DES SCENARIOS PORTANT SUR L'UTILISATION D'ARTEFACTS DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES A L'ECOLE PRIMAIRE

Michela MASCHIETTO
Chercheur, Université de Modena e Reggio Emilia
UFR d'Éducation et Sciences Humaines
Laboratoire des machines mathématiques
michela.maschietto@unimore.it

Maria G. BARTOLINI BUSSI
Professeur des Universités, Université de Modena e Reggio Emilia
UFR d'Éducation et Sciences Humaines
Laboratoire des machines mathématiques
bartolini@unimore.it

Résumé
Le texte présente deux exemples de scénarios pour l'apprentissage du nombre où le recours à des artefacts concrets joue un rôle clé. Ces scénarios ont été mis au point suivant la méthodologie du laboratoire de mathématiques, fondée sur les cadres théoriques de la médiation sémiotique et de l'approche instrumentale. L'objectif didactique est la construction, par les élèves, des mathématiques véhiculées par l'artefact sous la conduite de l'enseignant, ce dernier ayant un rôle crucial de médiateur culturel. Les artefacts considérés sont un boulier géant à l'école maternelle et la machine arithmétique 'Zero+1' (appelée 'pascaline') à l'école élémentaire.

Un artefact est un objet matériel réalisé par l'homme pour être utilisé. Un artefact est un objet dont la forme est justifiée par la prestation à laquelle il était destiné, même avant sa réalisation effective. Les artefacts présupposent un projet d'utilisation, un but et par conséquent une intelligence capable d'activité créatrice. L'observation que chaque utilisation d'un artefact (une machine, un ordinateur, etc.) a un effet sur le monde extérieur, mais en même temps peut favoriser des processus cognitifs complexes de l'utilisateur. En particulier, Norman (1993) utilise la locution « artefacts cognitifs » pour souligner le rôle que n'importe quel outil, soit matériel, soit symbolique, peut avoir dans le développement des potentialités cognitives de son utilisateur. En plus, il met en évidence deux processus fondamentaux de la pensée, non exclusifs : la « cognition d'expérience » et la « cognition réfléchie ». La modalité d'expérience comporte une réaction immédiate et sans effort appréciable à des stimuli extérieurs, les processus de pensée réfléchie conduisent à la comparaison, à des idées et des réponses nouvelles.

Ce texte considère deux exemples d'utilisation d'artefacts en didactique des mathématiques, à l'école maternelle et à l'école primaire. Il est structuré en six sections. Après avoir présenté l'idée de laboratoire de mathématiques (où les deux exemples ont été développés) dans la première section, on discute les éléments essentiels des cadres théoriques sous-jacents dans la deuxième. La troisième section est consacrée au lien entre théorie et pratique professionnelle. La quatrième section expose l'exemple du boulier géant, alors que le deuxième exemple concernant la machine arithmétique

Zero+1 est présenté dans la cinquième section. Les conclusions constituent la sixième et dernière section.

I - LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES

L'idée de laboratoire de mathématiques a ses racines dans les études que pédagogues, psychologues et éducateurs (comme John Dewey (1859-1952), Edouard Claparède (1873-1940) et Maria Montessori (1870–1952)) ont répandues à la fin du XIXème siècle. Dans la même période, plusieurs mathématiciens en Europe et aux États-Unis commencèrent à échanger leurs réflexions sur l'enseignement des mathématiques et à mettre en discussion certaines pratiques d'enseignement, comme les cours magistraux. Dans l'esprit de l'époque, John Perry (1850-1920) proposa une méthode didactique nouvelle, appelée *Practical Mathematics* (Giacardi, à paraître). Il soutenait que les mathématiques devaient être enseignées "with experiment and common-sense reasoning" (cité dans Giacardi, ibidem). En France, une contribution importante a été donnée par Émile Borel (1871-1956), qui souhaita la création d'ateliers de mathématiques dans les établissements scolaires pour « amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne » (Borel, 1904). En Allemagne, un grand défenseur de l'utilisation des modèles matériels fut Felix Klein (1849–1925), qui en décrivit certains dans son ouvrage « Mathématiques élémentaires d'un point de vue supérieur » (Bartolini Bussi, Masami & Taimina 2010). En Italie, Giuseppe Vailati (1863-1909) contribua à ce mouvement culturel avec son idée d'école-laboratoire (Giacardi, à paraître), conçue comme un espace où les élèves pouvaient faire des expériences, se poser et résoudre des problèmes sous la conduite de l'enseignant, ainsi que se mettre à l'épreuve. Giacardi (ibidem) souligne que Vailati rêvait d'une méthodologie d'enseignement fondée sur la résolution de problèmes, la production de conjectures et d'argumentations, avec le but de construire des significations mathématiques, en référence à la structure théorique des mathématiques. En ce sens, son idée était plus large que celles de ses collègues cités auparavant.

L'idée de laboratoire de mathématiques a été reprise à des moments divers dans les réflexions sur l'enseignement des mathématiques (Maschietto & Trouche 2010). Dans le panorama actuel, la référence à une méthodologie didactique relevant du laboratoire de mathématiques est présente dans les documents nationaux de divers pays européens, et même dans des documents de la Commission Européenne. Dans la situation spécifique de l'Italie, le laboratoire de mathématiques a été proposé dans les documents de la Commission de l'Union Mathématique Italienne (UMI-CIIM) chargée de la rédaction d'indications pour le curriculum des mathématiques pour tout niveau scolaire. Dans le document pour l'enseignement secondaire (AA.VV. 2004), le laboratoire de mathématiques est défini « comme une série de suggestions méthodologiques » finalisées par la construction de significations mathématiques. Il est caractérisé par le recours aux outils (par exemple, logiciels, calculatrices, objets manipulables, ...) dans le travail mathématique et par l'interaction entre pairs (élèves) et avec l'expert (enseignant).

Pour étudier le laboratoire comme dispositif didactique, il est utile de le considérer comme un espace phénoménologique d'enseignement et d'apprentissages structuré par l'utilisation de technologies où se mettent en place des processus complexes (Chiappini & Reggiani 2004). Les technologies peuvent être numériques, ou mécaniques 'classiques' (comme les machines mathématiques, Bartolini Bussi & Maschietto 2006).

II - RÉFÉRENCES THEORIQUES

La didactique avec les artefacts que nous allons aborder dans ce texte repose sur des références théoriques où la notion d'artefact est centrale, comme l'ergonomie cognitive et la psychologie vygotskienne. Du premier domaine on considère l'approche instrumentale (Verillon & Rabardel 1995) portée en didactique des mathématiques par Artigue (2002), Trouche (2003) ; dans une perspective post-vygotskienne, on se réfère à la théorie de la médiation sémiotique développée par Bartolini Bussi & Mariotti (2008).

1 Approche instrumentale

L'approche instrumentale repose sur la distinction entre artefact et instrument. Un artefact est un objet matériel ou abstrait, déjà produit par l'activité humaine, et destiné à soutenir des activités nouvelles dans la réalisation d'une tâche (selon cette acception, une calculatrice est un artefact, un algorithme pour résoudre des équations quadratiques est un artefact), il est donné à un sujet. Un instrument est ce que le sujet construit à partir de l'artefact ; il est surtout subjectif, lié à l'activité du sujet et développé quand un problème est donné à résoudre.

Le développement d'un instrument, appelé genèse instrumentale, est un processus complexe, dépendant des caractéristiques de l'artefact (ses potentialités et ses contraintes) et de l'activité du sujet, ses connaissances et sa façon de travailler. La genèse instrumentale a deux composantes (Figure 1) : l'instrumentalisation (relative à l'artefact, à la découverte et à la sélection des commandes, à la personnalisation de l'objet) et l'instrumentation (relative à l'émergence et à l'évolution des schèmes pour la réalisation d'un type de tâche ou d'un ensemble de types de tâches) (Trouche 2003). Un instrument est donc composé d'un artefact (où une partie d'un artefact) et des schèmes d'utilisation du sujet lui permettant d'accomplir une tâche et contrôler son activité.

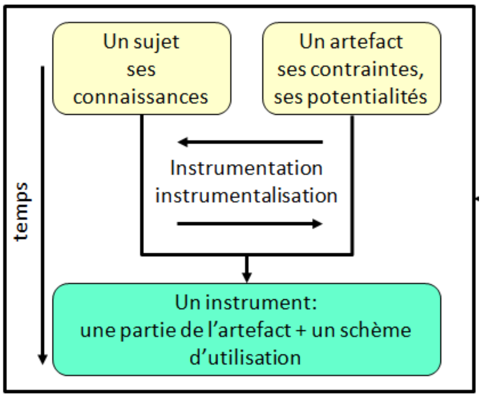


Figure 1. La genèse instrumentale

En reprenant Norman (1993), il faut prendre en compte que la présence de schèmes d'utilisation, même si adéquats à la tâche à résoudre, peut se configurer comme une « cognition d'expérience », qui ne contribue pas à augmenter les connaissances disciplinaires des élèves. Meira (1998) souligne cette possibilité en retenant l'outil « opaque » par rapport au savoir qu'il contient. Pour que le moyen devienne « transparent », c'est-à-dire pour qu'il sollicite des processus de « pensée réfléchie », les tâches que l'enseignant assigne et les modalités à travers lesquelles il promeut la comparaison des solutions proposées des élèves sont fondamentales.

2 Théorie de la médiation sémiotique

La théorie de la médiation sémiotique se fonde sur les trois éléments fondamentaux de la psychologie vygotskienne : la zone de proche développement, l'internalisation (qui est conduit par des processus sémiotiques) et la médiation sémiotique. Elle se propose de décrire, de comprendre et de favoriser le processus qui commence avec l'utilisation par un élève d'un artefact, en relation avec un savoir mathématique, et conduit à son intériorisation par cet élève.

Pour le terme de médiation, Bartolini Bussi et Mariotti (2008) renvoient à la définition de Hasan pour mettre en évidence la complexité du processus : le terme médiation dérive du verbe *mediate* et se réfère à un processus avec une structure sémantique complexe, incluant les participants et le contexte qui sont importants dans ce processus :

- Quelqu'un qui fait la médiation, le médiateur ;
- Quelque chose qui est *medié*, le contenu relâché par la médiation ;
- Quelqu'un qui est assujetti à la médiation, le récepteur auquel la médiation apporte des différences ;
- La circonstance de la médiation ;
- Les moyens de la médiation : a) la modalité ; b) le lieu, où la médiation peut se produire.

Dans le cas de la didactique, le médiateur est l'enseignant, et le contenu de la médiation est constitué par les significations mathématiques en jeu dans les situations proposées ; les récepteurs sont les élèves ; la circonstance de la médiation est le processus d'enseignement-apprentissage dans le laboratoire de mathématiques ; les moyens de la médiation relèvent de la gestion didactique (repris dans les cycles didactiques, cf. Figure 3) de l'activité avec les artefacts ; le lieu dans lequel la médiation peut se produire est le laboratoire de mathématiques, en accord avec (AA.VV 2004).

Le cadre théorique est schématisé dans la Figure 2 ci-dessous.

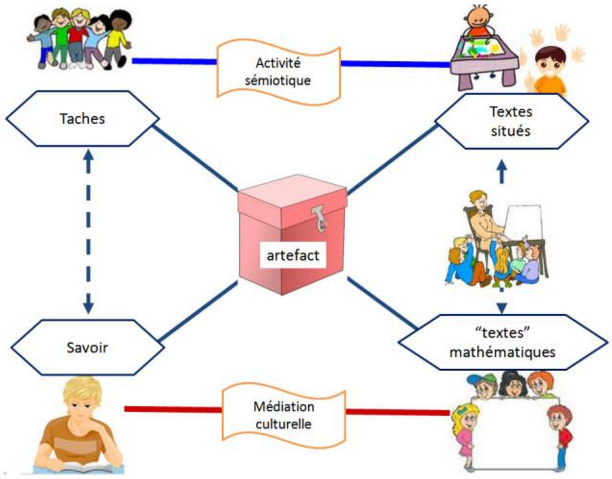


Figure 2. Schéma de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi et *al*. 2012)

Les éléments essentiels de ce cadre théorique sont :

- Des artefacts, liés à un certain savoir mathématique, sont proposés à la classe, après leur analyse sémiotique ;
- Quand un élève agit sur et par un artefact pour faire une action demandée (liée à une tâche), un certain travail sémiotique est sollicité (cf. Figure 2, la composante cognitive est donnée par le triangle tâche-artefact-textes situés) ; dans cette activité, les élèves produisent des signes (textes situés) comme des gestes, des dessins, des expressions verbales, etc.
- Le travail conduit avec les artefacts est structuré par des consignes précises, la seule manipulation d'un artefact n'est pas suffisante à l'acquisition des mathématiques dont il est porteur ;

- L'enseignant repère certains signes produits par les élèves (ou il les introduit, les cas échéants) et guide leur évolution vers des textes mathématiques, c'est-à-dire vers des textes cohérents avec le savoir mathématique (l'enseignant est l'expert qui garantit ce lien) (cf. Figure 2, la composante didactique est représentée par le triangle tâches-textes situés-texte mathématique). Dans ce sens, l'enseignement-apprentissage peut être considéré en termes d'évolution de signes (Mariotti 2009) ;
- L'importance du rôle de l'enseignant, qui « ne peut pas se limiter à rendre explicite la connaissance mathématique que les élèves doivent apprendre. Relier les connaissances mobilisées dans l'accomplissement des tâches avec le savoir mathématique envisagé devient l'objet d'une activité spécifique qui porte sur le développement d'une texture de significations personnelles vers les significations mathématiques correspondantes » (Mariotti 2012).

Quand un enseignant utilise un artefact pour faire construire des significations mathématiques aux élèves, il l'utilise comme un instrument de médiation sémiotique.

Une notion clé pour l'analyse d'un artefact est celle de potentiel sémiotique, défini de la manière suivante : « Il représente le double lien qui peut s'établir entre

i) un artefact et les significations personnelles émergeant de son utilisation finalisée ;

ii) cet artefact et les significations mathématiques évoquées par son usage, reconnaissable comme mathématiques par un expert. » (Mariotti & Maracci 2010)

Dans sa composante didactique, le processus de médiation sémiotique est fondé sur l'implémentation du cycle didactique (Figure 3), constitué de trois types d'activité : activités à petit groupe (ou en binôme) avec l'artefact, activités individuelles (production individuelle de signes) et activités collectives (production sociale de signes), correspondant à des discussions mathématiques (Bartolini Bussi 1996) dans la plupart des cas.

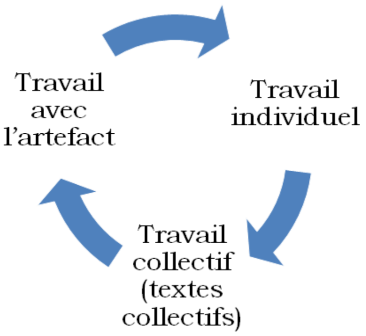


Figure 3. Cycle didactique

Ce cadre théorique pour le laboratoire de mathématiques, élaboré avec la collaboration des enseignants-chercheurs affectés aux groupes de recherche, est la référence pour nos formations d'enseignants, de l'école maternelle à l'enseignement secondaire.

III - THEORIE ET PRATIQUE

Une des questions posées dans les thèmes de ce Colloque concerne la relation entre formation et activité de l'élève. Elle peut être posée en termes de relation entre formation et construction de scénario pour la classe, et rejoint la question très importante sur les relations entre formulation théorique, formation et pratique dans la classe. Dans cette section, nous allons proposer discuter de cette question.

Nous abordons ces questions en faisant référence à deux projets de formation professionnelle : le premier « Enfants qui comptent » (Bartolini Bussi et *al*. 2012), coordonné par Bartolini Bussi, s'adresse aux enseignants des écoles maternelles de la Mairie de Modena ; le deuxième fait partie du Projet Sciences et Technologies de la région Emilia-Romagna et s'adresse aux enseignants de l'école primaire à la seconde. Il est constitué de deux phases : la deuxième est en cours, c'est la première qui est ici considérée (et a été coordonnée par Bartolini Bussi et Maschietto (Bartolini Bussi & Maschietto 2010 ; Maschietto 2010)). Nous ne rentrons pas ici dans les détails de ces formations, car nous voulons surtout mettre en évidence les liens entre théorie et pratique.

Le recours au schéma de la Figure 2 met bien en évidence d'une part le travail de l'élève (triangle cognitif pour l'élève, partie supérieure du schéma), d'autre part le double rôle de l'enseignant dans la construction du scénario ou dans son aménagement à partir de ressources disponibles (Figure 4, à gauche), et dans sa réalisation et gestion de la classe (Figure 4, à droite). Nous allons préciser ces deux rôles par la suite.

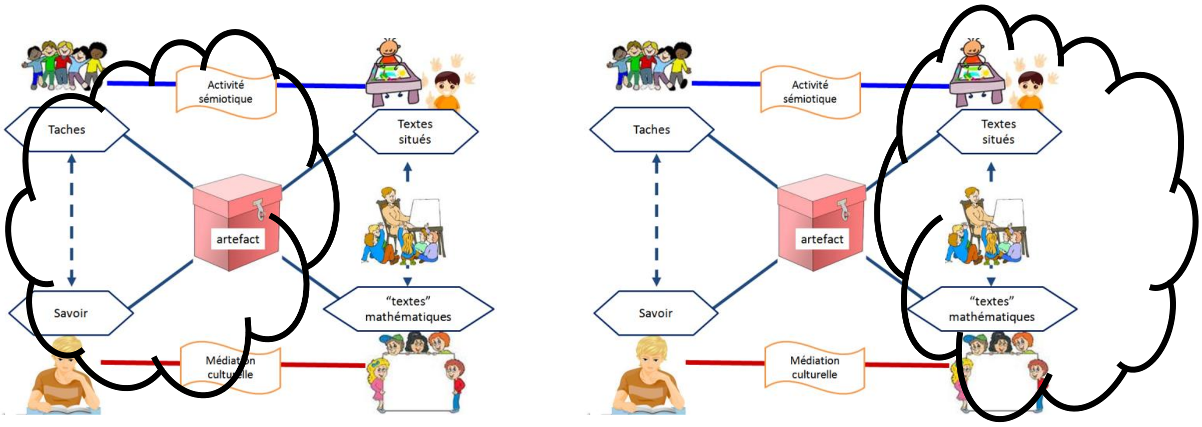


Figure 4. Le double rôle de l'enseignant

1 Construction du scénario

Dans cette phase (Figure 4, à gauche), l'enseignant choisit l'artefact en fonction de son objectif didactique. Dans nos recherches, il s'agit de choisir davantage des artefacts qui ont peuvent avoir un lien avec l'histoire et la culture mathématique (ou qui sont présents dans des pratiques sociales).

L'interaction avec le cadre théorique (§ II) a permis de définir un plan de 'bonnes questions' pour guider la construction du parcours pour les élèves, c'est-à-dire des consignes à proposer :

1. Qu'est-ce que c'est ?
2. Comment est-il fait ?
3. Que fait-il ? Comment fonctionne-t-il ?
4. Pourquoi ?
5. Que se passe-t-il si…?

La première question encourage la narration ; elle a surtout été utilisée avec les élèves les plus petits, comme entrée au parcours (§ IV). La deuxième et troisième question prennent en compte la genèse instrumentale de l'élève : la deuxième sollicite des processus d'instrumentalisation, et la troisième la construction de stratégies de résolution susceptibles de devenir des schèmes d'utilisation de l'artefact pour résoudre des tâches particulières. En particulier, la deuxième question porte dans la situation la 'voix' du constructeur, tandis que la troisième porte la 'voix' de l'utilisateur. La quatrième question vise à faire émerger les relations avec les mathématiques, parce qu'il s'agit de justifier l'efficacité de l'utilisation de l'artefact pour accomplir une certaine tâche. Elle sollicite la 'voix' du mathématicien (ou du savoir mathématique). En posant cette question, l'enseignant assume pleinement son rôle de médiateur culturel. La cinquième question concerne plus précisément le *problem solving*. Ces questions ne représentent pas seulement un support pour la construction du scénario, mais elles correspondent aussi à une partie de l'analyse du potentiel sémiotique de l'artefact. Si l'on se place du côté du savoir, son explicitation constitue le lien « entre l'artefact et les significations mathématiques évoquées par son usage » (§ II.2). Ce volet de l'analyse s'appuie sûrement sur le savoir de l'enseignant. L'analyse se complète par l'étude de formulation de consignes accessibles aux élèves, en termes de « significations personnelles émergeant de son utilisation finalisée » (§ II.2). Dans les deux exemples (§ IV et V), ce type d'analyse sera développé.

La structure du cycle didactique (Figure 3) permet de contrôler l'organisation du temps : par exemple, il suggère qu'il ne faudrait pas consacrer la plupart du temps à des tâches avec l'artefact, parce que l'on risque de mettre en arrière-plan les moments de réflexion personnelle et de construction sociale du savoir, essentiels dans cette approche. D'autre part, le temps d'interaction avec l'artefact ne devrait pas être trop réduit, si l'on considère que le savoir visé est strictement lié aux schèmes d'utilisation que les élèves vont construire. Un scénario peut être composé par l'enchainement de plusieurs cycles didactiques.

2 Réalisation et gestion en classe

Dans la deuxième phase (Figure 4, à droite), l'enseignant doit gérer le cycle didactique, c'est-à-dire le 'produit' de l'activité des élèves sollicité par les consignes proposées (par exemple, les gestes d'utilisation, les dessins, les dialogues, les textes, ...) et le faire évoluer vers des textes mathématiques, en accord avec l'assertion que les processus d'enseignement et d'apprentissage sont considérés en termes d'évolution de signes (Mariotti 2009). Il doit donc :

[1] recueillir les éléments des processus d'apprentissage des élèves, repérer les signes fondamentaux (par rapport au savoir visé) et les schèmes d'utilisation,

[2] porter à un niveau de prise de conscience pour les élèves ce qui apparait dans leur travail (les textes situés sont strictement liés au contexte et difficilement utilisables par les élèves dans un autre contexte sans l'intervention de l'enseignant).

3 Formation et expérimentations

Dans les deux sections qui suivent (§ IV et V), nous présentons deux exemples de scénario sur le nombre, portant sur l'utilisation d'un boulier géant à l'école maternelle et d'une machine arithmétique à l'école primaire.

En ce qui concerne l'école maternelle, en 2007, une collaboration entre le groupe de coordination des écoles maternelles de la Mairie de Modène et Maria G. Bartolini Bussi a été entamée pour la formation des enseignants de mathématiques. Le projet Mathématiques ainsi proposé rejoignait d'autres projets : Langue italienne, Sciences, Art, Musique, Anglais, Orienteering, Philosophie pour enfants. Chaque projet est confié à un ou plusieurs experts de la discipline et à un pédagogue du groupe de coordination pédagogique. Dans chaque école (22 écoles maternelles), il y a de 6 à 8 enseignants. Dans son établissement, chaque enseignant doit choisir l'un des projets, de façon à devenir l'expert de l'école. Environ 25 enseignants participent au projet de mathématiques.

Au début de chaque année scolaire, le pédagogue et les experts définissent les contenus de la formation pour chaque projet. Il y a une structure commune pour tous les projets, organisés en sessions de 4 heures chacune ; les enseignants, les experts et le pédagogue participent à toutes les sessions, sauf à la troisième.

- 1ère session (au mois d'octobre) : début des activités pour l'année scolaire (formation à niveau adulte) ;

- 2ème session (au mois de novembre) : poursuite et construction de quelques scénarios (pour les enfants de 3, 4 ou 5 ans) ;

- 3ème session (au mois de janvier) : dans chaque établissement scolaire, le pédagogue rencontre les enseignants en petits groupes pour discuter des activités en cours, des problèmes rencontrés, des besoins, des points critiques et des idées innovatrices ;

- 4ème session (au mois de février/mars) : discussion des questions posées lors des rencontres auprès des écoles ;

- 5ème session (au mois de mai) : présentation et discussion de quelques activités réalisées dans les écoles ; petite exposition de matériels produits par les écoles.

Occasionnellement, les divers projets présentent les résultats à tous les enseignants de toutes les écoles. Le projet de mathématiques a montré ses premiers résultats en septembre 2010. Le succès de cette présentation a généré l'attribution d'une experte en documentation multimédia avec l'objectif de produire un rapport multimédia (Figure 5), qui a été complété au mois de juin 2012 et sera présenté au mois d'octobre 2012. Le titre « Enfants qui comptent » [19] joue sur l'ambiguïté du verbe « compter », dans le sens de « dire les nombres » que dans le sens d'« avoir une valeur ». Dans la Section IV, quelques éléments de ce projet seront présentés.

Figure 5. Home page du multimédia « Enfants qui comptent »

En ce qui concerne l'école primaire, une formation continue sur le laboratoire de mathématiques avec les machines mathématiques a été proposée dans le cadre du projet Science et Technologies[20], financé par le conseil administratif de la Région Emilia-Romagna, et démarré début 2009 ; la première phase s'est terminée en juin 2010 (Maschietto 2010). La finalité du projet était la diffusion de la pratique du laboratoire de mathématiques, surtout dans l'enseignement secondaire (de la classe de 6ème à la 2nde), même si des professeurs d'école y ont participé. Le dispositif de formation se compose de deux phases : une première phase de formation en présence et une deuxième phase d'expérimentation en classe de scénarios conçus lors de la première phase. Une des séances de formation en présence était dédiée à la machine arithmétique Zero+1, qui sera présentée par la suite. Dans le cadre de ce Colloque, cette machine a été aussi proposée dans l'atelier B3, animé par Michela Maschietto et Sophie Soury-Lavergne (Soury-Lavergne & Maschietto, ces Actes).

[19] http://istruzione.comune.modena.it/memo/Sezione.jsp?titolo=Bambini%20che%20contano&idSezione=2233

[20] http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna/risultati-del-progetto/libro-progetto-regionale.html.

IV - ACTIVITES SUR LES NOMBRES A L'ECOLE MATERNELLE

Dans cette section, nous présentons un extrait du multimédia « Enfants qui comptent » concernant les expérimentations avec un boulier géant.

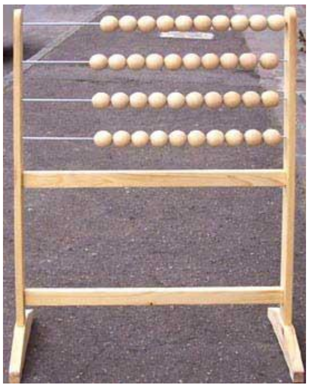
Au début de la deuxième année du projet Mathématiques (année scolaire 2008/09), toutes les écoles maternelles reçurent un boulier géant, produit par des menuisiers de la Mairie sur la base d'indications fournies par les enseignants. Dans les écoles, traditionnellement, beaucoup d'activités de comptage étaient proposées aux enfants : l'appel des élèves présents (et absents), le comptage du nombre de jours du mois de soleil, de pluie, etc. Les enseignants ont déterminé qu'un artefact exploitable pour aborder ces nombres devait avoir 40 boules ; d'où le choix de construire un boulier de quatre rangs avec dix boules chacun. Ce choix correspond à une *variable didactique* étroitement liée aux activités traditionnelles ; elle pourrait être modifiée dans d'autres situations. Le boulier géant n'a pas été délivré assemblé, de sorte que les enseignants pouvaient décider s'ils l'assemblaient avec les enfants (en valorisant les aspects cognitifs et didactiques de cette consigne) ou s'ils le faisaient assembler par des parents ou grands-parents et le montraient déjà prêt aux enfants (en introduisant des consignes additionnelles pour l'exploration de l'artefact). Ces deux possibilités ont été soigneusement discutées avec les enseignants, en croisant des aspects pratiques avec quelques références théoriques. Dans la suite, on propose une brève synthèse de l'analyse *a priori* et *a posteriori*, pour des classes d'enfants de 4 ou 5 ans.

1 La dévolution de la tâche

En accord avec Brousseau (1998), la dévolution d'une tâche est un point délicat et très important de la relation didactique. Pour que les enfants s'engagent dans les problèmes reliés à cet artefact, il a semblé opportun d'introduire une dimension narrative et imaginative pour leur permettre de proposer leurs interprétations. Le début du scénario présente deux cas avec des consignes différentes : le cas où l'artefact est assemblé et l'autre où il n'est pas assemblé (Figure 6).

Pour le cas du boulier déjà assemblé, les enseignants ont entamé des discussions en petit groupe avec des questions du genre : « Qu'est-ce que c'est ? », « Le connaissez-vous ? », « En avons-nous à école ? », « À quoi peut-il servir ? », etc.

Pour le cas du boulier qui n'est pas assemblé, les enseignants ont entamé des discussions en petits groupes avec des questions, comme « Qu'est-ce que nous pourrions construire avec cela ? », « Avez-vous des idées ? », etc. Dans quelques classes, l'exploration des composantes du boulier a conduit à d'autres consignes, d'ordre graphique comme « Dessine toutes les pièces que nous avons » (Figure 7). Dans ce cas, les enfants ont porté beaucoup d'attention aux formes, aux détails et au nombre de boules. Dans quelques classes, le boulier a ensuite été assemblé avec l'aide d'un grand-père qui a interagi avec les enfants pour comprendre comme joindre les composantes.



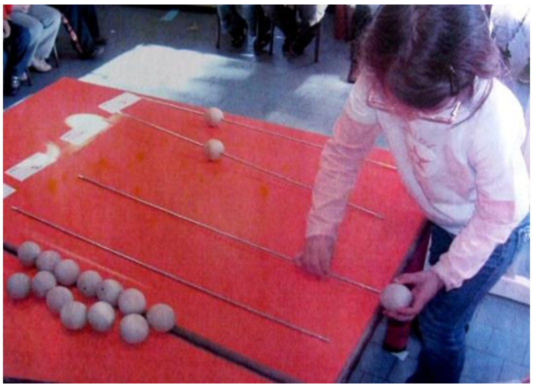


Figure 6. Boulier assemblé (à gauche) et non assemblé (à droite)

Ce processus n'a pas été difficile (à part pour quelques détails techniques, comme serrer les vis), parce que les enfants de l'école maternelle ont une grande expérience des jeux de construction, même complexes.

2 Le boulier comme artefact : instrumentalisation

L'observation des composantes du boulier non assemblé démarre aussi le processus d'instrumentalisation (§ II.1), dans lequel le boulier est étudié comme objet matériel, composé des parties ayant des relations spatiales particulières entre elles.

Dans le boulier assemblé, les composantes diverses doivent être identifiées avec des questions spécifiques, toujours lors d'une discussion en petits groupes : « Comment est-il fait ? », « De quoi avons-nous besoin pour en construire un autre ? », « Comment donner aux enfants d'une autre école les instructions pour en construire un identique ? ».

En général, la représentation graphique du boulier assemblé a mis en évidence un bon niveau de compétences, meilleur que ce que l'on peut trouver avec des enfants plus grands, qui n'avaient cependant pas accompli auparavant l'exploration du boulier au niveau verbal.

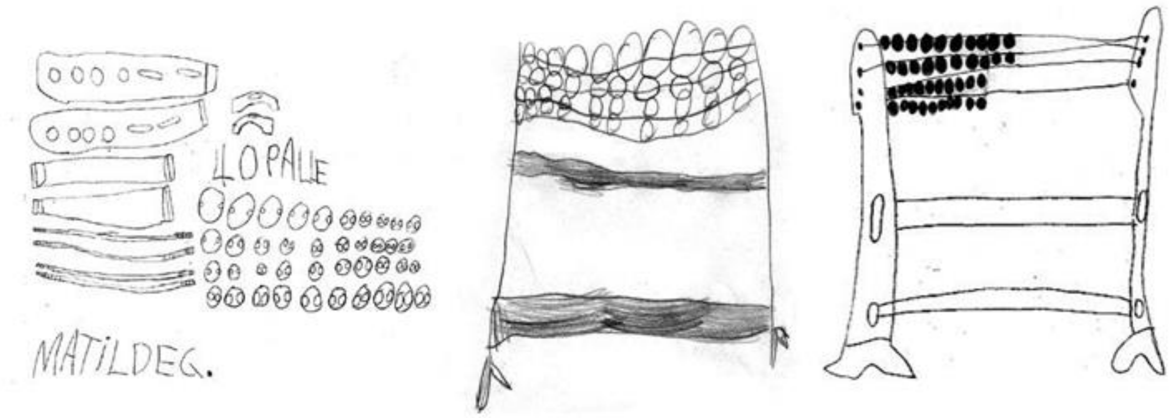


Figure 7. Dessins du boulier non assemblé (à gauche) et assemblé (au centre et à droite)

3 Le boulier comme instrument : instrumentation

Le boulier assemblé peut être déplacé dans la classe pour accompagner la résolution de tâches particulières : par exemple, compter les points dans le jeu des quilles, compter les enfants présents dans la classe, planifier la disposition de la table pour le repas (distribution des enfants sur différentes tables). Dans ce cas, les consignes sont données à un seul enfant chaque fois, mais toujours dans le contexte du petit ou grand groupe ; elles se réfèrent à une situation bien précise : « Comment peux-tu l'utiliser pour compter les points ? », « Comment peux-tu l'utiliser pour compter les enfants présents ? ». De cette manière, des schèmes d'utilisation émergent (§ II.1) : par exemple, compter par rang ou bien compter en déplaçant dans l'ordre une boule de chaque rang (Extrait 1).

Thomas	J'avais deviné hier, c'est le compteur qui sert à compter les enfants et d'autres choses.
Giovanni	Il sert à compter les nombres.
(…)	
Ens.	Avec ce boulier, pouvons-nous compter seulement les enfants ?
Thomas	Nous pouvons compter toutes les autres choses, par exemple combien de feuilles nous avons.
Luca	Combien de dents.
Matteo	Combien de chaises.

Ens.	Comment faisons-nous pour compter les chaises?
Matteo	[*Il prend des chaises et les met les unes sur les autres*] Je compte les chaises avec les doigts, d'abord je touche avec le doigt une chaise, puis je vais déplacer une boule.

Extrait 1. Instrumentation de l'abaque

4 Le boulier comme instrument de médiation sémiotique : la construction de significations mathématiques

La résolution d'une tâche spécifique avec le boulier conduit à réfléchir sur « pourquoi » le boulier aide à résoudre des problèmes arithmétiques (§ II.2). Dans ce cas, ce sont les significations mathématiques intrinsèquement incorporées dans le boulier qui sont mises en jeu, c'est-à-dire :

- *Partition* : l'enfant compte les boules en les déplaçant sur la barre et garde en mémoire le comptage par la séparation des boules comptées et des boules à compter ;
- *Suite des premiers ordinaux* : l'enfant répète la suite des ordinaux pendant le comptage ;
- *Correspondance biunivoque* : le déplacement des boules est effectué en prononçant la suite des nombres, l'enfant déplace une seule boule pour chaque mot-nombre ;
- *Cardinalité* : le dernier ordinal prononcé représente la cardinalité de l'ensemble des boules comptées ;
- *Écriture des nombres en base dix* : la structure du boulier incorpore l'invention de l'écriture positionnelle en base dix (chaque rang est une dizaine).

Il n'est pas facile de faire émerger et de prendre conscience de ces significations. On peut s'approcher d'une façon indirecte (« en acte », selon Vergnaud 1990), par le recours à des poupées animées par l'enseignant (Figure 8) qui accomplissent des erreurs de types divers pendant le comptage ; l'enseignant invite ensuite les enfants, en petits groupes, à les corriger s'ils ne sont pas d'accord et à expliquer les raisons des corrections.

Figure 8. Le loup bête qui ne sait pas compter

5 *Problem posing* et *problem solving*

La créativité et la maitrise des thèmes par les enseignants rendent ceux-ci capables de gérer des interventions inattendues de la part des élèves, de les interpréter par rapport aux références théoriques. Par exemple, dans une classe, l'enseignant a reconnu un cas d'instrumentalisation (§ II.1) lorsque les enfants ont dû inventer un cinquième rang de boules. Dans cette classe, il y avait cinq tables pour le déjeuner ; les enfants réussissaient à représenter le nombre des compagnons de table sur quatre tables, en employant les quatre rangs disponibles dans le boulier. Ils ont ajouté, par terre, un rang de dix petits cubes, pour enregistrer aussi la cinquième table.

6 D'autres artefacts

Le boulier géant a été l'artefact paradigmatique du projet Mathématiques pendant quelques années. Toutefois, les enseignants, dans les écoles et dans les rencontres de formation, ont aussi construit d'autres scénarios relatifs à d'autres artefacts, comme les mains pour compter, les blocs, des jouets technologiques, etc. Le cadre théorique de référence et le scénario d'exploration sont semblables, même s'il reste nécessaire de les adapter aux âges des enfants. Tout le matériel des cinq années de travail (références théoriques, interviews avec les enseignants, protocoles individuels et collectifs, photo, vidéo, dessins, etc.) est recueilli dans le produit multimédia « Enfants qui comptent ».

V - UNE MACHINE A CALCULER A L'ECOLE PRIMAIRE

Dans cette section, on considère un scénario concernant une machine arithmétique, fonctionnant comme un compteur. Dans la première partie de la section, on conduira l'analyse de la machine en cohérence avec les éléments théoriques exposés ci-dessus (§ II). Dans la seconde partie, on présentera quelques éléments des expérimentations conduites en CM1.

Cette machine a été proposée dans l'atelier B3 de ce Colloque (Soury-Lavergne & Maschietto, ces Actes).

1 Analyse de la machine Zero+1

1.1 La structure de la machine

L'analyse de la structure de l'artefact se réfère à la question « Comment la machine Zero+1 est-elle faite ? » (ce qui correspond à un premier pas du processus d'instrumentalisation, § II.1).

Zero+1[21] (Figure 9) est un outil en plastique (27 cm x 16 cm) composé d'une base verte avec cinq roues dentelées ; trois roues jaunes (A, B et C, Figure 9 à droite) sont alignées sur le bord inférieur et deux roues orange (E et D, Figure 9 à gauche) sont alignées sur le bord supérieur. Chaque roue a dix dents (alluchons) ; les chiffres arabes sont écrits sur chaque alluchon des roues jaunes, tandis qu'une flèche mauve est solidaire avec chaque roue orange. Au-dessous des roues A, B et C, il y a des prismes rouges ('petits triangles') pointant un alluchon ; une virgule déplaçable (qui, par défaut, est en bas à droite de la base) peut occuper des positions intermédiaires entre les roues jaunes. Toutes les roues peuvent tourner dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire. Les roues A, B et C ont un onglet qui force à la rotation d'une dent à la fois.

En partant de la configuration initiale (000) au-dessus des triangles rouges, on peut tourner la roue A dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'à (009) sans que d'autres roues ne tournent. Dans le passage de l'alluchon 9 à l'alluchon 0 de la roue A (qui a ainsi fait une rotation complète), la roue D pousse la roue B (cf. Figure 9 au centre), qui affiche ainsi la dent 1 au-dessus de son triangle rouge. La roue D (comme la roue E) est une roue auxiliaire pour transmettre le mouvement. Quand cela se passe, la machine apporte une certaine résistance par rapport à l'action sur les autres crans et on entende un bruit. De même, quand on passe de (099) à (100), à la différence que toutes les roues tournent et le bruit est plus fort.

[21] Elle est produite par Quercetti (www.quercetti.it) en Italie.

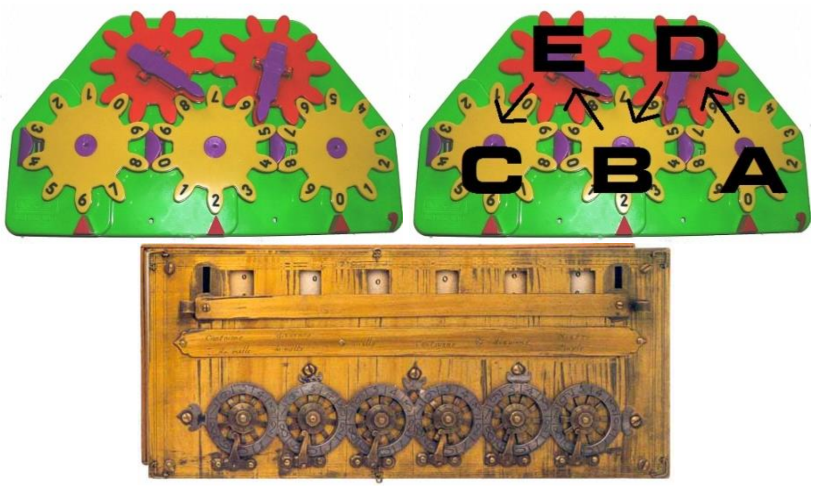


Figure 9. La machine arithmétique Zero+1 (à gauche et au centre), la Pascaline de Pascal (à droite)

1.2 Potentiel sémiotique de la machine

Bartolini Bussi et Mariotti (2008) considèrent trois éléments dans l'étude du potentiel sémiotique d'un artefact :

[1] le contenu mathématique embarqué,

[2] les dimensions historique et culturelle,

[3] les schèmes d'utilisation.

Dans ce type d'analyse, on vise à décrire les liens entre un savoir, l'artefact considéré, et les schèmes d'utilisation à construire pour aborder certaines tâches.

Contenu mathématique

Zero+1 est une machine arithmétique permettant d'effectuer les quatre opérations arithmétiques fondamentales. Elle permet la représentation symbolique des nombres en écriture décimale positionnelle jusqu'à trois chiffres : chaque alluchon des roues A, B et C représente un chiffre. Par rapport à la Figure 9, la roue A représente le chiffre des unités, la roue B celui des dizaines et la roue C les centaines.

L'axiomatique de Peano[22] (Peano 1957) définit l'ensemble des nombres naturels sur la base de trois termes primitifs (nombre, zéro et successeur) et de cinq postulats concernant ces trois termes. La suite des nombres naturels peut être ainsi engendrée par itération de la fonction « +1 » à partir du nombre zéro. Les opérations d'addition et soustraction sont ainsi définies par récurrence, comme opérations unaires.

Par rapport à d'autres artefacts, comme le boulier, Zero+1 présente les dix chiffres et se fonde sur un système de représentation des nombres. Du point de vue épistémologique, cet élément est très important pour rapport au signifié du zéro, qui, même s'il indique un manque d'unité, a une valeur d'étiquette sur un alluchon et de position dans l'écriture des nombres.

Dimensions historique et culturelle

La machine Zero+1 est inspirée des machines à calculer[23] (surtout pour additionner), comme la fameuse Pascaline inventée par Blaise Pascal (1623-1662) en 1642 (Figure 9). D'autres éléments historiques sont présents dans (Soury-Lavergne & Maschietto, ces Actes). D'après

[22] Giuseppe Peano (1858-1932).

[23] Plantevin & Le Brusq (ces Actes) dans leur atelier présentent des machines pour les multiplications, issues de l'exposition « Multipliez ! » http://irem.math.univ-brest.fr/expo_2012.html

cette référence historique, Zero+1 est appelé ‘pascaline’ par les élèves qui ont travaillé avec elle. Dans la suite, les deux noms seront indifféremment utilisés.

Schèmes d’utilisation

L’analyse des schèmes d’utilisation de la machine consiste à répondre à la question « Comment la machine peut-elle être utilisée pour accomplir une tâche spécifique ? » (processus d’instrumentation, § II.1). Dans cette analyse, on va faire le lien entre les modes d’utilisation et un certain savoir mathématique. Cela correspond à une partie du double lien caractérisant le potentiel sémiotique de l’artefact. L’autre partie est définie par rapport aux consignes accessibles aux élèves qui devront s’articuler avec l’artefact.

La pascaline peut être utilisée pour : compter, représenter les nombres naturels au moins jusqu’à 999, additionner et soustraire, multiplier et diviser.

Presque tous les schèmes d’utilisation répertoriés reposent sur une action de base, qui représente le principe de fonctionnement de la pascaline : la rotation d'une dent (alluchon) à la fois. Le comptage est fait par itération de l’action basique à partir de la roue A des unités (cf. Figure 9), dans le sens des aiguilles d’une montre pour le comptage en avant, et dans le sens contraire pour le comptage en arrière. À la fin, le nombre est lu en correspondance avec les alluchons placés au-dessus des triangles rouges. De cette manière, la suite des nombres naturels est obtenue par itération de la fonction « +1 », en accord avec l’axiomatique de Peano. Pour l’écriture des nombres, on renvoie à la Section V de ce texte, et les opérations arithmétiques sont discutées dans le texte de l’atelier (Soury-Lavergne & Maschietto, ces Actes).

2 Expérimentations

Les expérimentations (Casarini & Clementi 2010) dans le cadre du projet Sciences et Technologie ont été construites autour des ‘bonnes questions’ (§ III.1) discutées pendant la formation en présence et sur des ressources (Canalini, Ferri & Maschietto on-line) sur la pascaline issues des expérimentations précédentes (Canalini Corpacci & Maschietto 2011, 2012 ; Ferri & Maschietto 2007). Nous présentons un scénario de trois séances expérimenté en CM1 sur le système d’écriture des nombres.

2.1 Découverte et exploration

La première séance est centrée sur la découverte et l’exploration de la pascaline, avec la structure suivante : travail en binôme avec une pascaline sur la structure de la machine (Comment est-elle faite ?) et sur ses fonctionnalités (Que fait-elle ?) ; discussion collective, où la machine est décrite et des hypothèses sur son fonctionnement sont formulées ; travail individuel de représentation de la machine.

Pendant la discussion collective, l’enseignant fait émerger les éléments du travail en binôme, ce qui correspond à faire partager à tous les élèves les différentes explorations et les signes produits dans l’activité. Cela permet à l’enseignant de repérer des signes à faire évoluer.

L’Extrait 2 montre un exemple de description de la machine (ce qui correspond à un texte situé), verbalisé lors de la discussion collective. D’autres élèves ne repèrent pas les engrenages, mais ils interprètent les roues comme des fleurs et les alluchons comme des pétales. Pour d’autres, les roues sont des horloges. Ce sont des exemples des diverses significations personnelles des élèves (§ II.2).

Filippo	Il y a des engrenages.
Ens.	Décrivons les engrenages.
Alice	Deux orange et trois jaunes. Ils ont des pointes avec des nombres de zéro à neuf. Il y a des triangles rouges et une virgule que l’on peut déplacer et des flèches mauves.

Extrait 2. Comment la machine est-elle faite ?

L'Extrait 3 correspond à la question du fonctionnement de la machine. Les interventions de l'enseignant visent à favoriser l'argumentation et communication entre les élèves. On remarque que les élèves, comme dans l'Extrait 2, parlent de nombres sur les alluchons.

Angela	La roue orange fait tourner la jaune…
Ens.	Laquelle ?
Matteo	La suivante.
Ens.	Elle fait tourner la suivante et Mattia a dit qu'elle la fait tourner… comment?
Mattia	Par la flèche.
Angela	Et le numéro change.
Matteo L.	En plus, on peut choisir de tourner ces numéros dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans l'autre sens.

Extrait 3. Comment la machine fonctionne-t-elle ?

La discussion collective est le moyen pour l'enseignant de faire formuler aux élèves leurs hypothèses sur l'usage et le fonctionnement de la machine (Extrait 4). On remarque la richesse du langage (décoder les nombres, compter, trouver les unités), qui sous-entend des significations diverses pour les élèves et des schèmes d'utilisation à construire, mais aussi le travail évoqué précédemment, à la charge de l'enseignant, pour lier l'artefact aux significations mathématiques et faire évoluer les productions vers des textes mathématiques.

Ens.	Cette machine sert à …
Amine	À décoder les nombres
Ins.	Décoder les nombres ?
Alice	Compter les décimaux. (…)
Luca	Pour essayer de trouver les unités.
Ens.	Êtes-vous d'accord ?
Emma	À compter.
Matteo	Elle peut aussi servir à faire des opérations.
Ens.	On verra si cela est vrai.
Alex	À faire des opérations avec dix, cent, mille.
Federico	Selon moi, elle sert à former les nombres de trois chiffres.
Shady:	À mon avis, la pascaline sert à calculer.
Matteo V.	La pascaline sert à comprendre les chiffres et les nombres.

Extrait 4. À quoi la machine sert-t-elle ?

Pendant l'exploration, les élèves découvrent l'automatisme de la pascaline, la retenue (Extrait 5), mais le travail pour la transparence de l'artefact reste à faire.

Elmehdi	La flèche se baisse quand [*le triangle rouge*] est sous le neuf et après je mets le zéro, la flèche fait tourner celle d'après.
(...)	
Marius	Quand j'ai tourné dix fois, alors [*la flèche mauve*] fait tourner celle d'après.
Alex	Quand le zéro arrive, la flèche fait tourner la roue d'après.

Extrait 5. Ce que la machine fait

En accord avec le cadre théorique et la structure du cycle didactique, l'enseignant propose un travail individuel (dessiner la machine) qui permet aux élèves de représenter leur première conceptualisation de la machine et de revenir sur le travail fait (Figure 10). Du côté de l'enseignant, les dessins constituent d'autres textes situés, exploitables dans la suite.

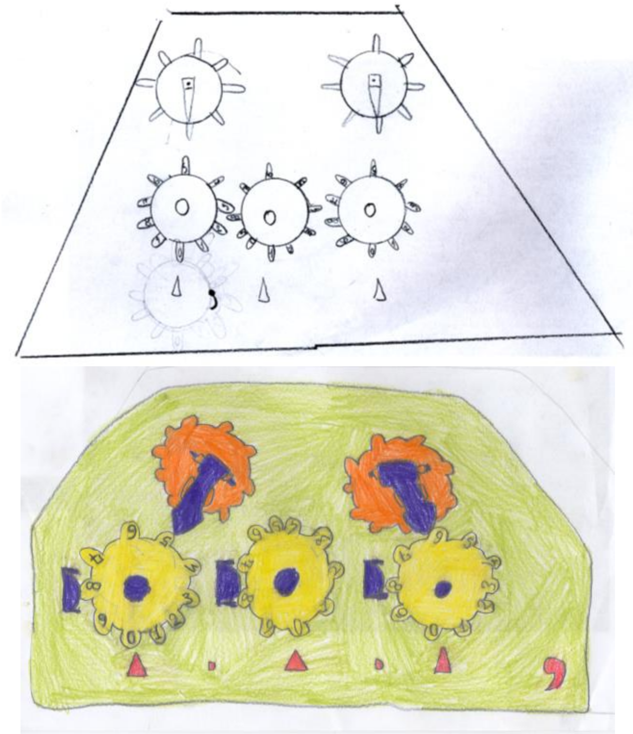


Figure 10. Dessins de la pascaline

2.2 Analyse de la machine et sa construction en papier et attaches parisiennes

Dans la deuxième séance, compte tenu des différents dessins produits, les élèves travaillent sur des représentations de la machine qui contiennent des erreurs. Ensuite, l'enseignant gère une discussion collective sur le travail fait, et enfin propose aux élèves un travail en binôme de reconstruction de la pascaline en papier, pour vérifier l'organisation des composantes et le sens de rotation des roues (Figure 11).

Figure 11. Travail en binôme pour la reconstruction de la pascaline

2.3 Les schèmes d'utilisation pour l'écriture des nombres

La troisième séance a la structure suivante : travail individuel sur la consigne « écrire le nombre 13 sur la machine » et expliquer comment faire pour l'écrire. Dans la discussion qui suit ce travail, l'enseignante vise à la construction sociale des schèmes d'utilisation pour l'écriture des nombres.

Les deux schèmes d'utilisation (Soury-Lavergne & Maschietto, ces Actes), écriture par itération (Extrait 6) et par décomposition (Extrait 7) apparaissent dans les fiches des élèves. On peut identifier les différents niveaux des élèves dans leurs écrits.

On doit tourner la première petite roue et le nombre change, tu dois le tourner au moins 13 fois dans le sens des aiguilles d'une montre et le 13 se forme sur la petite machine 0+1.

Pour arriver à 13, il faut tourner le premier engrenage jaune à droite. Pour arriver au nombre 1, il faut faire faire un tour au premier engrenage de telle façon à ce que le deuxième déclenche le 1 et puis tu tournes le premier engrenage sur le 3 et le jeu est fait.

Extrait 6. Écriture par itération

On prend la pascaline, puis dans la roue jaune des unités on déplace les pétales de 0 à 3 en faisant trois clics. Puis, dans la roue jaune des dizaines, on déplace le pétale d'un clic, c'est-à-dire de 0 à 1. Et le 13 est formé.

Pour mettre le nombre 13 sur la machine, il faut que l'engrenage en bas à droite pousse la dent avec le nombre 3 où il y a le petit triangle rouge. Pour mettre le nombre 1, tu dois déplacer l'engrenage en bas au centre, le déplacer dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'au 1 ne sort pas. Le dernier engrenage est laissé à 0.

Extrait 7. Écriture par décomposition

VI - CONCLUSIONS

Dans ce texte, nous avons présenté les références théoriques et deux exemples de processus d'enseignement et apprentissage avec artefacts, dans le cadre du laboratoire de mathématiques. Nous avons voulu apporter nos contributions à la question des relations entre formation et travail sur le terrain d'une part, sollicitation et gestion de l'activité des élèves d'autre part. Les deux exemples mettent en évidence la formulation de consignes permettant aux élèves de faire émerger des significations personnelles liées à l'utilisation de l'artefact pour accomplir une tâche, mais aussi le travail à la charge de l'enseignant pour lier ces significations aux mathématiques. Pour cette tâche, l'analyse du potentiel sémiotique de l'artefact est un outil essentiel.

Les deux artefacts ici considérés, même s'ils sont différents et utilisés à des niveaux scolaires divers, partagent une partie du savoir mathématique embarqué, ce qui constitue un lien fort entre eux. Avec d'autres artefacts (comme l'abaque, les bâtonnets), ils peuvent être considérés membres d'un ensemble d'artefacts disponibles pour l'enseignant pour l'écriture des nombres naturels (Bartolini Bussi & Maschietto 2008). La comparaison des analyses de leurs potentiels sémiotiques met en évidence les différences réciproques et justifie aussi pourquoi il est nécessaire de considérer un ensemble d'artefacts plutôt qu'un artefact isolé. Le boulier, même s'il s'inscrit dans le micro-espace, peut générer à l'école primaire d'autres schèmes d'utilisation (et donc significations mathématiques) par des consignes appropriées, alors que la pascaline peut être proposée au collège avec des consignes qui catalysent les processus de formulation de conjectures et d'argumentation.

Remerciements

Nous remercions le conseiller municipal délégué à l'instruction Adriana Querzè, les pédagogues Maria Teresa Corradini et Maria Vittoria Vecchi, la documentaliste du multimédia Susanna Stanzani, toutes les enseignantes du projet « Enfants qui comptent » ; les enseignantes Rita Canalini Corpacci, Antonella Casarini, Fiorenza Clementi, Franca Ferri etValeria Pradelli.

VII - BIBLIOGRAPHIE

AA.VV. UMI (2004) In G. Anichini, F. Arzarello, L. Ciarrapico, & O. Robutti (Eds.), *Matematica 2003. La matematica per il cittadino*. Lucca: Matteoni stampatore.

ARTIGUE M. (2002) Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245-274.

BARTOLINI-BUSSI M.G. (1996) Mathematical discussion and perspective drawing in primary school, *Educational Studies in Mathematics*, 31 (1-2), pp. 11-41.

BARTOLINI BUSSI M.G. ET AL. (2012) *Bambini che contano*. Multimédia http://istruzione.comune.modena.it/memo/Sezione.jsp?titolo=Bambini%20che%20contano&idSezione=2233

BARTOLINI BUSSI M.G. & BORBA M. (Eds) (2010) Historical aspects of the use of technology and devices in ICMEs and ICMI, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 42 (1).

BARTOLINI BUSSI M.G. & MARIOTTI M.A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of International research in mathematics education* (2nd ed.). New York: Routledge, pp. 746–783

BARTOLINI BUSSI M.G., MASAMI I., & TAIMINA D. (2010) Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 42(1), 19–31.

BARTOLINI BUSSI M.G. & MASCHIETTO M. (2006) *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Collana Convergenze. Milano: Springer.

BARTOLINI BUSSI M.G. & MASCHIETTO M. (2008) Machines as tools in teacher education. In D. Tirosh and T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education, The International Handbook of Mathematics Teacher Education*, vol. 2. Rotterdam: SensePublishers, pp. 183-208.

BARTOLINI BUSSI M.G. & MASCHIETTO M. (2010) Il progetto regionale Scienze e Tecnologie: l'azione 1. In USR E-R, ANSAS, Regione Emilia-Romagna & F. Martignone (Eds.), *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna*, vol. 2. Napoli: Tecnodid Editrice, pp. 17-28.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

BOREL E. (1904) Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. In Conference at Musée Pédagogique in Paris, *Gazette des Mathematiciens*, Juillet 2002 (no. 93, pp. 47–64)http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

CANALINI CORPACCI R., FERRI F. & MASCHIETTO M. (2010) *Alla scoperta dei numeri e delle operazioni con Zero+1. Proposte di percorsi didattici per la scuola primaria*.

CANALINI CORPACCI R. & MASCHIETTO M. (2011) Gli artefatti-strumenti e la comprensione della notazione posizionale nella scuola primaria. La 'pascalina' Zero+1 nella classe: genesi strumentale, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 34A (2), 161-188

CANALINI CORPACCI R. & MASCHIETTO M. (2012) Gli artefatti-strumenti e la comprensione della notazione posizionale nella scuola primaria. La 'pascalina' Zero+1 e sistema di strumenti per la notazione posizionale, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 35A (1), 33-58.

CASARINI A. & CLEMENTI F. (2010) Numeri...in macchina: alla scoperta della pascalina. In USR E-R, ANSAS E-R, Regione Emilia-Romagna & F. Martignone (Eds.), *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna*, vol. 2. Napoli: Tecnodid Editrice, pp. 141-145.

CHIAPPINI G. & REGGIANI M. (2004). Toward a didactic practice based on mathematics. In M.A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3*. http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG9/TG9_Chiappini_cerme3.pdf

GIACARDI L. (à paraître) La nascita del laboratorio di matematica per le scuole secondarie agli inizi del Novecento, in *Atti del V Convegno Di.Fi.Ma.*, Torino.

MARIOTTI M.A. (2009) Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 41 (4), 427-440.

MARIOTTI M.A. (2012) Intégration de cadres théoriques différents : questions méthodologiques, Table ronde in *La didactique des mathématiques: approches et enjeux. Hommage à Michele Artigue*, Paris. http://www.lar.univ-paris-diderot.fr/colloque/artigue

MARIOTTI M.A. & MARACCI M. (2010) Un artefact comme instrument de médiation sémiotique: une ressource pour le professeur. In G. Gueudet, & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-107). Lyon, France: Presses Universitaires de Rennes.

MASCHIETTO M. (on-line) *Le Laboratoire des Machines Mathématiques.* http://www.math.ens.fr/culturemath/materiaux/maschietto/maschietto.htm

MASCHIETTO M. (2010) Enseignants et élèves dans le laboratoire de mathématiques. In G. Gueudet, G. Aldon, J. Douaire & J. Trgalova (Eds.), *Actes des Journées mathématiques de l'INRP "Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources?"*. Lyon: INRP Editions, pp.9-17. http://educmath.inrp.fr/Educmath/dossier-parutions/actesJMJ10

MASCHIETTO M. & FERRI F. (2007). Artefacts, schèmes d'utilisation et significations arithmétiques. In J. Szendrei (Ed.), in *Proceeding of the CIEAEM 59*, 179-183.

MASCHIETTO M. & TROUCHE L. (2010) Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 42(1), 33–47.

MEIRA L. (1998) Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity, *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (2), p. 121-142.

NORMAN D.A. (1993) *Things that make us smart*. Reading Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

PEANO G. (1957) *Opere scelte*, par Ugo Cassina, Roma: Cremonese.

SOURY-LAVERGNE S. & MASCHIETTO M. (ces Actes) À la découverte de la « pascaline » pour l'apprentissage de la numération décimale, in *Actes du XXXIX colloque COPIRELEM*, Quimper.

TROUCHE L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations*. Document pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 7.

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.

VERILLON P. & RABARDEL P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity, *European Journal of Psychology of Education*, 9(3), 77–101retour sommaire