

ACTES

39^{ème} colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques

Organisé par la COPIRELEM, l'Université de Bretagne Occidentale, l'IUFM de Bretagne et
l'IREM de Brest

Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève

QUIMPER les 20, 21 et 22 juin 2012



SOMMAIRE

PRÉSENTATION

Remerciements

Comité scientifique

Comité d'organisation

Bilan scientifique

Présentation des actes

La COPIRELEM

Liste des présents. [accès liste](#)

CONFÉRENCES

C1 : **Claire MARGOLINAS** Des savoirs à l'école maternelle. Oui, mais lesquels ? [Conférence 1](#)

[film conférence 1 ; annexes video conference1.](#)

C2 : **Michela MASCHIETTO Maria G. BARTOLINI BUSSI** Des scénarios portant sur l'utilisation d'artefacts dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire. [Conférence 2](#)

[film conférence2 ;](#)

C3 : **Gérard SENSEVY** Production d'ingénieries coopératives, travail du professeur et activité de l'élève. [Conférence 3](#)

[film conference3 ; diaporama conference3](#)

ATELIERS

A1 : **D BUTLEN, M CHARLES-PÉZARD, P MASSELOT** Apprendre et enseigner les mathématiques en ZEP, former à cet enseignement. [atelier A1](#)

A2 : **R CABASSUT** Quelles différences entre hypothèse et conjecture dans la validation en sciences et en mathématiques. [atelier A2](#)

A3 : **F TEMPIER** Une situation de formulation sur la numération pour les classes ordinaires. [atelier A3.](#)

A4 : **C LE BRUSQ, F PLANTEVIN** Exploitation pédagogique d'une exposition sur les instruments de calculs. [atelier A4.Film autour de l'exposition.](#)

A5 : **A BRACONNE-MICHOUX** Des tours de Dominique Valentin aux représentations planes des objets de l'espace. [atelier A5](#)

- B1 : **S COUTAT, R FALCADE** Le rôle de l'enseignant dans une séquence de géométrie utilisant deux environnements, dynamique et statique, au cycle 3. [atelier B1](#)
- B2 : **B LEBOT** La place des mathématiques dans une situation expérimentale : étude de la fonte d'un glaçon en cycle 2. [atelier B2](#)
- B3 : **M MASCHIETTO, S SOURY-LAVERGNE** A la découverte de la « pascaline » pour l'apprentissage de la numération décimale. [atelier B3](#)
- B4 : **J M GELIS, E KERMORVANT** Comment concevoir une formation initiale à distance pour les professeurs d'école en mathématiques (une exploitation des possibles à travers deux expériences). [atelier B4](#)
- B5 : **B ANSELMO, M P DUSSUC, H ZUCCHETTA** Du comptage à la numération. [atelier B5](#)
- B6 : **P EYSSERIC, F MISKIEWICZ** Base de données sur « mathématiques et littérature de jeunesse ». [atelier B6](#)
- B7 : **G MORALES, D FOREST** Analyser des pratiques didactiques à l'école maternelle concernant la représentation : le cas du « jeu du trésor » [atelier B7](#)

COMMUNICATIONS

- C1 : **S ARDITI, A DAINA** Manuels scolaires et pratiques des enseignants en France et en suisse romande. [communication C1](#)
- C2 : **C DEL NOTARO** Vers une distinction chiffre/ nombre dans un jeu de tâches chez des élèves de 11 ans. [communication C2](#)
- C3 : **F ATHIAS DUBREUCQ** La géométrie dynamique en cycle 3, pour quoi faire ? [communication C3](#)
- C4 : **J M GELIS** Une expérience d'enseignement à distance d'un master d'enseignement premier degré en mathématiques. [communication C4](#)
- C5 : **C HACHE** Langage mathématique à la transition primaire /collège. [communication C5](#)
- D1 : **A VIRRION** Les enfants à haut potentiel intellectuel en difficultés scolaires : le rôle des mathématiques dans la détection et la remédiation. [communication D1](#)
- D2 : **L LEROYER** Le rapport au support d'enseignement : pour une meilleure connaissance du travail de préparation en mathématiques des enseignants. [communication D2](#)
- D3 : **C POISARD** Résolution de problème au CP : rôle du langage, des schémas et des manipulations. [communication D3](#)

REMERCIEMENTS

Gabriel LE POCHE

Responsable du colloque, membre de la COPIRELEM

Organiser le colloque de la Copirelem dans l'académie de Rennes a constitué pour moi un grand honneur, d'autant plus qu'il s'agissait de ma dernière année d'exercice professionnel comme formateur d'enseignants au sein de l'IUFM de Bretagne.

Membre de la COPIRELEM depuis de très nombreuses années, j'avais à cœur d'organiser une nouvelle fois le colloque en Bretagne, le dernier colloque, dans notre région, ayant eu lieu il y a déjà fort longtemps (en 1998 à Loctudy).

La situation particulière de l'Académie de Rennes - existence de deux IREM (celui de Brest et de Rennes) et rattachement de l'IUFM de Bretagne à l'UBO (Université de Bretagne Occidentale qui a sa présidence à Brest) - m'a conduit à retenir comme lieu du colloque le pôle universitaire Pierre-Jakez Héliaz situé à QUIMPER et dépendant de l'UBO.

C'est donc tout naturellement que l'IREM de Brest, dirigé par Frédérique Plantevin, également vice-présidente de l'ADIREM, est devenu l'IREM organisateur de ce colloque.

Cette responsabilité administrative a été assumée avec efficacité grâce, en particulier, à la grande disponibilité de Philippe Saux Picart, Maître de conférences, mon interlocuteur privilégié et au travail de Pauline Boissel, secrétaire de l'IREM.

Gwenaëlle Riou-Azou, collègue de mathématiques du site local de l'IUFM de Bretagne, a été l'interface indispensable entre les différents partenaires concernés par l'organisation matérielle du colloque.

Je tiens vivement à les en remercier car sans eux rien n'aurait été possible.

Les participants au colloque ont unanimement souligné les bonnes conditions matérielles : qualité de l'accueil, salles agréables et bien équipées, lieu de restauration sur le lieu du colloque...

Merci à Delphine Acolat, Directrice du pôle universitaire, d'avoir bien voulu mettre à notre disposition les salles équipées que nous avions demandées. Les aides de Cécile Lucas, secrétaire, et de Oleigh Gandrabura, chargé d'informatique, se sont avérées très précieuses pour résoudre les problèmes de dernière minute.

Je tiens aussi à remercier le personnel de l'IUFM de Bretagne, site de Quimper :

- Jean Pierre Garo pour sa prise en charge de la visite de la ville
- Marianne Sichler pour l'organisation de la soirée festive
- Roland Laubriat pour le montage des films.

Ce colloque a été financé par la Région Bretagne, le Conseil Général du Finistère, la Communauté de Communes de Quimper, l'Université de Bretagne Occidentale, l'IREM de Brest, l'ADIREM et l'IUFM de Bretagne, et a bénéficié de l'appui du laboratoire de mathématiques de l'UBO (UMR 6205).

Il a également bénéficié du concours des partenaires habituels de l'Education Nationale que sont la MAIF, la MGEN et l'Autonome de Solidarité.

COMITE SCIENTIFIQUE

Cécile OUVRIER-BUFFET, présidente du Comité scientifique

Cécile OUVRIER-BUFFET, Maîtresse de Conférence, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR),
Université Paris Est Créteil, IUFM de Créteil, COPIRELEM
Présidente du comité scientifique

Laetitia BUENO RAVEL, Maîtresse de Conférences, Centre de Recherche sur l'Éducation, les
Apprentissages et la Didactique (CREAD), IUFM de Bretagne, UBO, IREM de Rennes

Richard CABASSUT, Formateur, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR),
IUFM d'Alsace, Université de Strasbourg, COPIRELEM

Pierre DANOS, Formateur, IUFM Midi-Pyrénées,
Université Toulouse II Le Mirail, COPIRELEM

Catherine HOUEMENT, Maîtresse de Conférences,
Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR),
Universités Paris Diderot et Rouen (IUFM), COPIRELEM

Gabriel LE POCHE, Formateur, IUFM de Bretagne,
UBO, IREM de Rennes, COPIRELEM

Christine MANGIANTE, Maîtresse de Conférences, Laboratoire Mathématique de Lens (LML), IUFM
Nord Pas de Calais,
Université d'Artois, COPIRELEM

COMITE D'ORGANISATION

Gabriel LE POCHE, Formateur UBO-IUFM de Bretagne, site de Rennes, IREM de Rennes,
COPIRELEM.

Frédérique PLANTEVIN, Maître de Conférences UBO, Directrice de l'IREM de Brest.

Philippe SAUX PICART, Maître de Conférences UBO, IREM de Brest.

Gwenaëlle RIOU-AZOU, formatrice UBO-IUFM de Bretagne, site de Quimper, IREM de Brest.

Tous nos remerciements vont à **Pauline Boissel** secrétaire de l'IREM de Brest pour tout le
travail dévoué et attentif qu'elle a fourni durant toute la préparation de ce colloque.

BILAN SCIENTIFIQUE

Le thème du colloque de cette année « *Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève* » s'inscrivait dans le prolongement du thème de l'année précédente qui, lui, partait de l'activité de l'élève. Il est bien sûr question de « l'élève » dans une acception large, élève générique ou non, élève de primaire voire de début de collège, et de formation.

La conférence d'ouverture de Michela Maschietto et Mariolina Bartolini Bussi (Université de Modena e Reggio Emilia - UFR d'Éducation et Sciences Humaines - Laboratoire des machines mathématiques) sur les laboratoires de mathématiques apporte un éclairage sur la méthodologie utilisée dans un tel cadre. Deux artefacts illustrent les cadres théoriques mobilisés et présentent les perspectives didactiques, tant au niveau de l'enseignement que de la formation (l'enseignant joue en effet un rôle crucial de médiateur).

Claire Margolinas (Université Blaise Pascal - Laboratoire ACTé), dans la deuxième conférence, questionne les savoirs de l'école maternelle et reconsidère le cas de l'énumération. Un focus est fait sur l'enseignant, ainsi que sur la polyvalence de celui-ci via une étude de l'énumération au sein des disciplines scolaires. Les vidéos utilisées lors de la conférence et servant d'appui à ces analyses sont disponibles sur le DVD-Rom qui accompagne ces actes.

La conférence de clôture de Gérard Sensevy (CREAD Université Rennes 2 - Université de Bretagne Occidentale) traite de la « Production d'ingénieries coopératives, travail du professeur, et activité de l'élève ». La notion d'ingénierie coopérative est définie et située dans le cadre déjà existant des ingénieries, et des exemples en sont donnés. Les conséquences formatives, éthiques, et politiques, du possible développement d'ingénieries coopératives sont également abordées et discutées.

Les deux premières conférences sont consignées intégralement dans la présente brochure des actes. La troisième, celle de Gérard Sensevy, figure dans ces actes, à titre exceptionnel, sous la forme d'un résumé. Le conférencier renvoie à un texte actuellement en cours de publication (pour lequel la double publication n'a pas été possible et nous le regrettons : SENSÉVY G. (sous presse) *Repenser la profession de professeur, reconstruire une forme scolaire ?* In Bronner A. et al. (eds.) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée Sauvage) et propose, sur le DVD-Rom, le diaporama ainsi que les références bibliographiques qui intéresseront les lecteurs.

Les contenus des ateliers et communications sont présentés sous forme de fiches d'une page dans ce document, de même que les pistes d'exploitation possibles ; les versions intégrales des textes se trouvent dans le DVD-Rom. Rappelons que les ateliers ont proposé aux participants une réflexion initialisée par l'animateur à partir d'un exposé de travaux ou de questionnements ; les communications ont traité, selon l'auteur ou les auteurs, de situations de classe, de pratiques et/ou parcours de formation, de recherches universitaires, achevées ou en cours. Dans les deux cas, de nombreux thèmes ont été explorés, tant du côté de la formation que du côté de l'élève.

Nous remercions les auteurs des textes reprenant les travaux des ateliers et les communications : ils contribuent ainsi à la pérennisation des travaux du colloque et ont pris en compte les demandes de réécritures formulées par le Comité Scientifique. En effet, les ateliers et communications, de même que les textes qui en découlent, ont fait l'objet d'une sélection par le Comité Scientifique. Ces actes résultent d'un travail de relectures attentives et exigeantes des membres du Comité Scientifique et de réécritures des auteurs. Je remercie donc ici tout particulièrement les membres du Comité pour leur engagement dans ce travail, ainsi que les auteurs.

Au nom du Comité Scientifique, je souhaite également sincèrement remercier le Comité d'Organisation du colloque, l'IREM de Brest, l'IUFM de Bretagne, et l'ensemble des membres de la COPIRELEM. Tous ont joué un rôle essentiel dans la réussite de ce colloque.

Cécile Ouvrier-Bufferet
Présidente du Comité Scientifique

PRESENTATION DES ACTES

Les actes se présentent sous la forme d'une brochure accompagnée d'un DVD Rom.

La brochure contient les textes intégraux de deux des trois conférences, un résumé et des références bibliographiques relatives à la troisième conférence et les résumés des ateliers et communications du colloque retenus pour une publication.

Les comptes-rendus complets des ateliers et des communications sont disponibles dans le DVD Rom. La circulation dans le fichier est facilitée par l'existence de liens hyper-texte dans le corps du document.

Ce fichier contient la liste complète des participants au colloque.

Le DVD contient également les films des trois conférences du colloque, des annexes vidéos associées à la première conférence et un diaporama relatif à la troisième conférence.

LA COPIRELEM



La COPIRELEM, Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire est constituée, en 2012-2013, de 21 membres issus de 16 académies différentes. La plupart d'entre eux sont chargés de la formation mathématique des professeurs d'école en IUFM.

1. Ses missions

Depuis sa création (en 1975), la COPIRELEM a pour double mission :

1. d'une part, de regrouper et centraliser les travaux des différents groupes élémentaires des IREM sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et sur la formation initiale et continue en mathématiques des enseignants du premier degré ;
2. d'autre part, d'impulser des recherches sur les points sensibles ou contingents liés aux changements institutionnels (programmes, organisation de l'école, formation initiale, etc....)

2. Ses actions

Répondant à ses missions, elle s'intéresse simultanément à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et à la formation des professeurs d'école. Elle se réunit cinq fois par an pour mettre en œuvre et coordonner ses différentes actions :

3. Un colloque annuel

Regroupant de 120 à 180 participants (professeurs d'école, formateurs et chercheurs), ces colloques permettent, depuis 1975, la diffusion des recherches en didactique des mathématiques, en France et à l'étranger.

Les derniers ont eu lieu à Quimper (2012), Dijon (2011), La Grande Motte (2010), Auch (2009), Bordeaux (2008), Troyes (2007), Dourdan (2006), Strasbourg (2005), Foix (2004), Avignon (2003). Le prochain se tiendra à Nantes en juin 2013.

Les actes en sont publiés chaque année par l'IREM de l'académie d'accueil.

4. Des publications

La COPIRELEM publie, seule ou avec d'autres instances (Commission Premier Cycle des IREM, APMEP...) des documents destinés aux enseignants et/ou aux formateurs. En plus de la publication des Actes de son colloque (voir ci-dessus), elle publie chaque année les Annales du Concours Externe de Recrutement des Professeurs d'École, avec l'intégralité des sujets de l'année et des corrigés détaillés assortis de compléments utiles à la formation en mathématique et en didactique des futurs professeurs d'école.

En 2003, la COPIRELEM a publié « Concertum », ouvrage de référence pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques. Pour faciliter sa diffusion lors des colloques internationaux, une version réduite est parue en espagnol et en anglais.

5. Des collaborations avec le Ministère de l'Éducation Nationale
Par la présence d'un de ses membres à la commission mathématique du CNP, la COPIRELEM a apporté sa contribution à l'élaboration des programmes 2002 de mathématiques pour l'école primaire ainsi qu'à la rédaction de leurs documents d'accompagnement.

Dès 2002, elle a été une force de proposition auprès du ministère pour la définition du contenu du programme national pour le concours de recrutement des professeurs d'école qui a été publié en mai 2005. La COPIRELEM a diffusé dès juillet 2005 des propositions d'exercices correspondant à ce nouveau programme et quatre de ses membres participent à la commission chargée d'élaborer les sujets nationaux du CRPE.

Depuis novembre 2008, elle s'est engagée dans une réflexion concernant les épreuves du nouveau concours pour le recrutement des professeurs d'école publié en septembre 2008.

La COPIRELEM a également travaillé avec l'Inspection Générale de l'Enseignement Primaire : quatre de ses membres ont été sollicités pour la préparation d'un séminaire national de pilotage sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et pour l'animation d'ateliers au cours de ce séminaire qui a eu lieu à Paris en novembre 2007.

La COPIRELEM est intervenue au SIEC, lors du séminaire national de formation des futurs jurys d'oraux du CRPE (octobre 2010) et à l'ESEN lors des stages nationaux de formation des IEN (octobre 2010, janvier 2011, octobre 2012 et mai 2013).

3. Ses autres travaux et projets

6. La COPIRELEM collabore avec la revue « Grand N » publiée par l'IREM de Grenoble et destinée aux enseignants du primaire.
7. La COPIRELEM, par ses discussions avec l'équipe Sésamath-Mathenpoche, participe au développement de ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.
8. La COPIRELEM poursuit sa réflexion générale sur la nature des mathématiques que l'on doit enseigner à l'école primaire et les moyens dont on dispose pour le faire. Son travail sur le calcul mental dans l'enseignement a conduit à la publication en juin 2012 d'un document destiné à faciliter la compréhension, l'appropriation et la mise en œuvre de ce domaine d'activités dans les classes. Une étude sur la mise en œuvre de scénarios en formation initiale sur les thèmes de la numération et de la géométrie est engagée.
9. Sous la direction de la DGESCO, la COPIRELEM a engagé un travail d'élaboration de ressources pour des apprentissages mathématiques, destinées aux élèves de Grande Section de Maternelle.

LISTE DES PRESENTS

Colloque 2012 QUIMPER

ALLARD	Cécile	IMF Ecole 78550 Richebourg	cecile.allardb@free.fr
ALMAHMOUD	Mohamed	CREN de Nantes	mohamed_almahmoud@yahoo.fr
ALORY	Sylvie	IUFM de Paris	alory.sylvie@free.fr
ANDRE	Nicole	Circonscription de Brest Iroise 29200	nicole.andre1@ac-rennes.fr
ANSELMO	Bernard	IUFM de Lyon, site de Bourg en Bresse	bernard.anselmo@univ-lyon1.fr
ARDITI	Sara	IUFM d'Aquitaine, site de Bordeaux	sara_arditi@yahoo.fr
ARNAUD	Ingrid	IEN Brest Ville	ingrid.arnaud@ac-rennes.fr
ATHIAS DUBREUCQ	Francine	IUFM Besançon	francine.dubreucq@univ-fcomte.fr
AUBERTIN	Jean-Claude	IUFM d'Aquitaine Site de Périgueux	jeanclaude.aubertin@sfr.fr
AURAND	Catherine	IUFM de Versailles, site de St Germain	catherine.aurand@iufm.u-cergy.fr
BABEL	Cathy	IUFM de Toulouse, site de Toulouse	catherine.babel@univ-tlse2.fr
BARNIER	Gilles	IUFM-UPEC 77, site de Melun	gilles.barnier@u-pec.fr
BARRERA	Raquel	UNIVERSITÉ PARIS 7 - LDAR	quellita@gmail.com
BATTON	Agnès	IUFM Versailles-Site de Cergy	agnes.batton@laposte.net
BAUTIER	Thierry	IUFM de Bretagne, site de Vannes	thierry.bautier@bretagne.iufm.fr
BECK	Vincent	IUFM Université d'Orléans Tours-Fondettes	vincent.beck@univ-orleans.fr
BILGOT	Anne	IUFM Paris	anne.bilgot@paris.iufm.fr
BILLY	Christophe	IUFM Toulouse, site d'Albi	christophe.billy@univ-tlse2.fr
BOFFY	Nathalie	IUFM Nantes, site de Nantes	Nathalie.Boffy@univ-nantes.fr
BOMBRUN	Cécile	IUFM de Lyon, site de St Etienne	cecile.bombrun@univ-lyon1.fr
BOSC	Martine	IUFM Aix-Marseille, site de Marseille	m.bosc@aix-mrs.iufm.fr
BOURGUET	Michel	IUFM Montpellier	michel.bourguet@free.fr
BRACONNE-MICHOUX	Annette	Université de Montréal	amichoux@noos.fr
BUENO-RAVEL	Laetitia	IUFM de Bretagne, site de Rennes	laetitia.bueno-ravel@bretagne.iufm.fr
BUTLEN	Denis	IUFM de Versailles	denis.butlen@iufm.u-cergy.fr

CABASSUT	Richard	IUFM Université de Strasbourg	richard.cabassut@unistra.fr
CAILHOL	Marc	IUFM de Rodez	cailhol.marc@wanadoo.fr
CAILLOT	Sébastien	IFM Mayotte	seb.caillot@orange.fr
CHARLES-PEZARD	Monique	IUFM Créteil, site de Melun	monique.pezard-charles@u-pec.fr
CHOQUET	Christine	IUFM des Pays de La Loire, site Le Mans	christine.choquet@univ-nantes.fr
COMBY	Hélène	IUFM Versailles, site de Cergy	combyln@yahoo.fr
COUDERETTE	Michèle	IMF IUFM Toulouse, site de Montauban	michele.couderette-sidobre@univ-tlse2.fr
COUTAT	Sylvia	Université de Genève	sylvia.coutat@unige.ch
CUCHIN	Sylvie	Editions Retz	scuchin@sejer.fr
DAHAN	Maurice-André	IUFM des Pays de La Loire, site d'Angers	maurice.dahan@univ-nantes.fr
DAINA	Audrey	Université de Genève	audrey.daina@unige.ch
DANOS	Pierre	IUFM Toulouse, site d'Auch	pierre.danos@univ-tlse2.fr
DE BISSCHOP	Fabienne	Circonscription 95380 Louvres	fabienne.de-bisschop@ac-versailles.fr
DEL NOTARO	Christine	Université de Genève	christine.delnotaro@unige.ch
DEYRIS	Annick	Circonscription 95110 Sannois	annick.deyris@ac-versailles.fr
D'HONDT	Delphine	Ecole primaire Jean Monnet 29000 Quimper	delphine.dhondt@bretagne.iufm.fr
DUBREUCQ ATHIAS	Francine	IUFM Franche Comté, site de Besançon	francine.dubreucq@univ-fcomte.fr
ENNASSEF	M'hammed	IUFM d'Aquitaine, site de Merignac	ennassef2@gmail.com
EYSSERIC	Pierre	IUFM d'Aix Marseille, site d'Aix	p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr
FALCADE	Rossana	SUPSI_DFA Locarno Suisse	rossana.falcade@supsi.ch
FARADJI	Didier		didier@faradji.fr
FAVERO	Stéphanie	IUFM de Paris	sfavero@hotmail.fr
FOREST	Dominique	IUFM de Bretagne, site de Rennes	dominique.forest@bretagne.iufm.fr
FOURMY	Marie-Noëlle	UCP /IUFM St Germain-En-Laye	marie.noelle.fourmy@wanadoo.fr
GAGNEUX	Hélène	IUFM Centre Val de Loire, site de Bourges	helene.gagneux@univ-orleans.fr
GELIS	Jean-Michel	IUFM Cergy Pontoise, site d'Etiolles	jm.gelis@laposte.net
GIBEL	Patrick	IUFM Aquitaine, site de Pau	patrick.gibel@iufm.u-bordeaux4.fr

GIRMENS	Yves	IUFM de Perpignan	yves.girmens@free.fr
GRAPIN	Nadine	IUFM de Créteil, site de Livry-Gargan	nadine.grapin@u-pec.fr
GRIETENS	Gwenaëlle	IUFM de Nantes, site de de La Roche sur Yon	gwenaelle.grietens@univ-nantes.fr
GRISONI	Pascal	IUFM de Bourgogne, site de Dijon	pascal.grisoni@dijon.iufm.fr
GUISSET	Philippe	Circonscription 82300 Caussade	philippe.guisset@orange.fr
GUZZO	Vincent	IFM Mayotte	vincent.guzzo@free.fr
HACHE	Katia	Collège Voltaire 59156 Lourches	katia.hache@sesamath.net
HACHE	Sébastien	Sésamath	sebastien.hache@sesamath.net
HACHE	Christophe	Université Paris Diderot	christophe.hache@univ-paris-diderot.fr
HENRY	Sylvie	IUFM Aquitaine, site de Mont de Marsan	sylvieblanquart@hotmail.com
HERAULT	Françoise	IUFM Paris	herault.francoise@orange.fr
HOUEMENT	Catherine	IUFM Haute Normandie, Mont St Aignan	catherine.houdement@univ-rouen.fr
JAFFROT	Michel	IUFM Nantes, site de La Roche sur Yon	michel.jaffrot@univ-nantes.fr
KERMORVANT	Erik	IUFM de Bretagne, site de Saint Briec	erik.kermorvant@bretagne.iufm.fr
LE BRUSQ-PREMEL	Christelle	Collège du Vizac 29490 Guipavas	lebrusq29@aol.com
LE DANTEC	Olivier	IUFM Nice, site de Nice	olivierledantec@yahoo.fr
LE POCHE	Gabriel	IUFM Bretagne, site de Rennes	gabriellepoche@aol.com
LE TIEC	Maryline	Circonscription de Bain-Guichen 35580	maryline.le-tiec@ac-rennes.fr
LEBOT	Bertrand	IUFM Poitou Charentes, Site de Niort	bertrand.lebot@univ-poitiers.fr
LEFEBVRE	David	IEN Quimper Ouest	david.lefebvre@ac-rennes.fr
LEFORT	Rose-Marie	Circonscription de Fougères 35300	rose-marie.lefort@orange.fr
LEROYER	Laurence	Circonscription de Flers 61100	laurence.leroyer@ac-caen.fr
LEVAILLANT	Pascale	IUFM de Cergy, Site de St-Germain	pascale.levaillant@iufm.u-cergy.fr
MAGENDIE	Laurence	IUFM d'Aquitaine	laurence.magendie@iufm.u-bordeaux4.fr
MAINGENE	Jean	IUFM de l'Université de Nantes, site d'Angers	jean.manguene@univ-nantes.fr
MANGIANTE	Christine	IUFM Nord Pas de Calais, site d'Arras	christine.mangiante@laposte.net
MARTINELLI	Olivia	UPEC-IUFM, site de Livry Gargan	olivia.martinelli@laposte.fr
MASSELOT	Pascale	IUFM de Versailles, site d'Etiolles	PMasselot@aol.com

MAZOLLIER	Marie-Sophie	IUFM Créteil, site de Bonneuil	marie-sophie.mazollier@u-pec.fr
MISKIEWICZ	Frédérique	IUFM Aix Marseille	f.miskiewicz@aix-mrs.iufm.fr
MONNIER	Catherine	Circonscription de Vitré 35500	catherine.monnier1@ac-rennes.fr
MORALES IBARRA	Grace	CREAD, IUFM de Bretagne	grace_m_i@hotmail.com
MOREL	Jacqueline	Circonscription de Quimper ouest	jacqueline.le-berre1@ac-rennes.fr
MOUNIER	Eric	IUFM Créteil site de Livry-Gargan	eric.mounier@u-pec.fr
MOUSSY	Chantal	IUFM site de Torcy	chantal.moussy@u-pec.fr
NECHACHE	ASSIA	IUFM d'Orléans Tours, site de Châteauroux	assia.nechache@hotmail.fr
PECH	Laurent	IUFM Grenoble, site de Chambéry	laurent.pech@ujf-grenoble.fr
PETITFOUR	Edith	IUFM de Lorraine, site de Bar Le Duc	edith.petitfour1@ac-nancy-metz.fr
PFAFF	Nathalie	IUFM CD93, site de Livry-Gargan	nathalie.pfaff@wanadoo.fr
PICHAVANT	Anne	IEN Quimper Ouest 29000	marie-anne.pichavant@ac-rennes.fr
PLANTEVIN	Frédérique	UBO-IREM de Brest	frederique.plantevin@univ-brest.fr
PLOURDEAU	Claudine	IREM de Basse Normandie, site de Caen	plourdocolo2@yahoo.fr
POISARD	Caroline	IUFM de Bretagne, site de Quimper	caroline.poisard@bretagne.iufm.fr
RADZYNSKI	Hélène	IUFM-UCP, site de St Germain en Laye	helene.radzynski@free.fr
RIOU-AZOU	Gwenaëlle	IUFM Bretagne, site de Quimper	gwenaelle.riou-azou@bretagne.iufm.fr
RODRIGUEZ	Ruben	IUFM de Basse-Normandie, site de Caen	ruben.rodriguez@unicaen.fr
SAADA	Karine	IUFM d'Aix-Marseille, site de Marseille	k.saada@aix-mrs.iufm.fr
SICHLER	Marianne	IUFM Bretagne, site de quimper	marianne.sichler@bretagne.iufm.fr
SIMARD	Arnaud	IUFM de Franche Comté, site de Besançon	arnaud.simard@univ-fcomte.fr
SORT	Carine	IUFM de Versailles, site de Cergy	carine.sort@wanadoo.fr
SOURY-LAVERGNE	Sophie	Institut Français de l'Éducation Lyon	Sophie.Soury-Lavergne@ens-lyon.fr
STEFANELLI	Catherine	IEN Circonscription de Brest 29200	catherine.stefanelli@ac-rennes.fr
TAVEAU	Catherine	IUFM d'Aquitaine, site de Mont de Marsan	catherine.taveau@iufm.u-bordeaux4.fr
TEMPIER	Frédéric	IUFM Poitou Charentes, site d'Angoulême	frederick.tempiere@univ-poitiers.fr
THOMAS	René	IUFM de LYON, site de St Etienne	rene.thomas@univ-lyon1.fr
TIGROUSSINE	Brahim	LGT A. de Toqueville 50100 Cherbourg	brahim.tigroussine@unicaen.fr

TOROMANOFF	Jean	IUFM d'Orléans, site d'Orléans	jean.toromanoff@univ-orleans.fr
VERCKEN	Dominique	IUFM de Cergy-Pontoise, site de St Germain	dominique.vercken@iufm.u-cergy.fr
VERDENNE	Dominique	IEN 41200 Romorantin	dominique.verdenne@wanadoo.fr
VIGOT	Nathalie	IMF école Jean Monnet 29000 Quimper	n.vigot@bretagne.iufm.fr
VILLAIN	Nathalie	IUFM Paris	nathalie.villain@paris.iufm.fr
VINCENT	Françoise	Circonscription Montmorency 95160	vincentfrancoise@free.fr
VIRRION	Anne	Université de Rennes 1	anne.virrion@univ-rennes1.fr
WATEL	Isabelle	Circonscription St Malo Ville 35400	watel.family@wanadoo.fr
WINDER	Claire	IUFM de Nice - Centre de Draguignan	claire.winder@free.fr
WOZNIAK	Floriane	IUFM d'Alsace, site de Strasbourg	floriane.wozniak@iufm.unistra.fr
ZUCCHETTA	Helène	IUFM Lyon, site de Lyon	h.zucchetta@free.fr

[retour au sommaire](#)

DES SAVOIRS A LA MATERNELLE OUI, MAIS LESQUELS?

Claire MARGOLINAS

Maître de Conférences, Université Blaise Pascal

Laboratoire ACTé

claire.margolinas@univ-bpclermont.fr

Résumé

Personne ne doute que l'école maternelle soit un maillon essentiel dans la scolarisation des élèves, ni qu'elle soit un véritable lieu d'apprentissage, notamment en mathématiques. Pour autant, il n'est pas certain que les savoirs à enseigner et les connaissances à transmettre en maternelle soient décrits, dans les différentes didactiques, d'une façon suffisante pour répondre aux besoins des professeurs qui y enseignent.

Le cas de l'énumération, étudiée par Brousseau (1984) puis Briand (1993), est emblématique des nécessaires efforts à réaliser pour comprendre les connaissances qui sont en jeu dans les situations rencontrées par les élèves. Nous verrons que l'énumération permet d'analyser les difficultés des élèves dans de très nombreux cas, pas seulement en « mathématiques ». En regard de ces analyses, les actions des professeurs en situation montrent la difficulté qu'il y a à entrer dans le nécessaire processus d'institutionnalisation de ces connaissances, faute de savoirs disponibles dans l'institution scolaire.

I - DES SAVOIRS ET DES CONNAISSANCES

Dans le titre de cette conférence, c'est à dessein que j'ai utilisé le terme de « savoir ». En effet, dans le cadre de la théorie des situations, la distinction entre connaissances et savoir est tout à fait essentielle. Sans faire un historique de cette distinction, il est important de signaler qu'elle s'est quelque peu transformée au cours des travaux qui ont contribué à ce champ théorique.

Dans l'article fondateur de la théorie des situations (Brousseau, 1972), le terme de savoir n'apparaît pas et celui de connaissance rarement cependant, dès 1977 (voir Perrin-Glorian, 1994, page 107), le « savoir constitué ou en voie de constitution » devient le point de départ du projet social d'enseignement, alors que « les connaissances n'existent et n'ont de sens chez un sujet que parce qu'elles représentent une solution optimale dans un système de contraintes » (Brousseau, 1978 : page 2 dans la version déposée dans HAL). On voit donc se dessiner les sens différents qui seront stables par la suite dans le travail de Guy Brousseau, le savoir étant constitué (ou en voie de constitution) et les connaissances étant rencontrées en situation. Ce qui intéresse Brousseau, à la fois dans le travail théorique et dans les travaux d'ingénierie, ce sont surtout les connaissances : dans quelle(s) situation(s) les connaissances sont-elles rencontrées comme des solutions optimales ? En situation d'action, les connaissances sont d'abord implicites, néanmoins, dans d'autres types de situations (formulation, validation), les connaissances sont formulées et validées.

Conne (1992) adopte un point de vue différent : son travail prend sa source dans la résolution de :

« L'épineux problème des rapports qui lient le projet de la didactique des mathématiques avec ceux de l'épistémologie génétique et de la psychologie piagétienne de la connaissance » (p. 224).

La caractérisation à laquelle il arrive de la distinction entre savoir et connaissance est la suivante :

« Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible : il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans le sens qu'elle permet au sujet d'agir sur sa représentation » (p. 225).

Suivant ce point de vue, la différence entre savoir et connaissance se déplace en quelque sorte vers le sujet en situation, puisque la reconnaissance de l'utilité d'une connaissance pour un sujet la qualifie pour lui comme savoir.

Dans les deux cas, il ne s'agit en tout état de cause jamais de délimitations étanches : tel ou tel concept n'est pas « en soi » une connaissance ou un savoir, en particulier, pour Brousseau, une connaissance acquière une fonction de savoir, au cours du processus d'institutionnalisation.

Depuis quelque temps (Laparra & Margolinas, 2010), j'ai été amenée à retravailler la distinction entre connaissance et savoir, dans le cadre notamment d'une collaboration avec Marceline Laparra (didactique du français). Le point de vue que j'ai adopté n'est pas, contrairement à François Conne, parti de l'intérêt pour un lien entre psychologie et didactique mais plutôt de celui de la nécessité d'une conception anthropologique et sociologique des savoirs et des connaissances. Pour clarifier la suite du texte, je donne ici d'emblée les définitions que j'ai adoptées : j'en donnerai les raisons dans un deuxième temps.

Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation. Il s'agit d'un concept très large, qui inclut à la fois des connaissances du corps, des connaissances dans l'action, des connaissances de l'interaction, des connaissances mémorisées, etc.

Un savoir est d'une autre nature, il s'agit d'une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution (Douglas, 2004) et qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé. Il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. Il peut être linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle.

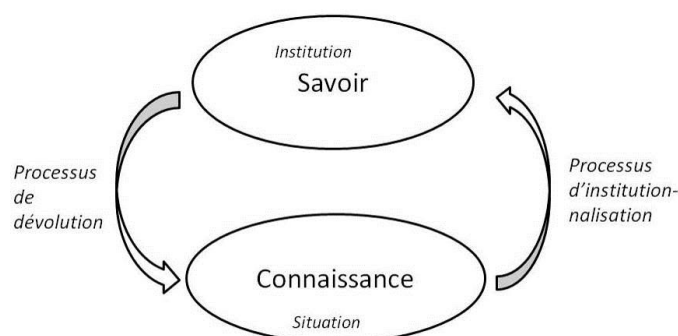


Figure 1 : Savoir et connaissance

Ce que l'on peut retenir schématiquement de ces distinctions, c'est déjà que la connaissance vit dans une situation, alors que le savoir vit dans une institution. Pour définir une connaissance donnée, il faut donc décrire les situations fondamentales de cette connaissance. Pour définir un savoir particulier, il faut dire quelle est l'institution qui produit et légitime ce savoir, ce qui conduit parfois à considérer plusieurs institutions et leurs éventuels conflits¹.

¹ Le cas est plutôt rare en mathématiques, mais est sans doute plus fréquent dans d'autres disciplines.

Pourquoi ces distinctions sont-elles essentielles pour la didactique des mathématiques ?

Le savoir mathématique, dont l'institution productrice est constituée des « mathématiciens »², est ainsi défini par avance comme ce qui doit être étudié (dans des institutions spécialisées comme l'École ou non), alors que la connaissance est ce qui va émerger de « l'activité mathématique » en situation. Le processus de dévolution, pris dans un sens très large, part d'un savoir donné comme étant à transmettre, ce processus passe par la construction des situations de rencontre de la connaissance, il est basé, implicitement ou explicitement, sur le questionnement des *raisons d'être* d'un savoir. Remarquons que je ne fais ici aucune hypothèse particulière sur la méthode qui prévaut à une telle construction : chaque professeur, notamment, porte une certaine épistémologie du savoir qu'il doit enseigner, qui intervient (en lien avec d'autres considérations) dans la construction et la sélection des situations d'enseignement.

Inversement, tout élève et plus généralement tout sujet investit les situations qu'il rencontre, et cherche à trouver un équilibre : il rencontre des connaissances. Néanmoins, si ces connaissances ne restent que des modèles implicites d'action, elles ne pourront faire fonction de référence, elles restent fragiles et fugitives. C'est pourquoi le processus d'institutionnalisation (de nouveau au sens le plus général), qui établit un lien des connaissances vers les savoirs, passe par des étapes essentielles : reconnaissance d'une utilité de la connaissance, formulation, formalisation, mémorisation, mise à l'épreuve (validation), généralisation, reconnaissance d'une valeur culturelle et sociale.

L'étude du didactique se situe donc dans cette circulation entre connaissance et savoir.

Ce développement théorique sur les savoirs et les connaissances n'est pas né d'une volonté de développer la théorie des situations sur ce point, mais d'une nécessité rencontrée dans le cadre de nos recherches sur l'énumération (Margolinas, 2010 ; Margolinas & Rivière, 2008 ; Margolinas & Wozniak, 2012 ; Margolinas, Wozniak, Canivenc, De Redon, & Rivière, 2007), qui prolongent celles de Briand (1993) et Brousseau (1984), c'est donc d'énumération que nous allons parler maintenant.

II - L'ENUMERATION : QUELLES CONNAISSANCES ? QUELS SAVOIRS ?

1 Les origines du concept d'énumération

C'est en 1984 que Brousseau publie un premier texte qui regroupe une catégorie de connaissances sous le terme d'énumération. Il part des observations suivantes dans des situations de dénombrement, qui dénotent d'un déséquilibre et donc de connaissances erronées ou absentes dans certaines situations :

« 1) À l'Université il est fréquent de voir des étudiants attendre la correction d'un exercice de combinatoire pour être sûrs que leur réponse est correcte. [...]

2) Dans l'enseignement secondaire les dénombrements posent aussi des problèmes difficiles aux élèves : écrire tous les termes d'un produit de polynômes en troisième année ou faire la liste de tous les éléments d'un ensemble qui ont une certaine propriété en première année ne va pas sans mal parfois même pour de bons élèves.

² Que l'on peut, en France, caractériser par exemple par les liens avec la Société Mathématique de France ou bien avec les sections 25 et 26 du Conseil National Universitaire ou encore avec la section 41 du Centre National de la Recherche Scientifique.

3) À l'école élémentaire certains élèves n'arrivent pas à savoir quelle opération il convient de faire dans les problèmes même si les manipulations évoquées leur sont familières et s'il est clair qu'ils les conçoivent parfaitement.

4) En première année d'école primaire on peut observer des enfants qui « savent compter » mais qui ne mettent pas en œuvre ce savoir pour effectuer des tâches qu'ils comprennent bien pourtant et qui requièrent le comptage : Ils ne comptent qu'en réponse à une demande sociale bien précise et n'ont aucune idée de ce à quoi cette tâche sert ni ce qu'elle permet de maîtriser. » (Brousseau, 1984, p 2-3).

Il procède alors à une comparaison de ces difficultés :

« Quoique assez différents, ces divers problèmes peuvent être rapprochés intuitivement, il s'agit chaque fois de dénombrer mentalement un ensemble qui n'est pas concrètement présent ou réalisé. » (p. 3).

Il indique également la méthode qui lui permet d'établir ces comparaisons :

« Pour préciser ces ressemblances et les analyser il faut faire correspondre à chaque exemple, à chaque connaissance, sa situation fondamentale. » (p. 3).

Cette étude des situations fondamentales lui permet de donner une définition mathématique de ce qu'il appelle l'énumération :

« Une énumération d'un ensemble est une injection de cet ensemble sur une section commençante de $\mathbb{N}$. Ce serait donc la possibilité de produire et de contrôler la production effective de telles énumérations qui ferait défaut aux élèves en difficultés sur les questions évoquées plus haut. » (p. 4).

Il formule alors les hypothèses suivantes :

« i) Les élèves doivent passer très brutalement d'un contrôle perceptif de l'énumération de petites collections d'objets petits déplaçables mais immobiles à un contrôle complètement mental et verbal d'ensembles quelconques.

ii) Les professeurs ne disposent pas de situations d'enseignement qui leur permettraient de faire développer par leurs élèves des savoir-faire, des anticipations, des stratégies dans des rapports expérimentaux avec le milieu. Ils ne disposent pas non plus de ce fait de moyens de négocier avec eux des contrats didactiques raisonnables à propos de ces questions ni même d'évoquer avec eux ce genre de difficultés.

iii) Ces conditions seraient une cause principale des difficultés observées. » (p. 5).

C'est sur la base de ces hypothèses que (Briand, 1993) élabore sa thèse de doctorat, il étend l'énumération du dénombrement proprement dit au « mesurage des collections », développe et observe les situations sur ordinateur dont Brousseau donnait les grandes lignes à la fin du texte de 1984, y compris en formation d'enseignants. Il donne d'autres définitions³ mathématiques de l'énumération, qui font intervenir la notion de « chemin » (pp. 23-25).

2 L'énumération en situation de dénombrement de collections finies montrées

Appuyons-nous sur la caractérisation que Briand (1999) donne de l'énumération dans une situation très simple de dénombrement, dans laquelle il s'agit de dénombrer des arbres identiques imprimés sur une feuille, répartis aléatoirement sur une feuille blanche.

« J'ai montré [Briand 1993] que, pour contrôler une situation de comptage, l'enfant doit faire fonctionner une connaissance (l'énumération) qui se réfère à l'exploration de la collection et qui conditionne complètement le bon déroulement de l'activité. [...]

« [Briand observe un élève qui échoue dans le dénombrement] Il s'agit donc d'une absence de connaissance (l'énumération) qui se manifeste par une absence de synchronisation effective entre

³ Le lecteur intéressé par ces définitions pourra les retrouver dans la thèse publiée en ligne, voir bibliographie.

une connaissance numérique et une organisation conjointe de la collection et qui empêche l'inventaire de la collection.

Examinons l'activité en détail : pour compter le nombre d'éléments d'une collection finie montrée, l'élève doit nécessairement :

- 1- Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.
- 2- Choisir un élément d'une collection.
- 3- Énoncer un mot nombre. (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mots-nombres).
- 4- Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.
- 5- Concevoir la collection des objets non encore choisis.
- 6- Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.
- 7- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.
- 8- Énoncer le dernier mot nombre. » (p. 52-53)

Dans cette liste d'actions nécessaires, seules les étapes 3 et 8 font référence à la suite numérique, toutes les étapes en italiques (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8) nécessitent de parcourir la collection de manière à passer en revue chaque élément une fois et une seule, *l'énumération* est le nom donné à la connaissance qui permet de contrôler ce parcours en situation.

Alors que Brousseau plaçait les difficultés principales de l'énumération du côté du dénombrement mental d'un ensemble qui n'était pas concrètement présent ou réalisé, Briand a montré que des difficultés d'énumération existaient même quand l'ensemble était représenté et même quand l'élève était autorisé à tracer un chemin dessiné sur la collection représentée. Ainsi, l'énumération des collections représentées s'avère plus difficile que prévu.

3 Situations d'énumération

Briand (1993) a développé de nombreuses situations d'énumération sans dénombrement, non seulement sous forme informatique (création du logiciel « à nous les nombres »⁴), mais reposant également sur des situations matérielles simples (Briand, Lacave-Luciani, Harvouët, Bedere, & Goua de Baix, 2000 ; Briand, Loubet, & Salin, 2004).

Dans le cadre du groupe de développement INRP Démathé (voir §II - 4 pour des détails concernant ce groupe), nous en avons conçues d'autres, sur lesquelles je m'appuierai ici non pas parce qu'elles seraient meilleures que celles de Briand (ce qui n'est pas le cas) mais parce que je dispose des données que nous avons recueillies à leur propos.

Voici l'une d'entre-elles (dont je me servirai dans la suite de ce texte), qui concerne une collection finie montrée (sans dénombrement).

La consigne de la situation que j'appellerai « les chapeaux » est la suivante⁵ :

« Sur cette grande feuille, il y a des points. Sur chaque point nous allons mettre un sucre [cette action est réalisée avec l'aide des élèves]. Vous voyez ce bol à côté de la feuille, pour réussir il va falloir déposer tous les sucres dans ce bol. Mais c'est trop facile ! Pour que ça soit un peu plus intéressant, nous allons cacher les sucres avec des chapeaux [l'expérimentateur⁶ et les élèves posent un chapeau sur chaque sucre]. Alors voilà comment ça va se passer : vous devez soulever le chapeau, prendre le sucre, le déposer dans le bol et tout de suite remettre le chapeau sur le point [l'expérimentateur montre l'action en utilisant une petite feuille sur laquelle il y a seulement un point, un sucre et un chapeau, le sucre est déposé dans le bol]. Qu'est-ce qui peut se passer ? Il se

⁴ Une adaptation de ce logiciel est disponible sur http://www.abuledu.org/leterrier/a_nous_les_nombres

⁵ Il s'agit à quelques mots près, de l'interprétation qu'en donne Marie-Christine de Redon lors d'une expérimentation en 2005.

⁶ Il s'agit d'une situation observée et filmée hors classe.

peut que quand on soulève un chapeau [l'expérimentateur le fait] il n'y ait pas de sucre ! Et oui, il est déjà là [montre le bol]. Dans ce cas, le jeu s'arrête et on a perdu. Quand vous pensez avoir fini, vous devez le dire, on enlèvera alors tous les chapeaux, si vous avez mis tous les sucres dans le bol, vous avez gagné⁷. »

Au départ de notre travail, ces situations ont été créées uniquement dans le but de fournir des clips vidéo à un document, car notre ambition était modeste : partir de la recherche de Briand pour produire un développement destiné aux professeurs des écoles.

4 Recherche, développement, et retour à la recherche

En effet, quand j'ai eu l'occasion de réunir un groupe de développement à l'INRP, le groupe Développement des Mathématiques à l'École⁸, j'ai proposé de travailler à la constitution de traités (Neyret, 1995) en destination des professeurs des écoles. Nous avons choisi comme premier thème l'énumération, parce qu'il me semblait que le travail de Briand était suffisamment complet (en plus d'être tout à fait remarquable) pour que notre développement ne concerne d'une certaine manière que la forme. C'est ainsi que nous avons réfléchi à une façon de faire partager les questions d'énumération au public des professeurs. Nous nous sommes assez rapidement aperçus (Margolinas & Rivière, 2008) qu'il serait nécessaire de montrer les gestes accompagnant l'énumération, qui sont toujours difficiles à expliquer par écrit. Nous avons recueilli un corpus filmé à cet effet, tout d'abord en filmant les mains des élèves dans les situations que nous avons construites. Mais, dans le même temps, j'observai aussi des classes ordinaires de maternelle ou de CP et nous avons décidé de reconstituer certaines des observations que nous ne pouvions pas montrer pour des raisons déontologiques (voir par exemple l'observation des ballons, § II - 5 et III - 3), en jouant nous-mêmes les rôles des enseignants et des élèves.

Au cours de ce cheminement (qui était prévu pour durer six mois, après quoi nous pensions passer à un autre sujet...), nous nous sommes rendu compte petit à petit que la question de l'énumération était beaucoup plus large et complexe que ce que nous avons supposé au départ (Margolinas & De Redon, 2008 ; Margolinas, et al., 2007) ! Au lieu de produire des documents, nous avons produit des recherches et même une nouvelle thèse (Olivier Rivière, en cours)...

5 Difficultés d'énumération avec des petites collections mobiles

En observant des classes d'école maternelle, de façon informelle d'abord, puis de façon plus systématique, en suivant un groupe d'élèves de la Grande Section au CP⁹, nous nous sommes aperçus tout d'abord que le dénombrement des collections dont on pouvait déplacer les éléments n'était pas toujours exempt de difficulté. Ainsi, alors qu'il est aisé de dénombrer par comptage une petite collection de jetons sur une table, en faisant passer chaque jeton déjà compté d'un bord à l'autre de la table, la situation peut être beaucoup plus complexe si l'on modifie certains paramètres de la situation.

⁷ Voir annexe 1.

⁸ Ce groupe de développement (Démathé) a fonctionné de 2003 à 2010, sous la direction de Claire Margolinas, avec Olivier Rivière et Floriane Wozniak et la collaboration technique de Bruno Mastellone : de 2003 à 2007 avec Bruno Canivenc et Marie-Christine de Redon ; de 2005 à 2007 avec Catherine Aurand ; de 2003 à 2004 avec Colette Andreucci et Alain Mercier. Ce groupe a été créé à l'UMR ADEF (INRP - Université de Provence - IUFM d'Aix-Marseille) puis soutenu par le projet EducMath (INRP) et l'IUFM d'Auvergne.

⁹ Avec Marceline Laparra, didacticienne du français (CREM, Université de Lorraine), dans le cadre du réseau RESEIDA (REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages), fondé par Jean-Yves Rochex et Elisabeth Bautier.

Voici par exemple une observation dans une classe de grande section de maternelle. Au cours d'une activité motrice, les élèves sont répartis en deux équipes qui font une sorte de course de relais : un élève s'élance jusqu'au fond de la salle, saisit un ballon, revient vers son équipe et dépose son ballon dans un grand bidon puis le suivant se met à courir et ainsi de suite jusqu'à ce que la maîtresse siffle la fin de la course. L'équipe gagnante est celle qui a recueilli le plus de ballons dans son bidon. Il s'agit alors de savoir quelle équipe a gagné, en comptant les ballons récoltés. Un élève commence à compter les ballons de son équipe, sous l'œil attentif de toute la classe. Il sort un ballon du bidon, énonce « un », garde le ballon dans ses bras ; il prend un autre ballon, dit « deux », il a alors deux ballons dans ses bras ; au moment de saisir un nouveau ballon dans le bidon, un des ballons qu'il avait dans les bras tombe dans le bidon. L'élève continue imperturbablement, énonce « trois » et s'apprête à prendre un nouveau ballon sans qu'aucun élève ne proteste (même dans l'équipe adverse...) c'est alors le professeur qui l'arrête : « ça ne va pas ».

Quelles sont donc les variables didactiques qui interviennent et qui font qu'il est plus facile de compter des jetons sur une table que des ballons dans des bidons ? Intuitivement, on perçoit bien que les ballons sont trop gros pour tenir dans les bras d'un enfant et que de plus ils roulent alors que les jetons sont petits et stables. Néanmoins, cette description factuelle ne nous avance pas vraiment pour comprendre les structures qui différencient ces situations du point de vue de l'énumération (étant qu'elles sont rigoureusement identiques du point de vue numérique : faible nombre d'objets, comptage de un en un possible).

Pour mieux comprendre les difficultés d'énumération dans le cas des collections dont on peut déplacer les éléments, nous avons conçu la situation suivante, que j'appellerai « les jetons marqués ».

« L'expérimentateur donne une boîte à l'élève [la partie couvercle et la partie récipient de la boîte sont quasiment identiques], lui demande de l'ouvrir et de renverser doucement sur la table tout ce qu'elle contient [les deux parties de la boîte sont posées par l'élève où il le souhaite, aucun commentaire n'est fait à ce propos]. L'expérimentateur demande à l'élève de dire ce qu'il voit (Figure 2) : « Des jetons où il n'y a rien et des jetons où il y a une gommette verte », dit Pauline. L'expérimentateur reprend alors la formulation de Pauline et lui demande de trier les jetons où il y a une gommette verte et les autres : tous les jetons avec gommette verte doivent être ensemble, et il ne doit rester aucun jeton avec gommette verte parmi les jetons sans gommette. ».



Figure 2 : les jetons marqués (Pauline, PS, temps 1)

6 Énumération et organisations spatiales

Décrivons le travail de Pauline (petite section de maternelle) avec les jetons marqués. Elle commence par déposer dans un petit tas des jetons dont la gommette est visible dans le tas de départ (Figure 3).



Figure 3 : constitution du tas des jetons marqués

Au début du travail, quand elle soulève un jeton et constate sur les deux faces qu'il est non marqué, elle le remet dans le tas de départ. Au bout d'un certain temps, elle commence à constituer un autre tas pour ces jetons non marqués (Figure 4).



Figure 4 : constitution du tas des jetons non marqués

Malheureusement, ce deuxième tas est très proche du tas des jetons non encore triés, et au cours du travail ces deux tas finiront pas se mélanger, ce qui conduira Pauline à l'échec.

Remarquons que Pauline n'utilise pas les parties de la boîte comme récipients, ce que font d'autres élèves spontanément (comme Brandon, MS, qui utilise immédiatement une partie de la boîte comme récipient pour les jetons marqués).

Il s'agit de réaliser des partitions successives de la collection des jetons, la partition finale étant constituée du sous-ensemble des jetons marqués et du sous-ensemble des jetons non-marqués. Au cours de l'activité de tri, l'ensemble est partitionné en deux sous-ensembles : celui des objets déjà traités et celui des objets non traités, voire en trois (avec celui des objets en cours de traitement). Sur la Figure 4, on distingue ainsi les jetons traités qui sont proches de Pauline, les jetons non traités qui sont un peu plus loin sur la table et dans ses mains quelques jetons en cours de traitement. Cette partition se réalise dans des espaces : espace des objets traités, espace des objets non traités, espace de traitement. De plus, l'ensemble des objets traités est lui-même partitionné en deux sous-ensembles : celui des éléments correspondant au critère et celui des éléments ne correspondant pas au critère.

Revenons maintenant au problème des ballons. Puisqu'il s'agit d'un dénombrement, il suffit de faire des partitions successives en deux sous-ensembles : celui des ballons déjà comptés et celui des ballons encore à compter. Au début de l'activité, l'élève utilise son bras replié comme espace des objets traités, sa main comme espace de traitement et le bidon comme espace des objets non traités. Mais dans l'avancée des partitions successives, l'espace de son bras replié ne suffit pas à contenir tous les ballons déjà comptés, certains ballons déjà comptés retombent dans l'espace des ballons non encore traités, ce qui conduit à l'échec de la procédure, exactement comme dans le cas du travail de Pauline.

Les conditions matérielles de constitution stable des différents espaces sont donc des variables des situations d'énumération des collections à configuration modifiables (jetons, ballons) : les ballons peuvent rouler et passer d'un espace à l'autre, alors qu'un jeton, une fois posé, ne bouge plus s'il

n'est pas touché ; mais encore, si l'on dispose d'une grande table, dans laquelle il est possible de bien séparer les espaces (c'était le cas pour Pauline, la photo étant réduite à l'espace dont elle fait usage), le problème ne sera pas le même que si l'espace est exigu, s'il y a des récipients ou non, etc.

Par rapport au travail de Brousseau puis de Briand, ce travail montre que, même avec de petites collections matérielles dont on peut déplacer les éléments, le problème de l'énumération n'est pas si simple que cela.

7 Configurations modifiable et non modifiable

Les configurations jouent un rôle de « macro-variables » : à partir de la situation fondamentale de l'énumération (désigner une fois et une seule chaque élément d'un ensemble), elles déterminent deux catégories de situations très différentes.

Si l'on peut modifier la configuration (ex : les jetons), il est possible de développer des stratégies qui reposent sur la distinction des partitions successives par des positions dans l'espace.

Si l'on ne peut pas modifier la configuration (ex : les chapeaux, situations dans laquelle les chapeaux et les sucres sont bien mobiles, mais la configuration imposée par la place des points sur la feuille ne l'est pas), alors il faut mémoriser un chemin qui permet de distinguer au fur et mesure du parcours les objets non traités et les objets traités.

Ces deux situations sont très différentes, bien qu'elles relèvent toutes les deux de l'énumération, les variables qui affectent chacune de ces deux situations seront également très différentes : la taille de la table n'a pas d'importance dans la situation des chapeaux pourvu que la feuille et le bol puisse tenir sur celle-ci, alors cette taille a une importance dans la situation des jetons marqués, parce qu'elle sert d'espace de travail et peut plus ou moins bien se reconfigurer.

8 Stratégies de constitution des chemins

Intéressons-nous maintenant à la situation des chapeaux, telle qu'elle a été expérimentée¹⁰ en 2006, avec 15 points (Figure 5), auprès d'élèves de GS au CE1.



Figure 5 : quinze chapeaux

Certains élèves, comme Olivia¹¹ (CE1), soulèvent les chapeaux sans qu'une stratégie de constitution de chemin ni de partition ne soit observable (elle commence par un point en bas à gauche puis en haut à droite, puis quelque part au milieu, etc. ce qui la conduit à l'échec – elle soulève un chapeau

¹⁰ Recueil de données réalisé par Marie-Christine de Redon et Bruno Canivenc.

¹¹ Annexe 2.

alors que le sucre a déjà été pris). D'autres, parfois beaucoup plus jeunes, comme Jena¹² (MS), réussissent pourtant.

Tous les élèves qui réussissent avec 15 chapeaux ont remarqué que la feuille (qui aurait dû être une feuille A3) était constituée de deux feuilles A4 scotchées, ce qui constituait une première partition de la collection des chapeaux.

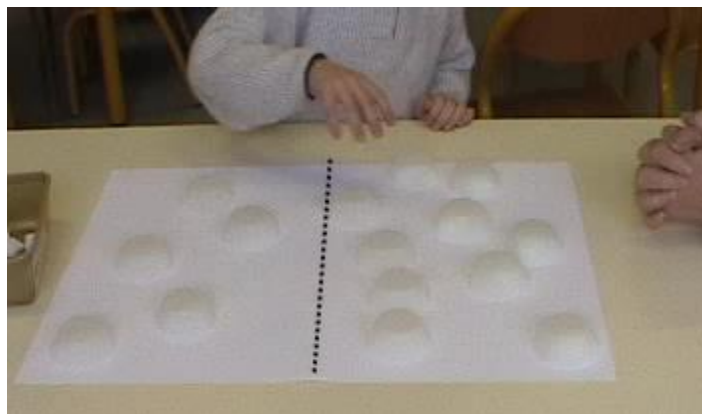


Figure 6 : partition en deux A4

Cette partition visuelle, facilitée par la configuration matérielle, leur a permis d'énumérer indépendamment la collection de 5 chapeaux situés à leur droite et la collection de 10 chapeaux à leur gauche. Tous les élèves ayant eu cette idée ont énuméré correctement la petite collection de 5 objets, pour laquelle un contrôle visuel simple suffit à réussir. Par contre, certains ont réussi et d'autres ont échoué à énumérer la collection des 10 chapeaux restants, ce qui nous intéresse maintenant.

Matérialisation le travail d'Audrey¹³ (GS, Figure 7) et celui d'Alexandre¹⁴ (CP, Figure 8) qui réussissent tous les deux.

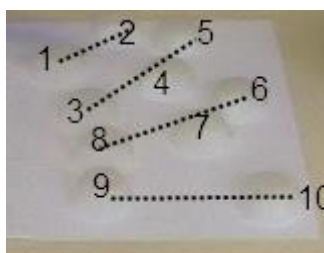


Figure 7 : Audrey GS (réussite)

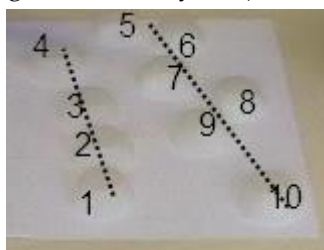


Figure 8 : Alexandre CP (réussite)

¹² Annexe 3.

¹³ Annexe 4.

¹⁴ Annexe 5.

Cette organisation de l'espace qui nous est familière : l'organisation en ligne (Audrey) et en colonne (Alexandre), est en effet propre à la « raison graphique » (Goody, 1979) : elle organise l'écriture. Cette organisation est efficace car elle s'appuie sur un réseau de quasi-parallèles que nous avons appris à distinguer et à reproduire en lien avec l'écriture et plus généralement la littératie (Joigneaux, Laparra, & Margolinas, 2012). En s'appuyant sur la Figure 7, il est facile de voir d'où peuvent émerger certaines erreurs : le point 5, par exemple, pourrait être aussi bien dans une ligne 1, 2, 5 que dans la ligne 3, 4, 5 ; le point 8 peut être oublié car confondu avec le point 3 (déjà traité), etc. C'est ce que nous constatons dans certaines observations d'élèves en échec avec des procédures « lignes ». En effet, il ne s'agit que de quasi-parallèles, qui ne sont de plus pas matérialisées. Néanmoins, l'énumération en ligne ou en colonne est d'une façon générale la clé de la réussite dans ce genre de situation. Il s'agit là du premier lien entre énumération et entrée dans l'écrit, d'autres liens vont être établis maintenant.

9 Énumération en « français »

En travaillant avec Marceline Laparra sur des séances considérées par le professeur comme relevant du français, nous nous sommes aperçues que des connaissances d'énumération et plus exactement la non-disponibilité de ces connaissances, intervenaient très fortement dans la réussite ou l'échec, à l'insu du professeur.

Voici un exemple assez typique, qui de plus va nous permettre d'évoquer la complexité des énumérations, qui sont très souvent imbriquées.

En grande section de maternelle, les élèves ont à remplir la fiche de la Figure 9.

T R A M P O L I N E									

Figure 9 : une fiche de grande section de maternelle

Ils ont à disposition un alphabet en écriture scripte, un récipient et des ciseaux (Figure 10) et un crayon.



Figure 10 : le matériel à disposition

Ils peuvent également se servir d'une règle de correspondance des graphies (Figure 11), qui est d'usage habituel dans cette classe (nous sommes au mois d'avril). Le mot « trampoline »

écrit sur la fiche fait partie d'un album étudié dans la classe, les élèves l'ont déjà rencontré (cependant, rappelons qu'ils ne savent pas encore lire).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
ā	b̄	c̄	d̄	ē	f̄	ḡ	h̄	ī	j̄	k̄	l̄	m̄	n̄	ō	p̄	q̄	r̄	s̄	t̄	ū	v̄	w̄	x̄	ȳ	z̄

Figure 11 : règle de correspondance des graphies

La consigne donnée par la maîtresse est la suivante : « Vous devez découper les lettres scriptes qui sont sur cette bande et les déposer dans la boîte. Vous allez coller les lettres dans les cases de la fiche pour écrire le mot qui correspond au modèle. Ensuite vous devez écrire ce mot au crayon en écriture cursive sur la ligne.¹⁵ ».

Suivons pas à pas ce que doivent faire les élèves et les situations qui sont ainsi générées. Ils doivent d'abord découper la bande des lettres pour obtenir des lettres-étiquettes (Figure 12).



Figure 12 : les lettres-étiquettes dans la boîte

Pour réussir à coller les étiquettes au bon endroit, les élèves doivent réaliser simultanément deux énumérations : l'énumération de la configuration fixe (en ligne) du mot TRAMPOLINE et l'énumération de la configuration modifiable dans lettres-étiquettes – de plus, s'ils n'ont pas mémorisé les correspondances entre écriture majuscule bâton et écriture scripte, ils doivent également énumérer le tableau de correspondance des graphies (je n'analyserai pas cette énumération ici). Il y a deux difficultés principales : trouver un moyen de garder en mémoire la lettre en cours de recherche dans le mot-modèle ; organiser l'énumération des lettres-étiquettes dans la boîte. Concernant cette dernière tâche, la plupart des élèves saisissent une étiquette, l'examine, éventuellement en la comparant avec la lettre recherchée sur le mot-modèle, parfois en utilisant le tableau de correspondance et, si l'étiquette ne convient pas... la remet dans la boîte. Ils mélangent ainsi les étiquettes non encore traitées et l'étiquette traitée, ce qui allonge énormément le temps de recherche de la bonne étiquette, car ils finissent par retomber – sans s'en rendre compte – sur la même étiquette-lettre.

De fait, beaucoup d'élèves se trompent et avancent très lentement dans la partie de la tâche qui concerne les étiquettes scriptes.

Par contre, contrairement à ce qu'avait anticipé la maîtresse qui, du point de vue de la graphie, considère qu'il y a une hiérarchie de la difficulté entre écriture majuscule bâton, écriture scripte et écriture cursive, les élèves réussissent beaucoup plus facilement la transcription en écriture cursive.

¹⁵ Il ne s'agit pas d'une transcription de la consigne telle qu'elle a été donnée aux élèves.

Du point de vue de l'énumération, la difficulté est diminuée, puisqu'il ne reste que l'énumération du mot-modèle et éventuellement du tableau des graphies.

Bien entendu, il pourrait y avoir bien d'autres causes à la lenteur des élèves avec les étiquettes, mais il se trouve qu'une élève, Angélique, qui n'écoute jamais bien les consignes et commence les activités toujours en retard, a oublié qu'il fallait d'abord découper toute la bande en mots-étiquettes (elle commence le travail au moment où les autres élèves ont déjà fini le découpage des lettres). Elle se sert donc directement de la bande pour reconstituer le mot-modèle en écriture scripte (Figure 13).



Figure 13 : le travail d'Angélique

La difficulté d'énumération est là aussi diminuée : au début, Angélique n'a qu'à énumérer la bande en ligne pour déterminer la bonne lettre à découper. Au fur et à mesure du découpage, la difficulté augmente, mais reste tout de même bien inférieure (du point de vue de l'énumération) au traitement de 26 étiquettes (à la fin Angélique obtient seulement 5 morceaux de bande, sans compter les étiquettes collées au fur et à mesure). A la grande surprise de la maîtresse (mais sans surprise pour l'observateur), Angélique, pour une fois, finit avant tout le monde et rend une fiche impeccable...

À l'école primaire, ces situations dans lesquelles l'énumération intervient dans les difficultés des élèves sans que le professeur n'ait conscience de l'origine de ces difficultés sont très fréquentes (Gilbert, 2012).

10 Retour sur des « mathématiques »

Comme dernier exemple, je vais décrire maintenant sur une observation en classe de grande section de maternelle, au mois de mai. Plusieurs observateurs¹⁶ ont pu suivre quelques élèves et filmer leurs gestes pendant la réalisation de la tâche demandée. Sur la Figure 14, on peut voir une fiche complétée par un élève.

¹⁶ Catherine Aurand, Claire Margolinas, Bruno Mastellone, les transcriptions de cette séance ont été réalisées, élève par élève, par Judith Margolinas.

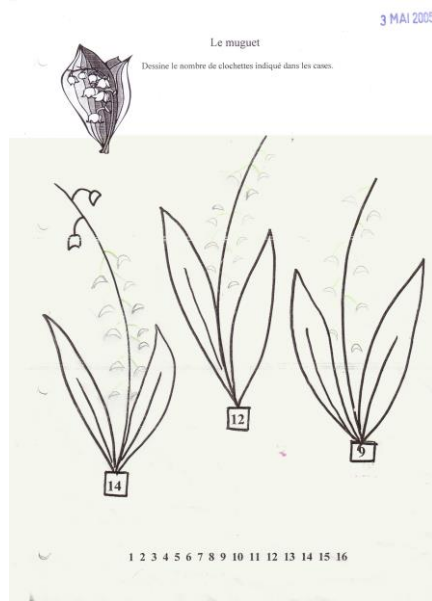


Figure 14 : le muguet

Dans la classe que nous avons observée (plusieurs fois durant l'année 2004-2005, dans le cadre du réseau RESEIDA, voir note 9), les élèves ne savent pas par cœur à quel nombre correspondent les écritures 14 et 12 (la plupart savent que 9 correspond à neuf), cette reconnaissance ne faisant pas partie des objectifs de la maîtresse¹⁷. C'est pourquoi la maîtresse a proposé une bande numérique au bas de la fiche, bande que les élèves peuvent énumérer en récitant la comptine. Quand ils énumèrent bien les nombres écrits de gauche à droite (ce qui n'est pas le cas pour l'une d'entre eux) et qu'ils énumèrent bien les nombres un à un en prononçant la comptine (que tout le monde connaît parfaitement), les élèves peuvent ainsi savoir que « 14 » correspond à « quatorze ». C'est ce que la plupart des élèves commencent par faire.

Sachant donc qu'il faut en dessiner quatorze, les élèves commencent à dessiner des fleurs, en essayant de respecter au mieux le modèle (deux fleurs sont déjà dessinées), mais il leur est impossible de compter les fleurs au fur et à mesure qu'ils les dessinent. Souvent ils en dessinent quelques-unes (entre deux et quatre) puis s'arrêtent, attendent l'intervention d'un adulte (maîtresse titulaire ou assistante d'éducation) ou bien comptent les fleurs déjà dessinées. Sauf qu'entre temps ils ont oublié combien de fleurs ils devaient dessiner, ils doivent donc à nouveau énumérer la bande numérique pour retrouver le but (quatorze fleurs). Parfois, certains élèves prennent conscience qu'ils pourraient énumérer les deux collections (fleurs sur la tige et bande numérique) en même temps et pointent simultanément avec deux mains les deux collections (une fleur / un nombre écrit sur la bande). Le travail est très long (entre dix et vingt minutes pour les deux premiers muguets) et très hésitant (beaucoup de fleurs gommées puis redessinées). De plus, l'énumération des fleurs sur la branche de muguet est un peu compliquée s'ils ont (comme sur la Figure 14) dessiné les fleurs sur les deux côtés de la branche, comme c'est le cas pour les deux premières fleurs imprimées sur la fiche – certains élèves trouvent d'ailleurs une solution qui montre qu'ils cherchent à résoudre, entre autres, ce problème d'énumération (Figure 15).

¹⁷ En 2008, les programmes de l'école maternelle ont été modifiés et cette lecture est maintenant inscrite dans les compétences à acquérir en fin d'école maternelle. Ce n'était pas le cas en 2005, de plus, la maîtresse pouvait estimer que, pour des élèves faibles d'une classe de ZEP, ceci n'était pas prioritaire.

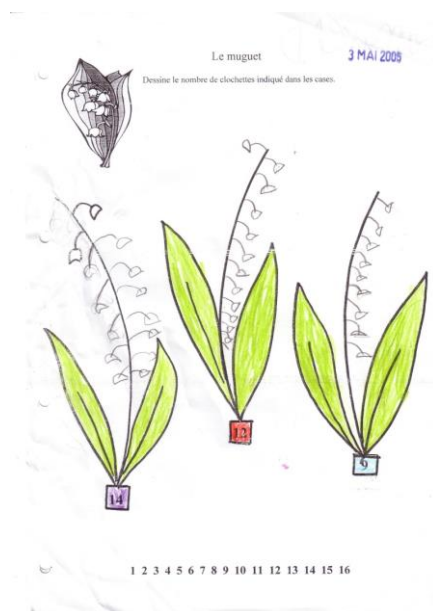


Figure 15 : évolution du dessin des fleurs qui facilite l'énumération

Une stratégie de résolution de ce problème existe, qui repose sur la prise de conscience (a) de l'impossibilité de mémoriser les arrêts successifs dans une suite orale (b) de l'importance de la fonction bureaucratique de l'écrit (Goody, 1986) dans l'organisation de cette tâche. En effet, il serait possible pour tous les élèves de dessiner d'abord rapidement (à un rythme compatible avec celui de l'énoncé de la comptine) le bon nombre de petits traits correspondant aux fleurs, fleurs qui pourraient être alors tranquillement dessinées dans un deuxième temps. Si personne n'y pense (ni les élèves, ni l'aide éducatrice, ni la maîtresse), c'est sans doute d'une part que les problèmes d'énumération ne sont pas identifiés mais d'autre part que la collection intermédiaire schématisée n'a aucun statut comme connaissance, le nombre oral dominant toutes les activités numériques (Laparra & Margolinas, 2009).

11 Conclusion concernant l'énumération

L'énumération intervient dans de très nombreuses situations, considérées ou non comme relevant des mathématiques. Les deux types d'énumération correspondant aux macro-variables (configurations modifiables ou non) se rencontrent parfois isolément et souvent simultanément. Dans tous les cas de nombreux élèves sont en difficulté dès que des connaissances d'énumération sont en jeu en situation, alors que les professeurs n'identifient pas ces difficultés comme ayant quelque chose en commun.

De ce fait, les connaissances d'énumération que les élèves rencontrent en situation et qui peuvent parfois évoluer en interaction avec le milieu (comme dans la Figure 15) restent implicites : elles ne sont pas reconnues comme utiles, et encore moins formulées, validées, formalisées, mémorisées, etc. Elles ne participent donc pas à un processus d'institutionnalisation. Ces connaissances non instituées sont éphémères, personnelles et finalement très différenciatrices.

III - LE TRAVAIL DU PROFESSEUR

1 Position du problème

Brousseau (1984) avait déjà constaté que :

« Les professeurs ne disposent pas de situations d'enseignement qui leur permettraient de faire développer par leurs élèves des savoir-faire, des anticipations, des stratégies dans des rapports

expérimentaux avec le milieu. Ils ne disposent pas non plus de ce fait de moyens de négocier avec eux des contrats didactiques raisonnables à propos de ces questions ni même d'évoquer avec eux ce genre de difficultés » (p.5)

Depuis 1984, la situation que décrit Brousseau a changée, en effet les travaux de Briand et de ses collaborateurs, de 1993 à 2004 (déjà cités), ont permis de construire de telles situations d'enseignement.

2 L'énumération comme savoir

En reprenant le schéma des savoirs et des connaissances (Figure 1), nous pouvons décrire l'historique du travail sur l'énumération. En pointant une connaissance qui réunissait un ensemble de difficultés constatées dans le domaine du dénombrement, Brousseau a amorcé le processus d'institutionnalisation : reconnaissance d'une connaissance utile, formulation, formalisation (en particulier définition), mise à l'épreuve, reconnaissance d'une valeur culturelle et sociale. Il a donc institutionnalisé l'énumération comme un savoir dans l'institution « didactique des mathématiques ».

Partant de ce savoir, Briand a montré qu'il existe des situations adidactiques issues de la situation fondamentale de l'énumération, et qu'il est donc possible d'apprendre des connaissances d'énumération. Il a donc montré qu'un processus de dévolution du savoir « énumération » était viable dans certaines situations.

Néanmoins, même si certains documents ministériels à la disposition de tous les enseignants (Emprin & Emprin, 2010, pp. 27-29) font référence à des situations inspirées des travaux de Briand, je n'ai rencontré en classe aucune situation inspirée de celles de Briand, même chez des maîtres-formateurs et même chez ceux dont je sais qu'ils se servent par ailleurs de certaines situations du cédérom (Briand, et al., 2004).

Tout se passe comme si ce savoir restait « transparent » pour les professeurs (Margolinas & Laparra, 2011), comme s'ils passaient à côté sans le voir, en quelque sorte. Pourtant, les professeurs ont eux-mêmes des connaissances d'énumération, et ils connaissent (en situation) les difficultés d'énumération.

3 Une observation en classe

Revenons au problème des ballons, observé en classe de grande section. La séance a lieu dans une salle de motricité, il s'agit d'une grande salle toute en longueur, les élèves qui sont réunis en deux équipes pour compter les ballons sont à un bout de cette salle. La maîtresse arrête l'élève qui compte les ballons « ça ne va pas » puis remet tous les ballons dans le bidon initial. Sans parler, elle traverse la salle et va chercher un bidon vide, puis elle revient avec ce bidon, qu'elle pose à côté du bidon contenant les ballons. Elle aide alors l'élève à compter les ballons, en prenant la main de l'élève pour qu'il dépose chaque ballon déjà compté dans le bidon vide. L'élève n'a plus qu'à saisir un ballon et compter.

La maîtresse sait bien entendu, en tant qu'adulte, que le dénombrement sera faux si des ballons retombent dans le bidon, elle sait aussi ce qu'il est possible de faire dans une telle situation puisqu'elle va chercher un bidon qui est une bonne solution pour servir d'espace pour les ballons déjà traités : elle manifeste des connaissances d'énumération en situation.

Néanmoins, elle ne produit aucun signe qui permettrait aux élèves d'interpréter ce qu'elle fait et d'en reconnaître l'utilité, en particulier, elle ne formule rien en traversant la salle à l'aller et au retour, alors qu'elle en aurait eu la possibilité sans perte de temps pour sa séance. Par exemple, elle aurait pu dire « je vais chercher un bidon pour mettre les ballons déjà comptés ». Elle aurait pu aussi (presque dans le même temps), au lieu de dire « ça ne va

pas », dire « un ballon déjà compté est tombé dans le bidon où sont les ballons encore à compter, ça ne va pas ».

Par ailleurs, quand elle fait recommencer le dénombrement des ballons à l'élève, elle prend en charge l'énumération par le geste, alors que c'est ce qui posait problème à l'élève, ne lui laissant en charge que le comptage, alors que c'est ce qu'il savait déjà faire. Imaginons un instant que l'élève se soit trompé dans le comptage (en disant quatre six cinq, par exemple), elle n'aurait sans doute pas fait pour autant le comptage à la place de l'élève, car elle aurait eu le sentiment de faire à sa place ce qui était un objet d'enseignement légitime (la comptine pour dénombrer). Elle lui aurait peut-être montré (quatre cinq six) mais elle aurait ensuite exigé de l'élève qu'il réalise lui-même le dénombrement.

En ne décrivant pas ses actions et en agissant à la place de l'élève, cette maîtresse nous montre que l'énumération comme savoir n'est pas visible depuis la place qu'elle occupe dans l'institution scolaire, alors même qu'elle reconnaît implicitement l'énumération comme connaissance en situation.

4 La « manipulation » : une catégorie professionnelle qui fait obstacle à l'énumération ?

La « manipulation » est par contre une catégorie disponible dans la profession: un savoir sur les situations, dont l'intérêt peut être d'attirer l'attention sur des situations différentes, comme « donne moi six [vraies] pommes » et « dessine six pommes ».

L'analyse de la situation du muguet est révélatrice d'une grande différence entre ces deux situations, parce que l'énumération des six vraies pommes, comme celle que l'on aurait pu faire de quatorze vraies fleurs de muguet, est produite sur des collections à configurations modifiables, sur des objets assez faciles à énumérer (même si les pommes peuvent parfois rouler... et donc compliquer l'énumération). L'énoncé de la comptine permet le comptage de ces vrais objets parce qu'elle peut se faire simultanément avec l'énumération alors que ce n'est pas le cas si l'on dessine les pommes (surtout si on le fait avec un grand luxe de détail et de couleurs).

Malheureusement, la « manipulation » ne permet pas de distinguer les situations des unes des autres dès qu'il y a bien des objets à traiter. Ainsi, si la plupart du temps quand on « manipule » il s'agit de collections à configurations modifiables, ce n'est pas toujours le cas : l'élève manipule bien les chapeaux alors que dans cette situation la configuration n'est pas modifiable.

On peut se demander si la « manipulation » n'occupe pas écologiquement la niche que pourrait occuper l'énumération (Artaud, 1997) dans les savoirs de l'institution « profession enseignante ».

5 Énumération et disciplines scolaires

J'ai déjà montré sur un exemple (II - 9) que l'énumération intervenait en français, mais aussi que certaines fonctions de l'écrit permettaient de décrire des procédures efficaces d'énumération (à propos des muguets). Autrement dit, j'ai déjà commencé à brouiller les frontières des disciplines scolaires...

En effet, l'énumération, découverte et institutionnalisée en didactique des mathématiques, même si elle peut se définir mathématiquement, intervient au moins autant dans des exercices scolaires de français que de mathématiques. Les exemples ne manquent pas, l'un d'entre eux me semble particulièrement éclairant pour comprendre pourquoi une telle description n'est pas courante. Voici une fiche observée à l'école maternelle en grande section (Figure 16 : fiche chocolat).

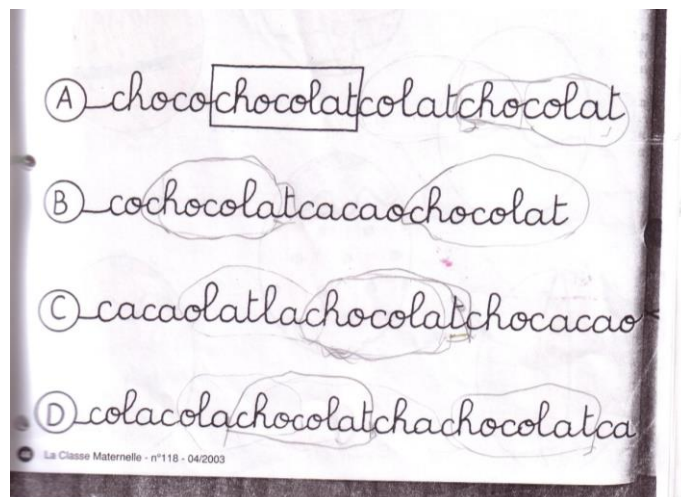


Figure 16 : fiche chocolat (grande section de maternelle)

L'observateur adulte a du mal à comprendre en quoi la reconnaissance du mot « chocolat » dans cette fiche est un problème d'énumération, car il sait lire et non seulement reconnaît le mot « chocolat » mais également des mots (première et troisième lignes « choco », « cola », deuxième et troisième lignes « cacao ») et quelques « syllabes » jouant le rôle de distracteur (deuxième ligne « co », troisième ligne « lat » et « la », quatrième ligne « cha » et « ca »). Notre capacité en lecture est telle que nous aurons même tendance à accepter plus facilement « colat » comme un mot bizarre plutôt que de considérer cette suite de lettres comme « cola » et « t » (première ligne).

L'élève de grande section de maternelle, même s'il sait reconnaître des lettres et identifier certains mots étudiés (ce qui peut être le cas de « chocolat » au moment où cette fiche est donnée), ne sait pas lire. Il est dans une situation que nous pouvons essayer d'évoquer avec la figure suivante (Figure 17).

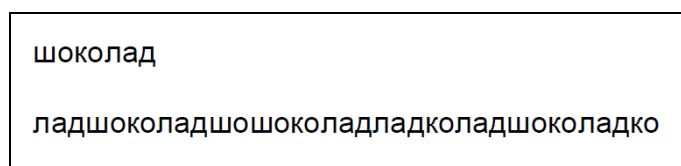


Figure 17 : fiche chocolat en russe

Pour réussir l'exercice de cette fiche, il devient visible à l'observateur que plusieurs stratégies sont possibles qui, sans donner de l'intelligibilité aux signes mis en ligne, permettent de retrouver la séquence modèle : rechercher la première lettre du modèle puis, si elle est trouvée, la seconde, etc. ou bien rechercher une lettre « qui dépasse » (la dernière) puis procéder de la droite vers la gauche, etc.

S'agit-il de « mathématiques » de « français » ? L'énumération, tout d'abord rencontrée comme une connaissance nécessaire au dénombrement, est aussi une connaissance nécessaire à la lecture. Les délimitations usuelles des disciplines scolaires ont besoin d'être reconfigurées pour correspondre aux connaissances en jeu en situation.

6 Enseigner l'énumération ?

Si « enseigner » correspond au double processus de dévolution et d'institutionnalisation, le professeur, pour investir ces processus, doit pouvoir partir d'un savoir pour développer des connaissances qui feront plus tard fonction de savoirs. Mais qui dit savoir dit institution, or l'institution « didactique des mathématiques » dans laquelle le savoir « énumération » a été produite et institutionnalisée n'est ni très visible depuis la position du professeur ni très légitime.

Même avec des professeurs formés ou informés (en formation initiale ou continue) de l'intérêt de l'énumération pour mieux comprendre certaines difficultés des élèves et pour mieux les résoudre, il paraît difficile d'enclencher le processus long et coûteux que représenterait un enseignement complet de l'énumération par adaptation (Brousseau, 1998) alors même que, comme Briand l'a montré, il est possible.

Il est possible que d'autres solutions existent, accessibles aux professeurs qui auraient une bonne connaissance de l'énumération. En effet, puisque l'énumération intervient dans un très grand nombre de situations scolaires¹⁸, il doit être possible au professeur de prendre le temps (souvent assez court) nécessaire pour établir des liens entre ces situations. Pour cela, il faut reconnaître la nature des situations d'énumération (configurations modifiables et non modifiables), et identifier les opérations élémentaires à réaliser : utiliser les configurations de l'espace pour faire des partitions, parcourir les collections à organisation fixe en ligne ou en colonne.

Par exemple, dans le cas du travail (très courant) de reproduction d'un modèle, comme dans le paragraphe II - 9, il faut distinguer (a) l'énumération des lettres du mot TRAMPOLINE, qui nécessite de garder la mémoire du parcours du mot (b) l'énumération des étiquettes-lettres de l'alphabet découpé.

Concernant la première énumération, le mot est par nature une ligne, qui est parcourue de gauche à droite, cette énumération est donc très simple. La seule difficulté consiste à repérer la lettre en cours de traitement. L'usage de l'écrit (fonction bureaucratique) dans ce repérage fait partie des procédures qu'il est important d'introduire de façon régulière dans la classe : barrer proprement les lettres déjà traitées, faire un point sous les lettres déjà traitées, etc. Dans le cas de cet exercice, si les élèves reconnaissent facilement les différentes graphies de chaque lettre, il est possible que cela ne soit pas nécessaire : on en est à la lettre qui n'a pas encore été posée dans une case juste en dessous.

Concernant la seconde énumération, il s'agit, comme toujours avec les configurations modifiables, d'insister sur les partitions opérées. La boîte peut être le réservoir des étiquettes non encore traitées, mais dans ce cas il faut déposer les étiquettes déjà traitées sur la table. Ce traitement étant répété pour chaque nouvelle lettre du modèle, il faut réunir à nouveau les étiquettes non collées dans la boîte une fois une étiquette trouvée (et ainsi de suite). C'est sans doute ce dernier point qui est le plus délicat, car il s'agit des mêmes objets dont le statut change. Si les partitions entre objets traités et non traités sont d'usage courant dans la classe, cet usage et un lexique stable peuvent permettre aux élèves de comprendre que l'organisation des étiquettes n'est pas une particularité de cette situation-là mais s'inscrit dans un cadre plus large.

Bien entendu, le professeur peut considérer que la partition objets traités / non traités pourrait faire l'objet d'une situation à part dans laquelle cette connaissance interviendrait de façon raisonnablement isolée (comme dans la situation des jetons marqués, par exemple), autrement dit, il peut savoir qu'il dispose de situations comme un outil à sa disposition, même si l'énumération comme savoir n'est pas visé officiellement.

Dans les cas des situations à configurations non modifiables, le travail systématique sur les lignes et les colonnes étant la ressource la plus importante, ces configurations peuvent être renforcées dans de nombreuses situations. Voici par exemple ce que j'ai pu observer chez Annie Cariat, maître-formatrice qui travaille depuis plusieurs années avec Olivier Rivière et

¹⁸ Eva Gilbert (2012) avait ainsi fait le « pari » qu'elle serait capable de rencontrer des difficultés d'énumération dans n'importe quelle situation de classe observée (quelque soit la discipline scolaire) puis de conseiller les professeurs sur ces difficultés, pari risqué, qu'elle a toujours réussi à tenir (8 observations de classes de la maternelle au CM2).

moi-même. Elle distribue aux élèves une « boîte d'œufs » (Figure 18) et leur demande d'aller chercher dans un panier éloigné juste ce qu'il faut d'œufs pour remplir complètement la boîte. Les élèves (grande section de maternelle), comptent les trous pour savoir combien d'œufs aller chercher. Depuis qu'elle a conscience de l'importance de l'énumération, elle prend le temps d'insister auprès de chaque élève (en atelier dirigé) sur la nécessité d'organiser l'énumération des trous, soit en ligne, soit en colonne, ce qui est bien entendu favorisé par la forme du plateau d'œufs. Les occasions ne manquent pas de renforcer cet apprentissage.



Figure 18 : boîte d'œufs

Pour être à même de réaliser ce travail, le professeur doit donc :

- Dans les situations à configurations modifiables
 - Distinguer à tout moment ce qui est déjà traité (compté, etc.) et ce qui n'est pas encore traité.
- Dans les situations à configurations non modifiables
 - Connaître les propriétés de l'espace graphique (lignes, colonnes) et leur usage pour savoir ce qui est déjà traité et ce qui n'est pas encore traité.

D'une façon générale, il doit prendre en considération les conditions effectives du travail de l'élève : le milieu de la situation de l'élève.

IV - CONCLUSION : LA MATERNELLE ET LES SAVOIRS

En guise de très courte conclusion, revenons à la question initialement posée : « Des savoirs à la maternelle, oui mais lesquels ? ». Je n'ai pas cherché à répondre d'une façon générale à cette question, puisque je n'ai traité que du cas particulier de l'énumération qui, en tant que savoir, présente la particularité de ne pas exister dans l'institution de production et d'institutionnalisation des mathématiques de référence « les mathématiciens ».

De ce fait, j'ai d'abord dû montrer ce que sont les connaissances d'énumération, comment en parler, comment définir ces connaissances, ce qui conduit à une première institutionnalisation d'un savoir d'énumération. Pour cela, je suis partie de difficultés très facilement observables.

Je me suis ensuite interrogée sur l'existence de situations d'énumération indépendantes (ou suffisamment indépendantes) d'autres connaissances. Je n'ai pas pour autant considéré ces situations issues de l'ingénierie comme étant directement les outils du professeur dans la transmission de l'énumération, et j'ai alors cherché quelles étaient les catégories descriptives qui pouvaient permettre au professeur d'accéder à une intelligibilité des nombreuses situations dans lesquelles les connaissances d'énumération interviennent. De telles catégories, associées à la connaissance des situations issues de l'ingénierie, me semblant permettre de « négocier des contrats

didactiques raisonnables » (en référence à la citation de Guy Brousseau, 1984, qui se trouve dans le paragraphe II - 1).

Il me semble que nous sommes typiquement dans le cas de connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (Ball, Thames, & Phelps, 2008 ; Clivaz, 2011), qui constituent une catégorie de connaissances du professeur dont l'énumération n'est qu'un exemple paradigmatique, dans la mesure où cette connaissance de l'énumération ne peut pas être confondue avec une « connaissance mathématique commune » (Id.).

D'autres savoirs mathématiques plus ou moins transparents, correspondant ou non à des savoirs reconnus dans l'institution des mathématiques, sont sans doute à mettre en évidence à la maternelle, le nombre comme mémoire de la position (qui est pourtant dans les programmes) en est sans doute un (voir Margolinas & Wozniak, 2012, chapitre 2 et la thèse d'Agnès Surjous-Malet, en cours).

[retour sommaire](#)

V - BIBLIOGRAPHIE

- Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In M. Bailleul (Ed.), *IXe École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139). Houlgate: IUFM de Caen et ARDM
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407
- Briand, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections*. Université de Bordeaux I, Bordeaux, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00494623>.
- Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 41-76
- Briand, J., Lacave-Luciani, M.-J., Harvouët, M., Bedere, D., & Goua de Baix, V. (2000). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N, Numéro spécial maternelle, approche du nombre, T1*, 123-138
- Briand, J., Loubet, M., & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris Hatier.
- Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. *La mathématique à l'Ecole Élémentaire* (pp. 428-442). Paris APMEP, http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Processus_de_mathematisationVO.pdf.
- Brousseau, G. (1978). L'observation des activités didactiques. *Revue Française de Pédagogie*, 45, 130-140, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515106>.
- Brousseau, G. (1984). *L'enseignement de l'énumération*. Paper presented at the International Congress on Mathematical Education. from <http://guy-brousseau.com/2297/1%E2%80%99enseignement-de-1%E2%80%99enumeration-1984/>
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Clivaz, S. (2011). *Analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de doctorat en sciences de l'éducation, Faculté des sciences de l'éducation, Genève, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00626935>.
- Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(2-3), 221-270
- Douglas, M. (2004). *Comment pensent les institutions* (A. Abeillé, Trans.). Paris: La découverte.
- Emprin, F., & Emprin, F. (2010). Premières compétences pour accéder au dénombrement. In J.-L. Durpaire & M. Mégard (Eds.), *Le nombre au cycle 2* (pp. 23-34). Poitiers: Scérén
- Gilbert, E. (2012). *L'impact des entretiens de conseil pédagogique sur les modifications de pratique des maîtres dans un domaine particulier : l'énumération*. Master International Francophone des Métiers de la Formation, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand
- Goody, J. (1979). *La raison graphique* (J. Bazin & A. Bensa, Trans. 1977 ed.). Paris: Les éditions de minuit.
- Goody, J. (1986). *La logique de l'écriture. Aux origines des sociétés humaines*. Paris: Armand Colin.
- Joigneaux, C., Laparra, M., & Margolinas, C. (2012). *Une dimension cachée du curriculum réel de l'école maternelle: la littérature émergente?* Actes de Colloque sociologie et didactiques, Lausanne, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00738656>.
- Laparra, M., & Margolinas, C. (2009). Le schéma: un écrit de savoir? *Pratiques*, 143-144, 51-82
- Laparra, M., & Margolinas, C. (2010). Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. *Pratiques*, 145-146, 141-160, http://www.pratiques-cresf.com/p145_la1.pdf.
- Margolinas, C. (2010). Recherches en didactiques des mathématiques et du français: par-delà les différences. Table ronde - Recherches et didactique. *Pratiques*, 145-146, 21-36
- Margolinas, C., & De Redon, M.-C. (2008). Connaissances naturalisées dans le champ du numérique à l'articulation école maternelle / école primaire. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques* (pp. cédérom). Grenoble: La pensée sauvage

- Margolinas, C., & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires* (pp. 19-32). Rennes: Presses universitaires de Rennes
- Margolinas, C., & Rivière, O. (2008). *Les dessous du numérique*. Actes de XXXVème colloque national des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques, Bombannes
- Margolinas, C., & Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique*. Bruxelles: De Boeck.
- Margolinas, C., Wozniak, F., Canivenc, B., De Redon, M.-C., & Rivière, O. (2007). Les mathématiques à l'école ? Plus complexe qu'il n'y paraît ! Le cas de l'énumération de la maternelle... au lycée *Bulletin de l'APMEP*, 471, 483-496
- Neyret, R. (1995). *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants: nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts de Formation des Maîtres*. Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I, Grenoble
- Perrin-Glorian, M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développements, perspectives. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 97-147). Grenoble La Pensée Sauvage

VI - ANNEXE

Vous trouverez dans le cédérom les clips vidéo tournés dans le cadre du projet Démathé de l'INRP montrés lors de la conférence (annexes 1, 2 et 3) ou cités dans le texte (annexes 4 et 5).

1 Annexe 1

Clip de la consigne de la situation « les sucres »

2 Annexe 2

Clip de l'échec d'une élève de CE1 (Olivia) avec 15 sucres

3 Annexe 3

Clip de la réussite d'une élève de MS (Jena) avec 11 sucres

4 Annexe 4

Clip de la réussite d'une élève de GS (Audrey) avec 15 sucres (la vidéo démarre alors que les 5 sucres à la droite de l'élève ont déjà été énumérés)

5 Annexe 5

Clip de la réussite d'un élève de CP (Alexandre) avec 15 sucres (la vidéo démarre alors que les 5 sucres à la droite de l'élève ont déjà été énumérés). [retour sommaire](#)

DES SCENARIOS PORTANT SUR L'UTILISATION D'ARTEFACTS DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES A L'ECOLE PRIMAIRE

Michela MASCHIETTO

Chercheur, Université de Modena e Reggio Emilia
UFR d'Éducation et Sciences Humaines
Laboratoire des machines mathématiques
michela.maschietto@unimore.it

Maria G. BARTOLINI BUSSI

Professeur des Universités, Université de Modena e Reggio Emilia
UFR d'Éducation et Sciences Humaines
Laboratoire des machines mathématiques
bartolini@unimore.it

Résumé

Le texte présente deux exemples de scénarios pour l'apprentissage du nombre où le recours à des artefacts concrets joue un rôle clé. Ces scénarios ont été mis au point suivant la méthodologie du laboratoire de mathématiques, fondée sur les cadres théoriques de la médiation sémiotique et de l'approche instrumentale. L'objectif didactique est la construction, par les élèves, des mathématiques véhiculées par l'artefact sous la conduite de l'enseignant, ce dernier ayant un rôle crucial de médiateur culturel. Les artefacts considérés sont un boulier géant à l'école maternelle et la machine arithmétique 'Zero+1' (appelée 'pascaline') à l'école élémentaire.

Un artefact est un objet matériel réalisé par l'homme pour être utilisé. Un artefact est un objet dont la forme est justifiée par la prestation à laquelle il était destiné, même avant sa réalisation effective. Les artefacts présupposent un projet d'utilisation, un but et par conséquent une intelligence capable d'activité créatrice. L'observation que chaque utilisation d'un artefact (une machine, un ordinateur, etc.) a un effet sur le monde extérieur, mais en même temps peut favoriser des processus cognitifs complexes de l'utilisateur. En particulier, Norman (1993) utilise la locution « artefacts cognitifs » pour souligner le rôle que n'importe quel outil, soit matériel, soit symbolique, peut avoir dans le développement des potentialités cognitives de son utilisateur. En plus, il met en évidence deux processus fondamentaux de la pensée, non exclusifs : la « cognition d'expérience » et la « cognition réfléchie ». La modalité d'expérience comporte une réaction immédiate et sans effort appréciable à des stimuli extérieurs, les processus de pensée réfléchie conduisent à la comparaison, à des idées et des réponses nouvelles.

Ce texte considère deux exemples d'utilisation d'artefacts en didactique des mathématiques, à l'école maternelle et à l'école primaire. Il est structuré en six sections. Après avoir présenté l'idée de laboratoire de mathématiques (où les deux exemples ont été développés) dans la première section, on discute les éléments essentiels des cadres théoriques sous-jacents dans la deuxième. La troisième section est consacrée au lien entre théorie et pratique professionnelle. La quatrième section expose l'exemple du boulier géant, alors que le deuxième exemple concernant la machine arithmétique

Zero+1 est présenté dans la cinquième section. Les conclusions constituent la sixième et dernière section.

I - LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

L'idée de laboratoire de mathématiques a ses racines dans les études que pédagogues, psychologues et éducateurs (comme John Dewey (1859-1952), Edouard Claparède (1873-1940) et Maria Montessori (1870-1952)) ont répandues à la fin du XIX^{ème} siècle. Dans la même période, plusieurs mathématiciens en Europe et aux États-Unis commencèrent à échanger leurs réflexions sur l'enseignement des mathématiques et à mettre en discussion certaines pratiques d'enseignement, comme les cours magistraux. Dans l'esprit de l'époque, John Perry (1850-1920) proposa une méthode didactique nouvelle, appelée *Practical Mathematics* (Giacardi, à paraître). Il soutenait que les mathématiques devaient être enseignées "with experiment and common-sense reasoning" (cité dans Giacardi, ibidem). En France, une contribution importante a été donnée par Émile Borel (1871-1956), qui souhaita la création d'ateliers de mathématiques dans les établissements scolaires pour « amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne » (Borel, 1904). En Allemagne, un grand défenseur de l'utilisation des modèles matériels fut Felix Klein (1849-1925), qui en décrivit certains dans son ouvrage « Mathématiques élémentaires d'un point de vue supérieur » (Bartolini Bussi, Masami & Taimina 2010). En Italie, Giuseppe Vailati (1863-1909) contribua à ce mouvement culturel avec son idée d'école-laboratoire (Giacardi, à paraître), conçue comme un espace où les élèves pouvaient faire des expériences, se poser et résoudre des problèmes sous la conduite de l'enseignant, ainsi que se mettre à l'épreuve. Giacardi (ibidem) souligne que Vailati rêvait d'une méthodologie d'enseignement fondée sur la résolution de problèmes, la production de conjectures et d'argumentations, avec le but de construire des significations mathématiques, en référence à la structure théorique des mathématiques. En ce sens, son idée était plus large que celles de ses collègues cités auparavant.

L'idée de laboratoire de mathématiques a été reprise à des moments divers dans les réflexions sur l'enseignement des mathématiques (Maschietto & Trouche 2010). Dans le panorama actuel, la référence à une méthodologie didactique relevant du laboratoire de mathématiques est présente dans les documents nationaux de divers pays européens, et même dans des documents de la Commission Européenne. Dans la situation spécifique de l'Italie, le laboratoire de mathématiques a été proposé dans les documents de la Commission de l'Union Mathématique Italienne (UMI-CIIM) chargée de la rédaction d'indications pour le curriculum des mathématiques pour tout niveau scolaire. Dans le document pour l'enseignement secondaire (AA.VV. 2004), le laboratoire de mathématiques est défini « comme une série de suggestions méthodologiques » finalisées par la construction de significations mathématiques. Il est caractérisé par le recours aux outils (par exemple, logiciels, calculatrices, objets manipulables, ...) dans le travail mathématique et par l'interaction entre pairs (élèves) et avec l'expert (enseignant).

Pour étudier le laboratoire comme dispositif didactique, il est utile de le considérer comme un espace phénoménologique d'enseignement et d'apprentissages structuré par l'utilisation de technologies où se mettent en place des processus complexes (Chiappini & Reggiani 2004). Les technologies peuvent être numériques, ou mécaniques 'classiques' (comme les machines mathématiques, Bartolini Bussi & Maschietto 2006).

II - RÉFÉRENCES THEORIQUES

La didactique avec les artefacts que nous allons aborder dans ce texte repose sur des références théoriques où la notion d'artefact est centrale, comme l'ergonomie cognitive et la psychologie vygotskienne. Du premier domaine on considère l'approche instrumentale (Verillon & Rabardel 1995) portée en didactique des mathématiques par Artigue (2002), Trouche (2003) ; dans une perspective post-vygotskienne, on se réfère à la théorie de la médiation sémiotique développée par Bartolini Bussi & Mariotti (2008).

1 Approche instrumentale

L'approche instrumentale repose sur la distinction entre artefact et instrument. Un artefact est un objet matériel ou abstrait, déjà produit par l'activité humaine, et destiné à soutenir des activités nouvelles dans la réalisation d'une tâche (selon cette acception, une calculatrice est un artefact, un algorithme pour résoudre des équations quadratiques est un artefact), il est donné à un sujet. Un instrument est ce que le sujet construit à partir de l'artefact ; il est surtout subjectif, lié à l'activité du sujet et développé quand un problème est donné à résoudre.

Le développement d'un instrument, appelé genèse instrumentale, est un processus complexe, dépendant des caractéristiques de l'artefact (ses potentialités et ses contraintes) et de l'activité du sujet, ses connaissances et sa façon de travailler. La genèse instrumentale a deux composantes (Figure 1) : l'instrumentalisation (relative à l'artefact, à la découverte et à la sélection des commandes, à la personnalisation de l'objet) et l'instrumentation (relative à l'émergence et à l'évolution des schèmes pour la réalisation d'un type de tâche ou d'un ensemble de types de tâches) (Trouche 2003). Un instrument est donc composé d'un artefact (où une partie d'un artefact) et des schèmes d'utilisation du sujet lui permettant d'accomplir une tâche et contrôler son activité.

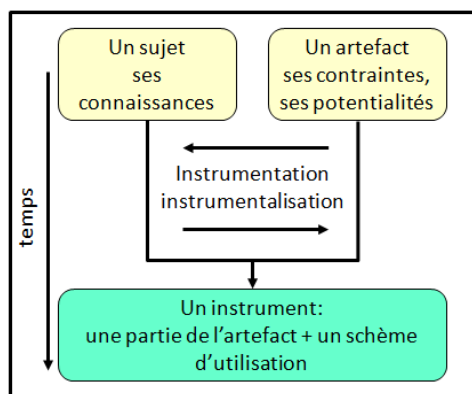


Figure 1. La genèse instrumentale

En reprenant Norman (1993), il faut prendre en compte que la présence de schèmes d'utilisation, même si adéquats à la tâche à résoudre, peut se configurer comme une « cognition d'expérience », qui ne contribue pas à augmenter les connaissances disciplinaires des élèves. Meira (1998) souligne cette possibilité en retenant l'outil « opaque » par rapport au savoir qu'il contient. Pour que le moyen devienne « transparent », c'est-à-dire pour qu'il sollicite des processus de « pensée réfléchie », les tâches que l'enseignant assigne et les modalités à travers lesquelles il promeut la comparaison des solutions proposées des élèves sont fondamentales.

2 Théorie de la médiation sémiotique

La théorie de la médiation sémiotique se fonde sur les trois éléments fondamentaux de la psychologie vygotskienne : la zone de proche développement, l'internalisation (qui est

conduit par des processus sémiotiques) et la médiation sémiotique. Elle se propose de décrire, de comprendre et de favoriser le processus qui commence avec l'utilisation par un élève d'un artefact, en relation avec un savoir mathématique, et conduit à son intériorisation par cet élève.

Pour le terme de médiation, Bartolini Bussi et Mariotti (2008) renvoient à la définition de Hasan pour mettre en évidence la complexité du processus : le terme médiation dérive du verbe *mediate* et se réfère à un processus avec une structure sémantique complexe, incluant les participants et le contexte qui sont importants dans ce processus :

- Quelqu'un qui fait la médiation, le médiateur ;
- Quelque chose qui est *medié*, le contenu relâché par la médiation ;
- Quelqu'un qui est assujetti à la médiation, le récepteur auquel la médiation apporte des différences ;
- La circonstance de la médiation ;
- Les moyens de la médiation : a) la modalité ; b) le lieu, où la médiation peut se produire.

Dans le cas de la didactique, le médiateur est l'enseignant, et le contenu de la médiation est constitué par les significations mathématiques en jeu dans les situations proposées ; les récepteurs sont les élèves ; la circonstance de la médiation est le processus d'enseignement-apprentissage dans le laboratoire de mathématiques ; les moyens de la médiation relèvent de la gestion didactique (repris dans les cycles didactiques, cf. Figure 3) de l'activité avec les artefacts ; le lieu dans lequel la médiation peut se produire est le laboratoire de mathématiques, en accord avec (AA.VV 2004).

Le cadre théorique est schématisé dans la Figure 2 ci-dessous.

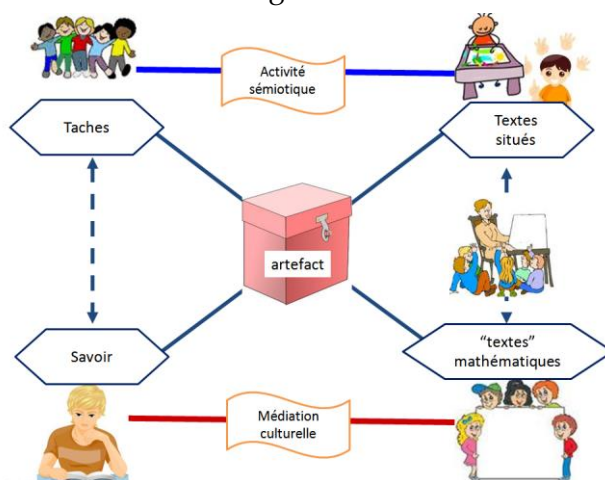


Figure 2. Schéma de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi et *al.* 2012)

Les éléments essentiels de ce cadre théorique sont :

- Des artefacts, liés à un certain savoir mathématique, sont proposés à la classe, après leur analyse sémiotique ;
- Quand un élève agit sur et par un artefact pour faire une action demandée (liée à une tâche), un certain travail sémiotique est sollicité (cf. Figure 2, la composante cognitive est donnée par le triangle tâche-artefact-textes situés) ; dans cette activité, les élèves produisent des signes (textes situés) comme des gestes, des dessins, des expressions verbales, etc.
- Le travail conduit avec les artefacts est structuré par des consignes précises, la seule manipulation d'un artefact n'est pas suffisante à l'acquisition des mathématiques dont il est porteur ;

- L'enseignant repère certains signes produits par les élèves (ou il les introduit, les cas échéants) et guide leur évolution vers des textes mathématiques, c'est-à-dire vers des textes cohérents avec le savoir mathématique (l'enseignant est l'expert qui garantit ce lien) (cf. Figure 2, la composante didactique est représentée par le triangle tâches-textes situés-texte mathématique). Dans ce sens, l'enseignement-apprentissage peut être considéré en termes d'évolution de signes (Mariotti 2009) ;
- L'importance du rôle de l'enseignant, qui « ne peut pas se limiter à rendre explicite la connaissance mathématique que les élèves doivent apprendre. Relier les connaissances mobilisées dans l'accomplissement des tâches avec le savoir mathématique envisagé devient l'objet d'une activité spécifique qui porte sur le développement d'une texture de significations personnelles vers les significations mathématiques correspondantes » (Mariotti 2012).

Quand un enseignant utilise un artefact pour faire construire des significations mathématiques aux élèves, il l'utilise comme un instrument de médiation sémiotique.

Une notion clé pour l'analyse d'un artefact est celle de potentiel sémiotique, défini de la manière suivante : « Il représente le double lien qui peut s'établir entre

- un artefact et les significations personnelles émergeant de son utilisation finalisée ;
- cet artefact et les significations mathématiques évoquées par son usage, reconnaissable comme mathématiques par un expert. » (Mariotti & Maracci 2010)

Dans sa composante didactique, le processus de médiation sémiotique est fondé sur l'implémentation du cycle didactique (Figure 3), constitué de trois types d'activité : activités à petit groupe (ou en binôme) avec l'artefact, activités individuelles (production individuelle de signes) et activités collectives (production sociale de signes), correspondant à des discussions mathématiques (Bartolini Bussi 1996) dans la plupart des cas.

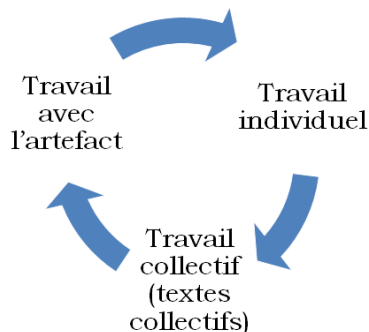


Figure 3. Cycle didactique

Ce cadre théorique pour le laboratoire de mathématiques, élaboré avec la collaboration des enseignants-chercheurs affectés aux groupes de recherche, est la référence pour nos formations d'enseignants, de l'école maternelle à l'enseignement secondaire.

III - THEORIE ET PRATIQUE

Une des questions posées dans les thèmes de ce Colloque concerne la relation entre formation et activité de l'élève. Elle peut être posée en termes de relation entre formation et construction de scénario pour la classe, et rejoint la question très importante sur les relations entre formulation théorique, formation et pratique dans la classe. Dans cette section, nous allons proposer discuter de cette question.

Nous abordons ces questions en faisant référence à deux projets de formation professionnelle : le premier « Enfants qui comptent » (Bartolini Bussi et al. 2012), coordonné par Bartolini Bussi, s'adresse aux enseignants des écoles maternelles de la Mairie de Modena ; le deuxième

fait partie du Projet Sciences et Technologies de la région Emilia-Romagna et s'adresse aux enseignants de l'école primaire à la seconde. Il est constitué de deux phases : la deuxième est en cours, c'est la première qui est ici considérée (et a été coordonnée par Bartolini Bussi et Maschietto (Bartolini Bussi & Maschietto 2010 ; Maschietto 2010)). Nous ne rentrons pas ici dans les détails de ces formations, car nous voulons surtout mettre en évidence les liens entre théorie et pratique.

Le recours au schéma de la Figure 2 met bien en évidence d'une part le travail de l'élève (triangle cognitif pour l'élève, partie supérieure du schéma), d'autre part le double rôle de l'enseignant dans la construction du scénario ou dans son aménagement à partir de ressources disponibles (Figure 4, à gauche), et dans sa réalisation et gestion de la classe (Figure 4, à droite). Nous allons préciser ces deux rôles par la suite.

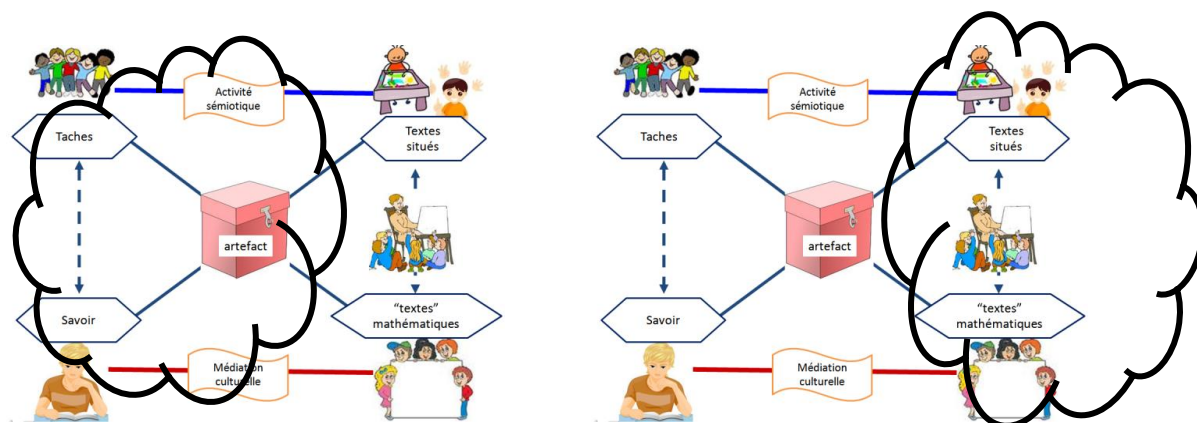


Figure 4. Le double rôle de l'enseignant

1 Construction du scénario

Dans cette phase (Figure 4, à gauche), l'enseignant choisit l'artefact en fonction de son objectif didactique. Dans nos recherches, il s'agit de choisir davantage des artefacts qui ont pu avoir un lien avec l'histoire et la culture mathématique (ou qui sont présents dans des pratiques sociales).

L'interaction avec le cadre théorique (§ II) a permis de définir un plan de 'bonnes questions' pour guider la construction du parcours pour les élèves, c'est-à-dire des consignes à proposer :

1. Qu'est-ce que c'est ?
2. Comment est-il fait ?
3. Que fait-il ? Comment fonctionne-t-il ?
4. Pourquoi ?
5. Que se passe-t-il si... ?

La première question encourage la narration ; elle a surtout été utilisée avec les élèves les plus petits, comme entrée au parcours (§ IV). La deuxième et troisième question prennent en compte la genèse instrumentale de l'élève : la deuxième sollicite des processus d'instrumentalisation, et la troisième la construction de stratégies de résolution susceptibles de devenir des schèmes d'utilisation de l'artefact pour résoudre des tâches particulières. En particulier, la deuxième question porte dans la situation la 'voix' du constructeur, tandis que la troisième porte la 'voix' de l'utilisateur. La quatrième question vise à faire émerger les relations avec les mathématiques, parce qu'il s'agit de justifier l'efficacité de l'utilisation de l'artefact pour accomplir une certaine tâche. Elle sollicite la 'voix' du mathématicien (ou du savoir mathématique). En posant cette question, l'enseignant assume pleinement son rôle de médiateur culturel. La cinquième question concerne plus précisément le *problem solving*. Ces

questions ne représentent pas seulement un support pour la construction du scénario, mais elles correspondent aussi à une partie de l'analyse du potentiel sémiotique de l'artefact. Si l'on se place du côté du savoir, son explicitation constitue le lien « entre l'artefact et les significations mathématiques évoquées par son usage » (§ II.2). Ce volet de l'analyse s'appuie sûrement sur le savoir de l'enseignant. L'analyse se complète par l'étude de formulation de consignes accessibles aux élèves, en termes de « significations personnelles émergeant de son utilisation finalisée » (§ II.2). Dans les deux exemples (§ IV et V), ce type d'analyse sera développé.

La structure du cycle didactique (Figure 3) permet de contrôler l'organisation du temps : par exemple, il suggère qu'il ne faudrait pas consacrer la plupart du temps à des tâches avec l'artefact, parce que l'on risque de mettre en arrière-plan les moments de réflexion personnelle et de construction sociale du savoir, essentiels dans cette approche. D'autre part, le temps d'interaction avec l'artefact ne devrait pas être trop réduit, si l'on considère que le savoir visé est strictement lié aux schèmes d'utilisation que les élèves vont construire. Un scénario peut être composé par l'enchaînement de plusieurs cycles didactiques.

2 Réalisation et gestion en classe

Dans la deuxième phase (Figure 4, à droite), l'enseignant doit gérer le cycle didactique, c'est-à-dire le 'produit' de l'activité des élèves sollicité par les consignes proposées (par exemple, les gestes d'utilisation, les dessins, les dialogues, les textes, ...) et le faire évoluer vers des textes mathématiques, en accord avec l'assertion que les processus d'enseignement et d'apprentissage sont considérés en termes d'évolution de signes (Mariotti 2009). Il doit donc :

- [1] recueillir les éléments des processus d'apprentissage des élèves, repérer les signes fondamentaux (par rapport au savoir visé) et les schèmes d'utilisation,
- [2] porter à un niveau de prise de conscience pour les élèves ce qui apparaît dans leur travail (les textes situés sont strictement liés au contexte et difficilement utilisables par les élèves dans un autre contexte sans l'intervention de l'enseignant).

3 Formation et expérimentations

Dans les deux sections qui suivent (§ IV et V), nous présentons deux exemples de scénario sur le nombre, portant sur l'utilisation d'un boulier géant à l'école maternelle et d'une machine arithmétique à l'école primaire.

En ce qui concerne l'école maternelle, en 2007, une collaboration entre le groupe de coordination des écoles maternelles de la Mairie de Modène et Maria G. Bartolini Bussi a été entamée pour la formation des enseignants de mathématiques. Le projet Mathématiques ainsi proposé rejoignait d'autres projets : Langue italienne, Sciences, Art, Musique, Anglais, Orienteering, Philosophie pour enfants. Chaque projet est confié à un ou plusieurs experts de la discipline et à un pédagogue du groupe de coordination pédagogique. Dans chaque école (22 écoles maternelles), il y a de 6 à 8 enseignants. Dans son établissement, chaque enseignant doit choisir l'un des projets, de façon à devenir l'expert de l'école. Environ 25 enseignants participent au projet de mathématiques.

Au début de chaque année scolaire, le pédagogue et les experts définissent les contenus de la formation pour chaque projet. Il y a une structure commune pour tous les projets, organisés en sessions de 4 heures chacune ; les enseignants, les experts et le pédagogue participent à toutes les sessions, sauf à la troisième.

- 1^{ère} session (au mois d'octobre) : début des activités pour l'année scolaire (formation à niveau adulte) ;
- 2^{ème} session (au mois de novembre) : poursuite et construction de quelques scénarios (pour les enfants de 3, 4 ou 5 ans) ;

- 3^{ème} session (au mois de janvier) : dans chaque établissement scolaire, le pédagogue rencontre les enseignants en petits groupes pour discuter des activités en cours, des problèmes rencontrés, des besoins, des points critiques et des idées innovatrices ;
- 4^{ème} session (au mois de février/mars) : discussion des questions posées lors des rencontres auprès des écoles ;
- 5^{ème} session (au mois de mai) : présentation et discussion de quelques activités réalisées dans les écoles ; petite exposition de matériels produits par les écoles.

Occasionnellement, les divers projets présentent les résultats à tous les enseignants de toutes les écoles. Le projet de mathématiques a montré ses premiers résultats en septembre 2010. Le succès de cette présentation a généré l'attribution d'une experte en documentation multimédia avec l'objectif de produire un rapport multimédia (Figure 5), qui a été complété au mois de juin 2012 et sera présenté au mois d'octobre 2012. Le titre « Enfants qui comptent »¹⁹ joue sur l'ambiguïté du verbe « compter », dans le sens de « dire les nombres » que dans le sens d'« avoir une valeur ». Dans la Section IV, quelques éléments de ce projet seront présentés.



Figure 5. Home page du multimédia « Enfants qui comptent »

En ce qui concerne l'école primaire, une formation continue sur le laboratoire de mathématiques avec les machines mathématiques a été proposée dans le cadre du projet Science et Technologies²⁰, financé par le conseil administratif de la Région Emilia-Romagna, et démarré début 2009 ; la première phase s'est terminée en juin 2010 (Maschietto 2010). La finalité du projet était la diffusion de la pratique du laboratoire de mathématiques, surtout dans l'enseignement secondaire (de la classe de 6^{ème} à la 2^{nde}), même si des professeurs d'école y ont participé. Le dispositif de formation se compose de deux phases : une première phase de formation en présence et une deuxième phase d'expérimentation en classe de scénarios conçus lors de la première phase. Une des séances de formation en présence était dédiée à la machine arithmétique Zero+1, qui sera présentée par la suite. Dans le cadre de ce Colloque, cette machine a été aussi proposée dans l'atelier B3, animé par Michela Maschietto et Sophie Soury-Lavergne (Soury-Lavergne & Maschietto, ces Actes).

¹⁹ <http://istruzione.comune.modena.it/memo/Sezione.jsp?titolo=Bambini%20che%20contano&idSezione=2233>

²⁰ <http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna/risultati-del-progetto/libro-progetto-regionale.html>.

IV - ACTIVITES SUR LES NOMBRES A L'ECOLE MATERNELLE

Dans cette section, nous présentons un extrait du multimédia « Enfants qui comptent » concernant les expérimentations avec un boulier géant.

Au début de la deuxième année du projet Mathématiques (année scolaire 2008/09), toutes les écoles maternelles reçurent un boulier géant, produit par des menuisiers de la Mairie sur la base d'indications fournies par les enseignants. Dans les écoles, traditionnellement, beaucoup d'activités de comptage étaient proposées aux enfants : l'appel des élèves présents (et absents), le comptage du nombre de jours du mois de soleil, de pluie, etc. Les enseignants ont déterminé qu'un artefact exploitable pour aborder ces nombres devait avoir 40 boules ; d'où le choix de construire un boulier de quatre rangs avec dix boules chacun. Ce choix correspond à une *variable didactique* étroitement liée aux activités traditionnelles ; elle pourrait être modifiée dans d'autres situations. Le boulier géant n'a pas été livré assemblé, de sorte que les enseignants pouvaient décider s'ils l'assemblaient avec les enfants (en valorisant les aspects cognitifs et didactiques de cette consigne) ou s'ils le faisaient assembler par des parents ou grands-parents et le montraient déjà prêt aux enfants (en introduisant des consignes additionnelles pour l'exploration de l'artefact). Ces deux possibilités ont été soigneusement discutées avec les enseignants, en croisant des aspects pratiques avec quelques références théoriques. Dans la suite, on propose une brève synthèse de l'analyse *a priori* et *a posteriori*, pour des classes d'enfants de 4 ou 5 ans.

1 La dévolution de la tâche

En accord avec Brousseau (1998), la dévolution d'une tâche est un point délicat et très important de la relation didactique. Pour que les enfants s'engagent dans les problèmes reliés à cet artefact, il a semblé opportun d'introduire une dimension narrative et imaginative pour leur permettre de proposer leurs interprétations. Le début du scénario présente deux cas avec des consignes différentes : le cas où l'artefact est assemblé et l'autre où il n'est pas assemblé (Figure 6).

Pour le cas du boulier déjà assemblé, les enseignants ont entamé des discussions en petit groupe avec des questions du genre : « Qu'est-ce que c'est ? », « Le connaissez-vous ? », « En avons-nous à école ? », « À quoi peut-il servir ? », etc.

Pour le cas du boulier qui n'est pas assemblé, les enseignants ont entamé des discussions en petits groupes avec des questions, comme « Qu'est-ce que nous pourrions construire avec cela ? », « Avez-vous des idées ? », etc. Dans quelques classes, l'exploration des composantes du boulier a conduit à d'autres consignes, d'ordre graphique comme « Dessine toutes les pièces que nous avons » (Figure 7). Dans ce cas, les enfants ont porté beaucoup d'attention aux formes, aux détails et au nombre de boules. Dans quelques classes, le boulier a ensuite été assemblé avec l'aide d'un grand-père qui a interagi avec les enfants pour comprendre comment joindre les composantes.

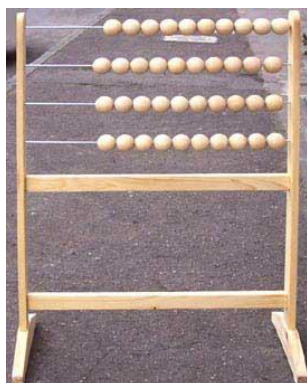


Figure 6. Boulrier assemblé (à gauche) et non assemblé (à droite)

Ce processus n'a pas été difficile (à part pour quelques détails techniques, comme serrer les vis), parce que les enfants de l'école maternelle ont une grande expérience des jeux de construction, même complexes.

2 Le boulrier comme artefact : instrumentalisation

L'observation des composantes du boulrier non assemblé démarre aussi le processus d'instrumentalisation (§ II.1), dans lequel le boulrier est étudié comme objet matériel, composé des parties ayant des relations spatiales particulières entre elles.

Dans le boulrier assemblé, les composantes diverses doivent être identifiées avec des questions spécifiques, toujours lors d'une discussion en petits groupes : « Comment est-il fait ? », « De quoi avons-nous besoin pour en construire un autre ? », « Comment donner aux enfants d'une autre école les instructions pour en construire un identique ? ».

En général, la représentation graphique du boulrier assemblé a mis en évidence un bon niveau de compétences, meilleur que ce que l'on peut trouver avec des enfants plus grands, qui n'avaient cependant pas accompli auparavant l'exploration du boulrier au niveau verbal.

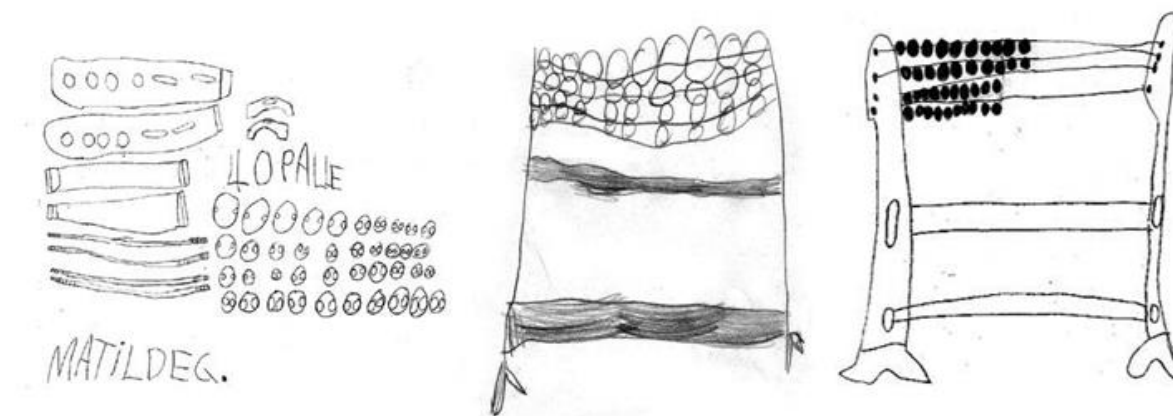


Figure 7. Dessins du boulrier non assemblé (à gauche) et assemblé (au centre et à droite)

3 Le boulrier comme instrument : instrumentation

Le boulrier assemblé peut être déplacé dans la classe pour accompagner la résolution de tâches particulières : par exemple, compter les points dans le jeu des quilles, compter les enfants présents dans la classe, planifier la disposition de la table pour le repas (distribution des enfants sur différentes tables). Dans ce cas, les consignes sont données à un seul enfant chaque fois, mais toujours dans le contexte du petit ou grand groupe ; elles se réfèrent à une situation bien précise : « Comment peux-tu l'utiliser pour compter les points ? », « Comment peux-tu l'utiliser pour compter les enfants présents ? ». De cette manière, des schèmes d'utilisation émergent (§ II.1) : par exemple, compter par rang ou bien compter en déplaçant dans l'ordre une boule de chaque rang (Extrait 1).

Thomas	J'avais deviné hier, c'est le compteur qui sert à compter les enfants et d'autres choses.
Giovanni	Il sert à compter les nombres.
(...)	
Ens.	Avec ce boulrier, pouvons-nous compter seulement les enfants ?
Thomas	Nous pouvons compter toutes les autres choses, par exemple combien de feuilles nous avons.
Luca	Combien de dents.
Matteo	Combien de chaises.

Ens.	Comment faisons-nous pour compter les chaises?
Matteo	[Il prend des chaises et les met les unes sur les autres] Je compte les chaises avec les doigts,
doigts,	d'abord je touche avec le doigt une chaise, puis je vais déplacer une boule.

Extrait 1. Instrumentation de l'abaque

4 Le boulier comme instrument de médiation sémiotique : la construction de significations mathématiques

La résolution d'une tâche spécifique avec le boulier conduit à réfléchir sur « pourquoi » le boulier aide à résoudre des problèmes arithmétiques (§ II.2). Dans ce cas, ce sont les significations mathématiques intrinsèquement incorporées dans le boulier qui sont mises en jeu, c'est-à-dire :

- *Partition* : l'enfant compte les boules en les déplaçant sur la barre et garde en mémoire le comptage par la séparation des boules comptées et des boules à compter ;
- *Suite des premiers ordinaux* : l'enfant répète la suite des ordinaux pendant le comptage ;
- *Correspondance biunivoque* : le déplacement des boules est effectué en prononçant la suite des nombres, l'enfant déplace une seule boule pour chaque mot-nombre ;
- *Cardinalité* : le dernier ordinal prononcé représente la cardinalité de l'ensemble des boules comptées ;
- *Écriture des nombres en base dix* : la structure du boulier incorpore l'invention de l'écriture positionnelle en base dix (chaque rang est une dizaine).

Il n'est pas facile de faire émerger et de prendre conscience de ces significations. On peut s'approcher d'une façon indirecte (« en acte », selon Vergnaud 1990), par le recours à des poupées animées par l'enseignant (Figure 8) qui accomplissent des erreurs de types divers pendant le comptage ; l'enseignant invite ensuite les enfants, en petits groupes, à les corriger s'ils ne sont pas d'accord et à expliquer les raisons des corrections.



Figure 8. Le loup bête qui ne sait pas compter

5 Problem posing et problem solving

La créativité et la maîtrise des thèmes par les enseignants rendent ceux-ci capables de gérer des interventions inattendues de la part des élèves, de les interpréter par rapport aux références théoriques. Par exemple, dans une classe, l'enseignant a reconnu un cas d'instrumentalisation (§ II.1) lorsque les enfants ont dû inventer un cinquième rang de boules. Dans cette classe, il y avait cinq tables pour le déjeuner ; les enfants réussissaient à représenter le nombre des compagnons de table sur quatre tables, en employant les quatre rangs disponibles dans le boulier. Ils ont ajouté, par terre, un rang de dix petits cubes, pour enregistrer aussi la cinquième table.

6 D'autres artefacts

Le boulier géant a été l'artefact paradigmatique du projet Mathématiques pendant quelques années. Toutefois, les enseignants, dans les écoles et dans les rencontres de formation, ont aussi construit d'autres scénarios relatifs à d'autres artefacts, comme les mains pour compter, les blocs, des jouets technologiques, etc. Le cadre théorique de référence et le scénario d'exploration sont semblables, même s'il reste nécessaire de les adapter aux âges des enfants. Tout le matériel des cinq années de travail (références théoriques, interviews avec les enseignants, protocoles individuels et collectifs, photo, vidéo, dessins, etc.) est recueilli dans le produit multimédia « Enfants qui comptent ».

V - UNE MACHINE A CALCULER A L'ECOLE PRIMAIRE

Dans cette section, on considère un scénario concernant une machine arithmétique, fonctionnant comme un compteur. Dans la première partie de la section, on conduira l'analyse de la machine en cohérence avec les éléments théoriques exposés ci-dessus (§ II). Dans la seconde partie, on présentera quelques éléments des expérimentations conduites en CM1.

Cette machine a été proposée dans l'atelier B3 de ce Colloque (Soury-Lavergne & Maschietto, ces Actes).

1 Analyse de la machine Zero+1

1.1 La structure de la machine

L'analyse de la structure de l'artefact se réfère à la question « Comment la machine Zero+1 est-elle faite ? » (ce qui correspond à un premier pas du processus d'instrumentalisation, § II.1).

Zero+1²¹ (Figure 9) est un outil en plastique (27 cm x 16 cm) composé d'une base verte avec cinq roues dentelées ; trois roues jaunes (A, B et C, Figure 9 à droite) sont alignées sur le bord inférieur et deux roues orange (E et D, Figure 9 à gauche) sont alignées sur le bord supérieur. Chaque roue a dix dents (alluchons) ; les chiffres arabes sont écrits sur chaque alluchon des roues jaunes, tandis qu'une flèche mauve est solidaire avec chaque roue orange. Au-dessous des roues A, B et C, il y a des prismes rouges ('petits triangles') pointant un alluchon ; une virgule déplaçable (qui, par défaut, est en bas à droite de la base) peut occuper des positions intermédiaires entre les roues jaunes. Toutes les roues peuvent tourner dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire. Les roues A, B et C ont un onglet qui force à la rotation d'une dent à la fois.

En partant de la configuration initiale (000) au-dessus des triangles rouges, on peut tourner la roue A dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'à (009) sans que d'autres roues ne tournent. Dans le passage de l'alluchon 9 à l'alluchon 0 de la roue A (qui a ainsi fait une rotation complète), la roue D pousse la roue B (cf. Figure 9 au centre), qui affiche ainsi la dent 1 au-dessus de son triangle rouge. La roue D (comme la roue E) est une roue auxiliaire pour transmettre le mouvement. Quand cela se passe, la machine apporte une certaine résistance par rapport à l'action sur les autres crans et on entend un bruit. De même, quand on passe de (099) à (100), à la différence que toutes les roues tournent et le bruit est plus fort.

²¹ Elle est produite par Quercetti (www.quercetti.it) en Italie.



Figure 9. La machine arithmétique Zero+1 (à gauche et au centre), la Pascaline de Pascal (à droite)

1.2 Potentiel sémiotique de la machine

Bartolini Bussi et Mariotti (2008) considèrent trois éléments dans l'étude du potentiel sémiotique d'un artefact :

- [1] le contenu mathématique embarqué,
- [2] les dimensions historique et culturelle,
- [3] les schèmes d'utilisation.

Dans ce type d'analyse, on vise à décrire les liens entre un savoir, l'artefact considéré, et les schèmes d'utilisation à construire pour aborder certaines tâches.

Contenu mathématique

Zero+1 est une machine arithmétique permettant d'effectuer les quatre opérations arithmétiques fondamentales. Elle permet la représentation symbolique des nombres en écriture décimale positionnelle jusqu'à trois chiffres : chaque alluchon des roues A, B et C représente un chiffre. Par rapport à la Figure 9, la roue A représente le chiffre des unités, la roue B celui des dizaines et la roue C les centaines.

L'axiomatique de Peano²² (Peano 1957) définit l'ensemble des nombres naturels sur la base de trois termes primitifs (nombre, zéro et successeur) et de cinq postulats concernant ces trois termes. La suite des nombres naturels peut être ainsi engendrée par itération de la fonction « +1 » à partir du nombre zéro. Les opérations d'addition et soustraction sont ainsi définies par récurrence, comme opérations unaires.

Par rapport à d'autres artefacts, comme le boulier, Zero+1 présente les dix chiffres et se fonde sur un système de représentation des nombres. Du point de vue épistémologique, cet élément est très important pour rapport au signifié du zéro, qui, même s'il indique un manque d'unité, a une valeur d'étiquette sur un alluchon et de position dans l'écriture des nombres.

Dimensions historique et culturelle

La machine Zero+1 est inspirée des machines à calculer²³ (surtout pour additionner), comme la fameuse Pascaline inventée par Blaise Pascal (1623-1662) en 1642 (Figure 9). D'autres éléments historiques sont présents dans (Soury-Lavergne & Maschietto, ces Actes). D'après

²² Giuseppe Peano (1858-1932).

²³ Plantevin & Le Brusq (ces Actes) dans leur atelier présentent des machines pour les multiplications, issues de l'exposition « Multipliez ! » http://irem.math.univ-brest.fr/expo_2012.html

cette référence historique, Zero+1 est appelé 'pascaline' par les élèves qui ont travaillé avec elle. Dans la suite, les deux noms seront indifféremment utilisés.

Schémes d'utilisation

L'analyse des schémas d'utilisation de la machine consiste à répondre à la question « Comment la machine peut-elle être utilisée pour accomplir une tâche spécifique ? » (processus d'instrumentation, § II.1). Dans cette analyse, on va faire le lien entre les modes d'utilisation et un certain savoir mathématique. Cela correspond à une partie du double lien caractérisant le potentiel sémiotique de l'artefact. L'autre partie est définie par rapport aux consignes accessibles aux élèves qui devront s'articuler avec l'artefact.

La pascaline peut être utilisée pour : compter, représenter les nombres naturels au moins jusqu'à 999, additionner et soustraire, multiplier et diviser.

Presque tous les schémas d'utilisation répertoriés reposent sur une action de base, qui représente le principe de fonctionnement de la pascaline : la rotation d'une dent (alluchon) à la fois. Le comptage est fait par itération de l'action basique à partir de la roue A des unités (cf. Figure 9), dans le sens des aiguilles d'une montre pour le comptage en avant, et dans le sens contraire pour le comptage en arrière. À la fin, le nombre est lu en correspondance avec les alluchons placés au-dessus des triangles rouges. De cette manière, la suite des nombres naturels est obtenue par itération de la fonction « +1 », en accord avec l'axiomatique de Peano. Pour l'écriture des nombres, on renvoie à la Section V de ce texte, et les opérations arithmétiques sont discutées dans le texte de l'atelier (Soury-Lavergne & Maschietto, ces Actes).

2 Expérimentations

Les expérimentations (Casarini & Clementi 2010) dans le cadre du projet Sciences et Technologie ont été construites autour des 'bonnes questions' (§ III.1) discutées pendant la formation en présence et sur des ressources (Canalini, Ferri & Maschietto on-line) sur la pascaline issues des expérimentations précédentes (Canalini Corpacci & Maschietto 2011, 2012 ; Ferri & Maschietto 2007). Nous présentons un scénario de trois séances expérimenté en CM1 sur le système d'écriture des nombres.

2.1 Découverte et exploration

La première séance est centrée sur la découverte et l'exploration de la pascaline, avec la structure suivante : travail en binôme avec une pascaline sur la structure de la machine (Comment est-elle faite ?) et sur ses fonctionnalités (Que fait-elle ?) ; discussion collective, où la machine est décrite et des hypothèses sur son fonctionnement sont formulées ; travail individuel de représentation de la machine.

Pendant la discussion collective, l'enseignant fait émerger les éléments du travail en binôme, ce qui correspond à faire partager à tous les élèves les différentes explorations et les signes produits dans l'activité. Cela permet à l'enseignant de repérer des signes à faire évoluer.

L'Extrait 2 montre un exemple de description de la machine (ce qui correspond à un texte situé), verbalisé lors de la discussion collective. D'autres élèves ne repèrent pas les engrenages, mais ils interprètent les roues comme des fleurs et les alluchons comme des pétales. Pour d'autres, les roues sont des horloges. Ce sont des exemples des diverses significations personnelles des élèves (§ II.2).

Filippo	Il y a des engrenages.
Ens.	Décrivons les engrenages.
Alice	Deux orange et trois jaunes. Ils ont des pointes avec des nombres de zéro à neuf. Il y a des triangles rouges et une virgule que l'on peut déplacer et des flèches mauves.

Extrait 2. Comment la machine est-elle faite ?

L'Extrait 3 correspond à la question du fonctionnement de la machine. Les interventions de l'enseignant visent à favoriser l'argumentation et communication entre les élèves. On remarque que les élèves, comme dans l'Extrait 2, parlent de nombres sur les alluchons.

Angela	La roue orange fait tourner la jaune...
Ens.	Laquelle ?
Matteo	La suivante.
Ens.	Elle fait tourner la suivante et Mattia a dit qu'elle la fait tourner... comment?
Mattia	Par la flèche.
Angela	Et le numéro change.
Matteo L.	En plus, on peut choisir de tourner ces numéros dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans l'autre sens.

Extrait 3. Comment la machine fonctionne-t-elle ?

La discussion collective est le moyen pour l'enseignant de faire formuler aux élèves leurs hypothèses sur l'usage et le fonctionnement de la machine (Extrait 4). On remarque la richesse du langage (décoder les nombres, compter, trouver les unités), qui sous-entend des significations diverses pour les élèves et des schèmes d'utilisation à construire, mais aussi le travail évoqué précédemment, à la charge de l'enseignant, pour lier l'artefact aux significations mathématiques et faire évoluer les productions vers des textes mathématiques.

Ens.	Cette machine sert à ...
Amine	À décoder les nombres
Ins.	Décoder les nombres ?
Alice	Compter les décimaux. (...)
Luca	Pour essayer de trouver les unités.
Ens.	Êtes-vous d'accord ?
Emma	À compter.
Matteo	Elle peut aussi servir à faire des opérations.
Ens.	On verra si cela est vrai.
Alex	À faire des opérations avec dix, cent, mille.
Federico	Selon moi, elle sert à former les nombres de trois chiffres.
Shady:	À mon avis, la pascaline sert à calculer.
Matteo V.	La pascaline sert à comprendre les chiffres et les nombres.

Extrait 4. À quoi la machine sert-t-elle ?

Pendant l'exploration, les élèves découvrent l'automatisme de la pascaline, la retenue (Extrait 5), mais le travail pour la transparence de l'artefact reste à faire.

Elmehdi	La flèche se baisse quand [<i>le triangle rouge</i>] est sous le neuf et après je mets le zéro, la flèche fait tourner celle d'après.
(...)	
Marius	Quand j'ai tourné dix fois, alors [<i>la flèche mauve</i>] fait tourner celle d'après.
Alex	Quand le zéro arrive, la flèche fait tourner la roue d'après.

Extrait 5. Ce que la machine fait

En accord avec le cadre théorique et la structure du cycle didactique, l'enseignant propose un travail individuel (dessiner la machine) qui permet aux élèves de représenter leur première conceptualisation de la machine et de revenir sur le travail fait (Figure 10). Du côté de l'enseignant, les dessins constituent d'autres textes situés, exploitables dans la suite.

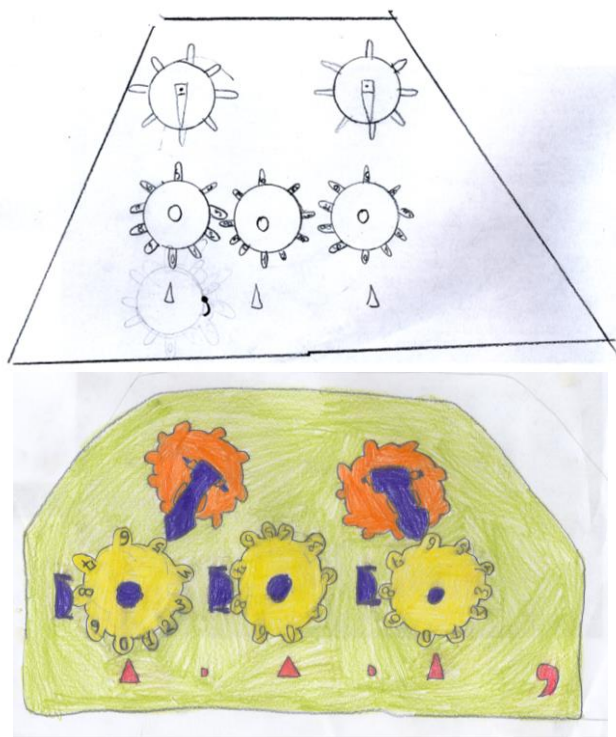


Figure 10. Dessins de la pascaline

2.2 Analyse de la machine et sa construction en papier et attaches parisiennes

Dans la deuxième séance, compte tenu des différents dessins produits, les élèves travaillent sur des représentations de la machine qui contiennent des erreurs. Ensuite, l'enseignant gère une discussion collective sur le travail fait, et enfin propose aux élèves un travail en binôme de reconstruction de la pascaline en papier, pour vérifier l'organisation des composantes et le sens de rotation des roues (Figure 11).

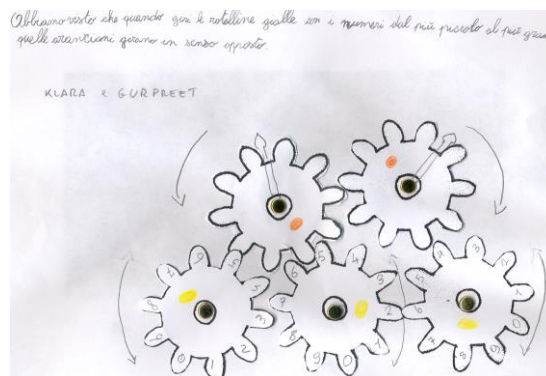


Figure 11. Travail en binôme pour la reconstruction de la pascaline

2.3 Les schèmes d'utilisation pour l'écriture des nombres

La troisième séance a la structure suivante : travail individuel sur la consigne « écrire le nombre 13 sur la machine » et expliquer comment faire pour l'écrire. Dans la discussion qui suit ce travail, l'enseignante vise à la construction sociale des schèmes d'utilisation pour l'écriture des nombres.

Les deux schèmes d'utilisation (Soury-Lavergne & Maschietto, ces Actes), écriture par itération (Extrait 6) et par décomposition (Extrait 7) apparaissent dans les fiches des élèves. On peut identifier les différents niveaux des élèves dans leurs écrits.

On doit tourner la première petite roue et le nombre change, tu dois le tourner au moins 13 fois dans le sens des aiguilles d'une montre et le 13 se forme sur la petite machine 0+1.

Pour arriver à 13, il faut tourner le premier engrenage jaune à droite. Pour arriver au nombre 1, il faut faire faire un tour au premier engrenage de telle façon à ce que le deuxième déclenche le 1 et puis tu tournes le premier engrenage sur le 3 et le jeu est fait.

Extrait 6. Écriture par itération

On prend la pascaline, puis dans la roue jaune des unités on déplace les pétales de 0 à 3 en faisant trois clics. Puis, dans la roue jaune des dizaines, on déplace le pétale d'un clic, c'est-à-dire de 0 à 1. Et le 13 est formé.

Pour mettre le nombre 13 sur la machine, il faut que l'engrenage en bas à droite pousse la dent avec le nombre 3 où il y a le petit triangle rouge. Pour mettre le nombre 1, tu dois déplacer l'engrenage en bas au centre, le déplacer dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'au 1 ne sort pas. Le dernier engrenage est laissé à 0.

Extrait 7. Écriture par décomposition

VI - CONCLUSIONS

Dans ce texte, nous avons présenté les références théoriques et deux exemples de processus d'enseignement et apprentissage avec artefacts, dans le cadre du laboratoire de mathématiques. Nous avons voulu apporter nos contributions à la question des relations entre formation et travail sur le terrain d'une part, sollicitation et gestion de l'activité des élèves d'autre part. Les deux exemples mettent en évidence la formulation de consignes permettant aux élèves de faire émerger des significations personnelles liées à l'utilisation de l'artefact pour accomplir une tâche, mais aussi le travail à la charge de l'enseignant pour lier ces significations aux mathématiques. Pour cette tâche, l'analyse du potentiel sémiotique de l'artefact est un outil essentiel.

Les deux artefacts ici considérés, même s'ils sont différents et utilisés à des niveaux scolaires divers, partagent une partie du savoir mathématique embarqué, ce qui constitue un lien fort entre eux. Avec d'autres artefacts (comme l'abaque, les bâtonnets), ils peuvent être considérés membres d'un ensemble d'artefacts disponibles pour l'enseignant pour l'écriture des nombres naturels (Bartolini Bussi & Maschietto 2008). La comparaison des analyses de leurs potentiels sémiotiques met en évidence les différences réciproques et justifie aussi pourquoi il est nécessaire de considérer un ensemble d'artefacts plutôt qu'un artefact isolé. Le boulier, même s'il s'inscrit dans le micro-espace, peut générer à l'école primaire d'autres schèmes d'utilisation (et donc significations mathématiques) par des consignes appropriées, alors que la pascaline peut être proposée au collège avec des consignes qui catalysent les processus de formulation de conjectures et d'argumentation.

Remerciements

Nous remercions le conseiller municipal délégué à l'instruction Adriana Querzè, les pédagogues Maria Teresa Corradini et Maria Vittoria Vecchi, la documentaliste du multimédia Susanna Stanzani, toutes les enseignantes du projet « Enfants qui comptent » ; les enseignantes Rita Canalini Corpacci, Antonella Casarini, Fiorenza Clementi, Franca Ferri et Valeria Pradelli.

VII - BIBLIOGRAPHIE

AA.VV. UMI (2004) In G. Anichini, F. Arzarello, L. Ciarrapico, & O. Robutti (Eds.), *Matematica 2003. La matematica per il cittadino*. Lucca: Matteoni stampatore.

ARTIGUE M. (2002) Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245-274.

BARTOLINI-BUSSI M.G. (1996) Mathematical discussion and perspective drawing in primary school, *Educational Studies in Mathematics*, 31 (1-2), pp. 11-41.

BARTOLINI BUSSI M.G. ET AL. (2012) *Bambini che contano*. Multimédia
<http://istruzione.comune.modena.it/memo/Sezione.jsp?titolo=Bambini%20che%20contano&idSezione=2233>

BARTOLINI BUSSI M.G. & BORBA M. (Eds) (2010) Historical aspects of the use of technology and devices in ICMEs and ICMI, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 42 (1).

BARTOLINI BUSSI M.G. & MARIOTTI M.A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of International research in mathematics education* (2nd ed.). New York: Routledge, pp. 746–783

BARTOLINI BUSSI M.G., MASAMI I., & TAIMINA D. (2010) Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 42(1), 19–31.

BARTOLINI BUSSI M.G. & MASCHIETTO M. (2006) *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Collana Convergenze. Milano: Springer.

BARTOLINI BUSSI M.G. & MASCHIETTO M. (2008) Machines as tools in teacher education. In D. Tirosh and T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education, The International Handbook of Mathematics Teacher Education*, vol. 2. Rotterdam: SensePublishers, pp. 183-208.

BARTOLINI BUSSI M.G. & MASCHIETTO M. (2010) Il progetto regionale Scienze e Tecnologie: l'azione 1. In USR E-R, ANSAS, Regione Emilia-Romagna & F. Martignone (Eds.), *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna*, vol. 2. Napoli: Tecnodid Editrice, pp. 17-28.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

BOREL E. (1904) Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. In Conference at Musée Pédagogique in Paris, *Gazette des Mathématiciens*, Juillet 2002 (no. 93, pp. 47–64)
http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

CANALINI CORPACCI R., FERRI F. & MASCHIETTO M. (2010) *Alla scoperta dei numeri e delle operazioni con Zero+1. Proposte di percorsi didattici per la scuola primaria*.

CANALINI CORPACCI R. & MASCHIETTO M. (2011) Gli artefatti-strumenti e la comprensione della notazione posizionale nella scuola primaria. La 'pascalina' Zero+1 nella classe: genesi strumentale, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 34A (2), 161-188

CANALINI CORPACCI R. & MASCHIETTO M. (2012) Gli artefatti-strumenti e la comprensione della notazione posizionale nella scuola primaria. La 'pascalina' Zero+1 e sistema di

strumenti per la notazione posizionale, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 35A (1), 33-58.

CASARINI A. & CLEMENTI F. (2010) Numeri...in macchina: alla scoperta della pascalina. In USR E-R, ANSAS E-R, Regione Emilia-Romagna & F. Martignone (Eds.), *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna*, vol. 2. Napoli: Tecnodid Editrice, pp. 141-145.

CHIAPPINI G. & REGGIANI M. (2004). Toward a didactic practice based on mathematics. In M.A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3*.

http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG9/TG9_Chiappini_cerme3.pdf

GIACARDI L. (à paraître) La nascita del laboratorio di matematica per le scuole secondarie agli inizi del Novecento, in *Atti del V Convegno Di.Fi.Ma.*, Torino.

MARIOTTI M.A. (2009) Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 41 (4), 427-440.

MARIOTTI M.A. (2012) Intégration de cadres théoriques différents : questions méthodologiques, Table ronde in *La didactique des mathématiques: approches et enjeux. Hommage à Michele Artigue*, Paris. <http://www.lar.univ-paris-diderot.fr/colloque/artigue>

MARIOTTI M.A. & MARACCI M. (2010) Un artefact comme instrument de médiation sémiotique: une ressource pour le professeur. In G. Gueudet, & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-107). Lyon, France: Presses Universitaires de Rennes.

MASCHIETTO M. (on-line) *Le Laboratoire des Machines Mathématiques*.

<http://www.math.ens.fr/culturemath/materiaux/maschietto/maschietto.htm>

MASCHIETTO M. (2010) Enseignants et élèves dans le laboratoire de mathématiques. In G. Gueudet, G. Aldon, J. Douaire & J. Trgalova (Eds.), *Actes des Journées mathématiques de l'INRP "Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources?"*. Lyon: INRP Editions, pp.9-17. <http://educmath.inrp.fr/Educmath/dossier-parutions/actesJMJ10>

MASCHIETTO M. & FERRI F. (2007). Artefacts, schèmes d'utilisation et significations arithmétiques. In J. Szendrei (Ed.), in *Proceeding of the CIEAEM 59*, 179-183.

MASCHIETTO M. & TROUCHE L. (2010) Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 42(1), 33-47.

MEIRA L. (1998) Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity, *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (2), p. 121-142.

NORMAN D.A. (1993) *Things that make us smart*. Reading Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

PEANO G. (1957) *Opere scelte*, par Ugo Cassina, Roma: Cremonese.

SOURY-LAVERGNE S. & MASCHIETTO M. (ces Actes) À la découverte de la « pascaline » pour l'apprentissage de la numération décimale, in *Actes du XXXIX colloque COPIRELEM*, Quimper.

TROUCHE L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations*. Document pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 7.

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.

VERILLON P. & RABARDEL P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity, *European Journal of Psychology of Education*, 9(3), 77-101 [retour sommaire](#)

PRODUCTION D'INGENIERIES COOPERATIVES, TRAVAIL DU PROFESSEUR ET ACTIVITE DE L'ELEVE

Gérard SENCEVY

Professeur d'Université, Université de Bretagne Occidentale, IUFM de Bretagne

C R E A D

gerard.sencevy@bretagne.iufm.fr

Résumé

Dans cette intervention, le chercheur présente tout d'abord, dans ses grandes lignes, la notion d'ingénierie coopérative, notamment en la contrastant, d'une part avec les ingénieries didactiques classiques en didactique des mathématiques et d'autre part avec les ingénieries collaboratives telles qu'elles ont pu être pratiquées et conceptualisées.

Il s'attache ensuite à décrire concrètement quelques exemples d'ingénieries coopératives mises en place au sein d'un collectif de recherche, portant sur certaines situations d'enseignement des mathématiques en fin d'école maternelle et au début de l'école primaire.

L'intervenant examine en particulier comment de telles ingénieries coopératives tendent à déterminer la nature du travail du professeur et son impact sur l'activité mathématique de l'élève. Pour cela, il fait usage d'une théorisation spécifique : « la théorie de l'action conjointe en didactique » (Sensevy, 2011).

Il conclut son intervention en évoquant certaines conséquences formatives, éthiques, et politiques, du possible développement d'ingénieries coopératives.

SENCEVY G. (2011). Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique. Bruxelles : De Boeck.

Références bibliographiques

- Bourdieu, P., & Champagne, P. (1992). Les exclus de l'intérieur. *Actes de la recherche en sciences sociales*, 91(1), 71-75.
- Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris : Minuit.
- Bourdieu, P. (1987). *Choses dites*. Paris : Minuit.
- Bourdieu, P. (1997). *Méditations pascaliennes*. Paris : Le Seuil.
- Bourdieu, P. (2001). *Science de la science et réflexivité : cours du Collège de France, 2000-2001*. Paris : Raisons d'agir.
- Brandom, R. (2009). *L'articulation des raisons : introduction à l'inférentialisme*. Paris : Éd. du Cerf.
- Brandom, R. (2010). *Rendre explicite : raisonnement, représentation et engagement discursif. Première partie*. Paris : les Éd. du Cerf.
- Brandom, R. (2011). *Rendre explicite : raisonnement, représentation et engagement discursif. Deuxième partie*. Paris : les Éd. du Cerf.
- Brousseau, G. (1978). Monographie d'un enfant en difficulté : l'enfant Gaël. Retrieved June 13, 2011, from <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00582615/>
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, 2(30), 241-277.
- Brousseau, G. (2009). Le cas de Gaël revisité (1999-2009). Retrieved June 11, 2011, from <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00582620/>
- Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Education & Didactique*, 5(1), 101-104.
- Brousseau, N., & Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : Ladist.
- Brousseau, G., & Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, 11(2-3), 167-210.
- Bulterman-Bos, J. A. (2008). Will a Clinical Approach Make Education Research More Relevant for Practice? *Educational Researcher*, 37(7), 412-420.
- Centeno, J. (1995). *La mémoire didactique de l'enseignant*. (Textes établis par Claire Margolinas. Préface et notes de G Brousseau., Ed.). Université de Bordeaux 2 : Ladist.

- Chevallard, Y. (1991a). *La Transposition didactique*. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1991b). Sur la déconcertation cognitive. *Interactions didactique*, 12, 27-51.
- Chevallard, Y. (2007a). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD)* (pp. 705–746). Universidad de Jaén.
- Chevallard, Y. (2007b). Education et didactique : la tension essentielle. *Education & Didactique*, 1, 9-28.
- Chevallard, Y. (2007c). Readjusting didactics to a changing epistemology. *European Educational Research Journal*, 6(2), 131–134.
- Chevallard, Y. (2010). Enquêter pour connaître. L'émergence d'un nouveau paradigme scolaire et culturel à l'âge de l'internet. Presented at the Colloque Y. Chevallard, Université de Liège.
- Chevallard, Y., & Mercier, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.
- Chopin, M.-P. (2008). La visibilité didactique : un milieu pour l'action du professeur. *Éducation et didactique*, Varia, 2(2), 63-79.
- Chopin, M.-P. (2011). *Le temps de l'enseignement : l'avancée du savoir et la gestion des hétérogénéités dans la classe*. Rennes : Presses universitaires de France.
- Descombes, V. (1998). La confusion des langues. *Enquête*, 6, 35-54.
- Dewey, J. (1920/2003). *Reconstruction en philosophie*. Pau ; Tours ; Paris : Publications de l'Université de Pau ; Farrago ; L. Scheer.
- Dewey, J. (1938/1993). *Logique. Théorie de l'enquête*. Paris : Presses universitaires de France.
- Dewey, J., & Bentley, A. (1949). *Knowing and the Known*. Boston : Beacon Press.
- Dretske, F. (1981). *Knowledge and the flow of information*. Cambridge : MIT Press.
- Fleck, L. (2005). *Genèse et développement d'un fait scientifique*. Paris : Les Belles lettres..
- Forest, D. (2006). Analyse proxémique d'interactions didactiques. *Carrefour de l'Education*, (21), 73-94.
- Forest, D. (2009). Agencements didactiques. Pour une analyse fonctionnelle du comportement non-verbal du professeur. *Revue française de pédagogie*, 165, 77-89.
- Foucault, M. (1963). *Naissance de la clinique*. Paris : Presses universitaires de France.
- Fraassen, B. C. van. (2006). Representation : The Problem for Structuralism. *Philosophy of Science*, 73(5), 536-547.
- Go, H.-L. (2007). *Freinet à Vence : vers une reconstruction de la forme scolaire*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- Goodman, N. (1976). *Languages of Art*. Indianapolis : Hackett.
- Goodman, N., & Elgin, C. Z. (1988). *Reconceptions in Philosophy*. London : Routledge.
- Gruson, B., Forest, D., & Loquet, M. (2012). *Jeux de Savoir*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- Gueudet, G. & Trouche, L. (2010). *Ressources vives*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- Lassègue, J. (2010). *Pour une anthropologie sémiotique : recherches sur le concept de Forme symbolique* (Note pour l'Habilitation à diriger des recherches). Université Paris Sorbonne-Paris IV, Paris.
- Marlot, C. (2009). Glissement de jeux d'apprentissage scientifiques et épistémologie pratique de professeurs au CP. *Aster*, (49), 109-136.
- Mercier, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique* (Thèse de didactique des mathématiques). Université de Provence, Aix-Marseille., Marseille.
- Mercier, A., Schubauer-Leoni, M. L., & Sensevy, G. (2002). Vers une didactique comparée. *Revue française de pédagogie*, 141(1), 5–16.
- Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants : étude collective d'une leçon. *Éducation et didactique*, 3(1), 77-90.
- Piaget, J. (1975). *L'Équilibration des structures cognitives : Problème central du développement*. Paris : Presses universitaires de France.
- Polanyi, M. (2009). *The Tacit Dimension* (Reissue.). Chicago : University of Chicago Press.
- Quilio, S. (2008). *Contribution à la pragmatique didactique. Une étude de cas dans l'enseignement des nombres rationnels et décimaux à l'école primaire*. (Thèse de Sciences de l'Éducation). Université de Provence, Aix-Marseille.
- Rilhac, P. (2008). *Etude didactique comparative de pratiques d'élèves au collège en Mathématiques et en Education Physique et Sportive : vers la notion de jeux alternatifs* (Thèse de Science de l'Éducation). Université Rennes 2, Rennes.
- Rochex, J.-Y. (2012). La fabrication de l'inégalité scolaire : une approche bernsteinienne. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- Rorty, R. (1994). *Objectivisme, relativisme et vérité*. Paris : Presses universitaires de France.
- Ryle, G. (1949). *The concept of mind*. London : Hutchinson's University Library.
- Sarrazy, B. (2002). Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 49(1), 89–117.
- Schubauer-Leoni, M. L. (1986). *Maître-élève-savoir : analyse psychosociale du jeu et des enjeux de la relation didactique* (Thèse). Université de Genève, Genève.
- Schubauer-Leoni, M.-L., Leutenegger, F., Ligozat, F., & Flückiger, A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : les phénomènes qu'il peut/doit traiter. In G. Sensevy, & A. Mercier (Ed.), *Agir Ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves dans la classe* (pp. 52-91). Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- Sencevy, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy, & A. Mercier (Ed.), *Agir Ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves dans la classe* (pp. 13-49). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

- Sencevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Eléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.
- Sencevy, G., Mercier, A., & Schubauer-Leoni, M.-L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20(3), 263-304.
- Sencevy, G., & Quilio, S. (2002). Les discours du professeur. Vers une pragmatique didactique. *Revue Française de pédagogie*, 141, 47-56.
- Sencevy, Gérard, Schubauer-Leoni, M.-L., Mercier, A, Ligozat, F, & Perrot, G. (2005). An Attempt to Model the Teacher'S Action in the Mathematics Class. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), 153-181.
- Sencevy, G. & Mercier, A. (2007). *Agir Ensemble*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- Sencevy, G., Maurice, J. J., Murillo, A. (2008), & Clanet, J., & La différenciation didactique passive : un essai de définition et d'illustration. *Les Dossiers des Sciences de l'Éducation*, 20, 105-122.
- Sfard, A. (2010). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Tiberghien, A., & Malkoun, L. (2007). Différenciation des pratiques d'enseignement et acquisition des élèves du point de vue du savoir. *Education & Didactique*, 1(1), 29-54.
- Veillard, Laurent & Tiberghien, A (Eds.), *Instrumentation de la recherche en Education. Le cas du développement d'une base de vidéos de situation d'enseignement et d'apprentissage ViSA*. A paraître, Paris : Presses de la MSH.
- Wittgenstein, L. (2004). *Recherches philosophiques*. Gallimard.
- [retour sommaire](#)

ATELIERS

APPRENDRE ET ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES EN ZEP, FORMER À CET ENSEIGNEMENT

Denis BUTLEN

PU, IUFM de Versailles, UCP
LDAR

denis.butlen@iufm.u-cergy.fr

Monique CHARLES-PÉZARD

MCF, IUFM de Créteil, UPEC
LDAR

monique.pezard-charles@u-pec.fr

Pascale MASSELOT

MCF, IUFM de Versailles, UCP
LDAR

pascale.masselot@iufm.u-cergy.fr

Résumé

L'atelier présente une démarche issue d'environ 30 ans de réflexion sur l'enseignement auprès d'élèves en difficulté et sur les pratiques enseignantes dans des classes composées majoritairement d'élèves issus de milieux socialement défavorisés.

Pour faciliter l'appropriation de certains éléments de cette synthèse, un travail d'analyse d'extraits de protocoles de séances, de productions d'élèves et de morceaux de vidéo est proposé. Trois volets sont successivement abordés. Le premier concerne la nature des difficultés rencontrées par les élèves et des pistes permettant de les surmonter. Le deuxième volet porte sur l'analyse des pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP et le troisième cible davantage la formation de ces pratiques et la formation des enseignants.

Exploitations possibles

Contenus de formations ou cadres de recherche sur :

- l'enseignement en ZEP ;
- l'analyse de pratiques de professeurs ;
- l'analyse de vidéos de séances de classe .

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. ZEP. Professeur d'école. Analyse de vidéos.

QUELLES DIFFERENCES ENTRE HYPOTHESE ET CONJECTURE DANS LA VALIDATION EN SCIENCES ET EN MATHEMATIQUES

Richard CABASSUT

PIUFM, Université de Strasbourg
LDAR Université Paris-Diderot
richard.cabassut@unistra.fr

Résumé

Les programmes de 2008 de l'école primaire proposent en sciences de distinguer faits et hypothèses et de rendre les élèves capables de formuler des hypothèses et de les tester. En mathématiques, les programmes de 2002 indiquent que les problèmes de recherche permettent à l'élève d'émettre des hypothèses et de les tester, d'élaborer une solution originale et d'en éprouver la validité. Dans cet atelier, on donne l'occasion aux participants de travailler sur des questions relatives aux apprentissages mathématiques et à la formation des enseignants du CP au CM2, à propos des notions de fait, d'hypothèse et de conjecture, en mathématiques et hors des mathématiques, et sur les différences dans la manière de valider une hypothèse ou une conjecture. On propose de réfléchir sur le rôle des notions de fait, d'hypothèse et de conjecture, en illustrant avec des situations de formation des enseignants, en distinguant notamment raisonnement de nécessité et raisonnement de plausibilité. On étudie ensuite à partir de cette réflexion quelques exemples de situations de classe.

Exploitations possibles

Cet atelier donne un exemple d'utilisation en formation, proposant deux situations pour des adultes enseignants suivies de quatre situations qui peuvent être travaillées en cycle 3.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Sciences. Hypothèse. Conjecture. Investigation. Validation. Raisonnement. Formation.

UNE SITUATION DE FORMULATION SUR LA NUMÉRATION POUR LES CLASSES ORDINAIRES

Frédéric TEMPIER

IUFM Poitou-Charentes, Université de Poitiers
Laboratoire de Didactique André Revuz, Université de Paris 7
Frederick.templier@univ-poitiers.fr

Résumé

Dans le cadre de l'observation d'enseignants lors de la mise en œuvre d'une situation de commandes de collections en CE2 (sur la numération), certaines difficultés liées à la formulation des connaissances visées ont été observées. Dans cet atelier, un questionnement caractéristique d'une ingénierie didactique de développement, a permis de chercher des conditions pour amener les enseignants à laisser aux élèves la responsabilité de la formulation des connaissances visées, par l'intermédiaire d'une ressource. Quelles modifications de la situation de départ ? Quels exemples de formulations peut-on attendre des élèves ? Quels sont les éléments essentiels de cette nouvelle situation à décrire aux enseignants ?

Exploitations possibles

En formation des enseignants, voire des formateurs, le questionnement proposé à partir d'un exemple riche, amène d'une part à réfléchir sur ce qui relève du travail de conception d'une ressource et de son appropriation par les enseignants et d'autre part, sur la spécificité des situations de formulation (en référence à la Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Brousseau 1998)). Les éléments théoriques explicités et la mise à disposition de la ressource utilisée, des traces des pratiques effectives de deux enseignants et de l'activité des élèves permet d'envisager une analyse très fine transposable en formation (analyse *a priori* d'une situation de formulation puis analyse *a posteriori* à partir de la description de la mise en œuvre dans les deux classes).

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Numération. Ingénierie didactique de développement. Situation de formulation.

EXPLOITATION PEDAGOGIQUE D'UNE EXPOSITION SUR LES INSTRUMENTS DE CALCULS

Frédérique PLANTEVIN

Maître de conférences, UBO

Groupe « Instruments dans la classe »-IREM de Brest- LMBA

frederique.plantevin@univ-brest.fr

Christelle LE BRUSQ

Professeur, Collège du Vizac, Guipavas

Groupe « Instruments dans la classe »-IREM de Brest

christelle.le-brusq@ac-rennes.fr

Résumé

La rencontre avec un collectionneur d'instruments anciens a permis à l'IREM de Brest de monter une exposition sur les instruments de calcul de la multiplication à destination des élèves des classes de cycle III et de collège mais aussi de lycée. L'objectif de cette exposition était d'y accueillir les élèves pour des ateliers d'une demi-journée pendant lesquels ils pourraient manipuler les instruments, en construire tout en découvrant leur histoire. Un groupe inter-degré (université, collège, écoles) a été monté à l'IREM pour mettre au point des séquences d'activités avec les instruments et les tester dans les classes des membres du groupe. Exposition et ateliers ont été présentés aux enseignants lors du colloque de l'IREM en février 2012 avant l'ouverture aux classes de cycle III, de collège et de lycée avec des activités adaptées à chaque niveau. Le but de cet atelier est de faire partager l'expérience vécue. Une partie de l'atelier est consacrée à la présentation générale de l'exposition, des instruments et du matériel pédagogique réalisé pour cette occasion ; mais la plus grande partie est utilisée pour découvrir les instruments en suivant en quelque sorte les pas des élèves ; cette expérience partagée devenant le point de départ pour imaginer l'exploitation pédagogique qui en a été et peut en être faite.

Exploitations possibles

En classe, ou en formation des maîtres, cet atelier permet de découvrir des instruments de calculs et de les exploiter pédagogiquement . La documentation riche permet également une approche historique.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Instruments. Calcul. Histoire. Multiplication.

DES TOURS DE DOMINIQUE VALENTIN AUX REPRÉSENTATIONS PLANES DES OBJETS DE L'ESPACE

Annette Braconne-Michoux

Professeure adjointe

Université de Montréal, Canada

annette.braconne-michoux@umontreal.ca

Résumé

Dans cet atelier le travail s'appuie sur une expérimentation menée à Montréal à propos des difficultés dans la compréhension des représentations planes des objets de l'espace et les différents passages 2D-3D, auprès d'élèves diagnostiqués « en difficultés en géométrie dans l'espace » à la fin de l'école primaire. Face à un tel diagnostic, quelles sont les réponses que l'enseignant peut apporter ? Les tests proposés par les psychologues sont-ils en lien avec les difficultés d'apprentissage identifiées par les recherches en didactique ? Peut-on contextualiser les informations données par les tests dans les programmes de l'école primaire ou secondaire ?

Les participants ont été invités à faire et à analyser les activités proposées dans le cadre de la recherche : dénombrement d'empilements de cubes à partir de représentations diverses, constructions d'empilements à partir de représentations, jeu des tours (Valentin 2005).

Au cours des activités, les participants ont été amenés à échanger sur les stratégies utilisées, à identifier des variables didactiques sur lesquelles l'enseignant (et le formateur) peuvent jouer pour aider l'élève dans la compréhension des représentations planes de objets de l'espace. La question du lien entre les activités de positionnement des tours proposées par Valentin et les représentations planes des objets de l'espace a aussi été abordée dans cet atelier.

Exploitations possibles

En formation des enseignants, les documents et exemples proposés au cours de cet atelier, peuvent servir d'appui à une analyse des difficultés que rencontrent les élèves dans la compréhension de représentations planes des objets de l'espace et les différents passages 2D-3D. Le compte rendu de l'atelier donne des pistes pour interroger la pertinence des activités proposées aux élèves et présente une analyse fine des procédures attendues et des variables didactiques sur lesquelles l'enseignant peut jouer pour organiser son enseignement. Enfin, la présentation du jeu des Tours proposé par Dominique Valentin, mis en lien avec d'autres types d'activités, ouvre des perspectives pour la formation à propos des aides à apporter aux élèves dans la perspective d'une résolution du conflit entre le « su » et le « vu ».

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Géométrie dans l'espace. Représentations planes. Formation initiale.

LE ROLE DE L'ENSEIGNANT DANS UNE SEQUENCE DE GEOMETRIE UTILISANT DEUX ENVIRONNEMENTS, DYNAMIQUE ET STATIQUE, AU CYCLE 3

Sylvia Coutat

Maître assistante, Université de Genève

DIMAGE

Sylvia.Coutat@unige.ch

Rossana Falcade

Enseignante-chercheure, DFA

SUPSI

Rossana.Falcade@supsi.ch

Résumé

Cet atelier a visé une analyse, par les participants, d'une séquence d'enseignement des propriétés géométriques au cycle 3. Pour cela, les participants ont eu l'occasion de mettre en pratique des éléments théoriques présentés : paradigmes géométriques (Kuzniak 2006), genèse instrumentale (Rabardel 1995), Médiation sémiotique (Vygotsky 1978, Bartolini Bussi, Mariotti 2008) afin d'identifier comment l'interaction entre l'environnement dynamique et l'environnement statique pouvait influencer sur les connaissances des élèves. Cela a abouti à identifier en quoi le rôle de l'enseignant a été central, voire très délicat, dans cette interaction.

Exploitations possibles

Un article très théorique qui permet de mieux comprendre des concepts complexes comme la genèse instrumentale, la médiation sémiotique et le tout prenant appui sur la mise en œuvre d'activités utilisant un logiciel de géométrie dynamique adapté à l'école primaire (environnement Cabri elem).

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Paradigmes géométriques. Genèse instrumentale. Logiciel de géométrie dynamique.

LA PLACE DES MATHÉMATIQUES DANS UNE SITUATION EXPERIMENTALE : ETUDE DE LA FONTE D'UN GLAÇON EN CYCLE 2

Bertrand LEBOT

PIUFM, IUFM Poitou Charentes/IREM de Poitiers
bertrand.lebot@univ-poitiers.fr

Résumé

Durant cet atelier, une séance de science a été observée, au cours de laquelle les élèves étudient la variation de la température pour comprendre la fonte du glaçon. En particulier, les participants se sont attachés à repérer le moment où un objet mathématique, en l'occurrence le graphique, est introduit, et la technique ostentatoire mise en œuvre par l'enseignant pour y arriver.

S'est posée ensuite la question de l'articulation de cette séance avec un travail mathématique sur les graphiques (situation initiale, de recherche ou de réinvestissement).

Pour finir cette réflexion, la relation entre une démarche mathématique et une démarche d'investigation est mise en perspective, en essayant d'utiliser sur une situation non géométrique les différents modes de pensées géométriques de Gonseth et les espaces de travail géométrique de A. Kuzniak et C. Houdement.

Exploitations possibles

Mise en œuvre de séance mathématiques et sciences en classe.

Analyse de l'articulation entre mathématiques et sciences.

En formation, réflexion sur la démarche d'investigation à partir d'une étude de cas.

Réflexion théorique sur les espaces de travail de Kuzniak et Houdement.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Sciences. Température. Graphique. Espaces de travail.

A LA DECOUVERTE DE LA « PASCALINE » POUR L'APPRENTISSAGE DE LA NUMERATION DECIMALE

Sophie SOURY-LAVERGNE

Maître de conférences, INSTITUT FRANÇAIS DE L'EDUCATION

Laboratoire S2HEP

Sophie.Soury-Lavergne@ens-lyon.fr

Michela MASCHIETTO

Chercheur, UNIVERSITE DE MODENA E REGGIO EMILIA

UFR d'Éducation et Sciences Humaines

Laboratoire des machines mathématiques

michela.maschietto@unimore.it

Résumé

Michela Maschietto a présenté dans une conférence plénière de ce Colloque la machine arithmétique Zero+1, nommée « pascaline » en référence à la fameuse machine construite par Blaise Pascal. Cet atelier a donné l'opportunité aux participants de la manipuler, de l'analyser du point de vue de ses potentialités didactiques et de discuter des utilisations en classe pour l'apprentissage de la numération décimale écrite et des algorithmes opératoires. Des éléments d'un scénario d'utilisation de la pascaline, conçu par une équipe d'enseignants italiens, sont présentés. De plus, l'existence d'une simulation de la pascaline dans un cahier d'activités informatisé permet de questionner l'articulation entre outils matériels et digitaux du point de vue de l'apprentissage des élèves et des conditions du réinvestissement de leurs connaissances dans un autre environnement.

Exploitations possibles

Cet article, après avoir présenté ce que pourrait être le début d'un scénario d'utilisation de la pascaline avec des élèves ou celui d'une formation pour les enseignants, questionne les conditions du passage de l'utilisation de l'instrument pascaline pour faire des mathématiques à celle de faire apprendre des mathématiques. Les scénarios d'utilisation de la pascaline proposés et les critiques formulées par les participants à l'atelier, pourraient servir de point de départ à une exploitation de la pascaline en classe.

Enfin, la présentation de la version informatisée de la pascaline fournit un sujet de réflexion sur la construction de tâches et l'orchestration du recours aux artefacts matériels ou informatisés dans une séquence de classe.

Mots-clés

Instrument - Genèse instrumentale - Numération - Décimale - Algorithme opératoire - Activités informatisées - Artefact

COMMENT CONCEVOIR UNE FORMATION INITIALE A DISTANCE POUR LES PROFESSEURS D'ECOLE EN MATHEMATIQUES : UNE EXPLORATION DES POSSIBLES A TRAVERS DEUX EXPERIENCES

Jean-Michel GELIS

Maître de conférences, IUFM de Versailles
Laboratoire EMA, Université de Cergy Pontoise
jean-michel.gelis@u-cergy.fr

Erik KERMORVANT

PRAG, IUFM
Université de Bretagne Occidentale
erik.kermorvant@bretagne.iufm.fr

Résumé

L'article vise à mettre en évidence quelques variables relatives à la mise en place d'un enseignement à distance en formation initiale des enseignants, ainsi que quelques conséquences sur le déroulement et le contenu des apprentissages.

Les deux expériences sont mises en regard sur différents plans (initiative du dispositif, organisation, public, modalités de travail, supports utilisés, type d'échanges avec les étudiants, formes de travail...). La variété des choix retenus permet d'acquérir une première vue d'ensemble des dispositifs possibles. L'étude de quelques traces, issues d'échanges sur les forums ou lors des séminaires synchrones, permet une première approche, concrète, du déroulement des apprentissages, tant du point de vue de l'enseignant que de l'étudiant.

Exploitations possibles

Montrer des choix possibles de formation à distance ou hybride dans le cas du Master 2 Professeurs des Ecoles ou préparation au concours PE. Permettre de construire des échanges via des forums ou des séminaires synchrones pour un travail collaboratif entre étudiants avec différentes postures des formateurs possibles.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Formation à distance Master PE, préparation concours PE. Travail collaboratif par échanges via des forums ou des séminaires synchrones.

DU COMPTAGE A LA NUMERATION

Bernard ANSELMO

Formateur permanent,
IUFM Lyon, centre de Bourg en Bresse, IREM de Lyon
bernard.anselmo@univ-lyon1.fr

Marie Paule DUSSUC

Formatrice permanente,
IUFM Lyon, centre de Bourg en Bresse
marie-paule.dussuc@univ-lyon1.fr

Hélène ZUCCHETTA

Formatrice permanente,
IUFM Lyon, IREM Lyon, COPIRELEM
helene.zucchetta@univ-lyon1.fr

Résumé

L'article présente un dispositif de formation sur la numération, expérimenté dans l'académie de Lyon. Cette formation vise à faire prendre conscience des enjeux de la numération et à fournir des pistes d'enseignement. Afin de mieux comprendre les difficultés des élèves à appréhender notre numération orale et écrite et les principes de la numération de position, les participants sont placés dans la position d'acteurs. Ils vivent une succession d'activités transposées d'ERMEL ou de CAP Maths et les procédures sont questionnées.

Exploitations possibles

En formation initiale ou continue, faire prendre conscience des enjeux de la numération et à fournir des pistes d'enseignement. Amener les enseignants à mieux comprendre les difficultés des élèves à appréhender notre numération orale et écrite.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Numération. Cycle 3. Ecole élémentaire. Activité de l'élève. Formation des enseignants. Résolution de problèmes.

BASE DE DONNÉES SUR « MATHÉMATIQUES ET LITTÉRATURE DE JEUNESSE »

Pierre EYSSERIC

Formateur permanent,
IUFM Aix-Marseille Université, Site d'Aix en Provence, IREM de Marseille
pierre.eysseric@univ-amu.fr

Frédérique MISKIEWICZ

Formatrice permanente,
IUFM Aix-Marseille Université, Site de Digne les Bains, IREM de
Marseille
frederique.miskiewicz@univ-amu.fr

Résumé

Dans un premier temps, les auteurs présentent une base de données interactive et évolutive intégrée à la base *PUBLIMATH* et qui regroupe un grand nombre de références relatives à l'utilisation des albums de littérature jeunesse dans le cadre des apprentissages mathématiques à l'école.

L'article reprend ensuite le travail proposé dans l'atelier pour faire découvrir cet outil ainsi que les principaux éléments issus de la discussion avec les participants : utilisations possibles, prolongements à envisager pour enrichir la base de données et faciliter son utilisation.

Exploitations possibles

La base de données présentée représente un outil utile au formateur qui peut être exploité dans le cadre de la formation initiale ou continue des Professeurs des Écoles. Elle est également utilisable par des Professeurs des Écoles.

Mots-clés

Formation initiale et continue. Professeur des Écoles. Maternelle. Primaire. Album de littérature jeunesse. Livre à compter. Publimath. Structuration du temps. Structuration de l'espace. Nombre. Activité logique.

ANALYSER DES PRATIQUES DIDACTIQUES A L'ECOLE MATERNELLE CONCERNANT LA REPRESENTATION : LE CAS DU «JEU DU TRESOR».

Grace MORALES

Doctorante, UBO

CREAD

grace_m_i@hotmail.com

Dominique FOREST

Enseignant-chercheur, IUFM de Bretagne

CREAD

dominique.forest@bretagne.iufm.fr

Résumé

L'ingénierie didactique le « jeu des trésors » (Digneau, 1980 ; Pérès, 1984 ; Brousseau, 2004) a été reprise dans le cadre des travaux de l'un des groupes de recherche de l'IUFM de Bretagne. Ce groupe de recherche « jeu du trésor » participe à un processus spécifique d'ingénierie coopérative, dont les principaux objectifs sont l'étude et la diffusion des savoirs et des pratiques didactiques (Sensevy, à paraître). L'équipe aborde la question de la représentation à l'école maternelle. Prenant appui sur ces travaux, l'atelier, dans sa première partie, a proposé aux participants d'effectuer une analyse *a priori* de la situation, du matériel, des productions d'élèves, de l'identification des connaissances en jeu et des procédures envisageables (à partir de documents fournis).

La deuxième partie de l'atelier a présenté le visionnage de deux extraits vidéo, lesquels ont été analysés par les participants sur des questions concernant l'action du professeur (transcriptions et photogrammes fournis) et complétés par les commentaires et réponses des professeurs ayant participé à la conception et à la réalisation des séances, ainsi qu'à leur analyse.

Nous avons mené une synthèse sur le travail d'ingénierie didactique coopérative prenant appui sur les vécus de l'équipe à la lumière de la théorie de l'action conjointe en didactique (Sensevy, 2011).

Exploitations possibles

Le « jeu des trésors » est une activité connue et déjà largement commentée pour une utilisation en classe. Cet article peut éclairer cette pratique de classe mais il se place à un niveau « recherche » pour exemplifier une ingénierie didactique coopérative en référant à une bibliographie abondante.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Maternelle. Jeu des trésors. Liste. Ingénierie didactique coopérative. Action conjointe. Sémiotique. Signes. Représentations.

COMMUNICATIONS

MANUELS SCOLAIRES ET PRATIQUES DES ENSEIGNANTS EN FRANCE ET EN SUISSE ROMANDE

Sara ARDITI

Maitre de conférences, Université Bordeaux 4

Laboratoire LACES

Sara.arditi@iufm.u-bordeaux4.fr

Audrey DAINA

Assistante doctorante, Université de Genève

DiMaGE

Audrey.Daina@unige.ch

Résumé

Les travaux de thèse que nous menons en parallèle en France et en Suisse romande portent sur l'utilisation de manuels par les enseignants dans deux contextes différents. En Suisse romande, les ouvrages COROME sont la ressource officielle unique pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Conçus sous la forme d'un recueil d'activités organisées en thèmes, ils sont très peu directifs, ne présentent pas de progressions, mais sont assortis de quelques commentaires didactiques (pour le maître). Dans notre travail, nous avons analysé leur utilisation dans cinq classes à Genève (Daina, 2011). En France, au contraire, les enseignants ont le choix entre un grand nombre de manuels ayant des caractéristiques très différentes les uns des autres- allant de manuels ouverts à des ouvrages plus « balisés » comme le manuel *Euromaths* dont l'utilisation a été analysée dans cinq classes de CM2 (Arditi, 2011). La mise en regard de nos travaux – effectués dans des cadres théoriques similaires issus de la double approche (Robert, 2001) – donnent en particulier à voir des convergences (notamment au niveau de la lisibilité, pour les enseignants, des enjeux cognitifs des tâches proposées dans les manuels et de leur redéfinition lors de leur prescription) que nous interrogeons en fonction des spécificités et des points communs de ces deux ressources pour l'enseignement des mathématiques à l'école.

Exploitations possibles

Analyser de différentes appropriations de ressources par des PE. Un outil d'analyse pour le formateur dans le cadre de la mise en œuvre de situation d'apprentissage par des enseignants débutants ou confirmés.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Analyse de manuels scolaires. Ressources pour préparer la classe. Didactique comparée.

VERS UNE DISTINCTION CHIFFRE/NOMBRE DANS UN JEU DE TACHES CHEZ DES ELEVES DE 11 ANS

Christine DEL NOTARO

Chargée d'enseignement, Université de Genève

Equipe DiMaGe

Christine.DelNotaro@unige.ch

Résumé

Cette communication propose une réflexion sur la modélisation de l'activité de l'élève en lien avec celle du chercheur. Nous décrivons brièvement ce que nous entendons par *jeu de tâches* et mettons en évidence la façon dont l'expérimentatrice, en tant qu'élément du milieu, met en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et celui de l'élève. Nous exposerons en outre de quelle manière ce jeu permet de révéler les connaissances sous-jacentes des élèves à propos d'une difficulté souvent décrite, autant par les enseignants que par les chercheurs : la distinction chiffre/nombre. L'enjeu est de montrer que dans l'interaction de connaissances que nous développons autour d'un savoir, il s'agit de dépasser la dichotomie réussite/échec. Ce faisant, nous effectuons une incursion féconde dans le domaine des connaissances, ce qui produit une expérience à la fois pour nous-même et pour les élèves. Le *jeu de tâches* est alimenté par les connaissances des élèves et celles de l'expérimentatrice : le concept de nombre vs celui de chiffre se construit non seulement dans l'interaction avec la chercheuse, mais aussi dans l'expérimentation d'un savoir (multiples de 12 et de 11). Nous l'illustrerons par une recherche proposée à des élèves de 11 ans.

Exploitations possibles

Cette communication permet de donner un exemple de recherche didactique s'appuyant sur des connaissances arithmétiques (multiples, diviseurs) et de numération (écriture des nombres). Les activités décrites pour des élèves de 11 ans pourraient aussi être un support de travail mathématique sur les nombres dans des TD de master.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Chiffre - nombre. Tâche. Milieu.

LA GEOMETRIE DYNAMIQUE EN CYCLE 3, POUR QUOI FAIRE ?

Francine ATHIAS DUBREUCQ

Formateur, IUFM Besançon

Doctorante UMR ADEF

sous la direction de Teresa Assude

francine.dubreucq@univ-fcomte.fr

Résumé

À l'école élémentaire, les élèves sont amenés à résoudre des problèmes de « reproduction ou de constructions de configurations géométriques diverses » (BO Juin 2008). Cinq situations ont été proposées aux élèves, en utilisant un logiciel de géométrie dynamique (tracenpoche) en prenant en compte les modes d'intégration définis par Assude (2006).

Dans cet article sont exposés les premiers résultats d'une expérimentation : lors d'une séance de mise en œuvre en classe, sont étudiées comment les rétroactions du logiciel permettent aux élèves de se rendre compte de la nécessité des propriétés géométriques. Le déplacement des points déplaçables semble être pris en charge par certains élèves pour la validation de la construction sans que l'effet du déplacement soit interprété.

Exploitations possibles

En formation initiale ou continue en géométrie, le logiciel Tracenpoche est utilisé pour résoudre une problème de construction et une comparaison est faite avec Cabri-géomètre.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Cycle 3. Logiciel de géométrie dynamique : Tracenpoche.

UNE EXPERIENCE D'ENSEIGNEMENT A DISTANCE D'UN MASTER D'ENSEIGNEMENT 1^{ER} DEGRE EN MATHEMATIQUES

Jean-Michel GELIS

Maître de conférences, IUFM de Versailles
Laboratoire EMA, Université de Cergy Pontoise
jean-michel.gelis@u-cergy.fr

Résumé

Cette communication décrit la mise en place à l'IUFM de Versailles, depuis la rentrée 2010, d'une déclinaison à distance des masters d'enseignement de l'Université de Cergy-Pontoise. Ce dispositif se caractérise principalement, d'une part par une mise en œuvre très rapide, et d'autre part, par des choix pédagogiques très affirmés, fondés sur la collaboration entre pairs et une approche socio-constructiviste.

Dans un premier temps, il est précisé le contexte de cette mise en œuvre avant, dans une seconde phase, de s'appuyer sur une étude du discours des enseignants pour analyser les contenus abordés, les types d'interactions, les supports exploités qui sont situés dans des cadres élaborés en didactique des mathématiques et en sciences de l'éducation. L'ensemble témoigne ainsi des adaptations réalisées par les enseignants pour s'approprier ce nouveau dispositif d'enseignement mais également du chemin qu'il leur reste encore à parcourir, témoin de la difficulté à changer de paradigme d'enseignement entre présentiel et distance.

Exploitations possibles

Aide à la mise en place de master à distance et plus généralement de formations à distances.

Aide à l'étude réflexive sur un enseignement à distance et sur différents indicateurs de ces dispositifs.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Formation à distance. Master PE. préparation concours PE. Travail collaboratif. Forums.

LANGAGE MATHÉMATIQUE À LA TRANSITION PRIMAIRE / COLLÈGE

Christophe HACHE

Enseignant chercheur, Université Paris Diderot

IREM de Paris, LDAR

christophe.hache@univ-paris-diderot.fr

Résumé

Cette communication présente une réflexion en cours sur les pratiques langagières de référence en mathématiques et en classe de mathématiques, au début du collège et à la transition primaire / secondaire.

Exploitations possibles

La réflexion menée ici croise différents points de vue et analyse différents objets : le travail est à la fois didactique, linguistique, mathématique (logique), il porte à la fois sur le « langage des mathématiciens » et sur le « langage mathématique scolaire ». Il participe, à terme, à étudier la façon dont le langage utilisé en cours de mathématiques intervient dans l'apprentissage mathématique.

Même si les manuels sont un intermédiaire difficile à étudier, les analyser relativement à l'enseignement de certains contenus selon ce point de vue est susceptible d'apporter des éléments complémentaires.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Pratiques langagières. Transition Primaire/secondaire

LES ENFANTS A HAUT POTENTIEL INTELLECTUEL EN DIFFICULTES SCOLAIRES : LE ROLE DES MATHEMATIQUES DANS LA DETECTION ET LA REMEDIATION.

Anne Virrion

Maître de conférences, Université Rennes1

IREM

Anne.virrion@univ-rennes1.fr

Résumé

Les enfants à haut potentiel intellectuel représentent aujourd'hui une population en grande partie ignorée par le système éducatif français contrairement à d'autres pays comme les États-Unis, le Canada ou plus près de nous la Belgique ou la Suisse (Lautrey, 2004).

Le rôle joué par les mathématiques dans ce contexte est également trop peu exploré par la recherche institutionnelle (Leikin, 2011).

L'article tente d'alimenter la réflexion sur ce sujet grâce aux résultats récents des travaux menés par notre Groupe Recherche-Formation (GRF) : Enfants « précoces », « surdoués », « à haut potentiel intellectuel » (2009-2012) au sein de l'IREM de Rennes, ainsi que des travaux de recherche de l'auteur.

Exploitations possibles

En formation transversale des enseignants, un apport théorique et pratique sur les élèves à haut potentiel intellectuel semble important. Qu'est ce que les ehpi ? Comment les diagnostiquer ? Quels modalités de travail mettre en place avec ces élèves ? Autant de questions qui peuvent être abordées grâce à cet article. Les mathématiques peuvent jouer un rôle fondamental dans la réponse à ces questions.

Mots-clés

Haut potentiel intellectuel. Surdoué. Difficultés scolaires.

LE RAPPORT AU SUPPORT D'ENSEIGNEMENT : POUR UNE MEILLEURE CONNAISSANCE DU TRAVAIL DE PREPARATION EN MATHEMATIQUES DES ENSEIGNANTS

Laurence LEROYER

Université de Caen Basse-Normandie

CERSE

laurence.leroy@ac-caen

Résumé

Dans leur travail, les enseignants mobilisent différentes ressources dont les manuels. L'étude des relations entre l'enseignant et ces supports d'enseignement édités, supposées au cœur du travail de préparation, fonde notre recherche. Nous appréhendons ces relations dans la complexité de l'activité de préparation et définissons le rapport au support comme objet d'étude. Les résultats de cette recherche, circonscrite au travail de préparation en mathématiques, s'appuient sur une enquête renseignée par 261 enseignants du premier degré. L'analyse statistique implicite menée révèle différentes configurations du rapport au support dans lesquelles sont privilégiées l'utilisation, l'adaptation ou la conception desdits supports. On évalue, de plus, l'impact sur ces configurations de variables comme le niveau d'enseignement, l'âge, l'ancienneté professionnelle de l'enseignant. Des entretiens menés auprès de neuf enseignants permettent de « confronter au terrain » les différentes modalités du rapport au support identifiées et d'enrichir leur compréhension. Ces résultats soulèvent également un questionnement didactique d'autant plus important que les programmes scolaires laissent le choix des méthodes et des démarches, ce qui suppose des capacités de réflexion sur les pratiques et leurs effets.

Exploitations possibles

Cet article s'inscrit dans la lignée des travaux récents portant sur les ressources pour enseigner et leurs utilisations par les enseignants.

Les typologies et résultats présentés ici trouveront tout particulièrement leur utilité en formation continue. Ces typologies pourront servir de point d'appui dans des actions visant à permettre à des enseignants en exercice de situer, analyser et faire évoluer leur pratique par rapport aux supports d'enseignement édités : suis-je simple utilisateur, adaptateur ou concepteur ? Lorsque j'adapte une ressource, je procède plutôt par ajouts, par modifications/inversions, par combinaisons avec d'autres ressources ? Quels sont les déterminants de mes usages ?...

Entre autres débouchés et à titre d'exemple, ces questionnements relatifs à des gestes professionnels situés dans le champ « préparation et conception de son enseignement » pourront servir de point d'entrée à une réflexion portant sur des usages raisonnés et raisonnables des fichiers en Cycle 2.

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, cet article constitue, en formation de formateurs d'enseignants, un outil pertinent pour construire des scénarii d'actions visant une analyse réflexive de la pratique.

Mots-clés

Colloque COPIRELEM. Mathématiques. Usages documentaires. Ressources pour enseigner. Manuel-fichier. Préparation de séances.

RESOLUTION DE PROBLEME AU CP : ROLE DU LANGAGE, DES SCHEMAS ET DES MANIPULATIONS.

Caroline POISARD

Maître de conférences, IUFM DE BRETAGNE / UBO

Laboratoire du CREAD

caroline.poisard@bretagne.iufm.fr

Le texte présente un extrait des travaux du groupe Lemme (langages et manipulations en mathématiques à l'école) de l'IREM de Brest.

Cette étude trouve son origine dans le travail de Maryse Rebière (2002) sur le rôle des pratiques langagières dans les apprentissages mathématiques où l'auteur analyse la transcription d'une séance ordinaire de résolution du « problème des sucres » en classe de CP.

En s'appuyant sur plusieurs mises en œuvre filmées de la situation « problème des sucres », le texte présente l'analyse des savoirs en jeu, des choix professionnels et de l'activité mathématique des élèves dans chaque séance.

En particulier, l'exposé étudie les schémas que les élèves réalisent pour résoudre ce problème pour en dégager des hypothèses sur l'évolution de leur raisonnement.

Les schémas sont ici envisagés comme des écrits de savoir (Laparra & Margolinas, 2009) en référence au concept « d'ostensif » (Chevallard, 1993, Bosch & Chevallard, 1999).

Exploitations possibles

Le texte constitue un éclairage sur l'utilisation et le rôle de schémas dans la résolution d'un problème précis et sur l'articulation entre un schéma et la production d'une écriture mathématique.

Il peut intéresser les formateurs de professeurs des écoles qui, en formation initiale ou continue, veulent aborder la question de la place et du statut d'un schéma comme outil permettant de résoudre un problème à « support matériel ».

Mots clés

langage – manipulation – schéma – ostensif – écrit de savoir – secondarisation du discours.