

EXPLOITATION PEDAGOGIQUE D'UNE EXPOSITION SUR LES INSTRUMENTS DE CALCULS

Frédérique PLANTEVIN

Maître de conférences, UBO

Groupe « Instruments dans la classe »-IREM de Brest- LMBA

frederique.plantevin@univ-brest.fr

Christelle LE BRUSQ

Professeur, Collège du Vizac, Guipavas

Groupe « Instruments dans la classe »-IREM de Brest

christelle.le-brusq@ac-rennes.fr

Résumé

La rencontre avec un collectionneur d'instruments anciens a permis à l'IREM de Brest de monter une exposition sur les instruments de calcul de la multiplication à destination des élèves des classes de cycle III et de collège mais aussi de lycée. L'objectif de cette exposition était d'y accueillir les élèves pour des ateliers d'une demi-journée pendant lesquels ils pourraient manipuler les instruments, en construire tout en découvrant leur histoire. Un groupe inter-degré (université, collège, écoles) a été monté à l'IREM pour mettre au point des séquences d'activités avec les instruments et les tester dans les classes des membres du groupe. Exposition et ateliers ont été présentés aux enseignants lors du colloque de l'IREM en février 2012 avant l'ouverture aux classes de cycle III, de collège et de lycée avec des activités adaptées à chaque niveau. Le but de cet atelier est de faire partager l'expérience vécue. Une partie de l'atelier est consacrée à la présentation générale de l'exposition, des instruments et du matériel pédagogique réalisé pour cette occasion ; mais la plus grande partie est utilisée pour découvrir les instruments en suivant en quelque sorte les pas des élèves ; cette expérience partagée devenant le point de départ pour imaginer l'exploitation pédagogique qui en a été et peut en être faite.

Exploitations possibles

En classe, ou en formation des maîtres, cet atelier permet de découvrir des instruments de calculs et de les exploiter pédagogiquement . La documentation riche permet également une approche historique.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Instruments. Calcul. Histoire. Multiplication.

EXPLOITATION PEDAGOGIQUE D'UNE EXPOSITION SUR LES INSTRUMENTS DE CALCULS

Frédérique PLANTEVIN

Maître de conférences, UBO

Groupe « Instruments dans la classe »-IREM de Brest- LMBA

frederique.plantevin@univ-brest.fr

Christelle LE BRUSQ

Professeur, Collège du Vizac, Guipavas

Groupe « Instruments dans la classe »-IREM de Brest

christelle.le-brusq@ac-rennes.fr

Résumé

La rencontre avec un collectionneur d'instruments anciens a permis à l'IREM de Brest de monter une exposition sur les instruments de calcul de la multiplication à destination des élèves des classes de cycle III et de collège mais aussi de lycée. Notre objectif était d'y accueillir les élèves pour des ateliers d'une demi-journée pendant lesquels ils pourraient manipuler les instruments, en construire tout en découvrant leur histoire. Un groupe inter-degré (université, collège, écoles) a été monté à l'IREM pour mettre au point des séquences d'activités avec les instruments et les tester dans les classes des membres du groupe. Exposition et ateliers ont été présentés aux enseignants lors du colloque de l'IREM en février 2012 avant l'ouverture aux classes de cycle III, de collège et de lycée avec des activités adaptées à chaque niveau. Faire partager l'expérience vécue était le but de l'atelier que nous avons proposé au colloque 2012 de la COPIRELEM. Une partie de l'atelier a été consacrée à la présentation générale de l'exposition, des instruments et du matériel pédagogique réalisé pour cette occasion ; mais la plus grande partie a été utilisée pour découvrir les instruments en suivant en quelque sorte les pas des élèves ; cette expérience partagée devenant le point de départ pour imaginer l'exploitation pédagogique qui en a été et peut en être faite.

Depuis 2007, l'IREM de Brest a organisé l'accueil de plusieurs expositions d'instruments mathématiques. Elles ont lieu toujours à la même période, pendant le printemps, et dans le même lieu, la bibliothèque universitaire du Bouguen. En 2008, c'était "Venez prendre l'aire ... à Brest !", une exposition montée par le REHSEIS à partir d'instruments de calcul intégral des réserves du Musée des Arts et Métiers ; en 2009, c'était "La science nautique au 18^{ème} siècle", une exposition d'instruments de navigation créée par l'association Sciences en Seine et Patrimoine. A chaque fois, des ateliers originaux ont été proposés à des classes de niveau adapté après que l'ensemble ait été présenté aux enseignants lors du colloque de l'IREM. A chaque fois, nous avons essayé de favoriser la manipulation des instruments lorsque c'était possible, d'en faire construire ou de travailler sur des prototypes pour en faire découvrir le principe de fonctionnement. Nous avons acquis la certitude que par l'étude et la manipulation d'instruments mathématiques, on pouvait parler de mathématiques et faire des mathématiques d'une façon pertinente pour elles mais aussi intéressante d'un point de vue didactique car les instruments suscitent la curiosité de beaucoup d'élèves et donc peut-être leur adhésion au-delà des cinq premières minutes d'attention. Nous pensons aussi que la manipulation des instruments est nécessaire pour permettre une appropriation des questions relevant de leur étude, de leur fonctionnement, de leur développement, de leur histoire. Et enfin, nous sommes persuadés qu'il y a une "intelligence du geste" sur laquelle on peut s'appuyer pour faire comprendre les concepts qui sous-tendent ces instruments et les mathématiques qu'ils mettent en œuvre.

I - DESCRIPTION DU PROJET DE L'EXPOSITION « MULTIPLIEZ ! »

L'exposition que nous avons organisée en 2012 a les mêmes objectifs et suit donc le même schéma à la seule différence près qu'elle a été créée de toute pièce à partir d'une collection privée d'instruments de calcul très riche qui, si elle avait été déjà montrée, n'avait jamais fait l'objet d'une exposition. Tout devait donc être fait : sélection des instruments, réalisation du catalogue avec toutes les recherches historiques nécessaires, analyse du fonctionnement des instruments, travail pratique pour en avoir la maîtrise, analyse comparée entre instruments, conception des panneaux de l'exposition avec la recherche documentaire nécessaire, mise en scène des instruments, conception, réalisation et tests des activités proposées aux classes, conception et construction d'instruments pour permettre la manipulation ou compléter la collection. Il fallait aussi réunir les moyens financiers et logistiques ainsi que trouver les compétences techniques pour concevoir et réaliser catalogue, panneaux, système de fixation, instruments en bois. Ensuite, il fallait organiser l'accueil pratique des classes, c'est-à-dire trouver les lieux et surtout les personnes susceptibles d'encadrer les groupes d'élèves en visite dans l'exposition.

Le collectionneur possède essentiellement des instruments arithmétiques. Dès l'été 2010, nous avons décidé d'un commun accord de choisir les instruments de calcul de la multiplication et de centrer l'exposition autour de cette opération. Cela permettait de proposer des instruments intéressants dès le cycle III (multiplicatrices d'Odhner, bâtons de Neper) et jusqu'au lycée et au-delà (instruments logarithmiques).

1 Organisation et répartition du travail en amont

Une partie importante du travail a été réalisé en collaboration avec le couple de collectionneurs et au sein du groupe recherche formation de l'IREM : "Instruments de calcul dans la classe". La catalogue a été pris en charge par les collectionneurs qui ont fait les recherches historiques nécessaires pour accompagner les photos des instruments sélectionnés et en ont assuré la mise en page des versions successives. La version finale est le résultat de relectures et de discussions tout au long du processus de rédaction avec Frédérique Plantevin. Au fur et à mesure de ce travail, une vision d'ensemble des instruments de l'exposition s'est fait jour, permettant de la concevoir dans sa globalité et donc de l'organiser au mieux. Cette étape a été cruciale pour mettre au point plus tard sa présentation puis sa visite guidée. Elle a été utile pour présenter l'exposition aux étudiants qui ont participé à l'encadrement des ateliers. La conception des panneaux et tout le travail de synthèse sur l'exposition a été réalisé par Frédérique Plantevin à partir des ressources collectées par elle mais aussi par les collectionneurs au cours de leurs recherches et de leurs visites de musées (voir le panneau des crédits de l'exposition).



Illustration 1: Vue sud de l'exposition



Illustration 2: Vue nord de l'exposition

Le groupe IREM a été monté un an avant l'exposition de façon à avoir le temps d'expérimenter dans les classes cibles (cycle III du primaire et début de collège) et

de mettre ainsi au point des activités adaptées aux élèves. Il réunissait trois professeurs des écoles, deux professeurs de collège (dont Christine Le Brusq) du même bassin (Guipavas), un universitaire (Frédérique Plantevin) responsable du groupe et les collectionneurs. Son travail en amont de l'exposition était conçu par les enseignants comme une activité de liaison entre CM2 et 6^{ème} : des rencontres ont été organisées entre élèves des deux niveaux autour des multiplicatrices Odhner en particulier. Chaque enseignant a pu préparer ses élèves puis les mettre en activité sur les huit machines que le collectionneur avait mis à disposition du groupe (cf Le Brusq et *al* 2013).

2 Texte de présentation de l'exposition

« La multiplication est une opération à la fois utile et délicate, l'étude du développement des instruments qui permettent de la calculer illustre bien l'évolution des techniques de calculs en général. L'exposition lui est consacrée et propose de suivre l'histoire de son calcul entre le 17^{ème} siècle et le milieu du 20^{ème} siècle au travers d'une collection d'instruments anciens et de répliques de certains autres qui n'existent plus. Elle se situe donc dans le temps après la généralisation de l'usage de la numération indienne et du calcul écrit en Europe et avant l'arrivée des calculatrices.

L'exposition montre le rôle essentiel de la numération décimale de position - que les chiffres indiens rendent possible - dans le développement des techniques de calcul. C'est elle qui permet de passer du calcul mental, digital (avec les doigts) et avec jetons, en usage en France jusqu'à la fin du Moyen-Age, au calcul écrit à partir de la Renaissance, puis aux instruments mécanisant ces procédés.

C'est cette dernière mutation qu'illustre l'exposition en réunissant des abaques basées sur les bâtons de Néper (bâtons de Néper, de Genaille, horloge de Schikhard, arithmographe de Bollée), des instruments mettant en œuvre la multiplication comme addition répétée d'un même nombre grâce aux idées lumineuses de Leibniz sur la mécanisation des calculs (arithmomètre de Thomas, tous ses « descendants » jusqu'à la Curta pour les cylindres cannelés de Leibniz ; calculatrices Odhner et toutes ses dérivées - dont les Brunsviga - pour les roues à nombre variable de dents) et des instruments logarithmiques reposant sur les propriétés du logarithme de transformer produit en somme (règles à calcul, cylindres de Fuller, de Otis, Loga, cercles logarithmiques). L'existence et la large diffusion de ces instruments montrent à la fois le très grand besoin de tels instruments permettant d'exécuter plus d'opérations complexes en moins de temps et la capacité de les produire à grande échelle. Cette recherche d'efficacité et la croissance de la puissance de production sont caractéristiques de la révolution industrielle, elles seront illustrées par des documents sur les usines de montage comme celles de la Brunsviga. Un grand nombre de barèmes, livres de tables de multiplications de nombres, de tables de calculs d'une formule mettant en œuvre des multiplications de grandeurs spécifiques d'un métier (fabrication d'engrenages, de poutres, de munitions, calculs de résistance équivalente, conversions, ...) sont également présentés.

Enfin, pour illustrer le défi que représente la maîtrise de ce calcul, une collection importante d'instruments pédagogiques et ludiques à destination des enfants est réunie, et montre le souci permanent de-puis la fin du 19^{ème} siècle d'aider les enfants à apprendre leurs tables de multiplication. »

3 Les instruments des ateliers



Illustration 3: Une vue de la salle d'exposition. Au premier plan, instruments pour les ateliers : multiplicatrices, calculateur Le Pelletier et coffre des bâtons de Neper.

Pendant les ateliers, les élèves pouvaient manipuler et réaliser des calculs avec des machines de technologie Odhner, mises à disposition par le collectionneur essentiellement.

Il y avait : deux Brunsviga, une Thalès, une Walther, une Schubert (Allemagne), une Vaucanson (France), une Famosa (Espagne), une Jion (Mexique), une Original Odhner (Suède), toutes fabriquées dans les années 1940 à 60.

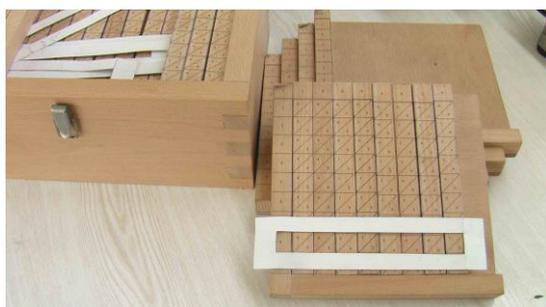


Illustration 4: Bâtons de Neper dans leur coffre et sur leur plateau de calcul avec un cache pour faciliter la lecture

Pour initier au calcul *per gelosia* et aux bâtons de Neper, des bâtons de Neper en bois de hêtre avec un plateau de calcul ont été construits par les menuisiers de l'UBO et Frédérique Plantevin ; des réglettes de Genaille ont été également fabriquées sur le même support. Ils sont les uns et les autres rangés dans un coffre fabriqué *ad hoc*.



Illustration 5: Bâtons de Neper de démonstration

De grands bâtons de démonstration ont également été fabriqués par les mêmes personnes (creux, construits en contreplaqué, peints et vernis ensuite) ; ils restaient à disposition des visiteurs dans l'exposition (voir Illustration 1).

Par la suite, au cours de la maturation du projet, d'autres idées d'activités sont venues comme celle sur les



Illustration 6 : Gravure (Charbonnier). Dans la guerre entre algoristes et abacistes la muse arithmétique prend parti pour le calcul au moyen des chiffres arabes

techniques de calcul avec les jetons telles qu'elles étaient pratiquées au Moyen-Age ; il nous est apparu qu'elles avaient des points communs avec les idées qui ont mené aux multiplicatrices par additions répétées. C'est pourquoi, nous avons décidé de proposer une initiation au calcul avec les jetons et à cette fin, un plateau d'abaque en ligne a été construit sur le modèle indiqué par J.Trenchant dans son ouvrage de 1561. Il a été fabriqué par Frédérique Plantevin avec l'idée d'en faire un modèle grandeur nature tel que l'on peut l'extrapoler à partir de la gravure très connue :

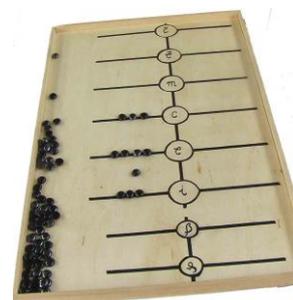


Illustration 7: Plateau d'abaque à jetons fabriqué pour les ateliers. Lire 348.

Des billes chinoises ont joué le rôle de jetons et nous avons réalisé un grand nombre d'abaques plastifiés à partir du modèle en dur qui ont permis aux élèves de manipuler eux-mêmes (avec des jetons de loto).

D'autres ateliers étaient proposés aux élèves, qui ne sont pas décrits ici car ils n'ont pas fait l'objet de l'atelier présenté au colloque de la COPIRELEM. Ils pourront être retrouvés dans des publications ultérieures ou sur le site de l'IREM.

4 L'accueil des élèves

Les ateliers étaient organisés pour une classe entière. Les bâtons de Neper, la multiplication *per gelosia* et les machines d'Odhner étaient proposés pour tous les niveaux. D'autres ateliers étaient rajoutés pour les plus jeunes : la réalisation d'une frise, la construction du « Singe savant » ; pour les classes les plus avancées : le calcul avec l'abaque à jetons, avec le calculateur Le Pelletier ou les règles à calculs, le calcul graphique, voire une découverte des machines sous vitrines,... selon la disponibilité des animateurs. Cette organisation requerrait au moins 3 animateurs ; les ateliers ont tourné avec 3 à 5 animateurs (le plus confortable pour les plus jeunes).

Dès le début du projet, il était prévu de trouver des animateurs potentiels parmi les étudiants de mathématiques ou parmi les étudiants de cursus scientifique du master PE de l'université. Leur rémunération comme tuteur avait été budgétisée. Au final, quatre étudiants de deuxième année de mathématiques ont fait leur stage de module de Préparation à la Vie Professionnelle à l'IREM et spécifiquement autour de l'exposition, 3 étudiants de master PE et deux étudiantes de première année de master mathématiques-métier de l'enseignement ont encadré les ateliers. Ils se sont saisis de l'exposition, des activités qui avaient été préparées en amont et testées par les enseignants du groupe IREM "Instruments dans la classe" et des autres activités mises au point petit à petit, au cours de séances collectives dans l'exposition et également par un travail personnel assez important. Une étudiante de master mathématiques a réalisé son Travail d'Etudes et de Recherche en lien avec l'exposition sous la responsabilité de Sandrine Bourgeois. Elle a proposé une activité autour du calcul graphique, ce qui a permis de compléter les techniques de calcul de multiplication proposées dans l'exposition. Les ateliers se terminaient la plupart du temps par une petite séance de bilan au cours de laquelle étaient échangées impressions, critiques et idées d'amélioration des ateliers. Plusieurs aménagements des ateliers ont leur origine dans ces discussions.

II - PRESENTATION DE L'ATELIER DU COLLOQUE

1 Rendre compte de l'expérience

Il y avait plusieurs façons de présenter cette expérience, nous avons choisi très vite de le faire sous la forme d'un atelier où les participants manipuleraient les instruments que nous avons encore en notre possession pour quelques jours, plutôt que sous celle d'une communication. Il nous semblait intéressant de faire découvrir par la pratique ce que nous avons nous-mêmes découvert ainsi. Mais aussi, il nous semblait impossible de parler de la façon dont les élèves s'étaient appropriés ou non les activités que l'on avait proposées sans que nos interlocuteurs l'aient expérimenté pour eux-mêmes. Nous aurions pu choisir d'expliquer le fonctionnement des instruments, laisser chacun faire deux ou trois calculs puis expliquer ce que nous avons proposé aux élèves pour chaque instrument ; cela aurait économisé du temps et nous aurait permis d'en avoir davantage pour parler de l'exploitation pédagogique que nous en avons fait. Mais nous avons décidé de faire découvrir les activités aux participants de la même façon que nous l'avions fait pour les élèves qui sont venus dans l'exposition. Comme pour eux, nous avons donc retravaillé les énoncés de façon à nous adapter à ce public d'adultes, formateurs de mathématiques, particulièrement sensibles aux difficultés d'apprentissage des mathématiques, à la fois des élèves et des apprentis professeurs des écoles.

2 Les activités retenues pour l'atelier du colloque

Nous avons choisi les activités le plus susceptibles d'intéresser les participants en elles-mêmes, non à étudier dans la perspective de l'exploiter ensuite mais à découvrir et à mener. Notre souci était de trouver l'angle et le ton qui mettraient les participants en activité, le même souci que nous avons eu pour chaque niveau de classe différent puisqu'à partir d'expérimentations dans deux niveaux (CM2 et 6^{ème}) nous avons élaboré des ateliers pour tous les élèves, parfois un peu plus jeunes (CE2) mais surtout plus avancés puisque jusqu'à la première année après le baccalauréat. Voici les thèmes proposés pendant l'atelier, ils sont filés et analysés dans la partie suivante (III) puis, dans la partie IV, nous montrons sur deux d'entre eux comment ils ont été adaptés aux différents élèves et faisons quelques remarques sur l'expérience.

Multiplier comme à la Renaissance :

un atelier basé sur le fameux manuscrit de Trévis (1478) qui montre et explique la méthode de multiplication dite *per gelosia*, passe ensuite à la multiplication avec les bâtons de Neper (1617) et finit par une comparaison avec les diverses méthodes de multiplication. Manipulation des bâtons de Neper.

A la découverte des machines d'Odhner :

un atelier de découverte et de prise en main de multiplicatrices de technologie Odhner, et de réalisations de calculs simples (additions et soustractions, multiplication par un chiffre) et moins simples (multiplication par un nombre, un grand nombre, division par un chiffre avec reste entier, division décimale, division par un nombre, contrôle du nombre de décimales du résultat). Les machines utilisées sont celles des ateliers dans l'exposition.

Multiplier comme au Moyen-Age :

un atelier basé sur un texte extrait de l'ouvrage de Jean Trenchant (1561) qui présente les différentes méthodes en usage à son époque pour faire les comptes dans le commerce au moyen de jetons. On trouve dans l'ouvrage, la représentation des nombres sur l'abaque en ligne, les techniques de calcul des opérations de base expliquées pour l'utilisation. A partir de la page 372, on peut comprendre la méthode utilisée en lisant le texte (en vieux français) ; ensuite, il faut pratiquer quelques calculs pour commencer à développer des automatismes et voir les difficultés inhérentes à cette méthode mais aussi sa simplicité conceptuelle. Cet atelier n'a été proposé qu'à partir de la 5^{ème}.

Réglottes de Genaille :

un atelier de découverte et de réalisation de ses propres réglottes de Genaille à partir de l'analyse de quelques réglottes déjà fabriquées. Elles permettent de mener des calculs de multiplication de nombres très grands par un chiffre sans exécuter aucune opération par une méthode que l'on peut qualifier de visuelle.

III - ACTIVITES DE L'ATELIER**1 Multiplier comme à la Renaissance : la « per gelosia » et les bâtons de Neper**

L'activité commence par l'analyse du manuscrit de Trévise qui présente quatre méthodes de calcul du produit de deux nombres : 934 par 314, comme le dit le texte (en italien). Le résultat est 293 276.

Illustration 8: Extrait du manuscrit de Trévise : méthode très proche de celle enseignée actuellement

La comparaison de ces méthodes dont l'une est très proche de la technique enseignée de nos jours dans les écoles permet de conjecturer puis de comprendre assez vite comment la méthode *per gelosia* fonctionne ; l'énoncé guide la réflexion en posant quelques questions sur les points remarquables. Elle est explicitement présentée et mise en œuvre dans un petit calcul ensuite pour permettre le travail en

autonomie complète de façon à ce que l'atelier global puisse fonctionner (deux animateurs pour quatre ateliers, les jetons et les machines requérant la présence assidue d'un animateur). Ensuite, il est proposé de réaliser le même calcul avec les bâtons de Neper. Les participants sont encouragés à se munir d'un plateau de calcul et de choisir les bâtons qui conviendront parmi tous ceux proposés après une phase d'analyse qui peut se faire de façon collective ou individuelle. Il faut remarquer que chaque face des bâtons est occupée par la table de multiplication du chiffre qui est indiqué en haut de la face. La table se présente de la même manière que la *per gelosia* à savoir chaque carré est découpé par la diagonale qui sépare chiffre des dizaines et chiffre des unités, du plus petit multiplicateur au plus grand en partant du haut. L'interprétation des chiffres du plateau comme les chiffres du multiplicateur est alors aisée et la réalisation du calcul sans problème avec la technique *per gelosia* ligne par ligne, c'est-à-dire chiffre du multiplicateur par chiffre du multiplicateur. Il faut ensuite réaliser la somme des deux produits partiels sur un papier sans oublier le décalage.

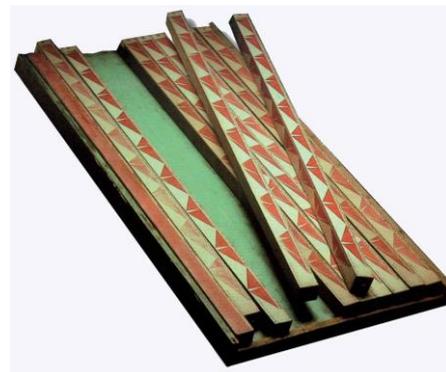
Pour finir, un calcul un peu plus important est proposé avec trois méthodes de façon à faire ressortir les avantages et les inconvénients de chacune : la *per gelosia*, les bâtons de Neper et la méthode classique actuellement enseignée. La dernière est certainement la moins facile des trois, essentiellement parce qu'elle ne permet pas de retrouver facilement ses erreurs éventuelles dans les tables de multiplication, contrairement à la *per gelosia* où les tables sont écrites. Finalement, l'économie d'effort apportée par les bâtons de Neper (on n'a plus besoin d'apprendre ses tables de multiplication) n'est pas si déterminante dans la réalisation de l'opération complète car il faudra de toute façon prendre un papier et un crayon pour sommer les produits partiels et qu'en plus il faudra soi-même tenir compte du nécessaire décalage. Ceci dit, c'est le propos de quelqu'un qui connaît ses tables de multiplication... La *per gelosia* ne tiendrait pas devant une multiplicatrice d'Odhner bien utilisée, ni même devant des réglottes de Genaille.

Illustration 9: Extrait du manuscrit de Trévise : une des présentations de la méthode « per gelosia »

2 Les réglettes de Genaille

Il s'agit de comprendre ces réglettes intrigantes, ornées de triangles de taille variable, de les comprendre assez pour pouvoir les fabriquer, et bien sûr de savoir s'en servir. L'activité est proposée après avoir travaillé sur les bâtons de Neper.

Illustration 10: Réglettes de Genaille sur leur plateau de calcul (Marguin)



×		3	4	8
1	0	3	4	8
2	0	6	8	6
	1	7	9	7
3	0	9	2	4
	1	0	3	5
	2	1	4	6
4	0	2	6	2
	1	3	7	3
	2	4	8	4
	3	5	9	5
5	0	5	0	0
	1	6	1	1
	2	7	2	2
	3	8	3	3
	4	9	4	4
6	0	8	4	8
	1	9	5	9
	2	0	6	0
	3	1	7	1
	4	2	8	2
	5	3	9	3

Illustration 11: Calcul exécuté avec les réglettes de Genaille : $348 \times 6 = 2088$ (extrait des panneaux de l'exposition).

L'atelier commence par montrer un calcul mené avec les réglettes (ci-contre un extrait). Comme avec les bâtons de Neper, chaque chiffre a sa réglette et de la même façon, il faut placer les réglettes des chiffres du multiplicande sur le support, contre la règle de bord qui indique les chiffres qui seront les multiplicateurs. Le résultat se lit d'un simple coup d'oeil de la droite vers la gauche en « suivant les triangles » une fois que l'on sait d'où partir. Pour les besoins de l'explication, seuls les triangles qui servent au calcul présenté ont été peints alors qu'en réalité ils le sont tous (cf ci-dessus). La première difficulté est de voir comment sont reportées les tables de multiplication des chiffres du multiplicande. En commençant par la réglette de 3, qui est contre le bord, on repère facilement les chiffres des unités et des dizaines des 6 premiers produits de 3 sur le schéma ci-contre. Cela suffit pour les repérer pour les deux autres réglettes. Il reste à comprendre l'utilité de la colonne de petits carrés à droite de chaque réglette (en dehors des premiers qui donnent donc le chiffre des unités des produits du chiffre du multiplicande dont on étudie la réglette), et la façon dont les

triangles sont faits (puisque l'on a compris qu'ils sont là pour « montrer le chemin »). Les petits carrés donnent toujours le chiffre des unités des produits du chiffre du multiplicande considéré mais augmenté des retenues éventuelles des calculs réalisés à sa droite. Pour un chiffre de multiplicateur donné, N, (c'est-à-dire une grande ligne donnée), il ne peut y avoir plus de N retenues de 0 à N-1. Ainsi partant de 8, chiffre des unités de 6×8 , il faut suivre le triangle vers 8 qui est précisément le chiffre des unités de 6×4 augmenté des 4 dizaines de 6×8 . Le triangle qui a pour base 8 doit pointer vers le chiffre des unités du produit suivant +4, qui est toujours placé au même endroit sur la ligne du 6 de toute réglette quelle qu'elle soit. Ainsi sont construits les triangles qui font de cette méthode une méthode visuelle extrêmement efficace. Une fois tout cela compris, il est proposé de réaliser ses propres réglettes, en commençant par remplir les petits carrés et dessiner les triangles.

3 Multiplier comme au Moyen Age : l'abaque à jetons

Le calcul avec les jetons ignore les tables de multiplication et réalise des multiplications par additions répétées, comme les multiplicatrices mécaniques d'Odhner.

Le calcul se fait sur un plateau sur lequel est dessiné un arbre (son tronc est un simple trait vertical qui partage en deux le plateau, une partie à l'arrière de l'arbre - à gauche - pour représenter le multiplicande, une partie à l'avant de l'arbre - à droite - pour construire le résultat) et ses branches pour poser les jetons (voir Illustration 7). La première étape consiste à comprendre la représentation des nombres avec les jetons sur cet arbre. Un jeton peut valoir 1, 10, 100, etc. selon qu'il est sur la première, deuxième ou troisième branche. Il peut valoir 5, 50 ou 500 s'il est placé à mi-hauteur entre la branche du 1 et du 10, du 10 et du 100, du 100 et du 1000. On comprend qu'avec ces règles, il ne peut y avoir plus de 4 jetons sur les branches et pas

plus d'un dans les positions intermédiaires. L'ouvrage de Jean Trenchant (1561) explique comment procéder et donne dans son texte l'exemple de 763×46 qui est passablement long à mener à son terme et certainement pas celui par lequel commencer. Néanmoins, son explication est fort claire : il faut « poser » 763 à l'arrière de l'arbre (ce que l'on peut faire avec 8 jetons), puis les prendre un à un et « pour chaque jeton que j'enlève, j'en pose 46 à l'avant de l'arbre exactement à la même hauteur ». Au bout de 8 opérations de ce genre (entrecoupées par des phases de réductions du nombre de jetons), il n'y a plus de jeton à l'arrière et le résultat est formé à l'avant. Il suffit de le lire. Le calcul avec les jetons n'est pas un calcul savant mais il requiert concentration et précision des gestes. Il est très long à réaliser et une erreur de manipulation oblige à tout refaire depuis le début car les étapes intermédiaires ne sont en aucune façon conservées, mais il est très élémentaire. Dans cette méthode, pour chaque jeton du multiplicande, on ajoute une fois le multiplicateur. Dans le paragraphe suivant, on verra que les machines d'Odhner ajoutent autant de fois le multiplicande qu'il y a d'unités dans le multiplicateur.

4 Multiplier à l'aire industrielle : les machines d'Odhner

Pour commencer, il s'agit d'identifier les différentes parties des machines mises à disposition. Il y a plusieurs objectifs à cette étape ; d'une part, il s'agit d'observer les machines et d'identifier ce qu'elles ont en commun malgré leurs différences apparentes. Le schéma proposé est donc validé par chacun à partir de sa machine et illustre l'unité de fonctionnalités de la famille de machines étudiée. La deuxième motivation est de prendre le temps de manipuler l'instrument librement (sans consigne) et sans but précis de façon à découvrir les mouvements possibles, les parties mobiles, les liens entre ses différentes parties et de conjecturer son fonctionnement. La troisième motivation est de savoir nommer les différentes parties de la machine de façon à pouvoir comprendre les consignes et communiquer à propos de la machine.

Ensuite, on apprend les manipulations de base : à entrer des nombres - on dira inscrire puis enregistrer pour faire apparaître le nombre dans le totaliseur - à remettre à zéro. On fait ensuite remarquer que si, un nombre étant inscrit, on tourne la manivelle deux fois, trois fois, on obtient dans le totaliseur le produit du nombre inscrit par deux puis par trois etc. et qu'on lit le multiplicateur dans le compte-tours. La troisième question montre que cet instrument est une additionneuse : elle ajoute le nombre inscrit à celui du totaliseur (ou le soustrait si on tourne la manivelle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) et le compte-tours indique le nombre de tours de manivelle effectués. La synthèse des deux questions permet de dire que cette machine fait les multiplications par additions répétées. La question suivante a pour but de faire découvrir le rôle essentiel du chariot : ayant inscrit 56, et ayant décalé d'une place le chariot (qui porte le totaliseur), un tour de manivelle permet d'inscrire 560 dans le totaliseur et 10 dans le compte-tours. Cet aménagement permet d'envisager des multiplicateurs à plusieurs chiffres avec un nombre raisonnable de tours de manivelle, par exemple 56×32 en 5 tours de manivelle : on inscrit 56, on tourne deux fois la manivelle, on décale le chariot d'une unité vers la droite et on tourne la manivelle trois fois.

Suit une initiation à la division : après avoir inscrit et enregistré le dividende, et remis le compte-tours à zéro, on inscrit le diviseur et on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre jusqu'à ce que la machine sonne pour indiquer que l'on vient de passer dans les nombres en dessous de zéro (ce qui se traduit pour une machine à 12 chiffres dans le totaliseur, par le complémentaire à 10^{12}). On repart dans le sens des aiguilles d'une montre pour un tour afin de revenir à l'étape précédente et on peut lire le quotient dans le compte-tours et le reste entier dans le totaliseur. L'énoncé propose ensuite d'utiliser le chariot pour réaliser la même division mais avec une puis deux décimales. Pour obtenir une décimale, il faut inscrire 56 et l'enregistrer avec



Illustration 12: Multiplicatrice de technologie Odhner

le chariot décalé d'un cran (560 dans le totaliseur), puis inscrire 12 de la même façon et tourner la manivelle jusqu'à la sonnerie (on soustrait donc 120 à chaque tour), après le tour de retour en arrière, le compte-tours indique 4, le totaliseur 80 ; après avoir ramené le chariot complètement à gauche, on reprend les tours de manivelles non sans avoir placé un marqueur à droite de 4 dans le compte-tours. Après 6 tours, la sonnerie retentit et on lit (après le tour de retour en arrière) 4,6 dans le compte-tours (où le marqueur est interprété directement comme la virgule) et 8 dans le totaliseur. Pour obtenir la deuxième décimale, on doit reprendre le calcul ; autrement dit, il faut décider de la précision de son calcul avant de commencer. Dans le cas proposé, il faudra décaler de deux vers la droite pour obtenir deux décimales. On aurait pu également se demander comment utiliser la fonctionnalité du chariot pour réaliser des divisions de grands nombres par des diviseurs relativement petits : par exemple 4256 par 83 que l'on aimerait réaliser sans devoir exécuter 51 tours de manivelle. C'est la question complémentaire de la précédente et qui permet de décider de combien on doit décaler le chariot pour réaliser le calcul désiré. Il faut comparer dividende et diviseur mais on peut le faire de façon assez rapide et grossière : ici le dividende est à 4 chiffres, le diviseur à 2 chiffres, il faut donc rajouter au décalage nécessaire pour les décimales, un décalage de deux chiffres pour l'enregistrement du diviseur. En fait, comme le premier chiffre du dividende est plus petit que le premier du diviseur, le premier tour de manivelle fera sonner la machine (puisqu'on aura essayé de faire $4256 - 8300$), il faudra revenir en arrière et ramener le chariot d'un cran vers la droite (pour exécuter la soustraction répétée de 830 à 4256, ce qui donnera 5).

Parmi les machines mises à disposition pendant l'atelier, il y a un écorché démonté qui laisse voir une partie des engrenages de l'inscripteur, et du totaliseur ainsi que la pièce essentielle qui est la caractéristique technologique de cette famille d'instruments, son entraîneur, dû à Odhner : la roue à nombre variable de dents.

IV - TRAVAILLER AVEC LES ELEVES

1 Multiplier comme à la Renaissance

L'énoncé proposé lors du colloque n'est pas l'activité de départ telle qu'elle a été testée dans les classes de CM2 et de 6^{ème} avant l'exposition ni celle qui a été proposée à ces classes pendant les ateliers de l'exposition. Il correspond davantage à ce qui a été proposé aux élèves plus avancés dans le collège et au lycée, bien que l'étude du manuscrit ait été également faite pour des plus jeunes à partir du panneau de l'exposition qui le montre (premier tableau) et en explique une partie. On ne pouvait évidemment pas s'appuyer sur les panneaux de l'exposition pendant l'atelier du colloque de la COPIRELEM puisque atelier et exposition étaient dans des lieux différents, contrairement aux ateliers proposés aux classes. L'activité proposée aux plus jeunes se déroulait en deux temps :

- un temps d'explication : la construction du tableau de la *per gelosia* était faite pour le calcul du produit de deux nombres à deux chiffres puis la méthode des sommes par diagonale était montrée, et enfin les bâtons de Neper étaient présentés dans la foulée en insistant sur la communauté de technique des deux méthodes ; suivait un exemple fait et détaillé de calcul avec les bâtons : 574×93 (à noter que ce calcul requerrait un report de retenue entre diagonales dans le *per gelosia*, ce que l'on s'est bien gardé de faire dans le premier exemple) ;
- un temps d'activité : observation des bâtons, calculs de produits avec la méthode *per gelosia*, avec les bâtons en faisant disposer les réponses de façon à faire apparaître la position des chiffres dans les résultats partiels.



Illustration 13 : Kit de bâtons de Neper à transporter à la ceinture dans un étui en cuir - 17ème siècle (Arithmeum, Bonn)

Ces deux temps n'étaient évidemment pas séparés de façon stricte selon l'animateur et aussi selon la façon dont la classe réagissait. La phase d'observation des bâtons peut être faite dès la fin de la présentation de la *per gelosia* et avant même de lire avec les élèves la partie les concernant dans l'énoncé. Elle a parfois été réalisée avec les bâtons de démonstration, ce qui est très confortable pour travailler avec un groupe et permet de faire naître le débat entre les élèves. La taille des objets semble aider à leur appréhension.

Lorsque ces activités ont été mises au point, les bâtons en bois pour la manipulation n'existaient pas encore et une troisième phase de construction des bâtons sur des réglettes en carton avait été ajoutée aux deux décrites ci-dessus. C'est un travail assez long car il faut évidemment un nombre relativement important de réglettes pour pouvoir calculer et les faire avec soin pour que les diagonales et lignes coïncident bien (c'est pourquoi un tableau vierge est proposé en annexe) mais ensuite, les élèves ont leur propre calculateur de poche ce qui est un véritable encouragement à s'approprier la technique et à s'y entraîner. Surtout qu'ils ont pu voir dans l'exposition, la photo ci-contre d'une pochette à réglettes de Neper pour transporter avec soi.

L'activité a été adaptée aussi aux classes de CE2, davantage centrée sur la multiplication par des chiffres avec une initiation seulement à la multiplication par des nombres.

Dans l'ensemble, la méthode *per gelosia* est sans conteste la préférée des élèves et dans plusieurs classes de collège en particulier, des élèves l'ont faite leur.

2 Multiplier à l'aire industrielle : les machines d'Odhner

Très peu d'adaptations ont été nécessaires pour cet atelier qui a eu un succès sans exception quel que soit l'âge des participants. L'atelier prend plus ou moins de temps selon l'âge et l'on va donc simplement plus ou moins loin. La division décimale n'a été vue qu'avec les élèves de fin de collège (rarement) et de lycée.

Pour les plus jeunes, il s'agit de faire comprendre la mise en œuvre du principe de la multiplication par additions répétées : le concept est naturel mais la mise en œuvre mystérieuse. Il est assez naturel de réaliser le multiplicateur en comptant les tours car le calcul est encore très proche des nombres et ceux-ci très proches de la problématique du dénombrement. Pour un élève de collège (disons 4ème), la représentation des nombres est très différente, ceux-ci sont très éloignés des grandeurs qu'ils mesurent et le calcul, une activité très éloignée du dénombrement. La pratique des calculatrices leur rend l'utilisation de machines familière et sans mystère dans un premier temps, mais seulement dans un premier temps car ils sont déroutés par l'instrument qui ne permet pas d' « entrer » le multiplicateur au même titre que le multiplicande. Ils doivent réaliser que ces deux nombres n'ont pas le même rôle et ne sont pas traités de la même façon lorsqu'on les multiplie avec une machine Odhner. Si le multiplicande est bien "entré", le multiplicateur lui est construit par le manipulateur. Ce point est très nouveau pour les élèves et les déstabilise dans un premier temps. D'une façon générale, la commutativité ne va plus de soi avec les instruments utilisés (contrairement à ce que l'usage précoce des calculatrices induit) et il faut donc la mettre en évidence explicitement.

Tous les élèves sans exception sont dans l'incapacité de conjecturer le fonctionnement des machines, parfois même après les deux premières questions. C'est pourquoi, les ateliers sont menés avec une machine écorchée à portée du regard de façon à pouvoir montrer les engrenages qui permettent d'inscrire les nombres de les faire passer dans le totaliseur, d'ajouter et de retrancher. En travaillant avec les élèves, nous avons réalisé qu'aucun d'entre eux n'avait la moindre idée de la façon d'additionner deux nombres par des moyens mécaniques et que cela constituait une véritable difficulté pour imaginer le fonctionnement des multiplicatrices. Il est à parier que même pour ceux qui ont compris l'utilisation des machines, leur fonctionnement reste autant un mystère que celui des calculatrices électroniques alors même que tout était

sous leurs yeux. C'est pourquoi, nous avons eu l'idée de construire une additionneuse à roues (voir illustration 3) pour montrer comment on peut en graduant des roues dentées et en les plaçant bien, additionner deux nombres avec report automatique de la retenue. Cela nous semble nécessaire, à la fois pour montrer ce qu'il est possible de faire et en même temps, montrer le chemin encore à parcourir pour aller de l'additionneuse à la multiplicatrice d'Odhner. Nous n'avons pas eu le temps d'exploiter cet instrument et de l'intégrer réellement aux ateliers. Ce sera l'objet d'un travail ultérieur.

Dans l'analyse du fonctionnement par l'étude de l'écorché, on peut travailler sur le décalage car le chariot le matérialise d'une façon très simple : multiplier par 10 c'est seulement décaler le nombre vers la gauche pour que ses unités deviennent des dizaines. On peut montrer qu'il y a un entraîneur pour chaque chiffre et que les unités de l'inscripteur sont en face de celles du totaliseur lorsque le chariot est complètement à gauche mais qu'elles peuvent être en face des dizaines, des centaines en le déplaçant de façon appropriée. C'est une façon très parlante pensons-nous, d'aborder la numération de position. D'une façon générale, les aller-retour entre calcul, représentation des nombres, c'est-à-dire les mathématiques, et le fonctionnement de la machine, c'est-à-dire la technologie, est fructueux pour les mathématiques comme pour le développement d'un esprit pratique et concret chez les élèves.

V - CONCLUSION

L'atelier s'est conclu par une discussion à bâtons rompus sur l'exploitation possible de ce travail. Il nous a semblé clair que le calcul avec les jetons avait grandement intéressé les participants par sa simplicité de réalisation (ce qui n'est pas le cas des Odhner qui ne sont pas si faciles que cela à réunir en nombre suffisant) et son intérêt pour reprendre les questions de numération par exemple en master PE ou en formation de formateurs. Nous en sommes persuadés ne serait-ce que pour avoir constaté l'engouement que la manipulation des jetons suscite chez les adultes.

Nous n'avons pas eu le temps, contrairement à ce qui était prévu, de montrer les énoncés des mêmes activités pour différents niveaux et de partir de là pour analyser les difficultés et aussi les enthousiasmes des élèves d'une façon un peu cadrée et systématique (ces points ont été discutés au cours des ateliers, dans le feu de l'action, de façon donc forcément un peu décousue). Nous n'avons pas non plus pu montrer les séquences filmées promises (une partie de ces séquences est disponible dans le film de l'exposition attaché au texte de l'atelier) . Malgré cela et la frustration que ce constat engendre, nous avons eu l'impression que nous avons réussi à transmettre notre intérêt pour ces instruments et les situations qu'ils permettent de créer pour les élèves.

VI - BIBLIOGRAPHIE (TITRE 1)

CARGOU C., CARGOU M.-P. (2012) Multipliez ! Catalogue de l'exposition, IREM de Brest

CHARBONNIER R. (2002) Si les nombres m'étaient contés..., IREM de Clermont-Ferrand

CHARBONNIER R. (2004) La route des chiffres à travers les civilisations indienne, arabe et occidentale du V^e siècle au XVIII^e siècle, IREM de Clermont-Ferrand

D'OCAGNE M. (1905) Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques, histoire et description sommaire des instruments et machines à calculer, tables, abaques et monogrammes, Gauthier-Villars

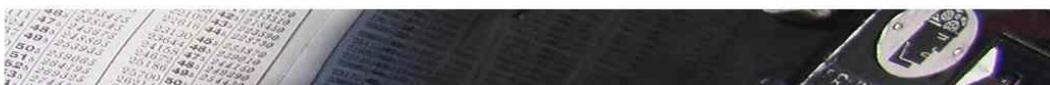
LE BRUSQ C., MARGOGNE C., PLANTEVIN F. (2013) Activités de l'exposition « Multipliez ! » testées dans les classes, IREM de Brest, *en préparation*

MARGUIN J. (1994), Histoire des instruments et machines à calculer, Hermann

TRENCHANT J. (1561), L'art et moyen de calculer avec les getons, Lyon

[retour sommaire](#)

VII - ANNEXE : LES ENONCES ET QUELQUES RESSOURCES



A la découverte ... de machines d'Odhner

Le 29 octobre 1878, Willigot T. Odhner dépose aux Etats-Unis un brevet de machine à calculer capable de réaliser des multiplications. Les premières machines à calculer étaient en effet de simples machines à additionner. Parfois la soustraction était possible, mais il faudra attendre la fin du XIX^{ème} siècle et deux brevets déposés par Thomas de Colmar d'une part et par Odhner d'autre part pour que la multiplication soit réalisable, par succession d'additions. La première machine qui mettait en œuvre ce principe, due à Thomas de Colmar, date de 1865 et repose sur l'idée, ancienne mais non exploitée jusque là, des cylindres de Leibniz (1678) : c'est la famille technologique des arithmomètres qui aboutit aux machines Curta en 1950. Odhner propose une nouvelle technologie pour mettre en œuvre le même principe de multiplication par additions répétées au moyen d'une roue à nombre variable de dents. Ce brevet donnera la lignée technologique des Odhner, très largement répandue et dont de très nombreuses répliques seront construites entre 1900 et 1960, lignée qui aboutira aux Alpina en 1958.

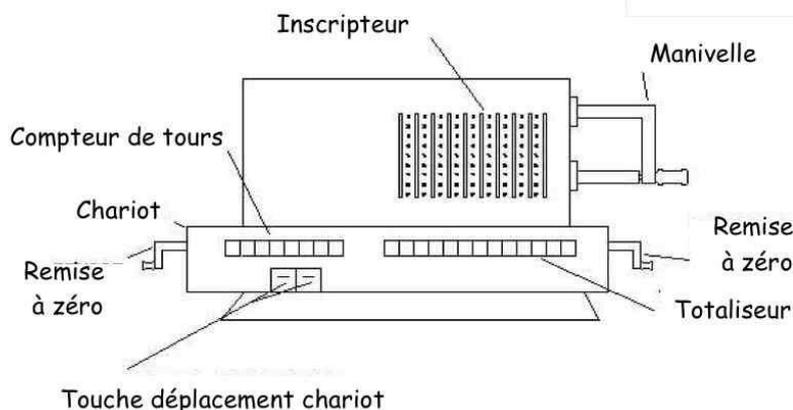
La partie la plus importante de toutes ces machines ne se voit pas : c'est l'entraîneur. Le mécanisme, actionné par la manivelle, qui transmet les nombres de l'inscripteur vers le totaliseur chiffre par chiffre mais en un seule fois : en un tour de manivelle. L'entraîneur des arithmomètres est le cylindre cannelé de Leibniz, celui des Odhner est la roue à nombre variable de dents.

Machine de technologie Odhner (1878)



Repérez sur votre machine
les différentes parties indiquées
sur le schéma ci-contre.

I) Un peu de vocabulaire



Exposition « Multipliez ! » - Groupe IREM « Instruments dans la classe » - juin 2012



UBO
UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
21078 DIJON CEDEX 9



II) A la découverte de ces machines.

Une petite vidéo présentant le fonctionnement de telles machines est disponible à l'adresse suivante :

<http://www.youtube.com/watch?v=TL8W-ucpazA>

A vous maintenant de découvrir ces machines :

Avant tout, placez le chariot le plus à gauche possible.



1) Rentrez le nombre suivant : 24.
Remettez le totaliseur à zéro.

2) Rentrez le nombre 142. Tournez une fois, 2 fois, 3 fois la manivelle dans le sens des aiguilles d'une montre. Quel résultat d'opération obtenez-vous ? :
Remettez à zéro le totaliseur.

3) Rentrez le nombre 42.
Faites un tour de manivelle toujours dans le même sens. Mettez l'inscripteur à zéro.
Rentrez le nombre 14. Tournez une fois la manivelle dans le sens habituel. Quel résultat d'opération obtenez-vous ? :
Remettez l'inscripteur à zéro. Rentrez 24. Tournez la manivelle une fois dans l'autre sens cette fois-ci. Quel résultat d'opération obtenez-vous ? :

4) Remettez à zéro, inscrivez 56 dans l'inscripteur, déplacez le chariot d'un cran et tournez la manivelle, quel nombre est inscrit dans le totaliseur ? :
Quel nombre est inscrit dans le compte-tours ?
Utilisez cette fonctionnalité pour réaliser le calcul de 56 par 32 en 5 tours de manivelle.

5) Remettez à zéro, inscrivez 56 dans l'inscripteur, tournez la manivelle une fois, remettez compteur de tours et inscripteur à zéro. Entrez 12 dans l'inscripteur, tournez la manivelle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre jusqu'à ce que la machine sonne, finissez ce tour puis tournez dans le sens des aiguilles d'une montre une fois. Indiquez les nombres indiqués dans le totaliseur : , dans le compte tours :

6) Utilisez la fonctionnalité du chariot pour réaliser la division précédente avec une puis deux décimales.



Multiplier comme à la Renaissance

Voici la copie d'un manuscrit anonyme qui date de 1478 et a été trouvé à Trévis, c'est le texte le plus ancien en langue italienne présentant quatre façons de calculer avec papier et crayon le produit des mêmes deux nombres. Quels sont ces nombres ?

Voglio però che tu intendi che sono altri modi de multiplicare per scachiero: li quali lassaro al studi o tuo: mettendo li esempi soi solamente in forma, come potrai vedere qui sotto
 Or toglì de fare lo predi:to scachiero. 30e. 3 i 4. fia. 9 3 4. e nota de farlo per li quatro modi come qui da sotto.

$$\begin{array}{r} 934 \\ \times 4 \\ \hline 3736 \\ 9340 \\ \hline 280276 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 934 \\ \times 4 \\ \hline 3736 \\ 10340 \\ 28023 \\ \hline 280276 \end{array}$$

30e. 3 i 4.

	9	3	4	
2	2	0	1	3
9	7	9	2	
0	0	0		
9	9	3	4	i
3	5	1	1	
	6	2	6	4
2	2	6		

Somma.

	9	3	4	
	6	2	6	
3	i	i	4	6
9	3	4		
0	0	0	i	2
7	9	2		
2	0	i	3	2
2	9	3		

Exposition « Multipliez ! » - juin 2012



UBO[®]
 UNIVERSITÉ DE BRITAGNE
 OCCIDENTALE



Que représentent chacun des nombres 3736, 934, 2802 dans les deux premières méthodes ?

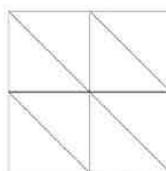
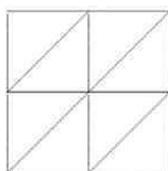
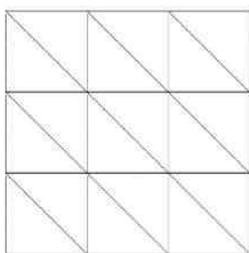
Laquelle des deux méthodes vous semble la plus correcte et pourquoi ?

Les deux tableaux qui suivent s'appellent la méthode *per gelosia*, étudiez-les et comparez-les :
Comment les tableaux sont-ils remplis, que représentent les nombres écrits dans chacun des carrés du tableau, pourquoi sont-ils découpés en deux par la diagonale, que représentent les chiffres de chaque côté de la diagonale pour chaque carré ... ?

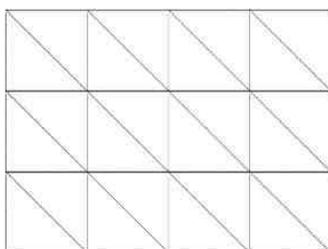
	9	3	4	
2	2	0	1	3
9	0	0	0	1
3	3	1	1	4
	2	2	6	4

Le résultat est obtenu en procédant de la droite vers la gauche, en sommant les chiffres d'une même diagonale, en inscrivant le chiffre des unités du résultat dans l'alignement et en reportant celui des dizaines dans la diagonale suivante. On calcule par simple addition le chiffre des unités, des dizaines, des centaines, des milliers, des dizaines et des centaines de milliers du résultat de la multiplication de 934 par 314.

Un test ? Voici un calcul juste : $23 \times 14 = 322$, comment le réaliser avec les méthodes proposées ?



Pour les méthodes *per gelosia*, choisissez les bons tableaux et faites les calculs :



Exposition « Multipliez ! » - juin 2012





Prenez un plateau de calcul à bâtons de Néper et choisissez les bons bâtons pour réaliser le même calcul. Lesquels avez-vous retenus ? Dessinez-les à main levée et exécutez le calcul.

On veut maintenant réaliser le calcul du produit de 4579 par 625.
Réalisez ce calcul (ci-dessous) avec les deux méthodes en vous chronométrant.

Posez la même multiplication telle qu'elle est enseignée à l'école primaire et identifiez chaque étape du calcul dans les trois méthodes.

$$\begin{array}{r}
 4 5 7 9 \\
 \times 6 2 5 \\
 \hline
 - - - - - \\
 - - - - - \\
 - - - - - \\
 \hline
 - - - - - \\
 \hline
 - - - - -
 \end{array}$$

Exposition « Multipliez ! » - juin 2012





Règlettes de Genaille

Dans l'atelier « Multiplier comme à la Renaissance », vous avez vu comment on peut multiplier des nombres très grands par un chiffre sans savoir ses tables de multiplication. On va voir maintenant une amélioration des bâtons de Neper, une invention due à l'ingénieur Genaille : les règlettes de Genaille.

Ensuite on pourra voir dans l'exposition comment les combiner avec des additionneuses pour multiplier par des nombres à plus d'un chiffre. Voici une image de l'instrument que nous allons étudier :



Des règlettes de Genaille sur leur support de calcul

Et ici à droite, voici un schéma de 3 règlettes de Genaille en position pour effectuer les produits 348×6 et 348×7 tel qu'il est présenté sur les panneaux de l'exposition.

On lit $348 \times 6 = 2088$ et $348 \times 7 = 2436$ en un seul coup d'œil en suivant le chemin indiqué par les triangles de droite à gauche. Pour le premier calcul, on commence dans le carré 8 puis on suit le triangle colorié vers 8 —
on continue ensuite vers 0 —
et enfin le chemin se termine en 2 —
On obtient 2088.

×		3	4	8
1	0	3	4	8
2	0	6	8	6
	1	7	9	7
3	0	9	2	4
	1	0	3	5
	2	1	4	6
4	0	2	6	2
	1	3	7	3
	2	4	8	4
	3	5	9	5
5	0	5	0	0
	1	6	1	1
	2	7	2	2
	3	8	3	3
	4	9	4	4
6	0	8	4	8
	1	9	5	9
	2	0	6	0
	3	1	7	1
	4	2	8	2
	5	3	9	3
7	0	1	8	6
	1	2	9	7
	2	3	0	8
	3	4	1	9
	4	5	2	0
	5	6	3	1
	6	7	4	2
8	0	4	2	4
	1	5	3	5
	2	6	4	6
	3	7	5	7
	4	8	6	8
	5	9	7	9
	6	0	8	0
	7	1	9	1
	0	7	6	2
	1	8	7	3
	2	9	8	4
	3	0	9	5
9	4	1	0	6
	5	2	1	7
	6	3	2	8
	7	4	3	9
	8	5	4	0

Exposition « Multipliez ! » - Avril 2012 - FP





Dans les deux schémas, réalisez le calcul de 348×9 et de 34×5 en coloriant le carré de départ et les triangles et carrés au fur et à mesure qu'ils sont traversés.

$348 \times 9 =$

×		3	4	8
1	0	3	4	8
2	0	6	8	6
	1	7	9	7
3	0	9	2	4
	1	0	3	5
4	2	1	4	6
	0	2	6	2
	1	3	7	3
5	2	4	8	4
	3	5	9	5
	0	5	0	0
6	1	6	1	1
	2	7	2	2
	3	8	3	3
	4	9	4	4
7	0	8	4	8
	1	9	5	9
	2	0	6	0
	3	1	7	1
	4	2	8	2
8	5	3	9	3
	0	1	8	6
	1	2	9	7
	2	3	0	8
	3	4	1	9
	4	5	2	0
9	5	6	3	1
	6	7	4	2
	0	4	2	4
	1	5	3	5
	2	6	4	6
	3	7	5	7
	4	8	6	8
	5	9	7	9
6	0	8	0	
7	1	9	1	
0	0	7	6	2
	1	8	7	3
	2	9	8	4
	3	0	9	5
	4	1	0	6
	5	2	1	7
	6	3	2	8
	7	4	3	9
8	5	4	0	

$34 \times 5 =$

×		3	4	8
1	0	3	4	8
2	0	6	8	6
	1	7	9	7
3	0	9	2	4
	1	0	3	5
	2	1	4	6
4	0	2	6	2
	1	3	7	3
	2	4	8	4
	3	5	9	5
5	0	5	0	0
	1	6	1	1
	2	7	2	2
	3	8	3	3
	4	9	4	4
6	0	8	4	8
	1	9	5	9
	2	0	6	0
	3	1	7	1
	4	2	8	2
	5	3	9	3
7	0	1	8	6
	1	2	9	7
	2	3	0	8
	3	4	1	9
	4	5	2	0
	5	6	3	1
	6	7	4	2
8	0	4	2	4
	1	5	3	5
	2	6	4	6
	3	7	5	7
	4	8	6	8
	5	9	7	9
	6	0	8	0
	7	1	9	1
9	0	7	6	2
	1	8	7	3
	2	9	8	4
	3	0	9	5
	4	1	0	6
	5	2	1	7
	6	3	2	8
	7	4	3	9
8	5	4	0	

Mais comment ça marche ?

Exposition « Multipliez ! » - Avril 2012 - FP





×		3
1	0	3
2	0	6
	1	7
3	0	9
	1	0
4	0	2
	1	3
5	2	4
	3	5
	4	6
6	0	8
	1	9
	2	0
	3	1
7	4	2
	5	3
	6	4
	7	5
8	8	6
	9	7
	0	8
	1	9
9	2	0
	3	1
	4	2
	5	3
6	4	
7	5	
8	6	

Voyons cela. Regardons la colonne de 3 ici à gauche, la table de multiplication de 3 y est inscrite. Identifiez-la en entourant les chiffres des produits sur le schéma.

Faites de même avec la colonne de 4 ici à droite.

Les petits carrés dans les lignes de chaque chiffre servent-ils ici ?

Comparez avec le schéma : à quoi servent-ils dans le schéma ? Pour vous aider vous pouvez poser l'opération en suivant étape par étape le chemin dans les réglettes

$$\begin{array}{r} 3 \ 4 \ 8 \\ \times \quad 6 \\ \hline \end{array}$$

Alors ?

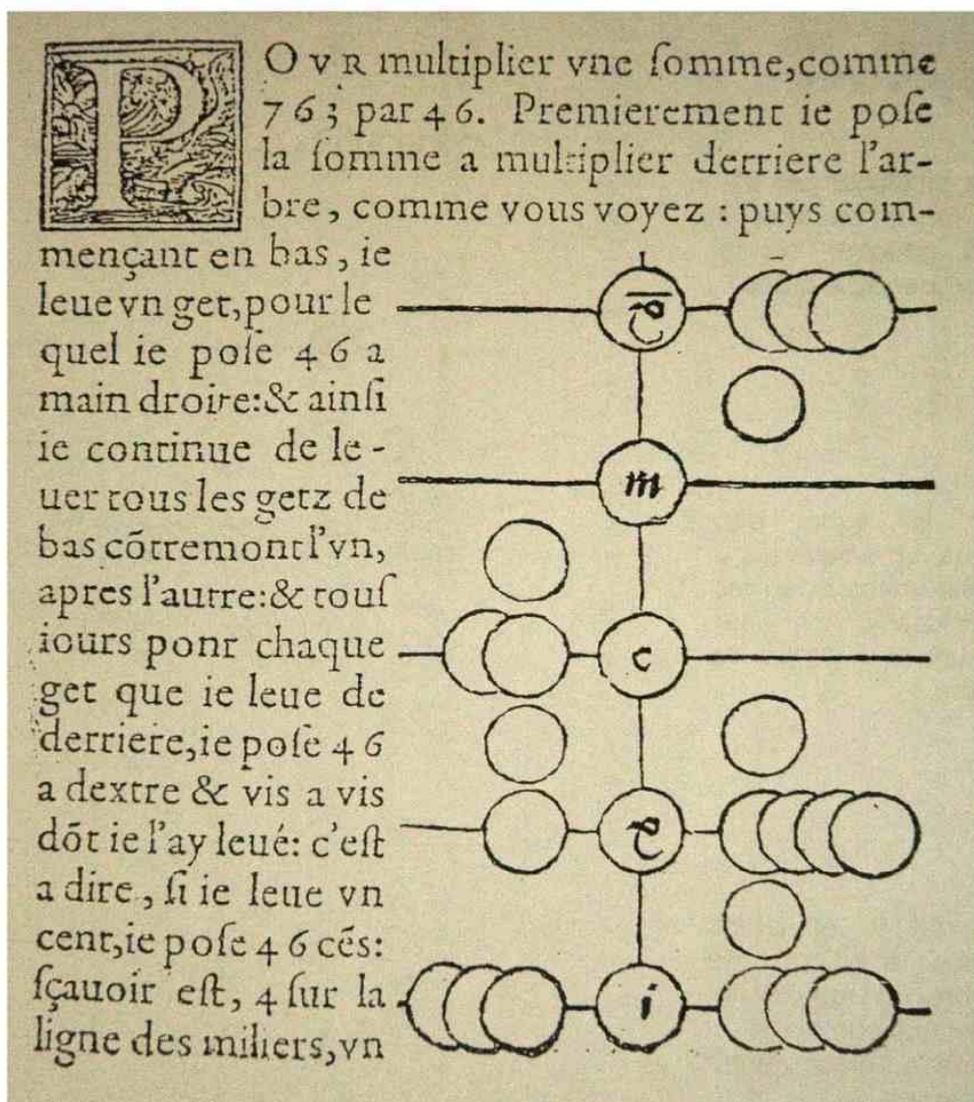
Pourquoi y en a-t-il 3 dans la ligne de 3, 4 dans la ligne de 4, 5 dans la ligne de 5, 6 dans la ligne de 6, 7 dans la ligne de 7, 8 dans la ligne de 8, 9 dans la ligne de 9 ?

×		4
1	0	4
2	0	8
	1	9
3	0	2
	1	3
4	2	4
	3	6
	4	7
5	0	8
	1	9
	2	0
	3	1
6	4	2
	5	3
	6	4
	7	5
7	0	4
	1	5
	2	6
	3	7
8	4	8
	5	9
	6	0
	7	1
9	8	2
	9	3
	0	4
	1	5
2	6	
3	7	
4	8	
5	9	
6	0	
7	1	
8	2	
9	3	

Vous pouvez maintenant compléter vos réglettes de 0 à 9 en commençant par recopier celles de 3, 4, et 8.



Multiplier comme au Moyen-Age



Extrait¹ de *L'art et moyen de calculer avec les getons*, Jean Trenchant, 1561

C'est un texte en vieux français. Pour le lire, il faut traduire quelques caractères : le v est un u, le u est un v, le i est j, le f est un s, un gets est un jeton. Sachant cela, nous pouvons déchiffrer le texte pour apprendre à se servir de l'abaque.

1 Fac-similé complet dans la brochure de R. Charbonnier, *Si les nombres m'étaient contés...*, IREM de Clermont-Ferrand, 2002, <http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/ICF02001.htm>. Le document original est à la bibliothèque municipale de Lyon. Il a été numérisé par l'université de Californie et accessible sur ce lien: <http://archive.org/details/larithmetiquede00tren>

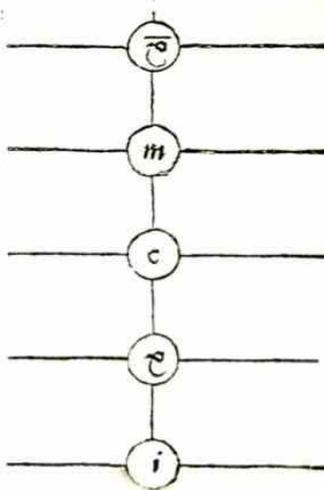
Exposition « Multipliez ! » - mai 2012



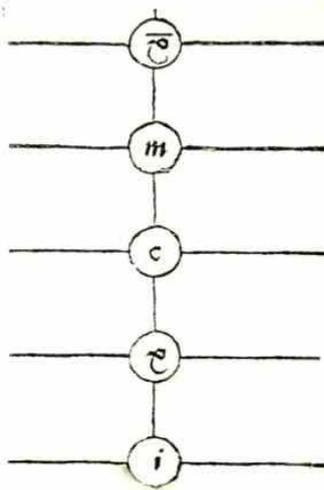


Ecrivez derrière l'arbre les nombres indiqués

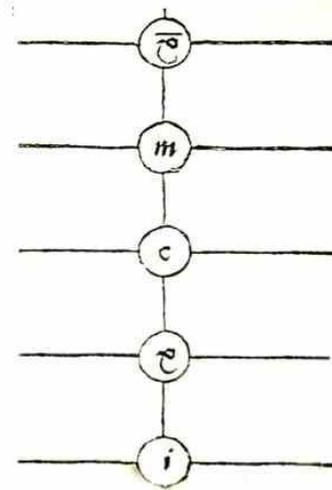
35



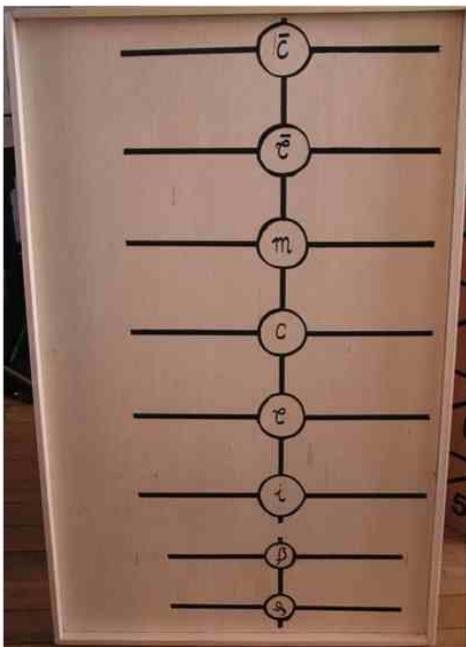
271



12 568



Vous pouvez utiliser la table à abagues et les jetons mis à votre disposition ou bien les tables plastifiées.

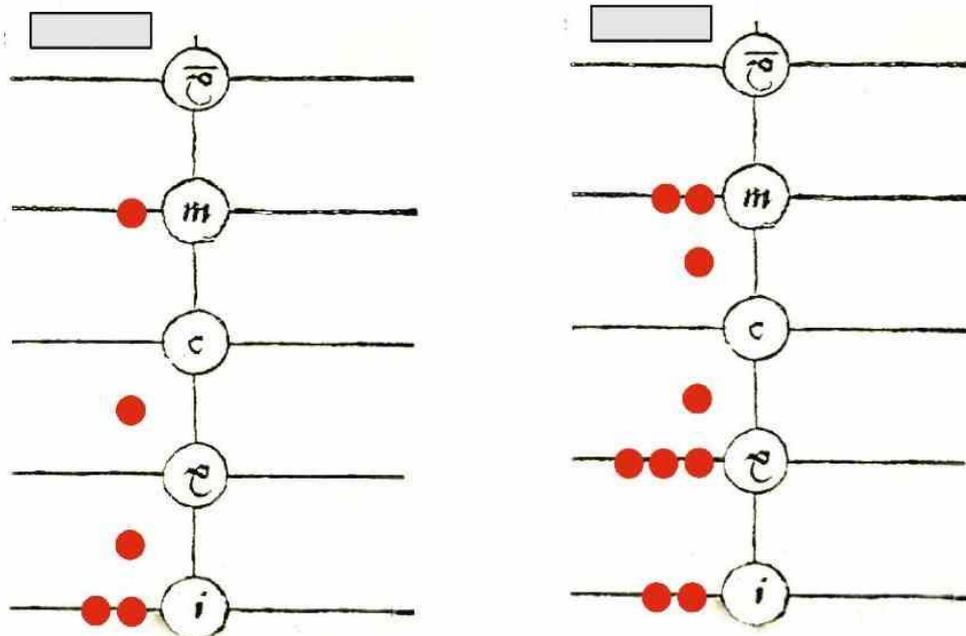


Exposition « Multipliez ! » - mai 2012

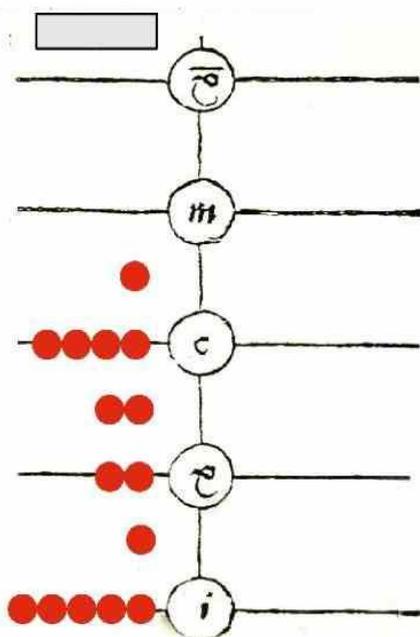




Un peu d'entraînement avant les calculs : des nombres à lire



Un autre exercice d'entraînement : simplifier.



Sur chaque ligne on ne peut avoir au plus que ... jetons
sur chaque ligne intermédiaire, on ne peut avoir au plus
que ... jeton(s) ;

Simplifiez la représentation proposée ci-contre du
nombre .

Utilisez la table et les jetons afin de prendre l'habitude
des gestes et de la rigueur nécessaires dans les
manipulations puis corrigez le schéma.

Exposition « Multipliez ! » - mai 2012





En suivant les indications de Jean Trenchant, et donc sans utiliser les tables de multiplication, on va exécuter les opérations suivantes :

12×4 , 12×7 , 15×2 , 23×7 , 56×32

Reprenons le texte

Premièrement je pose la somme (au sens d'une somme d'argent, nous l'appellerons comme il se doit le multiplicande) à multiplier derrière l'arbre. (**12** pour la première opération)

Je commence par le bas.

Pour chaque jeton que j'enlève de derrière l'arbre, je pose exactement à même hauteur de l'autre côté de l'arbre autant de jetons que les chiffres du multiplicateur. (**4** pour la première opération)

A vous !

Dans le document de la première page, le calcul proposé est 763 multiplié par 46. Menez ce calcul.

Exposition « Multipliez ! » - mai 2012



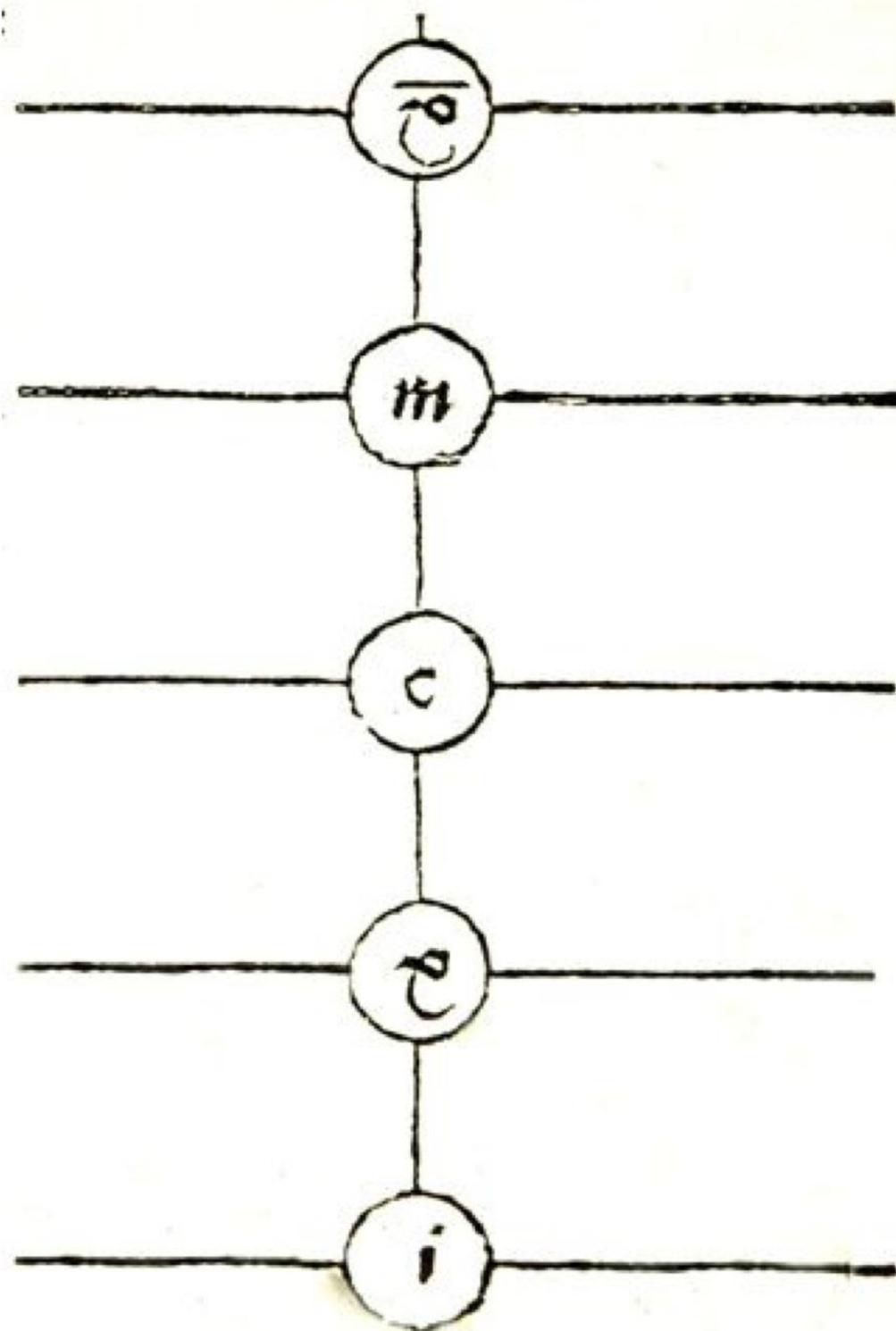
UBO
UNIVERSITÉ DE BRETAGNE
ORIENTALE



Bâtons de Neper

Ressources pour les faire soi-même

×										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										



Exposition « Multipliez ! » - Avril 2012 - FP



[retour sommaire](#)

