VERS UNE DISTINCTION CHIFFRE/NOMBRE DANS UN JEU DE TACHES CHEZ DES ELEVES DE 11 ANS

Christine DEL NOTARO
Chargée d'enseignement, Université de Genève
Equipe DiMaGe
Christine.DelNotaro@unige.ch

Résumé

Cette communication propose une réflexion sur la modélisation de l'activité de l'élève en lien avec celle du chercheur. Nous décrivons brièvement ce que nous entendons par *jeu de tâches* et mettons en évidence la façon dont l'expérimentatrice, en tant qu'élément du milieu, met en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et celui de l'élève. Nous exposerons en outre de quelle manière ce jeu permet de révéler les connaissances sous-jacentes des élèves à propos d'une difficulté souvent décrite, autant par les enseignants que par les chercheurs : la distinction chiffre/nombre. L'enjeu est de montrer que dans l'interaction de connaissances que nous développons autour d'un savoir, il s'agit de dépasser la dichotomie réussite/échec. Ce faisant, nous effectuons une incursion féconde dans le domaine des connaissances, ce qui produit une expérience à la fois pour nous-même et pour les élèves. Le *jeu de tâches* est alimenté par les connaissances des élèves et celles de l'expérimentatrice : le concept de nombre vs celui de chiffre se construit non seulement dans l'interaction avec la chercheuse, mais aussi dans l'expérimentation d'un savoir (multiples de 12 et de 11). Nous l'illustrerons par une recherche proposée à des élèves de 11 ans.

Exploitations possibles

Cette communication permet de donner un exemple de recherche didactique s'appuyant sur des connaissances arithmétiques (multiples, diviseurs) et de numération (écriture des nombres). Les activités décrites pour des élèves de 11 ans pourraient aussi être un support de travail mathématique sur les nombres dans des TD de master.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Chiffre - nombre. Tâche. Milieu.

VERS UNE DISTINCTION CHIFFRE/NOMBRE DANS UN JEU DE TACHES CHEZ DES ELEVES DE 11 ANS

Christine DEL NOTARO
Chargée d'enseignement, Université de Genève
Equipe DiMaGe
Christine.DelNotaro@unige.ch

Résumé
Cette communication propose une réflexion sur la modélisation de l'activité de l'élève en lien avec celle du chercheur. Nous décrivons brièvement ce que nous entendons par *jeu de tâches* et mettons en évidence la façon dont l'expérimentatrice, en tant qu'élément du milieu, met en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et celui de l'élève. Nous exposerons en outre de quelle manière ce jeu permet de révéler les connaissances sous-jacentes des élèves à propos d'une difficulté souvent décrite, autant par les enseignants que par les chercheurs : la distinction chiffre/nombre. L'enjeu est de montrer que dans l'interaction de connaissances que nous développons autour d'un savoir, il s'agit de dépasser la dichotomie réussite/échec. Ce faisant, nous effectuons une incursion féconde dans le domaine des connaissances, ce qui produit une expérience à la fois pour nous-même et pour les élèves. Le *jeu de tâches* est alimenté par les connaissances des élèves et celles de l'expérimentatrice : le concept de nombre vs celui de chiffre se construit non seulement dans l'interaction avec la chercheuse, mais aussi dans l'expérimentation d'un savoir (multiples de 12 et de 11). Nous l'illustrerons par une recherche proposée à des élèves de 11 ans.

I - LE *JEU DE TACHES*

1 Bref rappel de la conception sous-jacente à la notion de *jeu de tâches*

La conception sous-jacente à cette notion a été développée dans notre thèse de doctorat (Del Notaro, 2010), dans la foulée des travaux du groupe DDMES (2003), puis dans un texte des actes de la COPIRELEM 2011 (Del Notaro, 2011), étayant une communication intitulée « Le *jeu de tâches*, une interaction de connaissances particulière entre expérimentateur et élèves ».

La particularité de ce type d'interaction réside dans le fait d'explorer, d'investiguer le milieu de manière approfondie, sans savoir au préalable où cela mènera expérimentatrice et élèves, partant toutefois d'une tâche précise autour d'une notion mathématique. Nous nous autorisons à interagir avec l'élève selon notre propre représentation de la tâche et en dehors, parfois, de notre analyse préalable. À son tour, l'élève nous emmène dans les méandres de ses connaissances, pris au jeu et emporté par son propre intérêt.

Il y a un réel enjeu à saisir l'opportunité d'un événement surprenant et de l'exploiter sur le vif. Une surprise manifestée par l'élève peut faire l'objet d'un nouveau jeu de tâches. Cela signifie que nous n'avons pas pour préoccupation de faire réussir l'élève, mais que nous nous plaçons dans une perspective épistémologique : nous souhaitons comprendre comment les connaissances des élèves s'agencent autour des notions de chiffre et de nombre.

L'expérimentatrice est un élément du milieu qui va mettre en jeu ses propres connaissances dans son interaction avec les milieux de la tâche et de l'élève, pour tenter de cerner les connaissances engagées par ce dernier. Nous entendons par milieu de la tâche, tout ce qui est utile au sujet pour se représenter la situation et par milieu de l'élève, ce qui permet à ce dernier d'agir sur la situation.

Comment cela se manifeste-t-il dans la contingence et quelles mises en place sont-elles nécessaires ? Notre dispositif se décline en trois temps :

- Investigation du milieu par l'expérimentatrice (analyse a priori)
- Liste de tâches à proposer (élaboration des cartes du jeu)
- Proposition du jeu aux élèves (jeu de tâches effectif)

Le premier temps concerne notre propre investigation du milieu en tant qu'expérimentatrice. Puis, nous établissons une liste de tâches, non hiérarchisées, susceptibles d'être proposées aux élèves, au gré de leur avancement et de leur intérêt mathématique. Le troisième temps concerne à la fois la proposition de jeu faite aux élèves, leur investissement et, finalement, les interactions et l'utilisation des cartes du jeu, en fonction de la progression de la/des tâche-s.

2 Les *cartes du jeu de tâches* et le *jeu effectif* des élèves

Cette liste procède, en quelque sorte, de l'analyse a priori. L'expérimentatrice anticipe un grand nombre d'actions et/ou de stratégies des élèves pour alimenter son « réservoir », constitué par les cartes de son jeu de tâches. La liste augmente au fil des séances, à l'image de sa propre exploration du contenu, en lien également avec ce qu'elle a compris du jeu de l'élève. Il y a donc une part d'improvisation dans la mesure où certaines tâches n'ont pas été prévues et ont été proposées dans le feu de l'interaction, que ce soit par l'expérimentatrice ou par l'élève : il arrive que cette dernière mette en jeu une tâche spontanément ou qu'elle se laisse emporter par une proposition d'élève.

La séance avec l'élève est ce que nous appelons le *jeu de tâches effectif* et la liste, les *cartes du jeu de tâches*.

Cela étant, cet ensemble de tâches doit pouvoir mettre en exergue les connaissances que les élèves ont accumulées par leur expérience du nombre, ce qui nous permettra de spécifier celles qui se manifestent en rapport avec une tâche précise.

Cette façon de procéder nous a permis de libérer l'espace de l'expérimentation avec les élèves, nous menant bien plus loin dans notre échange que si nos interventions en tant qu'expérimentatrice avaient été figées et celles de l'élèves prises comme telles, sans que l'on ne puisse considérer de transformation de la pensée de l'élève en interaction avec celle de l'expérimentatrice, et inversement.

L'enjeu est donc de partir des réponses des élèves pour poser d'autres questions, à l'aune de ce que nous comprenons que les mathématiques mises en jeu produisent sur les connaissances des élèves.

Parfois encore, il arrive que l'expérimentatrice coupe la parole à l'élève, le stoppant net dans ce qu'il est en train de développer, soit pour le contredire, soit pour lui imposer une façon de procéder, ou encore, pour lui proposer une autre tâche.

Pour sonder le milieu, cet *interventionnisme* est nécessaire car on ne peut se contenter d'observer l'élève de manière naturaliste. Nous pensons que pour trouver des réponses, il faut, d'une certaine manière, les provoquer. Ce terme à double sens comporte à la fois l'idée de les inciter – par un agencement du milieu – et celle de les défier, par des déstabilisations, pour tester la résistance des connaissances.

II - UN *JEU DE TACHES* POUR QUESTIONNER LA DISTINCTION CHIFFRE/NOMBRE

1 Point de départ : une « belle suite de nombres »

Nous travaillons avec des petits groupes de quatre élèves environ, que nous rencontrons à raison d'une fois par semaine. Les groupes changent après quatre ou cinq séances. Pour commencer avec de nouveaux élèves, et après avoir proposé quelques tâches autour de relations de divisibilité par 2, 4, 8, nous leur avons demandé d'écrire une « belle suite de nombres », pour jauger ce qui les intéresse d'une part, et voir quelles sont les relations effectuées autour des notions de multiples et diviseurs. Nous avons en préalable, les travaux d'autres élèves et ce qui nous intéresse en continuité, c'est un point précis qui nous questionne depuis deux ans : la distinction chiffre/nombre. Nous avons l'intention, à moyen terme de l'échange, de proposer une tâche (précisée au point 2) autour de ces notions et pour ce faire, nous devons aménager un milieu favorable à la rencontre de leur intérêt. Il nous faut partir bien en amont afin de discerner la façon dont nous allons amener cette proposition. Pour apprécier le degré de pertinence de la tâche que nous aimerions présenter par la suite, nous avons lancé cette proposition, très libre s'il en est. Le qualificatif de « belle » suite n'est pas particulièrement approprié et a peut-être infléchi leurs procédures, mais il n'en reste pas moins que cette évocation est entrée en écho avec la notion de suite numérique.

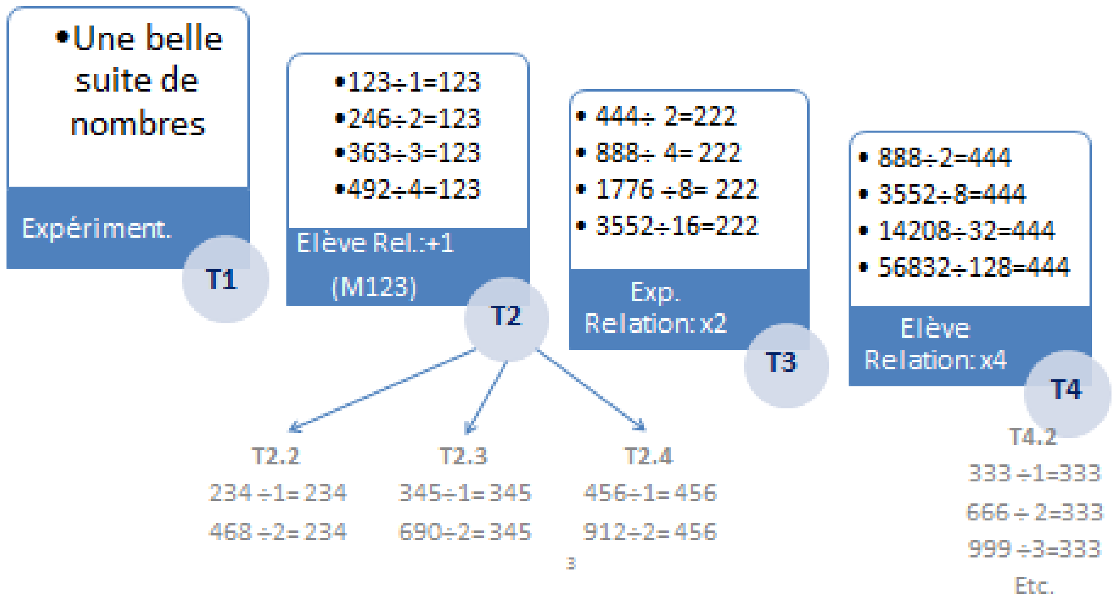
2 Les cartes du jeu

Le jeu de l'expérimentatrice comporte de multiples tâches autour des relations de divisibilité qui ont été établies à partir de l'interprétation de l'énoncé par les élèves lors de la première séance, et présentées en écho à leurs propositions. Ces tâches sont commentées au point. 3.1. En voici un aperçu non exhaustif :

1. 333÷1=333 vs 444÷1=444
   Comparaison des tables de 333 et 444
   Liens entre 1332÷4=333 et 1332÷3=444
   Multiples communs (2664, 3996, 5328, 6660)
2. 999÷3=333
   9990÷30=333
   99900÷300=333
3. 444÷2=222
   888÷4=222
4. 888÷8=111
   999÷9=111
5. 800÷50=16
   400÷25=16
6. Investigation du milieu des multiples de 12
7. Investigation du milieu des multiples de 11
8. Investigation du milieu des multiples de 12 vs les multiples de 11

3 Le jeu effectif des élèves

Ce schéma en escalier montre les liens qui se sont construits à partir de la demande de l'expérimentatrice d'effectuer une belle suite. Il est difficile de rendre compte de tous les fils tirés à partir de la première tâche ; nous l'avons modélisé comme suit, en étiquetant les tâches : T1, T2, T3 et T4. Les tâches T2.2, T2.3 et T2.4 sont des tâches effectuées en parallèle, à la suite de T2. Il en va de même pour T4.2, effectuée à la suite de T4.



3.1 Description de l'enchaînement des tâches

Tâche 2

Un élève propose, comme belle suite, 123÷1=123. Il dit qu'il suffit de rajouter une fois 123 à chaque « étage » et de faire +1 au diviseur pour obtenir toujours le même « résultat » de 123 : 246÷2=123 ; 369÷3=123 ; 492÷4=123 ; etc. La relation effectuée ici est +123 ; autrement dit, les élèves cherchent les multiples de 123, de manière additive. La « belle suite » consiste à conserver un quotient fixe, ce qui oblige à jouer sur les multiples de 123 en lien avec le diviseur. Il est intéressant de constater que la relation effectuée, malgré l'écriture divisive, concerne l'opération inverse, c'est-à-dire la multiplication de 123.

Les tâches ultérieures suivent la même logique : les élèves cherchent tous les multiples de 234, puis les multiples de 345, puis ceux de 456. Nous pouvons déjà observer dès les débuts, que les élèves envisagent la tâche sous l'angle des chiffres plus que des nombres ; en effet, on peut supposer, au vu de la régularité de leurs propositions, qu'ils considèrent les chiffres 1-2-3, plutôt que le nombre cent-vingt-trois ; 2-3-4 plutôt que 234, etc. C'est cet agencement des chiffres qui leur procure de *belles* suites.

Ce constat se retrouve dans les tâches T2.2, T2.3, T2.4 :

T2.2	*T2.3*	*T2.4*
234÷1=234	345÷1=345	456÷1=456
468÷2=234	690÷2=345	912÷2=456
702÷3=234	1035÷3=345	1368÷3=456

Tâche 3.

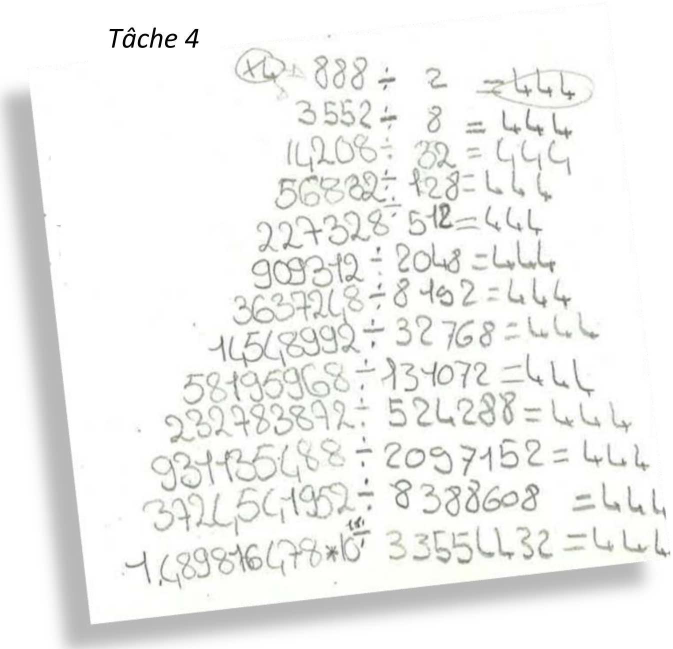
L'expérimentatrice ne les laisse pas poursuivre et propose, en relation avec les connaissances manifestées par les élèves, la « suite » suivante : 444÷2=222 / 888÷4=222 / 1776÷8=222 / 3552÷16=222 / etc. Nous proposons ainsi d'explorer une relation de double, afin de saisir si les élèves la repèrent explicitement ou s'ils la poursuivent en acte seulement. Les élèves complètent quelque peu cette liste puis bifurquent vers ce que nous avons nommé la *tâche 4*.

Tâche 4.

Les élèves proposent une relation de multiplication par 4, en réponse à celle que nous avons proposée :

888÷2=444 / 3552÷8=444 / 14208÷32=444 / Etc. L'image scannée de la *tâche 4* ci-après montre, d'une part, l'attrait exercé par les nombres, déjà souvent constaté et, d'autre part, laisse supposer que la relation est explicite pour l'élève, au vu de la précision qu'il a notée et entourée (*x4*) en haut à gauche et prolongée par deux flèches indiquant l'objet sur lequel s'exerce la multiplication. Autrement dit, il faut effectuer une multiplication par 4 en passant d'un nombre à l'autre.

Tâche 4



Tâche 4.2

Suite à cela, les élèves en reviennent à un rapport additif « +333 ».

333÷1=333

666÷2=333

999÷3=333

etc.

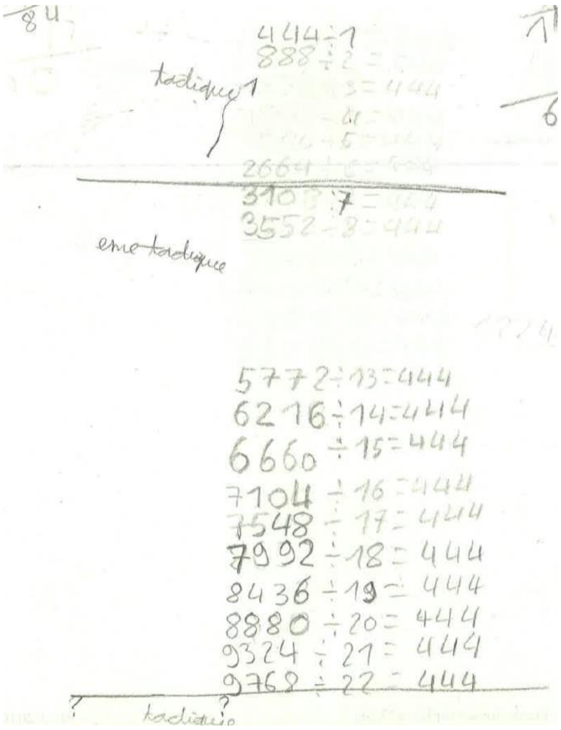
3.2 Comment les élèves s'approprient-ils ces tâches ?

Nous abordons dans cette section, la question des règles d'action qui, pourrait-on dire, s'organisent avec une clause d'anticipation permettant aux élèves de produire la suite des actions. Ces derniers se trouvent face à du *vrai*, par opposition à du *juste*, ou du *codifié*. Ils reconnaissent des éléments pertinents dans les tâches proposées, qui leur servent à construire des connaissances nouvelles ou à en réactiver de plus anciennes. Par exemple, le fait de basculer à un moment donné du nombre vers le chiffre permet de continuer la suite de nombres : lorsque l'opération sur le nombre devient trop fastidieuse techniquement, les élèves prennent en considération les colonnes (basculement sur le chiffre), sur lesquelles ils peuvent plaquer verticalement une suite récurrente observée antérieurement, ce qui rend le résultat accessible d'une autre manière. Les élèves disent, par exemple, que les multiples de 444 se terminent par 4-8-2-6-0, comme les multiples de 4. Le constat que les élèves aiment écrire des suites numériques, qui plus est lorsqu'ils les construisent, n'est plus à faire. C'est ce que nous appelons *être face à du vrai*. Etre face à du *vrai* signifie, pour les élèves, construire, proposer un résultat qui ait du sens en fonction de leurs intérêts et de leurs connaissances *hic et nunc*, souvent en dehors d'éventuelles attentes. Ceci est médiatisé par l'expérience. Par exemple : un élève demandait s'il n'y avait pas moyen d'écrire un nombre sans devoir écrire *tous ces zéros* (17'940'000'000'000'000). Après lui avoir répondu par l'écriture en puissances de 10, nous le voyons récrire toute une série de « zéros ». A notre question de savoir si ce n'est pas plus « pratique » d'écrire un nombre en puissances de 10, il répond : « oui, c'est plus pratique, mais comme ça, c'est mieux ». Cet élève est manifestement dans l'expérimentation du nombre et de ce fait, moins préoccupé de trouver le résultat « *codifié* », sans quoi il aurait repris l'écriture en puissances de 10 qu'il a lui-même demandée auparavant.

L'anticipation du nombre à atteindre, comme dans l'exemple de Corentin ci-après, se discerne dans des affirmations telles que : *on rajoute 1 parce que c'est 1000*, *on met le 7 aux milliers* ou encore, *on met le 9 comme millier*, qui font partie de ces étapes intermédiaires permettant d'atteindre le but fixé. Ces propositions montrent que l'élève *a attrapé quelque chose* du concept (concept en acte) et qu'il le reproduit de manière assez sûre, en suivant ses propres règles.

Nous identifions là encore, un intérêt de la part de l'élève à construire le nombre qui vient ensuite en utilisant des outils intellectuels, alors qu'il pourrait « tout simplement » effectuer l'algorithme ; c'est ce qui nous fait dire là encore, qu'il se trouve face à du *vrai* : sa vérité mathématique, lui permettant de produire un raisonnement afin d'adapter la situation.

Revenons concrètement à l'exemple de Corentin (Tâche 4.3) où il propose la relation x4. Il s'engage dans le développement de la table de 444 et se hasarde à en expliquer les spécificités. Il voit des régularités qu'il tente d'expliquer. Voici ce qu'il dit :



« Si on veut diviser un nombre *(ayant pour quotient 444)* :

Si un nombre divisé par 1=444, alors c'est 444. Après, on peut le diviser par 2, 3, 4, 5, etc.

Exemple avec ÷3 pour faire 444.

– 3x4 =12
– On met 12 comme centaine
– On rajoute 1 parce que c'est 1000
– => 1300
– 2+1 =3
– On remet le 3, 1330
– On remet le 2 du 12
– 1 … ... 2
– 2+1=3, on met les deux 3 au milieu
– 1 3 3 2 »

Dans les deux exemples supplémentaires ci-après, nous pouvons supposer que ce qui tient le sujet en haleine, c'est le jeu sur les chiffres, car en effet, s'il s'agissait de trouver le résultat, « *le juste* », comme nous l'avons relevé précédemment, l'emploi de l'algorithme aurait été adéquat. Or il réfléchit à la formation du nombre à partir de l'agencement des chiffres. Il ne parle jamais de la relation inverse 444x17, par exemple, ce qui laisse supposer que le calcul ne l'intéresse pas.

… ÷17 = 444

– 17x4 = 6<u>8</u>
– 68 +6 (mille) = 7<u>4</u>
– On met le 7 aux milliers
– On rajoute 1 = 75 = 7500
– On remet le 4 (dizaines) de 74 => 75<u>4</u>0
– On remet le 8 de 6<u>8</u> (unités)
– 7 en millier
– 4 en dizaine
– Le 8 vient d'un nombre non transformé (6<u>8</u>)
– 7548

… ÷22 = 444

– 22x4 = 8<u>8</u>
– Faut rajouter 8 = 9<u>6</u>
– On met le 9 comme millier
– Faut rajouter 1 = 97 => 9700
– On rajoute le chiffre unité du nombre transformé => 97<u>6</u>0
– On rajoute le chiffre unité du nombre non transformé => 976<u>8</u>

La régularité:

22x4 = 8<u>8</u>
88+8 = 9<u>6</u>
9 7 6 8

Au paragraphe 4, nous expliciterons comment les régularités observées et relatées deviennent la logique de l'élève. Nous exposerons la manière dont sa logique se construit dans sa vision en colonne du nombre. Nous pouvons déjà tirer la conclusion que dans les cas traités, les régularités des actions des élèves sont liées aux règles qu'ils suivent.

Tâche 5.

Elle concerne l'opération inverse dont nous parlions : les élèves en reviennent à la table de 444 et traitent l'information à partir de la multiplication.

444 x 51 = ? est envisagé comme opération inverse de ? ÷51 = 444**.** Le désir de construire le nombre en passant par le raisonnement semble encore plus flagrant dans cet exemple, dans la mesure où il serait finalement plus tentant (voire, *facile* ou *efficace*) de passer par l'algorithme, s'il ne s'agissait que du calcul ; en tous les cas, ce serait plus attendu, ou plus *juste.* L'élève n'est manifestement pas dans le *codifié.*

Il note ceci :

444x51 = ?

51x4 = 204

204 + 20 = **22** 4 Les régularités sont en lien avec les règles suivies.

+2 de ret

22 6 4 4

Tâche 6.

Poursuivant dans cette idée de recherche de cohérence, les élèves proposent ensuite d'explorer la «logique» de la table de 333. Ils commencent par chercher les régularités verticalement. Ce qu'ils appellent «logique» consiste à mettre à jour toutes les régularités. Ils procèdent du reste souvent de la même manière, à savoir : écrire de longues listes de nombres en suivant une logique verticale, axée sur la régularité des suites de chiffres. Lorsqu'ils en ont écrit suffisamment pour repérer des régularités, ils les élèvent au rang de règle ou, plus exactement, de loi de fonctionnement et s'appuient sur des règles de contrôle du type « si … alors… » qui permettent de produire la suite de leurs actions.

Quelques *logiques* repérées en envisageant les nombres par colonnes : chiffres des unités, chiffres des dizaines, chiffres des centaines et chiffres des milliers :

Chiffre des unités : 3-6-9-2-5-8-1-4-7-0 3-6-9-2-5-8-1-4-7-0 3-6-9-2-5-8-1-4-7-0

Chiffre des dizaines : 3-6-9-3-6-9-3-6-9-3-6-9 2-6-9-2-6-9-2-6-9 2-5-9-2-5-9-2-5-9 2-5-8-2-5-8-…

Chiffre des centaines : 3-6-9 3-6-9 3-6-9 3-6-9 3-6-9 3-6-9 3-6-9 3-6-9 3-6-9 3-6-9-…

Chiffre des milliers : 0-0-0 1-1-1 2-2-2 3-3-3 4-4-4 5-5-5 6-6-6 7-7-7 8-8-8 9-9-9 0-0-0 1-1-…

Trois exemples de *logiques* internes au nombre, avec opération sur les chiffres:

- 0999 : si la somme des chiffres du millier (0) et de l'unité (9) est égale à 9, alors le chiffre des centaines et celui des dizaines est, respectivement, 9.
- 1332 : si la somme des chiffres du millier (1) et de l'unité (2) est égale à 3, alors le chiffre des centaines et celui des dizaines est, respectivement, 3.
- 1665 : si la somme des chiffres du millier (1) et de l'unité (5) est égale à 6, alors le chiffre des centaines et celui des dizaines est, respectivement, 6.

Dans l'extrait de nombres ci-contre, les élèves pointent un premier « trou » dans cette *logique* entre 3996 et 4662. Les nombres soulignés 4329, 5328, 6327, ne suivent pas la même (à cause de la retenue) ; ils présentent de nouvelles régularités. Résiste-t-on à la tentation d'aller y voir encore un peu plus loin… qu'y aura-t-il comme effet de la retenue, après « 32 » et « 65 » ?

Si l'on reprend depuis le début, nous observons la régularité suivante : 33-66-99, jusqu'au premier saut (4329), qui marque une nouvelle régularité : 32-66-99. Ensuite, nous aurons quatre fois de suite, le triplet 32-65-98, puis trois fois de suite 31-65-98, puis deux fois de suite 31-64-98,

Table de 333
0333
0666
0999
1332
1665
1998
2331
2664
2997
3330
3663
3996
4329
4662
4995
5328
5661
5994
6327
6660
6993
7326
7659

puis à nouveau quatre fois 31-64-97, puis 30-64-97, puis… ?

Ce qui nous semble particulièrement intéressant dans cet extrait, c'est que les élèves ont « appris » d'une part à considérer la formation des nombres selon certaines régularités, qui plus est, s'avèrent reproductibles, et d'autre part, à en chercher de nouvelles lorsqu'elles s'interrompent. Ils constatent, en outre, que ces *sauts de logique*, ainsi qu'ils les décrivent, font partie d'un ensemble toujours plus vaste. On peut parler ici d'un ancrage dans leur expérience, de questions liées aux suites numériques et aux régularités observables.

7992
<u>8325</u>
<u>8658</u>
8991
Etc.

Tâche 7.

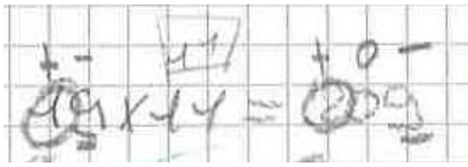
L'expérimentatrice propose, à la suite de la tâche 6.2 où les élèves ont investigué le milieu avec la suite 666÷2=333, une nouvelle division pour en arriver, au vu de leur intérêt et de leur propension à approfondir les liens entre chiffres et nombres, à une ultime tâche, celle qui concerne les multiples de 12 que l'on peut trouver dans les multiples de 11. Avant cela, les élèves ont exploré les tables de 11, de 111, de 101, etc. La tâche 7 consiste donc en une nouvelle série : 888 ÷8 =111 / 999 ÷9 =111 / 1110 ÷10=111 / etc. Un élève s'exclame : « C'est comme la table de 11 ! »

Tâche 8.

Cette exclamation nous permet de les rediriger vers la table de 11 et ses particularités, et d'aborder enfin la tâche *M12 dans M11*, carte qui peut être jouée ici.

Avant cette tâche, les élèves ont exploré la table de 11 et essayé, toujours selon leur intérêt, à comprendre la construction des multiples de 11. Arrêtons-nous un instant sur l'exploration de la fabrication de la table de 11 par Chloé, qui, sur sa feuille de travail, montre les liens effectués avec ce qui avait été précédemment fait, ainsi que les mises en relations qu'elle effectue : « on va retrouver le nombre du calcul d'avant », dit-elle.

Elle identifie les régularités suivantes : $\boxed{+1/0/-}$ à comprendre comme suit. Prenons l'exemple de 19x11=209 pour expliquer son raisonnement qui consiste à passer de 19 à 209, sans effectuer la multiplication:



Chiffre des dizaines : ajouter 1 *(et multiplier par 10)* ce qui donne donc 2 pour le chiffre des centaines.

Chiffre des dizaines : insertion du 0 *(qui provient de la multiplication par 10)*

Chiffre des unités : **-** (sous-entendu *statu quo*, 9). De ces régularités constatées, elle en fait une règle, qui alimentera son expérience.

Il est parfois plus difficile de rendre compte d'un raisonnement par écrit, que de regarder la procédure de l'élève. Combien font 46x11 ? En suivant sa règle $\boxed{+1/0/-}$ on obtient 506 aisément.

Après de longues listes (cf. annexes 1 et 2) et quelques constats plus tard, nous avons signifié aux élèves que l'on pouvait trouver dans la liste des multiples de 11, les multiples de 12. Ici, c'est l'expérimentatrice qui suggère la recherche. C'est dans l'interaction de connaissances que cette tâche émerge, bien que déjà présente à l'esprit auparavant ; il fallait toutefois une occasion favorable à son développement, pour garder intact l'intérêt des élèves. Le premier nombre dans lequel ceci est visible est est 121. Dans 121 (11x11), on peut lire 12 et 1, et noter cela de la manière suivante : 12/1. Dans 242 (22x11), on peut lire 24 et 2 et noter 24/2 (il suffit d'utiliser une barre

oblique (/) pour indiquer la séparation). On aura tôt fait de constater que la suite continue et que l'on peut effectivement retrouver les multiples de 12 de la façon suivante : 36/3, 48/4, 60/5, 72/6, 84/7, 96/8, 108/9, etc. dans les multiples de 11 (363, 484, 605, 726, 847, 968, 1089).
Le jeu sur les chiffres se différencie ici du jeu sur les nombres car si l'on peut voir cette suite dans 1210 encore, il est néanmoins plus difficile de la percevoir dans 1331, à moins de retrouver le calcul qui nous le permette.
On ne le *voit* plus (jeu sur les chiffres), mais on peut le *retrouver* par une opération (jeu sur les nombres).
Ce fait attire les élèves qui vont se lancer dans la recherche consistant à retrouver des éléments des multiples de 12 dans les multiples de 11. Ils ont constitué des listes conséquentes, effectué des liens entre dizaines et centaines, s'autorisant des sauts de mille, puis de dix mille, happés par les régularités constatées. Ils ont même été très proches du critère de divisibilité par 11, s'autorisant ce type de combinaisons de chiffres. Nous donnons quelques exemples retranscrits plus bas.
Reprenons toutefois le questionnement soumis aux élèves : on peut se demander comment se cache 120/10 dans 1210, 121/11 dans 1331, etc. Est-ce que l'on va trouver quelque chose qui puisse correspondre à 144/12 ?
Dans 1210 on ne voit *presque* plus les multiples de 12 ; pourtant, on perçoit bien un *12* et un *10*… La connaissance fonctionne de cette manière, intuitive, qui va faire dire à un élève « *on voit 120/10 dans 1210* », ce qui ne semblera pas incongru, mais sans pour autant se l'expliquer.
Si l'on admet effectivement que l'on puisse continuer la suite depuis 110x11=1210, en passant par les multiples de 12, écrits de la sorte : 120/10 (ce qui signifie 10x12=120), on peut essayer d'aller plus loin et tenter de voir ce que cela donne. Notons toutes les étapes :

110x11=1210	10x12=120	12**0/1**0 →12**1**0 *par addition des chiffres de chaque côté de la barre (0+1=1)*
121x11=1331	11x12 =132	13**2/1**1 →13**3**1 *par addition: 2+1=3*
132x11=1452	12x12=144	14**4/1**2→14**5**2 *(4+1=5)*
143x11=1573	13x12=156	15**6/1**3→15**7**3 *(6+1=7)*
154x11=1694	14x12= 168	168/14→1694 *(8+1=9)*

Et ainsi de suite. On retrouve le jeu sur le nombre, effectué avec la table de 333, à la tâche 6. De même, le jeu sur les chiffres s'exprime non seulement de manière horizontale, si l'on peut dire, mais également de manière verticale :

99x11=	↓1089	Chiffre des milliers : 1
110x11=	↓1210	Chiffre des centaines : 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 0, 1, 2, 4, 5, 6, … *Les élèves remarquent que*
121x11=	↓1331	*cela « saute », que régulièrement, une dizaine n'est pas représentée.*
132 x 11=	↓1452	Chiffre des dizaines : 8, 1, 3, 5, 7, 9, 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, …
143 x 11 =	↓1573	Chiffre des unités : 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, …

Avant de terminer cette restitution, laissant entrevoir, nous l'espérons, la quantité de pistes à exploiter à partir de cette tâche, nous cédons à l'envie de faire état d'une dernière reconstruction concernant la table de 11, repensant à la règle de Chloé dans l'exemple ci-dessus :

- À la première centaine, le chiffre des unités égale le chiffre des dizaines : 11-22-33 …
- À la 2ème centaine, le chiffre des unités vaut 1 de moins que celui des dizaines : 110 – 121 – 132 …
- À la 3ème centaine, le chiffre des unités vaut **9** de plus que celui des dizaines pour 209, et **2** de moins pour 220, 231, 242, …, 297 (9 + 2 = 11)
- À la 7ème centaine, **5** de plus pour 605, 616, 627, 638, 649 et **6** de moins pour 660, 671, 682, 693… (5 + 6 = 11) etc. Est-ce que l'on va trouver le même type de régularité pour chaque centaine ?

III - ILLUSTRATION DES NOTIONS DE *REGLE*, *EXPERIENCE*, *LOGIQUE*

Reprenons l'un des exemples de Corentin (tâche 4.3) intéressants pour illustrer le triplet *règle – expérience – logique*, qui se présente comme un processus en boucle. D'une règle de laquelle on tire une logique s'inspirant de l'expérience comme élément médiateur, en sort une nouvelle règle ; il s'agit d'un mouvement dynamique.

Reprise de l'exemple … ÷3 = 444

1) 3x4 =12

2) On met 12 comme centaine
3) On rajoute 1 parce que c'est 1000 ⇒ 1300
4) 2+1 =3
5) On remet le 3, 1330
6) On remet le 2 du 12
7) 1 … ... 2
8) 2+1=3, on met les deux 3 au milieu
9) 1 3 3 2 »

Partant de la première régularité expliquée par Corentin, que nous interprétons comme une règle d'action « *si* 3x4=12, *alors* on met 12 comme centaine », nous observons un enchaînement et un va-et-vient entre règle et logique. Cette règle médiatisée par l'expérience donne lieu à une nouvelle règle : on rajoute 1 parce que c'est 1000 (*parce que l'on parle de milliers*). La logique veut alors que l'on écrive 1300. Ce qui peut passer pour un « truc » est en réalité l'expression de ce processus *règle – expérience – logique*, qui montre un raisonnement très élaboré de la part de l'élève.

Chaque nouvelle logique, interprétée par l'expérience, donne lieu à une nouvelle règle, et ainsi de suite.

On constatera de même, que son déroulement de la table de 11 (cf. Corentin, annexe 2) lui permet de voir les régularités de la liste. La première chose que l'élève fait dans son listage est d'effectuer des sauts et de repérer les régularités de 110 en 110 (110-220-330-440-550-660-770), il les pointe et les relie. Ensuite, il les écrit de manière appuyée, comme pour scander : 880-990-1100. L'élève s'autorise, à la fin de sa liste, de suivre sa règle, n'éprouvant plus le besoin de vérifier chaque ligne par une multiplication. Il effectue alors des sauts de 1001 : là, il «sait» écrire sa suite de nombres, ayant construit sa logique qui a été interprétée par l'expérience de la vérification *verticale* (pour s'assurer de la justesse des nombres). L'une des composantes de sa logique est la valeur du chiffre des unités, alternativement 1-2-3-4-5-6-7-8-9-0, Cette logique donne lieu à une nouvelle règle de constitution de la table, qui l'autorise à effectuer des sauts de 1001.

La règle n'est pas donnée ex abrupto et en mots mais elle est montrée en acte, en référence directe à la liste de multiples qu'il a écrits. De ce fait, la règle n'est jamais totalement explicitée, elle est en majeure partie montrée. Une fois que l'élève saura reproduire la liste, il pourra à la fois en saisir un peu plus analytiquement la règle de production et observer ce qu'elle lui donne à voir.

Cela va l'amener à l'interpréter autrement que comme le simple produit de la règle de formation ; autrement dit, à trouver quelque logique à cette production.

L'élève est ainsi conduit à organiser ses actions non pas seulement pour produire la suite de nombres attendue, mais pour vérifier ou infirmer ce qu'il a pu observer. Ces observations, anticipations, vérifications et variations de la même règle se feront selon une certaine logique interprétative, qui n'est pas contenue a priori dans la règle de formation de sa série de nombres.

IV - CONCLUSION

Cette façon d'envisager l'interaction, à partir de la spécificité des mathématiques en tant que milieu contraignant, produit un certain type de procédures et de comportements chez les sujets. Ce laboratoire fait émerger des connaissances dont on ne sait pas, a priori, si elles sont résistantes, si les expériences produites sont consistantes : c'est l'objectif poursuivi dans nos recherches. Toutefois, nous constatons que des apprentissages ont bel et bien lieu et que des comportements s'institutionnalisent ; *quelque chose* aspire les élèves et les entraîne dans ce mouvement, dans ce tourbillon de connaissances.

La curiosité et l'intérêt des élèves sont alimentés par le désir de poursuivre leur objet de recherche car il fait sens pour eux : tant que la situation se présente à eux comme problématique, la dimension de recherche est maintenue.

Notre travail dans les classes poursuit le but de développer la notion de jeux de tâches, que nous considérons comme une condition essentielle pour sonder les connaissances des élèves, tout en nous mettant, en tant qu'expérimentatrice, dans un mode dynamique. Il y a un jeu difficile afin de maintenir cet état. Nous nous risquons à cet exercice délicat en tentant de suivre la pensée de l'élève. Nous ne la guidons qu'en la soutenant dans ce qu'elle exprime et non en la dirigeant vers un but que l'on se serait préalablement fixé.
L'interaction des connaissances et des explorations du milieu respectives est ainsi privilégiée entre l'expérimentateur et l'élève, et favorise la constitution d'expériences.

Ces expériences sont reliées à des savoirs qui se construisent dans les jeux respectifs décrits plus haut.
Le résultat qui s'impose au terme de cette recherche est que la distinction chiffre/nombre soulève une véritable question de contenu et pas seulement de vocabulaire.
Les chiffres sont des attributs du nombre qui *disent des choses* sur le nombre (des ostensifs). Reprenons l'exemple où l'élève élabore des régularités en lien avec les règles qu'il s'est données :

444x51 = ?
51x4 = 204
204 + 20 = **22** 4
+2 de ret
22 6 4 4

La logique de production des nombres est soutenue par le jeu sur les chiffres ; les exemples précédents montrent que les élèves découvrent des lois permettant d'agir sur les chiffres et de les manipuler pour *fabriquer* le nombre. Etrangement, ce n'est pas le fait d'opérer sur un nombre pour obtenir un autre nombre qui les engage, mais bien le jeu sur les chiffres. La distinction chiffre/nombre est, à cette étape, encore en acte, ce que nous avons tenté de montrer.

L'élève pense la formation du nombre à partir de l'agencement des chiffres. Il nous semble qu'il s'agit-là d'une étape importante, voire de prémisses à l'acquisition de cette distinction : il ne suffit donc pas de l'expliquer, mais il s'agit bien de la faire expérimenter. Ainsi, nous observons qu'elle va nettement au-delà de la simple comparaison chiffres/nombres *vs* lettres/mots. En effet, si les deux t de attribut ne disent rien sur la nature de l'objet ; en revanche, le 6 de 22644 dit quelque chose sur le nombre dont 22644 est le nom. Nous avons donc un nom de nombre, 22644, dont chaque chiffre nous indique l'une de ses particularités – ne serait-ce que le fait suivant : si le nombre est écrit en base 10, les chiffres représentent les restes des divisions successives par 10 de ce nombre.

Le savoir, c'est l'attribut des attributs du nombre (le nom du nombre) : l'écriture du nombre est constituée par des chiffres ; lorsque l'élève dit que pour calculer le résultat de 444x51, il suffit de ramener le calcul à 51x4 et de combiner les chiffres selon des règles précises, on peut dire que les chiffres caractérisent le nombre. Pour les assembler, il faut respecter que si l'on dispose les chiffres selon les règles établies, il y a une retenue de 2. Ceci est le résultat des expériences à propos des opérations sur le nombre.
Ce savoir est l'attribut des chiffres du nombre : c'est cela qui ressort en acte dans nos expérimentations.

V - BIBLIOGRAPHIE

CONNE F. (2003) Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. *Education et francophonie*, **31/2**. www.acelf.ca.

DDMES (2003) L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence, in *Actes du Séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris, 28-29 mars.

DEL NOTARO C. (2010) Chiffres mode d'emploi. Exploration du milieu mathématique et expérience à l'école primaire autour de quelques critères de divisibilité. Thèse de doctorat, Genève. http://archive-ouverte.unige.ch/unige:11825

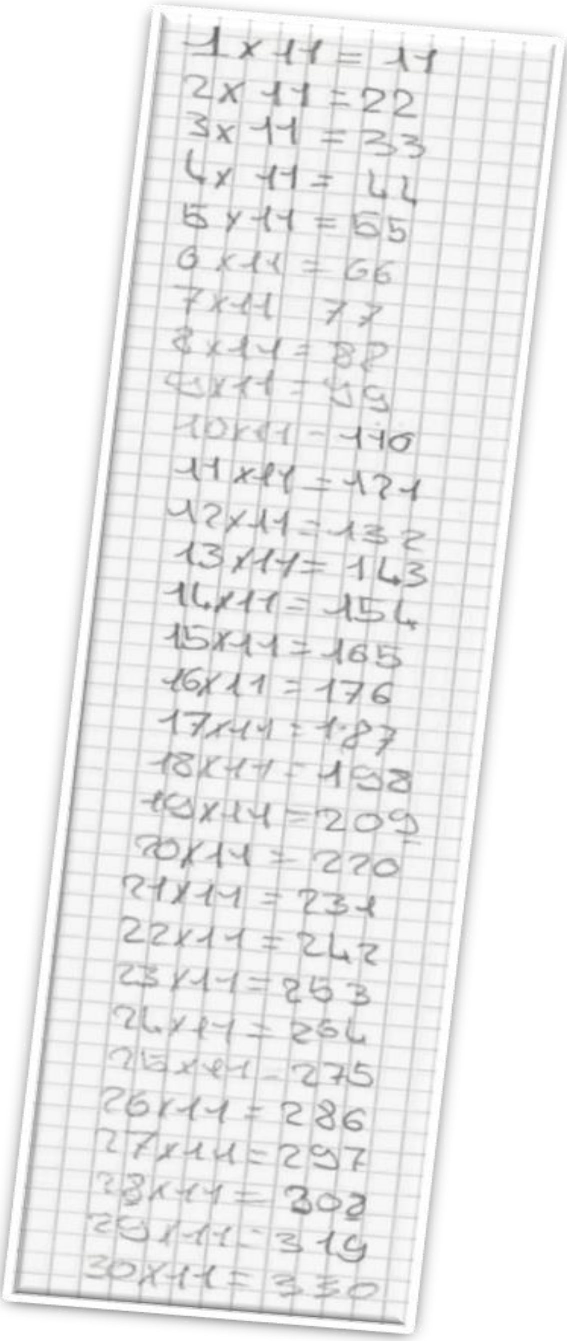
DEL NOTARO C. (2011) Le jeu de tâches, une interaction de connaissances particulière entre expérimentateur et élèves, *Actes du XXXVIII^e colloque COPIRELEM*, IREM de Dijon.

FAVRE J.-M (2008). Jeux de tâches. Un mode d'interactions dynamique pour aménager des expériences mathématiques aux acteurs de la relation didactique dans l'enseignement spécialisé. *Grand N*, **82**, 9-30, IREM de Grenoble.

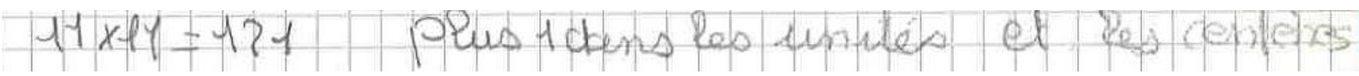
retour sommaire

ANNEXE 1 *CHLOE*

Extrait d'écriture de longues listes pour repérer les régularités.



1 x 11 = 11
2x 11 = 22
3x 11 = 33
4x 11 = 44
5 x 11 = 55
6 x 11 = 66
7x11 77
8x11 = 88
9x11 = 99
10x11 - 110
11x11 = 121
12x11 = 132
13x11 = 143
14x11 = 154
15x11 = 165
16x11 = 176
17x11 = 187
18x11 = 198
19x11 = 209
20x11 = 220
21x11 = 231
22x11 = 242
23x11 = 253
24x11 = 264
25x11 - 275
26x11 = 286
27x11 = 297
28x11 = 308
29x11 - 319
30x11 = 330



11x11 = 121 plus 1 dans les unités et les centaines

ANNEXE 2. *CORENTIN*