LA PLACE DES MATHEMATIQUES DANS UNE SITUATION EXPERIMENTALE : ETUDE DE LA FONTE D'UN GLAÇON EN CYCLE 2

Bertrand LEBOT
PIUFM, IUFM Poitou Charentes/IREM de Poitiers
bertrand.lebot@univ-poitiers.fr

Résumé

Durant cet atelier, une séance de science a été observée, au cours de laquelle les élèves étudient la variation de la température pour comprendre la fonte du glaçon. En particulier, les participants se sont attachés à repérer le moment où un objet mathématique, en l'occurrence le graphique, est introduit, et la technique ostentatoire mise en œuvre par l'enseignant pour y arriver.

S'est posée ensuite la question de l'articulation de cette séance avec un travail mathématique sur les graphiques (situation initiale, de recherche ou de réinvestissement).

Pour finir cette réflexion, la relation entre une démarche mathématique et une démarche d'investigation est mise en perspective, en essayant d'utiliser sur une situation non géométrique les différents modes de pensées géométriques de Gonseth et les espaces de travail géométrique de A. Kuzniak et C. Houdement.

Exploitations possibles

Mise en œuvre de séance mathématiques et sciences en classe.

Analyse de l'articulation entre mathématiques et sciences.

En formation, réflexion sur la démarche d'investigation à partir d'une étude de cas.

Réflexion théorique sur les espaces de travail de Kuzniak et Houdement.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Sciences. Température. Graphique. Espaces de travail.

LA PLACE DES MATHEMATIQUES DANS UNE SITUATION EXPERIMENTALE : ETUDE DE LA FONTE D'UN GLAÇON EN CYCLE 2

Bertrand LEBOT
PIUFM, IUFM Poitou Charentes/IREM de Poitiers
bertrand.lebot@univ-poitiers.fr

Résumé

Durant cet atelier, nous observerons d'abord une séance de science où les élèves étudient la variation de la température pour comprendre la fonte du glaçon. Nous nous attacherons en particulier à repérer le moment où un objet mathématique, en l'occurrence le graphique, est introduit, et la technique ostentatoire mise en œuvre par l'enseignant pour y arriver.

Nous pourrons alors nous poser la question de l'articulation de cette séance avec un travail mathématique sur les graphiques (situation initiale, de recherche ou de réinvestissement).

Pour finir cette réflexion, nous nous interrogerons sur la relation entre une démarche mathématique et une démarche d'investigation en essayant d'utiliser sur une situation non géométrique les différents modes de pensées géométriques de Gonseth et les espaces de travail géométrique de A . Kuzniak et C. Houdement.

Cet atelier s'est articulé autour d'une vidéo du CRDP de Montpellier (2007) mettant en œuvre une situation d'investigation. Nous avons d'abord étudié les différents ostensifs employés dans la situation. Cela a mis en évidence les spécificités des démarches d'investigation et de résolution de problème ainsi que l'identification de deux enjeux de savoir : la notion de température et la gestion des données.

L'étude de la température a donné lieu à une étude historique du thermomètre puis des enjeux de savoir. Il est apparu que deux contrats didactiques cohabitaient liés à deux paradigmes différents.

En exhibant les notions mathématiques en jeu, l'organisation de données et leur représentation, nous avons cherché les critères que devrait contenir une situation permettant d'aborder les tableaux et les graphiques. Il en est ressorti deux variables : la quantité de données et le traitement qui devait en être fait.

Nous en avons conclu qu'en l'état actuel, il semblait difficile de construire de nouvelles connaissances mathématiques à partir de situations externes à celles-ci même si certains courants actuels semblent indiquer une évolution des pratiques.

I - LA VIDEO

La vidéo étudiée est extraite de la banque de situations didactiques du site du CRDP de Montpellier. Il s'agit de la séquence « *Le cahier d'expériences, enseigner les sciences au cycle 2* ». Elle a été proposée en formation initiale et continue de notre département pour donner un exemple d'organisation d'une démarche d'investigation. Ce n'est pas ainsi qu'elle est présentée sur le site et il est donc nécessaire de prendre une certaine distance avec les critiques qui en seront faites.

La mise en œuvre de la démarche d'investigation est toutefois conforme aux observations faites dans des classes par les enseignants.

1 La démarche d'investigation :

L'introduction commune aux disciplines scientifiques du collège (MEN 2008 p 11 et 12) propose un guidage pour permettre de faire naître un questionnement et d'y répondre :

- Choix une situation problème
- Appropriation du problème par les élèves
- Formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles
- Investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves
- Échanges argumentés autour des propositions élaborées
- Acquisition et structuration des connaissances
- Mobilisation des connaissances

Les textes indiquent deux moments distinguant les disciplines scientifiques et les mathématiques : les étapes 4 et 5.

Ce protocole veut laisser une plus grande place à l'élève pour qu'il construise son savoir. Or, dans la séquence, l'enseignant use à différents moments de phénomènes d'ostensions[46], assumées ou déguisées, pour pouvoir mettre en place la formulation de conjectures et les échanges.

D'autre part, différents obstacles[47] apparaissent lors de la mise en place de la connaissance visée (l'évolution de la température lors du changement d'état de l'eau).

Après avoir visionné le film et identifié les différents moments correspondant à la démarche d'investigation, nous avons repéré les ostensions les plus visibles et recherché les obstacles apparents.

2 Les ostensions principales

Le premier phénomène ostentatoire observé est l'introduction de la température pour arriver à élaborer la situation expérimentale. À plusieurs reprises, l'enseignant va rediriger les propositions des élèves pour que la notion de température émerge. Cette température va être centrale dans l'expérience. Il s'agit là d'une première ostension. Mais comme cela a été souligné dans l'atelier, était-il possible d'introduire la notion de chaleur sans employer le terme de température ? D'où la nécessité de préciser la distinction entre la température et la chaleur et de se demander si elle est abordable pour des élèves de CE1. Toutefois c'est un élève qui a proposé de repérer la température et dans les habitudes sociales, on ne distingue pas la température de la chaleur.

Ainsi il y a dans cette situation plusieurs obstacles : ceux concernant les élèves mais aussi ceux concernant l'enseignant avec en particulier la question du temps didactique. L'enseignant est obligé d'introduire certaines notions pour que la séance tienne dans le temps imparti.

Ainsi on constate que la température est omniprésente lorsque l'enseignant circule dans les groupes où il insiste particulièrement sur celle-ci au niveau des relevés. Le temps est le second paramètre sur lequel il revient. Ces deux éléments sont les deux paramètres qui vont permettre d'élaborer un graphique pour

---

46 Nous retiendrons comme définition celle citée par Berthelot et Salin dans leur thèse et qui est empruntée à Ratsimba-Rajohn : « *présentation ostensive comme la donnée par l'enseignant de "tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée"*. »

47 Trois types d'obstacles ont été repérés (A. Bessot – 2003 , p 20) : ontogénétique, didactique, épistémologique. Nous parlerons ici du troisième et retiendrons la définition suivante : « *une connaissance, comme un obstacle, est toujours le fruit d'une interaction de l'élève avec son milieu et plus précisément avec une situation qui rend cette connaissance ''intéressante''* »

arriver aux conclusions souhaitées. Nous identifions ici un second phénomène d'ostension mais sur l'objet mathématique des graphiques.

2.1 Les programmes

Après ces constatations et la problématique de la température, nous nous sommes questionnés sur l'adéquation de la situation avec les programmes du cycle 2.

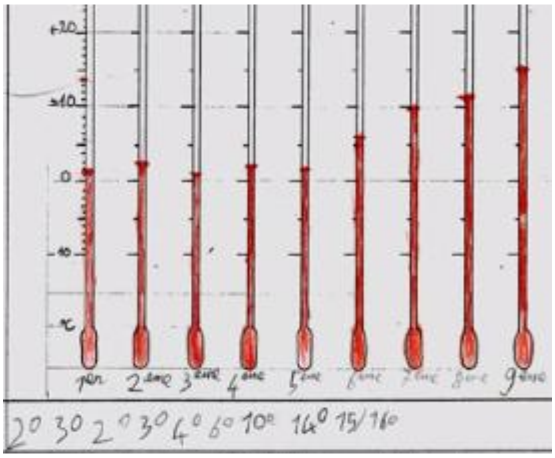
Ceux-ci précisent dans la « *découverte du monde* » (BULLETIN OFFICIEL - 2008) que « [Les élèves] *distinguent les solides et les liquides et perçoivent les changements d'état de la matière* ».

La même connaissance est reprise en cycle 3 dans le cadre de la matière. L'étude se fait alors autour de l'eau vue comme une ressource. On étudie alors les « *états et changements d'état ; le trajet de l'eau dans la nature, le maintien de sa qualité pour ses utilisations* ».

Or la notion de changement d'état n'apparaît pas dans le discours de l'enseignant. Est-ce trop complexe ? Comment pouvait-on l'introduire ? Il semble que dans notre cas, l'objectif soit davantage de montrer l'évolution de la température au cours de la fonte du glaçon.

2.2 Le statut du graphique

Pour y arriver, l'enseignant s'appuie sur des dessins de thermomètres :



Ceux-ci nous interrogent sur le statut de cette représentation : est-ce un dessin ou est-ce que cela a acquis le statut de graphique ? Ce qui nous a amené à prolonger notre questionnement sur ce que peut être un graphique. D'ailleurs, n'est-ce pas un diagramme en barre ?

Les réservoirs dessinés nous amènent à considérer qu'il s'agit encore d'un dessin. Ils font explicitement référence au thermomètre. Mais en les présentant les uns à côté des autres avec une graduation commune le dessin devient ambigu. On peut considérer qu'il ne prendra le statut de graphique que lorsque l'enseignant aura supprimé les réservoirs. Une première image des graphiques est installée dans cette situation. Ainsi nos échanges nous ont permis de conclure qu'il y avait là un phénomène ostentatoire dont la pertinence reste à interroger.

L'origine en est un obstacle épistémologique mathématique : quand est-ce qu'un dessin devient un graphique ? Pour qu'il change de statut, il serait nécessaire que ces thermomètres aient une autre valeur sémiotique et qu'ils représentent la dépendance de deux grandeurs : la température en fonction du temps.

Or en notant en bas 1er thermomètre, 2e thermomètre, … le temps est introduit de façon dissimulée. Il s'agit davantage de marquer une succession d'événements alors que l'enseignant a bien insisté pour que les températures soient prises à intervalle de temps régulier. C'est un nouveau phénomène ostentatoire.

Après cette première analyse la question de l'objectif de la séance doit être reprécisée.

II - POUR L'ENSEIGNANT, UNE POSTURE PARTICULIERE

1 Objectif mathématique ou scientifique ?

Lors du visionnage de la situation et de l'observation des questions de l'enseignant, nous avons constaté que les deux obstacles précédents correspondaient à deux savoirs appartenant à des plans distincts. S'agissait-il de faire découvrir un nouvel outil d'analyse (le graphique) ou de mettre en évidence une caractérisation du changement d'état ?

Ainsi ce qui devait être à l'origine une situation problème a perdu sa lisibilité. Les différents éléments de sciences et de mathématiques ont dû être induits réduisant les initiatives des élèves.

Nous avons identifié une autre origine possible de cette confusion. Il y a juxtaposition de deux problèmes :

- Qu'est ce qui se passe derrière le cache après que le glaçon est resté à l'air durant 15 min ?
- Comment varie la température pendant la fonte du glaçon dans le verre d'eau ?

Le montage a pu supprimer différents moments de la gestion de classe, la vidéo devant surtout montrer la gestion des différents moments de la démarche d'investigation et la place des traces écrites.

Toutefois, certaines interventions de l'enseignant montrent le choix de se centrer sur une problématique, se positionnant ainsi comme le directeur de la recherche.

2 Une ostension assumée

Pour répondre à la première question (le glaçon caché), les élèves font différentes hypothèses, proposant des hypothèses autour des échanges thermiques. Il s'agit alors de la formulation d'hypothèses explicatives (cf atelier A3 : « *Quelles différences entre hypothèse et conjecture dans la validation en sciences et en mathématiques ?* »). Les hypothèses étant trop ouvertes, l'enseignant choisit une piste d'exploration ouvrant alors sur la seconde question.

Cette aptitude est caractéristique des enseignants chevronnés qui utilisent un questionnement ouvert. Ils sont capables de sélectionner les éléments pertinents qui leur permettront d'arriver à l'objectif qu'ils se sont fixé sans perdre l'intérêt des élèves.

Les descriptions des activités de la main à la pâte proposent souvent ce type de gestion. Elles présentent les différentes propositions possibles ainsi que les erreurs expérimentales que l'on peut rencontrer. Des propositions de questionnement sont faites pour arriver à l'objectif. Ainsi dans LA MAIN A LA PATE (2002 p14), sont données « *à titre indicatif, une série de questions, accompagnées de quelques éléments de réponse qui pourront introduire les expériences [optionnelles] proposées à la fin de ce chapitre* ».

Ce même phénomène d'ostension assumée se retrouve d'ailleurs en mathématique : à l'issue d'un débat, différents types d'hypothèses sont faites dont certaines seront admises (atelier A3) d'où la nécessité lorsque l'on donne un problème ouvert d'envisager les différentes hypothèses et de connaître les raisons qui guident celles-ci afin de pouvoir faire une sélection justifiée auprès des élèves.

Cela tient à la nature de ce type de problèmes ouverts qui font intervenir différents champs disciplinaires. Ils deviennent complexes et se caractérisent alors par la possibilité de rencontrer plusieurs savoirs distincts à partir d'une même situation initiale. Être capable de les articuler est un atout car nous avons alors une phase de dévolution commune à plusieurs situations d'apprentissage. D'où l'intérêt de se questionner sur la place des mathématiques dans les sciences : si nous trouvons des réponses, il sera possible d'appuyer la construction de nouveaux savoirs mathématiques à partir de situations vécues en science ou de les réinvestir.

3 Les PER

Cette approche a inspiré l'IREM de Poitiers avec la notion d'Activités (AER) et de Parcours d'Étude et de Recherche (PER) de CHEVALLARD (2004).

Dans ce cadre théorique, l'enseignant est reconnu comme le directeur de recherche qui va accompagner les élèves dans « *un PER […] engendré par une question Q à fort pouvoir générateur, susceptible d'imposer de nombreuses questions dérivées et de conduire ainsi à rencontrer un grand nombre de savoirs à enseigner – et quelques autres, qui marqueront la limite provisoire du chantier*. » (p14).

Avec ce statut, l'enseignant peut justifier son choix par rapport aux limites fixées par les programmes ou les contraintes temporelles.

Un nouveau travail de l'enseignant en amont est alors de trouver autour de cette question les éléments qui vont l'aider à faire ses choix. Cela guide une nouvelle organisation des savoirs mathématiques. En particulier, certaines situations permettront à certains moments des premières rencontres et d'autres serviront au travail de la technique (CHEVALLARD 2002).

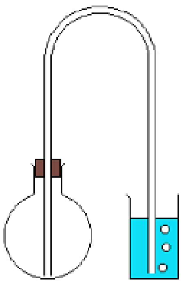
III - LA TEMPERATURE

1 Le thermomètre (BIREMBAULT 2012 illustration[48])

L'histoire du thermomètre est marquée par trois instruments

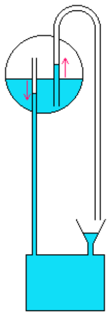
1.1 le thermoscope de Philon de Byzance

Construit en 250 avant notre ère, le mécanisme « *comprend un ballon de plomb, vide et muni d'un bouchon étanche ; une des branches d'un tube de verre, en forme d'U renversé, traverse le bouchon, tandis que son autre branche descend au fond d'un vase plein d'eau. Lorsque l'appareil est exposé au soleil, l'air qui se dilate dans le ballon de plomb provoque l'émission de bulles dans l'eau du vase. Puis, si l'on place l'appareil à l'ombre, l'air se refroidit dans le ballon, et l'eau du vase monte dans le tube de verre pour s'écouler ensuite dans le ballon.*»



[48] http://mpicartier.free.fr/ancien_site/temperature/histoire/his_temp.htm

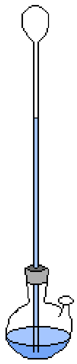
1.2 Le thermoscope de Héron d'Alexandrie



Réalisé en 100 avant notre ère, il est constitué d'«*une boîte parallélépipédique pleine d'eau, munie d'une ouverture la faisant communiquer avec l'atmosphère, et surmontée par un ballon partiellement rempli d'eau ; un tube vertical plongeant dans la boîte débouche au-dessus du niveau de l'eau. Une branche d'un autre tube, en forme d'U renversé, traverse le ballon par un joint étanche et descend jusqu'à la partie inférieure de celui-ci ; l'autre branche de ce tube surmonte un entonnoir placé sur l'ouverture de la boîte. Quand l'appareil est exposé au soleil, l'air contenu à la partie supérieure du ballon refoule dans le tube en U de l'eau qui alimente l'entonnoir et tombe dans la boîte. Lorsque l'ensemble est placé à l'ombre, l'eau de la boîte remonte dans le ballon sous l'effet de la pression atmosphérique.*

1.3 Le thermomètre

Réalisé par un professeur de médecine théorique italien Santorio Santorio (1561 – 1636). L'objectif était de suivre l'évolution de la fièvre chez ses malades. Il « *eut, le premier, l'idée de transformer l'appareil de Héron d'Alexandrie de manière à pouvoir mesurer le degré de chaleur. L'instrument qu'il conçut est un thermomètre à air, constitué par une petite boule de verre, surmontant un tube ouvert, long et étroit, qui plonge dans un vase plein d'eau. Lorsque le changement de température de l'air qui surmonte l'eau en fait varier le volume, celle-ci se déplace dans le tube, en colonne. Le malade introduisait la petite boule de verre dans sa bouche ou la tenait dans le creux de la main, puis Santorio notait le déplacement de la colonne d'eau.* »



1.4 Relation thermomètre / température

Le principe commun à tous ces appareils repose sur la dilatation d'un liquide. Ce principe semble de notre point de vue, difficile à faire acquérir à un élève de cycle 2. Il s'agit là d'un obstacle ontologique complexe qui nécessitera des aménagements pour le rendre accessible. Dans la situation observée, la conclusion repose sur l'utilisation du thermomètre pour "montrer" l'évolution de la température au cours du temps.

Les conclusions dépendent pour l'essentiel de cet objet.

Lors de nos échanges nous avons conclu que le thermomètre pouvait être employé comme une boîte noire ou à partir de son usage social. Il permet de donner une représentation à un phénomène qui n'est pas perceptible à partir des sens et d'arriver aux conclusions voulues. Mais faut-il rester sur cette notion de boîte noire ?

D'autres questions se posent alors : comment se construit la graduation du thermomètre ? Quel choix d'échelle ? Ces questions ne seront pas traitées dans la scolarité des élèves. Le repérage d'une température à partir de la longueur d'un segment n'est jamais questionné. Or le thermomètre comme tout autre instrument de mesure devrait être étudié durant celle-ci afin que les déductions que l'on fera de sa lecture ne puissent pas être remises en cause. Dans la séance, son introduction n'est pas prise en charge. Or cette situation est centrale pour définir le 0° C : celui-ci caractérise le changement d'état de l'eau, élément de référence dans la vie de l'homme. Le passage de l'élément liquide à l'élément gazeux va définir le second point qui permettra d'établir la mesure. Le partage en 100 unités de l'écart entre ces deux points est un choix pratique permettant de rester dans le domaine des nombres entiers pour mesurer des températures.

2 Conséquence sur le contrat didactique

Notre étude nous a amenés à conclure que le relevé des mesures suffisait à observer sa progression. D'ailleurs un tube dans lequel l'eau pouvait monter ou descendre en fonction de sa chaleur pouvait suffire pour mettre en évidence l'évolution de la température. Mais cela n'enlevait pas la difficulté d'associer le changement de température au phénomène de dilatation.

Cette observation indique une rupture du contrat didactique des sciences. Dans celui-ci, les élèves doivent émettre une hypothèse puis concevoir et réaliser un protocole expérimental pour la vérifier. Or sur ce que nous avons observé, les élèves n'ont pas émis l'hypothèse (l'enseignant les a amenés à la formuler autour de la notion de température) et ils n'ont pas construit l'expérience qui pouvait leur permettre de la vérifier. La représentation des thermomètres a été donnée par l'enseignant. Quelle est la raison de cette modification du contrat : le thermomètre ? Le graphique ?

Un autre obstacle didactique cette fois, se met en place pour notre enseignement des mathématiques : alors que dans l'expérience la validation s'est faite par induction, dans le domaine mathématique il devra se faire par déduction. Ces changements ne sont pas explicités aux élèves.

Notre discussion nous a amenés à aborder les concepts scientifiques qui vont évoluer tout au long de la scolarité des élèves comme elles ont pu évoluer dans l'histoire des sciences. Peut-on faire une analogie avec l'avancée des connaissances mathématiques ? Un élément pourrait les différencier : « *une étude en termes de problématisation (avec exploration des possibles, construction de nécessités dans une tension entre des registres empirique et théorique, rapport au « vrai ») apparaît plus fructueuse pour établir des distinctions* [entre la démarche d'investigation en mathématiques et en sciences de la vie et de la Terre] *fondement du vrai et critères de validité* » (HERSANT – ORANGE RAVACHOL 2012).

3 Les choix des hypothèses

Une problématique commune à la résolution de problème et à la démarche d'investigation porte sur la place des hypothèses : doit-on vérifier toutes celles qui sont émises par les élèves ou l'enseignant a-t-il le droit de par son statut de directeur de recherche de choisir celles qu'il estime les plus pertinentes ? Mais c'est un non-choix car le temps imparti impose nécessairement un choix. Il ne pourra vérifier toutes les hypothèses. Il en laissera simplement plus ou moins de côté. Son choix se fait donc par rapport à des contraintes de temps et de cohérence. Cette cohérence se définit par la pertinence des erreurs que ces hypothèses peuvent contenir. Par exemple, certaines seront retenues car elles porteront des représentations erronées qu'il faudra corriger. Un autre critère de choix vient de l'objectif de la séance : s'il s'agit d'un travail portant sur la méthodologie de la résolution de problème ou de la démarche d'investigation, il est intéressant de prendre le temps d'en étudier une grande partie afin d'apprendre aux élèves à sélectionner celles qui vont dans le sens du questionnement. Si l'objectif est d'apprendre une nouvelle notion alors l'enseignant sera plus directif pour ne retenir que celles qui vont dans ce sens.

Ainsi le travail sur les hypothèses pourrait suivre le protocole du calcul mental : des séances régulières de travail sur des résolutions de problèmes (en mathématiques ou en science) et ponctuellement, une séance de travail où les procédures et les choix d'hypothèses seraient détaillés.

Ce travail pourrait être envisagé au début de chaque situation problème avant même d'envisager de le considérer comme un problème disciplinaire. C'est le choix que nous avons fait à l'IREM de Poitiers dans nos brochures de sixième sur les grandeurs (IREM POITIERS). Au début de chaque étude, il y a un temps où la classe échange autour du thème. Après une ou deux séances, certaines hypothèses sont retenues pour être approfondies, pour d'autres c'est l'enseignant qui prend en charge les explications et enfin une troisième catégorie sera abandonnée car ne permettant pas de répondre au problème disciplinaire.

Cela nécessite pour les enseignants d'avoir une formation davantage centrée sur la démarche de recherche : rechercher des problèmes pertinents, les problématiser, émettre des hypothèses et les méthodes de vérifications, analyser les résultats obtenus. C'est ainsi que pourrait prendre place dans la formation en master l'initiation aux travaux de recherche.

Toutefois pour de nouveaux enseignants n'ayant pas encore l'expertise qui leur permette de se dégager de la gestion de classe, il est difficile de rajouter en plus l'incertitude d'une situation ouverte.

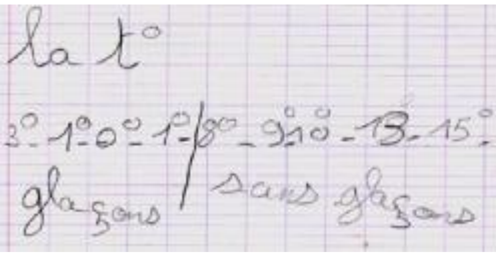
IV - LE GRAPHIQUE

Après nos échanges autour de la situation expérimentale sur le changement d'état, nous nous sommes interrogés sur la place du graphique dans cette expérience.

1 Les objets mathématiques

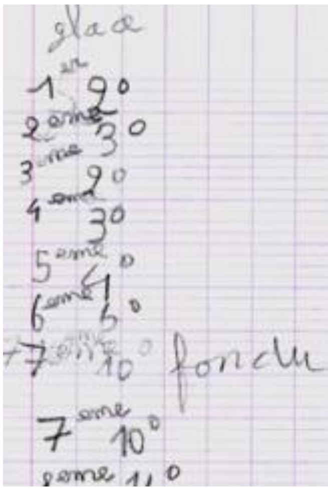
Dans cette activité, nous avons identifié comme type de tâche, l'organisation de données. Nous avons relevé trois techniques pour y répondre : le relevé de données, leur organisation, le choix d'une représentation pertinente.

Les productions des élèves montrent les différentes techniques qu'ils ont pu employer pour relever leur température.



Production 1

Production 2



Production 3

Elles montrent une progression de l'organisation des données qui va de la liste à l'utilisation d'un tableau. Or en cycle 2, les élèves doivent « *Lire ou compléter un tableau dans des situations concrètes simples* » (Progression pour le cours préparatoire et le cours élémentaire première année – BO 2008). Et de façon plus globale durant ce cycle, « *l'élève utilise progressivement des représentations usuelles tableaux, graphiques* » (p18).

Ainsi son usage peut s'expliquer soit par une habitude sociale ou soit par un travail régulier dans la classe par l'enseignant.

2 Objets d'apprentissage mathématique ?

Les productions montrent une échelle dans l'organisation des données : d'abord, il s'agirait d'une présentation linéaire et passerait progressivement à une organisation mettant en relation deux grandeurs. La première production est un relevé de mesures mises bout à bout, les deux autres mettent en évidence une chronologie. L'enseignant en imposant un temps régulier fait ressortir deux variables cachant une relation fonctionnelle entre la température et le temps. Nous nous sommes alors demandé dans quelle limite cet apprentissage était mathématique.

Les registres de représentations de DUVAL (1993) peuvent nous donner des indications. Dans cet article, il souligne la complexité des représentations utilisées en mathématique. En particulier «*[*les représentations*] qui s'annoncent comme les plus complexes concernent naturellement l'activité de conversion dans laquelle la représentation de départ est un énoncé en langue naturelle ou un texte. Tous les problèmes de "mathématisation", c'est-à-dire ceux qui visent à faire découvrir l'application de traitements mathématiques déjà acquis à des questions plongées dans des situations non mathématiques quotidiennes ou professionnelles, [...], en sont l'exemple le plus élémentaire. La résolution de tels problèmes dépend d'abord de la compréhension de l'énoncé et de la conversion des informations pertinentes qui y sont présentées: il s'agit de passer d'une description discursive des objets relevant du champ de la question posée à une écriture symbolique (numérique ou littérale) de leurs relations telles qu'elles sont marquées linguistiquement, et souvent de façon très variable, dans le texte de l'énoncé. C'est seulement à partir de cette écriture symbolique que les traitements mathématiques […] peuvent être appliqués.* »

Ainsi avons-nous considéré que l'organisation de ces données pouvait être considérée comme un apprentissage mathématique si le traitement était mathématique.

La représentation sous forme de tableau de valeurs se retrouve dans les écrits de l'antiquité. Des tablettes, qui contenaient des relevés de mesures sur de longues périodes, permettaient en astronomie d'anticiper des événements comme les équinoxes, les solstices, les changements de lune ou les éclipses (PICHOT 1991 p150 par exemple). Ce furent les premières représentations de relations fonctionnelles.

Ainsi l'étude proposée sur la vidéo est à rapprocher de la notion de fonction qui sera développée ultérieurement.

3 Pertinence de la situation pour construire une nouvelle connaissance mathématique

Est-il légitime de traiter en terme mathématique ces relevés de températures ? En particulier est-ce qu'elle justifie un travail sur la construction d'un tableau ?

Les élèves ont donc réalisé les relevés de température dans le cadre d'une activité en science. Nous avons observé que certains avaient jusqu'à 8 relevés. Est-ce que cette liste de nombres permet de voir l'évolution de la température ? Est- il nécessaire de développer l'outil pour l'analyser ?

Employer des représentations qui sont présentes dans le quotidien des élèves a été un premier argument.

Ces relevés soulèvent le problème du passage du discret au continu. Alors que les températures évoluent sans discontinuer, le choix de représenter la hauteur de liquide dans les thermomètres induirait une représentation en bâtons. C'est le même type de diagramme que l'on utilise pour les précipitations, phénomène discontinu. Ainsi dans un même champ disciplinaire, la météorologie, deux phénomènes appartenant à deux cadres mathématiques distincts se côtoient. Les outils mathématiques de traitements seront distincts. Mais doit-on l'expliciter à ce niveau ? Faut-il éviter cette juxtaposition ? Ainsi doit-on questionner les élèves sur ce qui se passe entre deux relevés ? Est-il possible qu'il y ait une température qui sorte de la courbe ? Le moment n'est peut être pas légitime. Il s'agit d'une première rencontre et il est peut être trop tôt pour introduire des monstres. Il faut laisser le temps à une nouvelle connaissance pour s'installer afin que l'élève soit réceptif aux révolutions (au sens de KUHN (1970)) qu'il devra vivre par la suite.

Toutefois si on veut construire une représentation pour les élèves de CE1 de l'évolution de la température, le graphique peut être introduit comme inducteur de problématisation pour faire évoluer ce concept et donner une représentation adaptée de cette évolution.

Finalement notre problématique d'enseignant est de déterminer la pertinence des outils au regard de la situation. Cette situation justifie-t-elle de passer par le tableau ? D'introduire un graphique ? Il s'agit pour nous de savoir quel obstacle impose de tels outils puis de vérifier si la situation est cohérente avec cet obstacle.

4 Recherche de l'obstacle

La difficulté du choix est liée aux représentations de chacun : pour certains la liste des nombres suffit pour « voir » l'évolution, pour d'autres il est nécessaire de passer par un graphique. Dans le premier cas, on s'appuie sur les propriétés des nombres dans le second il s'agit d'une reconnaissance visuelle.

Saisir toutes les connotations du graphique ne semble pas accessible aux élèves. Nous sommes en présence d'un obstacle ontogénique car il ne s'agit pas seulement de voir sur un dessin mais d'interpréter les différents éléments qui le compose : grandeurs sur les axes, extrémité des thermomètres représentant en fait un couple de grandeur. Dans ce cas, la situation ne serait pas pertinente pour découvrir la notion : les listes de nombres suffisent à montrer le phénomène, et le graphique ne constitue pas un obstacle à la reconnaissance du phénomène. Il n'oblige pas l'élève à adapter ses connaissances (BESSOT 2003 p19).

A contrario, si l'on considère que le tableau induit des relations opératoires entre les nombres, les élèves pourraient alors s'intéresser aux écarts plutôt qu'aux évolutions. Dans l'usage, nous avons remarqué que le tableau était effectivement privilégié pour mettre en évidence des relations opératoires : tableau de valeur pour les fonctions, tableau de proportionnalité, classement de G. Vergnaud sur les types de problèmes multiplicatifs (VERGNAUD, LEVAIN, 1995).

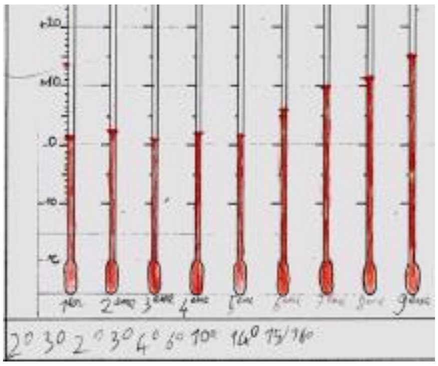
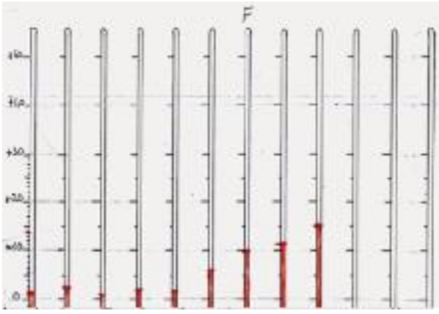
Le tableau permet aussi de représenter un plus grand nombre de relevés quantifiables. Il est une mémoire plus efficace que le graphique sur lequel les nombres ne sont pas directement accessibles et restent approchés. Les différentes représentations ne sont donc pas congruentes. Il s'agit alors de déterminer les situations les plus adaptées aux graphiques ou aux tableaux.

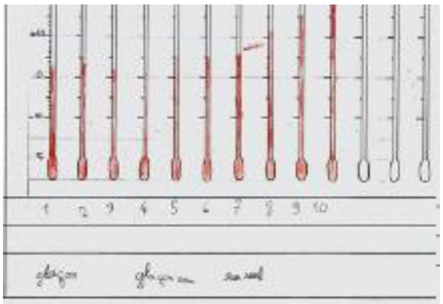
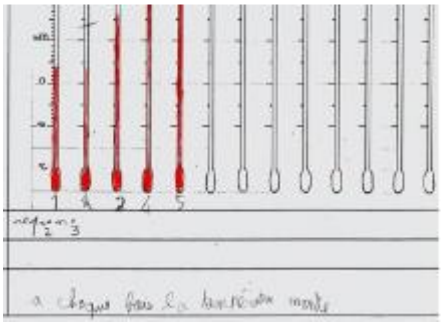
Les situations pouvant constituer un obstacle justifiant l'utilisation d'un tableau seraient alors un travail opératoire sur des listes suffisamment conséquentes pour qu'elles ne permettent pas un traitement direct dans la situation. Les graphiques pourront être introduits à partir de situations où une information est ou doit être présentée globalement (par exemple les résultats d'une enquête dans les journaux) donnant lieu à une interprétation.

V - ADAPTABILITE DE LA SITUATION

1 La place du concept

En imposant un protocole de relevés de températures, de représentation et en juxtaposant les différents dessins de thermomètre, l'enseignant dégage une représentation commune à tous les groupes. Pour chacun, la courbe a toujours le même aspect. C'est cette comparaison qui donne un statut scientifique à l'expérience ; si on la renouvelle plusieurs fois, on trouve toujours le même résultat : l'aspect de la courbe.

Cela a nécessité que l'enseignant a imposé un mode de traitement avec un type de dessin normé afin d'obtenir le résultat attendu. Le tableau seul ne permettait pas d'arriver aux conclusions souhaitées, laissant encore trop ouvertes les réponses possibles des élèves. Ainsi l'enseignant a mis en évidence un modèle représentatif de ce qu'il souhaitait montrer.

Ce phénomène peut être observé dans toute situation expérimentale où est introduite une métrique (cf Atelier A3). Pour pouvoir traiter ces données (quantité ou grandeur), il est nécessaire d'avoir des outils mathématiques car la numérisation est une mathématisation du problème. Elle demande de choisir un modèle qu'il faut ensuite interpréter.

Ainsi les situations de science où interviennent des grandeurs sont souvent numérisées et il est possible de trouver des lieux de vie des notions mathématiques. Elles sont alors l'occasion d'aider à la construction des concepts mathématiques au sens de VERGNAUD (1986) qui le définit comme un triplet de trois ensembles :

- l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept
- l'ensemble des invariants qui constituent les différentes propriétés du concept
- l'ensemble des représentants symboliques qui peuvent être utilisés.

Les sciences permettent d'enrichir le premier ensemble et de justifier le développement des deux autres.

2 Abandon de la situation ?

Lorsque l'on regarde avec du recul l'analyse que nous venons de faire, il est légitime de se poser la question de la pertinence d'utiliser une situation extra mathématique pour introduire des concepts. Nos échanges nous ont ramenés sur la place du graphique. En effet il y a une nouvelle ambiguïté qui s'est fait jour : le mouvement de la courbe correspond en fait au mouvement du liquide à l'intérieur du thermomètre. Finalement il n'était pas nécessaire de prendre une échelle de temps commune. En classe de CE1, seul pouvait suffire d'observer l'augmentation de la température. L'outil graphique et le relevé de température se justifiaient par des raisons pédagogiques (organisation de la classe et des débats) mais ont amené l'enseignant à faire de nombreuses ostensions rendant l'outil mathématique problématique. Finalement le graphique est employé comme un dessin et non comme un objet mathématique. Donner du sens à cet outil serait trop complexe à faire dans cette situation. Différents scénarii ont été proposés sans provoquer les zones d'ombres que nous avons soulevées. Nous observons que cette situation aurait pu être revue à un niveau supérieur avec une précision plus grande qui aurait justifié alors l'introduction de mesure et le recueil de données.

VI - CONCLUSION

1 Des perspectives possibles

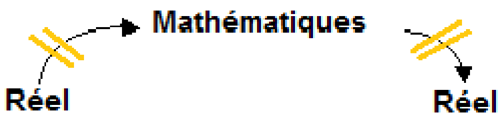
Des situations expérimentales peuvent être intéressantes pour introduire des notions mathématiques si celles-ci permettent de développer un modèle qui va enrichir les conclusions. Kuhn a défini trois classes de problèmes scientifiques (KUHN 1970 p 59) : la détermination des faits significatifs, la concordance des faits et de la théorie et l'élaboration de la théorie. Il souligne que les mathématiques ont joué un rôle dans le deuxième type de problème où elles ont essayé de chercher à améliorer la concordance entre les observations et la théorie. Dans notre cas, la théorie n'a pas été construite. Il s'agissait de déterminer des faits significatifs : la température est stable tant qu'il y a un glaçon puis augmente. Le graphique permet d'affiner cette théorie en donnant des critères qualitatifs de changement de températures.

Un exemple de situation proposée lors de l'atelier et qui semble répondre aux conditions qui ont émergé est celle de l'évaporation de l'eau. Les élèves ont constaté que si un récipient d'eau était exposé au soleil durant plusieurs jours, le niveau diminuait de jour en jour. Afin de bien comprendre le phénomène, ils en sont arrivés à partager ce volume en tranches. Nous n'avons pas eu les étapes intermédiaires mais il semble que cette expérience les ait aidés à comprendre la notion de volume. Les sciences ont permis alors d'aider à la représentation d'un concept mathématique et les mathématiques peuvent alors donner une extension de la théorie en permettant de prévoir par exemple le temps nécessaire à l'évaporation totale de l'eau.

2 Quel lien entre le savoir mathématique et les autres disciplines ?

Cet atelier avait aussi pour objectif d'étudier la possibilité de travailler des contenus mathématiques en lien avec une situation scientifique.

Une critique de l'enseignement des mathématiques est sa rupture avec les problèmes du quotidien. Il est possible de voir ses relations avec le schéma ci dessous :

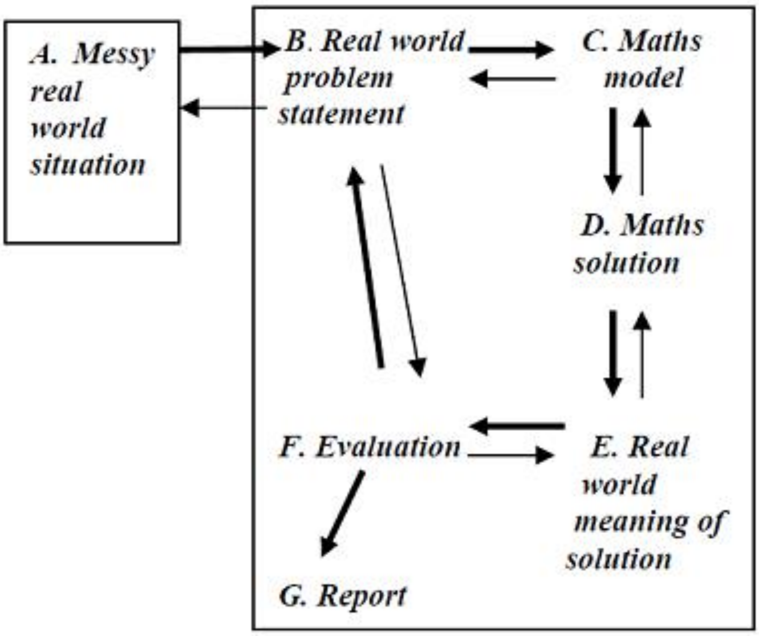


La relation mathématiques/réalité (entendue au sens large) peut avoir lieu à deux moments : avant que la connaissance mathématique ne soit développée c'est à dire que le concept se construit sans lien avec des situations réelles. Ou après que l'objet eut été défini mathématiquement et alors le concept vit d'abord dans un monde mathématique. La transposition se fait dans un second temps.

Au travers de l'étude des graphiques, nous en sommes arrivés à caractériser l'utilisation des relevés et de leur représentation comme une application de connaissances mathématiques : opérations sur les nombres, comparaison. Elle s'inscrit donc dans le cadre de la seconde transition mathématiques → réel.

Mais la lecture de tableau qui doit être apprise en cycle 2, aura du mal à vivre dans une situation interne aux mathématiques. Elle prend son sens dans des situations issues du réel où des connaissances extra-mathématiques la justifient. Mais fait-on alors des mathématiques ? Nous avons convenu que oui car une fois la compréhension de la situation faite, les outils de traitement pour comprendre le tableau et en dégager des informations sont mathématiques. Il s'agit de mettre en relation des données. Ce qui est essentiel, c'est que l'enseignant ait fait identifier aux élèves qu'il y a au cours de l'activité un changement de paradigme (KUHN 1970 p29 et 30) : on passe d'une situation en science à une situation mathématique avec des techniques de validation différentes. Les objets et les intentions prennent alors un nouveau sens. Nous avons mis ce travail en parallèle avec la conférence C. Margolinas sur le principe d'énumération à ce colloque de la COPIRELEM (MARGOLINAS 2012). Celui-ci est un outil de traitement de données (des quantités) étudiées en mathématique mais aussi employées dans d'autres disciplines (exemple du mot découpé dans le domaine de la langue en maternelle). En précisant que l'on est dans le domaine mathématique, on commence à décontextualiser l'objet d'étude et à lui donner un statut détaché de sa représentation dans la situation de découverte.

Le schéma de CALBRAITH ET STILLMAN (2006) donne une représentation cohérente de ces changements de paradigme. Lors de l'atelier nous avons essentiellement considéré que le travail mathématique en soi se situait à partir de l'entrée C. Le passage de B à C (supposition, formulation, mathématisation) n'a pas à être automatisé et ne devrait pas être principal. Il pourrait faire l'objet du travail que nous avons proposé en III-3.



3 La main à la pâte :

Ce mouvement s'est construit sans la présence de mathématicien. Il n'y a pas eu de regard mathématique particulier sur cette action. N'est-il pas en train de commettre la même erreur que celle que nous avons commise lors de la mise en place des maths modernes, où une communauté de scientifiques non mathématicienne prend en charge l'utilisation des mathématiques ? Ainsi on trouve dans les activités proposées, l'utilisation d'outils mathématiques outils où les problèmes soulevés dans des études de didactique ne sont pas pris en compte. Par exemple dans LA MAIN A LA PATE (2002) p 30 à 34 où il s'agit d'utiliser le parallélisme à partir des ombres, les modalités d'introduction de cette notion ou son intégration dans une organisation mathématique ne sont pas précisées. Ou encore p 111 à 131, la séquence propose de travailler sur le concept d'angle. Après une note en début de chapitre sur la confusion possible entre longueur de côté et grandeur de l'angle, ils vont être systématiquement inscrits dans des triangles.

Cette action traduit une certaine représentation des mathématiques qui les cantonne à leur emploi pour des calculs, sans réflexion sur le statut des objets mathématiques qui permettra alors le développement d'une nouvelle théorie et leur transfert possible à d'autres situations non mathématiques. Mais de telles situations souvent riches par leur complexité peuvent permettre de trouver des écosystèmes où les mathématiques vont pouvoir vivre comme outil (DOUADY 1983). Elles peuvent alors permettre de travailler la technique et de faire les premières rencontres. Les heures de mathématiques pourront alors être consacrées à l'étude de ces objets mathématiques.

4 La démarche d'investigation en mathématique

La question finalement est de savoir si la situation problème en mathématique doit partir du réel ou si elle doit simplement l'utiliser pour arriver rapidement à une situation suffisamment épurée permettant de se concentrer sur l'objet d'étude. Les ingénieries didactiques autour de la résolution de problème laissent à penser qu'il est difficile de partir du réel pour les raisons évoquées tout au long de cet atelier. Toutefois, à travers les brochures sur les grandeurs, nous avons proposé à l'IREM de Poitiers une organisation mathématique du programme de sixième qui part de situations problèmes. Les situations de références restent présentes tout au long de la séquence. Nous avons constaté que les élèves construisent des connaissances mathématiques. Mais cela est mis en place par des enseignants ayant participé à la recherche. Cette expérience est-elle transférable ? Demande-t-elle de nouvelles connaissances pour les enseignants ? Est-ce que leurs pratiques sont modifiées ? Le projet d'article d'ARTIGUE 2012 p 12, souligne ce changement de point de vue nécessaire.

Un autre ouvrage va dans le même sens mais avec une approche plus classique de questionnement, c'est la série « *les mathématiques à la découverte du monde* ». Les idées sont intéressantes mais la mise en pratique ne paraît pas évidente.

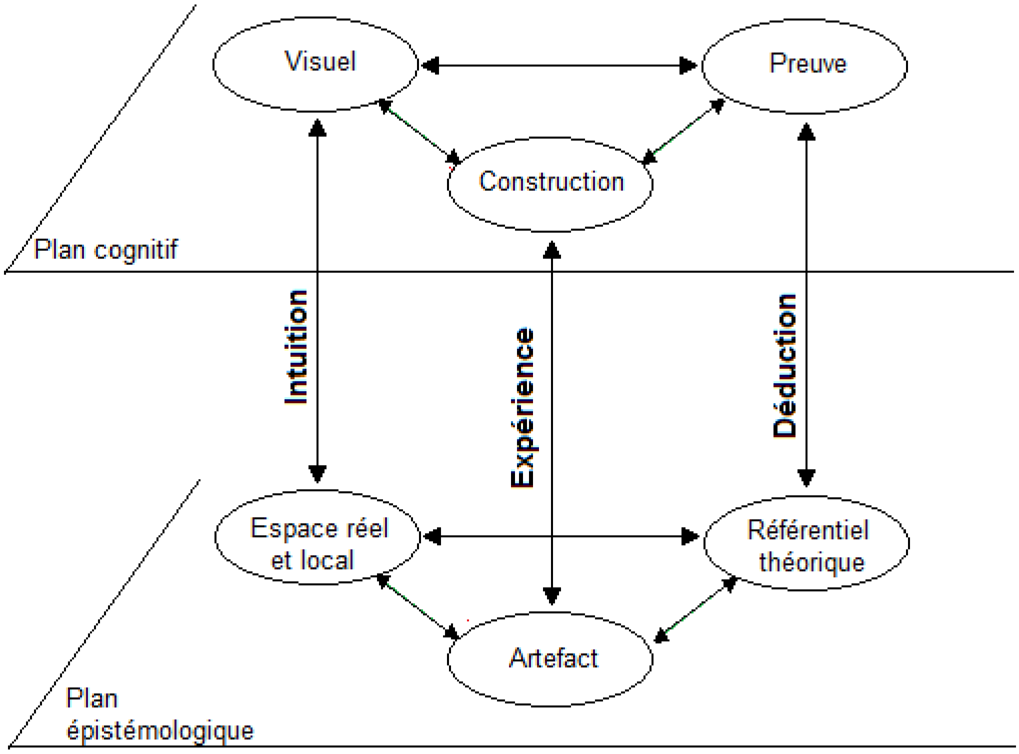
Un point souligné quant aux limites de l'utilisation de ce type de situation est la cohabitation de différents contrats didactiques : les modes de validation sont différents tout comme les hypothèses et les procédures qui sont parfois extra-mathématiques. Il est nécessaire que le maître soit suffisamment outillé pour pouvoir établir clairement le paradigme avec ses élèves afin qu'il n'y ait pas de confusion. Une seconde difficulté aura lieu lorsqu'il s'agira soit d'identifier le modèle mathématique soit d'interpréter les résultats (B → C et E →F sur le schéma). Il y a sans doute un élément à travailler à ce niveau dans la formation des enseignants.

5 Un outil d'analyse intéressant :

Dans cette partie, vous trouverez l'introduction d'un outil d'analyse qui me semble pertinent pour étudier de telles situations. Nous n'avons pas eu le temps d'en discuter.

HOUDEMENT C. et KUZNIACK A. (2006) ont développé dans le cadre de l'étude de situations en géométrie la notion d'Espaces de Travail Géométrique (ETG) qui sera précisée par KUZNIAK A. en 2010. Ceux-ci s'appuient sur les trois modes de pensée géométrique théorisés par GONSETH F. (1946) : l'intuition, l'expérience et la déduction. Ceux ci reflètent des idées déjà apparues au niveau épistémologique comme la distinction entre le rationalisme et l'empirisme.

Ces trois modes de pensée se retrouvent dans les différentes étapes de la démarche d'investigation (choix d'une situation (1), appropriation (2), formulation (3), investigation ou la résolution du problème (4), échanges argumentés (5), structuration (6), mobilisation (7)).



Nous rapprocherons l'intuition telle que définie par F. Gonseth à la connaissance en soi de Kant. Elle est interne à l'être. C'est elle qui permet de formuler les hypothèses dans le cadre précédent (3). Cette intuition doit tout de même être assortie d'un discours explicatif qui justifie rationnellement son adéquation avec le problème. C'est la première rencontre de la déduction. Ce discours reste rationnel et structuré autour d'un référentiel théorique personnel de l'élève. Les intuitions perdent donc leur aspect premier pour avoir un statut de propositions.
Nous le voyons dans la vidéo lorsque les élèves émettent des hypothèses sur la fonte du glaçon : l'enseignant demande de justifier leur constat, ce qu'un élève explique par les échanges de chaleur. Cette représentation est liée à celle qu'il se fait de la réalité puisqu'au moment où il la formule il ne voit pas l'état du glaçon. De façon intuitive, l'enfant considère qu'il aura fondu. Ce qu'il va justifier à partir d'un référentiel théorique personnel.

L'enjeu de la démarche d'investigation que l'on retrouve dans la démarche expérimentale est alors de confronter les hypothèses à la réalité afin de faire bouger le référentiel théorique de l'élève pour qu'il corresponde à celui de l'institution. L'enjeu de l'expérience (4) est de vérifier si la conjecture ou l'hypothèse qui a été faite trouve une réalité et de préciser l'écart qui les sépare. C'est au travers de l'expérience ou de l'investigation que se construit ce rapport. A ce niveau c'est donc le mode de pensée expérimentale qui prévaut. Il faut donner un représentant aux objets puis agir pour vérifier que la transformation prévue a donné le résultat attendu. Pour agir il est nécessaire d'avoir des instruments qui permettent d'effectuer cette transformation mais aussi de quantifier les écarts entre les hypothèses et la réalisation.
Dans la vidéo, une étape manque : c'est l'élaboration de l'expérience qui permettrait de vérifier que c'est bien l'échange thermique qui justifie la fonte du glaçon. Nous retrouvons les questions soulevées dans l'atelier sur comment comparer les changements de température et par conséquent l'élaboration d'un instrument adapté. Cet instrument s'appuie sur un discours rationnel qui doit justifier qu'il est bien adapté à la situation.

La confrontation entre les résultats trouvés expérimentalement et les propositions initiales doit confirmer ou infirmer le référentiel théorique. Dans un premier temps, il faut identifier ce qui est lié au cadre expérimental (par exemple dans notre vidéo, la température du liquide avec le glaçon n'est pas nulle). Dans un second temps il faut comprendre l'origine des écarts entre la réalité de l'expérimentation et celle des hypothèses. C'est un raisonnement déductif qui entre en jeu.

Dans cette description, nous voyons que les différents pôles des ETG ne sont pas à observer comme des éléments indépendants et autonomes. Il semble exister des va et vient entre les deux plans et les six pôles. C'est ce que nous avons essayé de montrer dans notre mémoire de master (Lebot 2011) et que nous avons nommé « parcours ». Ces notions de parcours pourraient caractériser des situations riches qui mettent en œuvre des parcours faisant intervenir les trois modes de pensée.

L'intérêt des situations expérimentales pour les problématiques d'enseignement des mathématiques est de mettre en jeu les trois modes de pensées géométriques et donc d'être un terrain propice à des parcours riches. Elles justifient le lien entre la mathématique, pensée rationnelle et l'espace sensible. La situation initiale et l'élaboration de l'expérience permettent de mettre en avant des situations de référence des concepts en jeu. Les artefacts dégagent les invariants et les échanges amènent la nécessité de représentants symboliques.

C'est ce que nous avons mis en place au sein de l'IREM de Poitiers à partir de parcours sur les grandeurs en sixième. Nous observons des interactions riches autour des artefacts qui permettent de répondre à quatre grandes questions sur les grandeurs : comment comparer, comment partager, comment mesurer et comment calculer ?

VII - BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M. (2012) Conceptualising inquiry based education in mathematics – *Projet d'article pour ZDM*

BERTHELOT R., SALIN M.H. (1992) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire *Thèse université de Bordeux.*

BESSOT A. (2003) Une introduction à la théorie des situations didactiques - *Cahiers du laboratoire Leibniz,* **91**.

BIREMBAULT A. (2012) Histoire de la thermodynamique - *Universalis*

BLANDINO G., BOURGOUINT P. (2008) Les Mathématiques à la découverte du monde – *Hachette*

BULLETIN OFFICIEL (2008) Horaire et programmes d'enseignement de l'Ecole **3** primaire - *Ministère de l'Education nationale*

CHEVALLARD Y. (2002) Organiser l'étude 1. Structures & fonctions - *Actes de la 11° Ecole d'Eté de Didactiques des mathématiques* La Pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (2004) La place des mathématiques vivantes au secondaire - *Actes de la 3° école d'été Animath*

CRDP DE MONTPELLIER (2007) Séquence : Le cahier d'expérience, enseigner les sciences au cycle 2 http://www.crdp-montpellier.fr/bsd/afficherBlocSequenceF.aspx?bloc=197043

DOUADY R. (1983) Rapport enseignement apprentissage : dialectique outil-objet, jeux de cadres **3 -** *Cahier de didactique des mathématiques* IREM Paris VII

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif - *Annales de didactiques et de sciences cognitives* **37 à 65**

GONSETH (1946) La géométrie et le problème de l'espace – *Edition du Griffon – Neuchatel / Edition Dunod*

HERSANT M. , ORANGE-RAVACHOL D. (2012) La démarche d'investigation, les mathématiques et les SVT : des problèmes de démarcations aux raisons d'une union -*Acte du colloque EMF 2012*

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie - *Annales de didactiques et de sciences cogntives vol 11* **175 à 193**

IREM POITIERS (2007) Enseigner les mathématiques en sixièmes à partir des grandeurs - IREM de Poitiers

KUHN T. (1970) La structure des révolutions scientifiques - Champs Flammarion

KUZNIAK A. (2010) Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. - *Annales de didactiques et de sciences cognitives vol 15* **75 à 95**

LA MAIN A LA PATE (2002) Mesurer la Terre est un jeu d'enfant : Sur les pas d'Ératosthène - Édition Le Pommier

LEBOT (2011) Mettre en place le concept d'angle et de sa grandeur à partir de situations ancrées dans l'espace vécu : Quelles influences sur les ETG ? - *Université Paris Diderot* – Mémoire de Master recherche didactique des disciplines spécialité mathématiques

MARGOLINAS (2012) *Des savoirs à la maternelle ? Oui mais lesquels ? - Acte du XXIX Colloque COPIRELEM*

MEN (2008) Mathématiques : classe de sixième, cinquième, quatrième, troisième – *Texte de référence – collège programme* CNDP

PICHOT A. (1991) La naissance de la science T 1 **-** Folio Gallimard

VERGNAUD G (1986) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives - *Grand N 38* **21 à 40**

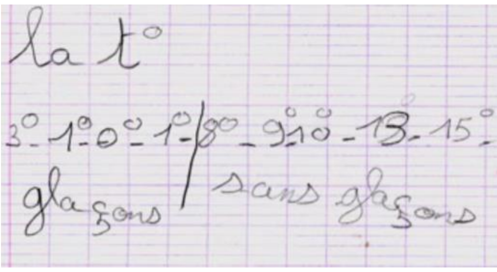
VERGNAUD G., LEVAIN J. P. (1995) Proportionnalité simple, proportionnalité multiple *Grand N N°56* **55 à 66**

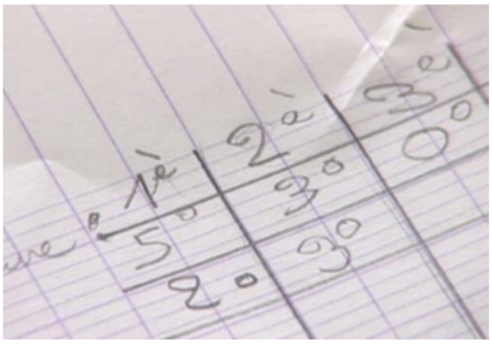
retour sommaire

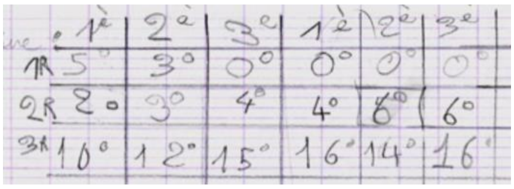
VIII - ANNEXE

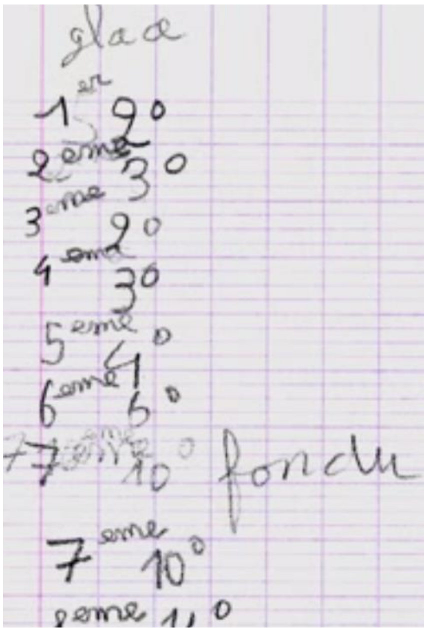
1 Annexe 1 : production des élèves

1.1 Relevé des mesures

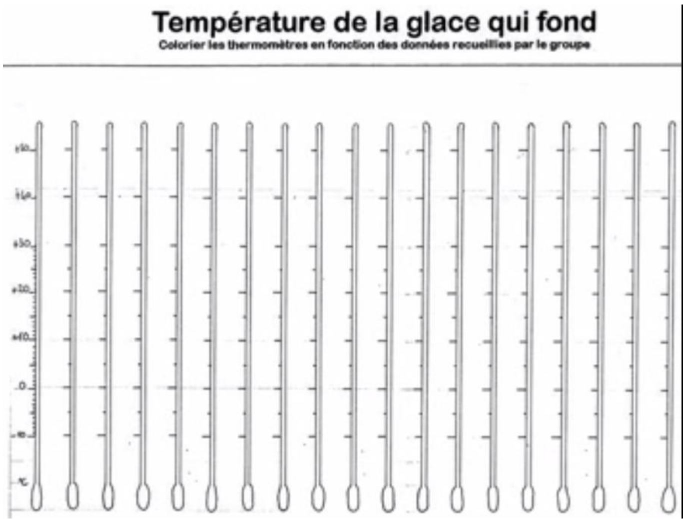


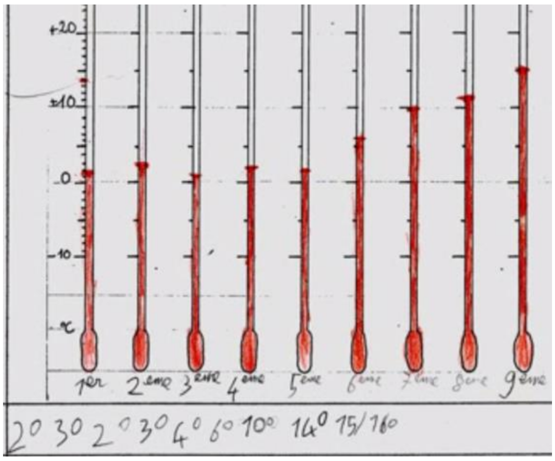


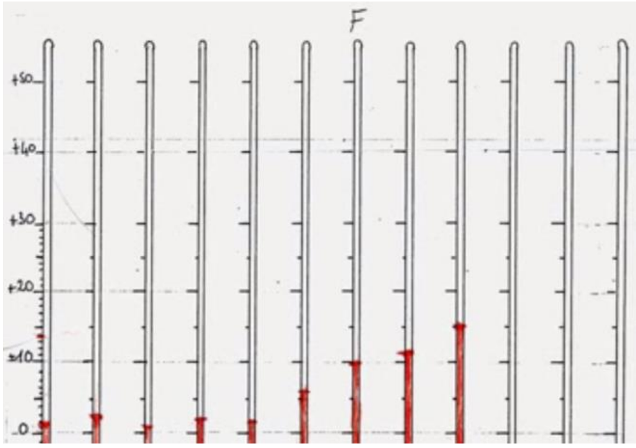


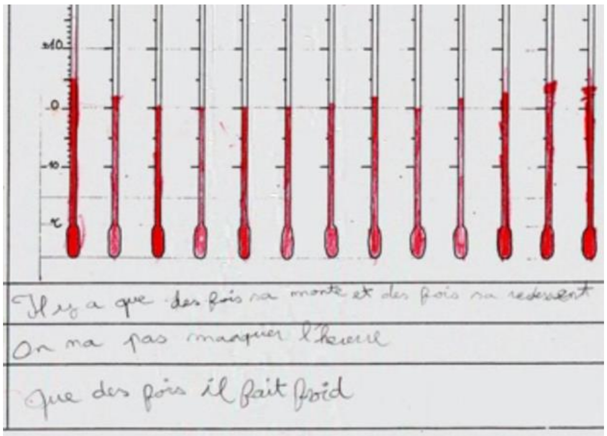


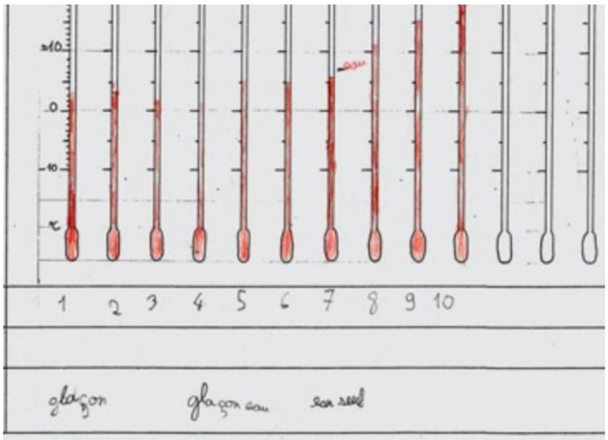
1.2 Représentation graphique

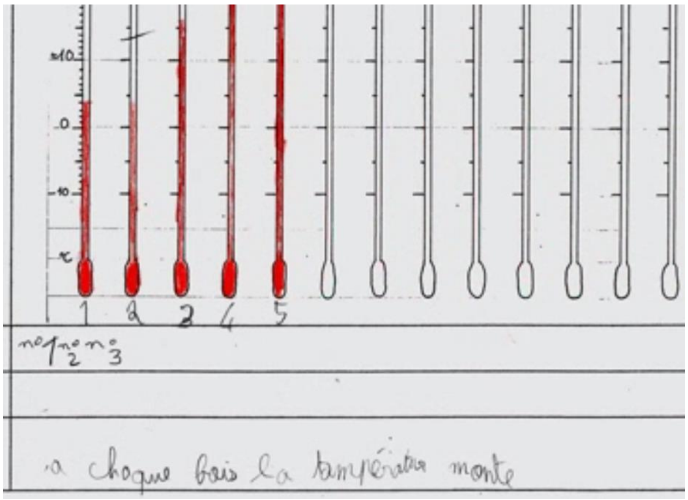












[retour sommaire](#)