

A LA DECOUVERTE DE LA « PASCALINE » POUR L'APPRENTISSAGE DE LA NUMERATION DECIMALE

Sophie SOURY-LAVERGNE

Maître de conférences, INSTITUT FRANÇAIS DE L'EDUCATION

Laboratoire S2HEP

Sophie.Soury-Lavergne@ens-lyon.fr

Michela MASCHIETTO

Chercheur, UNIVERSITE DE MODENA E REGGIO EMILIA

UFR d'Éducation et Sciences Humaines

Laboratoire des machines mathématiques

michela.maschietto@unimore.it

Résumé

Michela Maschietto a présenté dans une conférence plénière de ce Colloque la machine arithmétique Zero+1, nommée « pascaline » en référence à la fameuse machine construite par Blaise Pascal. Cet atelier a donné l'opportunité aux participants de la manipuler, de l'analyser du point de vue de ses potentialités didactiques et de discuter des utilisations en classe pour l'apprentissage de la numération décimale écrite et des algorithmes opératoires. Des éléments d'un scénario d'utilisation de la pascaline, conçu par une équipe d'enseignants italiens, sont présentés. De plus, l'existence d'une simulation de la pascaline dans un cahier d'activités informatisé permet de questionner l'articulation entre outils matériels et digitaux du point de vue de l'apprentissage des élèves et des conditions du réinvestissement de leurs connaissances dans un autre environnement.

Exploitations possibles

Cet article, après avoir présenté ce que pourrait être le début d'un scénario d'utilisation de la pascaline avec des élèves ou celui d'une formation pour les enseignants, questionne les conditions du passage de l'utilisation de l'instrument pascaline pour faire des mathématiques à celle de faire apprendre des mathématiques. Les scénarios d'utilisation de la pascaline proposés et les critiques formulées par les participants à l'atelier, pourraient servir de point de départ à une exploitation de la pascaline en classe.

Enfin, la présentation de la version informatisée de la pascaline fournit un sujet de réflexion sur la construction de tâches et l'orchestration du recours aux artefacts matériels ou informatisés dans une séquence de classe.

Mots-clés

Instrument - Genèse instrumentale - Numération - Décimale - Algorithme opératoire - Activités informatisées - Artefact

A LA DECOUVERTE DE LA « PASCALINE » POUR L'APPRENTISSAGE DE LA NUMERATION DECIMALE

Sophie SOURY-LAVERGNE

Maître de conférences, INSTITUT FRANÇAIS DE L'EDUCATION

Laboratoire S2HEP

Sophie.Soury-Lavergne@ens-lyon.fr

Michela MASCHIETTO

Chercheur, UNIVERSITE DE MODENA E REGGIO EMILIA

UFR d'Éducation et Sciences Humaines

Laboratoire des machines mathématiques

michela.maschietto@unimore.it

Résumé

Michela Maschietto a présenté dans sa conférence plénière la machine arithmétique Zero+1, nommée « Pascaline » en référence à la fameuse machine construite par Blaise Pascal. Cet atelier a donné l'opportunité aux participants de la manipuler, de l'analyser du point de vue de ses potentialités didactiques et de discuter des utilisations en classe pour l'apprentissage de la numération décimale écrite et des algorithmes opératoires. Des éléments d'un scénario d'utilisation de la pascaline, conçu par une équipe d'enseignants italiens, sont présentés. De plus, l'existence d'une simulation de la pascaline dans un cahier d'activités informatisé permet de questionner l'articulation entre outils matériels et digitaux du point de vue de l'apprentissage des élèves et des conditions du réinvestissement de leurs connaissances dans un autre environnement.

La pascaline, dont le nom commercial est « Zéro+1 »⁴⁹ (cf. Figure 19), est une machine à calculer constituée de roues dentées qui évoque les premières machines à calculer à engrenages qui se diffusèrent en Europe à partir du XVII^{ème} siècle. Blaise Pascal (1623-1662) construisit sa célèbre machine pour aider son père, alors collecteur des impôts. Cette machine effectuait des opérations arithmétiques grâce au mouvement de roues dentées, analogues à celles des horloges de cette époque. À partir de l'introduction de la Pascaline, Blaise Pascal fut considéré comme l'inventeur de la première machine à calculer. Cependant, dans deux lettres qu'il écrivit à Johann Kepler (1571-1630), Wilhelm Schickard (1592-1635) décrit une horloge à calculer (1623-1624). Malheureusement, aucun des deux exemplaires ne nous sont parvenus, la copie destinée à Kepler ayant été détruite pendant un incendie.

⁴⁹ Commercialisée par la société italienne Quercetti, elle sera prochainement distribuée en France par l'ARPEME : <http://www.arpeme.fr/>



Figure 19. A gauche, la Pascaline de Blaise Pascal, fermée et ouverte pour montrer les engrenages qui la constitue, à droite, la 'pascaline' Zero+1.

Une lettre de présentation et de description de cette machine a été rédigée par Blaise Pascal à destination de Monseigneur le Chancelier (Pascal B. 1645) pour attirer de potentiels utilisateurs et lui demander de soutenir la diffusion de son invention. Il est intéressant de noter que cette lettre ne révèle en rien la façon de se servir de la machine et n'en souligne que les avantages : « *tu me sauras gré du soin que j'ai pris pour faire que toutes les opérations qui par les précédentes méthodes sont pénibles, composées, longues et peu certaines, deviennent faciles, simples promptes et assurées.* » (Pascal B. 1645, p. 3). C'est à partir de cette introduction historique que la pascaline moderne peut être présentée à des élèves, mettant en évidence qu'il s'agit d'une machine pour calculer. Cela permet d'expliquer l'usage du nom « pascaline » pour cette machine à la place de son nom commercial, qui lui, dévoile d'emblée l'usage potentiel de la machine.

L'appropriation d'une telle machine n'est pas immédiate et de plus son appropriation pour faire des calculs n'implique pas directement de savoir l'utiliser pour enseigner.

Notre contribution écrite suit la structure retenue pour le déroulement de l'atelier. Nous présentons d'abord les éléments d'un scénario de découverte de la machine, permettant à chaque utilisateur, élève ou enseignant, d'en comprendre le fonctionnement pour écrire des nombres et effectuer les calculs arithmétiques annoncés par Blaise Pascal. Nous passons alors à la question de l'instrumentation d'une telle machine pour un objectif d'enseignement relatif à la numération décimale. Nous terminons en présentant la simulation informatisée de cette machine qui permet d'envisager d'autres scénarios d'utilisation avec les élèves, articulant usage de la pascaline et usage de la simulation.

I - ÉCRIRE ET CALCULER AVEC LA PASCALINE

L'atelier s'est déroulé d'une façon analogue à ce que pourrait être le début d'un scénario d'utilisation avec des élèves ou d'une formation pour les enseignants (Maschietto 2010 ; Maschietto & Bartolini Bussi, ces Actes). La machine a été mise à disposition de chacun ou de chaque binôme. Nous avons fait l'hypothèse que l'utilisateur va avoir comme référence l'usage d'une calculette électronique lors de son exploration de la pascaline.

1 Première exploration de la machine

Pour débiter, il faut que l'utilisateur explore la machine et puisse déterminer quels sont ses éléments constitutifs et ses caractéristiques saillantes (processus d'instrumentation, cf II.1 dans Maschietto & Bartolini Bussi, ces Actes). La consigne donnée a été de décrire la machine.

Les participants ont très facilement remarqué dans un premier temps (cf. Figure 19 à droite) :

- deux sortes de roues qui s'entraînent mutuellement, les jaunes numérotées et les oranges ;
- des repères rouges (aussi désignés spontanément par les participants avec les mots triangles, pointeurs ou curseurs) qui désignent la dent sur laquelle un chiffre doit être lu ;
- des flèches violettes (aussi désignées spontanément par les participants avec les mots aiguilles ou index) dont le rôle n'est pas immédiatement perçu.

Dans un deuxième temps, une fois que l'activité d'écriture de nombres a été lancée, d'autres éléments ont pu être identifiés :

- les roues ne sont pas toutes placées dans le même plan (3 niveaux différents), ainsi elles ne s'entraînent pas automatiquement ; d'une part certaines roues jaunes et oranges sont connectées en permanence, d'autre part, des ressorts et les flèches violettes permettent, à certains moments, à une roue d'entraîner la rotation d'une autre roue ;
- la présence d'une virgule qui peut prendre 3 positions différentes (à droite de chaque roue jaune, cf. Figure 19) ;
- les freins (aussi dénommés taquets) qui stoppent la rotation des roues : ces freins déterminent « un cran » pour la rotation de chaque roue, autrement dit, ils discrétisent le mouvement de rotation qui, sinon, serait continu.

Étant donné le public présent, tout le monde a identifié les trois roues jaunes comme étant les roues des centaines, des dizaines et des unités (de gauche à droite).

2 Écrire des nombres

Bien que ce soit un prérequis au calcul, il reste souvent implicite que les premières actions à réaliser pour utiliser une machine à calculer sont de lire et d'écrire des nombres. La consigne donnée a été : « Écrire les nombres suivants : 219 ; 847 ; 35 ; 6 ».

Plusieurs procédures pour écrire le nombre 219 sont possibles parmi lesquelles : (i) la procédure la plus immédiate consiste à tourner chaque roue successivement – écriture par décomposition – en commençant par la roue des centaines, la positionner sur 2 en la faisant tourner dans le sens des aiguilles d'une montre, puis positionner la roue des dizaines sur 1 en la faisant tourner dans le sens des aiguilles d'une montre également et enfin celle des unités sur 9 en la faisant tourner dans le sens contraire mais cela entraîne alors la rotation de la roue des dizaines précédemment positionnée et qu'il faut replacer sur 1 ; (ii) la procédure la plus coûteuse consiste à faire tourner la roue unité 219 fois d'un cran dans le sens des aiguilles d'une montre – écriture par itération ; (iii) la procédure la plus efficace consiste à commencer par la roue unité, la positionner sur le 9 en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, puis positionner la roue des dizaines sur le 1 en la tournant dans le sens des aiguilles d'une montre (ce qui entraîne la rotation de la roue des centaines de 0 à 9) puis de terminer en positionnant la roue des centaines sur le 2 en la faisant également tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette dernière procédure relève encore d'une écriture par décomposition, qui est assujettie à un principe d'économie. Elle n'apparaît pas immédiatement ; dans la plupart des cas, elle doit être sollicitée par une consigne précise. On observe au début majoritairement des stratégies par ajustements successifs.

Cependant, presque toutes ces procédures dépendent de l'état initial de la machine. Ainsi les rotations ne seront pas les mêmes si la machine est initialisée à (000) ou pas. Cette question de l'état initial de la machine n'est pas anecdotique. C'est une action nécessaire également avec les calculatrices électroniques et même pour l'usage d'autres instruments ou d'autres raisonnements mathématiques. Pour la pascaline, elle devient en partie explicite pour l'écriture de nombres inférieurs à 100 ou 10, révélant la nécessité d'inscrire 0 dans les positions non utilisées. C'est au cours du calcul que la réinitialisation devient incontournable.

Ce premier travail d'écriture de nombre amène l'utilisateur à examiner à quelles conditions certaines roues tournent automatiquement, c'est-à-dire sans manipulation de la roue directement

par l'utilisateur. Tout d'abord, la roue des unités entraîne toujours la rotation de la roue orange immédiatement à sa gauche (les deux roues tournant dans des sens opposés), de même la roue des dizaines entraîne toujours la rotation de la roue orange immédiatement à sa gauche (toujours en sens opposé), et la roue des centaines n'entraîne aucune rotation de roue dans aucun cas. Ensuite, le phénomène notable est la rotation simultanée et dans le même sens de deux ou trois roues jaunes. La condition qui provoque la rotation automatique de la roue des dizaines (respectivement des centaines) est l'ajout d'une unité si le chiffre des unités est 9 (respectivement une dizaine si le chiffre des dizaines est 9), voire des deux en même temps. La roue unité lorsqu'elle passe de 9 à 0 ou de 0 à 9 entraîne la rotation dans le même sens d'un cran de la roue des dizaines et éventuellement celle de la roue des centaines. De même, la roue des dizaines passant de 9 à 0 ou de 0 à 9 entraîne la rotation dans le même sens de la roue des centaines. C'est cet aspect de la pascaline, transformant le « 9+1unités » en 1 dizaine (ou « 99+1unités » en 1 centaine ou « 90+1dizaines » etc...) grâce à la rotation automatique de roues d'ordre supérieur qui en fait tout l'intérêt.

3 Additionner et soustraire : la dissymétrie des actions relatives aux deux termes

La consigne proposée a été de « Faire avec la machine les calculs additifs suivants : $4 + 5$; $6 + 8$; $87 + 14$; $24 + 47$ ».

Une procédure consiste à écrire le premier terme de la somme puis à tourner la roue unité dans le sens des aiguilles d'une montre d'un nombre de crans égal au deuxième terme (addition par itération). Cette procédure adaptée aux trois premières additions devient coûteuse pour $24 + 47$, puisqu'il faudrait dénombrer 47 crans (un cran étant un passage d'une dent unité).

Une autre procédure (addition par décomposition) consiste à décomposer le second terme en chiffre des unités et chiffre des dizaines (7 et 4 dans 47) et à faire tourner la roue des unités de 7 crans dans le sens des aiguilles d'une montre puis la roue des dizaines de 4 crans dans le même sens (à noter que l'on peut aussi faire tourner d'abord la roue des dizaines puis la roue des unités). Dans les deux cas, les actions de l'utilisateur ne sont pas analogues pour le premier et le second terme de la somme : le premier terme est écrit, le second est « agit ». L'utilisateur peut alors faire jouer la commutativité de l'addition pour changer l'ordre des termes, ce qui modifie les actions de la procédure et permet d'en réduire le coût.

La différence entre additionner et soustraire tient uniquement au sens de rotation des roues : celui des aiguilles d'une montre pour l'addition, le contraire pour la soustraction. Mais la soustraction n'étant pas commutative, la procédure qui consiste à inverser les actions entre les deux termes ne permet plus d'obtenir le résultat correct.

Enfin, une procédure qui résulte de l'analogie avec l'utilisation de la calculatrice consiste à écrire côte à côte les deux termes, puis à attendre que la machine effectue le calcul. La machine ne produisant rien, l'utilisateur peut alors remettre en cause sa procédure. Il peut aussi la remettre en cause dès que les termes de la somme ont plus de 3 chiffres à eux deux, l'écriture n'étant plus possible. C'est le partage du travail entre l'utilisateur et la machine qui est sous-jacent à ce fonctionnement. L'usage de la pascaline nécessite de nombreuses actions et beaucoup de contrôles de la part de l'utilisateur, d'une autre nature que celles impliquées par l'utilisation d'une calculette.

4 Multiplier et diviser : la nécessité d'une mémoire extérieure à la machine

Le principe sous-jacent à l'utilisation de la pascaline pour multiplier (respectivement diviser) est celui des additions successives (respectivement des soustractions successives).

Ainsi pour multiplier 5 par 7, il faut additionner 7 fois le nombre 5, c'est-à-dire écrire 5 puis additionner 6 fois successivement le nombre 5 et non pas 7 fois puisque le premier 5 est écrit sur la pascaline. Il faut donc mémoriser le nombre de fois déjà réalisé et s'arrêter à 7, puis lire le résultat sur la machine.

Pour diviser 47 par 8, il faut soustraire le nombre 8 et recommencer tant que le résultat est supérieur à 8. Le quotient euclidien est obtenu par le nombre de fois où la soustraction a été effectuée. Le nombre lu sur la machine à l'issue de la procédure est le reste. Le dernier exemple traité dans

l'atelier concerne la division euclidienne de 54 par 16. A nouveau, il faut écrire le nombre 54, puis soustraire 16, soit en faisant tourner uniquement la roue unité 16 fois dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, soit en décomposant 16 en 1 dizaine et 6 unités et renouveler les deux actions autant de fois que nécessaire.

Pour ces deux opérations, multiplication et division, il faut que l'utilisateur sollicite une mémoire annexe pour stocker l'information. Cette mémorisation externe à la pascaline, peut être mentale, écrite, ou encore mettre en jeu les doigts de la main (Figure 2).

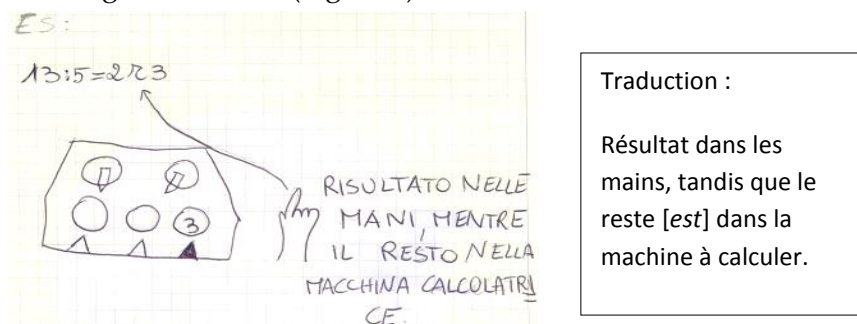


Figure 20. Représentation de la division euclidienne par un élève de CM2 (Canalini Corpacci & Maschietto 2011).

5 Conclusion : première genèse instrumentale de la pascaline

Pour l'enseignant qui découvre la machine, il s'agit d'abord d'en comprendre le fonctionnement pour calculer, c'est à dire pouvoir l'utiliser afin de résoudre des problèmes mathématiques. Au cours du déroulement de l'atelier décrit ci-dessus, l'utilisateur a initié une genèse instrumentale de la pascaline en tant qu'instrument de calcul pour les quatre opérations (Rabardel 1995), éventuellement seulement certaines d'entre elles. Il s'agit d'une certaine manière de faire avec la machine ce qu'on sait déjà faire, de le faire autrement, éventuellement mieux c'est à dire plus vite, plus sûrement comme le dit Blaise Pascal. Dans ce cas, le savoir déjà disponible permet de contrôler ce que fait la machine et d'en interpréter les résultats.

Cependant, la manipulation de la machine crée également d'elle même d'autres problèmes intéressants. Par exemple, en « faisant » $3 - 5$ on obtient 998 ; comment interpréter ce résultat ?⁵⁰ ou bien « Peut-on faire $8 - 3$ en tournant les roues dans le sens des aiguilles d'une montre ? »⁵¹ ou encore « Quels nombres écrire pour obtenir des flèches violettes parallèles ? »⁵².

L'utilisation de la machine génère des configurations nouvelles et des actions qui n'appartiennent pas à son domaine de fonctionnement initial. La question est alors de donner du sens aux manipulations de la machine et aux états obtenus. L'exploration du potentiel sémiotique de l'artefact permet d'explicitier le double lien entre, d'une part, l'artefact et les significations personnelles émergeant de son usage et, d'autre part, entre l'artefact et un certain savoir mathématique (Maschietto & Bartolini Bussi, ces Actes). Par exemple, la procédure qui résulte de l'analogie avec l'utilisation de la calculatrice ne produit rien : si l'utilisateur inscrit deux nombres sur la pascaline (possible dans la mesure où la somme du nombre de leurs chiffres est trois), il ne se passe rien. En effet, la calculatrice fonctionne avec une opération d'addition binaire « + », c'est-à-dire prenant deux variables en entrée : écriture d'un nombre, de l'opérateur puis d'un autre nombre. De son côté, le fonctionnement mécanique de la pascaline repose sur l'opérateur unaire « +1 », ne

⁵⁰ Plusieurs interprétations sont possibles, dont celle de $1003 - 5 = 998$ qui serait obtenue avec une pascaline à 4 roues dentées.

⁵¹ En remarquant que les roues oranges tournent dans le sens inverse de celui des roues jaunes et que la roue orange de droite tourne de façon conjointe avec la roue des unités, il suffit de faire tourner la roue orange dans le sens des aiguilles d'une montre pour soustraire 3.

⁵² Ce problème proposé par les participants de l'atelier a plusieurs solutions : pour les flèches parallèles et de même sens, il faut et il suffit que les deux derniers chiffres soient identiques (par exemple 033 ou 144 etc.), pour des flèches parallèles et en sens inverse, l'écart entre les nombres signifiés par le chiffre des dizaines et celui des unités doit être 5 (par exemple 49 et 94).

prenant en entrée qu'une seule variable car l'action de base qui consiste à tourner une roue d'un cran revient à faire « +1 » à partir du nombre déjà inscrit. En revanche, l'observation de la géométrie des roues est une association productrice de significations intéressantes pour l'usage de la machine. En effet, les roues sont symétriques et ont dix dents. Ainsi, un demi-tour revient à faire « +5 ». L'association de la réalisation de demi-tours de roue au comptage de 5 en 5 permet des procédures de comptage plus rapides. Lors du calcul des sommes, les participants ont justifié cette procédure par un principe d'économie, en termes de minimum de gestes à faire pour atteindre le but.

II - D'UN INSTRUMENT POUR FAIRE DES MATHÉMATIQUES A UN INSTRUMENT POUR FAIRE APPRENDRE DES MATHÉMATIQUES

Qu'est-il possible de faire apprendre en utilisant la pascaline ? Savoir utiliser la machine pour effectuer des calculs ne signifie pas savoir utiliser cet outil pour enseigner. L'approche instrumentale (Rabardel 1995) permet de préciser cette distinction. La constitution d'un instrument résulte d'un processus de genèse instrumentale qui se développe chez le sujet au cours d'activités finalisées. Si les activités et les finalités sont différentes, les instruments constitués le seront également. Ainsi, pour l'enseignant, effectuer le calcul, par exemple $87 + 14$ en utilisant la pascaline, ou plus généralement pour résoudre un problème mathématique est une activité très différente de celle qui consiste à faire apprendre des mathématiques aux élèves, même si l'artefact impliqué dans les deux cas est le même. Les instruments qui résultent de ces deux activités à partir de l'artefact pascaline ne seront donc pas les mêmes. On parle du double processus d'instrumentation de l'enseignant (Tapan 2006, Maschietto 2012). Il s'agit alors de comprendre comment la pascaline peut devenir un instrument d'enseignement, en commençant par définir les notions visées par cet enseignement. Si différentes finalités d'apprentissage sont possibles, la pascaline paraît avoir un potentiel sémiotique important pour travailler l'apprentissage de la numération décimale de position.

1 Manipulation de la pascaline et conceptualisation mathématique

L'introduction par l'enseignant d'un artefact tel que la pascaline dans une tâche proposée à l'élève génère deux processus du point de vue de l'élève. Comme précédemment expliqué, l'artefact provoque une genèse instrumentale. L'instrument qui en résulte chez l'élève, en particulier les schèmes produits par la genèse instrumentale, est validé de façon pragmatique par la situation. Mais dans le même temps, un autre processus opère. L'artefact apporte dans la situation des références culturelles, un savoir embarqué et joue alors le rôle d'un instrument de médiation sémiotique qui permet l'internalisation par l'élève de savoirs mathématiques culturellement partagés. Ce second processus est piloté plus explicitement par l'enseignant, car c'est lui qui peut identifier la référence culturelle et les savoirs partagés par la communauté, présents dans l'artefact, il en est le garant. Finalement, ce sont bien les deux processus que va utiliser l'enseignant pour faire apprendre : en proposant des tâches à l'élève, l'enseignant pilote un processus de genèse instrumentale entre l'élève et l'artefact et dans le même temps un processus de médiation sémiotique du savoir mathématique par l'artefact.

L'enseignant peut utiliser l'artefact comme un instrument de médiation sémiotique, mais quels savoirs sont embarqués dans la pascaline ? Et quelles caractéristiques de la pascaline médiatisent ces savoirs ? Par exemple, le fait que les roues ne soient pas dans le même plan n'est pas une caractéristique pertinente du point de vue du savoir mathématique, en revanche le fait que les roues aient dix dents en est une, manifestant la nécessité de dix chiffres différents pour écrire les nombres en base dix. Une analyse de la machine est nécessaire de ce point de vue en termes de potentiel sémiotique (Maschietto & Bartolini Bussi, ces Actes).

L'apprentissage de la numération décimale implique le concept de nombre. L'analyse du potentiel sémiotique de la machine (ibidem) permet de repérer plusieurs significations et conceptualisations relatives au nombre engendrées par l'utilisation de la pascaline :

- la suite des nombres entiers générés par +1 (en accord avec l'axiomatique de Peano) ;

- un nombre n vu comme n fois (+1) ;
- un nombre $n \leq 999$ vu comme c fois (+100) et d fois (+10) et u fois (+1) avec c , d et u , chiffres de 0 à 9 ;
- les chiffres pour l'écriture symbolique des nombres ;
- la distinction entre chiffre et nombre ;
- la suite des premiers nombres : l'enfant répète la suite des nombres pendant la rotation d'une dent à la fois ;
- la composition des unités en dizaine (dizaines en centaine) dans l'addition et la décomposition (dizaine en unités, ...) pour la soustraction ;

En ce qui concerne les opérations :

- le lien entre addition et soustraction comme opérations inverses ;
- la commutativité de l'addition ;
- la non commutativité de la soustraction, contrairement à l'addition.

Enfin, la pascaline médiatise le fait que la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans l'écriture du nombre : un même chiffre dans deux positions différentes désigne deux valeurs différentes. Avec la pascaline, une même action de base « +1 » (soutenue par la structure de la machine qui empêche la rotation continue des roues) qui porte sur deux objets différents (les roues) génère, dans l'écriture ou lors du calcul, deux valeurs différentes.

2 Éléments du scénario et expérimentation dans le cadre du « plan sciences en Côte d'Or »

Sur la base d'expérimentations didactiques (Canalini Corpacci & Maschietto 2011, 2012 ; Maschietto & Ferri 2007), des collègues italiens (Canalini Corpacci, Ferri & Maschietto 2010) ont élaboré plusieurs scénarios d'utilisation de la pascaline que nous avons partiellement traduits en français⁵³. Ces scénarios, centrés sur l'apprentissage des opérations d'addition et de soustraction, utilisent le calcul comme moyen de travailler la numération décimale. Les différentes stratégies de calcul ont des coûts différents en termes de manipulation (nombre d'actions à produire pour obtenir le résultat). Les procédures utilisant les caractéristiques de la numération décimale sont moins coûteuses et donc plus rapides et assurées.

Nous avons pu lancer une première expérimentation en CE2 pour tester une adaptation de la première situation du scénario italien (cf. Annexe⁵⁴).

Dans la première séance du scénario, la proposition des enseignants a été de faire construire une pascaline par les élèves à partir de roues en papier découpées déjà préparées et qu'ils pouvaient coller sur du papier, donc sans possibilité de les tourner, ni même de les repositionner.

⁵³ Le scénario italien partiellement traduit en français est en ligne sur le site EducMath à l'adresse du projet Mallette dont un des objectifs est la production de scénarios de classe utilisant des duo d'artefacts matériels et virtuels, tels que la pascaline et la e-pascaline : <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/mallette/>

⁵⁴ Les expérimentations de mai 2012 en CE2 ont été réalisées dans le cadre du « Plan sciences en Côte d'Or » mené en collaboration entre l'IFÉ et le grand Dijon : <http://ife.ens-lyon.fr/sciences21>



Figure 21. *Enthousiasme des élèves de CE2 découvrant la pascaline.*

Lors du déroulement, l'engagement des élèves a été notable. Les élèves ont découvert la machine et facilement identifié les éléments suivants : l'entraînement des roues oranges par les roues jaunes, les chiffres jusqu'à 9, le passage de 9 à 0 qui fait "tout" bouger, les repères rouges, le bruit et le rôle des taquets pour générer le bruit, l'analogie avec les montres et les horloges. L'enseignante n'a pas présenté la machine en faisant référence au calcul, elle n'a pas fait non plus d'institutionnalisation sur le vocabulaire (roue, engrenage, dents). Les trois écritures obtenues pour le nombre 13 (instructions données à l'oral) sont : 130 ; 013 ; 333 (cf. Figure 22).



Figure 22. *Les trois écritures obtenues pour le nombre 13, nombre donné à l'oral.*

À part la troisième écriture (à droite, cf. Figure 22), les deux premières attirent l'attention sur le fait qu'une des roues n'est pas utilisée lors de l'écriture d'un nombre à deux chiffres. Puisqu'il n'y a pas de signes visibles sur la machine pour définir la valeur des roues, les deux écritures sont possibles (dans sa version complète, la pascaline est fournie avec une virgule qui par défaut est placée en bas à droite dans le trou du support vert, cf. Figure 22). Il s'agit alors pour l'enseignant de travailler sur l'interprétation de ces écritures et l'utilisation des roues. La deuxième écriture est propre à la pascaline, puisqu'en papier/crayon on n'écrit pas de 0 à gauche. Cela met encore en jeu le rôle du zéro, qui n'est pas seulement celui de l'étiquette d'une dent. Dans l'analyse du potentiel sémiotique et dans la construction des consignes, la présence du chiffre 0 est particulièrement importante, en comparaison avec son rôle dans d'autres artefacts utilisés pour la numération décimale, comme le boulier.

3 Conclusion sur l'instrumentation par les enseignants

Lors de l'atelier, les participants ont remarqué une grande différence entre le scénario italien et le scénario de la Côte d'Or au niveau du poids horaire : le deuxième a paru plus adapté à une école française. Cela

rejoint la remarque sur le temps, faite également par les enseignants de la Côte d'Or, lorsque nous avons travaillé avec eux pour la construction du scénario de classe. Par exemple, la première situation dure six heures dans le scénario italien. La version française reprend les mêmes idées en 2 séances.

La nature et l'intérêt des tâches de la première séance dans le scénario (observation et construction d'un modèle papier de la machine) ont été discutés. Ces tâches semblent relever d'un travail plutôt technologique et ont pour conséquence de rendre statique le travail par ailleurs dynamique sur la pascaline. C'est la référence au cadre théorique (Maschietto & Bartolini Bussi, ces Actes) qui permet de mettre en évidence que l'objectif de la construction de la machine est de garder trace de l'activité de l'élève, de lui permettre de revenir sur sa manipulation de la machine et de mettre en évidence certaines caractéristiques qui n'auraient pas forcément été explicitées lors du travail initial d'exploration. La construction d'une version papier de la pascaline n'a donc pas un objectif technologique (qui serait de pouvoir utiliser ensuite le modèle papier pour résoudre les problèmes) mais plutôt de fournir les traces qui serviront d'appui pour l'enseignant dans la suite du travail.

L'atelier a seulement permis de commencer le travail sur le scénario. Cependant, les participants ont pu appréhender le passage de la manipulation de la machine et de l'analyse de quelques éléments de son potentiel sémiotique à la construction d'un scénario pour la classe et son début de réalisation.

III - LA VERSION INFORMATISEE DE LA PASCALINE

Nous avons conçu une modélisation informatisée de la pascaline (nommée e-pascaline voir Figure 23) avec la technologie Cabri Elem⁵⁵ qui permet de créer des cahiers d'activités informatisés, sorte de petits logiciels (d'autres cahiers développés avec la même technologie sont présentés dans (Soury-Lavergne & Calpe 2012)). L'environnement de conception Cabri Elem permet de créer les objets que l'élève va pouvoir manipuler, de décider de leur comportement à l'interface et de créer les différentes rétroactions pertinentes relatives aux actions de l'élève. Un cahier d'activités informatisé Cabri Elem est organisé en une succession de pages (la Figure 23 montre l'une des pages du cahier Cabri Elem qui contient la simulation de la pascaline), dans lesquelles l'utilisateur navigue à l'aide de flèches, ce qui permet de scénariser l'activité de l'élève en choisissant les variables qui favorisent ou bloquent les procédures possibles. Une fois le cahier conçu, il est utilisable par les élèves et les enseignants directement sans passer par l'environnement de conception.

La e-pascaline a été conçue afin d'être visuellement aussi proche que possible de la pascaline matérielle (cf. Figure 23). Elle apparaît à l'écran de l'ordinateur avec son support vert, cinq roues dentées et emboîtées, trois jaunes en bas et deux oranges en haut, les repères rouges et les flèches violettes. Lorsque les roues sont actionnées par l'utilisateur, elles fonctionnent de façon analogue à la machine matérielle, c'est-à-dire avec les mêmes rotations automatiques de roues (cf. §I - 2). Pour déclencher la rotation d'une roue, et éventuellement celles qui en découlent automatiquement, l'utilisateur doit appuyer sur l'un des deux boutons présents sous la roue, suivant le sens de rotation voulu.

Pendant l'atelier, nous avons demandé aux participants d'explorer la e-pascaline mais nous ne leur avons pas fourni de consignes. Nous avons fait l'hypothèse qu'ils allaient s'appuyer sur l'exploration de la pascaline matérielle, c'est-à-dire mobiliser les schèmes d'utilisation qu'ils avaient commencé à développer dans la première partie de l'atelier.

Lors de l'exploration de cette version de la e-pascaline, les participants ont pu rapidement constater :

- la non rotation des roues en les attrapant par les dents, on ne clique pas sur les roues directement, mais sur des flèches ;

⁵⁵ Mis à notre disposition par la société Cabrilog SA.

- l'existence d'un bouton pour remettre à zéro qui agit comme un ostensif de l'initialisation de la machine ;
- la distinction entre addition et soustraction avant même d'avoir utilisé la machine ;
- l'absence de « feedbacks » sonores ;
- l'absence de certains éléments matériels tels que les taquets de blocage des roues, les différences d'épaisseur ;
- l'orientation fixe ;
- etc.

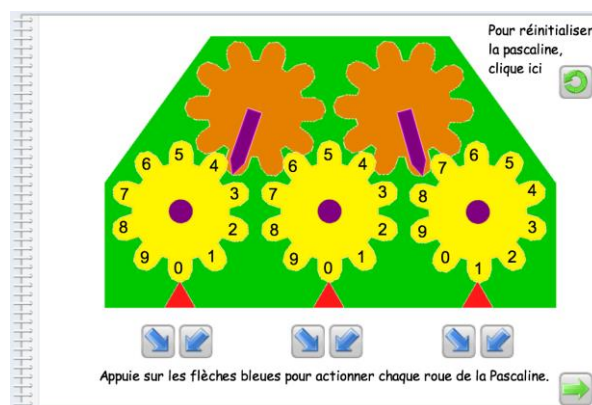


Figure 23. *Page d'un cahier d'activité informatisé qui présente la e-pascaline, une modélisation informatisée de la pascaline.*

La conception de la e-pascaline n'a pas pour but de substituer l'environnement informatique à la machine matérielle dans les usages avec les élèves. C'est dans la perspective d'une articulation entre les deux que nous allons travailler. L'intérêt de disposer d'une version informatisée de la pascaline dans un cahier d'activités informatisé est multiple. Cela permet :

- l'ajout de « feedbacks » en réaction aux actions de l'élève, tant au niveau de la manipulation directe des éléments de la machine (il serait possible de bloquer une roue par exemple), qu'au niveau des affichages et des évaluations (vérification de résultats obtenus par l'élève et des manipulations effectuées) ;
- la mise à disposition de la e-pascaline dans d'autres cahiers d'activités informatisés, dans lesquels elle n'occuperait pas la place centrale mais celle d'un outil parmi d'autres, à côté de la calculatrice par exemple (la e-pascaline peut prendre différentes tailles, ce qui permet de la placer à côté d'autres outils) ;
- la modification du domaine de fonctionnement de la machine (ajout de roues pour travailler avec de plus grands nombres par exemple) ;
- l'évolution de la représentation de la machine : d'une représentation qui mise sur l'analogie avec la machine matérielle à une représentation qui met en évidence la structure de l'écriture décimale des nombres entiers ou encore une évolution esthétique pour la rendre acceptable au niveau du collège.

Les premières pistes pour la conception de tâches avec la e-pascaline pourraient consister à adapter les principes développés dans le cahier « la cible des nombres » (Soury-Lavergne & Calpe 2012).

Maintenant que la version informatisée existe, construite en tirant partie des potentialités et des contraintes de l'environnement de conception Cabri Elem, la construction de tâches et l'orchestration du recours aux artefacts matériels ou informatisés (Trouche 2009) représentent l'enjeu didactique principal. C'est ce point qui a été soumis à la discussion des participants à l'atelier. Cependant, le temps disponible pour l'atelier n'a pas permis à cette discussion d'aller au-delà du constat partagé sur la complémentarité des tâches envisageables dans les deux environnements.

IV - BIBLIOGRAPHIE

CANALINI CORPACCI R., FERRI F. & MASCHIETTO M. (2010) *Alla scoperta dei numeri e delle operazioni con Zero+1. Proposte di percorsi didattici per la scuola primaria.*

CANALINI CORPACCI R. & MASCHIETTO M. (2011) Gli artefatti-strumenti e la comprensione della notazione posizionale nella scuola primaria. La 'pascalina' Zero+1 nella classe: genesi strumentale, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, **34A** (2), 161-188.

CANALINI CORPACCI R. & MASCHIETTO M. (2012) Gli artefatti-strumenti e la comprensione della notazione posizionale nella scuola primaria. La 'pascalina' Zero+1 e sistema di strumenti per la notazione posizionale, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, **35A** (1), 33-58.

MASCHIETTO M. (2010) Enseignants et élèves dans le laboratoire de mathématiques, 9-17, in *Actes des Journées mathématiques de l'INRP "Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources?"*, G. Gueudet, G. Aldon, J. Douaire & J. Trgalova (Eds.), Lyon: INRP Editions, <http://educmath.inrp.fr/Educmath/dossier-parutions/actesJMJ10>

MASCHIETTO M. (2012) Teachers, Students and resources in mathematics laboratory, *Pre-proceeding of ICME 12*, Seoul (Korea), juillet 2012. http://www.icme12.org/upload/submission/1992_F.pdf

MASCHIETTO M. & FERRI F. (2007) Artefacts, schèmes d'utilisation et significations arithmétiques, 179-183, in *Mathematical Activity in classroom practice and as research object in didactics: two complementary perspectives, Proceeding of the CIEAEM 59*, J. Szendrei (Ed.), Dobogókő (Hungary).

MASCHIETTO M. & BARTOLINI BUSSI M.G. (ces Actes) Des scénarios portant sur l'utilisation d'artefacts dans l'enseignement et apprentissage des mathématiques à l'école primaire.

PASCAL B. (1645) *Lettre dédicatoire à monseigneur le chancelier sur le sujet de la machine nouvellement inventée par le sieur B. P. pour faire toutes sortes d'opérations d'arithmétique par un mouvement réglé sans plume ni jetons* <<http://abu.cnam.fr/cgi-bin/go?machine3,1,20>>

RABARDEL P. (1995) *Les hommes et les technologies : une approche cognitive des instruments contemporains*, Paris : Armand Colin.

SOURY-LAVERGNE S. & CALPE A. (2012 à paraître) Mathématiques dynamiques pour l'école primaire et mallettes de ressources, in *Actes des Journées Mathématiques de l'IFÉ*, Aldon G. et al. (Eds.), juin 2012.

TAPAN M.S. (2006) *Différents types de savoirs mis en œuvre dans la formation initiale d'enseignants de mathématiques à l'intégration de technologies de géométrie dynamique*, Thèse de doctorat, Grenoble : Université Joseph Fourier.

TROUCHE L. (2009) Penser la gestion didactique des artefacts pour faire et faire faire des mathématiques : histoire d'un cheminement intellectuel, *L'Éducateur*, **0309**, 35-38.

[retour sommaire](#)

V - ANNEXE - SCENARIO D'UTILISATION DE LA PASCALINE EN CE2

Il s'agit de la première séance de la situation A du scénario italien, reprise et modifiée par une équipe d'enseignants de Dijon.

Objectifs :

- identification et description des éléments constitutifs de la machine ;
- observation de deux manières possibles de faire tourner les roues (dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) ;
- écriture des nombres.

Matériel nécessaire

Au moins une pascaline pour trois élèves, copies des fiches, 5 roues dentées découpées dans du papier par élève (fabriquées en imprimant une fiche), colle.

Séance 1, durée 1 h

Phase 1 : Travail en binôme

1 – Décris en quelques mots la pascaline par écrit. A quoi peut-elle servir ?

2 – Fabrique là avec les roues en papier. Place-les sur ton cahier comme celles de la pascaline et colle-les .

Écris les chiffres sur les dents des roues et dessine des flèches pour indiquer les sens de rotation.

Phase 2 : Mise en commun collectif

Questions pour aider à la description:

- 1) La machine est constituée d'un mécanisme à engrenage ; combien de roues composent cet engrenage ?
- 2) Que peux-tu voir sur les trois roues du bas ?
- 3) Comment les roues dentées bougent-elles ?
- 4) En tournant la roue en bas à droite, que se passe-t-il ? Y a-t-il une autre roue qui tourne en même temps ?
- 5) À ton avis, à quoi sert la roue en bas à droite ?

Vocabulaire attendu:

- roues dentées numérotées ou non qui tournent dans 2 sens
- repères rouges qui indiquent les chiffres
- entraîner
- déclic

Phase 3 : Travail individuel

Écrire le nombre 13 sur la pascaline. Dessiner la pascaline et expliquer comment on écrit 13.