

NOMBRES ET SEMIOTIQUE PEIRCIEENNE

Olivia MARTINELLI

Doctorante

Laboratoire (CERES)

Université de Limoges

Professeur de mathématiques à l'U-PEC

Résumé

Dans un premier temps, notre communication se propose d'exposer et de définir les expressions « processus sémiotique peircien » et « phanéroscopie peircienne ». L'emploi du verbe définir est à nuancer compte tenu de la très grande complexité de la théorie peircienne du signe. En conséquence les définitions que nous dresserons des deux notions seront incomplètes, néanmoins elles en dessineront les contours essentiels et surtout strictement nécessaires à la bonne compréhension de l'article. Pour se faire nous aurons systématiquement recours à des exemples génériques simples.

Dans un second temps nous montrerons comment le couple « processus et phanéroscopie » autorise une saisie, une "photographie instantanée" du niveau d'interprétation d'un sujet par rapport à un objet de connaissance. Plus précisément, nous montrerons que ce « couple » comme outil d'analyse permet de repérer certaines évolutions, certains invariants, et certaines propriétés des representamina et des interprétants de l'objet nombre. Pour ce faire, nous avons fait le choix d'analyser avec cet outil des systèmes de numération anciens (préhistoriques, babylonien, égyptiens et grecs). Dans notre communication nous exposerons le système babylonien.

Dans un troisième temps, nous indiquerons et nous commenterons les conjectures que ces analyses nous autorisent à faire à savoir :

- 1) La création d'un symbole mathématique est la résultante d'un processus sémiotique long qui commence par l'iconisation.
- 2) Le processus sémiotique choisit toujours "le chemin le plus court", il est économe en termes d'espace et de temps.
- 3) La contrainte physiologique du "subitizing" joue un rôle dans la formation des representamina.
- 4) Plus le niveau d'interprétation est élevé plus le processus résiste à son évolution.
- 5) Le processus interne de conversion semble jouer un rôle central dans l'évolution de l'interprétant.

I - PROCESSUS SEMIOTIQUE ET PHANÉROSCOPIE

1 Processus sémiotique peircien

Commençons par mettre en avant le point de vue essentiel à partir duquel la théorie des signes de Peirce se construit. Ce point de vue central c'est le pragmatisme. Cette théorie est d'abord et avant tout une théorie qui se veut pragmatique. L'action du signe y est centrale.

Citons Edward C. Moore :

« The founder of the philosophical movement well-known as pragmatism (which he later called pragmaticism to distinguish it from popularized versions such as that of William James), Peirce argued that the truth of any assertion is to be evaluated from its practical consequences and its bearing on human interests. In other words, concepts are to be understood in terms of their practical implications »¹.

¹ Page d'introduction à: « The essential writings. CS.Peirce ». de EC. Moore

Traduction : « Peirce, le fondateur du mouvement philosophique bien connu sous le nom de pragmatisme (qu'il baptise plus tard le pragmaticisme afin de le distinguer des versions popularisées du pragmatisme comme celle de William James), soutient que la vérité de n'importe quelle affirmation doit être évaluée à partir de ses conséquences pratiques et son action sur les intérêts humains. Autrement dit, ce sont les implications pratiques des concepts qui permettent de les saisir »

Citons également Claudine Tiercelin :

« Le concept central de la sémiotique peircienne n'est donc ni celui de la représentation, ni celui de representamen, ni même celui de signe, c'est celui du signe en acte. Il s'agit moins d'une théorie générale de la représentation que d'une théorie de la production et de la reproduction de signes en d'autres signes : « Le sens d'un signe est le signe dans lequel il doit être traduit (4132) » »²

Ce qui est donc fondamental en sémiotique peircienne ce n'est pas le signe mais le processus d'évolution du signe et ses conséquences pratiques. Ce qui prime c'est le mouvement, le changement. Clarifions cette notion de processus sémiotique. Entendons nous d'abord sur l'usage du mot signe. Précisons que Peirce utilise le mot signe tantôt pour désigner un processus sémiotique dans sa globalité tantôt pour en désigner une partie qu'il nomme par ailleurs representamen. Ce qui peut être source de confusion, c'est pourquoi nous utiliserons exclusivement et systématiquement les expressions « processus sémiotique » et « representamen » pour désigner le signe. Toutes ces précautions de langage étant prises. Qu'est-ce donc que ce processus sémiotique ?

Le processus sémiotique de Peirce est un rapport triadique entre un representamen, un objet et un interprétant.

Pour entrer en matière, le plus simple c'est encore de citer l'original, citons donc C.S.Pierce :

*« Un signe ou **representamen** est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose sous quelque rapport ou à quelque titre. Il s'adresse à quelqu'un, c'est-à-dire crée dans l'esprit de cette personne un signe équivalent ou peut-être un signe plus développé. Ce signe qu'il crée, je l'appelle **interprétant** du premier signe. Ce signe tient lieu de quelque chose : de son **objet**. Il tient lieu de cet objet, non sous tous rapports, mais par référence à une sorte d'idée que j'ai appelée quelquefois le fondement du representamen. »³*

Bien que cette définition peircienne du processus sémiotique nous laisse déjà entrevoir qu'un tel processus ne peut être réduit à la simple triade representamen, interprétant, objet, nous considérons qu'elle constitue un bon point de départ pour en comprendre les principaux rouages.

Le representamen, la partie matérielle du processus :

Le representamen est une chose qui représente une autre chose : son objet. Prenons quelques exemples qui illustrent notre propos. Une photographie de la planète Vénus peut être un representamen de la planète Vénus. Comme les expressions « l'étoile du matin » ou « l'étoile du soir » peuvent être des representamina de l'objet la planète Vénus. Le representamen est donc une chose incarnée dans le monde sensible, c'est une chose matérielle, il peut-être un son, une image, une écriture, une odeur, une personne, un animal, ou toute autre chose accessible à nos sens. Il est un vecteur de communication externe. Il s'adresse à quelqu'un.

L'objet, ses contours plus ou moins flous :

L'objet n'est pas le representamen. L'objet est ce dont on parle. L'objet est ce que le representamen veut présenter à l'énonciataire. Précisons clairement que le representamen ne peut que représenter l'objet, il

² Cl. Tiercelin « CS.Peirce et le pragmatisme », Paris, PUF, 1993.

³ CSP. 1^{ère} lettre à L.Welby 1904.Extrait de « Ecrits sur le signe » de Gérard Deledalle, p121.

ne peut pas le faire connaître ; il ne peut qu'exprimer quelque chose à propos de l'objet. Le representamen montre certains aspects de l'objet, il ne permet pas de connaître tout l'objet. L'objet peircien a donc des contours volontairement flous, changeants et en constante évolution. **Les contours de l'objet sont dépendants de l'évolution de ses representamina et inversement.** Reprenons l'exemple de la planète Vénus, la photographie de la planète Vénus est un representamen de Vénus, elle m'indique que la planète semble être de couleur jaune, mais elle ne me dit rien a priori de sa masse ou de sa période de révolution autour du soleil. L'objet Vénus reste pour moi et pour l'astrophysicien très pointu un objet en perpétuel construction. Prenons maintenant un objet qui peut nous sembler extrêmement familier, choisissons comme objet le nombre 5.

$\sqrt{25}$, $2+3$, $1+4$ sont des representamina du nombre 5, chacun de ces representamina me dit des choses différentes sur cet objet qu'est le nombre 5, mais aucun ne fait tout connaître du nombre 5. Aussi, bien que l'objet nombre soit actuellement aux yeux d'un mathématicien stabilisé par une axiomatique qui fait consensus, il n'empêche que cet objet n'a pas fini d'évoluer. Le sujet, fut-il mathématicien, n'a pas fini d'être harcelé par cet objet que l'on nomme nombre, il en découvrira ou en créera, selon le point de vue, de nouvelles propriétés.

L'interprétant, son rôle prépondérant :

L'interprétant est « l'image mentale » que crée dans l'esprit de l'énonciataire le representamen d'un objet. Il correspond à une interprétation possible d'un certain aspect de l'objet que le representamen crée dans l'esprit de l'énonciataire. Cet interprétant premier n'est pas directement accessible à l'énonciateur. Cet interprétant premier a naturellement vocation à évoluer, à se modifier, à s'associer avec d'autres interprétants issus d'autres representamina. Il peut également évoluer à la faveur d'un processus interne, l'énonciataire créant un nouvel interprétant du premier interprétant considérant ce dernier comme un « representamen non-matériel » de l'objet. L'interprétant n'est jamais figé définitivement, il est en perpétuelle évolution, il dépend du sujet. Prenons un exemple, supposons qu'une personne dise à une autre personne « 3 », ce representamen sonore crée chez l'énonciataire un interprétant qui dépend de l'énonciataire. Ainsi cet interprétant peut être l'image de la ville de Troyes, l'image de 3 billes, l'image de l'écriture chiffrée 3, la sensation tactile « intérieur » de toucher 3 billes pour un aveugle, le son « intérieur » three pour un Anglais qui saisirait le son trois, etc. Un representamen avant qu'il crée un interprétant chez son énonciataire est donc une pure possibilité. Nous verrons ultérieurement dans la partie qui concerne la phanéroscopie peircienne⁴ que tous les interprétants et tous les representamina ne se valent pas. Il existe une hiérarchie des interprétants et representamina. Prenons à nouveau l'exemple du nombre 5, supposons qu'un representamen du nombre 5 crée pour un énonciataire A un interprétant où 5 apparaît comme la limite d'une suite de Cauchy, supposons que ce même representamen crée pour un énonciataire B un interprétant où 5 apparaît comme le cardinal d'une collection de 5 billes, il va de soi que ces deux interprétants ne peuvent pas être placés sur un même plan.

Les chaînes de conversion dans le processus sémiotique :

Dans le cadre de nos recherches, il a fallu nous intéresser à la façon de repérer les évolutions du processus sémiotique. Les interprétants n'étant accessibles qu'à l'énonciataire, nous nous sommes naturellement intéressés aux representamina. Afin d'observer les évolutions des representamina et par ricochet celles des interprétants, il nous a fallu créer une sorte de marqueur, ce marqueur nous l'avons baptisé chaîne de conversion. Nous appelons « chaîne de conversion » le processus qui consiste à saisir le representamen d'un objet pour en produire un autre du même objet. Le schéma ci-après représente une chaîne de conversion.

Representamen A → interprétant 1 → interprétant 2 → representamen B

⁴ Terme utilisé par Pierce pour désigner sa classification des signes (nous détaillons les critères de classification au paragraphe 2 de l'article).

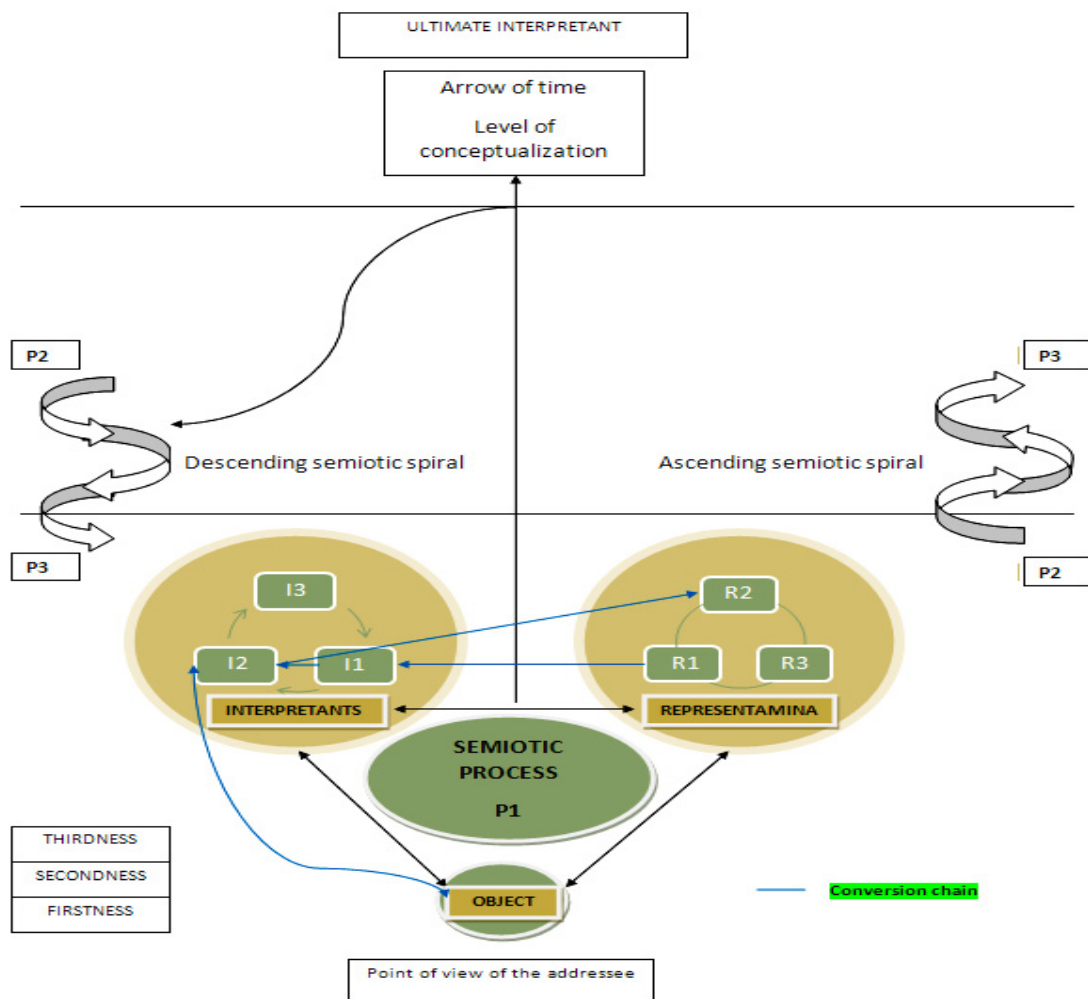
Le representamen A d'un objet crée un interprétant 1 dans l'esprit d'un énonciataire qui pour produire le representamen B de l'objet doit produire au moins un deuxième interprétant.

Prenons un exemple qui illustre notre propos. Un professeur des écoles demande à son élève âgé de 6 ans : combien font une dizaine et 3 unités ? L'expression sonore « une dizaine et 3 unités » est un representamen (A) du nombre 13 (objet), « une dizaine et 3 unités » crée dans l'esprit de l'enfant un premier interprétant (1), supposons que ce premier interprétant soit l'image d'une boîte Picbille⁵ contenant 10 billes et de 3 billes, cet interprétant (1) peut possiblement créer un second interprétant (2) qui pourrait être la suite numérique (10,11,12,13), qui à son tour crée un troisième interprétant (3) qui serait le son « intérieur » 13 pour enfin produire le representamen (B) sonore « 13 ». Ceci est un exemple fictif mais plausible de chaîne de conversion contenant 3 interprétants. Par définition, une chaîne de conversion contient a minima deux interprétants.

L'interprétant ultime :

Pour Peirce les interprétants ultimes, ce sont les interprétants que créent dans l'esprit d'un énonciataire des representamina directement issus des savoirs savants les plus avancés.

Ci-dessous un schéma représentant le processus sémiotique dans sa globalité.



⁵ Il s'agit de boîtes pouvant contenir 10 billes utilisées dans certaines écoles primaires pour apprendre à compter.

2 Phanéroskopie peircienne

La phanéroskopie peircienne ou théorie des catégories de Peirce propose une classification des signes, plus qu'une simple classification, elle en propose une hiérarchisation.

Commençons par citer Peirce:

«(8.333) Me voilà maintenant prêt à donner ma division des signes, aussitôt que j'aurai fait remarquer qu'un signe a deux objets, son objet comme il est représenté et son objet en lui-même. Il a aussi trois interprétants, son interprétant en tant que représenté ou destiné à être compris, son interprétant en tant que produit et son interprétant en lui-même. Or les signes peuvent être divisés, selon leur propre nature matérielle, selon les relations qu'ils entretiennent avec leurs objets et selon leurs relations avec leurs interprétants.

(8.334) En soi, un signe est soit une apparence, ce que j'appelle un qualisigne, soit un objet ou événement individuel, ce que j'appelle un sinsigne (la syllabe *sin* étant la première syllabe de *semel*, *simul*, *singulier*, etc.), soit un type général, ce que j'appelle un légisigne. Comme nous employons le terme "mot" dans la plupart des cas, quand nous disons que "le" est un "mot", que "un" est un autre "mot", un "mot" est un légisigne. Mais quand nous disons d'une page d'un livre qu'elle a deux cent cinquante "mots" dont vingt sont des "le", le "mot" est sinsigne. Un sinsigne qui renferme ainsi un légisigne je l'appelle une "réplique" du légisigne. La différence entre un légisigne et un qualisigne, qui ne sont ni l'un ni l'autre des choses individuelles, est qu'un légisigne a une identité bien déterminée, bien qu'il admette d'ordinaire une grande diversité d'apparences. Ainsi, "&" et "et" et le son "é" ne forment tous qu'un seul mot. Le qualisigne par contre n'a aucune identité. C'est la pure qualité d'une apparence et il n'est pas exactement le même lorsqu'il réapparaît une seconde fois. Au lieu de l'identité, il a une grande similitude et ne peut différer beaucoup sans qu'on le considère comme un tout autre qualisigne. Par rapport aux relations qu'ils entretiennent avec leurs objets dynamiques, je divise les signes en Icônes, Indices, et Symbole. Je définis une icône comme étant un signe qui est déterminé par son objet dynamique en vertu de sa nature interne. Tel est tout qualisigne comme une vision ou le sentiment produit par un morceau de musique considéré comme reproduisant exactement les intentions du compositeur. Tel peut être un sinsigne comme un diagramme individuel, par exemple une courbe de distribution d'erreurs. Je définis un indice comme étant un signe déterminé par son objet dynamique en vertu de la relation réelle qu'il entretient avec lui. Tel est un Nom Propre (un légisigne); telle est l'apparition d'un symptôme d'une maladie (le symptôme lui-même est un légisigne, un type général d'un caractère déterminé. L'apparition dans un cas particulier est un sinsigne). Je définis un symbole comme étant un signe qui est déterminé par son objet dynamique dans le sens seulement dans lequel il sera interprété. Il dépend donc soit d'une convention, d'une habitude ou d'une disposition naturelle de son interprétant ou du champ de son interprétant (celui dont l'interprétant est une détermination). Tout symbole est nécessairement un légisigne, car il est inexact d'appeler symbole la réplique d'un légisigne. Eu égard à son objet immédiat un signe peut être le signe d'une qualité, d'un existant ou d'une loi.

Par rapport à la relation qu'il entretient avec son interprétant signifié un signe est un rhème, un dicisigne ou un argument. Ceci correspond à la vieille trinité terme, proposition, et argument modifiée pour s'appliquer aux signes en général. Un terme est simplement un nom de classe ou un nom propre. Je ne considère pas le nom commun comme une partie essentiellement nécessaire du discours. En réalité son développement en partie distincte du discours n'a été complet que dans les langues aryennes et le basque- et peut-être aussi dans quelques autres langues peu connues. Dans les langues sémitiques, il est formellement une affaire verbale en général et d'ordinaire il l'est aussi substantiellement. Autant que je sache, il en va ainsi dans la plupart des langues. Dans mon algèbre logique universelle, il n'y a pas de nom commun. Un rhème est tout signe qui n'est ni vrai ni faux, comme presque tous les mots pris isolément, excepté oui et non qui sont presque propres aux langues modernes. Une proposition, suivant la manière dont j'utilise ce terme, est un symbole dicent. Un dicisigne n'est pas une assertion, mais un signe capable d'être asserté. Mais une assertion est un dicisigne. Comme je vois présentement la chose (il se peut que j'y voie plus clair plus tard), l'acte assertion n'est pas un pur acte de signification. C'est l'expression du fait qu'on se soumet aux sanctions qu'encourt un menteur si la proposition assertée n'est pas vraie. Un acte de jugement est l'auto-reconnaissance d'une croyance; et consiste dans l'acceptation délibérée d'une proposition comme base de conduite. Mais je crois que cette position est discutable. Il s'agit simplement de savoir quelle conception donne le point de vue le plus simple sur la nature de la proposition. Soutenant donc qu'un dicisigne n'asserte pas, je soutiens naturellement qu'un argument n'a pas réellement à être soumis ou proposé. Je définis donc un argument

comme un signe qui est représenté dans son interprétant (la conclusion)[car se serait le soumettre ou le proposer], mais, comme s'il était un signe de l'interprétant ou peut-être comme s'il était un signe de l'état de l'univers auquel il se réfère, dans lequel les prémisses sont considérés comme évidentes. Je définis un dicisigne comme un signe représenté dans son interprétant signifié comme s'il entretenait une relation réelle avec son objet (ou comme l'entretenant s'il est asserté). Un rhème est défini comme un signe qui est représenté dans son interprétant signifié comme s'il était un caractère ou une marque (ou comme l'étant). »⁶

Ce texte est d'une grande intensité, et il faut bien l'avouer, Peirce est plutôt difficile à lire. Cependant, il apparaît clairement que Peirce propose de classer les representamina en utilisant trois critères :

- La nature matérielle du representamen
- Les relations qu'il entretient avec son objet
- Les relations qu'il entretient avec ses interprétants

Commençons par le premier critère, celui relatif à la nature du representamen.

Un representamen peut être un **qualisigne**, un qualisigne n'a aucune identité, il n'a pas de réplique. C'est un sentiment premier, une pure sensation au contour indéfini.

Un representamen peut être un **sinsigne**, un sinsigne est un objet ou un événement réel unique, il n'a pas de réplique. Donnons quelques exemples, une figure géométrique particulière dans un livre de mathématiques, la photographie d'une personne.

Un representamen peut être un légisigne, un **légisigne** est un signe de loi, il est conventionnel et il a des répliques. Citons quelques exemples : un billet de train, un billet de banque, le representamen « + » en mathématiques. Remarquons qu'en mathématiques nombreux sont les representamina qui sont des légisignes.

Abordons maintenant la question des relations qu'entretiennent les representamina avec leurs objets.

La relation est dite **iconique** si le representamen **ressemble** à son objet. « Une icône possède le caractère qui le rend signifiant, même si son objet n'existe pas. »⁷ Prenons deux exemples : la photographie d'une personne est un representamen iconique de la personne (l'objet). En tenant compte du paragraphe précédent on peut affiner notre classement et dire qu'il s'agit d'un sinsigne iconique de la personne (objet). En mathématiques, le dessin d'une flèche reliant deux points A et B est un representamen iconique du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La relation est dite **indicielle** si le representamen est **directement affecté** par son objet, ainsi si l'objet n'existe pas l'indice non plus. Une fumée est le representamen indiciel du feu (l'objet). En mathématiques, le representamen « $u.v = 0$ » est un representamen indiciel de la normalité entre eux des vecteurs u et v.

La relation est dite **symbolique** si le representamen renvoie à son objet en vertu d'une **loi générale**. Le choix du representamen est **arbitraire**, sa forme ne dépend pas de l'objet qu'il représente. Le feu rouge est un representamen symbolique de l'ordre de stopper son véhicule (objet). Le representamen « + » est un representamen symbolique de l'addition (objet).

Enfin traitons la question des relations qu'entretiennent les representamina avec leurs interprétants.

⁶ C.S.P « Première lettre à Lady Welby », P.O Milford, Pa. 12 octobre 1904. Extrait de « Ecrits sur le signe » G.Deledalle, p31-33.

⁷ C.S.P (2.304) Extrait de « Ecrits sur le signe » G.Deledalle, p139.

La relation est dite **rhématique** si le representamen **n'est pas interprété comme fournissant quelque information sur son objet**, il n'offre que des possibilités d'interprétation. Par exemple la photographie d'un inconnu sans autre indication est un representamen rhématique de l'inconnu. Pour aller plus loin, en tenant compte des deux paragraphes précédents, cette photographie est un sinsigne iconique rhématique. En mathématique l'expression « $a + \dots = c$ » est un representamen rhématique.

La relation est dite **dicente** si le representamen est **interprété comme indiquant quelque chose de son objet. L'information donnée sur l'objet peut être vraie ou fausse**, aucune preuve ne permettant de corroborer l'information. Par exemple la photographie d'une personne sur laquelle il écrit « Nom : Dupont, Prénom : Paul », ce representamen est un representamen dicent de la personne (objet). Il semble indiquer que la personne sur la photographie soit Monsieur Dupont Paul, rien ne permettant de dire si cette interprétation est vraie ou fausse. En tenant compte des paragraphes précédents, on peut dire que ce representamen est un sinsigne indiciel dicent, mais il peut être aussi compris comme étant un sinsigne iconique dicent. En mathématiques, sur la page d'un cahier d'écolier, deux droites (D) et (D') sont dessinées et semblent être parallèles, il n'y a aucune autre indication sur la page. Ce dessin de deux droites parallèles est un representamen dicent du parallélisme entre les droites (D) et (D').

La relation est dite **argumentale** si l'interprétant survient comme **résultant de la loi générale** qui relie le representamen à son objet. Prenons un exemple, « un feu rouge » est un representamen argumental de l'objet « ordre de s'arrêter » si il est interprété comme un signe de loi, c'est-à-dire si l'énonciataire pense « je vais m'arrêter car la loi dit : chaque fois qu'il y a un feu rouge, il y a ordre de s'arrêter. » Dans ce cas le feu rouge est un légisigne symbolique argumental.

En résumé de cette seconde partie, dans le cadre scolaire où l'interprétant ultime est défini par l'institution, cette classification nous permet de photographier un état du processus sémiotique chez un élève à un moment de son parcours en direction de cet interprétant ultime.

En effet si « l'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$ » peut être regardée par un mathématicien comme un légisigne symbolique argumental du cercle de centre l'origine du repère et de rayon 1, il est aussi possible qu'un élève le regarde comme un qualisigne iconique rhématique. Nous voulons par cet exemple mettre en avant le fait qu'un état du processus sémiotique peut révéler le niveau d'interprétation de l'énonciataire. Non seulement cette photographie peut être révélatrice d'un niveau d'interprétation, mais elle peut aussi rendre compte, en « zoomant » sur les chaînes de conversion du processus, de la manière dont ce processus évolue.

II - UN POINT DE VUE PEIRCIEN SUR LES NOMBRES «BABYLONIENS»

1 Avant propos

Quelques mises en garde sont nécessaires à l'entrer dans notre sujet. Commençons par situer le travail qui va être exposé dans son contexte général. Tout d'abord, cet exposé « historique » n'est pas central dans nos recherches. Nos recherches concernent essentiellement les apprentissages numériques à l'école en France, et notre point de vue est un point de vue de sémioticienne à visée didactique. Notre travail sur les nombres « babyloniens » n'est ni un travail d'historien, ni même un travail d'épistémologue des mathématiques. Nos sources historiques sont les sources de chercheurs en épistémologie des sciences⁸ qui font autorité dans le domaine. Nous n'avons choisi ce système de numération ni pour ses origines géographiques, ni pour les origines ou les propriétés de cette langue. Notre sélection s'est effectuée en fonction de critères mathématiques, nous l'avons choisi parce qu'elle une **numération de position**, ce qui en soit est déjà exceptionnel, et surtout qu'elle permet des comparaisons pertinentes avec notre

⁸ Docteur en épistémologie et histoire des sciences (thèse soutenue en 2004), Membre de l'UMI Transition (CNRS & NYU) et de l'Unité SPHERE (UMR 7219, CNRS & Université Diderot Paris 7)

système de numération décimal. Le terme « babylonien » est un terme générique largement utilisé par les épistémologues des mathématiques. Pour ce qui nous concerne ce terme désigne des tablettes d'écoliers de la ville de Nippur datant du 2^{ème} millénaire avant notre ère. La ville de Nippur se situe à la frontière entre le « Pays de Sumer » et le « Pays d'Akkad »⁹. Enfin, précisons également que nous n'avons eu accès qu'à un certain type de représentations visuelles des nombres « babyloniens ». Les représentations sonores, tactiles nous sont naturellement inaccessibles. Ce qui réduit considérablement notre champ d'investigation.

2 Un point de vue de sémioticienne sur les nombres babyloniens

Les Babyloniens ont utilisé une grande variété de systèmes de numération : sexagésimal strict avec les clous et chevrons, décimal mélangeant du sexagésimal ou décimal. Les tablettes concernant la numération sexagésimale stricte sont relativement nombreuses, connues et disponibles. C'est aussi une des raisons qui ont orienté notre choix sur cette numération mais ce n'est pas la seule. En effet la tablette YBC7289 (abréviation de *Yale Babylonian Collection*, n° 7289) possède des caractéristiques très intéressantes tant d'un point de vue sémiotique que d'un point de vue strictement mathématique, nous détaillerons ces caractéristiques ultérieurement. Or cette tablette convoque la numération sexagésimale babylonienne. YBC7289 est datée du premier tiers du II^e millénaire av. JC. (-1700 ± 100). On ne connaît pas son origine exacte ; elle provient sans doute du sud de l'Irak actuel. Elle est actuellement conservée à l'Université de Yale.

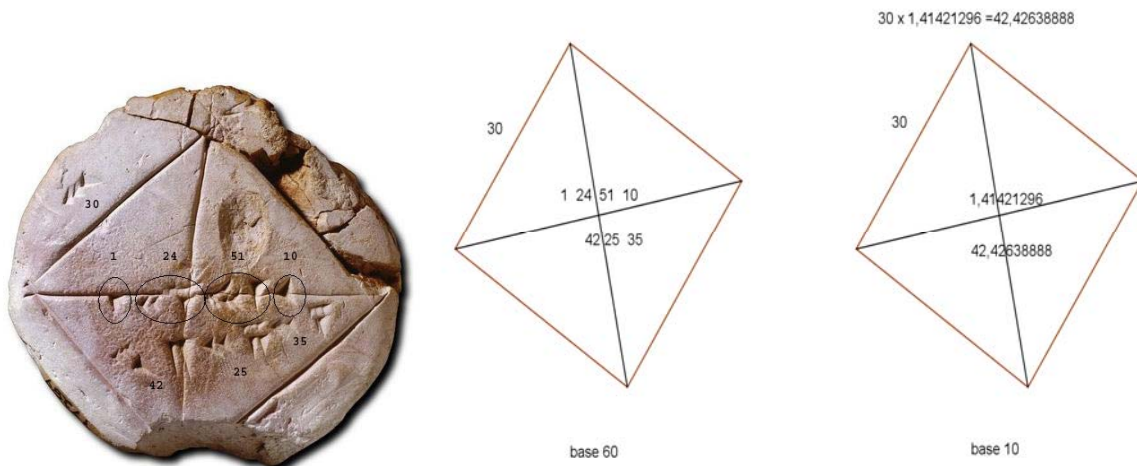
Remarquons que de nos jours, la base 60 (système sexagésimal) est encore utilisée pour mesurer le temps, elle est un héritage de la civilisation babylonienne. Ainsi, une heure est égale à 60 minutes et une minute est égale à 60 secondes.

Commençons maintenant une première analyse du système de numération sexagésimal « babylonien ». Intéressons nous aux soixante chiffres du système sexagésimal babylonien. Ces chiffres étaient notés à l'aide d'un système additif décimal : un clou  pour l'unité et un chevron  pour la dizaine. Ainsi, tout chiffre de leur système sexagésimal pouvait s'écrire avec au plus cinq chevrons et neufs clous. Le tableau ci-dessous contient les 60 représentations des 60 chiffres babyloniens. Chez les babyloniens le zéro existe. Dans les tablettes mésopotamiennes, on retrouve trois représentations différentes du nombre zéro :  ou  ou un espace vide entre deux chiffres. L'espace vide est de loin le plus utilisé, les deux autres symboles apparaissent plus tardivement.

		unités									
		...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
dizaines	0...										
	1... 										
	2... 										
	3... 										
	4... 										
	5... 										

⁹ à une centaine de km au sud de la Bagdad actuelle.

Contrairement à notre si familière et “traditionnelle”¹⁰ base 10, il n’y a pas 60 symboles différents pour désigner chacun des chiffres du système numéral babylonien. Il n’y a que deux symboles le clou  et le chevron  qui génèrent tous les autres. Pour le scribe d’antan ces deux symboles sont des légisignes symboliques dicents puis argumentaux, en effet si on l’on veut tenir compte du temps¹¹, il est évident que pour certains nombres, compte tenu du système additif sous-jacent, **le processus sémiotique peut-être très lent** à produire un interprétant qui soit un argument. C’est déjà une première différence avec notre système de numération décimale. En effet, les dix symboles représentant les chiffres de notre système sont pour un lecteur lambda des légisignes symboliques argumentaux et surtout ils sont extrêmement rapides à interpréter comme des signes de loi. Ce n’est donc pas le cas des chiffres babyloniens, le clou  par exemple peut indifféremment signifier 1 ou 60 ou 3600 ou 1/60 et il en va de même pour tous les représentamina des chiffres babyloniens et par extension pour ceux de tous les nombres. En effet, la perception est immédiate mais l’interprétation bien qu’elle puisse être rapide ne l’est pas, elle est séquentielle et cela même pour un scribe expérimenté. Illustrons notre propos en étudiant la tablette d’argile YBC 7289 (abréviation de *Yale Babylonian Collection*, n° 7289)¹². C’est une pièce archéologique babylonienne écrite en cunéiforme et traitant de mathématiques. Pour les historiens des mathématiques, son intérêt réside dans le fait qu’elle est la plus ancienne représentation connue d’une valeur approchée de la racine carrée de deux, notée aujourd’hui $\sqrt{2}$. Nous nous y intéresserons plus tard. Réalisons une première transcription.



A gauche se trouve la tablette originale, à droite nous avons réalisé deux transcriptions actualisées une en base 60 et l’autre en base 10. Pour rendre tout à fait simple notre propos, nous allons développer notre raisonnement en base 10 et par analogie en le transposera en base 60. Sur la diagonale du carré est écrit 141421296 sans virgule, le scribe sait qu’il s’agit d’un nombre, mais ce nombre peut être 1, 41421296 comme il peut être 141,421296 ou 1414,21296 etc. Cependant ce scribe est membre de la société savante, en conséquence il connaît les relations qui existent entre les longueurs des 3 côtés d’un triangle rectangle, comme nous le montre la tablette Plimpton 322¹³. Ce qui ne signifie pas qu’il connaît le théorème de Pythagore. On peut savoir que les pommes tombent sans pour autant connaître tous les

¹⁰ En usage actuellement dans la plupart des pays du monde et qui est en réalité un héritage direct du système numéral de la brahmi (Inde), 3^{ème} siècle avant JC.

¹¹ Par temps nous entendons le temps défini à partir d’un phénomène physique (rayon lumineux servant à définir la seconde est celui dont la fréquence provoque une excitation bien déterminée d’un atome de césium-133).

¹² Depuis 1912, elle est en possession de l’Université Yale.

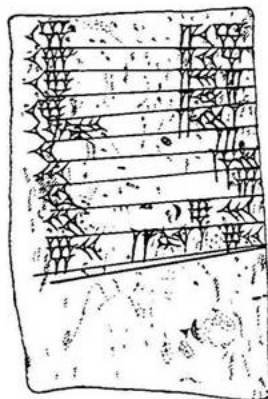
¹³ Cette tablette, dont on fixe la rédaction au XVIII^e siècle av. J.-C., comporte un tableau de nombres cunéiformes rangés sur 15 lignes par quatre colonnes. Ce tableau contient une liste de triplets pythagoriciens.

détails de la théorie gravitationnelle. Ce scribe maîtrise également parfaitement les techniques de multiplications, comme l'attestent de nombreuses tablettes d'écoliers mais également le travail de chercheur comme Christine Proust. Ci-dessous une tablette datant de la période paléo-babylonienne. Il s'agit du recto et du verso d'une tablette représentant la table de multiplication par 9.

Obverse.



Reverse.



1	9
2	18
3	27
4	36
5	45
6	54
7	63 1x60 + 3
8	72 1x60 + 12
9	81 1x60 + 21
10	90 1x60 + 30
11	99 1x60 + 39
12	108 1x60 + 48
13	117 1x60 + 57
14	126 2x60 + 6

Ce sont ses deux connaissances, celle de la loi qui lie la diagonale au côté du carré et celle des tables de multiplication qui font que le scribe peut attribuer un ordre de grandeur aux nombres sur la tablette (en base 10, il placerait la virgule au bon endroit). L'interprétation n'est donc pas immédiate dans ce cas. Revenons sur la graphie des nombres babyloniens. Notons que pour écrire des chiffres comme 59 la graphie est assez complexe et qu'elle requière pour être exécutée des procédures de comptage puisque qu'on réplique deux symboles respectivement 5 fois puis 9 fois. Elle requière également une procédure additive. La cardinalité n'apparaît qu'après qu'on ait fait les additions $10+10+10+10+10$, puis $50+9$. La multiplication des procédures pour accéder à la cardinalité ne peut que ralentir le processus sémiotique.

Régularités et similitudes

Si on définit le nombre comme cardinal d'une collection on retrouve la dimension iconique¹⁶ des representamina pour les chiffres strictement inférieurs à 10, y compris pour le zéro dont le representamen est un espace vide. Ils ressemblent à l'objet qu'ils représentent. On notera que la graphie jusqu'à 3 est semblable à celle des encoches préhistoriques¹⁷ et celle d'autres systèmes de numération. Il est également très intéressant de noter que les symboles clou $\uparrow$ et chevron $\nwarrow$ sont toujours rangés par groupe contenant au maximum 3 symboles et, qui plus est le nombre de groupes par chiffre n'excède pas 3. Ainsi, dans le chiffre  (49) on compte un groupe de 3 chevrons et 3 groupes de 3 clous. Nous constatons que cela correspond très exactement à la limite du subitizing¹⁸. Cette organisation peut certainement compenser les effets des **ralentisseurs du processus sémiotique** que peuvent être la virgule flottante, le comptage et les procédures additives.

¹⁴ Tablette provenant de Nippur et conservée à l'Université de Iéna (HS 0217a), Copie de H. Hilprecht, 1906, *Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur*, n°15, pl. 14. Début de Période paléo-babylonienne (pour les mathématiques 2000-1720 avant JC)

¹⁵ Traduction du recto de la tablette dans notre système de numération.

¹⁶ Au sens de la théorie des signes de C.S. Peirce

¹⁷ Nous faisons allusion au churinga de Lalinde

¹⁸ Phénomène physiologique voire article de Dehaene Stanislas et Cohen Laurent. *Journal of Experimental Psychology* : la perception humaine et la performance, Vol 20 (5), oct. 1994, 958975.

Comme la nôtre, la numération sexagésimale est une numération de position. La place des symboles sur le support d'écriture joue un rôle fondamental, le nombre $\text{I} <$ n'a pas la même signification que le nombre $< \text{I}$. On remarquera que si l'on restreint l'ensemble des nombres aux entiers strictement inférieur à 60 alors le système sexagésimal babylonien fonctionne comme un système décimal. Le nombre 10 joue donc aussi un rôle central dans le système de numération en base 60 des babyloniens.

L'existence d'autres representamina

F. Thureau-Dangin, un des pionniers des mathématiques cunéiformes distingue deux types de nombres babyloniens, les uns qu'il nomme nombres "abstrait", les autres qu'il nomme nombres "concrets".

*"Ce système très abstrait, qui ne distinguait pas entre les entiers et les fractions, qui ignorait l'ordre de grandeur des nombres, servait aux opérations arithmétiques, notamment aux « igi-arê », c'est-à-dire aux « divisions et multiplications » qu'il facilitait grandement. La tablette dite de l'Esagil [Ziggourat de Babylone ou "Tour de Babel"] illustre parfaitement la méthode employée par les Babyloniens et montre comment, dans leurs calculs, ils passaient du concret à l'abstrait, puis revenaient de l'abstrait au concret."*¹⁹

Les scribes babyloniens dissocient deux fonctions : il existe d'une part des nombres pour quantifier, en général de principe additif, utilisés en métrologie et dans les dénombrements, et d'autre part des nombres (sexagésimaux, positionnels, sans ordre de grandeur spécifié) pour calculer, plus précisément pour effectuer les multiplications et les divisions.

Les babyloniens utilisent des nombres pour mesurer des grandeurs. Ils mesurent des longueurs, des aires, des masses et des volumes. Chaque grandeur a son propre système d'unités. Par exemple, les longueurs se mesurent en Ninda (6m), en Canne (3m) et en Us (60 Ninda).

Par contre pour effectuer des calculs de périmètre, d'aire, de volume ou de masse, les babyloniens n'utilisent pas directement ces nombres, ils utilisent des tables métrologiques qui convertissent ces "nombres-mesure" en nombre "sans unité"²⁰, ils font les calculs avec les nombres "sans unité", puis toujours en faisant usage des tables métrologiques ils convertissent les nombres "sans unité" en "nombres-mesure". C'est cette dernière opération qui est la plus délicate, car comme l'indique les tables métrologiques le nombre "sans unité" peut être le representamen de plusieurs nombres "mesure". Ci-après une description synthétique des tables métrologiques, associant unités de mesures et nombre positionnel.

Unités de longueur	Danna (30 Us)	Us (60 Ninda)	Ninda (12 Kus)	Kus (30 su-si)	Su-si
Nombre sexagésimal	30	1	1	5	10

Unité d'aire	Gan (100 Sar)	Sar (60 Gin)	Gin (180 Se)	Se
Nombre sexagésimal	40	1	1	20

Unité de masse	Gu (60 ma-na)	Ma-na (60 gin)	Gin (180 Se)	Se
Nombre sexagésimal	1	1	1	20

¹⁹ Thureau-Dangin, "Nombres concrets et nombres abstraits dans la numération babylonienne." RA 29, p. 116-119, p. 117.

²⁰ Ce sont simplement les nombres sexagésimaux que l'on vient d'étudier.

Unité de volume	Gur (5 Bariga)	Bariga (6 Ban)	Ban (10 Sila)	Sila (60 Gin)	Gin
Nombre sexagésimal	5	1	10	1	1

L'existence de ces tables nous indique clairement qu'il existe des representamina des nombres qui sont autres que ceux construits avec les clous $\top$ et les chevrons $\nwarrow$. Les nombres peuvent être représentés par des objets réels et mesurables. Les tables métrologiques sont l'outil qui autorise l'existence de ce nous avons appelé les **chaines de conversion**, dans lesquelles les interprétants et representamina sonores ne sont pas nécessairement invoqués.

Revenons sur l'analyse de la tablette YBC 7289. La tablette comprend le dessin d'un carré et de ses diagonales. Les nombres 1,41421296 et 42,42638888 sont écrits sous la diagonale et le nombre 30 sur le côté du carré. Cette disposition des nombres sur la tablette est tout à fait appropriée et explicite. Il est clair pour l'auteur que le nombre 30 est identifié au côté du carré et que les nombres 1,41421296 et 42,42638888 sont associés à la diagonale, puisque l'auteur sait a minima que la longueur de la diagonale du carré est égale à 1,41421296 multiplié par la longueur du côté et a maxima il connaîtrait le théorème de Pythagore. En effet, en base 10 on remarque que le produit $30 \times 1,41421296$ est égal à 42,42638888, en base 60 en utilisant nos chiffres pour représenter ceux des babyloniens on obtient $30 \times (1+24/60+51/60^2+10/60^3) = 42+25/60+35/60^2$.

En conclusion les nombres de la tablette sont représentés par des objets géométriques et en particulier le nombre 1,41421296 est représenté par la diagonale du carré avec certitude, la probabilité obtenir par hasard la relation $30 \times (1+24/60+51/60^2+10/60^3) = 42+25/60+35/60^2$ étant quasi nulle.

III - QUELQUES CONJECTURES

1 Mise en forme du representamen : imitation économique, principe iconique

Il nous semble après avoir étudié différents systèmes de numération et en particulier le système babylonien que les premiers representamina sont des sortes d'« **imitation économique** » de collections d'objets réels. Par exemple, $\top \top \top$ possède en lui le caractère qui le rend signifiant, il y a bien une « ressemblance » avec une collection de trois pommes. Chez les babyloniens de zéro à neuf, c'est un **principe iconique** qui régit la prise de forme des representamina. En effet, le principe additif connu des mathématiciens est une sorte d'imitation de la réunion de plusieurs collections d'objets réels. Le terme économique est utilisé pour indiquer que le representamen occupe moins d'espace physique et nécessite moins de temps à être réalisé qu'un representamen iconique plus réaliste. Dessiner trois pommes prend plus de temps et occupe plus de place sur le papier que dessiner trois traits verticaux.

Les premiers representamina des nombres sont donc iconiques et viscéralement liés à la notion de cardinal d'une collection.

2 Mise en forme du representamen : les contraintes physiologiques

2.1 La formation du representamen premier obéit à la loi du subitizing

La mise en forme des premiers representamina d'un objet semble obéir à la « **loi du subitizing** ». En effet, un faisceau de présomption semble nous indiquer que l'organisation interne du representamen respecte la limite physiologique imposée par la « loi du subitizing ». Cette caractéristique que nous avons pu observer en étudiant la numération babylonienne, nous l'avons également observé dans d'autres systèmes de numération dont la nôtre. La formation du representamen semble répondre à une exigence de vitesse de création de l'interprétant. En d'autres termes, il est fabriqué en tenant compte de la physiologie humaine et de manière à être rapidement interprété. Il y a là une idée que nous

continuons actuellement de creuser dans nos recherches. Cette idée c'est l'idée qu'il existe une loi de la sémiotique, de la même manière qu'il existe des lois de la physique, qui formuleraient la proposition suivante : tout processus sémiotique tend à évoluer vers un processus sémiotique plus performant en termes de **vitesse d'exécution du processus**. Pour ce faire nous avons construit une partie expérimentale relativement conséquente. Une partie des expérimentations est déjà réalisée, l'autre partie est en cours de réalisation, les premières analyses de résultats sont en cours. En conséquence, nous ne sommes pas actuellement en mesure de valider cette proposition.

2.2 Les doigts de la main : une collection disponible et permanente.

Tout d'abord, un constat simple s'impose, la très grande majorité des systèmes de numérations reconnus comme tels par la communauté scientifique ont tous une relation particulière avec des collections de 5 ou 10 objets. Cette relation particulière existe y compris dans les systèmes de numération dont la base n'est pas la base 10. Les nombres babyloniens en sont un parfait exemple. En effet, bien que la numération babylonienne soit une numération positionnelle de base 60, si on considère uniquement le bloc des 60 chiffres babyloniens, il fonctionne comme un micro système dont la base est 10. Ce micro système présente la particularité d'être à la fois positionnel et additif. On ne peut que constater que la persistance des savants de toute époque à organiser les collections par paquets de 10, parfois de 5.

Les premiers representamina étant solidement liés à la notion de cardinal d'une collection, on peut raisonnablement supposer que des collections d'objets manipulables furent parmi les premiers representamina des nombres, les calculi²¹ (voire annexe 1) en sont un exemple parmi d'autres. La question que nous posons est : **notre propre corps détermine-t-il en partie la forme les premiers representamina** ? En particulier, le fait que nous ayons une collection de dix doigts toujours disponible contribue-t-il à la mise en forme des premiers representamina ? Nous ne répondrons pas exactement à cette question, mais nos recherches en cours tentent de répondre à une question connexe, quelles sortes d'interprétants créent les representamina utilisant les doigts à l'école maternelle (2-5ans) ?

3 Les chaines de conversion : cœur du processus d'apprentissage ?

3.1 Les chaines de conversion : la question du sens.

On retrouve dans les programmes officiels²² la question du sens. Dès la maternelle, les injonctions à donner du sens aux nombres sont présentes. « *Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont du sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but..* »²³, il s'agit là d'un extrait du programme de la classe de maternelle. Ce genre d'injonction ne se retrouve pas uniquement dans les programmes de maternelle, elle se trouve dans tous les programmes de mathématiques de la maternelle (2-5ans) au CM2 (9-10 ans). Donner du sens aux mathématiques est donc une préoccupation majeure de l'institution²⁴. La question est : mais qu'est-ce donc que le sens ? Rappelons quelques points de vue sur la question, commençons par celui de Frege parce qu'il est proche de celui développé par l'institution²⁴. Pour Frege le sens (sinn) correspond au mode de donation du référent (Bedeutung). Il correspond à une variation dans le mode de donation du référent²⁵. Ce qui est un point de vue assez proche de celui qui est présent dans les programmes officiels de l'école (2-10ans). L'idée générale est de résoudre des problèmes en utilisant le nombre, le nombre apparaissant comme étant l'outil le plus efficace à résoudre le problème (Le nombre étant le référent frégéen, le problème étant le mode donation du référent). Ce

²¹ Epoque de Suse II ou époque d'Uruk (3800-3100 avant JC).

²² B.O n°3 du 19 juin 2008.

²³ B.O n°3 du 19 juin 2008 p15.

²⁴ Par institution nous entendons toutes les instances qui font autorité sur ce qui se passe dans l'enseignement public français en termes de programmes et de pratiques préférentielles.

²⁵ cf l'exemple frégéen très connu de la planète Vénus (référent).

point de vue réduit considérablement la place accordée aux représentations des nombres, ce qui pour l'enseignant rend l'activité de l'élève difficile d'accès²⁶.

Comme nous l'avons précédemment exposé, le point de vue peircien se veut pragmatique et il l'est. Le sens est produit par une évolution du processus sémiotique dans la direction d'un interprétant choisi par l'institution (la plus part du temps il s'agit de l'interprétant ultime). Ce point de vue sur la question du sens est donc différent du point de vue frégéen, il présente l'avantage de nous faire connaître le niveau d'interprétation de l'élève puisque qu'on peut avoir accès à sa capacité à produire des chaînes de conversion (si on simplifie légèrement, on peut parler de sa capacité à passer d'un représentamen à un autre).

3.2 Les chaînes de conversion : le moteur des apprentissages numériques.

La phase expérimentale de nos recherches n'est pas encore terminée, cependant les premiers résultats semblent indiquer que les chaînes de conversion jouent un rôle **nécessaire et essentiel** dans tout apprentissage numérique. Il semble que l'existence de nombreuses chaînes soit une condition plus favorable aux apprentissages que l'existence de chaînes en faible quantité. Cependant à ce stade de nos recherches, et dans le souci de faire preuve de rigueur scientifique, nous n'avons pas encore d'éléments de preuves vraiment significatifs qui nous permettent de valider cette hypothèse.

IV - BIBLIOGRAPHIE

DELEDALLE G. (1978) Ecrit sur le signe de C.S.Peirce. *Ets Du Seuil* p121.p240

MULLER A. (2004) Approche sémiotique pour l'analyse a priori d'une tâche mathématique. *Raisons éducatives* p247-270

PROUST C. (2005) Le calcul sexagésimal en Mésopotamie .ENS. <http://www.math.ens.fr/culturemath/index.html>

O'CONNOR JJ et ROBERTSON EF. (2000) Egyptian numerals. *Saint Andrew University*. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_numerals.html

BLOCH I. (2008) Enseignement des mathématiques à des élèves "en difficulté" : quelques outils pour la formation, à partir de situations et d'une étude des signes mathématiques. XXXV^e colloque COPIRELEM Bombannes.

DEHAENE S. et COHEN L. (1994): La perception humaine et la performance, *Journal of Experimental Psychology* Vol 20 (5),

THUREAU-DANGIN F. (1932) Nombres concrets et nombres abstraits dans la numération babylonienne. *RA* 29, p. 116-119.

TIERCELIN Cl. (1993) CS.Peirce et le pragmatisme, *Paris, PUF*.

²⁶ Muller A. (2004) Approche sémiotique pour l'analyse a priori d'une tâche mathématique. *Raisons éducatives* p249

V - ANNEXE (1) LES CALCULI



1
cône



10
bille



60
grand cône



600
grand cône
perforé



3 600
sphère



36 000
sphère
perforée