volant pour pouvoir tirer le cargo à un angle de 45° depuis une hauteur verticale de 150 m, comme indiqué sur le schéma ci-dessous ?



Le schéma n'est pas à l'échelle.

3) En raison du prix élevé du diesel (0,42 zed[1] par litre), les propriétaires du cargo *Nouvelle Vague* envisagent de l'équiper d'un cerf-volant.
   On estime qu'un cerf-volant de ce type permettrait de réduire globalement la consommation de diesel d'environ 20 %.

Nom : *Nouvelle Vague*

Type : cargo

Longueur : 117 mètres

Largeur : 18 mètres

Charge utile : 12 000 tonnes

Vitesse maximale : 19 nœuds

Consommation de diesel par an sans cerf-volant : approximativement 3 500 000 litres

Équiper le *Nouvelle Vague* d'un cerf-volant coûte 2 500 000 zeds.

Au bout de combien d'années environ, les économies de diesel auront-elles couvert le coût du cerf-volant ?

[1] Le zed est une unité monétaire fictive propre aux épreuves PISA

4) Dans cette question on s'intéresse à l'impact sur l'environnement de l'utilisation de tels cerfs-volants. Le tableau ci-dessous donne les quantités annuelles de différents gaz émises selon le type de transports qui les a produites.

Les émissions par type de moyen de transport, en tonne par année

Sources d'émission	SO_2 Dioxyde de soufre tonne/année	NO_x Oxydes d'azote tonne/année	COV Hydrocarbure tonne/année	CO Monoxyde de carbone tonne/année	CO_2 Gaz carbonique tonne/année
Voitures de tourisme	758	39 600	36 500	248 000	9 500 000
Camions	682	25 300	3 290	6 320	2 000 000
Voitures de livraison	136	4 230	2 450	23 100	900 000
Cars	31	1 210	160	278	100 000
Bus publics	68	3 140	354	1 150	200 000
Motocycles	9	390	3 490	20 800	100 000
Cyclomoteurs	3		2 490	7 760	>100 000
TOTAL TRAFIC ROUTIER arrondi	**1 690**	**73 900**	**48 700**	**308 000**	**13 000 000**
Trafic ferroviaire	9	485	47	109	>100 000
Navigation	78	658	1 270	3 340	100 000
Trafic aérien	376	7 340	310	7 600	1 500 000
TOTAL TRANSPORTS arrondi	**2 150**	**82 300**	**50 400**	**319 000**	**14 600 000**

1995, source OFEFP

Le sigle **COV** désigne l'ensemble des composés organiques volatils.

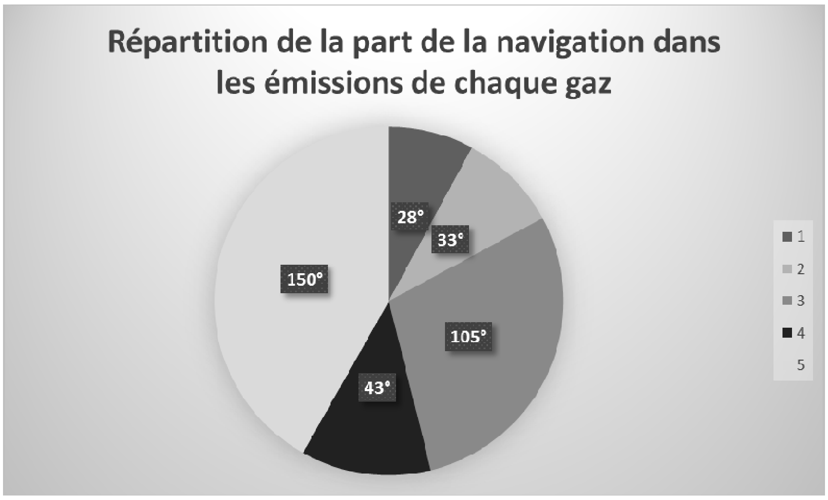
a) Si on était parvenu, grâce à une utilisation généralisée de cerfs-volants de ce type à toute la navigation, à diminuer les émissions de gaz de 20%, quelle serait, en pourcentage par rapport aux émissions de COV générées par l'ensemble de transports, la diminution d'émissions de COV réalisée ?

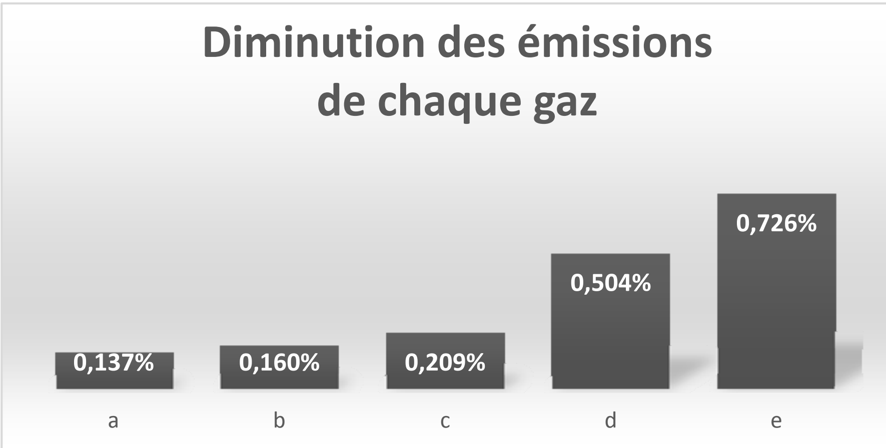
b) On peut s'aider d'un tableur pour calculer, en pourcentages, la part de la navigation dans les émissions de gaz et les diminutions d'émission de chacun des gaz qui pourraient être générés grâce à l'utilisation généralisée de cerfs-volants, par exemple dans une feuille de ce type :

	A	B	C	D	E	F
1		**SO2**	**NO2**	**COV**	**CO**	**CO2**
2	**total trafic routier**	1690	73900	48700	308000	13000000
3	trafic ferroviaire	9	485	47	109	100000
4	navigation	78	658	1270	3340	100000
5	trafic aerien	376	7340	310	7600	1500000
6	**total transport**	2150	82300	50400	319000	14600000
7	**Pourcentage des émissions de gaz dues à la navigation**					
8	Diminution des émissions de gaz occasionnée par l'utilisation de cerfs volants					
9	**Pourcentage de diminution des émissions de gaz**					

Indiquer les formules à saisir dans chacune des cases B7, B8 et B9 qui, recopiées vers la droite dans le tableur effectuent tous les calculs demandés.

c) A l'aide du tableur on peut ensuite générer les deux graphiques suivants :





Retrouver le nom des gaz correspondants, dans la légende du premier graphique aux chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et dans la légende du deuxième graphique aux lettres a, b, c, d, e. Justifier.

PROBLÈME D'APRÈS UN CONCOURS BLANC DE NANTES

Quelques données sur la Loire Atlantique

1) La population de la Loire Atlantique était, selon l'INSEE, de 1 296 364 personnes en 2011, ce qui correspondait à une augmentation d'environ 95% depuis 1901.
Combien d'habitants comptait la Loire Atlantique en 1901 ?

2) La population de la Loire Atlantique était de 1 050 539 habitants en 1990 et de 1 282 052 habitants en 2010. En supposant que la population de ce département continue à s'accroître du même pourcentage tous les 20 ans, quelle sera la population de la Loire Atlantique en 2050 ?

3) À l'aide de la carte fournie en annexe, calculer un ordre de grandeur de la mesure de la superficie du département de la Loire Atlantique.
Les calculs éventuels seront explicités sur la copie et les tracés éventuels seront faits directement sur la carte fournie, qui sera jointe à la copie.
Toute méthode clairement décrite et conduisant à une erreur inférieure à 10% sur la superficie du département sera considérée comme correcte.

4) Selon le site de l'association française d'agronomie, l'empreinte écologique de la France est de 4,6 ha global par habitant, ce qui signifie que pour couvrir l'ensemble des besoins d'un habitant de la France 4,6 ha sont nécessaires. En supposant correcte cette estimation, quelle surface, exprimée en km², est nécessaire pour couvrir en 2010 les besoins de la population de la Loire Atlantique ?

5) Le document suivant représente une feuille de calcul d'un tableur.

	A	B	C	D
1		**Population**	**Superficie en km²**	**Densité en habitants par km²**
2	**Loire-Atlantique**	1 296 364	6 815	
3	**Maine-et-Loire**	790 343	7 166	
4	**Mayenne**	307 031	5 175	
5	**Sarthe**	565 718	6 206	
6	**Vendée**	641 657	6 720	
7	**Région des Pays de la Loire**			

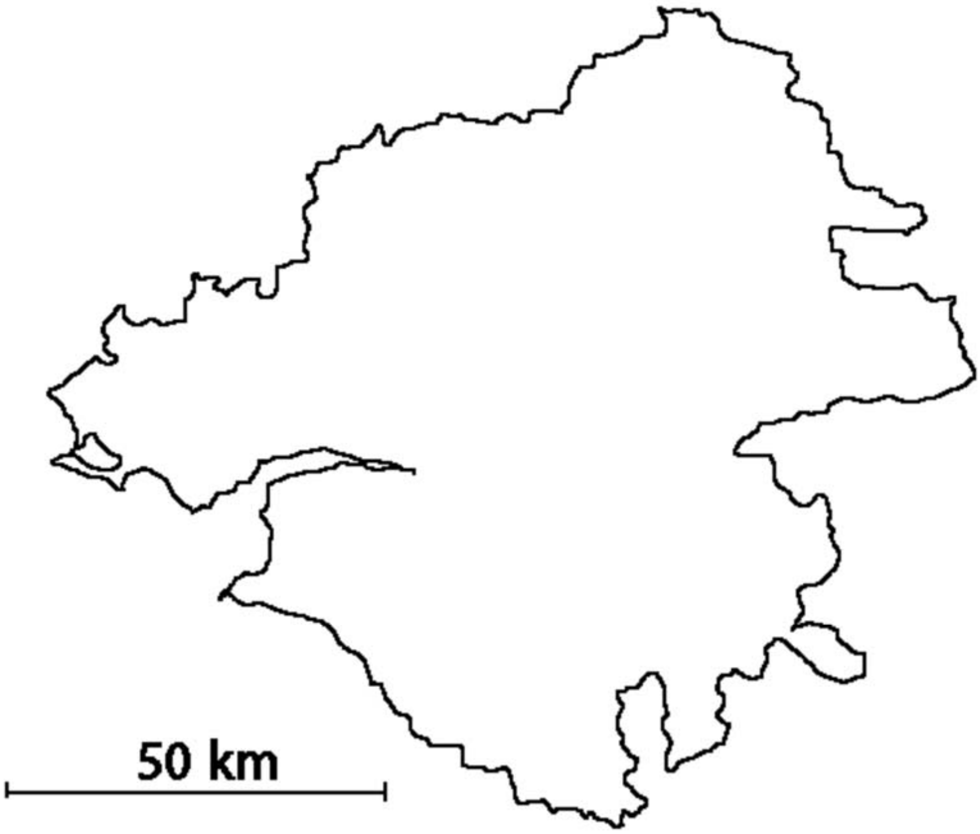
a) Par un (des) procédé(s) de calcul réfléchi, sans poser d'opération ni utiliser la calculatrice, indiquer comment on peut ranger par ordre croissant les densités de population des cinq départements des Pays de la Loire.

b) Quelle formule peut-on entrer dans la cellule D2 puis recopier en tirant vers le bas pour obtenir les valeurs attendues dans les cellules D2 à D6 ?

c) Quelle formule peut-on entrer dans la cellule D7 pour y obtenir la valeur attendue ? Si vous jugez utile de placer préalablement d'autres formules dans d'autres cellules, vous les décrirez.

Annexe

Carte de la Loire Atlantique



PROBLÈME D'APRÈS UN CONCOURS BLANC DE NICE

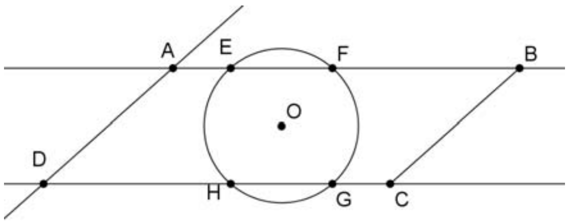
Les instruments autorisés sont la règle graduée, l'équerre et le compas.

Soit ABCD un parallélogramme qui vérifie les deux propriétés suivantes :
Propriété 1 : $\mathrm{AB} = 6\ cm$ **Propriété 2** : $\mathrm{BC} = 3\ cm$.

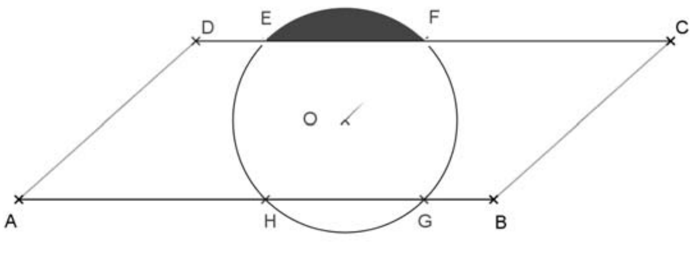
Les questions 1, 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes.

1) Construire deux parallélogrammes non superposables vérifiant les propriétés 1 et 2.
2) La **propriété 3 est la suivante** : la diagonale [AC] du parallélogramme a pour longueur 4 cm. Construire un parallélogramme qui vérifie les propriétés 1, 2 et 3.
3) Un mathématicien écrit l'assertion suivante : « pour un parallélogramme qui vérifie les propriétés 1 et 2, la longueur de la diagonale [AC] appartient nécessairement à l'intervalle $]a; b[$ ». Sans justification, donner les valeurs de a et b.
4) La **propriété 4 est la suivante** : le triangle DAC est rectangle en A.
Construire un parallélogramme ABCD qui vérifie les propriétés 1, 2 et 4. Calculer, dans ce cas,
   a) La longueur AC.
   b) L'aire du parallélogramme ABCD.
5) Dans cette question, ABCD est un parallélogramme vérifiant les propriétés 1 et 2 tel que la distance du point A à la droite (DC) est de 2 centimètres
   a) Construire le parallélogramme ABCD.
   b) Calculer l'aire de ABCD.
   c) On appelle O le point d'intersection des diagonales du parallélogramme. Calculer l'aire du triangle ABO.
   d) Soit Γ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ cm. Γ coupe la droite (AB) en deux points nommés E et F et la droite (CD) en deux points nommés G et H (Voir figure ci-dessous).

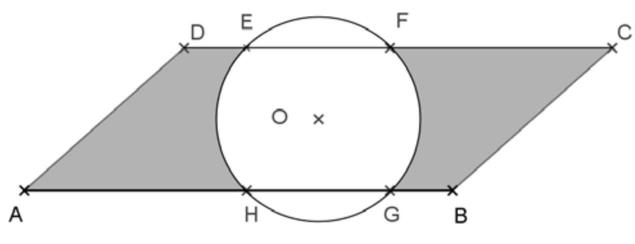
      Démontrer que le quadrilatère EFGH est un carré



   e) Calculer l'aire de EFGH.
   f) Calculer l'aire A de la partie grisée dans la figure ci-dessus.



   g) Calculer l'aire B de la partie grisée dans la figure ci-dessus.



ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE EN GS

D'après un sujet d'examen de Lyon

La situation présentée ci-dessous est inspirée d'une séquence en fin de Grande Section de maternelle, relatée dans un article publié par la revue *Grand N* : Valentin, D., Ganem, M., Plamond, I., Vergne, C. (1999). *Deux oiseaux dans chaque nid*. Grand N spécial maternelle, tome 1, p. 139-148. IREM de Grenoble.

Objectif de la séquence :

Construire une collection d'objets de cardinal double de celui d'une collection donnée en utilisant une procédure de dénombrement.
Utiliser les désignations orales des nombres pour mémoriser la taille d'une collection.

Matériel :

Un arbre feuillu confectionné par les enfants de la classe sur une grande plaque en carton.
Des petits nids pouvant être collés ou décollés à volonté.
25 oiseaux en carton coloriés en brun et tous identiques.

Choix pour la mise en œuvre :

Le nombre de nids posés dans l'arbre est inférieur à 12 et est variable suivant les élèves.
Les oiseaux sont placés loin des nids (les oiseaux sont sur une table, les nids sur une autre table).
L'élève peut aller chercher les oiseaux seul ou les demander à un autre élève (ou à l'enseignant) suivant la phase de la séquence.

Déroulement :

Phase 1 *avec toute la classe*

L'enseignant présente collectivement le matériel et la consigne qui ne doit pas induire la procédure :
« Il faut aller chercher, en un seul voyage, juste ce qu'il faut d'oiseaux pour qu'il y ait un père et une mère oiseaux dans chaque nid ».
Au départ 6 nids sont collés sur l'arbre, les oiseaux sont posés assez près de l'arbre. Quelques élèves sont invités à faire l'activité et doivent se prononcer sur leur réussite.

Phase 2 *en petits groupes avec la présence de l'enseignant*

Les élèves sont regroupés par 6 à 8, autour d'une table sur laquelle est posée une plaque où figure le dessin du grand arbre. La boîte contenant les 25 oiseaux, tous identiques, est posée sur une table éloignée d'eux.
Six nids en carton ont été placés sur l'arbre et le maître redonne la consigne en montrant la table où sont posés les oiseaux.
Le nombre de nids varie ensuite pour chaque élève, qui à son tour, va chercher les oiseaux.
Dans un second temps, chaque élève à tour de rôle explique comment il a fait et s'il a réussi.
Les différentes procédures sont ainsi verbalisées avec l'aide de l'enseignant, sans qu'aucune ne soit privilégiée.

Phase 3 *en petits groupes avec la présence de l'enseignant*

La situation initiale est modifiée ainsi : Un premier élève passe oralement la commande des oiseaux à un deuxième élève qui fournit la quantité d'oiseaux demandée.
Les élèves changent de rôles durant cette phase.

Questions :

1) Phase 1. Les questions suivantes portent sur les choix faits par l'enseignant :

    a) La consigne est lue par l'enseignant mais certains élèves éprouvent des difficultés de compréhension. Donner deux points sur lequel le maître doit insister et reformuler ces points.

    b) Dans le matériel on note que les 25 oiseaux sont identiques. Si les oiseaux « pères » et « mères » n'étaient pas identiques, expliquer en quoi la situation proposée serait différente.

    c) Proposer deux raisons pour lesquelles les nids ne sont pas déjà dessinés sur l'arbre, mais sont des cartons que le maître dépose sur l'affiche représentant l'arbre.

2) Phase 2

    a) Pour un nombre de 6 nids, décrire deux procédures différentes qui permettraient aux élèves de grande section de maternelle de réussir le problème posé.

    b) Décrire une procédure qui permet à un élève d'obtenir le bon nombre d'oiseaux sans savoir à quel nombre de nids il correspond.

3) Phase 3

    a) Après avoir demandé aux élèves comment ils ont résolu le premier problème qui leur a été posé, le maître modifie la situation initiale en introduisant une commande orale. Pour un nombre de 6 nids, donner deux messages oraux justes auxquels on peut s'attendre.

    b) À l'issue de cette 3ème phase, le maître envisage de faire un bilan : Quel pourrait être le contenu de cette synthèse ?

4) Sur l'ensemble de la séquence

    Dans cette situation, l'enseignant peut jouer sur différentes variables (données de l'énoncé et/ou choix dans la mise en œuvre). Ces choix ont un impact sur les procédures des élèves. Donner deux variables de la situation, autres que celles vues en 1) b) et 1) c), en explicitant l'impact que peut avoir leur variation sur les procédures des élèves.

PROBLÈMES DE PARTAGE EN GS

D'après un sujet d'examen de Grenoble

Vous trouverez en annexe des éléments d'une situation proposée en fin d'année de Grande Section, qui portent sur le partage d'une collection de trente à soixante objets. Il s'agit de la deuxième séance.

1) Classer et caractériser les différentes procédures de partage mises en œuvre par ces groupes pour résoudre le problème posé.

2) Quels sont les moyens de contrôle mis en place par ces groupes ?

3) Analysez le résultat incorrect du groupe 4.

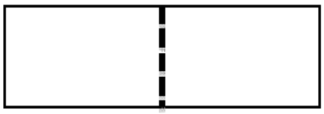
4) En restant dans le cadre d'une situation de partage équitable en deux d'une collection d'objets déplaçables, indiquez, en les justifiant, deux variables didactiques de cette situation.

5) Ultérieurement dans l'année, l'enseignante envisage de proposer la situation suivante :

Les bandes de gommettes

Phase 1 :

Les enfants reçoivent une bande du type ci-dessous ainsi que des gommettes (entre 6 et 20) en nombre pair.

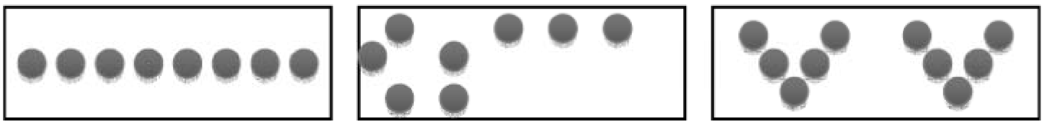


La consigne est la suivante :
« *Placez toutes les gommettes sur la bande. Attention ! Il faut qu'il y en ait autant (pareil) de chaque côté du trait. Vous les collez quand vous êtes sûrs.* »

Phase 2 :

Le travail s'organise en groupes de 6 enfants. Chaque groupe est structuré en 3 équipes de 2 : une équipe « émetteurs » et deux équipes « récepteurs ».

L'équipe « émetteurs » reçoit en deux exemplaires une bande avec des gommettes (de 6 à 10 pour commencer) déjà collées.



Exemples de bandes

La consigne est la suivante : « *Vous prenez une seule bande. Vous devez trouver la ligne de partage pour qu'il y ait autant de gommettes de chaque côté. Vous pouvez chercher avec la ficelle. Quand vous êtes sûrs, vous tracez, vous découpez et vous donnez un morceau à chaque équipe « récepteurs»* ».

Les équipes « récepteurs » reçoivent alors une bande vierge. Leur consigne est la suivante : « Collez les morceaux reçus sur votre bande. Complétez la bande avec des gommettes pour avoir autant de gommettes qu'avant le découpage ».
La phase 2 est reconduite plusieurs fois.

Phase 3 :

L'activité est reprise plusieurs fois en collectif. La phase 3 se conclut par une institutionnalisation portant sur les procédures de recherche de la moitié (trait de partage) ainsi que du double.

a) Citez deux procédures (correctes) que peuvent mettre en œuvre les élèves pour placer les gommettes lors de la phase 1.

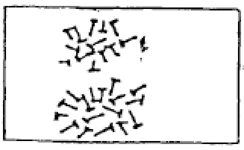
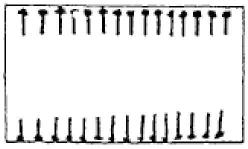
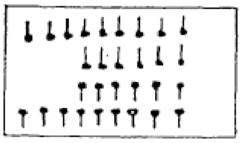
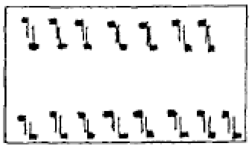
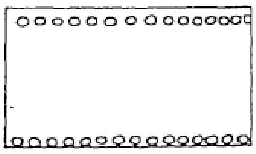
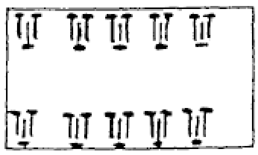
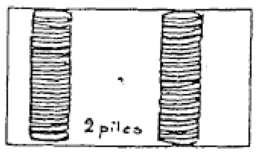
b) Citez deux procédures (correctes) que peuvent mettre en œuvre les élèves « émetteurs » pour tracer la ligne lors de la phase 2. Quel moyen de validation peut-on envisager ?

c) Lors de la phase 2, quel est l'intérêt de fournir deux exemplaires de la même bande aux élèves émetteurs ?

d) Proposez une évaluation individuelle que l'on pourrait envisager à l'issue de la phase 3.

ANNEXE

Des collections homogènes d'objets utiles pour des activités de peinture sont proposées : éponges, boules de tissu, morceaux de mousse, bouchons (trente de chaque sorte), godets de plastique (soixante).
Après inventaire du matériel, l'enseignante propose de « partager » avec l'autre classe (celle des petits). Elle rappelle la séance précédente et fait préciser la procédure de partage qui a été mise en évidence lors du bilan : « *un pour les grands … un pour les petits* ».
Les enfants sont deux à deux face à face. La maîtresse donne les consignes : « *Vous partagez, puis vous construisez sur votre table « quelque chose » pour montrer que chaque classe en a pareil* ».

GROUPES	PROCÉDURES ET DISPOSITIONS FINALES SUR LA TABLE	
G1 Éponges	– Chacun prend une éponge puis une autre, mais sans tenir compte de l'autre élève.	
G2 Boules de tissu	– Chaque enfant prend une boule de tissu, chacun à son tour. – Ils placent simultanément les objets au bord de leur table.	
G3 Morceaux de mousse	– Les enfants prennent un à un les objets, en synchronisant leurs gestes.	
G4 Éponges	– Chaque enfant prend deux objets, chacun à son tour, et les pose sur la table. – Après avoir partagé, ils forment une ligne de paquets de deux.	
G5 Bouchons	– Chaque enfant prend un bouchon, chacun à son tour, avec formation simultanée de lignes en suivant le bord de la table. – Ils vérifient fréquemment par comptage. Chaque enfant compte 1, 2, 3… 15 en posant le doigt sur un bouchon (gestes en miroir bien synchronisés).	
G6 Éponges	– Chaque enfant prend un paquet de trois éléments, mais l'alternance entre eux n'est pas respectée. – Ils forment deux lignes le long de la table (une de 12, une de 18) ; ils s'aperçoivent alors de l'erreur et modifient.	
G7 Godets	– Les enfants forment des petites piles de deux godets et les alignent… mais ils manquent de place… – Ils forment alors deux piles de même hauteur.	

LA MULTIPLICATION D'UN NOMBRE ENTIER PAR UN NOMBRE À UN CHIFFRE : ÉTUDE D'EXTRAITS DE MANUELS

D'après un sujet d'examen de Lyon

Le dossier porte sur la multiplication d'un nombre entier par un nombre à un chiffre. Il est composé de cinq annexes :
Annexe 1 : un extrait du manuel, « Tous en Maths ! » CE 2 Nathan 2012
Annexe 2 : un extrait du manuel, « J'apprends les maths » CE 2 Retz 2010
Annexe 3 : un extrait du fichier « Euro maths » CE1 Hatier 2012
Annexe 4: un extrait du livre du maitre « Cap maths » CE1Hatier 2009
Annexe 5 : Extraits des programmes de mathématiques de l'école élémentaire.

1) À propos de l'annexe 1 « Tous en Maths ! » CE 2 Nathan 2012 **et de l'annexe 2** « J'apprends les maths » CE2 Retz 2010

a) Dans l'extrait « Tous en Maths ! » CE2, décrire la seconde technique de multiplication (celle employée au milieu par Nora).

b) Les deux extraits proposent des *techniques* de multiplication d'un nombre entier par un nombre à un chiffre. Le premier extrait **«** Tous en Maths ! » propose la technique de Nora et la technique de Max, le second extrait « J'apprends les maths » propose une technique de calcul en ligne. Comparer ces trois techniques ; en quoi sont-elles semblables / différentes ? On pourra organiser sa réponse sous la forme d'un tableau.

c) Les auteurs de « J'apprends les maths » proposent, avant d'aborder la multiplication posée, de consacrer une leçon à la multiplication en ligne. Quelles raisons ont pu motiver leur choix ?

2) À propos des annexes 3 « Euro Maths » CE1 Hatier 2012 **et 4** « livre du maitre Cap Maths CE1 » Hatier 2009

Les deux manuels proposent des approches différentes de la multiplication.

a) Décrire ces deux approches.

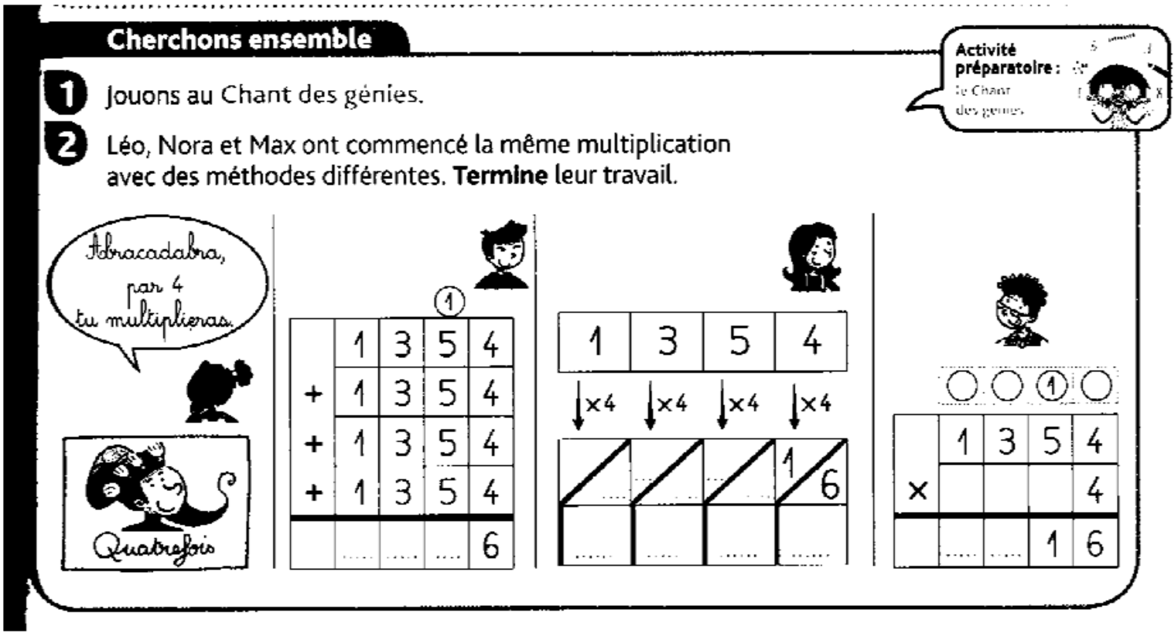
b) Préciser en quoi elles diffèrent.

c) En considérant les documents étudiés, préciser pour chacune des approches s'appuyant sur deux sens complémentaires de la multiplication, comment elle prend en charge ou non : la mise en évidence des propriétés de la multiplication, le prolongement de la technique opératoire à la multiplication de deux nombres décimaux.

3) À l'issue de cette étude du dossier en considérant les programmes (annexe 5)

Citer trois compétences importantes à faire acquérir aux élèves avant d'aborder la multiplication posée.

ANNEXE1 : « *Tous en maths* » *CE 2 Nathan 2012*



Cherchons ensemble

Activité préparatoire : le Chant des génies

1 Jouons au Chant des génies.

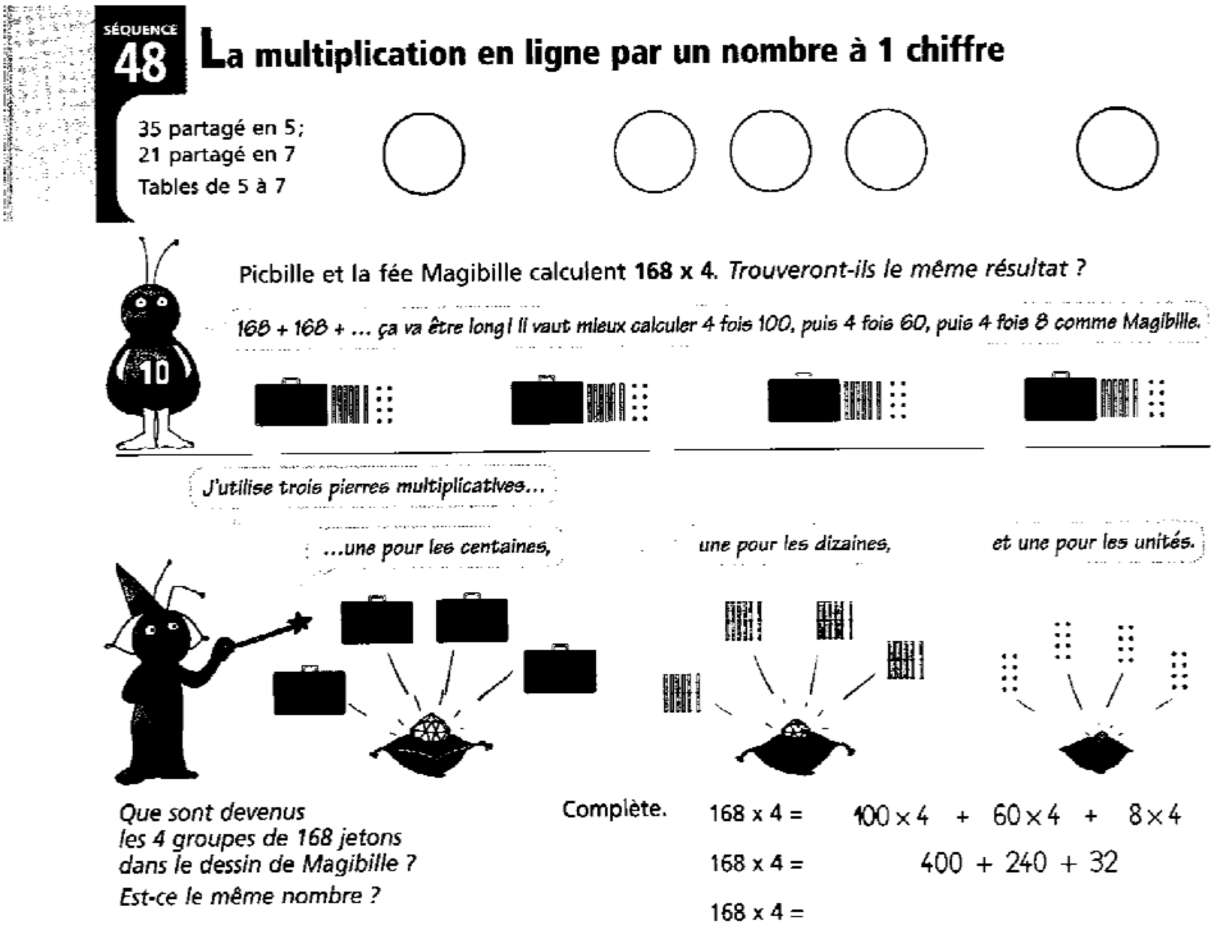
2 Léo, Nora et Max ont commencé la même multiplication avec des méthodes différentes. **Termine** leur travail.

			(1)	
	1	3	5	4
+	1	3	5	4
+	1	3	5	4
+	1	3	5	4
	.....	.....	.....	6

1	3	5	4
×4	×4	×4	×4
.....	.....	.....	1/6
.....	.....	.....	.....

	◯	◯	(1)	◯
	1	3	5	4
×				4
	.....	.....	1	6

ANNEXE 2 : « *J'apprends les maths* » *Ce 2 Retz2010*



SÉQUENCE **48** **La multiplication en ligne par un nombre à 1 chiffre**

35 partagé en 5 ;
21 partagé en 7
Tables de 5 à 7

Picbille et la fée Magibille calculent **168 x 4**. *Trouveront-ils le même résultat ?*

Que sont devenus les 4 groupes de 168 jetons dans le dessin de Magibille ?
Est-ce le même nombre ?

Complète.
168 x 4 = 100 × 4 + 60 × 4 + 8 × 4
168 x 4 = 400 + 240 + 32
168 x 4 =

ANNEXE 3 : « Euromaths » CE1 Hatier 2012

9 La multiplication posée en colonne (1)

COMPÉTENCE : calculer : multiplication.
Item 3 du socle

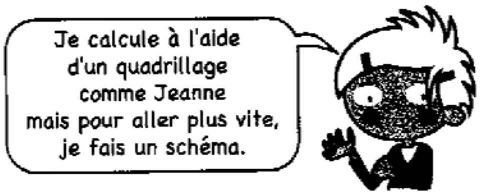
OBJECTIF : faire le lien entre la procédure de multiplication par découpage d'un quadrillage et la technique de la multiplication posée en colonne.

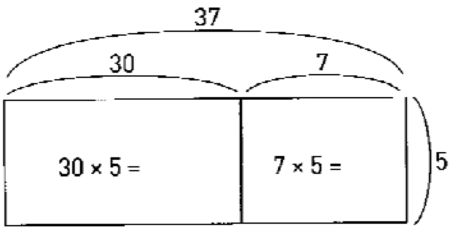
Jeu du furet de 10 en 10 en croissant, puis en décroissant à partir d'un nombre quelconque.

écouverte

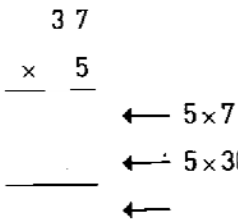
1 Sur ton cahier de brouillon, **calcule** 37 × 5. 37 × 5 =

2 • **Complète** le travail de Lilou et celui de Rémi.





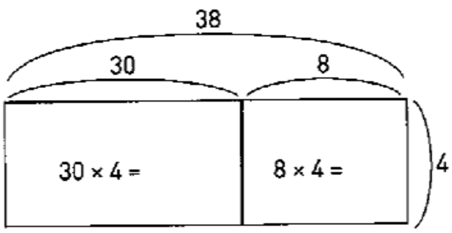
37 × 5 = + =



• **Compare** avec ton résultat.
• Quel est le **résultat** de 5 × 37 ?

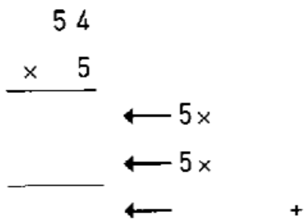
Exercices

1 **Calcule** 4 × 38 en t'aidant du schéma.



4 × 38 = + =

2 **Calcule** 54 × 5 pas à pas.



54 × 5 =

cent neuf • 109

ANNEXE 4 : Manuel du maitre « Cap Maths » CE1 Hatier 2009

Multiplication par un nombre à un chiffre : calcul posé (1)

– Élaborer une technique de calcul posé pour multiplier un nombre à 2 chiffres par un nombre à 1 chiffre.

1 Calcul de 87 x 5 (contextualisé)

- Raconter aux élèves l'histoire suivante :

➡ *Alex, Lisa et Moustik ont trouvé un trésor avec 5 enveloppes contenant chacune 87 perles* (montrer le contenu d'une enveloppe avec 8 paquets de dix perles et 7 perles isolées). *Au total, combien cela représente-t-il de perles ?*

- Inventorier et faire expliciter les procédures utilisées :

– travail sur les paquets et les perles isolées : valeur de 5 fois « 8 paquets » et de 5 fois « 7 perles », puis addition ;
– addition répétée de 87 (5 fois), difficile à calculer ;
– décomposition de 87 en 80 + 7 et calcul de 80 × 5 et 7 × 5, puis addition ;
– décomposition en 8 dizaines et 7 unités et calcul de 5 fois « 8 dizaines » et 5 fois « 7 unités » (sans référence explicite aux perles), puis addition...

- Afficher et conserver au tableau ces procédures.

Pour ce premier calcul, différentes procédures sont examinées. Il est possible que le travail réalisé en unité 13 ait conduit les élèves à privilégier la méthode qui consiste à traiter séparément unités et dizaines. Mais toutes les méthodes sont également prises en compte.
La situation proposée au départ dans le contexte « perles » est destinée à favoriser l'apparition de procédures diverses. Celle du calcul posé sera ensuite exposée par l'enseignant, puisqu'il s'agit d'une méthode culturelle que les élèves ont peu de chance de réinventer, mais qu'ils doivent chercher à comprendre, et à justifier collectivement en référence au matériel (avec le langage unité, dizaine, centaine) et donc en utilisant et en approfondissant leurs connaissances relatives à la numération décimale.

2 Une autre méthode de calcul : la multiplication posée

- Pour expliquer cette technique, deux des méthodes écédentes sont utilisées : l'addition en colonnes ordinaire la décomposition des nombres en dizaines et unités (en les ttant en relation).
- Écrire au tableau ces 2 calculs :

addition	multiplication	
87	D U	
+ 87	87	☐☐☐
+ 87	× 5	C D U
+ 87		(boîte à retenues)
+ 87		

- Faire intervenir 2 élèves au tableau et leur demander, sous la conduite de l'enseignant et des autres élèves, d'effectuer simultanément les deux calculs.

Dans l'addition, on doit ajouter « 5 fois 7 », on peut :
– soit additionner effectivement ;
– soit utiliser le fait qu'on sait que « 5 fois 7, c'est 35 », on écrit donc 5 et on retient 3 dizaines au-dessus de la colonne des dizaines, etc.

3
87
+ 87
+ 87
+ 87
+ 87
5

Dans la multiplication, de la même façon, on doit prendre « 5 fois 7 unités » (5 fois 7 perles isolées dans le contexte) : on trouve 35 unités (ou 35 perles), donc 5 unités et 3 dizaines (3 dizaines de perles dans le contexte). Les 3 dizaines sont mises en réserve dans la boîte à retenues.
On a ensuite **« 5 fois 8 dizaines »** :
– soit 40 dizaines auxquelles il faut ajouter les 3 dizaines « retenues » ;
– soit 43 dizaines qu'on peut écrire directement ou considérer comme 4 centaines et 3 dizaines.

D U
87
× 5
5

C	D	U
	3	

boîte à retenues

- Faire remarquer que la case U de la boîte à retenues ne servira jamais et qu'on peut ne pas la dessiner.
- Conserver cette méthode au tableau et la mettre en relation avec les autres procédures utilisées par les élèves.

SÉANCE 1 279

ANNEXE 5 : Extraits des programmes de mathématiques

	Cours préparatoire	Cours élémentaire première année
Nombres et calcul	- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100. - Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 ("table d'addition"). - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant. - Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20. - Connaître la table de multiplication par 2. - Calculer mentalement des sommes et des différences. - Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100). - Résoudre des problèmes simples à une opération.	- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000. - Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer. - Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc. - Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant. - Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5. - Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits. - Calculer en ligne des suites d'opérations. - Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1 000). - Connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre. - Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier). - Résoudre des problèmes relevant de l'addition, de la soustraction et de la multiplication. - Approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements. - Utiliser les fonctions de base de la calculatrice.

	Cours élémentaire deuxième année	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
Nombres et calcul	*Calcul sur des nombres entiers* Calculer mentalement - Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication. - Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits. Effectuer un calcul posé - Addition, soustraction et multiplication. - Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre. Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental, posé, où à l'aide de la calculatrice. Utiliser les touches des opérations de la calculatrice. *Problèmes* Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.	*Calcul* Calculer mentalement - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat. Effectuer un calcul posé - Addition et soustraction de deux nombres décimaux. - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. - Division euclidienne de deux entiers. - Division décimale de deux entiers. Connaître quelques fonctionnalités de la calculatrice utiles pour effectuer une suite de calculs. *Problèmes* Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.	*Calcul* Calculer mentalement - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. - Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. Effectuer un calcul posé - Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. - Division d'un nombre décimal par un nombre entier. Utiliser sa calculatrice à bon escient. *Problèmes* Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

GRANDEURS ET MESURES
ANNALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES
ANALYSES DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

EXERCICE 1 (d'après un sujet d'examen de Paris)

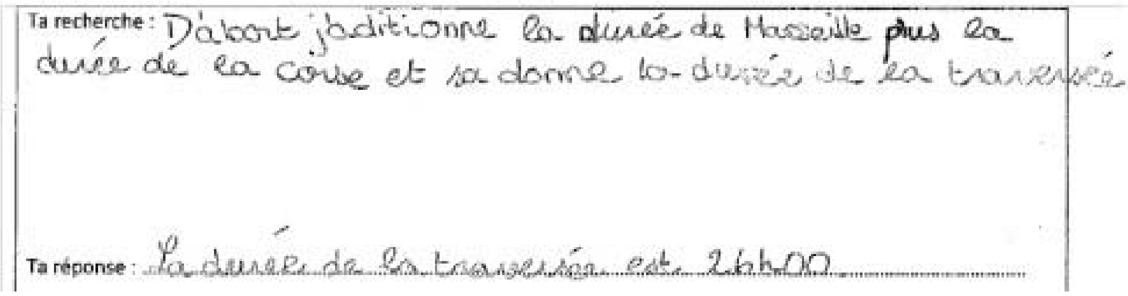
On s'intéresse à l'exercice suivant :

Un bateau part de Marseille à 19h, et arrive à Bastia, en Corse, le lendemain à 7h. Quelle est la durée de la traversée?

On trouvera ci-dessous cinq productions d'élèves relevées lors d'un diagnostic réalisé dans une classe de sixième à la rentrée 2013.

Pour chacune des productions, décrire la procédure suivie par l'élève, dire si elle est correcte, et relever les erreurs éventuelles.

Élève 1


Ta recherche : D'abord j'additionne la durée de Marseille plus la durée de la corse et sa donne la durée de la traversée

Ta réponse : La durée de la traversée est 26h00

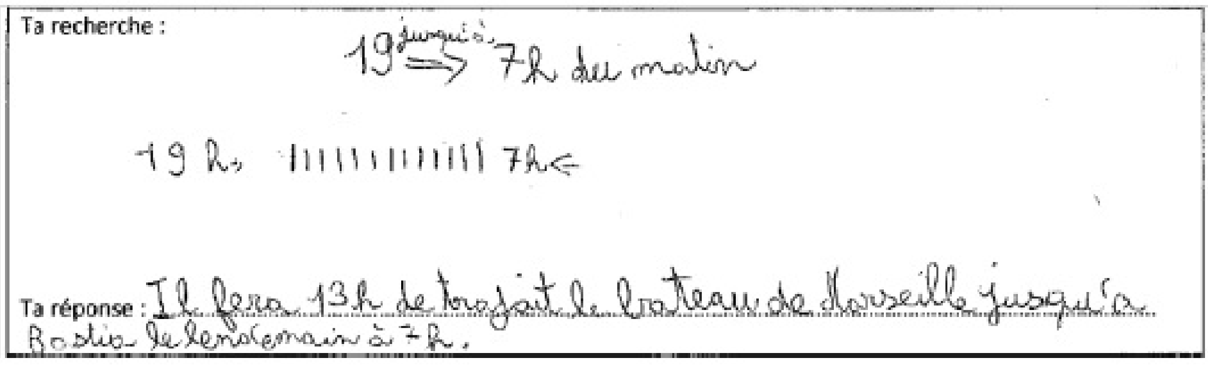
Élève 2


Ta recherche :

19h
+ 7h
12h

Ta réponse : le voyage a durée 12h

Élève 3

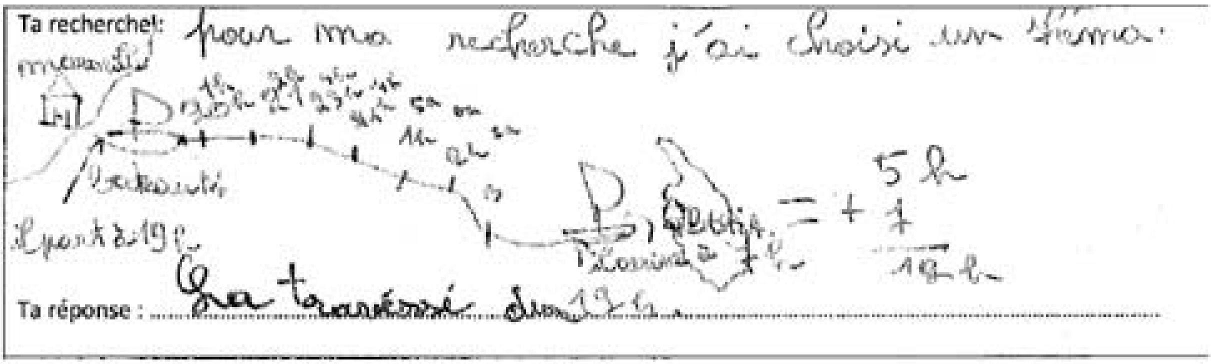

Ta recherche :

19 jusqu'à ⟹ 7h du matin

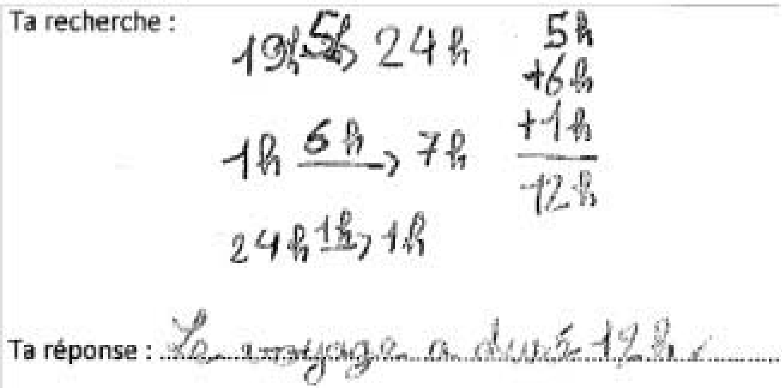
19 h, ||||||||||| 7h

Ta réponse : Il fera 13h de trajet le bateau de Marseille jusqu'à Bastia le lendemain à 7h.

Élève 4



Élève 5



EXERCICE 2 (d'après un sujet d'examen de Toulouse)

Un exercice a été donné à des élèves, avec la consigne générale : *Convertir. Aide-toi du tableau, n'oublie pas de le compléter.*

1) Voici ci-dessous la réponse d'un élève :

Complète ces égalités.

a) 5 m = ...500...... cm
b) 36 dam= ..360........ m
c)700 cm=.......7..........m
d) 9 dm = ...900. mm
e) 62 m = ...62000 mm

Km	hm	dam	m	dm	cm	mm

L'élève a-t-il répondu à la consigne ? Quelle appréciation porteriez-vous sur son travail ?

2) Pour chaque production ci-dessous, relever les erreurs et émettre une hypothèse sur leur origine.

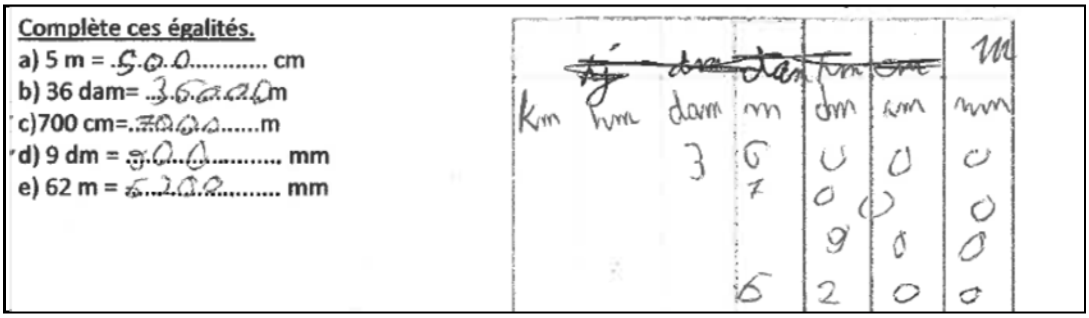
Élève 1

Complète ces égalités.

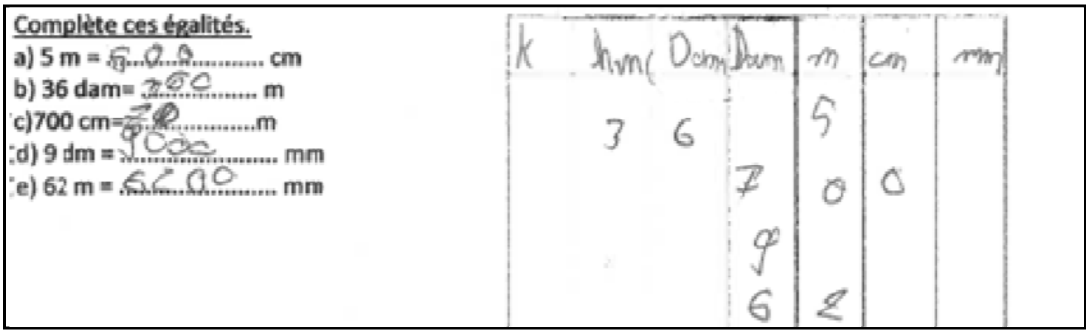
a) 5 m = .5.0.0............ cm
b) 36 dam= ..3.6.0.0.0m
c)700 cm=.7.0.0.0......m
d) 9 dm = .9.0.0........... mm
e) 62 m = .6.2.0.0.......... mm

Km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		3	6	0	0	0
			7	0	0	0
				9	0	0
			6	2	0	0

Élève 2



Élève 3



3) Donner un argument en faveur de l'utilisation du tableau de conversion et un en sa défaveur.

ANALYSE DE MANUELS (Longueur au CP d'après d'un sujet d'examen de Nice)

Les questions portent sur deux pages d'un manuel de CP (Euromaths, Hatier) présentées en Annexe.

1) Analyse de la partie « Découverte » p.46

Dans l'activité préparatoire, les auteurs proposent de comparer les tailles des enfants de la classe en passant par la comparaison de bâtons coupés à leur taille.

a) Explicitez une procédure plus simple pour comparer la taille de deux enfants.

b) Proposez une procédure plus simple pour comparer la taille de plusieurs enfants.

c) Détaillez deux procédures que peuvent réaliser en classe les élèves de CP pour ranger les bâtons en fonction de leur longueur.

2) Analyse de l'« Exercice » p.46

a) Décrivez une procédure qui permette à des élèves de CP de réaliser la tâche demandée dans cet « Exercice ».

b) Identifier la variable de la situation de comparaison qui conduit les élèves à mettre en œuvre ce type de procédure.

3) Analyse des activités de la p.47

a) Une deuxième activité préparatoire se déroulant dans la cour est proposée. Imaginez une procédure permettant de comparer les longueurs de plusieurs trajets dans la cour.

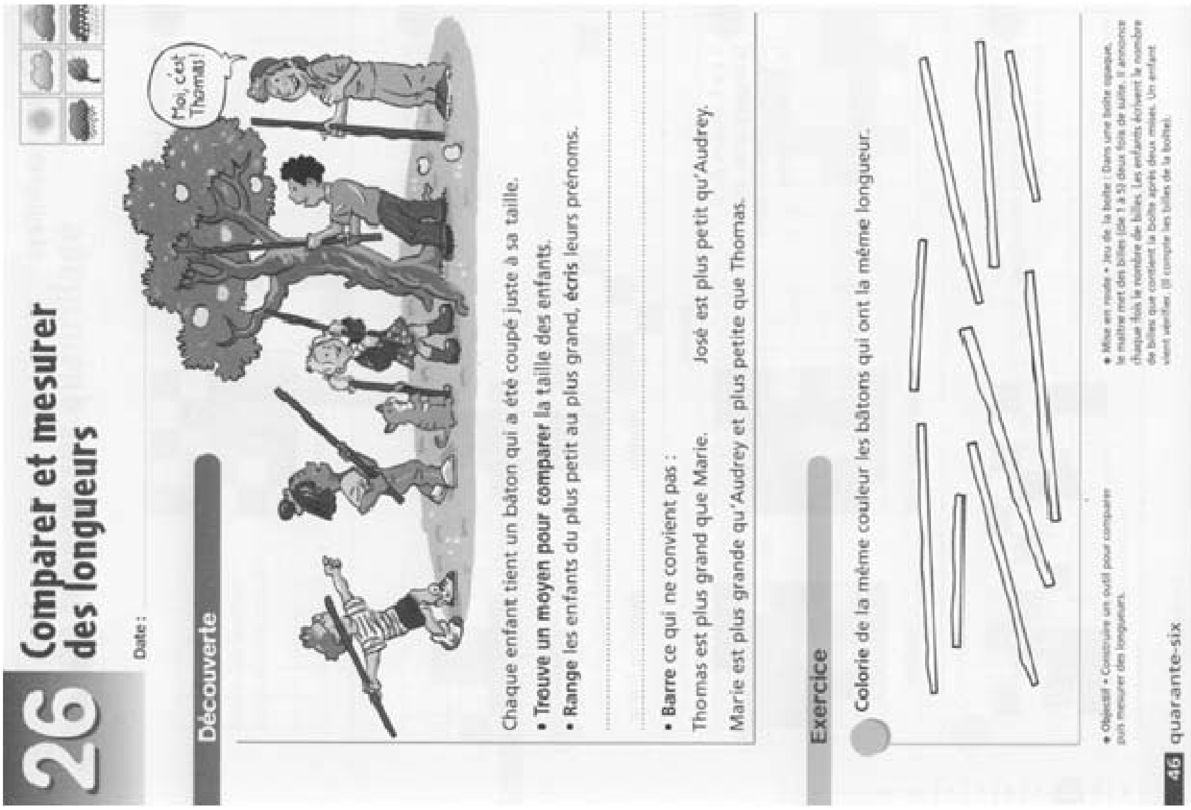
b) À l'« Application » p.47, certains élèves répondent que le chemin le plus long est le chemin vert (indiqué sur la feuille). Quel a pu être leur raisonnement ?

c) Si ce raisonnement est mis en œuvre dans l'« Exercice » p.47, cet exercice permet-il de l'invalider ?

d) Sur quelle propriété mathématique de la mesure s'appuie la recherche du résultat de l'« Exercice » ?

4) Quel type d'activités peut-on envisager pour poursuivre la progression en CP ?

ANNEXE



26 Comparer et mesurer des longueurs

Date :

Découverte

Chaque enfant tient un bâton qui a été coupé juste à sa taille.

- **Trouve un moyen pour comparer** la taille des enfants.
- **Range** les enfants du plus petit au plus grand, **écris** leurs prénoms.

- **Barre** ce qui ne convient pas :

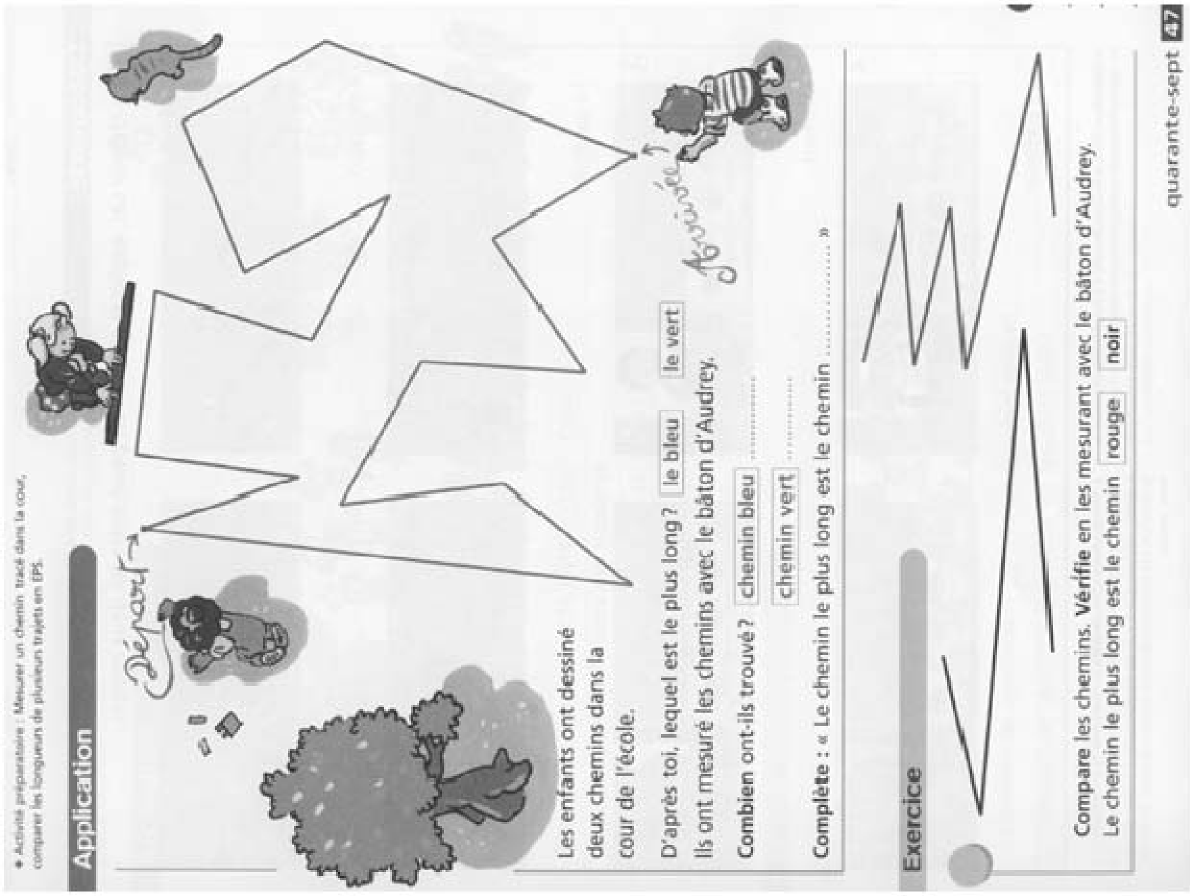
Thomas est plus grand que Marie. José est plus petit qu'Audrey.

Marie est plus grande qu'Audrey et plus petite que Thomas.

Exercice

Colorie de la même couleur les bâtons qui ont la même longueur.

46 quarante-six



Application

Les enfants ont dessiné deux chemins dans la cour de l'école.

D'après toi, lequel est le plus long ? le bleu le vert

Ils ont mesuré les chemins avec le bâton d'Audrey.

Combien ont-ils trouvé ? chemin bleu ....

chemin vert ....

Complète : « Le chemin le plus long est le chemin .... »

Exercice

Compare les chemins. **Vérifie** en les mesurant avec le bâton d'Audrey.

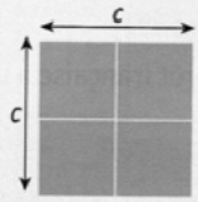
Le chemin le plus long est le chemin rouge noir

quarante-sept 47

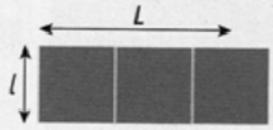
ANALYSE DE MANUELS (Aire au CM2 d'après un sujet d'examen de Nantes)

Voici un extrait du manuel « Outil pour les maths » (Magnard, 2011) destiné à la classe de CM2.

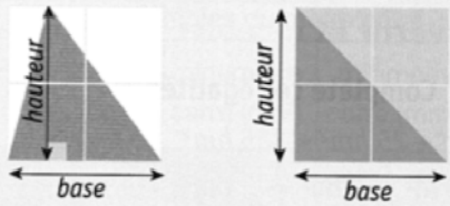
- On utilise des formules pour calculer l'aire de certains polygones.
- **Aire du carré = c × c**
  Un carré de 2 cm de côté a une aire de 4 cm² (2 × 2 = 4).
  Il contient 4 carreaux de 1 cm².



- **Aire du rectangle = l × L**
  Un rectangle qui mesure 1 cm de largeur sur 3 cm de longueur a une aire de 3 cm² (3 × 1 = 3).
  Il contient 3 carreaux de 1 cm².



- **Aire d'un triangle = $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$**
  Ces deux triangles ont une base de 2 cm et une hauteur de 2 cm.
  Ils ont une aire de 2 cm²
  ($\frac{2 \times 2}{2} = 2$).



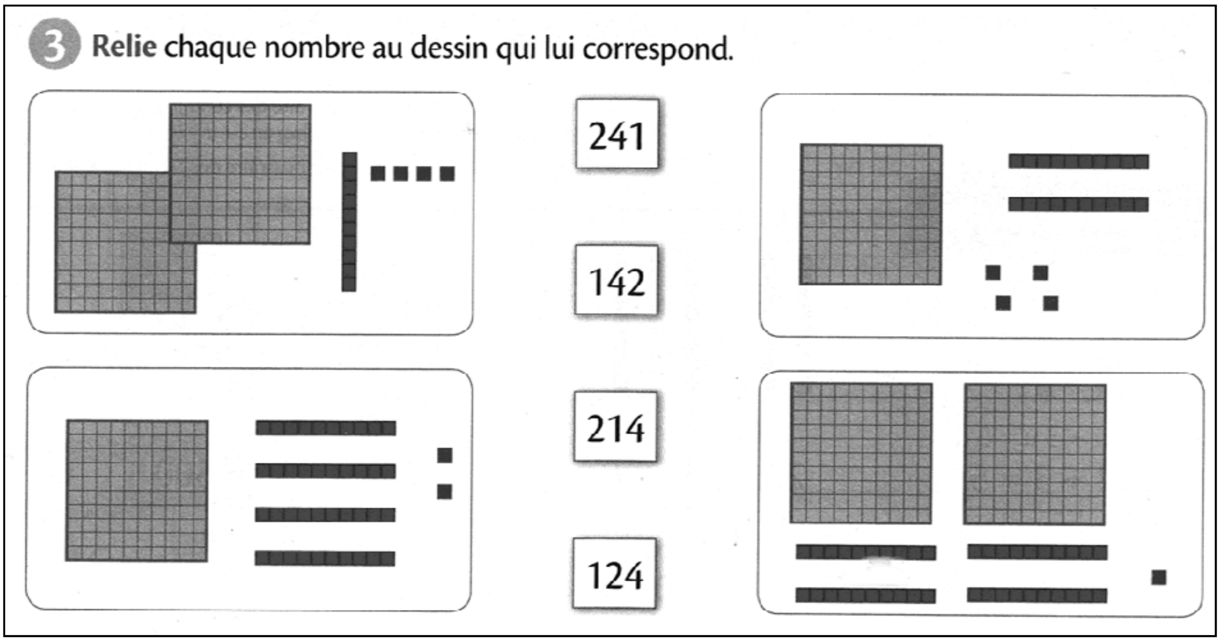
1) Discuter la pertinence des valeurs numériques choisies dans cet extrait de manuel.
2) On veut expliquer à des élèves de CM2 pourquoi la formule indiquée pour le rectangle est valable pour n'importe quelles dimensions entières. Proposer une formulation adaptée.
3) Expliciter les difficultés que certains élèves rencontreront probablement avec l'usage des termes « base » et « hauteur » pour le calcul de l'aire du triangle

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE AU CE1

D'après un sujet d'examen de Nantes

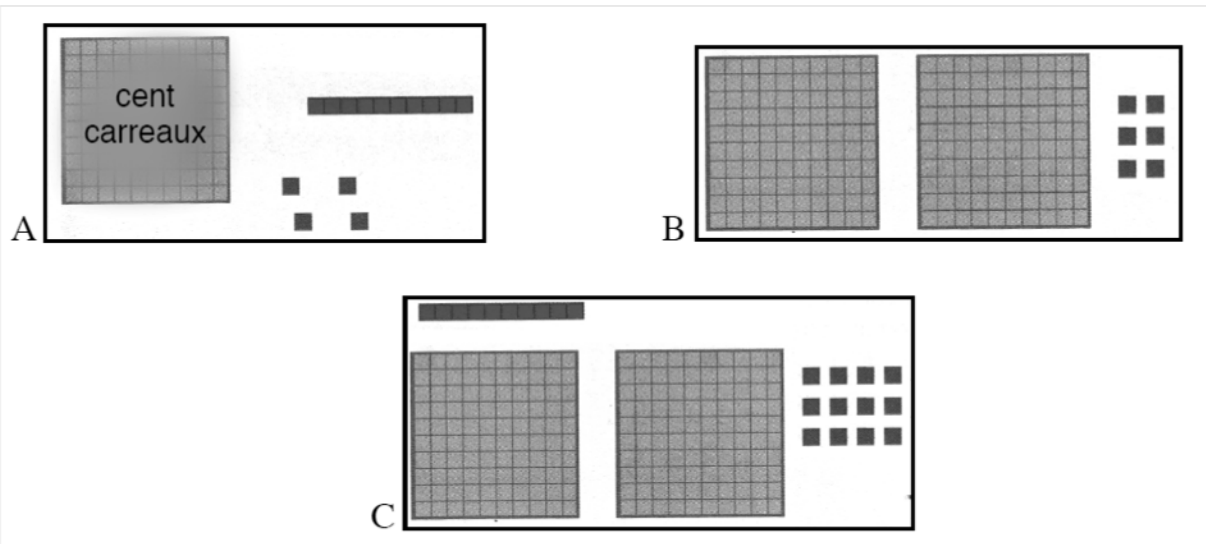
Dans ce sujet, les exercices à analyser sont extraits du fichier « Maths tout terrain » CE1 p57 et 61 (Bordas, 2009)[1].

1) Expliciter les informations qui doivent avoir été données auparavant par le maître pour lever les implicites de la consigne dans l'exercice suivant.



2) Décrire une procédure permettant à un élève de fournir la réponse attendue sans que le maitre soit assuré que cet élève ait donné du sens aux différents chiffres composant le nombre.

3) Un enseignant conçoit ses propres exercices en s'appuyant sur les représentations de ce fichier. Dans les trois cas suivants, la consigne est : « écris en chiffres le nombre de carreaux ». Indiquer le but probablement poursuivi par l'enseignant en proposant chacun de ces trois cas.



[1] Note de la COPIRELEM : Dans le document original, les plaques sont vertes, les barres sont rouges et les petits carrés bleus.

4) On trouve, dans le même ouvrage, l'extrait suivant :

Je comprends

• Le tableau des 1 000

Sur cette **ligne**, on trouve tous les nombres dont le **chiffre des centaines est 2**.

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
200	210	220	230	240	250	260	270	280	290
300	310	320	330	340	350	360	370	380	390
400	410	420	430	440	450	460	470	480	490
500	510	520	530	540	550	560	570	580	590
600	610	620	630	640	650	660	670	680	690
700	710	720	730	740	750	760	770	780	790
800	810	820	830	840	850	860	870	880	890
900	910	920	930	940	950	960	970	980	990

$440 + 230 = \boxed{?}$

$440 + 200 = 640$

$640 + 30 = 670$

Donc

$440 + 230 = 670$

Dans cette **colonne**, on trouve tous les nombres dont le **chiffre des dizaines est 2**.

- Pour **ajouter 100** à un nombre, on descend d'une ligne.
- Pour **ajouter 10** à un nombre, on avance d'une colonne vers la droite.

Cet extrait montre une façon de calculer 440 + 230 en s'appuyant sur le tableau de nombres ci-dessus et généralise la méthode de calcul utilisée (voir l'encadré).

a) Cette méthode de calcul est-elle toujours pertinente pour additionner deux nombres dont le chiffre des unités est « 0 » et dont la somme est inférieure à 1 000 ? Justifier la réponse.

b) Décrire précisément une procédure avec laquelle des élèves de CE1 peuvent effectuer 170 + 720 en calcul réfléchi, sans se servir de ce tableau.

LES NOMBRES DÉCIMAUX AU CM

D'après un sujet d'examen de Paris

Note :

Ce sujet est inspiré du sujet du CRPE Créteil, Paris, Versailles 2003. Les deux extraits de manuels quoiqu'ancien, présentent des tâches toujours en lien avec les programmes 2008.

Les annexes 1 et 2 sont constituées d'activités proposées dans deux manuels d'élèves :

- annexe 1 : « Math outil » (Magnard, 1996),
- annexe 2 : « Le nouveau Math Elem » (Belin, 2002).

1) A quel(s) niveau(x) de classe peut-on proposer ces activités ?
2) Parmi les différentes compétences que les deux activités visent à faire travailler, l'une est commune aux deux. Laquelle ?
3) Lorsqu'on se limite aux nombres entiers, les deux « règles » suivantes sont valides :

Règle A : « Chaque nombre possède un unique successeur ; entre un nombre et son successeur on ne peut pas en intercaler un troisième »

Règle B : « Plus il faut de chiffres pour écrire un nombre, plus ce nombre est grand »

a) Pour chacune des deux « règles », illustrez par un exemple une affirmation erronée à laquelle serait conduit un élève l'utilisant dans le domaine des nombres décimaux.
b) Préciser en quoi l'utilisation de l'annexe 2 pourrait-elle permettre à un enseignant d'illustrer l'invalidité de ces affirmations.

4) Lors du travail sur l'addition des nombres décimaux, on observe souvent des erreurs du type

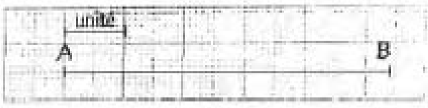
$$\begin{array}{r} 3{,}7 \\ +\ 2{,}5 \\ \hline 5{,}12 \end{array}$$

a) Pouvez-vous formuler une hypothèse relative à l'origine de cette erreur ?
b) En quoi le travail amorcé dans les activités de l'annexe 1 peut-il permettre à un enseignant d'aider ses élèves à dépasser cette erreur ?

Extrait de « *Math outil* » (*Editions MAGNARD*)

1 L'unité étant le carreau, le segment AB mesure cinq carreaux et $\frac{4}{10}$ de carreau.

Exprime cette mesure sous la forme d'un nombre décimal.



Pour t'aider

Complète le tableau.
5 unités et 4 dixièmes ou
5 unités + 4 dixièmes

unités	dixièmes $\frac{1}{10}$	centièmes $\frac{1}{100}$	millièmes $\frac{1}{1000}$
5			

2 Écris la fraction décimale $\frac{256}{100}$ sous la forme d'un nombre décimal.

Pour t'aider

256 centièmes = 200 centièmes + 50 centièmes + 6 centièmes.

$$\frac{256}{100} = \frac{200}{100} + \frac{50}{100} + \frac{6}{100}$$
$$= 2 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}$$

Complète le tableau.
2 unités + 5 dixièmes + 6 centièmes

unités	dixièmes $\frac{1}{10}$	centièmes $\frac{1}{100}$	millièmes $\frac{1}{1000}$
	5		

3 Écris la fraction décimale $\frac{17\,213}{1\,000}$ sous la forme d'un nombre décimal.

Pour t'aider

17 213 millièmes = 17 000 millièmes + 200 millièmes + 10 millièmes + 3 millièmes.

$$\frac{17\,213}{1000} = \frac{17\,000}{1000} + \frac{200}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{3}{1000}$$
$$= 17 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{3}{1000}$$

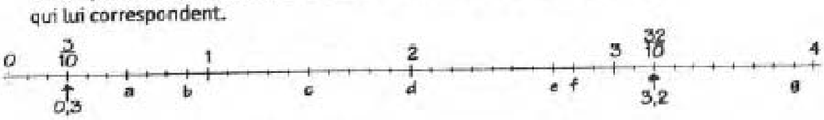
Complète le tableau.
1 dizaine 7 unités + 2 dixièmes + 1 centième + 3 millièmes

dizaines	unités	dixièmes $\frac{1}{10}$	centièmes $\frac{1}{100}$	millièmes $\frac{1}{1000}$
	7			

ANNEXE1

Extrait de « *Le nouveau Math Elem* » (*Editions BELIN*)

a. Remplace chaque lettre par la fraction décimale et le nombre à virgule qui lui correspondent.

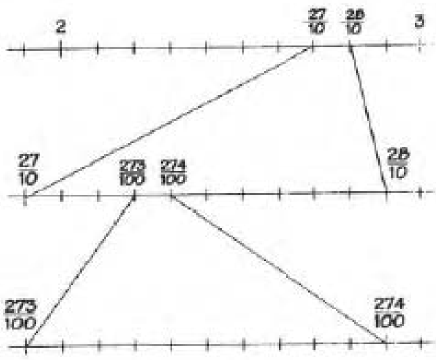


b. On agrandit la partie de la droite graduée comprise entre $\frac{27}{10}$ et $\frac{28}{10}$.

Écris toutes les fractions décimales qui correspondent aux graduations marquées dans l'agrandissement, ainsi que les nombres à virgule qui leur correspondent.

c. En agrandissant encore plus, on voit les nombres entre $\frac{273}{100}$ et $\frac{274}{100}$.

Écris quatre nombres parmi ceux qui correspondent à ces graduations, sous forme de fractions décimales et de nombres à virgule.



ANNEXE 2

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE AU CP

D'après un sujet d'examen de Toulouse

En annexe : la fiche 55 extraite du livre de CP Euro Maths (période 4), éditions Hatier.

1) Les travaux de G. Vergnaud sur le champ additif ont permis d'identifier quatre catégories de problèmes :

   - Les problèmes où un état initial subit une transformation pour aboutir à un état final ;
   - Les problèmes dans lesquels deux états sont combinés pour obtenir un troisième état ;
   - Les problèmes de comparaison, dans lesquels on est amené à quantifier l'écart entre deux états ;
   - Les problèmes où deux transformations sont composées pour en former une troisième.

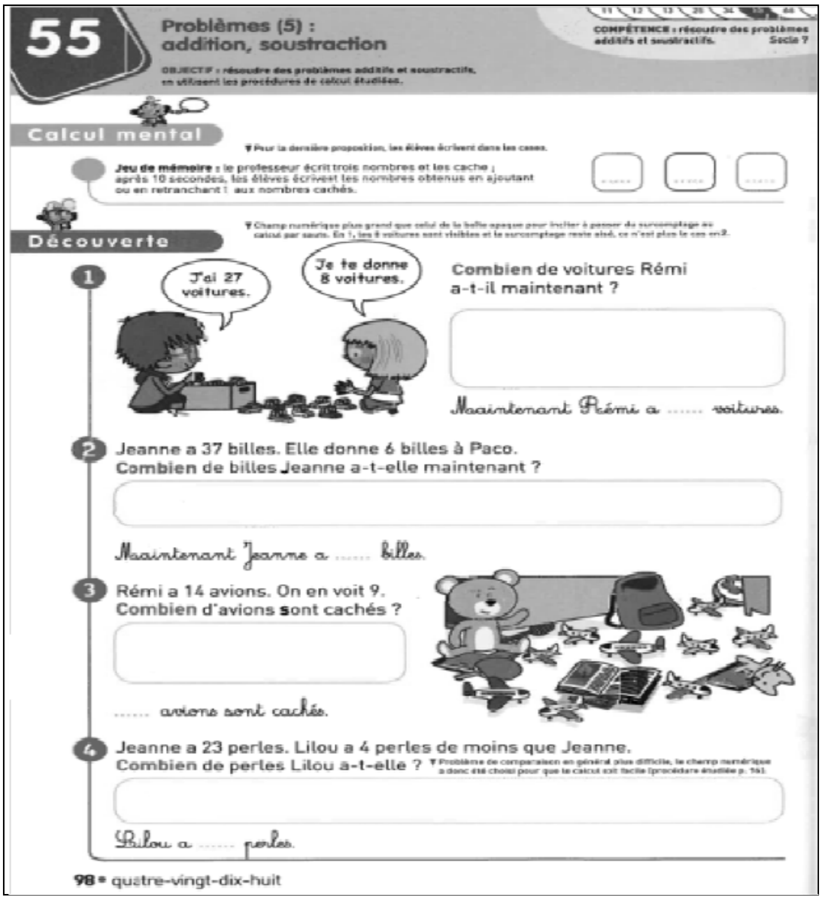
   En utilisant ces travaux, préciser en le justifiant la catégorie à laquelle appartient chacun des quatre énoncés de l'annexe.

2) Pour l'énoncé 4, la sémantique de l'énoncé est en relation avec l'opération mathématique à effectuer : « Lilou a 4 perles de moins » et le problème se résout avec 23 – 4. Construire un énoncé appartenant à la même catégorie de problèmes que le problème 4 mais pour lequel la sémantique de l'énoncé n'est pas en cohérence avec l'opération mathématique à effectuer. Le justifier.

3) Pour résoudre le problème 2, un élève décide de calculer 37 + 6.
   Quelle peut-être l'origine de cette erreur ? Proposer une aide qui pourrait permettre à l'élève de remettre en cause sa production.

4) Décrire deux procédures de résolution susceptibles d'être mises en œuvre par un élève de CP pour résoudre le problème 3.

ANNEXE (EURO MATHS CP)



QUESTIONS À RÉPONSES COURTES

PARTIE 1 : DOUZE AFFIRMATIONS : VRAI-FAUX ? JUSTIFIER !

1) ABCD est un rectangle de longueur a cm et de largeur b cm. Les nombres a et b sont deux entiers strictement supérieurs à 1.
Affirmation 1 : la mesure de l'aire du rectangle, l'unité d'aire étant le cm^2, n'est jamais un nombre premier.

VRAI

Justification :
La mesure de l'aire du rectangle vaut $a \times b$. Comme les nombres a et b sont strictement supérieurs à 1, les nombres 1, a et ab sont distincts. Le nombre $a \times b$ a donc au moins trois diviseurs distincts, par conséquent ce n'est pas un nombre premier.

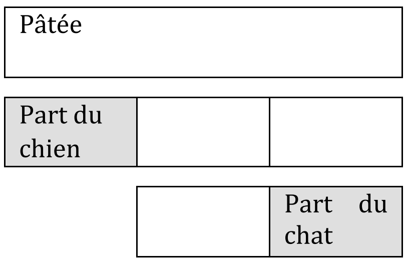
2) Le chien mange un tiers de sa pâtée. Le chat lui mange alors la moitié de ce qui reste dans la gamelle.
Affirmation : il reste $\frac{1}{6}$ de la pâtée dans la gamelle.

FAUX

Justification

Par le calcul :
Le chien mange un tiers de sa pâtée, donc après son passage il en reste les deux tiers. Après le passage du chat, il reste la moitié de ces deux tiers, soit $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ de la pâtée.

Par le schéma :



Le schéma montre que la part restante représente un tiers de la pâtée.

3) Les nombres p et q sont des nombres entiers strictement positifs.
Affirmation 3 : le nombre $\frac{105480}{5^q 2^p}$ est toujours un nombre décimal non entier.

FAUX

Justification :
Il suffit d'exhiber un contre-exemple, c'est-à-dire de proposer deux valeurs de p et q entiers strictement positifs qui donnent un nombre décimal entier :
Si $p = q = 1$, le nombre est égal à 10548 qui est un entier.

4) ABCD est un rectangle de longueur a cm et de largeur b cm. Les nombres a et b sont deux entiers strictement supérieurs à 1.
Affirmation 4 : la mesure de la diagonale du rectangle, avec le cm comme unité de longueur, est toujours un nombre rationnel.

FAUX

Justification :

Il suffit d'exhiber un contre-exemple, c'est-à-dire de proposer deux nombres de a et b entiers strictement supérieurs à 1 qui donnent un nombre non rationnel (irrationnel) :
si a = 3 et b = 2, d'après le théorème de Pythagore, le carré de la mesure de la longueur de la diagonale du rectangle est 3^2+2^2 = 13. Or, 13 n'est pas un carré parfait donc la mesure de la diagonale, $\sqrt{13}$ est un nombre irrationnel (en effet, on sait que la racine carrée d'un entier naturel n est un entier naturel si et seulement si n est un carré parfait, et que sinon, c'est un nombre irrationnel).

5) ABCD est un rectangle de longueur a cm et de largeur b cm. Les nombres a et b sont des nombres réels positifs tels que a+b=7.
Affirmation 5 : la mesure de l'aire du rectangle, l'unité d'aire étant le cm², est toujours inférieure à 10.

FAUX

Justification :

Il suffit d'exhiber un contre-exemple, c'est-à-dire de proposer deux nombres de a et b entiers vérifiant a+b=7 et tels que la mesure de l'aire du rectangle en cm² soit supérieure ou égale à 10:
Si a = 4 et b = 3, on a bien $a + b$ = 7 mais la mesure de l'aire du rectangle vaut a × b = 3 × 4 = 12, ce qui est supérieur à 10.

6) **Affirmation 6 :** tout quadrilatère non croisé dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur et qui a deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un carré.

VRAI

Justification :

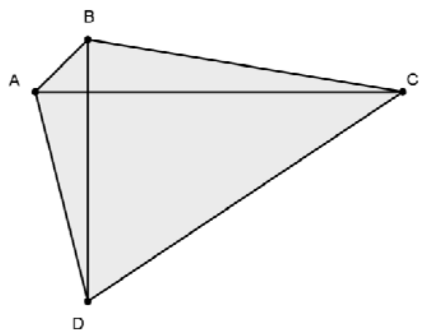
Tout quadrilatère non croisé qui a deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme. Si de plus ses diagonales sont perpendiculaires, alors c'est un losange. Enfin, si ses diagonales sont aussi de même longueur, alors c'est un carré.

7) **Affirmation 7 :** en traçant les diagonales d'un quadrilatère convexe, on partage celui-ci en quatre parties d'aires égales.

FAUX

Justification :

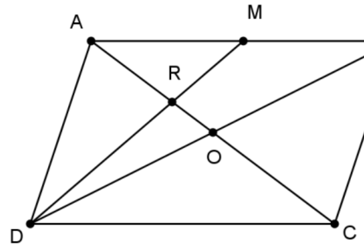
Il suffit d'exhiber un contre-exemple comme ci-dessous :



8) On considère un parallélogramme ABCD, de centre O. On appelle M le milieu de [AB] et R l'intersection de [DM] et [AC].
Affirmation 8 : RC = 2 AR.

VRAI

Justification :



O étant le centre du parallélogramme, O est milieu de [DB] et de [AC]
Dans le triangle ADB, [AO] et [DM] sont deux médianes ; par conséquent leur point d'intersection, R, est le centre de gravité du triangle Il se situe donc aux 2/3 de [AO] en partant de A.
On a : AR = 2/3 AO et AO = 1/2 AC, donc AR = 1/3 AC, par conséquent RC = 2 AR

9) **Affirmation 9 :** la mesure du volume d'un cube, l'unité de volume étant le cm^3, est toujours un nombre supérieur à la mesure de l'aire d'une face de ce cube, l'unité d'aire étant le cm^2.

FAUX

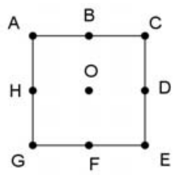
Justification :

Il suffit d'exhiber un contre-exemple. Prenons un cube dont la mesure de l'arête, en cm, est 0,1.
La mesure de l'aire, en cm^2, d'une de ses faces est 0,01, la mesure de son volume, cm^3 est 0,001
Or 0,001 < 0,01

10) On considère une configuration de 9 points ainsi constituée : les sommets d'un carré, les milieux des côtés de ce carré et le centre de ce carré. On veut tracer tous les cercles ayant pour centre un de ces neuf points et passant par au moins un autre de ces 9 points.
Affirmation 10 : le nombre de cercles que l'on peut tracer est 38.

VRAI

Justification :



Il y a 5 cercles de centre A : celui de rayon AB passant par B et H, celui de rayon AO passant par O, celui de rayon AC passant par C et G, celui de rayon AD passant par D et F, et celui de rayon AE passant par E.
Il y a de la même manière 5 cercles de centres C, E et G (autres sommets du carré).
Il y a donc au total 20 cercles dont le centre est l'un des sommets du carré.

Il y a 4 cercles de centre B : celui de rayon BA passant par A, O et C, celui de rayon BH passant par H et D, celui de rayon BF passant par F et celui de rayon BG passant par G et E.
Il y a de la même manière 4 cercles de centres D, F et H (milieux des côtés).
Il y a donc au total 16 cercles dont le centre est le milieu de l'un des côtés.
Enfin, il y a 2 cercles de centre O, centre du carré : celui de rayon OB passant par B, D, F et H, et celui de rayon OA passant par A, C, E et G.

On a ainsi passé en revue tous les centres possibles, et tous les rayons possibles.
20 + 16 + 2 = 38. Il y a donc au total 38 cercles.

11) On dépose un saladier en terre cuite vide sur une balance à affichage digital.
On constate alors que :
- quand on verse dans le saladier vide deux verres d'eau identiques pleins, la balance affiche 950 g ;
- quand on verse dans le saladier vide cinq mêmes verres d'eau identiques pleins, la balance affiche 1325 g.

Affirmation 11 : la balance affiche 2 275 g lorsque l'on verse dans le saladier vide sept verres d'eau identiques pleins.

FAUX

Justification :

2275 g = 950 g + 1325 g. 2275 g correspond donc à la masse totale des contenus des deux pesées, soit la masse de sept verres d'eau et de <u>deux</u> saladiers vides, et non d'un seul saladier. Un saladier vide ayant une masse non nulle, l'affirmation est fausse.

On indique ensuite deux méthodes permettant de déterminer ce que la balance affiche quand on verse 7 verres d'eau pleins (ce qui n'était pas nécessaire pour répondre à la question posée dans ce vrai/faux, mais qui pourrait faire l'objet d'un autre exercice).

<u>Méthode 1</u> (méthode arithmétique)

950 g est la masse du saladier et de l'eau de deux verres pleins.
1325g est la masse du saladier et de l'eau de cinq verres pleins.
La différence entre 1325 g et 950 g correspond donc à la masse de l'eau de 3 verres pleins :
1325 g – 950 g =375 g ; 375 g : 3 = 125 g.
La masse de l'eau d'un verre plein est donc 125g.
On ajoute l'eau de deux verres pleins dans le saladier en contenant déjà cinq :
1325 g + 2 × 125 g =1575 g.
La balance affiche 1575g lorsque l'on verse 7 verres pleins dans le saladier et non 2275g.

<u>Méthode 2</u> (méthode algébrique)

Notons x la mesure en gramme de la masse de l'eau contenue dans un verre plein, et y la mesure en gramme de la masse du saladier.
Le résultat des deux pesées se traduit selon le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 950 \\ 5x + y = 1325 \end{cases}$$

On soustrait membre à membre les deux équations et on obtient :
$5x - 2x = 1325 - 950$, soit $3x = 375$ et donc $x = 125$.
On détermine ensuite y en utilisant la première équation :
$2 \times 125 + y = 950$ donc $y = 950 - 2 \times 125 = 700$.
La masse de l'eau d'un verre plein est donc 125g et la masse du saladier est donc 700g.
$700\text{ g} + 7 \times 125\text{ g} = 700\text{ g} + 875\text{ g} = 1575\text{ g}$
La masse d'un saladier contenant l'eau de 7 verres pleins est donc 1575g et non 2275g.

12) On s'intéresse aux masses d'une citrouille, d'une pastèque et d'un melon.
Affirmation 12 : la pastèque pèse 5,9kg.

VRAI

Justification :

Les trois légumes pèsent ensemble 15 kg, et la citrouille et la pastèque pèsent ensemble 13 kg et 800 g.
On en déduit la masse du melon :
15 kg - (13 kg + 800 g) = 2 kg - 800 g = 1 kg + 1000 g - 800 g = 1 kg + 200 g.
Le melon pèse donc 1kg et 200g.
La pastèque et le melon pèsent ensemble 7 kg et 1 hg, soit 7 kg et 100 g.
On en déduit la masse de la pastèque :
7 kg + 100 g - (1 kg + 200 g) = 6 kg + 100 g - 200 g = 5 kg + 1000 g + 100 g - 200 g = 5 kg + 900 g.
La pastèque pèse 5,9 kg.

PARTIE 2 : DOUZE QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chaque question ou situation proposée, il peut y avoir une ou plusieurs bonnes réponses. Donner la ou les bonnes réponses.

1) Le pgcd (plus grand commun diviseur) de deux nombres entiers naturels est 54. Le plus grand des deux nombres est 810.
Quel peut être l'autre nombre ?
A : 162 **B** : 108 **C** : 405 **D** : 2 **E** : 378

Réponse : B et E.

Justification :

Méthode 1 :

Notons n un nombre possible. $810 = 54 \times 15$, donc 54 est le PGCD de 810 et n si, et seulement si, d'une part n est un multiple de 54, et d'autre part 15 et $\frac{n}{54}$ sont premiers entre eux (c'est-à-dire qu'ils ne possèdent pas de diviseur commun autre que 1).

$162 = 54 \times 3$, mais 3 et 15 ne sont pas premiers entre eux : on élimine 162 ;
$108 = 54 \times 2$, et 2 et 15 sont premiers entre eux, donc 108 est solution ;
405 n'est pas un multiple de 54, donc on l'élimine ;
2 n'est pas un multiple de 54, donc on l'élimine ;
$378 = 54 \times 7$, et 7 et 15 sont premiers entre eux, donc 378 est solution.

Il y a donc deux solutions : 108 et 378.

Méthode 2 :

Pour chacun des nombres proposés, on peut chercher le PGCD de 810 et de ce nombre et vérifier s'il est ou non égal à 54.

2) a, b, c et d désignent quatre nombres non nuls.
Le nombre $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ est égal à :
A: $\frac{4}{a+b+c+d}$ **B**: $\frac{a+b+c+d}{abcd}$ **C** : $\frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd}$ **D** : $\frac{4}{abcd}$ **E** : $\frac{4(a+b+c+d)}{abcd}$

Réponse D.

Justification :

Par réduction au même dénominateur on a, quelles que soient les valeurs (non nulles) de a, b, c, et d :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{bcd}{abcd}+\frac{acd}{abcd}+\frac{abd}{abcd}+\frac{abc}{abcd}=\frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd}$$

L'expression C convient.

On invalide les autres expressions en les testant avec des valeurs particulières de a, b, c, d :

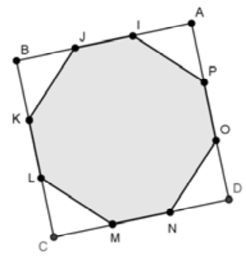
- En donnant la valeur 2 à chacun des nombres a, b, c, et d, on obtient que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ vaut alors 2, alors que A vaut $\frac{4}{8}$, B vaut $\frac{8}{16}$, D vaut $\frac{4}{16}$ et E vaut 2.
- Enfin, en donnant la valeur 1 à chacun des nombres a, b, c, et d on obtient que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ vaut alors 4, alors que E vaut 16.

L'expression C est donc la seule qui convient.

3) ABCD est un carré. Les points I, J, K, L, M, N, O, P sont tels que :
I ∈ [AB], J ∈ [AB], K ∈ [BC], L ∈ [BC], M ∈ [CD], N ∈ [CD], O ∈ [DA], P ∈ [DA]
et tels que :
AI = IJ = JB ; BK = KL = LC ; CM = MN = ND ; DO = OP = PA.
Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont **<u>FAUSSES</u>** ?

A : l'octogone IJKLMNOP est régulier ;
B : le quadrilatère IJOP est un trapèze ;
C : le quadrilatère JKNO est un rectangle ;
D : le quadrilatère IKMO est un carré ;
E : le quadrilatère BLDP est un parallélogramme.

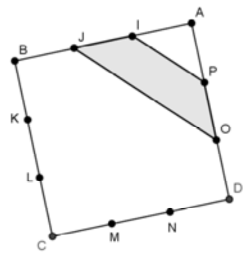
L'affirmation A est fausse.



Justification :

Le triangle BJK est isocèle en B. Ce triangle est également rectangle en B donc il n'est pas équilatéral. Par conséquent KJ≠BJ. Comme BJ=IJ, on a aussi KJ≠IJ.
L'octogone IJKLMNOP n'est pas régulier car ses côtés [KJ] et [IJ] ne sont pas de même longueur.

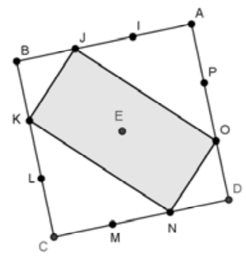
L'affirmation B est vraie.



Justification :

AI=IJ et I appartient à [AJ], donc I est le milieu de [AJ]. De même, AP=PO et P appartient à [AO] donc P est le milieu de [AO].
Dans le triangle AJO, la droite (IP) passe par les milieux de deux côtés, elle est donc parallèle au troisième côté [OJ]. Le quadrilatère IJOP est un trapèze car ses côtés [IP] et [OJ] sont parallèles.

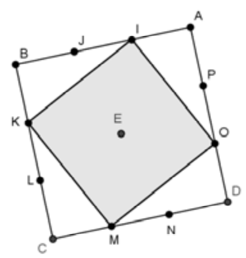
L'affirmation C est vraie.



Justification :

Appelons E le centre de symétrie du carré ABCD. Cherchons l'image J' de J par la symétrie de centre E. Par cette symétrie, l'image de B est D et l'image du côté [AB] est [CD]. Comme J est sur [AB], J' est sur [CD]. J' est donc le point de [CD] tel que [BJ] et [DJ'] sont de même longueur : c'est N.
Par un raisonnement analogue, on montre que le symétrique de K est O.
Le quadrilatère JKNO possède un centre de symétrie, c'est donc un parallélogramme.
Les triangles BJK et AJO sont rectangles et isocèles, respectivement en A et en B. Par conséquent, les angles $\widehat{AJO}$ et $\widehat{BJK}$ sont égaux à 45°.
Comme les points A, J et B sont alignés, l'angle $\widehat{AJB}$ mesure 180°.
On a donc : $\widehat{OJK} = 180° - 45° - 45° = 90°$
Le parallélogramme JKNO possède un angle droit, par conséquent c'est un rectangle.

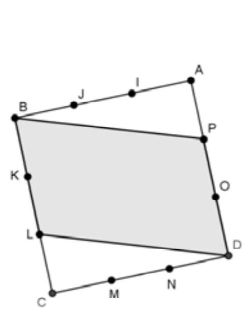
L'affirmation D est vraie.



Justification :

De la même manière que pour l'affirmation C, on montre que le quadrilatère IKMO est un rectangle.
Considérons maintenant les triangles IBK et OAI. Ils sont rectangles respectivement en B et en A, leurs côtés [BK] et [AI] d'une part, [IB] et [OA] d'autre part, sont de même longueur. Par conséquent, ils sont superposables, et leurs côtés [IK] et [IO] sont de même longueur.
Le rectangle IKMO a ses côtés consécutifs [IK] et [IO] de même longueur, c'est donc un carré.

L'affirmation E est vraie.



Justification :

Notons c la mesure de la longueur du côté du carré.
On a BL = DP $= \frac{2}{3} c$.
Les côtés [BC] et [AD] du carré sont parallèles. Comme L est sur [BC] et P est sur [AD], les côtés [BL] et [DP] du quadrilatère BLDP sont parallèles.
Ce quadrilatère non croisé possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur, par conséquent c'est un parallélogramme.

4) On considère les cinq nombres suivants :

$$a = \frac{-4 \times 10^{-2} \times (-5) \times 10^{7}}{3 \times 10^{5}} \qquad b = \frac{\left(3+\sqrt{10}\right)^2 - 6\sqrt{10}}{5} \qquad c = \frac{2 + \frac{3}{1+\frac{1}{2}}}{2+\frac{1}{6}}$$

$$d = \frac{7429}{1955} \qquad e = \frac{2-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont justes ?
A: a = b **B**: a = c **C**: a = d **D**: a = e

Seule l'affirmation D est vraie.

Justification :
Écrivons les nombres proposés sous forme de fraction irréductible :

$$a = \frac{20 \times 10^{-2+7}}{3 \times 10^{5}} = \frac{20 \times 10^{5}}{3 \times 10^{5}} = \frac{20}{3} \qquad b = \frac{9 + 6\sqrt{10} + 10 - 6\sqrt{10}}{5} = \frac{19}{5}$$

$$c = \frac{2 + \frac{3}{1+\frac{1}{2}}}{2+\frac{1}{6}} = \frac{2+\frac{3}{\frac{3}{2}}}{\frac{12}{6}+\frac{1}{6}} = \frac{2+\frac{6}{3}}{\frac{13}{6}} = \frac{4}{\frac{13}{6}} = \frac{24}{13} \qquad d = \frac{7429}{1955} = \frac{17 \times 19 \times 23}{5 \times 17 \times 23} = \frac{19}{5}$$

$$e = \frac{2-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$$

On peut maintenant aisément comparer ces nombres et affirmer que $a = e \text{ et } b = d$.

5) On considère la « division à trous » posée ci-dessous :

$$\begin{array}{cccc|ccc} 8 & \square & 5 & \square & \square & 1 & \\ \cline{5-7} & \square & \square & \square & 4 & \square & 2 \\ & & 1 & 4 & & & \end{array}$$

Dans cette division, le dividende est :
A : 21 **B** : 8356 **C** : 8456 **D** : 8454

Réponse C

Justification :
En remplaçant les points par des lettres dans les nombres de l'opération posée, on obtient (en codant avec une barre les écritures chiffrées en base dix) :
$\overline{8a5b} = \overline{c1} \times \overline{4d2} + 14$ où a, b, c, d désignent des chiffres.
Le dividende est un nombre à 4 chiffres commençant par 8 : on élimine donc la réponse A.
Le chiffre des milliers (8) s'obtient en effectuant le produit $c \times 4$, d'où $c = 2$.
On teste les propositions B, C et D restantes en effectuant la division euclidienne de 8356 , 8456 et 8454 par 21. On obtient le reste 14 seulement avec le nombre 8456.

6) On pose N = 63 042.
Parmi les affirmations ci-dessous indiquez celle(s) qui est (sont) exacte(s) :
A : N est divisible par 7. **B** : N est un multiple de 4.
C : 9 est un diviseur de N. **D** : N est divisible par 6.

L'affirmation A est vraie.

Justification:

$63042 \; = \; 63 \times 1000 + 42 = 7 \times (9 \times 1000 + 6) = \; 7 \; \times 9006$
N est bien divisible par 7.

L'affirmation B est fausse.

Justification :

Méthode 1 :

$63\,042 \; = \; 63 \times 1000 + 42.$
1000 est bien divisible par 4 mais 42 ne l'est pas donc 63 042 n'est pas divisible par 4.

Méthode 2 :

$63\,042 \; = \; 2 \times 31\,521$; or 31 521 n'est pas divisible par *2* donc *N* n'est pas divisible par 4.

Méthode 3 : Critère de divisibilité par 4.

Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres l'est. Ici 42 n'est pas divisible par 4 donc *N* n'est pas divisible par 4.

L'affirmation C est fausse.

Justification :

Méthode 1 :

$63042 \; = \; 63 \times 1000 + 42.$
63 est divisible par 9 mais 42 ne l'est pas donc *N* n'est pas divisible par 9.

Méthode 2 :

On décompose *N* en facteurs premiers : $63042 \; = 2 \times 3 \times 7 \times 19 \times 79$. *N* n'est pas divisible par 9.

Méthode 3 : Critère de divisibilité par 9.

Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres qui le composent est elle-même divisible par 9.
Ici 6 + 3 + 4 + 2 = 15 et 15 n'est pas divisible par 9 donc *N* n'est pas divisible par 9.

L'affirmation D est vraie.

Justification :

Méthode 1 :

$63\,042 \; = \; 60\,000 + 3\,000 + 42$
60 000, 3 000 et 42 sont divisibles par *6* donc *N* est divisible par 6.

Méthode 2 :

On reprend la décomposition de *N* en facteurs premiers : $63042 \; = 2 \times 3 \times 7 \times 19 \times 79$.
N est divisible par 2×3 donc par 6.

Méthode 3 : Critère de divisibilité par 6.

Un nombre est divisible par 6 si et seulement si il est divisible à la fois par deux et par trois.
Il est divisible par 2 car son dernier chiffre est pair.
Il est divisible par 3 car la somme de ses chiffres est 15 lui-même divisible par 3.

7) La somme $2x^2 + 3x^3$ peut aussi s'écrire :
A : $5x^3$ B : $5x^5$ C : $6x^5$ D : $x^2(3x + 2)$

Réponse D.

Justification :

Quelle que soit la valeur de □,
$2\,x^2 + 3\,x^3 = 2 \times\ x \times\ x + 3 \times\ x \times\ x \times\ x = x^2 \times 2 + x^2 \times 3\,x = x^2\,(2 + 3\,x)$.
Pour les autres expressions, on peut vérifier que par exemple pour $x = 2$ elles ne sont pas égales à la valeur prise par $2x^2 + 3x^3$, à savoir 8 + 24 = 32. A vaut 40, B vaut 160, et C vaut 192.

8) Le système $\begin{cases} \frac{3}{4}x + 6y = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2}x + 4y = 3 \end{cases}$

A : admet une infinité de solutions **B** : admet une solution
C : admet deux solutions **D** : n'a pas de solution

Réponse A.

Justification :

Méthode 1 : Transformer les deux équations sous la forme $y = ax + b$

Pour tous x *et* y,

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x + 6y = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2}x + 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2} \\ 4y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{24}x + \frac{9}{12} \\ y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{4} \end{cases}$$

On reconnaît les équations réduites, dans un repère du plan, de deux droites confondues. Le système possède donc une infinité de solutions.

Méthode 2 : Transformation et simplification de l'écriture des deux équations.

Pour tous x et y,

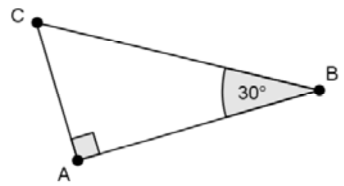
$$\begin{cases} \frac{3}{4}\mathrm{x} + 6\mathrm{y} = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2}\mathrm{x} + 4\mathrm{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\mathrm{x} + 24\mathrm{y} = 18 \\ \mathrm{x} + 8\mathrm{y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{x} + 8\mathrm{y} = 6 \\ \mathrm{x} + 8\mathrm{y} = 6 \end{cases}$$

Le système est composé de deux équations équivalentes, il possède donc une infinité de solutions.

9) Si ABC est un triangle rectangle en A avec BC = 5 cm et $\widehat{ABC} = 30°$, alors :

A : les données sont insuffisantes pour calculer AB **B** : AB = 2,5 cm
C : AB = 4,33 cm **D** : AB = 5 cm × cos 30°

Réponse D.



Justification :

Dans le triangle ABC rectangle en A,
$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$
ce qui donne $AB = BC \times \cos 30° = 5\text{ cm} \times \cos 30° \approx 4{,}33$ cm à 0,01 cm près.

Remarque :

4,33 étant seulement une valeur approchée, l'affirmation C est fausse.

10) Un entier est égal à vingt-cinq centaines et dix-huit dizaines. Son écriture en base dix est **:**
A : 2518 **B** : 25 180 **C** : 268 **D** : 2680

Réponse D.

Justification :

Vingt-cinq centaines valent 2500 et dix-huit dizaines valent 180.
Vingt-cinq centaines et dix-huit dizaines valent 2500+180, soit 2680.

11) Le nombre N dont la décomposition en produit de facteurs premiers est égale à :

$$2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 13$$

A : est divisible par 21.
B : est un multiple de 100.
C : est divisible par 55.
D : est un multiple de 640.
E : possède exactement 540 diviseurs.

Réponses : A, B, D, E

Justification :

$$2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 13 = 3 \times 7 \times 2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 13 = 21 \times 2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 13$$

N est divisible par 21.
$2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 13 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 2^3 \times 3^4 \times 7^2 \times 13 = 100 \times 2^3 \times 3^4 \times 7^2 \times 13$
N est un multiple de 100.
$2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 13$ n'est pas multiple de 11 (car sinon 11, qui est un nombre premier, apparaitrait dans cette décomposition), donc n'est pas multiple de 5×11.
N n'est pas multiple de 55.
$640 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^5 \times 5$
$N = 2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 13 = 640 \times 3^4 \times 5 \times 7^2 \times 13$
N est multiple de 640.
$N = 2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \times 13^1$. Son nombre de diviseurs est :
$(5 + 1) \times (4 + 1) \times (2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 6 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 = 540$
N possède exactement 540 diviseurs.

12) $\frac{\sqrt{16}}{8}$ est :
A : entier B : rationnel C : décimal D : irrationnel

Réponses : B et C.

Justification :

$$\frac{\sqrt{16}}{8} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

C'est un décimal, non entier (et donc C est vraie et A est fausse), et par conséquent, c'est un rationnel (et donc B est vraie et D est fausse).

EXERCICES D'APRÈS DIVERS SUJETS D'EXAMEN

EXERCICE 1

Il y a 16 paires de boules possibles, que l'on peut représenter par le tableau à double entrée suivant. La valeur dans une case indique la somme des nombres présents sur les deux boules.

		Première urne			
		2	*4*	*7*	*9*
Deuxième urne	*1*	3	5	8	10
	11	13	15	18	20
	13	15	17	20	22
	20	22	24	27	29

1) Probabilité que le résultat soit un nombre pair

On compte 8 résultats pairs sur les 16 possibles, on a donc 1 chance sur 2 d'obtenir un résultat pair. La probabilité que le résultat soit pair est $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

2) Probabilité que le résultat soit un nombre premier

Il y a 5 nombres premiers (3, 5, 13, 17, 29), la probabilité d'obtenir un résultat qui est un nombre premier est donc $\frac{5}{16}$.

3) Est-il possible que la probabilité d'obtenir un résultat multiple de 17 soit $\frac{1}{8}$?

C'est possible.
Avec les boules initiales, un seul résultat est un multiple de 17, c'est 17. Il est obtenu avec les boules marquées 4 et 13.
La probabilité d'obtenir un résultat multiple de 17 est donc $\frac{1}{16}$. Pour avoir une probabilité de $\frac{1}{8}$ (soit deux fois plus grande), il faut avoir deux résultats multiples de 17 (un autre 17 ou un 34).
On peut donc par exemple remplacer la boule marquée 7 dans l'urne 1 par une boule marquée 6, on obtiendra ainsi un et un seul nouveau résultat 17 lorsqu'elle sera associée avec la boule marquée 11 (les autres résultats induits ne sont pas des multiples de 17).

		Première urne			
		2	*4*	***6***	*9*
Deuxième urne	*1*	3	5	7	10
	11	13	15	17	20
	13	15	17	19	22
	20	22	24	26	29

On pourrait de même remplacer la boule marquée 9 par une marquée 14 pour obtenir 34 avec la boule marquée 20.
Il existe bien sûr d'autres possibilités, il faut simplement veiller à ne pas modifier les boules marquées 4 et 13 pour garder le premier résultat 17 et aussi à obtenir un et un seul nouveau multiple de 17.

4) Est-il possible que la probabilité d'obtenir un résultat multiple de 3 soit nulle ?

Ce n'est pas possible.
Six résultats sont multiples de 3 : 3, 15 (obtenu deux fois), 18, 24 et 27.
Ils sont répartis sur au moins deux lignes ou deux colonnes. En modifiant une seule boule, on n'agit que sur une seule ligne ou une seule colonne. Il est donc impossible de n'avoir aucun multiple de 3 en ne changeant que la valeur d'une seule boule.

EXERCICE 2

1) Rangement des résultats du 1er au 6e

Pour ranger les équipes, on compare les nombres de jetons verts obtenus, puis, en cas d'égalité, on compare les nombres de jetons bleus, puis rouges, puis jaunes.

1er	équipe 1	1V 3B 4J
2e	équipe 5	1V 2J
3e	équipes 4 et 6	2B 2R 2J
5e	équipe 3	2B
6e	équipe 2	2R 2J

Remarque :

L'énoncé impose la procédure ; en particulier on n'est pas autorisé ici à exprimer les scores de chaque joueur en fonction du nombre de jetons jaunes par exemple !

2) Écriture du score de chaque équipe dans un système de numération en base cinq

On considère chaque couleur comme représentant une unité : le jeton jaune pour l'unité du premier ordre, le jeton rouge pour l'unité du deuxième ordre, etc.
Puisque cinq unités d'un ordre donné sont équivalentes à une unité d'ordre supérieur et que ce processus se réitère, il est possible de construire un système en base cinq en utilisant les chiffres 0, 1 ,2 ,3 et 4. Ainsi après avoir réalisé les échanges successifs, il est possible pour chaque équipe d'écrire un nombre tel que son chiffre des unités corresponde au nombre de jetons jaunes, le chiffre juste à sa gauche le nombre de jetons rouges, le chiffre juste à la gauche de celui-ci le nombre de jetons bleus et enfin, le chiffre juste à la gauche de ce dernier le nombre de jetons verts.

Ainsi l'équipe 1 se verra attribuer le nombre $\overline{1304}^{cinq}$, l'équipe 2 le nombre $\overline{22}^{cinq}$, l'équipe 3 le nombre $\overline{200}^{cinq}$, les équipes 4 et 6 le nombre $\overline{222}^{cinq}$, l'équipe 5 le nombre $\overline{1002}^{cinq}$.
En utilisant l'algorithme de comparaison des nombres, on obtient
$\overline{1304}^{cinq} > \overline{1002}^{cinq} > \overline{222}^{cinq} > \overline{200}^{cinq} > \overline{22}^{cinq}$ ce qui permet de retrouver la réponse donnée à la question précédente.

3) Écriture en base cinq de la quantité totale de jetons obtenue en regroupant tous les jetons des six équipes.

Il nous faut calculer la somme $\overline{1304}^{cinq} + \overline{1002}^{cinq} + \overline{222}^{cinq} + \overline{222}^{cinq} + \overline{200}^{cinq} + \overline{22}^{cinq}$.
En posant l'opération et sans revenir à la base dix, on calcule pour le chiffre des unités :

$4 + 2 + 2 + 2 + 2 = \overline{22}^{cinq}$. On écrit 2 pour les unités et on retient 2 pour les unités du deuxième ordre (groupements de 5). Pour la suite on écrira en **gras les retenues**.

Puis pour le rang des groupements de cinq : $\mathbf{2} + 0 + 0 + 2 + 2 + 0 + 2 = \overline{13}^{cinq}$. On écrit 3 et on retient 1 pour les unités du troisième ordre.

Puis $\mathbf{1} + 3 + 0 + 2 + 2 + 2 = \overline{20}^{cinq}$;

$\mathbf{2} + 1 + 1 = \overline{4}^{cinq}$ (base cinq) ;

La réponse est donc $\overline{\mathbf{4032}}^{cinq}$.

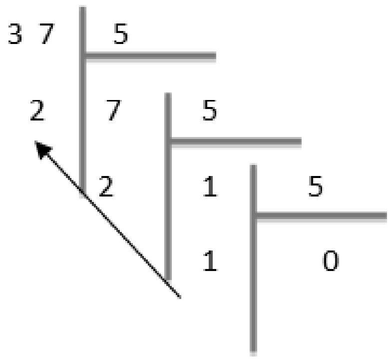
4) Quelle aurait dû être la collection de jetons en fin de partie avec 37 jaunes ?

Première méthode : divisions successives.

On peut travailler uniquement sur le nombre 37 écrit en base dix et procéder par divisions successives par 5 :

$$37 = 5 \times 7 + \mathbf{2} \text{ puis } 7 = 5 \times 1 + \mathbf{2} \text{ puis } 1 = 5 \times 0 + \mathbf{1}$$

Ce que l'on peut également présenter ainsi :



On obtient $37 = \overline{122}^{cinq}$

Deuxième méthode : utiliser les puissances de 5 ($37 = \mathbf{1} \times 5^2 + \mathbf{2} \times 5 + \mathbf{2}$*) pour l'écrire en base cinq.*

Ce que l'on peut aussi présenter dans un tableau :

5^2	5^1	5^0
1	2	2

On obtient : $37 = \overline{122}^{cinq}$.

Pour ces deux méthodes le nombre obtenu $\overline{122}^{cinq}$ correspond en termes de couleurs de jetons à : 1 jeton bleu, 2 jetons rouges, et 2 jetons jaunes.

EXERCICE 3

Méthode 1 : Technique algébrique

D'après l'énoncé, tous les badges noirs sont au même prix, notons N ce prix (en euros). Tous les badges blancs sont au même prix, notons B ce prix (en euros).

Le badge numéro 1 est composé de 3 triangles noirs et 5 triangles blancs. Son prix est donc $3N + 5B$ et il vaut 17,5 euros. Ainsi $3N + 5B = 17{,}5$.

Le badge numéro 2 est composé de 4 triangles noirs et 4 triangles blancs. Son prix est donc $4N + 4B$ et il vaut 16 euros. Ainsi $4N + 4B = 16$.

Ces deux équations donnent un système à résoudre :

$$\begin{cases} 3N + 5\,B = 17{,}5 & (1) \\ 4\,N + 4\,B = 16 & (2) \end{cases}$$

Résolution par combinaisons :

En multipliant (1) par 4 et (2) par 3 on obtient le système :

$$\begin{cases} 12\,N + 20\,B = 70 & (1) \\ 12N + 12\,B = 48 & (2) \end{cases}$$

En soustrayant (2) à (1) on obtient :

$$\begin{cases} 12N + 20\,B = 70 & (1) \\ 8\,B = 22 & (2) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} 12N + 20 \times 2{,}75 \;=\; 70 & (1) \\ B = 2{,}75 & (2) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} N = 1{,}25 & (1) \\ B = 2{,}75 & (2) \end{cases}$$

Un triangle en métal noir coûte 1,25 euro et un badge en métal blanc coûte 2,75 euros. Or le badge numéro 3 est constitué de 5 triangles en métal noir et 3 triangles en métal blanc donc son prix est $5 \times 1{,}25 + 3 \times 2{,}75 = 14{,}5$ (en euro). **Le badge numéro 3 revient à 14,5 euros.**

Résolution par substitution :

De l'équation (2) on tire B en fonction de N et on remplace B par cette valeur dans l'équation (1)

$$\begin{cases} 3N + 5 \times (4 - N) = 17{,}5 & (1) \\ B = 4 - N & (2) \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} -2N = -2{,}5 & (1) \\ B = 4 - N & (2) \end{cases}$$

Où encore

$$\begin{cases} N = 1{,}25 & (1) \\ B = 2{,}75 & (2) \end{cases}$$

Un triangle en métal noir coûte 1,25 euro et un badge en métal blanc coûte 2,75 euros. Or le badge numéro 3 est constitué de 5 triangles en métal noir et 3 triangles en métal blanc donc son prix est $5 \times 1{,}25 + 3 \times 2{,}75 = 14{,}5$ (en euro). **Le badge numéro 3 revient à 14,5 euros.**

Méthode 2 : Technique algébrique sans calculer le prix de chaque triangle

On suppose que le système donné en méthode 1 a été établi :

$$\begin{cases} 3N + 5\,B = 17{,}5 & (1) \\ 4\,N + 4\,B = 16 & (2) \end{cases}$$

La question de l'exercice est de trouver le prix du badge numéro 3 constitué de 5 triangles en métal noir et 3 triangles en métal blanc, c'est-à-dire trouver ce que vaut $5\,N + 3\,B$. Or, la combinaison $2 \times (2) - (1)$ donne directement :

$$5N + 3\,B = 2 \times 16 - 17{,}5$$

Donc $5\,N + 3\,B = 14{,}5$. **Le badge numéro 3 revient à 14,5 euros.**

Remarque :

Le choix des inconnues N (pour Noir) et B (pour Blanc) au lieu de x et y n'est pas anodin. Il est plus aisé de traduire l'énoncé et de re-contextualiser la solution lorsque les inconnues sont en lien direct avec le contexte de l'énoncé.

Méthode 3 : Technique des échanges

Le badge numéro 1 est constitué de 3 triangles noirs et 5 triangles blancs, le badge numéro 2 est constitué de 4 triangles noirs et 4 triangles blancs. Pour passer du badge numéro 1 au badge numéro 2 on substitue un triangle blanc par un triangle noir. Le coût diminue de 1,5 euro. Pour passer du badge numéro 2 au badge numéro 3, on effectue la même transformation (on échange un triangle blanc contre un triangle noir), le coût du badge numéro 3 diminuera de 1,5 euro par rapport au prix du badge numéro 2. Or $16 - 1{,}5 = 14{,}5$, donc **le badge numéro 3 revient à 14,5 euros.**

EXERCICE 4

1) Calcul de différences selon les deux techniques

Technique de Ramus

$$\begin{array}{cccccc c cccccc}
 & 1 & 2 & 8 & 5 & 6 & \rightarrow & & 1 & 9 & 8 & 9 & 9 \\
- & & 8 & 3 & 7 & 8 & \rightarrow & - & 1 & 5 & 4 & 2 & 1 \\
\hline
 & & 4 & 4 & 7 & 8 & \leftarrow & & & 4 & 4 & 7 & 8 \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 5 & \rightarrow & & & 1 & 9 & 9 & 9 \\
- & & & 8 & 4 & 7 & \rightarrow & - & & 1 & 8 & 4 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 5 & 8 & \leftarrow & & & & 1 & 5 & 8
\end{array}$$

Technique par emprunt

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 7 & {}_{1}4 & \\
 & \cancel{1} & {}_{1}2 & \cancel{8} & \cancel{5} & {}_{1}6 \\
- & & 8 & 3 & 7 & 8 \\
\hline
 & & 4 & 4 & 7 & 8
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 9 & 9 & \\
 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & {}_{1}5 \\
- & & 8 & 4 & 7 \\
\hline
 & & 1 & 5 & 8
\end{array}
$$

2) Description des techniques

La *technique de Ramus* est une soustraction posée en colonne.
Cette technique consiste à transformer par ajout le terme « du haut » de la différence afin qu'il comporte un 9 à chaque fois que le chiffre correspondant dans le terme « du bas » est strictement supérieur.
Par exemple, pour 12 856 – 8 376, il faut transformer par ajout d'un nombre les chiffres des milliers, des dizaines et des unités de façon à obtenir des « 9 » aux chiffres des milliers, des dizaines et des unités.
Cela revient donc à ajouter 7 043 au terme du haut. Ensuite, on ajoute le même nombre au terme du bas et on effectue la nouvelle soustraction posée.
On trouve la différence, que l'on recopie sous la soustraction initiale. Cette technique permet, grâce à une addition, d'effectuer une soustraction sans retenue.

La *technique par emprunt* est une soustraction posée en colonne.
On soustrait les chiffres colonne par colonne. Lorsque, pour une colonne, le calcul est impossible, on « emprunte » une unité au rang supérieur dans le nombre du haut. Le chiffre de la colonne de rang supérieur du nombre du haut se voit donc diminué d'une unité. Cela revient donc à transformer le nombre du haut dans une écriture non conventionnelle car 12 856 devient (12) milliers (7) centaines (14) dizaines (16) unités ce qui permet ainsi d'effectuer la soustraction sans passer par les « retenues ».

3) Propriétés mathématiques qui justifient ces techniques

La *technique de Ramus* consiste à transformer une soustraction en une nouvelle soustraction pour laquelle le problème des retenues ne se pose pas.
Comme on a ajouté le même nombre à chaque terme de la soustraction initiale, la différence est la même.
Cette propriété se traduit algébriquement par :

Pour tout nombre a, b et c on a
$$a - b = (a + c) - (b + c)$$

Remarque :

Cette propriété, appelée « la règle des écarts » décrit l'invariance des distances par translation.

La *technique par emprunt* repose sur la signification des chiffres dans l'écriture d'un nombre dans notre système de numération écrite (système décimal).
Cette technique est basée sur les groupements – échanges fondamentaux :
$1\ dizaine\ = 10\ unités$; $1 centaine = 10\ dizaines$…
Le nombre qui s'écrit $\overline{abc}$ en base décimale (a, b, c désignant des chiffres, a différent de 0) correspond au nombre $100a\ +\ 10b\ +\ c$. Or cette dernière écriture peut être transformée de la manière suivante :
$$100a\ +\ 10b\ +\ c = 100a\ +\ 10(b - 1)\ +\ (10\ +\ c)$$
Cette décomposition est utilisée lorsque l'on soustrait à $\overline{abc}$ un nombre dont le chiffre des unités est strictement supérieur à c.
Ce travail effectué à l'ordre des unités peut être réalisé à n'importe quel autre ordre.

EXERCICE 5

1) a) Écriture « à virgule » du nombre 3 ① 7 ② 5 ③ 9 ④

Nous écririons 0,3759 car 3 ① est égal à 3 dixièmes, 7 ② est égal à 7 centièmes, 5 ③ est égal à 5 millièmes et 9 ④ est égal à 9 dix-millièmes.

1) b) Justification de l'égalité entre 7 ① 12 ② et 8 ① 2 ②.

Stévin a raison de dire que les deux notations désignent le même nombre :

$$\frac{7}{10}+\frac{12}{100}=\frac{7}{10}+\frac{10}{100}+\frac{2}{100}=\frac{7}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}=\frac{8}{10}+\frac{2}{100}=0{,}82$$

Remarque :

Cela illustre une différence entre son système de notation des nombres décimaux et le nôtre : contrairement à nous, il doit ajouter comme « règle » que « le nombre de multitude des signes, excepté (0), n'excède jamais 9 », sans quoi un même nombre décimal admettrait plusieurs écritures distinctes.

1) c) Les savoir-faire mathématiques que Stevin suppose connus de ses lecteurs

Stévin suppose ses lecteurs familiers des fractions décimales, de leur addition et de leur simplification (par exemple $\frac{10}{10}=1$).

2) a) « $27\frac{847}{1000}$, $37\frac{675}{1000}$, $875\frac{782}{1000}$ *font ensemble[…]* $941\frac{304}{1000}$

$$27\frac{847}{1000}+37\frac{675}{1000}+875\frac{782}{1000}=939+\frac{2304}{1000}=939+\frac{2000}{1000}+\frac{304}{1000}=939+2+\frac{304}{1000}=941\frac{304}{1000}$$

2) b) La stratégie de « *démonstration* » de Stevin

Stévin cherche à vérifier la technique de calcul posé des trois nombres qu'il propose en revenant à un calcul sur les fractions décimales. Cela lui permet de retrouver le résultat de l'addition, ce qui constitue pour lui une preuve de la validité de la technique proposée.
Au sens actuel, la vérification à partir d'un exemple ne constitue pas une « démonstration ». Aujourd'hui, pour démontrer la validité du calcul posé dans le cas général il serait nécessaire d'utiliser des écritures algébriques.

Remarque :

On peut même remarquer que Stévin n'utilise pas explicitement l'exemple pour justifier les étapes de son calcul posé – auquel cas on aurait une démarche de justification d'un algorithme sur un exemple à valeur générique – mais seulement pour vérifier la réponse. Par exemple, il ne justifie pas les retenues effectuées à chaque étape du calcul en s'appuyant sur les relations entre unités : 7 ③ 5 ③ 2 ③ = 14 ③ = 1② 4③ justifie la retenue de 1 au rang des centièmes (②).

3) a) Calcul du produit de 3,07 par 0,102.

		⓪	①	②	
		3	0	7	
		1	0	2	③
		6	1	4	
	0	0	0		
3	0	7			
3	1	3	1	4	
①	②	③	④	⑤	

Ce ③ désigne le dernier ordre d'unité (millième) du multiplicateur.

3) b) Justification par le calcul algébrique

Dans cet algorithme de calcul du produit, les nombres cerclés sont additionnés et non multipliés. Dans le calcul ci-dessus, on ajoute ② (dernier ordre d'unité du multiplicande) et ③ (dernier ordre d'unité du multiplicateur pour obtenir ⑤ qui est le dernier ordre d'unité du produit obtenu. Les autres ordres s'en déduisent de proche en proche.
On peut justifier
Avec nos notations actuelles, on peut écrire : $7\times10^{-2}\ \times 2\times10^{-3}=14\ \times10^{(-2)+(-3)}=14\ \times\ 10^{-5}=1\ \times\ 10^{-4}+\ 4\times\ 10^{-5}$. On retrouve sous le chiffre 4 obtenu au dernier rang du produit le ⑤ qui correspond à 10^{-5}.
Cela se justifie par cette règle générale sur les exposants : pour tout nombre réel a et tout nombre entier n et m, on a $a^n\times a^m=a^{n+m}$.

EXERCICES D'APRÈS DIVERS SUJETS D'EXAMEN

Géométrie plane – Géométrie dans l'espace

EXERCICE 1

1) Choix de la configuration

Pour proposer une solution au problème réel, on peut choisir la configuration n° 3.

Remarques :

Aucune justification n'est attendue.
La configuration n°1 n'est pas la plus adaptée pour résoudre le problème réel car sans codage d'angle droit, on n'a pas le parallélisme de (AB) avec (CD). Ceci ne permettra pas d'appliquer le théorème de Thalès pour trouver la longueur des lames.
De la même façon, la configuration 2 ne convient pas car l'alignement des points A, O, D, de même que celui de B, O, C ne sont pas vérifiés.
La configuration 4 ne convient pas non plus car les égalités de longueurs AO=BO et OC=OD ne sont pas vérifiées.
La configuration 3 est donc la plus adaptée.

2) Calcul de la longueur des lames

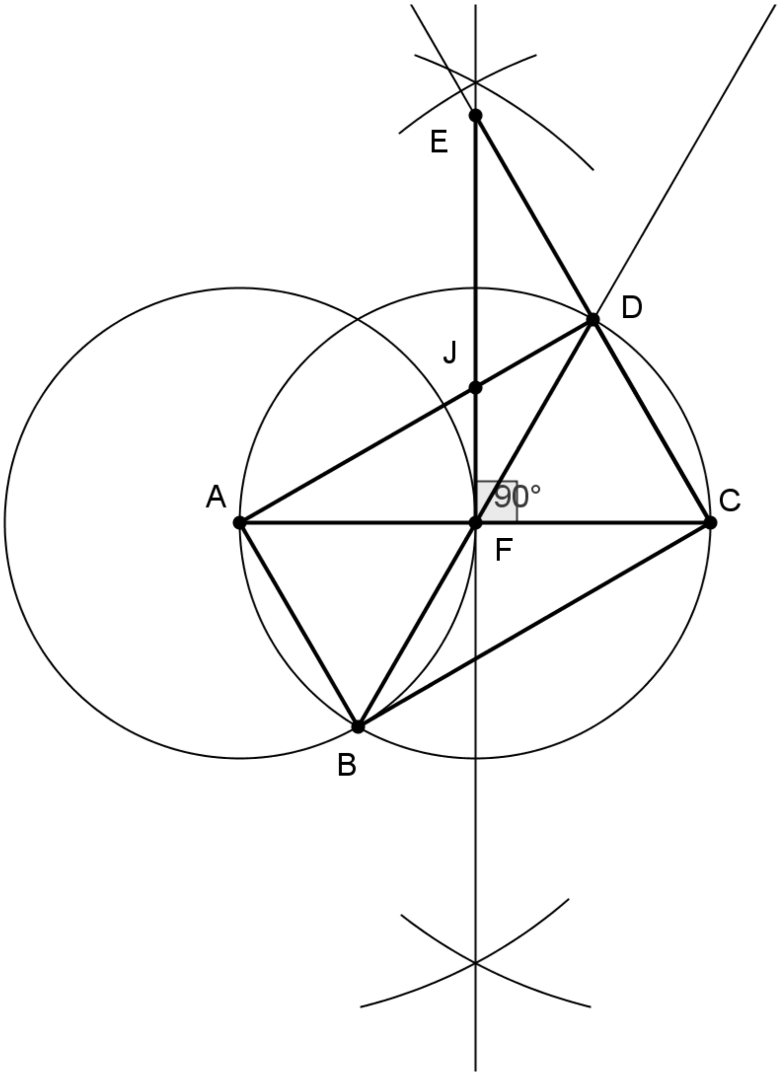
Sous les hypothèses associées à la configuration n°3, les conditions d'application du théorème de Thalès sont réunies : d'une part, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires à une même droite, elles sont donc parallèles, et d'autre part, les points A, O, D sont alignés dans cet ordre et B, O, C sont alignés dans cet ordre.
Ceci conduit alors à $\frac{\text{OD}}{\text{OA}} = \frac{\text{CD}}{\text{AB}}$.
Or AB = 14 cm, CD = 50 cm et OA = 10 cm, on obtient alors $\frac{\text{OD}}{10\text{ cm}} = \frac{50\text{ cm}}{14\text{ cm}}$
ce qui conduit à $\text{OD} = \frac{50}{14} \times 10\text{ cm} = \frac{500}{14}$ cm soit 35,7 cm arrondi au millimètre.
Pour que l'écartement de 14 cm des poignées corresponde à une ouverture de 50 cm des lames, la longueur des lames doit donc être environ égale à 35,7 cm.

EXERCICE 2

Remarque :

Il n'est pas attendu de programme de construction.
Nous donnons cependant ici des indications sur un programme de construction possible.
Tracer la médiatrice (d1) de [AC]
Placer le point F, milieu de [AC]
Tracer le triangle équilatéral ABF.
Placer le point D, distinct de B, intersection de la droite (BF) et du cercle de centre F et de rayon AF.
Tracer le segment [AD]. Il coupe (d1) en J.
Tracer la droite (CD). Elle coupe la droite (d1) en E.

La construction demandée est sur la page suivante.

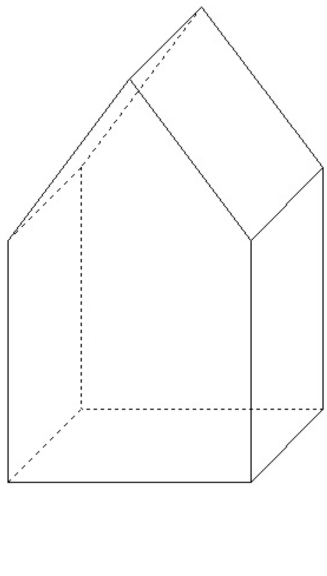


EXERCICE 3

1) Représentation en perspective cavalière du solide *S*

On complète la représentation donnée dans l'énoncé en traçant en pointillés les arêtes cachées.

On les trace en respectant la convention suivante, liée à la représentation en perspective cavalière : le parallélisme est conservé, autrement dit des arêtes parallèles dans la réalité doivent être parallèles sur la représentation.



Remarque :

On ne fait pas apparaître d'arête au niveau du recollement entre la base du prisme droit et la face « avant » du cube, car ces deux faces sont coplanaires et ne forment donc qu'une seule face du nouveau solide. Idem au niveau du recollement entre la base du prisme et la face « arrière » du cube.

2) Nombres de faces, d'arêtes et de sommets du solide *S*

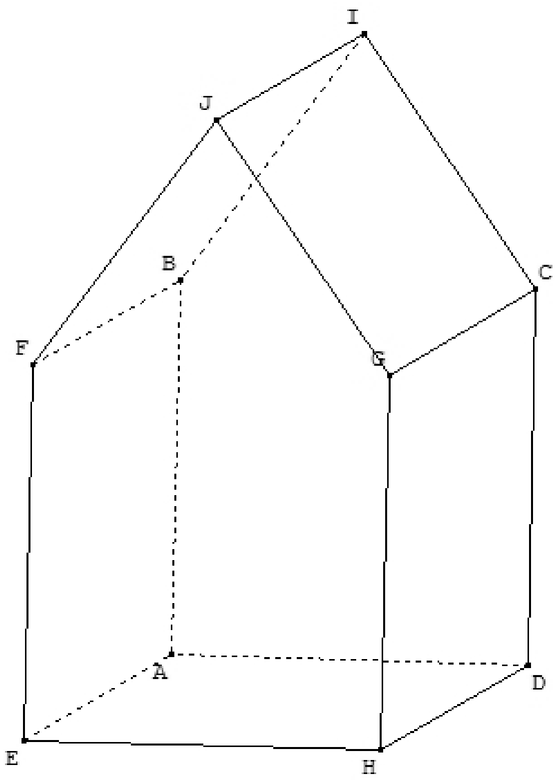
Pour cette question, on nomme les sommets du solide **S** comme indiqué ci-dessous à droite.

Nombre de faces du solide *S* : 7.

Il y a 6 faces pour le cube et 5 faces pour le prisme droit à base triangulaire, auxquelles on retranche :

- les 2 faces carrées (BFGC) supprimées lors du recollement ;
- 2 faces car les faces GFJ et EFGH d'une part, et BIC et BCDA d'autre part, ne forment qu'une seule face après recollement (voir la remarque faite dans la réponse à la question 1).

6 + 5 – 2 – 2 = 7.



Nombre d'arêtes du solide *S* : 15.

Il y a 12 arêtes pour le cube et 9 arêtes pour le prisme droit, auxquelles on retranche :

- 2×2 arêtes au niveau des jonctions en [FG] et [BC] entre faces qui deviennent coplanaires ;
- 2 arêtes ([BC] et [GF]) qui sont comptées deux fois au niveau de la jonction entre les faces adjacentes mais non coplanaires après recollement.

12 + 9 - 4 - 2 = 15.

Nombre de sommets du solide *S* : 10.

Il y a 8 sommets pour le cube, 6 sommets pour le prisme droit, auxquels on retranche 4 sommets qui sont comptés deux fois après recollement (en B, C, G et F).

8 + 6 – 4 = 10.

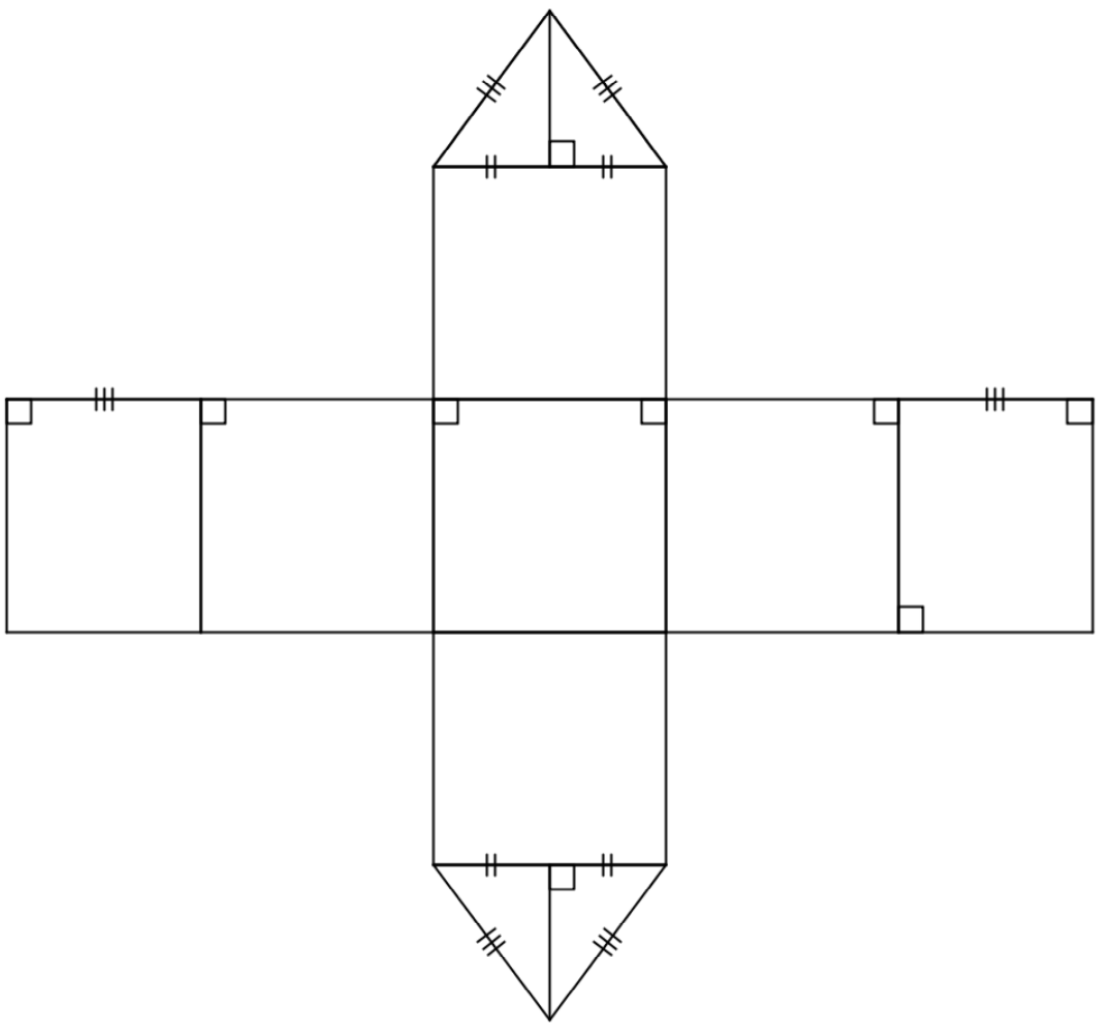
3) Un patron en vraie grandeur du solide *S* (construit avec règle graduée, compas et équerre)

Une démarche possible qui n'est pas demandée est décrite ci-dessous.

On peut commencer par tracer les trois faces carrées provenant du cube. Ce sont des carrés dont les côtés mesurent 3 cm.

On peut ensuite compléter avec les deux faces obtenues par recollement d'une face carrée du cube et d'une base triangulaire du prisme. On sait que ces bases sont des triangles isocèles dont la base mesure 3, et dont la hauteur relative à cette base (et donc la médiane, puisque les triangles sont isocèles) mesure 2 avec le cm pour unité de longueur : on peut donc construire ces triangles, en construisant leurs troisièmes sommets respectifs à partir des hauteurs associées.

On peut enfin terminer avec les deux faces rectangulaires du prisme droit qui sont intactes après le recollement des deux solides. Ce sont des rectangles dont une dimension est 3 cm, et l'autre correspond à la longueur des côtés issus des sommets principaux des triangles isocèles précédemment construits (on reporte les longueurs au compas).



EXERCICE 4

1) Nature du triangle EGC

Les trois côtés du triangle EGC sont tous des diagonales d'une face du cube. Ils ont donc tous la même longueur. Le triangle EGC est donc équilatéral.

2) Calcul de grandeurs dans le triangle EGC

a) Calcul du périmètre du triangle EGC

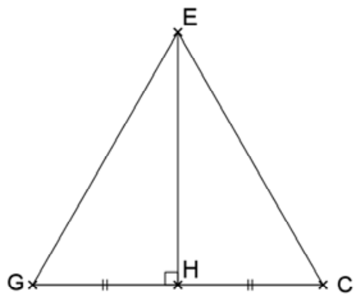
Comme on vient de le dire, EGC est un triangle équilatéral. Son périmètre est égal à 3 × EG.
Or EG est la longueur d'une diagonale d'une des faces du cube ABCDEFGH.
Les arêtes de ce cube ont pour longueur a.
Grâce à l'égalité de Pythagore, on peut en déduire que EG est égale à $a\sqrt{2}$.
Le périmètre du triangle EGC est donc égal à $3a\sqrt{2}$.

b) Calcul de l'aire du triangle EGC

On sait que l'aire du triangle EGC est égale à $\frac{1}{2}$GC × EH, où H est le pied de la hauteur issue de E dans le triangle EGC. On connaît GC, égale à $a\sqrt{2}$. Il reste donc à déterminer EH.

Par définition d'une hauteur dans un triangle, le triangle EHG est rectangle en H. L'égalité de Pythagore permet donc d'écrire :

$$\mathrm{EH}^2 = \mathrm{EG}^2 - \mathrm{GH}^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 - \mathrm{GH}^2 = 2a^2 - \mathrm{GH}^2$$



Le triangle EGC est équilatéral, donc la hauteur relative à [GC] est aussi la médiane relative à [GC] : H est donc aussi le milieu de [GC], et par conséquent :

$$\mathrm{GH} = \frac{1}{2}\mathrm{GC} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

Ainsi, $\mathrm{EH}^2 = 2a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = 2a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{3a^2}{2}$,

et donc EH = $\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}}$.

On en déduit l'aire du triangle EGC :

$$\frac{1}{2}\mathrm{GC} \times \mathrm{EH} = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$$

3) Nature du solide ECGF

ECGF est un tétraèdre car ses quatre faces sont des triangles.

Remarque :

On peut ajouter qu'il est trirectangle, au sens où trois de ses faces sont des triangles rectangles en F En effet, les triangles EFG, EFC et GFC sont rectangles car les faces EFGH, EFCD et BGFC du cube sont des carrés.

4) Volume du solide ECGFTapez une équation ici.

Dans le tétraèdre ECGF, [EF] est la hauteur relative à la base FGC.

On en déduit que le volume de ECGF est égal à $\frac{1}{3}A_{\mathrm{FGC}} \times \mathrm{EF}$ où A_{FGC} est l'aire du triangle FGC.

FGC est un triangle rectangle en F, donc $A_{\mathrm{FGC}} = \frac{1}{2} \times \mathrm{FC} \times \mathrm{FG} = \frac{1}{2}a^2$.

Le volume de ECGF est donc égal à : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}a^2 \times a = \frac{1}{6}a^3$.

5) Un patron du solide *S* construit à partir du patron du cube donné dans l'énoncé

Une démarche possible qui n'est pas demandée est décrite ci-dessous :

Étape 1 :

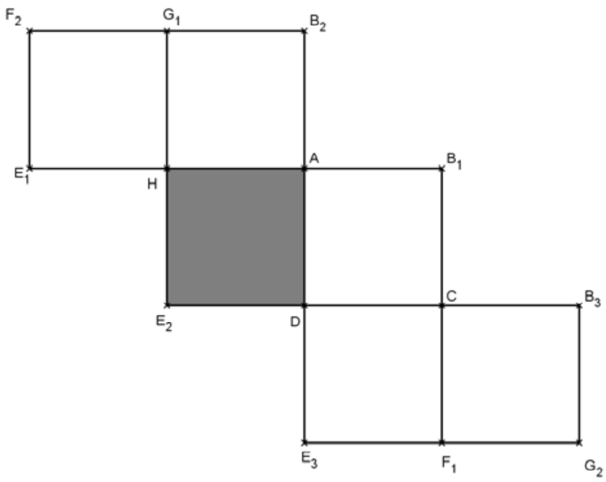
On commence par nommer les sommets de chacun des carrés du patron du cube donné dans l'énoncé, en procédant de proche en proche.

Par exemple, on voit sur la représentation en perspective cavalière que pour le cube, l'arête [AH] est partagée par les faces AHGB et AHED, donc sur l'amorce du patron où le carré AHED est déjà repéré, on peut identifier les sommets du carré qui est adjacent à ce carré au niveau du segment [AH] : ce sont les sommets G et B (que l'on place de telle sorte que l'ordre de parcours des sommets A, H, G, B soit préservé). On poursuit ainsi carré par carré, de proche en proche.

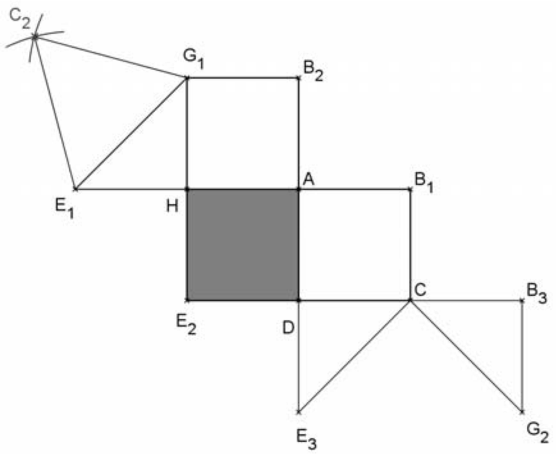
Étape 2 :

On peut ensuite énumérer les faces du solide *S*, en donnant leur nature :

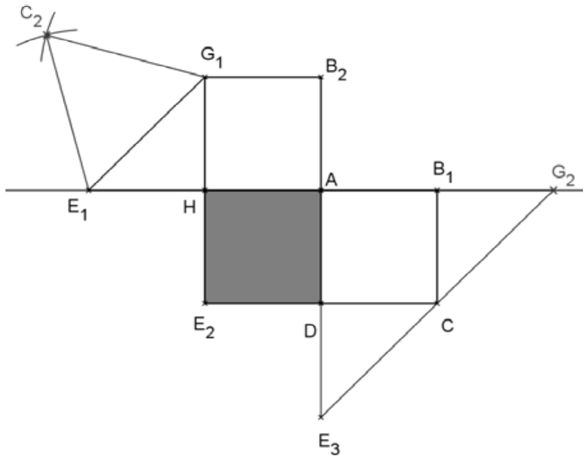
- ABCD, AHED et ABGH : trois faces carrées du cube ;
- BCG, EHG, EDC : trois faces qui sont des triangles rectangles isocèles dont les côtés de l'angle droit sont pour chacun deux côtés adjacents de faces carrées du cube (respectivement BGFC, EFGH et EDCF) ;
- enfin, la seule face qui n'est coplanaire avec aucune des faces du cube initial : la face EGC, qui, comme on l'a vu plus haut est un triangle équilatéral dont les diagonales sont des diagonales de faces du cube.



On adapte alors le patron du cube donné dans l'énoncé en le modifiant face par face, et en ajoutant la face EGC. On obtient alors dans un premier temps la figure présentée ci-dessous à gauche. On constate alors que le triangle B_3CG_2 ne partage qu'un sommet avec le reste de la figure. On modifie donc sa position, de telle sorte qu'il partage un côté avec un des autres polygones déjà tracés. On obtient alors un patron du solide S, présenté ci-dessous à droite



Patron du solide S :



6) Volume du solide *S*

Le volume du solide *S* est égal à la différence entre le volume du cube et le volume du solide ECGF calculés plus haut :

$$a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{5}{6}a^3$$

7) Aire totale du solide *S*

Pour déterminer l'aire du solide *S*, on peut s'appuyer sur l'inventaire des faces du solide réalisé ci-dessus pour en construire un patron. L'aire du solide *S* est en effet égale à la somme des aires de chacune de ses faces.

Faces ABCD, AHED et ABGH (trois faces carrées du cube) : la somme de leurs aires est égale à $3a^2$.

Faces BCG, EHG, EDC : chacune des faces a comme aire $\frac{1}{2}a^2$; la somme de leurs aires est donc égale à $\frac{3}{2}a^2$.

Face EGC : on a calculé son aire dans la question 2.b) : $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$

On en déduit l'aire totale du solide *S* :

$$3a^2 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{9+\sqrt{3}}{2}a^2.$$

PROBLÈME D'APRÈS UN CONCOURS BLANC DE LYON

CARGO À VOILE (d'après un exercice de Pisa 2012)

1) Vitesse approximative à laquelle le vent souffle sur le pont du cargo

La vitesse du cerf-volant est approximativement de 25 % supérieure à celle au niveau du pont du cargo on a donc la relation suivante :

$V_{\text{au niveau du cerf-volant}} = V_{\text{au niveau du pont}} + \frac{25}{100} \times V_{\text{au niveau du pont}} = 1{,}25 \times V_{\text{au niveau du pont}}$

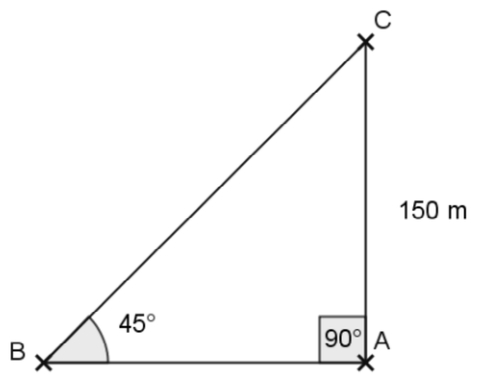
Donc 30 km/h = $1{,}25 \times V_{\text{au niveau du pont}}$ et $V_{\text{au niveau du pont}}$ = 30km/h : 1,25 = 24 km/h

2) Longueur de la corde du cerf-volant

Méthode 1 :

Par commodité, dans ce paragraphe, si [AB] est un segment, AB désignera la mesure de sa longueur en prenant le mètre comme unité de longueur.
Nommons ABC le triangle rectangle en A. Il possède un angle de 90° et un deuxième angle de 45°, son troisième angle est aussi égal à 45° (la somme des angles dans un triangle est égale à 180°). Le triangle ABC est donc isocèle et on a BA= AC = 150.
En appliquant le théorème de Pythagore dans ce triangle, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 150^2 + 150^2 = 45000$
donc $BC = \sqrt{45000} \approx 212{,}13$.
La longueur de la corde est approximativement de 212 m.

Méthode 2 :



Dans ABC rectangle en A on a : $\sin 45° = \frac{AC}{BC}$ d'où $BC = \frac{AC}{sin(45°)} = \frac{150\ m}{sin(45°)} \approx 212{,}13$ m.

3) Amortissement du cerf-volant

Chaque année la consommation pourrait être réduite de :
20% × 3 500 000 L = 700 000 L
L'économie réalisée par année serait alors de :
700 000 L × 0,42 zed/L = 294 000 zeds
Le coût du cerf-volant serait alors couvert en :
2 500 000 zeds : 294 000 zeds /année ≈ 8,5 (en année)

4) a) Diminution d'émissions de COV réalisée

La diminution d'émissions de COV réalisée sur la navigation aurait été en tonnes par année de :
20% × 1270 = 254.

En pourcentage de l'ensemble des émissions de COV générées par l'ensemble des transports cette baisse serait de :

254 : 50 400 ≈ 0,005 soit 0,5%

Remarques :

- *Il faut être vigilant dans ce genre de questions aux ensembles de référence considérés.*
- *Le pourcentage se calcule en rapport du total avant diminution (254 : 50400) et non pas après (254 : 50146).*
- *le pourcentage de diminution n'est pas tout à fait égal à la différence des pourcentages d'émissions de COV avant et après réduction (1270/50400 – 1016/50146)*

4) b) Formules pour tableur

Formules à saisir :

En B7 : = B4/B6 En B8 : = B4*0,2 En B9 : = B8/B6

Remarque :

Par exemple, 78% est un nombre dont une autre écriture est par exemple 0,78 ; ces deux nombres expriment un pourcentage. On peut choisir dans le menu Format du tableur, le type d'affichage voulu pour le nombre obtenu par calcul grâce à la formule.
Si l'on saisit les formules ci-dessous, on obtient des nombres de pourcent :

*En B7 : =B4/B6 *100*
*ou En B8 : =B4*20/100*
*ou En B9 : =B8/B6 *100*

78 est le nombre de pourcents et 78% est le pourcentage.

4) c) Retrouver le nom des gaz

Pour identifier les gaz que représentent les chiffres du premier graphique :

Méthode 1:

On peut calculer, en pourcentages par rapport au total des émissions, les émissions dues à la navigation pour chaque gaz, puis les ordonner ce qui revient à ranger les fractions.
En comparant ce rangement à celui obtenu par la lecture du graphique on obtient la correspondance :

SO2	NO2	COV	CO	CO2
5	2	3	4	1

Méthode 2 :

On peut aussi utiliser la proportionnalité pour calculer les angles correspondants aux pourcentages des émissions de chaque gaz dues à la navigation et les mettre en correspondance avec ceux indiqués sur le graphique (la somme des pourcentages doit être calculée, c'est plus long !)
Par exemple, on calcule :

$$s = \frac{78}{2150} + \frac{658}{82300} + \frac{1270}{50400} + \frac{3340}{319000} + \frac{100000}{14600000}$$

Donc $s \approx 0{,}0868$

De ce nombre la part de la navigation dans les émissions de SO2 représente :

$$\frac{\frac{78}{2150}}{0{,}0868} \approx 0{,}418 \approx 41{,}8\%$$

Le secteur angulaire correspondant a donc pour mesure $360 \times 0{,}418 \approx 150{,}5$ (en degré) (chiffre 5 de la légende).

Pour identifier les gaz que représentent les lettres :

Méthode 1 :

On peut calculer, pour chaque gaz, les pourcentages de diminution et en déduire la correspondance

SO_2	NO_2	COV	CO	CO_2
0,73%	0,16%	0,50%	0,21%	0,14%
e	b	d	c	a

Méthode 2 :

On peut plus simplement remarquer qu'une diminution des émissions en tonnes d'un gaz de 20% entraîne en pourcentage par rapport aux émissions totales une diminution du même taux pour chaque gaz et que par conséquent le rangement selon les gaz donné sur le second graphique est identique à celui donné sur le premier graphique

SO_2	NO_2	COV	CO	CO_2
5 e	2 b	3 d	4 c	1 a

PROBLÈME D'APRÈS UN CONCOURS BLANC DE NANTES

1) Population en 1901

La population de Loire Atlantique a augmenté de 95% entre 1901 et 2011.
La population de 1901 a donc été multipliée par 1,95.
La population en 1901 était donc égale à celle de 2011 divisée par 1,95.
1 296 364 : 1,95 ≈ 664 802
La population de Loire Atlantique était donc voisine de 665 000 habitants en 1901.

Remarques :

- *On ne peut pas interpréter cette question par une diminution de 95% de la population de 2011. Le taux de 95% appliqué à la population de 1901 ou 2011 ne donne pas le même résultat.*
- *Pour retrouver le coefficient de 1,95, on peut poser l'équation (P est la population en 1901) :*

$$P + P \times 0{,}95 = 1\,296\,364$$
$$P \times (1 + 0{,}95) = 1\,296\,364$$
$$P \times 1{,}95 = 1\,296\,364$$
$$P = 1\,296\,364 : 1{,}95$$

2) Population en 2050

1 282 052 : 1 050 539 ≈ 1,220375.
La population de Loire Atlantique a augmenté d'environ 22% dans la période 1990-2010.
En supposant qu'elle augmente du même pourcentage lors de chacune des périodes de 20 ans suivantes, la population en 2050 sera voisine de 1 282 052 x 1,22 x 1,22.
Il y aurait donc environ 1 910 000 habitants en Loire Atlantique en 2050.

Remarque :

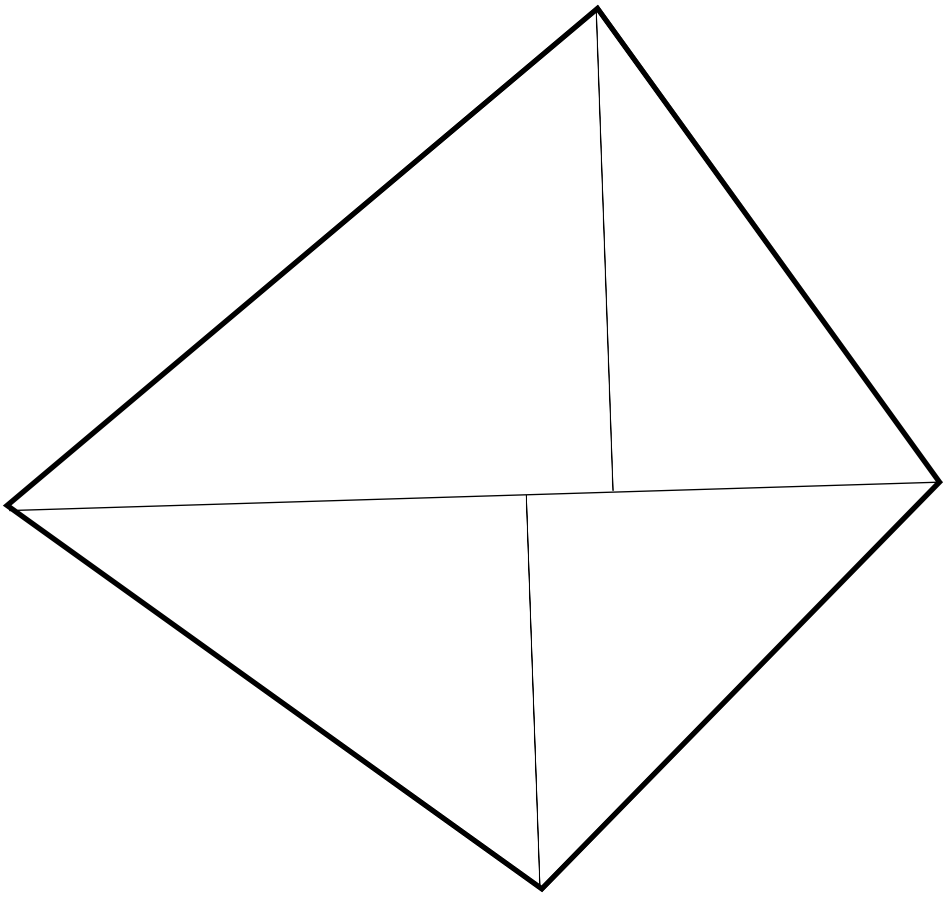
Si le pourcentage était rigoureusement égal sur chaque période, le calcul à effectuer serait 1 282 052 x (1 282 052 : 1 050 539) x (1 282 052 : 1 050 539)
Cependant, cette recherche de précision n'a pas d'intérêt car les données initiales ne sont pas certaines à l'unité près, et l'hypothèse de la conservation du pourcentage d'augmentation est elle même très fragile. Le résultat obtenu n'a de sens qu'en tant qu'ordre de grandeur.

3) Superficie du département de la Loire Atlantique

Nous montrons ci-dessous (figure 1)un tracé possible, parmi beaucoup d'autres (voir remarque et figure 2) pour approcher l'aire de la Loire Atlantique à l'aide de deux triangles de même base.
On calcule d'abord l'aire sur le dessin à partir des valeurs mesurées à la règle de la base et de la hauteur correspondante de chaque triangle.
$(12{,}3 \times 6{,}4) : 2 + (12{,}3 \times 5{,}2) : 2 = (12{,}3 \times 11{,}6) : 2 = 12{,}3 \times 5{,}8 = 71{,}34$
L'aire de la figure dessinée est donc environ 71 cm^2.
Un cm représentant 10 km, chaque centimètre carré représente un carré de 10 km de côté, soit 100 km^2.
La superficie de la Loire Atlantique est donc d'environ 7100 kilomètres carrés. *(La superficie réelle est d'environ 6815 km^2).*

Remarque :

Parmi les autres tracés possibles, on peut évoquer l'utilisation d'un quadrillage.
On obtient une valeur par défaut en dénombrant les carrés entièrement situés à l'intérieur de la surface à évaluer.
On obtient une valeur par excès en dénombrant tous les carrés contenant une partie de la surface à évaluer.
Ici, en prenant des carrés de 1 cm de côté, on obtient par défaut 40 cm^2 (soit 4000 km^2) et par excès 94 cm^2 (soit 9400 km^2).
Pour obtenir un encadrement plus fin, on réduit les dimensions des cases du quadrillage.



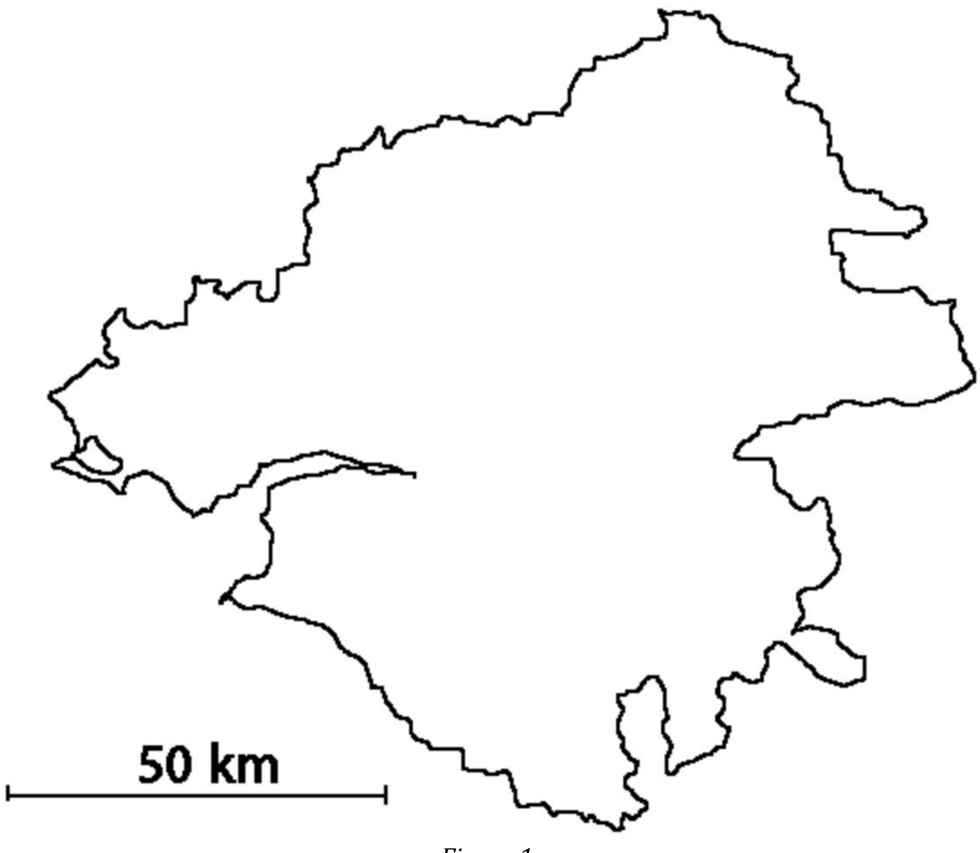


Figure 1

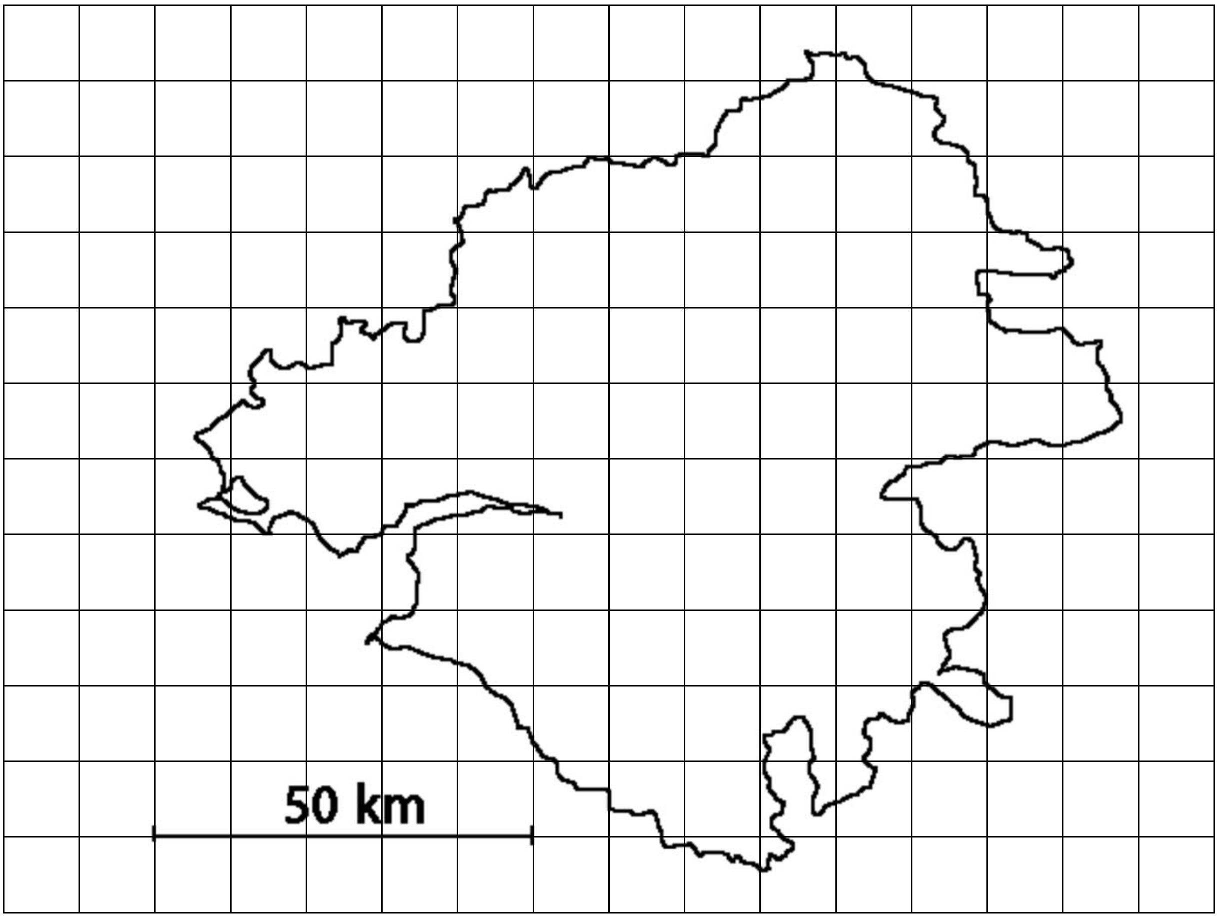


Figure 2

4) Empreinte écologique de la Loire Atlantique

La superficie nécessaire pour couvrir l'ensemble des besoins du département en 2010, calculée en hectares était d'environ 1 282 052 × 4,6 soit environ 5 900 000 ha.
Un hectare est la superficie d'un carré de 100 m de côté, soit 1 ha = 100 m × 100 m = 10 000 m².
Un km² équivaut à 1 000 m × 1 000 m = 1 000 000 m², donc 1 km² = 100 ha.
La superficie nécessaire est donc d'environ 59 000 km².

5) a) Rangement des densités de population des cinq départements des Pays de la Loire

La densité de la Loire Atlantique est proche de 200 car 200 x 6800 = 1 360 000 (sans calcul, on peut toutefois estimer que c'est la plus forte densité : les superficies sont sensiblement égales au regard de la population de ce département qui est beaucoup plus importante).
Celle du Maine et Loire est légèrement supérieure à 100 : 790 343 est supérieur à 100×7166 mais les deux nombres sont de l'ordre de 700 000 ; c'est la deuxième densité la plus importante puisque les autres sont inférieures à 100.
La densité de la Mayenne est voisine de 60 car 5 000 x 60 = 300 000.
La Sarthe et la Vendée ont des densités comprises entre 80 et 100.
90 × 6200 = 558 000, 91 × 6200 = 558 000 + 6200 = 564 200. La densité de la Sarthe est donc proche de 91.
90 × 6700 = 603 000. 5 × 6700 = 33 500. 95 × 6700 = 603 000 + 33 500 = 636 500. La densité de la Vendée est donc voisine de 95.

L'ordre croissant des densités est donc :
Mayenne, Sarthe, Vendée, Maine-et-Loire, Loire-Atlantique.

5) b) Formule à saisir en D2

On peut entrer la formule suivante : =B2/C2

5) c) Formule à saisir en D7

On peut entrer la formule suivante :

=(B2+B3+B4+B5+B6)/(C2+C3+C4+C5+C6)

Il est évidemment possible aussi d'utiliser la fonction somme, la formule est alors :

=somme(B2 :B6)/somme(C2 :C6)

On peut aussi placer en B7 la somme des populations par la formule :

=(B2+B3+B4+B5+B6)

de placer en C7 la somme des superficies par le formule :

=(C2+C3+C4+C5+C6)

et de calculer ensuite la densité à l'aide de :

=B7/C7.

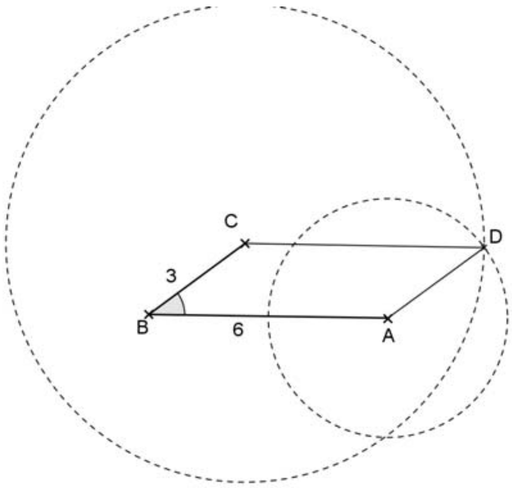
PROBLÈME D'APRÈS UN CONCOURS BLANC DE NICE

Remarque :

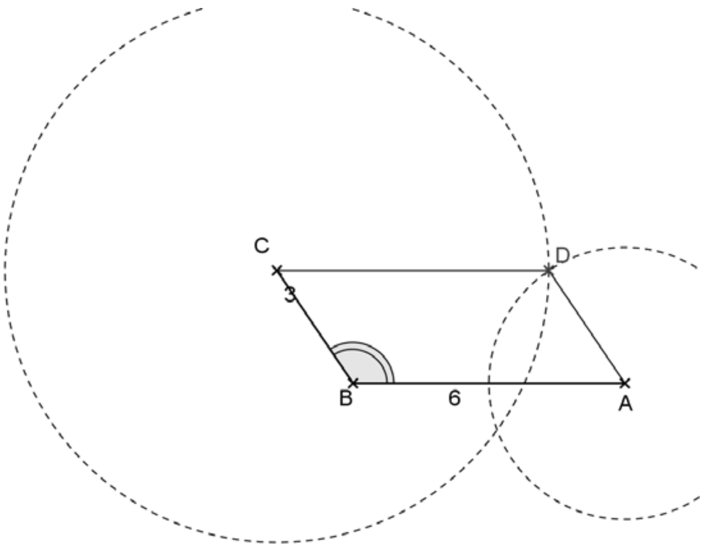
Les programmes de construction ne sont pas attendus. Nous les donnons pour faciliter la compréhension des figures construites. Les traits de construction doivent être laissés apparents.

1) Construction de deux parallélogrammes vérifiant les propriétés 1 et 2

Tracer un segment [AB] de longueur 6 cm et un segment [BC] de longueur 3 cm.
Tracer le cercle de centre A et de rayon 3 cm.
Tracer un cercle de centre C et de rayon 6 cm.
Soit D le point d'intersection des deux cercles tel que ABCD ne soit pas croisé.



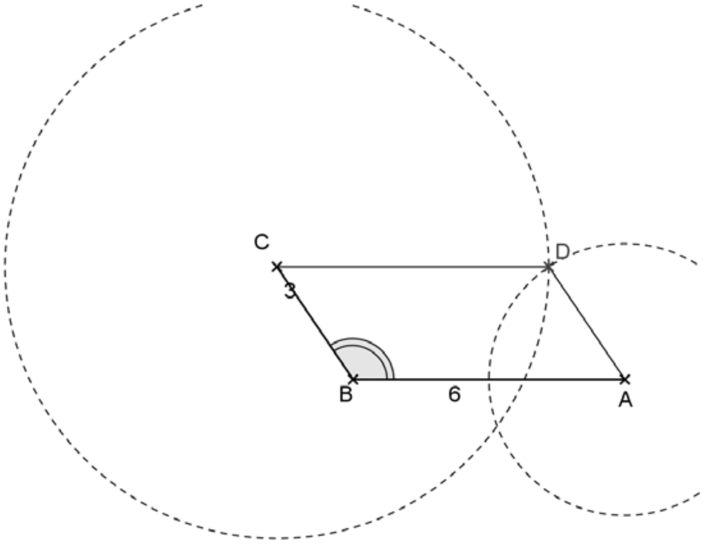
Pour obtenir un parallélogramme vérifiant les mêmes propriétés mais non superposable, on suit le programme de construction ci-dessus en modifiant l'angle $\widehat{ABC}$.



2) Construction d'un parallélogramme vérifiant les propriétés 1, 2 et 3

Tracer un segment [AB] tel que AB = 6 cm.
Tracer le cercle de centre A et de rayon 4 cm.
Tracer le cercle de centre B et de rayon 3 cm.

Le point C est l'un des deux points d'intersection de ces deux cercles. Le point D est construit comme dans la question 1.



3) Longueur de la diagonale [AC]

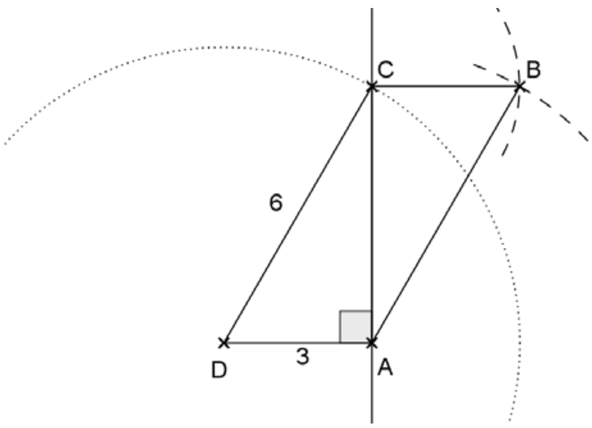
a = 3 cm et b = 9 cm.

Remarque :

Il est possible de justifier la détermination des valeurs de a et de b en utilisant l'inégalité triangulaire.
En considérant que le triangle ABC n'est pas plat, l'inégalité triangulaire donne : AB – BC < AC < AB+BC
d'où (6 – 3) cm < AC < (6+3) cm.
On obtient bien a = 3 cm et b = 9 cm.

4) Construction d'un parallélogramme vérifiant les propriétés 1 et 2 et 4

Tracer un segment [AD] tel que AD = 3 cm. Tracer la perpendiculaire à (AD) passant par A. Tracer le cercle de centre D et de rayon 6cm. Soit C l'un des points d'intersection du cercle de centre D et de rayon 6 cm et de la perpendiculaire à (AD) passant par A. Le point B se construit comme le point D dans la question 1.



Calcul de la longueur de la diagonale [AC]

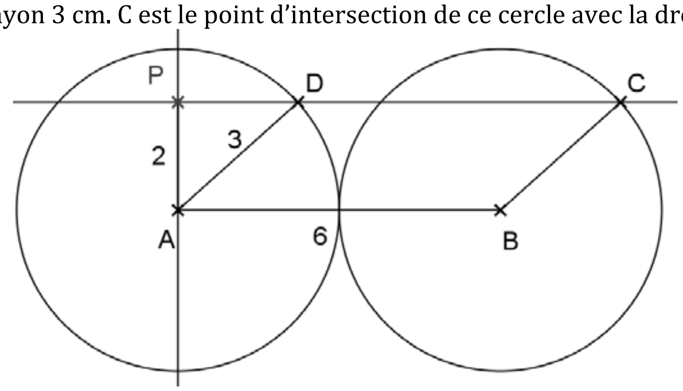
Le triangle DAC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $CD^2=AC^2+AD^2$.
On a donc $AC^2 = CD^2 - AD^2$.
Comme ABCD est un parallélogramme, ses côtés opposés ont la même longueur.
Donc CD = AB = 6cm et AD = BC = 3cm.
On en déduit que $AC^2 = 36 - 9 = 27$. Donc $AC = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$.
On a donc $AC = 3\sqrt{3}$ cm.

Calcul de l'aire du parallélogramme ABCD

DAC étant rectangle en A, l'aire de DAC est égale à $\frac{AD \times AC}{2} = \frac{3\ cm \times 3\sqrt{3}\ cm}{2}$. On a donc Aire (DCA)= $9 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm². La diagonale [AC] partage le parallélogramme en deux triangles DAC et BAC de même aire. Donc l'aire du parallélogramme ABCD est $9\sqrt{3}$ cm².

5) a) Construction d'un parallélogramme vérifiant les propriétés 1 et 2 et tel que la distance de A à (DC) est de 2 cm

Tracer un segment [AB] de 6cm puis la perpendiculaire à (AB) passant par A. Placer un point P sur cette droite tel que AP=2cm. Tracer la parallèle à (AB) passant par P. Tracer le cercle de centre A et de rayon 3 cm. Il coupe la parallèle à (AB) passant par P en deux points. Soit D l'un de ces points. Le cercle de centre B et de rayon 3 cm. C est le point d'intersection de ce cercle avec la droite (PD) qui se situe à 6 cm de D.



5) b) Calcul de l'aire du parallélogramme ABCD

On peut prendre [AB] comme base du parallélogramme. La hauteur est alors la distance de A à (CD), soit AP. L'aire de ABCD est donc AB × AP = $6\ cm \times 2\ cm$ = 12. L'aire de ABCD est 12 cm².

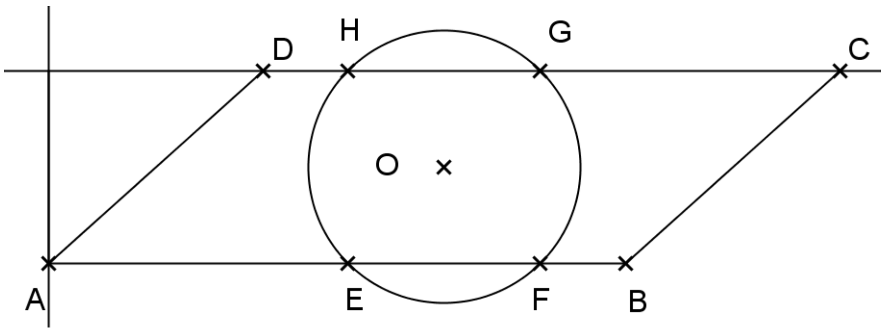
5) c) Calcul de l'aire du triangle ABO

Première méthode :

Dans le triangle ABO, on note K le pied de la hauteur issue de O et K' l'intersection de la hauteur (KO) avec (CD). Comme (OK) est perpendiculaire à (AB), et donc à (CD), la distance KK' est égale à la distance entre A et (CD). Donc KK'= 2cm.
De plus, O est le centre de symétrie du parallélogramme, donc O est le milieu de [KK']. On en déduit que OK = $\frac{KK'}{2}$ = 1 cm.
En considérant [AB] comme base du triangle, l'aire de ABO est $\frac{base \times hauteur}{2} = \frac{6\ cm \times 1\ cm}{2}$ = 3 cm².
L'aire de ABO est 3 cm².

Seconde méthode :

[AC] est une diagonale du parallélogramme ABCD.
Par conséquent les triangles ACD et ACB ont la même aire.
L'aire de ABC est donc la moitié de l'aire du parallélogramme ABCD soit $\frac{12}{2}$ cm² = 6 cm².
Les triangles ABO et CBO ont la même hauteur issue de B et leurs bases respectives [AO] et [CO] ont la même longueur puisque O est le milieu de [AC] (On peut aussi utiliser le fait qu'une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire).
Par conséquent, ABO et CBO ont la même aire. Donc l'aire de ABO est égale à la moitié de l'aire de ABC. $\frac{6}{2}$ = 3 donc **l'aire de ABO vaut 3 cm².**



5) d) Démontrer que EFGH est un carré

Première méthode :

Le point O est le centre de symétrie du parallélogramme ABCD et du cercle Γ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ cm.
G est le symétrique de E par rapport à O.
En effet, E appartient à la droite (AB) et au cercle Γ. Son symétrique par rapport à O appartient donc au symétrique par rapport à O de la droite (AB) et au symétrique du cercle Γ, c'est-à-dire à la droite (CD) et au cercle Γ. Les deux points G et H vérifient ceci.
La symétrie centrale conserve les distances. Sur la figure proposée, E est le point d'intersection de Γ avec (AB) le plus proche de A. Donc son symétrique est le point d'intersection de Γ avec (CD) le plus proche de C (car C est le symétrique de A par rapport à O) : c'est donc G.
De même, H est le symétrique de F par rapport à O).
Donc E et G (respectivement F et H) sont des points de Γ diamétralement opposés.
EFGH est un quadrilatère dont les diagonales ont donc même longueur et même milieu, c'est un rectangle.
Comme l'angle $\widehat{HEF}$ est droit, la distance entre E et H est égale à la distance entre A et la droite (CD), donc EH = 2 cm. Par ailleurs, comme le triangle EFH est rectangle en E et que FH = $2\sqrt{2}$ cm, on a, d'après le théorème de Pythagore, $EF^2=FH^2 - EH^2 = 8 - 4 = 4$.
Donc EF = 2 cm.
Le rectangle EFGH a deux côtés consécutifs de même longueur, donc EFGH est un carré.

Seconde méthode :

EFO est un triangle isocèle en O.
Soit I le pied de la hauteur issue de O. (OI) est perpendiculaire à (AB) et O est le centre du parallélogramme ABCD donc OI = $\frac{2\ cm}{2}$ = 1 cm.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EIO rectangle en I, $EI^2=EO^2-IO^2 = \sqrt{2}^2 - 1^2$.
Donc EI = 1 cm.
De même IF = 1 cm, d'où EF = 2 cm.
De même, en se plaçant dans le triangle HGO isocèle en O, avec J le pied de la hauteur issue de O, on obtient HG = 2 cm.
On a également (EF) parallèle à (HG). EFGH est donc un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est un parallélogramme.
Par ailleurs, comme EI = HJ = 1 cm, EIJH est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur. EIJH est un parallélogramme.
De plus, comme (OI) perpendiculaire à (EF), (OJ) perpendiculaire à (HG) et (EF) parallèle à (HG), (OI) et (OJ) sont deux droites parallèles qui ont un point commun. Donc I, O et J sont alignés et (IJ) est perpendiculaire à (EF).
EIJH est un parallélogramme ayant un angle droit, c'est un rectangle.
Donc (EF) est perpendiculaire à (EH).
EFGH est un parallélogramme ayant un angle droit, c'est un rectangle.
Par ailleurs, comme (EH) est perpendiculaire à (EF), EH est la distance de A à (CD) donc EH=2 cm.
Nous avons déjà montré que EF = 2 cm. EFGH est donc un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur, c'est un carré.

Remarque :

D'autres démonstrations sont possibles.

5) e) Calcul de l'aire de EFGH

Comme EFGH est un carré, son aire vaut EH^2=4 cm^2.

5) f) Calcul de l'aire *A*

Notons A l'aire de la partie grisée. L'aire du disque de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ cm se décompose en l'aire du carré EFGH et quatre fois l'aire de la partie grisée. Par conséquent, l'aire du disque s'écrit :

$\pi\sqrt{2}^2\, cm^2$ = $2\pi\, cm^2$ = 4 cm^2 + $4A$.

On en déduit que A = $(\frac{\pi}{2} - 1)$ cm^2.

Remarque :

Le fait que l'aire du disque de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ cm se décompose en l'aire du carré EFGH et quatre fois l'aire de la partie grisée se démontre par symétrie par rapport à O.

5) g) Calcul de l'aire *B*

Notons B l'aire de la partie grisée. L'aire du parallélogramme se décompose en l'aire de la partie grisée, l'aire du carré EFGH et deux fois l'aire de la partie grisée A (voir question précédente).

On obtient donc B= 12 cm^2 – 4 cm^2 – $2\times A$ = 12 cm^2 – 4 cm^2 – $2\times(\frac{\pi}{2} - 1)$ cm^2.

D'où B = $(10 - \pi)$ cm^2.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE EN GS

D'après un sujet d'examen de Lyon

1) Phase 1 : les choix faits par l'enseignant

a) Reformulation

Plusieurs points peuvent poser des problèmes de compréhension dans la consigne :

- « juste ce qu'il faut d'oiseaux » qui peut être reformulé par « ni trop, ni trop peu d'oiseau », « tu dois pouvoir placer tous les oiseaux que tu es allé chercher, il ne doit pas en manquer dans un nid et il ne doit pas t'en rester dans les mains »
- « il y ait un père et une mère oiseaux » peut être reformulé par « il doit y avoir deux oiseaux »
- « dans chaque nid »peut être reformulé par « dans tous les nids », « dans chacun des nids », « il doit y avoir deux oiseaux par nid »

b) Les oiseaux sont identiques

Si les oiseaux « pères » et mères » n'étaient pas identiques, l'élève aurait à construire deux collections de même cardinal plutôt qu'une collection dont le cardinal est le double d'une autre. La situation reviendrait alors à la construction de deux collections équipotentes à une collection donnée.

c) Intérêts des nids amovibles

Le système de nids amovibles propose deux intérêts majeurs, le maitre peut jouer sur le nombre et sur la disposition des nids :

- Intérêt lors de la dévolution du problème : tous les élèves doivent pouvoir se faire une représentation du problème. La variation du nombre de nids est l'élément essentiel qui permet au maître un ajustement, pour chaque élève, des connaissances relatives au dénombrement. Ainsi, une éventuelle non maîtrise de cette connaissance n'interfère pas dans le travail de compréhension du problème tel qu'il est posé à l'élève : chacun peut alors s'engager dans la construction d'une solution au problème posé.

- Intérêt dans l'individualisation du problème : les élèves sont regroupés autour d'une même table, si c'était toujours le même nombre et la même disposition des nids sur l'arbre, les élèves initialement spectateurs, ne feraient que reproduire ce qu'ont fait leurs prédécesseurs, ce qui « tuerait » le problème pour ces élèves-là. Il est donc impératif qu'il puisse y avoir variation du nombre et/ou de la disposition des nids sur l'arbre.

- Intérêt dans la gestion concrète de la classe : il est plus simple et plus rapide de déposer et ramasser sur une affiche des bouts de carton représentant les nids plutôt que de manipuler des affiches pour faire évoluer la situation.

- Intérêt pour l'aspect ludique de la situation : plus l'élève manipule ce qui lui apparaît comme un jeu plus son intérêt est marqué. Des petits nids et des oiseaux en papiers suscitent plus d'intérêt que des ronds et des jetons. Attention cependant à ne pas masquer les objectifs mathématiques derrière un habillage trop ludique.

2) Phase 2

a) Deux procédures efficaces

On peut envisager plusieurs procédures qui mènent à la réussite du problème :

Procédure 1 :

Compter 2 dans chaque nid mentalement ou en pointant du doigt tous les nids tour à tour : 1-2, 3-4, 5-6, …, 11-12 et se souvenir du dernier mot-nombre énoncé ;

Procédure 2 :

Dénombrer les nids puis prendre les oiseaux par couple en comptant jusqu'au nombre de nids ;

Procédure 3 :

Dénombrer les nids puis prendre une première série d'oiseaux correspondant au nombre de nids puis une deuxième série d'oiseaux ;

Procédure 4 :

Distribuer les oiseaux en deux tas comme dans un jeu de cartes en comptant 1-1, 2-2, 3-3, etc. jusqu'au nombre exact de nids.

Remarques :

Dans la procédure 1, les élèves ne connaissent pas le nombre de nids mais seulement le nombre total d'oiseaux. Dans les procédures 2, 3 et 4 les élèves connaissent le nombre de nids mais pas nécessairement le nombre total d'oiseaux, néanmoins ils établissent une relation entre le nombre de nids et l'obtention du nombre requis d'oiseaux.
La procédure qui consiste à dénombrer les nids et prendre le double de ce nombre relève du CP.

b) Bon nombre d'oiseaux sans compter les nids

Avec la procédure 1, un élève effectue le comptage du nombre d'oiseaux directement sur les nids sans garder en mémoire le nombre total de nids.

3) Phase 3

a) Deux messages oraux justes

Remarque préalable :

La modification entre la phase 2 et la phase 3 (commande orale) introduit une contrainte de formulation de la commande. L'élève doit donc exprimer de façon explicite ou implicite le nombre d'oiseaux dont il a besoin. Cela conduit, d'une part, à un effort d'explicitation de la part de l'émetteur, et, d'autre part, à un effort de décodage du message reçu pour le récepteur qui fournit les oiseaux. Les techniques de résolution du problème sont ainsi mises au jour et mieux comprises par l'ensemble des élèves. Les incompréhensions entre émetteur et récepteur peuvent générer des débats d'explicitation.

Les messages oraux pourraient être :

- Il faut 12 oiseaux ;
- Il y a 6 nids, il faut 6 oiseaux et encore 6 oiseaux ;
- Il faut 2 fois 6 oiseaux ;
- Il en faut 6 et 6 ;
- Il faut 6 pères et 6 mères oiseaux ;
- Il faut 6 couples d'oiseaux.

b) Synthèse en phase 3

Remarque préalable :

L'objectif de la séquence est la construction d'une collection dont le cardinal est le double d'une autre. Il parait essentiel que le maître conduise les élèves à percevoir cette notion de double en insistant sur le lien entre le nombre de nids initial et la façon dont le nombre d'oiseaux peut être exprimé. La synthèse doit donc *porter d'une part sur la façon de trouver le bon nombre d'oiseaux, mais également sur la manière d'exprimer ce nombre et sur le lien entre le nombre de nids et le nombre d'oiseaux.*

Synthèse possible :

- « Si j'ai 6 nids, je dois aller chercher 6 et encore 6 oiseaux, c'est-à-dire 12 oiseaux »
- « Si j'ai 6 nids, je dois aller chercher deux fois 6 oiseaux, c'est-à-dire 12 oiseaux ».

4) Variables de la situation et impact de variation

On peut citer plusieurs variables dont la variation a un impact sur les procédures de résolution :

- Le nombre de nids : ce nombre doit rester dans un domaine adapté à l'élève, s'il est très petit (1 ou 2) l'élève n'a pas besoin de dénombrer pour obtenir le bon résultat. S'il est trop grand l'élève ne pourra pas dénombrer.
- Les nids sont déplaçables ou non : s'ils sont déplaçables, l'élève peut les prendre avec lui et faire correspondre à chaque nid un couple d'oiseaux, s'ils ne sont pas déplaçable l'élève doit trouver un moyen de mémoriser le nombre d'oiseaux à aller chercher.
- La disposition des nids dans l'arbre : si les nids sont « bien rangés » (par exemple en deux lignes de 3 nids) l'élève peut utiliser une procédure basée sur reconnaissance visuelle plutôt que sur un dénombrement.
- L'éloignement des oiseaux : si les nids et les oiseaux sont ensemble dans le champ visuel de l'élève, ce dernier peut faire des allers-retours visuels pour trouver le bon nombre d'oiseau sans utiliser le dénombrement.
- Les élèves ont-ils à aller chercher seul les oiseaux ou doivent-ils donner un message à un autre élève : la formulation d'une commande oblige l'élève à communiquer soit le nombre d'oiseau désiré (par exemple « 12 oiseaux », soit la façon d'avoir le nombre d'oiseau désiré (par exemple « 6 oiseaux et encore 6 oiseaux »).
- La commande doit se faire à l'oral et pas à l'écrit : par écrit, l'élève pourrait dessiner les couples d'oiseaux souhaités ou encore les nids à remplir…

PROBLÈMES DE PARTAGE EN GS

D'après un sujet d'examen de Grenoble

1) Procédures de partage mises en œuvre.

a) Procédures individuelles

On désigne ainsi les procédures où chaque enfant se sert sans tenir compte de son vis-à-vis : c'est le cas du groupe 1. La distribution est effectuée un à un.

b) Procédures individuelles dépendantes

On désigne ainsi les procédures dans lesquelles chaque enfant se sert sans tenir compte de son vis à vis, mais où le duo compare les collections entre elles. Il s'agit des groupes 6 et 7.
Pour ces deux groupes, le moyen de contrôle de l'équipotence des collections est spatial (représentation dans l'espace d'une correspondance paquets à paquets : paquets de deux pour le groupe 7, paquets de trois pour le groupe 6). La contrainte de place amène le groupe 7 à substituer à cette représentation, l'égalité des hauteurs.

c) Procédures duelles synchrones

Nous désignons ainsi les procédures où les enfants s'assurent de l'équipotence des collections en utilisant la synchronisation de leurs gestes. Il s'agit des groupes 2 (placement des objets), 3 et 5 (pour le comptage).

d) Procédures duelles alternées

On désigne ainsi les procédures où les enfants se servent à tour de rôle. Il s'agit des groupes 2, 4 et 5. Les groupes 2 et 5 effectuent une distribution un à un, alors que le groupe 4 effectue une distribution par paquets de 2.

2) Moyens de contrôle

Les enfants s'assurent de l'équipotence des collections obtenues lors du partage soit par une représentation temporelle (simultanéité ou alternance), soit par une représentation spatiale (paquets ou objets mis face à face).
Seul le groupe 1 n'utilise aucune de ces représentations et n'a ainsi aucun moyen de contrôle.
En outre, le groupe 5 s'assure de l'équipotence par comptage (simultané).
En revanche, même si le groupe 4 utilise comme moyen de contrôle la représentation spatiale des sous collections, ce moyen ne semble pas avoir de sens pour lui, puisqu'il ne l'utilise pas pour « interroger » son travail.

3) Analyse du résultat du groupe 4.

Les enfants appliquent la procédure rappelée lors du bilan, en procédant chacun à leur tour, mais en prenant deux objets à la fois. Le nombre de paires d'objets n'étant pas multiple de deux (15 paires en tout), une paire d'objets est attribuée en plus à l'un des deux alignements. On peut supposer que chaque alignement représente respectivement la quantité attribuée aux petits et aux grands, le partage obtenu n'est pas équitable. Le travail s'arrête à la mise en ligne des paires d'objets, sans aller jusqu'à contrôler l'équipotence des deux collections.

4) Variables didactiques

- Une première variable didactique est, bien entendu, la taille du nombre. Un nombre d'objets trop petit (une dizaine) permettrait un partage « à l'œil » (subitizing), alors qu'un nombre d'objets trop grand (une centaine) ne permet pas une représentation spatiale simple de la correspondance, comme on le voit avec le groupe 7, seul groupe à avoir eu une soixantaine d'objets.
- Une deuxième variable didactique est la taille des objets qui permet ou non une représentation spatiale de la correspondance. On en voit encore une illustration avec le groupe 7 : c'est parce que la taille des

godets est trop grande (relativement à leur nombre) que les enfants sont obligés d'avoir recours à l'empilement.

- Une troisième variable didactique, non négligeable, est la nature du nombre d'objets (bien entendu, nombre pair). Si ce nombre n'est ni multiple de 3, ni multiple de 4, ni de 5, les procédures de répartition par paquets peuvent être mises en défaut comme le montre l'exemple du groupe 4.

5) La situation des gommettes[1]

Remarque :

On suppose que les gommettes sont données en vrac, et non pas sur des planches de gommettes déjà organisées.

a) Deux procédures possibles pour la phase 1.

Plusieurs procédures sont envisageables dont deux seulement sont demandées.

Procédure 1 :

L'élève dispose les gommettes une à une de chaque côté du trait. Ensuite il contrôle l'équipotence des deux collections. Pour cela il peut compter le nombre de gommettes de chaque côté et comparer les nombres obtenus (comptine ou bande numérique)

Procédure 1 bis :

L'élève dispose les gommettes une à une de chaque côté du trait. Ensuite il contrôle l'équipotence des deux collections. Pour cela il peut faire une correspondance terme à terme en organisant spatialement les gommettes de chaque collection.

Procédure 1 ter :

L'élève dispose les gommettes une à une de chaque côté du trait. Ensuite il contrôle l'équipotence des deux collections. Pour cela il peut organiser chacune des collections sous forme de constellation.

Procédure 2 : (Variante de la procédure 1)

L'élève dispose les gommettes de chaque côté du trait deux par deux, ou trois par trois… puis contrôle de l'équipotence selon l'une des procédures décrites ci-dessus.

Procédure 3 :

L'élève dénombre par comptage la collection complète, puis il s'appuie sur sa connaissance des doubles pour déterminer le nombre de gommettes à coller de chaque côté.

b) Deux procédures possibles pour la phase 2 - émetteurs

Plusieurs procédures sont envisageables dont deux seulement sont demandées.

Procédure 1 : Par essais-ajustements.

L'élève place le fil de façon perceptive, puis dénombre par comptage chacune des deux collections. Il compare les deux nombres obtenus (comptine, file numérique, etc.). Si les deux nombres sont égaux, il a fini. Sinon, il déplace la ficelle et recommence à dénombrer…

Procédure 2 :

L'élève dénombre par comptage la collection complète, puis il s'appuie sur sa connaissance des doubles pour déterminer le nombre de gommettes de chaque côté du fil. Il compte ce nombre de gommettes et place le fil.

---

[1] Création d'après « Les gommettes » ; ERMEL GS ; pp 120-135

Procédure 3 :

Correspondance terme à terme en partant de chacun des deux bouts. Cette correspondance en utilisant les doigts s'arrête quand les deux doigts se rencontrent. On place le fil entre les deux dernières gommettes.

Procédure 4 : Essais-ajustement prenant appui sur une estimation de la quantité.

L'élève estime le nombre correspondant à la moitié des gommettes, par exemple 4. Il compte 4 gommettes sur la carte, il compte la quantité de gommettes restantes. S'il y en a 4, il place le fil. Sinon, il ajuste à la hausse ou à la baisse son estimation initiale et recommence.

Procédure 4 bis : Essais-ajustement prenant appui sur une estimation de la quantité.

L'élève estime le nombre correspondant à la moitié des gommettes, par exemple 4. Il compte, avec ses deux index, 4 gommettes de chaque côté de la carte. S'il reste des gommettes non comptées, il ajuste son estimation initiale à la hausse, et il recommence. S'il n'y a pas assez de gommettes pour compter 4, il ajuste à la baisse, et il recommence. Sinon, il place le fil.

Les moyens de validations :

- Dénombrement par comptage des gommettes de chaque côté du trait et comparaison des nombres obtenus.
- Contrôle par synchronisation des gestes.
- Par pliage si le matériel le permet (gommettes en ligne).

c) Intérêt

Intérêt 1 :

Chaque élève du binôme émetteur peut être en activité lors de la phase de recherche d'un découpage possible. Quand ils se sont mis d'accord sur un partage, une seule bande est découpée.

Intérêt 2 :

La bande non découpée peut servir de bande témoin pour valider la production des groupes récepteurs.

d) Évaluation.

L'évaluation individuelle porte sur l'activité réalisée. Elle peut donc se composer de deux parties (reprenant les deux aspects de l'activité) :

1- Compléter une bande dont on connaît la moitié. Le nombre de gommettes proposé initialement sur la moitié de bande est compris entre 3 et 10.
2- Trouver une ligne de partage, sur une bande comprenant entre 6 et 20 gommettes, en deux collections équipotentes.

Remarque :

Le nombre de gommettes proposé ainsi que la disposition spatiale de celles-ci sont des éléments importants de différenciation pour l'évaluation.

LA MULTIPLICATION D'UN NOMBRE ENTIER PAR UN NOMBRE À UN CHIFFRE : ÉTUDE D'EXTRAITS DE MANUELS

D'après un sujet d'examen de Lyon

1) À propos de l'annexe 1 « Tous en Maths ! » CE 2 Nathan 2012 et de l'annexe 2 « J'apprends les maths » CE2 Retz 2010

a) Description de la seconde technique de multiplication (celle employée au milieu par Nora dans l'annexe 1)

Chaque chiffre est multiplié par 4[1], pour le chiffre des unités, on obtient un nombre d'unités (qui pourra comporter deux chiffres) ; pour le chiffre des dizaines, on obtient un nombre de dizaines ; etc.
La diagonale de chaque carré sépare le chiffre des unités et celui des dizaines du résultat (16 unités c'est 1 dizaine et 6 unités, de même, 5 × 4 donne 20 séparées en 2 et 0, etc.).
Pour finir il suffit d'ajouter les unités de même rang ensemble (en suivant les diagonales). En effet la disposition proposée fait apparaître que 5 dizaines × 4 donne 20 dizaines soit 2 centaines et 0 dizaine (chiffres qui se trouvent dans les demi-cases en diagonale).

b) Comparaison des trois techniques proposées

Il y a d'une part deux techniques posées (annexe 2) et une technique en ligne (annexe 3).
Il faut comprendre le rôle des différents signes présents : diagonales, tracés, flèches, cases et ronds, et faire le lien entre le matériel de numération représenté (valises, boites, jetons) et les écritures décomposées des nombres.

Similitudes :

Au niveau de la justification de la technique : les trois techniques s'appuient sur la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et consistent à effectuer la multiplication d'un nombre décomposé suivant les puissances de 10 : $(1000 + 3 \times 100 + 5 \times 10 + 4) \times 4$ dans les deux premiers cas et $(100 + 6 \times 10 + 8) \times 4$ dans le troisième.
Au niveau des supports pour la mise en œuvre de la technique : dans les deux premiers cas, des « retenues » apparaissent placées à des endroits bien précis : dans la partie gauche de chaque case partagée par une diagonale pour Nora, dans les ronds au-dessus de l'opération posée pour Max.

Différences :

Au niveau de la mise en œuvre de la technique : Nora peut faire les multiplications dans l'ordre qu'elle veut car les additions sont gérées après que toutes les multiplications ont été effectuées. Max doit les effectuer de droite à gauche, tandis que la technique en ligne amène à effectuer les calculs de gauche à droite , en commençant par multiplier les centaines ,puis les dizaines, puis les unités.. De ce fait, la technique en ligne conduit à calculer l'addition 400 + 240 + 32 sans calcul de retenues au contraire des autres techniques.

c) Les raisons du choix des auteurs de « J'apprends les maths »

On peut voir deux raisons à ce choix : le lien entre calcul en ligne et calcul posé, l'importance accordée au calcul mental par les auteurs de ce manuel.
Il s'agit d'une multiplication d'un nombre entier de trois chiffres par un nombre à un chiffre. Elle est effectuée en décomposant le premier nombre en centaines, dizaines, unités, décomposition représentée par le matériel. Chaque unité de numération est multipliée séparément et les résultats obtenus sont ajoutés. Mis à part le fait que les calculs s'effectuent de gauche à droite, cette méthode est similaire à celle de la multiplication posée et peut aider à en comprendre la signification.
Pour les auteurs, cette méthode est importante car c'est celle qui est privilégiée en calcul mental. Il convient donc de l'exposer aux élèves.

[1] Cette expression est un abus de langage. Il faudrait dire : « chaque nombre désigné par le chiffre est multiplié par 4 » car un chiffre est un symbole permettant d'écrire des nombres et les opérations portent sur les nombres.

2) À propos des annexes 3 « Euro Maths » CE1 Hatier 2012 et 4 « livre du maitre Cap Maths CE1 » Hatier 2009

Les deux manuels proposent des approches différentes de la multiplication.

a) Description des deux approches

Annexe 3 : (manuel de l'élève) :

Introduction de la multiplication d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre (37 × 5).
Les auteurs donnent deux supports pour obtenir le résultat de la multiplication ; ils amènent la multiplication d'un nombre à deux chiffres à l'aide du calcul de l'aire d'un rectangle (dans le sens d'une mesure-produit) découpé en deux rectangles bien choisis (dont les aires sont plus faciles à calculer) ou du dénombrement de carrés dans un rectangle, donc en décomposant « 37 » en « 30 et 7 ».
La présentation dans la seconde colonne de la même multiplication cette fois-ci posée est donnée sans commentaire particulier hormis : « je fais comme Paco ».
L'élève doit identifier le lien entre les calculs qui apparaissent dans la multiplication posée et ceux présents dans le rectangle.
L'ordre des calculs n'est pas le même et la disposition des nombres dans un calcul diffère (30 × 5 et 7 × 5 dans les rectangles et 5 × 7 et 5 × 30.
Une question sur la mise en évidence de la commutativité est proposée : « quel est le résultat de 5 × 37 ? ».
La réponse ne pouvant s'obtenir qu'en observant le rectangle plutôt qu'à l'aide de la multiplication posée.

Annexe 4 : (livre du maitre) :

Un contexte présenté dans une histoire permet de renforcer le sens de la multiplication (en lien avec l'addition réitérée) et d'inciter à utiliser la décomposition des nombres puisque le contenu chaque enveloppe est présenté en séparant dizaines et unités. Il permet d'aborder différentes procédures pour trouver « combien de perles dans le trésor ? » correspondant à la multiplication 87 × 5.
Ensuite une présentation de la multiplication posée est amenée par le professeur en s'appuyant d'abord sur l'addition itérée. La verbalisation permet de voir que l'on est amené à calculer 7 + 7 + 7 + 7 + 7 ce qui revient à « faire 5 fois 7 ».
L'appui sur la numération et la décomposition en puissance de 10 intervient pour comprendre le rôle de la boite à retenue. On calcule le nombre de dizaines en tenant compte des dizaines déjà retenues.

b) Différences entre les deux techniques

La principale différence se situe au niveau des sens de la multiplication privilégiée :

Le manuel Euro Maths s'appuie sur une configuration rectangulaire, il présente la multiplication dans le **sens mesure produit** sur un quadrillage 37 x 5 ; elle apparait comme l'outil permettant de calculer la mesure de l'aire d'un rectangle de 37 sur 5 (nombre de carrés par ligne multiplié par le nombre de carrés par colonne) somme des aires de deux rectangles de 30 sur 5 et de 7 sur 5. La commutativité est ici mise en évidence à différents moments.

Le manuel CAP Maths s'appuie sur un **problème de proportionnalité simple** : on connait la valeur d'une unité (1 enveloppe contient 87 perles) et on cherche la valeur de 5 unités. La multiplication apparait comme une addition réitérée 87 + 87 + 87 + 87 + 87. Il est plus difficile de mettre en évidence la commutativité dans ce contexte.

c) Comparaison des deux techniques

Euro Maths Sens mesure produit	CAP Maths Sens addition réitérée
La mise en évidence des propriétés de la multiplication ou non	
• Permet de mettre en évidence la commutativité et donc de se défaire du problème de l'ordre de l'écriture des nombres du produit • Permet de mettre en évidence la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.	• La mise en évidence de la commutativité n'est pas « évidente » pour concevoir qu'il y a autant de billes dans 58 paquets de 3 billes que dans 3 paquets de 58 billes. • Permet de mettre en évidence la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

<table>
<tr><td colspan="2">Le prolongement de la technique opératoire à la multiplication de deux nombres décimaux.</td></tr>
<tr><td>• Peut permettre d'illustrer la multiplication d'un entier par un décimal mais aussi d'un décimal par un décimal
• Permet de montrer que la multiplication n'agrandit pas toujours (0,7 × 8 < 8 et 0,7 × 0,8 < 0,7 ; 0,7 × 0,8 < 0,8)</td><td>• Autorise le prolongement à la multiplication d'un entier par un décimal (3 × 4,7 = 4,7 + 4,7 + 4,7)
• Ne permet le prolongement à la multiplication d'un décimal par un décimal
• Avec l'addition réitérée, la multiplication est une opération qui agrandit « toujours ».</td></tr>
</table>

3) À l'issue de cette étude du dossier en considérant les programmes (annexe 5)

Trois compétences importantes à faire acquérir aux élèves avant d'aborder la multiplication posée

- Savoir multiplier par 10, 100, 1000 : puisque la décomposition d'un des facteurs est celle qui correspond à la décomposition polynomiale du nombre (parfois désignée par désignation canonique) selon les puissances de 10. Dans les produits intermédiaires, ces facteurs seront donc présents.
- Connaitre les tables de multiplication (au moins les premières) ou être capable de les reconstruire rapidement : puisque dans la mise en œuvre de la technique de la multiplication, ce sont des produits d'un nombre à un chiffre par un nombre à un chiffre qui seront utilisés.
- Avoir des connaissances en numération : connaitre la valeur des chiffres dans l'écriture des nombres et savoir qu'un groupement de dix unités donne une dizaine, qu'un groupement de dix dizaines donne une centaine.
- Savoir décomposer un nombre sous sa décomposition canonique.

GRANDEURS ET MESURES
ANNALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES
ANALYSES DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

EXERCICE 1

Élève 1

La procédure n'est pas recevable et la réponse donnée est fausse.
L'élève effectue la somme des deux données numériques de l'énoncé : il ajoute les heures de départ et d'arrivée, en les interprétant de manière erronée comme des durées.

Élève 2

La procédure n'est pas recevable mais la réponse donnée est numériquement correcte.
L'élève calcule une différence entre deux instants. Il sait probablement qu'il "doit calculer une différence entre deux heures" (« *l'heure d'arrivée moins l'heure de départ* »), et il est possible qu'en pratique, il ait effectué la différence entre "la plus grande heure et la plus petite", soit 19h - 7h.
Le choix des variables numériques dans l'énoncé (heures de départ et d'arrivée) fait que cet élève, avec un mauvais raisonnement, donne une réponse correcte. Cela n'aurait pas été le cas, par exemple, si le bateau était arrivé à 6h.

Élève 3

Cet élève dessine 13 barres et conclut que la durée du trajet est de 13 heures. Sa réponse est donc fausse.
On peut penser qu'il a dessiné ces barres en énonçant `` 19h, 20h, ..., 6h, 7h" : dans ce cas, il dénombre des instants, et non des intervalles de temps (procédure fausse).

Élève 4

La procédure est recevable et la réponse donnée est juste.
L'élève, comme il le dit lui-même, a choisi de représenter la situation par un schéma : il dessine Marseille, la Corse et le trajet du bateau.
Sur la ligne, il représente l'horloge qui avance (on le remarque avec les instants notés ``20h, 21h,...") et il compte en même temps le nombre d'heures du trajet (quand il écrit ``1h, 2h...").
L'élève n'écrit pas tout ; il utilise le schéma jusqu'à minuit puis il sait qu'il s'écoule 7 heures de minuit à 7 ; enfin, pour terminer son raisonnement, il effectue l'opération 5h + 7h.

Élève 5

La procédure est recevable et la réponse donnée est juste.
L'élève décompose le trajet par tranches et ajoute les durées des trois tranches obtenues : de 19h à 24h il y a 5 heures, de 1h à 7h il y a 6 heures et de 24h à 1h il y a 1 heure.
Il effectue ensuite une addition pour trouver la durée de la traversée (5h + 6h + 1h).

EXERCICE 2

1) La réponse d'un élève : respect de la consigne et appréciation portée sur son travail

Cet élève n'a répondu qu'à une partie de la consigne qui lui demande de "convertir". Il s'est contenté de compléter le tableau avec les unités sans y indiquer les nombres attendus. On peut se demander s'il s'en est servi pour effectuer les conversions, il peut l'avoir utilisé mentalement ou avoir utilisé une autre technique de conversion.
Dans la mesure où le tableau devait être complété, on peut penser que le maître souhaitait notamment vérifier la capacité des élèves à remplir un tableau de conversion. Toutefois, le travail de conversion a été

correctement effectué (peu importe la procédure utilisée). On peut donc évaluer positivement le travail de l'élève.

Complément : autres techniques de conversion

Technique 1 :

$$5 \text{ m} = 5 \times 1 \text{ m} = 5 \times 100 \text{ cm} = 500 \text{ cm} \; ; \; 700 \text{ cm} = 7 \times 100 \text{ cm} = 7 \text{ m} \; ;$$
$$9 \text{ dm} = 9 \times 10 \text{ cm} = 9 \times 10 \times 10 \text{ mm} .$$

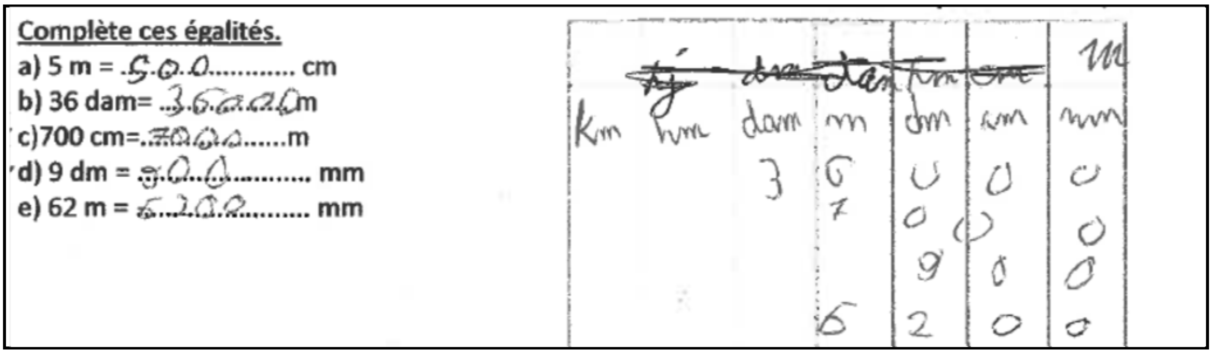
Technique 2 :

1 m = 100 cm.

Pour convertir de mètre en cm on multiplie par 100, de cm en mètres on divise par 100.

2) Les erreurs de trois élèves

Élève 1



Des erreurs sont commises aux questions b), c) et e).

b) L'élève doit placer un nombre à deux chiffres dans le tableau, il écrit le chiffre le plus à gauche dans la colonne des unités correspondantes. Cette erreur peut être due au fait de respecter la chronologie de l'écriture du nombre (on écrit d'abord 3 puis 6) et par conséquent l'élève fait correspondre le premier chiffre à écrire à l'unité associée. Il lui est donc difficile de rompre avec l'ordre usuel d'écriture ou de l'adapter à la situation.

c) L'élève place correctement 700cm dans le tableau mais donne le résultat en millimètres au lieu de donner en mètres. L'élève semble vouloir « remplir » le tableau jusqu'à la dernière colonne (mm). Le fait de placer correctement 700 dans le tableau peut avoir plusieurs origines : plus grande familiarités avec les cm ou impossibilité de placer les zéros dans le tableau si le 7 est placé dans la colonne des décimètres.

e) Comme pour la question b), l'élève doit placer un nombre à deux chiffres dans le tableau, il écrit le chiffre le plus à gauche dans la colonne des unités correspondantes. Cette erreur peut être due au fait de respecter la chronologie de l'écriture du nombre (on écrit d'abord 6 puis 2) et par conséquent l'élève fait correspondre le premier chiffre à écrire à l'unité associée. Il lui est donc difficile de rompre avec l'ordre usuel d'écriture ou de l'adapter à la situation.

Remarques :

- *Le premier résultat est correct, il est écrit d'une autre couleur et il n'y a pas de trace d'utilisation du tableau. On peut supposer que l'élève a utilisé la connaissance usuelle (100cm=1m, donc 500cm=5m).*
- *L'élève a hésité au moment d'inscrire les unités dans les colonnes du tableau : il a barré puis a modifié l'ordre des unités.*
- *L'élève ne commet pas d'erreur dans le placement de 9 dm (nombre à un chiffre).*

Élève 2

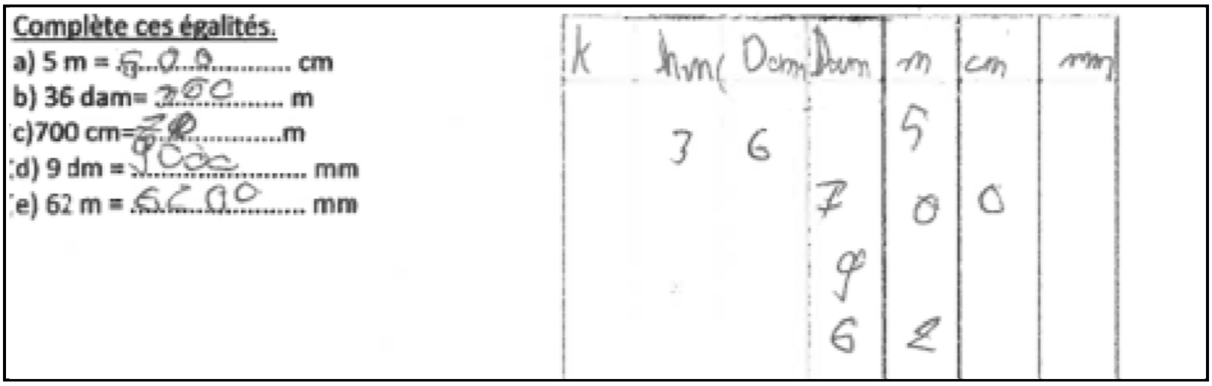
Seules les réponses aux questions c) et e) sont erronées (du point de vu des « conversions » effectuées).

Cet élève place plusieurs chiffres dans la même colonne, cela n'entraîne pas d'erreur à la question b) dans la mesure où le m est une sous-unité du dam.

Pour la question c), l'élève inscrit 700 dans une seule et même colonne puis complète les colonnes jusqu'aux millimètres avec des zéros.

La réponse à la question e) est erronée, l'erreur est due au mauvais placement des chiffres de 62 m, comme l'élève précédent, il écrit le premier chiffre à gauche dans la colonne de l'unité correspondante. L'erreur précédente de placement de plusieurs chiffres dans la même colonne n'est pas répétée.

Élève 3



Une première remarque préalable : les unités n'ont pas été correctement placées dans le tableau (permutation entre mètres et décimètres).

b) Le nombre est correctement inscrit dans les colonnes du tableau et la réponse donnée est correcte. Néanmoins, il faut remarquer que l'usage du tableau aurait dû entrainer une réponse incorrecte (3600 m). On peut donc faire l'hypothèse que l'élève n'a pas utilisé le tableau pour effectuer cette conversion.

c) Si l'on considère que le zéro n'est pas barré, il y a ici une erreur due au mauvais placement des unités dans les colonnes (inversion mètres et décimètres).

d) idem (mauvais placement des unités dans les colonnes : inversion mètres et décimètres).

e) idem (mauvais placement des unités dans les colonnes : inversion mètres et décimètres).

Remarque à propos de la question c) :
Si l'élève a effectivement barré le zéro, on peut supposer qu'il a correctement lue dans le tableau 70 m mais qu'il l'a ensuite corrigé au regard de la connaissance de la relation : 100 cm = 1m.

3) Donner un argument en faveur de l'utilisation du tableau de conversion et un en sa défaveur.

Dès lors que l'élève a compris les liens entre les différentes unités et s'est exercé à les utiliser, le tableau de conversion se révèle être un outil performant pour le travail de conversion. Il constitue le support d'un algorithme en deux étapes : placement du nombre-mesure avec une unité dans le tableau et lecture de la mesure dans la nouvelle unité. Comme toute technique, il permet de gagner en rapidité.
Généralisé trop tôt et utilisé sans lien avec la relation entre les différentes unités et avec la numération, l'utilisation du tableau devient une technique dénuée de sens et entraîner beaucoup d'erreurs.

En effet, utiliser le tableau nécessite de :

- placer correctement les multiples et sous-unités du mètre, en particulier des unités peu usitées comme le décamètre ou l'hectomètre,
- placer correctement les nombres : chiffre des unités (au sens de la numération) du nombre-mesure écrit dans la colonne correspondant à l'unité de la mesure donnée puis en écrivant un seul chiffre par colonne,
- appliquer la technique correspondant au cas à traiter et il y a de nombreux cas possibles :
    - celui où la nouvelle unité est une « sous-unité » de l'unité initiale (dans ce cas on complète par des zéros, ici 5 m en cm),
    - celui où la nouvelle unité est une « sur-unité » de celle initiale, dans ce cas il y a plusieurs sous-cas : « barrer » des zéros (par exemple pour 700 cm à convertir en m), ou placer la virgule à droite de la colonne de la nouvelle unité (par exemple 12 cm en m) et éventuellement compléter par des zéros dans les colonnes après la virgule (par exemple 12 cm en hm), voire combiner plusieurs de ces cas (120 mm en hm).

ANALYSE DE MANUELS (longueurs au CP)

1) Analyse de l'activité préparatoire p.46

a) procédure plus simple pour comparer la taille de deux enfants

Pour comparer la taille de **deux enfants** de la classe, il suffit de les **placer côte à côte**. Il s'agit là d'une méthode de *comparaison directe*.

Remarque :

Si les enfants sont debout, pieds au sol, le problème de l'origine ne se pose pas.

b) procédure plus simple pour comparer la taille de plusieurs enfants

Pour comparer facilement la taille de **plusieurs enfants** on peut :

Procédure 1 :Utiliser le principe des toises

Repérer sur un mur le niveau de chaque enfant. Il s'agit d'une méthode de *comparaison indirecte* puisque nous allons comparer la taille des enfants par l'intermédiaire des longueurs définies sur le mur.

Procédure 2 : procéder à un premier rangement

« derrière l'élève A, se place un élève B plus grand que A,…… ».
Et à la fin, on procède à quelques réajustements.

c) Deux procédures au CP pour ranger les bâtons en fonction de leur longueur

Les élèves peuvent comparer les bâtons par :

- comparaison globale par juxtaposition à partir d'une même origine : les bâtons sont mis les uns contre les autres « en fagot » en faisant coïncider une extrémité : on tire un plus grand, puis un plus grand des restants, ….
- comparaison deux à deux: en cherchant le plus petit, puis le plus petit des restants. Je compare A et B : si A est plus petit que B, je garde A et je le compare à C, si A est plus grand que B, je garde B et je le compare à C… Cette méthode structurée ne sera peut-être pas utilisée par beaucoup d'enfants de cet âge.

Dans tous les cas, il s'agit de *comparaison directe* rendue possible par le fait que les bâtons soient déplaçables.

2) Analyse de l'exercice p.46

a) Procédure de résolution

Une procédure possible est de prendre une bande de papier, construire un segment de même longueur que l'un des bâtons et comparer ce segment aux bâtons qui « semblent » proches. Recommencer plusieurs fois jusqu'à épuisement du stock.

Remarque :

Afin de respecter la consigne le jour du concours il est recommandé d'y répondre précisément en n'exposant qu'une procédure. Dans un souci de formation, nous en suggérons une autre envisageable : découper pour chaque bâton une bandelette de même longueur et comparer les longueurs des bandelettes.

b) Variable de la situation induisant la procédure

Dans l'exercice, les bâtons sont dessinés sur la feuille de papier (donc non déplaçables) et ont tous des orientations différentes. Il est donc difficile de les comparer visuellement, les enfants sont donc conduits à des *comparaisons indirectes.*

3) Analyse des activités p.47

a) Comparer les longueurs de plusieurs trajets dans la cour

Dans l'activité préparatoire, la comparaison de plusieurs trajets tracés dans la cour ne peut se faire directement : les enfants n'ont pas une vision globale des tracés.
On ne peut pas rendre les tracés « rectilignes » comme on le ferait avec un objet matériel déformable. On ne possède pas toujours de ficelle assez longue pour passer par cet intermédiaire. *On peut faire appel à un étalon que l'on reporte régulièrement* (comme par exemple le report régulier d'un bout de ficelle, d'un bâton, d'un pas : dans ce dernier cas la difficulté à reproduire l'étalon à l'identique peut motiver la nécessité de construire un étalon "fixe" …).

b) Hypothèse sur le raisonnement des élèves

Le chemin en vert est constitué de 9 segments tandis que le chemin bleu est constitué de 7 segments. Les élèves peuvent avoir rangé les chemins en fonction du nombre de segments.

c) L'exercice permet-il d'invalider ce raisonnement ?

Si dans l'exercice proposé, les élèves font le même raisonnement, alors ils diront que le chemin le plus long est le chemin rouge (6 segments alors qu'il n'y a que 3 segments pour le chemin noir). En faisant cette erreur de raisonnement, ils auront pourtant juste à l'exercice *: l'exercice ne permet donc pas d'invalider le raisonnement faux mis en œuvre.*

d) Propriété mathématique de la mesure sur laquelle s'appuie la recherche du résultat de l'« Exercice »

Pour chercher les mesures des longueurs des deux chemins, les élèves vont mesurer la longueur de chaque segment constitutif d'un chemin et faire la somme des mesures obtenues. Cette procédure est basée sur *l'additivité de la mesure* :

$$\text{mesure } (A \cup B) = \text{mesure } A + \text{mesure } B \text{ si } A \cap B = \varnothing$$

Ici pour les longueurs de segments, on peut dire que si l'on connaît les mesures des longueurs de deux segments alors la mesure de la longueur du segment obtenu en mettant les deux segments initiaux bout à bout est la somme des deux mesures.

4) Progression pour le CP

On peut envisager de demander *aux élèves de mesurer avec des règles utilisant des unités arbitraires et non conventionnelles* (comme des règles construites à partir de trombones ou d'allumettes).
On peut faire construire aux élèves un instrument sur lequel sont reportés des étalons

1	1	1	1	1	1

puis une règle graduée qui évite le comptage de un en un

0 1 2 3 4 5 6

La règle graduée en centimètres n'est alors qu'un outil de mesure, parmi d'autres, qui a l'avantage d'être conventionnel. Cette progression permet de construire la notion de mesure et d'unité de mesure.

Ou alors, on peut proposer *l'utilisation directe de la règle graduée en centimètres.* Cela relève alors plus d'un apprentissage technique (un repérage d'une graduation après avoir pris conscience de la nécessité de faire coïncider le "0" de la graduation avec l'une des extrémités de l'objet à mesurer) que d'un mesurage.

ANALYSE DE MANUELS (aire au CM2)

1) Pertinence des valeurs numériques choisies

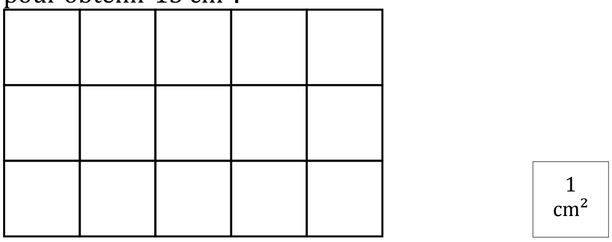
Ces valeurs ne sont pas du tout pertinentes, en effet 2 a la particularité que 2 + 2 = 2 x 2 et de fait n'est pas le meilleur exemple pour montrer l'utilité de la multiplication.
Par ailleurs, pour l'aire du rectangle, on voit les trois centimètres carrés, aucune opération n'est nécessaire, le sens de la multiplication par 1 n'est pas du tout clair. Un rectangle de 5 cm sur 3 cm par exemple aurait été plus pertinent.
Dans le calcul d'aire d'un rectangle dont les côtés ont des longueurs s'exprimant à l'aide de mesures entières, le dénombrement des unités d'aire permettant de recouvrir le rectangle mobilise la multiplication.

2) Explication de la formule

En s'appuyant sur l'exemple du rectangle de 5 cm sur 3 cm proposé à la question précédente, et sur la propriété implicite d'additivité des aires, on peut faire observer aux élèves que l'aire du rectangle est la même que celle des 3 rangées de 5 centimètres carrés, ou celle des 5 colonnes de 3 centimètres carrés, son aire peut donc se calculer en multipliant sa largeur 3cm par sa longueur 5cm pour obtenir 15 cm².

Formulation adaptée :

L'aire du rectangle est la même que celle des 3 rangées de 5 centimètres carrés, ou celle des 5 colonnes de 3 centimètres carrés, son aire peut donc être calculée en multipliant sa largeur 3cm par sa longueur 5cm pour obtenir 15 cm².



On fera ensuite remarquer que si on prend un autre rectangle, par exemple de 8 cm sur 12 cm, on peut le recouvrir de la même façon avec 8 rangées de 12 centimètres carrés (ou 12 colonnes de 8 centimètres carrés). La formulation s'appuie sur un exemple générique et explicite la règle pratique (de multiplication de la longueur par la largeur) : on a évité une formulation trop formelle de type formule algébrique, qui sera l'objet du collège.

3) Difficultés liées à l'usage des termes « base » et « hauteur »

Les termes bases et hauteur sont employés dans la vie courante avec un sens différent de celui qu'ils ont en mathématiques : la base d'un objet est sa partie la plus basse, celle qui est en contact avec le sol, sa hauteur est la distance, mesurée à la verticale, entre le point le plus haut de l'objet et la surface horizontale sur laquelle il repose.
Certains élèves auront des difficultés dès que la disposition du triangle obligera à distinguer les sens usuels et mathématiques de ces termes, par exemple quand la base est dans une position verticale et la hauteur horizontale.
Il pourra être pertinent de faire prendre conscience aux élèves que pour chaque triangle, il existe trois choix de base possible et qu'à chacun de ces choix correspond une hauteur relative à cette base.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE AU CE1

D'après un sujet d'examen de Nantes

1) Les informations qui doivent avoir été données auparavant par le maître[1].

Les élèves peuvent avoir déjà manipulé un matériel de numération similaire en classe. Dans ce cas, le maître peut y faire référence et pointer les analogies entre le matériel familier des élèves et les représentations proposées dans le manuel.
Si aucun matériel similaire n'est utilisé en classe, le maître doit avoir précisé que toutes les barres sont constituées de dix petits carreaux, et que les grands carrés sont constitués de 100 petits carreaux ou de dix barres.
La consigne peut aussi poser un problème de compréhension. Le maître doit par ailleurs avoir précisé que « le dessin qui lui correspond » signifie « le dessin dans le cadre où il y a exactement le nombre de petits carreaux indiqué ». Il peut aussi préciser que chacun des 4 cadres doit être relié à un des 4 nombres.
La difficulté peut résider dans le fait que les représentations des nombres sous forme de collections organisées ou d'écritures chiffrées n'apparaissent pas forcément comme un tout pour les élèves : ils pourraient relier, par exemple une barre avec un chiffre « 1 » présents dans l'une des écritures …
On peut aussi remarquer la superposition des deux plaques dans le premier cadre

2) Une procédure permettant à un élève de fournir la réponse attendue

Les auteurs ont choisi trois nombres composés des mêmes chiffres, probablement dans le but d'amener les élèves à être attentifs à l'ordre des chiffres.
Cependant, la disposition des objets dans les représentations incite fortement à considérer les objets dans l'ordre attendu : l'élève compte les grands carrés, puis les barres, puis les carreaux isolés dans l'ordre de la lecture, de gauche à droite et de haut en bas, et détermine l'écriture du nombre qui convient, sans avoir à faire référence au fait que dans un nombre à trois chiffres, l'un des chiffres désigne des centaines, un des dizaines et un des unités.

3) But probablement poursuivi par l'enseignant en proposant chacun de ces trois cas

Par rapport à l'exercice précédent, pour les trois exemples, le maitre demande de produire l'écriture du nombre et non pas de choisir parmi des propositions, ce qui complexifie la tâche et évite certaines réponses trouvées par élimination. L'objectif de l'enseignant est encore de montrer l'importance de la position des chiffres dans notre système de numération, mais aussi de faire comprendre le rôle du zéro dans l'écriture.

Par rapport au choix des collections, l'exemple A semble avoir pour but de rappeler que chaque grand carré compte 100 petits carreaux. Il se peut également que l'intention soit d'empêcher le comptage effectif des carreaux (celui-ci est inutile puisque, pour la plaque, le nombre est indiqué et les carreaux sont flous).

L'exemple B, dans lequel aucune barre représentant « dix » n'apparaît, permettra au maitre de vérifier la compréhension du « 0 » dans l'écriture du nombre. En effet, un élève qui compte « 2 » et « 6 », devra ensuite traduire en « 206 » pour tenir compte du fait que le « 2 » est au rang des centaines « 6 » au rang des unités et qu'un zéro au rang des dizaines est alors indispensable. Un élève peut aussi compter « cent », « deux cents », « deux cent un », « deux cent deux »… « deux cent six », et avoir à écrire en chiffres son résultat (passage de la désignation orale à l'écriture chiffrée du nombre).

L'exemple C insiste sur l'importance de la position. Ici, contrairement à l'exercice précédent, les dizaines sont représentées en premier si on suit l'ordre de la lecture, c'est cependant le chiffre des centaines qui doit être écrit en premier dans le nombre.

[1] Note de la COPIRELEM : Dans le document original, les plaques sont vertes, les barres sont rouges et les petits carrés bleus.

4) Utilisation d'un tableau de nombres

a) Pertinence de la méthode pour additionner deux nombres dont le chiffres des unités est zéro et dont la somme est inférieure à 1 000

Il suffit de proposer un exemple d'addition comportant une retenue et dont les deux termes vérifient les conditions. Par exemple, il est impossible d'effectuer en utilisant cette méthode, 560 + 280.
La première étape d'ajout de 200 en descendant de deux lignes ne pose pas de problème, mais on ne peut pas ajouter 80 en avançant de 8 colonnes vers la droite (il ne reste que 3 colonnes : il faudrait changer de ligne pour continuer (de dix en dix)).

Remarque :

Cette méthode (encadré) limite le choix des sommes à calculer puisqu'elle ne s'applique qu'aux « additions sans retenue ». Une autre méthode pourrait être décrite, par exemple pour ce calcul (560 + 280) : descendre de trois lignes et reculer de deux colonnes…

b) Une procédure avec laquelle des élèves de CE1 peuvent effectuer 170 + 720 en calcul réfléchi, sans se servir de ce tableau.

Il y a de nombreuses procédures possibles parmi lesquelles :

Procédure 1 : s'appuyant sur les écritures chiffrées et la signification des chiffres suivant leur rang

170 est vu comme « un-sept-zéro », c'est 1 centaine, 7 dizaines, 0 unité. 720, « sept-deux-zéro », c'est 7 centaines, 2 dizaines, 0 unités.
En regroupant les unités de chaque ordre on trouve 8 centaines, 9 dizaines, 0 unité qui s'écrit 890 (« huit-neuf-zéro »).
Cette procédure est assez proche de la technique de l'addition posée dans laquelle les nombres sont « traités » chiffre par chiffre.

Procédure 2 : s'appuyant sur le comptage et la numération orale

« Cent soixante-dix » plus « sept cent vingt », on dit : « deux cent soixante-dix », « trois cent-soixante-dix » … « huit cent soixante-dix », « huit cent quatre-vingt », « huit cent quatre-vingt-dix » et on écrit 890.

Remarque :

L'élève peut aller plus vite et dire « Cent-soixante-dix » plus « sept-cent », « huit-cent-soixante-dix » plus « vingt », « huit-cent-quatre-vingt », « huit-cent-quatre-vingt-dix ».
Il peut aussi dire « sept cent vingt » plus « Cent soixante-dix » : « sept cent vingt », « huit cent vingt », « huit cent trente », « huit cent quarante » … « huit cent quatre-vingt », « huit cent quatre-vingt-dix » et écrire 890.

Procédure 3 : s'appuyant sur la décomposition additive des nombres

170 + 720 = 100 + 70 + 700 + 20 = 100 + 700 + 70 + 20 = 800 + 90 = 890

LES NOMBRES DÉCIMAUX AU CM

D'après un sujet d'examen de Paris

1) Niveau de classe

Le travail sur les nombres décimaux est mené en CM1 et CM2.

Remarque :

Les tâches proposées dans les deux documents sont déjà travaillées au CM1 ; le domaine numérique (jusqu'au 1000ème) relève des objectifs du CM2.

2) Compétence travaillée dans les deux situations

Les deux documents permettent de travailler le passage de l'écriture fractionnaire décimale d'un nombre $\frac{\mathrm{A}}{10^n}$ (où A et n sont des nombres entiers) à l'écriture à virgule (que l'annexe 1 désigne improprement par « nombre décimal »).
Ce qui est formulé ainsi dans les programmes « savoir passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule [et réciproquement]. »

Remarque :

Dans le document de l'annexe 1, on invite les élèves à transformer l'écriture du nombre en fournissant un outil d'aide à la réalisation des tâches : le tableau de numération. Dans le document de l'annexe 2, ce travail de réécriture est proposé après avoir repéré ces nombres sur une droite graduée.

3) L'application des règles A et B dans le domaine des nombres décimaux

a) Une affirmation erronée à laquelle conduit cette application

En utilisant la règle A pour les décimaux, un élève peut être conduit à penser que, d'une part, 2,4 possède un successeur 2,5 et d'autre part qu'il n'existe pas de nombre décimal entre 2,4 et 2,5.

En utilisant la règle B, il conclura que 6,73 (qui s'écrit avec trois chiffres) est supérieur à 7,2 (deux chiffres).

b) Utilisation de l'annexe 2 pour illustrer l'invalidité de ces affirmations

La droite graduée est un support permettant d'illustrer les propriétés relatives à l'ordre sur les nombres décimaux. L'enseignant peut tirer de l'annexe 2 deux des exemples illustrant l'invalidité des affirmations des élèves dans le domaine des décimaux :

- concernant la règle A, entre les graduations correspondant aux nombres 2,7 et 2,8, on peut placer d'autres graduations (effet « zoom ») ce qui revient à intercaler des nombres décimaux entre ces deux nombres (comme par exemple 2,73) ;
- pour la règle B, en lisant de gauche à droite sur la droite graduée, on rencontre le nombre 2,73 avant le nombre 2,8 donc 2,73 est inférieur à 2,8 et pourtant le nombre 2,8 ne s'écrit qu'avec deux chiffres, alors que le nombre 2,73 s'écrit avec trois chiffres.

4) Addition des nombres décimaux

a) Hypothèse relative à l'origine de l'erreur présentée

L'élève a vraisemblablement additionné séparément les parties décimales (7+5 = 12) et les parties entières (3+2 = 5). Cela illustre la représentation erronée mais courante d'un nombre décimal (en écriture à virgule) comme étant la juxtaposition de deux nombres entiers indépendants.

b) Aider ses élèves à dépasser cette erreur

Les élèves ont appris dans les activités de l'annexe 1 à passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule. Pour dépasser leur erreur, il s'agit ici :

- réciproquement de passer d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire :
  $3{,}7 + 2{,}5 = 3 + \frac{7}{10} + 2 + \frac{5}{10}$
- de calculer la somme des fractions décimales en convertissant au passage douze dixièmes en une unité et deux dixièmes :
  $3{,}7 + 2{,}5 = 3 + \frac{7}{10} + 2 + \frac{5}{10} = 5 + \frac{12}{10} = 5 + \frac{10}{10} + \frac{2}{10} = 5 + 1 + \frac{2}{10} = 6{,}2$

L'aide proposée doit donc amener l'élève à revenir à un calcul sur les fractions décimales. Ceci peut se faire en utilisant les écritures fractionnaires comme ci-dessus mais aussi à l'oral en appui sur les mots « unité » et « dixième » et les relations qui les lient (« dix dixièmes égalent une unité »).

ANALYSE D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE AU CP

D'après un sujet d'examen de Toulouse

1) La catégorie à laquelle appartient chacun des quatre énoncés de l'annexe.

Situation 1 :

Transformation d'état avec recherche de l'état final (collection de Rémi): sont donnés l'état initial : j[Rémi]'<u>ai</u> **27** voitures et la transformation positive : je[Jeanne] te <u>donne</u> **3** voitures.

Situation 2 :

Transformation d'état avec recherche de l'état final (collection de Jeanne): sont donnés l'état initial : Jeanne <u>a</u> **37** billes et la transformation négative : elle <u>en donne</u> 6.

Situation 3 :

Composition d'états avec recherche d'un des états composés : sont donnés la composé des deux états (Rémi <u>a</u> **14** avions) et l'autre état (on <u>en voit</u> **7**).

Situation 4 :

Comparaison d'états avec recherche d'un des états comparés : sont donnés la comparaison négative (Lilou <u>a</u> **4** perles <u>de moins</u>) et un des deux états (Jeanne <u>a</u> 23 perles).

2) Un énoncé pour lequel la sémantique de l'énoncé n'est pas en cohérence avec l'opération mathématique à effectuer.

Exemple de situation en conservant le même contexte et les mêmes données numériques (ce qui n'est pas indispensable) :
Jeanne a 23 perles, elle en a 4 de moins que Lilou. Combien de perles Lilou a-t-elle ?
Ici il faut traiter l'information donnée en déduisant de celle-ci que Lilou a 4 perles de plus que Jeanne ; la sémantique de l'énoncé avec présence de l'expression « de moins que » n'est donc pas en cohérence avec le calcul à effectuer. Elle constitue une difficulté qui nécessite chez l'élève la capacité à choisir sciemment la bonne opération.

3) Origine de l'erreur. Proposition d'une aide qui pourrait permettre à l'élève de remettre en cause sa production.

La présence du mot inducteur « donne » peut être à l'origine de cette erreur, ce terme signifiant pour l'élève que l'opération à faire est une addition.
Il peut aussi s'agir de la proximité à la fois du contexte et du champ numérique avec l'énoncé précédent pour lequel il s'agissait bien d'une procédure additive avec le même verbe d'action « donner ». Une lecture rapide peut mener à confondre les deux situations.

Aides possibles :

Il est important de revenir sur la sémantique de l'énoncé pour permettre aux élèves de choisir l'opération adaptée avant de faire le calcul. Ici il faut conduire les élèves à bien distinguer les expressions « tu donnes », « elle te donne » qui amènent à opérer de façon différente.
Pour cela on peut par exemple :
a) Faire vivre différentes situations dans des champs numériques plus restreint avec présence du verbe « donner » mais qui correspondent soit à un ajout, soit à un retrait :

Tu as 4 billes, je t'en donne 3 …
Tu as 4 billes, tu m'en donnes 3 …

Puis des situations plus décentrées :

Lola a 7 bonbons, elle en donne 3 à Rémi …
Lola a 7 bonbons, Rémi lui en donne 3….

Et à chaque fois faire anticiper les élèves sur la collection de départ … a-t-elle diminué ou augmenté ? Valider par l'action effective.

b) Faire reformuler l'énoncé à l'élève (ou bien lui faire réaliser un schéma) en l'invitant à répondre à des questions intermédiaires : est-ce que Jeanne a autant de billes maintenant ? Qu'est-ce qui s'est passé ? Est-ce qu'elle en a plus ? Est-ce qu'elle en a moins ?

4) Deux procédures de résolution susceptibles d'être mises en œuvre par un élève de CP pour résoudre le problème 3

Des procédures relevant du comptage, surcomptage, décomptage :

Procédure 1 :

Représentation schématique des 14 avions, puis réalisation de la partition : la collection des 9 déjà présents, et les autres.
Dénombrement ensuite de la seconde collection.

Procédure 2 :

L'élève peut compter les 9 avions représentés puis surcompter à partir de 9 jusqu'à 14 et double comptage soit en utilisant les doigts (cela nécessitera de se souvenir que les deux mains auront déjà été sollicitées pour dire 14 (10 et 4)), soit en gardant la trace de chaque nombre énoncé (entre 9 et 14) en faisant un petit trait au fur et à mesure sur une feuille.

Procédure 3 :

Repérage du 9 et du 14 sur la bande numérique puis comptage du nombre de pas permettant d'aller de 9 à 14.

Une procédure relevant du calcul :

Procédure 4 :

Recherche du complément, « de 9 pour aller à 14 ? ».
Utilisation du complément à 10 (9 pour aller à 10 il faut 1) puis recherche du complément de 10 pour aller à 14 (en s'appuyant sur la décomposition 14 = 10 + 4). On termine par l'ajout de 1 et 4.