CALCUL ET NUMÉRATION DÉCIMALE DE POSITION : PREMIER BILAN SUR UNE ACTION DE FORMATION CONTINUE

Valérie BAGOU
Professeur des Ecoles Maître Formateur
Ecole Bellevue 71150 CHAGNY
valerie.bagou@ac-dijon.fr

Résumé

A partir de quelques exemples issus d'une action de formation continue menée en 2010-2011, je présente des situations visant à mettre les enseignants en situation d'analyser leurs pratiques, à la recherche d'un enseignement cohérent et complémentaire de la numération et du calcul.

Percevoir la valeur des chiffres d'un nombre, s'affranchir de la difficulté de la langue française pour « dire » les nombres et s'appuyer sur la compréhension de la numération écrite chiffrée pour construire des techniques opératoires efficientes, d'abord mentales puis posées : une piste tant pour enseigner aux élèves que pour la formation des enseignants.

C'est à la demande de mon I.E.N. et de la Conseillère Pédagogique de ma circonscription que j'ai été amenée à intervenir dans la formation continue des Professeurs des Écoles en mathématiques, dans le cadre du projet de circonscription.

Cette action de formation ou « animation pédagogique » a été proposée aux collègues de ma circonscription, dans le temps des 18h de formation de leur service, 3x3h le mercredi matin.

Je devais amener mes collègues à interroger leurs choix pédagogiques et didactiques, leur proposer des pistes théoriques et des outils et sans doute aussi revenir sur des concepts ou des compétences à enseigner.

J'ai choisi de proposer des situations déclenchant des échanges entre collègues et l'analyse des pratiques, tout en proposant des thèmes, outils, situations d'apprentissage et documents, en lien direct avec les connaissances et compétences à acquérir par les élèves définies par les programmes.

Dans cet article, je développe certains contenus de cette formation abordés lors de ma communication pour illustrer l'intérêt qu'il semble y avoir à enseigner en complémentarité, la compréhension de notre numération écrite et le Calcul, afin de favoriser l'acquisition par les élèves des compétences attendues :

- L'étude de la numération décimale de position servant d'appui au calcul mental,
- Les compétences développées en calcul mental étant réinvesties dans la construction par les élèves des techniques opératoires posées,
- La construction et l'automatisation des techniques opératoires posées et le traitement des erreurs renforçant la compréhension de notre système de numération.

I - DES REPRÉSENTATIONS INITIALES À L'ÉMERGENCE DE BESOINS DE FORMATION

1 Mise en situation d'évaluation-diagnostic pour déclencher les échanges entre collègues et entrer en questionnement

Après une courte phase de présentation, les collègues ont bien accueilli cette mise au travail dans l'esprit d'une évaluation-diagnostic dont on partirait pour échanger sur nos pratiques. Il s'agissait de faire quelques exercices dont je reprendrai certaines productions au cours de l'article.

Je m'arrête ici sur l'exercice de calcul. J'ai donné une feuille photocopiée à chacun et expliqué la consigne oralement. Il s'agissait de calculer le plus rapidement possible puis on observerait comment chacun calcule.

<u>Calculer</u>

318 + 4783 *	823 + 145 *	754 – 241*	4703 – 1585*
205 x 78	670 x 609*	390 x 80,3	47,8 x 3,5
451 / 5 *	8934 / 24*	37,7 + 4,89	181,23 + 202 + 4,046

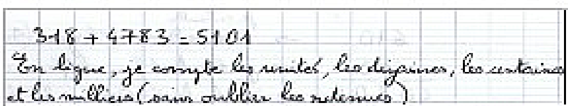
Cet exercice a déclenché beaucoup de réactions.

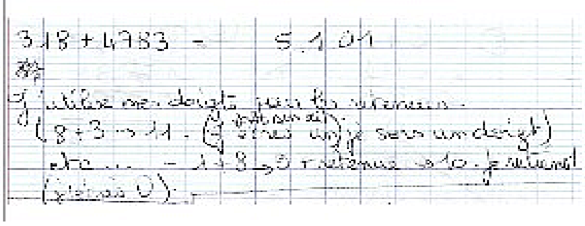
La première a été collective car les collègues n'avaient pas de feuille autre que l'exercice photocopié. « On pose ? » Ma réponse a été : «Vous faites comme vous voulez, moi je vous ai demandé de calculer le plus rapidement possible. »

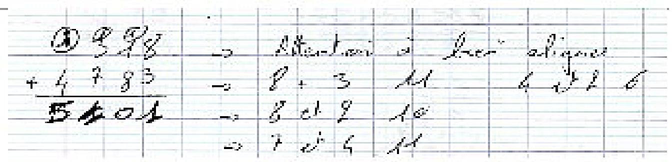
Ils ont tous souhaité avoir une feuille de classeur et ont commencé à poser. J'ai laissé faire un petit moment puis j'ai demandé s'ils avaient choisi de poser parce que c'était le moyen de calculer le plus rapide pour eux, en rappelant ma consigne. Un collègue a expliqué qu'il ne posait pas forcément « en colonnes » mais plutôt « en ligne ». Les autres ont expliqué qu'ils préfèrent « poser » (en colonnes) pour éviter tout « risque d'erreur ».

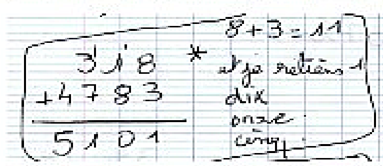
Par contre, ils se sont alors posé une deuxième question : « On fait comme avec les élèves ? ». J'avoue que cette question m'a surprise. Je leur demandais de calculer, à leur niveau adulte, le plus rapidement possible.

Du coup, une discussion s'est engagée : « Pourquoi ? Quelle différence entre votre façon de calculer rapidement et le calcul en classe ? ». Soit il n'y en avait pas du tout soit, les collègues calculent sans marquer les retenues, en parlant moins qu'avec les élèves.









Pour l'addition et la soustraction, ils ont décrit une technique unique, posée en colonnes en parlant chiffre par chiffre en commençant par les unités et « parlée » quelque peu différemment selon l'enseignant.

Puis ils se sont remis au travail, studieusement et non sans plaisir, jusqu'aux nombres à virgule et aux divisions.

- Là, une collègue s'est sentie en difficulté ou en tout cas, a verbalisé qu'elle n'aimait pas les divisions et que rien que de voir 8934 / 24 et d'imaginer tout le travail de calcul, elle stressait.
- Une autre a alors dit : « Jusque-là, ça allait bien mais là, je sature. Je prendrais bien une calculatrice pour aller plus vite ! »

J'ai bien sûr profité de la première prise de parole et encouragé la collègue à développer l'expression de son ressenti car bon nombre de nos élèves en difficulté ressentent ce malaise devant un exercice de calcul.

J'ai répondu à la deuxième : « Oui, pourquoi pas ? Ma consigne était de calculer le plus rapidement possible... » J'ai eu l'impression de les avoir choqués. Tous se sont arrêtés et encore une fois, un échange a démarré. En fait, je leur ai fait remarquer que des calculatrices étaient à leur disposition, comme des feuilles ou crayons ou divers matériels. Mais ils ne pensaient pas qu'ils avaient « le droit de prendre la calculatrice » et puis, il fallait que les enfants apprennent à calculer sans calculatrice !

Notre groupe s'est donc interrogé sur la place à donner à des outils d'aide au calcul et sur le degré de liberté avec lequel les élèves y ont recours ou non. Nous étions tous d'accord sur le fait que les élèves doivent mémoriser les tables et apprendre à calculer sans calculatrice.

Puis s'est engagée la phase de comparaison des techniques de calcul. Comme ils semblaient avoir tous eu besoin d'écrire, je leur ai demandé si dans l'exercice proposé certains calculs ne pouvaient pas se passer d'être écrits.

- Après réflexion et la démonstration par le collègue qui avait « posé en ligne », la réponse a été « oui pour 823 + 145 et 754 – 241 » puisque « sans retenue ». Mais ils préfèrent toutefois poser en colonnes 181,23 + 202 + 4,046. Par contre, ils se réfèrent tous à la technique posée traditionnelle, en parlant chiffre par chiffre, en commençant par les unités
- Pour la multiplication, ils posent tous de la même façon en parlant la technique « traditionnellement », chiffre par chiffre en commençant à multiplier par le chiffre des unités. Une différence existe entre ceux qui « décalent » avec des points et ceux qui écrivent les zéros. Pour une collègue le choix n'est pas stable et parfois elle décale, parfois elle écrit les zéros.
- Quant à la division, aucun n'a cherché l'ordre de grandeur du quotient ni utilisé la relation $D = d \times q + r$. Pour 451/5, seule une collègue « voit sans parler » alors que tous les autres commencent à parler la technique « traditionnellement » : « En 4... en 45 combien de fois 5... etc. »

J'ai alors posé la question des différentes formes de calcul à enseigner. Ils ont nommé le « calcul mental » et le « calcul posé » et ont défini le calcul mental :

- soit comme du calcul « dans la tête » sans support écrit : les tables, ajouter 10, 100 ou 1000, retrancher 9, ajouter 9, donner le double,
- soit comme une séance de travail pendant laquelle chacun choisit sa procédure et échange avec ses pairs pour voir laquelle est la plus rapide ou pour simplement comprendre comment l'autre fait
- sauf un collègue – qui avait tout posé en colonnes dans l'exercice de calcul - qui travaille avec ses élèves en s'appuyant sur le nom des nombres : [deux mille trois cent trente + mille cent cinq = trois mille quatre cent trente cinq]

Quant au « calcul posé », il consiste pour tous, en l'enseignement d'une technique « en colonnes », parlée chiffre par chiffre, en commençant par les unités, que les élèves doivent exercer pour faire comme montre l'enseignant.

De mon point de vue, en ce début de formation, aucun des stagiaires, ne s'appuie sur le caractère positionnel de notre numération pour calculer. J'ai proposé de poursuivre en nous référant aux textes pour préciser les termes et y trouver des pistes.

2 Les programmes

Les Programmes définissent les contenus d'enseignement que les enseignants traduisent en séquences d'apprentissage et donc en activités de l'élève : ils sont de toute évidence des supports privilégiés à étudier en formation, y compris en formation continue.

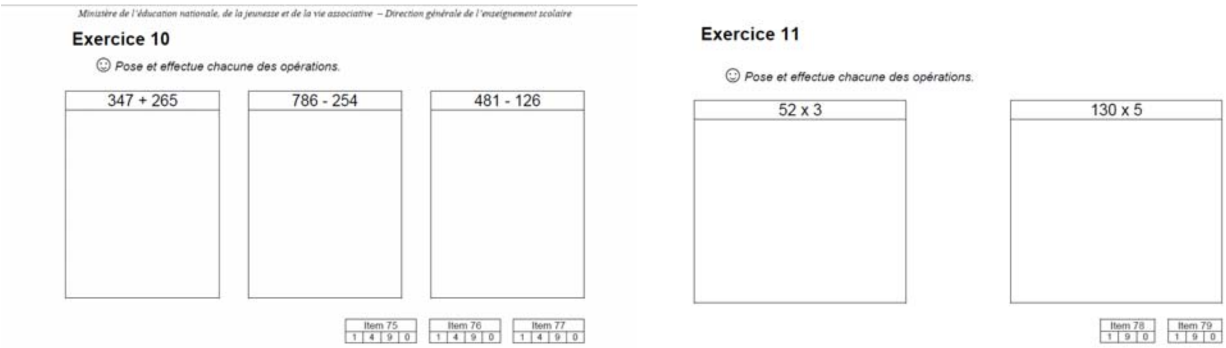
Pour cette action de formation, j'avais préparé un support (annexe A) dont l'intérêt par rapport aux programmes tels qu'ils sont édités ou publiés en ligne, est l'alignement des sujets d'étude sur les cinq colonnes du CP au CM2.

Chacun a reçu le document au format A4 et j'ai affiché un agrandissement du document au tableau pour situer le passage dont l'un parlerait à l'ensemble du groupe. Les réactions ont été immédiates et de deux ordres :

- Ils ont été sidérés de lire « Effectuer un calcul posé » dans les trois colonnes du cycle 3.
- Ils ont été renforcés dans leur ressenti par rapport aux difficultés persistantes de certains élèves qui n'acquièrent pas les compétences qu'ils devraient à un moment donné. Comme « *Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels jusqu'à 100* » au programme du CP, et « *Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication* » au programme du CE2.

Un échange s'est engagé ; le groupe est entré dans un questionnement. Certains ont comparé les contenus des programmes avec les exercices des évaluations nationales de CE1 par rapport au calcul posé et ont relevé fort pertinemment ce qu'ils ont nommé « une incohérence ».

En effet, il est demandé de « poser » dans l'évaluation CE1 (extraits du cahier de l'élève 2011) alors que


Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative – Direction générale de l'enseignement scolaire

Exercice 10

☺ Pose et effectue chacune des opérations.

347 + 265 | 786 - 254 | 481 - 126

Item 75 | Item 76 | Item 77

Exercice 11

☺ Pose et effectue chacune des opérations.

52 x 3 | 130 x 5

Item 78 | Item 79

cette compétence est attendue en CE2 d'après les programmes.

En tant que formateur, j'ai proposé un autre document rassemblant des extraits de texte sur le calcul (Rapport Durpaire, le Calcul à l'école élémentaire, Calcul mental) dont la lecture invite au questionnement sur les pratiques et conforte chacun dans ce difficile mais nécessaire travail de prise de recul et de remise en question. Elle leur a permis de prendre conscience qu'eux-mêmes calculent mentalement en « posant » dans leur tête et en parlant chiffre par chiffre en commençant par les unités.

Nous avons convenu que les textes donnent des directives, énoncent des préconisations et qu'une bonne connaissance de ceux-ci n'empêche pas de garder un regard critique. Dans un souci de cohérence du point de vue de l'élève, la mise en œuvre des textes suppose un travail de cycle et de liaison inter-cycles.

Finalement, des besoins de formation ont émergé : « Comment faire pour qu'ils (les élèves) apprennent » tel point du programme ? En particulier :

- la mémorisation des tables d'addition et de multiplication (que je n'aborderai pas dans cet article)
- la numération entre 60 et 100
- le calcul mental et posé.

II - DES SITUATIONS POUR COMPRENDRE LES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES

Les programmes nationaux définissent que c'est à l'école primaire que les élèves s'approprient le système de numération décimale de position, qu'ils élaborent et automatisent des procédures mentales et écrites de calcul. Mais les résultats aux évaluations nationales montrent que nombre d'élèves ne maîtrisent pas les connaissances et compétences attendues. Et les collègues ayant choisi de participer à cette formation constatent au quotidien les difficultés de leurs élèves.

Au départ, celles-ci sont verbalisées ainsi par les collègues listant les non-réussites des élèves.

« Ils ne mémorisent pas les tables.»,

« Ils ont du mal à lire et à écrire les nombres entre 60 et 99 en CE2 et même certains en CM ».

Véronique Parouty a montré que « *partir des erreurs des élèves en formation et agir sur ce que peuvent en faire les enseignants permet une augmentation significative des acquisitions des élèves* ».

Au cours de cette action de formation, j'ai donc proposé deux types de situations permettant aux collègues de prendre conscience de difficultés qui peuvent expliquer un certains nombre d'erreurs des élèves :

- certaines intrinsèques à la discipline ;
- d'autres provenant des choix de l'enseignant qu'il est alors amené à questionner dans la perspective d'une recherche de cohérence.
-

1 Un exemple de situation de formation permettant aux collègues de percevoir les difficultés liées à la Numération et à son enseignement

Proposer en formation d'essayer de comprendre les difficultés des élèves m'a semblé pertinent. J'ai proposé aux collègues de découvrir un nouveau système de numération en leur demandant la progression à suivre depuis la maternelle.

1.1 « Apprendre » la comptine orale

[rond, triangle, rondo, rondo-rond, rond-tri, trio, tiro-rond...]

Comme la tâche, exclusivement orale, a paru d'emblée difficile aux collègues, j'ai associé un nombre de doigts levés l'un après l'autre à la chaîne sonore.

Les élèves de maternelle ne lisant pas, il est impossible d'écrire les « mots-nombres » au tableau pour servir de point d'appui et d'aide à la mémorisation. Pour travailler la mémorisation des cinq premiers nombres, j'ai proposé rapidement quelques activités pratiquées en maternelle, avec un gros dé, les flash-cards de constellations organisées ou non, avec les doigts ou leur représentation dessinée.

Les collègues ont demandé pourquoi [rondo-rond/rond-tri plutôt que rond-rond/rond-triangle ou rondo-rond/rondo-triangle] ? Ils auraient préféré une régularité de cette numération orale. Leur ayant renvoyé la question, ils ont compris que nous pointions ainsi l'irrégularité de la numération orale française : onze, douze, seize, vingt, trente ...

1.2 « Apprendre à compter » des objets

Sur de petites collections, les collègues ont procédé par un « comptage expert » grâce :

- à la mémorisation précédente des premiers mots-nombres récités dans l'ordre,
- en les associant un à un aux objets sans erreur d'énumération telle que la définit Joël Briand,
- et au savoir acquis que le dernier mot prononcé correspondait à la quantité d'objets.

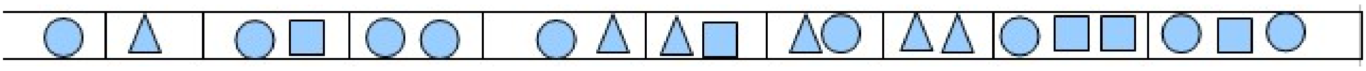
Au passage, ils ont pu constater que s'ils ne pouvaient dénombrer de plus grandes collections par l'utilisation de la comptine orale dont ils ne connaissaient pas la suite, ni en s'aidant du système de numération écrit pas encore introduit, ils pouvaient toutefois comparer des collections d'objets, par appariement terme à terme en rapprochant les objets des deux collections, et en commençant aussi à les organiser.

C'est une piste que propose Eric Mounier :

- « *mettre en œuvre des situations de comparaison de collections d'objets visant à amener les élèves à organiser les collections en utilisant des groupements a maxima, qui restent visibles pour s'y référer* ».
- puis dans un deuxième temps, « *des situations mettant en jeu le codage des organisations, leur mise en signes (et non de comprendre un code ou de le déchiffrer) en se passant de la numération parlée française.* » [1]

1.3 Apprendre à lire, dire et écrire les premiers nombres en chiffres

Dans la plupart des classes, on trouve une frise numérique horizontale. J'ai donc proposé d'aider à la découverte du nouveau système de numération en écrivant la suite suivante au tableau :



Les collègues ont récité la comptine orale en suivant la suite écrite et nous avons pu continuer de « dire » les nombres en les regardant, écrits en signes.

Au passage, je leur ai fait remarquer, qu'ici c'était plus facile, que pour nos élèves avec notre système de numération : j'ai choisi volontairement des mots ou signes oraux en lien avec les signes écrits – en tout cas pour des adultes connaissant le nom de ces formes géométriques.

Mais il leur a fallu un certain temps pour comprendre le système... l' « apparition » du <carré> posant problème.

Comme la lecture restait difficile, une collègue a proposé d'utiliser des couleurs pour aider, comme en classe ou dans les fichiers :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

[1] Je ne développe pas dans cet article le travail, essentiel à mon avis en GS/CP, visant la compréhension du caractère décimal de notre système numération : manipulations sur des collections d'objets visant à communiquer sur les quantités et nécessitant de représenter puis de coder/décoder les nombres en découvrant l'intérêt de « grouper » par 10 et 5 et la nécessité de mettre en place des conventions pour écrire /dire les nombres.

Je pense que coder la valeur d'un chiffre par la couleur détourne, et ce dès l'étude des premiers nombres à 2 chiffres, retarde voire empêche la compréhension que c'est l'ordre des chiffres et leur position relative qui permet de coder la valeur des chiffres dans un nombre.

L'étape codage par la couleur pourrait être une piste...rendant inutile d'ordonner les chiffres, voire de les présenter en ligne.

Ajouter des couleurs, peut par contre aider au calcul ou permettre de représenter des procédures de calcul mental.

J'ai plutôt proposé que l'un d'entre eux vienne récrire la suite verticalement et que nous employions une langue régulière.

Après réflexion, nous avons choisi celle notée ci-contre, marquant le passage à l'ordre supérieur tout en gardant une régularité dans les mots favorisant la compréhension et la mémorisation.

□	
○	rond
△	triangle
○□	rondo
○○	rondo-rond
○△	rondo-triangle
△□	trianglo
△○	trianglo-rond
△△	trianglo-triangle
○□□	rondi
○□○	rondi-rond
○□△	rondi-triangle
○○□	rondi-rondo
○○○	rondi-rondo-rond
○○△	rondi-rondo-triangle
○△□	rondi-trianglo

C'est lorsque les collègues ont compris que le signe <carré> équivalait au chiffre zéro que les collègues ont ajouté le nombre [zéro].

Après discussion, nous avons gardé ce mot dont nous avons pu constater qu'il ne sert ni en français ni dans une langue intermédiaire régulière pour dire les nombres. Nous avons ainsi pointé le rôle particulier du zéro dans notre système de numération (annexe F).

Ce travail a permis la compréhension du nouveau système de numération : « On groupe par < 3 doigts montrés> et le signe <carré>, c'est le chiffre zéro. »

Il devenait relativement facile pour des adultes de réussir des exercices sur les nombres, en s'appuyant sur une compréhension du système de numération, compétence en construction chez les élèves lorsqu'on leur présente ce type d'activités.

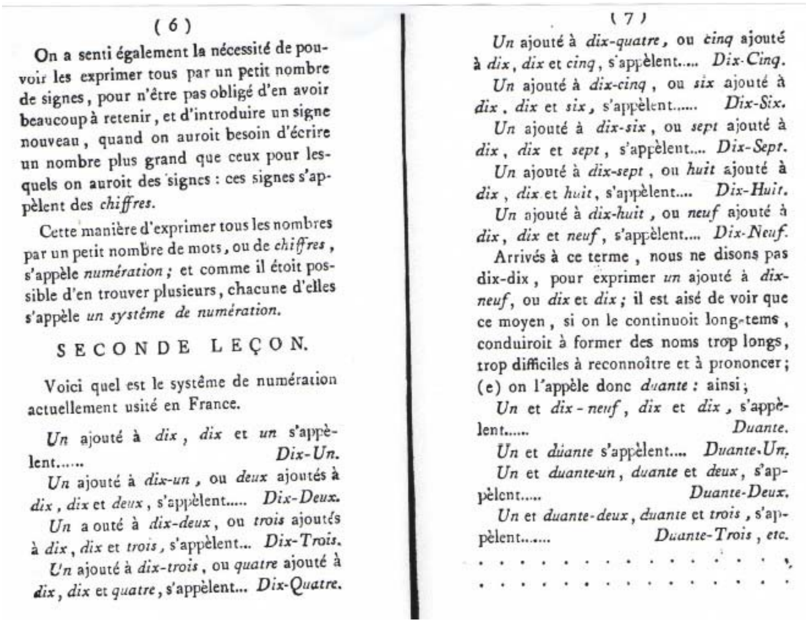
Sans parler, uniquement par écrit, nous avons :

- donné le nombre suivant, le précédent,
- ajouté, enlevé <rond>, <rondo>, ou <rondi>,
- décomposé/recomposé canoniquement,
- comparer deux nombres, ordonné plusieurs nombres.

2 Des pistes pour travailler la numération écrite chiffrée

Finalement, les collègues étaient prêts à recevoir de la théorie en (re)découvrant les travaux de Karen Fuson aux USA et de Rémi Brissiaud en France qui ont proposé le passage par une langue intermédiaire régulière.

Des extraits de textes de Rémi Brissiaud et de la méthode Tchou ou du texte de Condorcet « Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité » ci-contre, ont été proposés à l'analyse.



(6)

On a senti également la nécessité de pouvoir les exprimer tous par un petit nombre de signes, pour n'être pas obligé d'en avoir beaucoup à retenir, et d'introduire un signe nouveau, quand on auroit besoin d'écrire un nombre plus grand que ceux pour lesquels on auroit des signes : ces signes s'appèlent des *chiffres*.

Cette manière d'exprimer tous les nombres par un petit nombre de mots, ou de *chiffres*, s'appèle *numération* ; et comme il étoit possible d'en trouver plusieurs, chacune d'elles s'appèle *un système de numération*.

SECONDE LEÇON.

Voici quel est le système de numération actuellement usité en France.

Un ajouté à *dix*, *dix* et *un* s'appèlent...... *Dix-Un.*

Un ajouté à *dix-un*, ou *deux* ajoutés à *dix*, *dix* et *deux*, s'appèlent..... *Dix-Deux.*

Un a outé à *dix-deux*, ou *trois* ajoutés à *dix*, *dix* et *trois*, s'appèlent... *Dix-Trois.*

Un ajouté à *dix-trois*, ou *quatre* ajouté à *dix*, *dix* et *quatre*, s'appèlent... *Dix-Quatre.*

(7)

Un ajouté à *dix-quatre*, ou *cinq* ajouté à *dix*, *dix* et *cinq*, s'appèlent..... *Dix-Cinq.*

Un ajouté à *dix-cinq*, ou *six* ajouté à *dix*, *dix* et *six*, s'appèlent...... *Dix-Six.*

Un ajouté à *dix-six*, ou *sept* ajouté à *dix*, *dix* et *sept*, s'appèlent.... *Dix-Sept.*

Un ajouté à *dix-sept*, ou *huit* ajouté à *dix*, *dix* et *huit*, s'appèlent.... *Dix-Huit.*

Un ajouté à *dix-huit*, ou *neuf* ajouté à *dix*, *dix* et *neuf*, s'appèlent.... *Dix-Neuf.*

Arrivés à ce terme, nous ne disons pas dix-dix, pour exprimer *un* ajouté à *dix-neuf*, ou *dix* et *dix* ; il est aisé de voir que ce moyen, si on le continuoit long-tems, conduiroit à former des noms trop longs, trop difficiles à reconnoître et à prononcer ; (e) on l'appèle donc *duante* : ainsi ;

Un et *dix-neuf*, *dix* et *dix*, s'appèlent...... *Duante.*

Un et *duante* s'appèlent.... *Duante-Un.*

Un et *duante-un*, *duante* et *deux*, s'appèlent..... *Duante-Deux.*

Un et *duante-deux*, *duante* et *trois*, s'appèlent...... *Duante-Trois, etc.*

. . . .

Le travail d'Eric Mounier peut éclairer la réflexion, concernant les choix liés au caractère positionnel de notre numération écrite chiffrée :

- « *En effet à partir des representamens graphiques 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 désignant les premiers nombres entiers, la théorie des langages permet de fournir un processus de mise en signes de tous les nombres entiers* ».
- « *l'écriture de position est liée au fait de n'utiliser que les coefficients dans un développement obtenu dans une échelle de numération. Les possibilités graphiques (disposition ordonnée des chiffres désignant les coefficients) permettent de fournir les informations pour retrouver le développement complet d'un nombre, c'est-à-dire la relation entre coefficients et ordres.* »
- « *Finalement, la lecture de gauche à droite des chiffres est couplée à l'ordre décroissant des ordres* »

Dans l'esprit d'un échange de pratiques, les collègues étaient curieux de connaître ma « façon d'enseigner » c'est-à-dire la mise en œuvre de mes choix didactiques.

2.1 Une langue annexe régulière pour « coller » à la numération écrite chiffrée

Par exemple en CE2 afin de remédier aux difficultés persistantes en numération mais aussi dès la MS où on commence à fréquenter les nombres écrits en chiffres, j'introduis une langue intermédiaire régulière que je nomme « langue des maths », pour amener les élèves à observer la régularité de la numération écrite et s'appuyer ensuite sur sa compréhension selon la comptine suivante.

[zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, un-dix, un-dix un, un-dix deux, …, deux-dix, …, un-cent, ...un-mille...]

Afin de rechercher un maximum de cohérence, j'indique à l'oral le coefficient correspondant au chiffre écrit de notre numération écrite, pour chaque ordre, alors qu'en français ou que dans la proposition de Rémi Brissiaud dans la langue de Tchou, on ne dit pas le coefficient « un » pour aucun des ordres.

1209 Tchou → [mille deux cent et neuf] langue des maths → [un-mille deux-cent neuf]

J'introduis également le mot [et] comme dans [deux-dix et (encore) trois] ou [quatorze, c'est dix et encore quatre]. En parlant, on peut écrire ------>

20 + 3 → 23 14= 10+ 4

20	14
3	10
23	4

Il est vrai qu'on présente alors ici la numération écrite en corrélation avec une numération parlée mais ainsi, l'attention des élèves est attirée, dès les premiers apprentissages, sur le fait que le chiffre <2> de 23 ne vaut pas 2 mais 20.

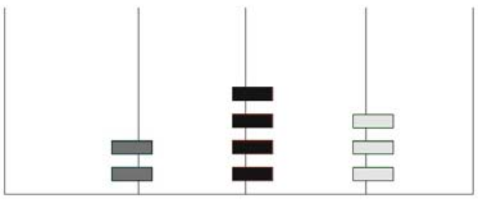
Ceci évidemment en lien avec du matériel qui se remplit de dix objets et se ferme comme les boîtes de dix œufs ou les boîtes Picbille ainsi qu'avec l'utilisation réfléchie d'autres matériels pour écrire/représenter les nombres.

2.2 Distinguer des utilisations de matériels et des pratiques bénéfiques aux apprentissages, d'autres potentiellement « risquées » ou insuffisamment élaborées pour servir les apprentissages liés à la valeur positionnelle des chiffres

Voici quelques entrées pour déclencher les échanges et la réflexion des collègues en formation continue.

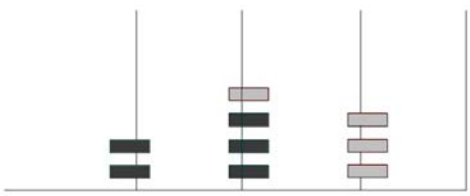
Les couleurs : une entrée en formation pour parler numération de position

Lorsqu'on achète des abaques pour sa classe, bien souvent les perles sont multicolores. Mis en situation d'expliquer leur pratique ou de rechercher comment l'enseignant peut utiliser ce matériel, les collègues proposent d'écrire des nombres avec l'abaque.



Comme on peut souvent l'observer dans les classes, les couleurs sont attribuées à une tige puis à un chiffre.

Or la couleur ne code pas pour la valeur dans notre système de numération. L'abaque pourrait pourtant servir à comprendre ou à renforcer la compréhension de celui-ci.



Premièrement en ne mettant pas toutes les tiges obligeant à orienter l'abaque, les unités à droite.

Deuxièmement en fournissant des boîtes contenant des perles d'une seule couleur, en particulier au cycle 2 ou bien, en CM, proposer les boîtes multicolores mais mettre les élèves en situation de réfléchir à l'utilisation des couleurs.

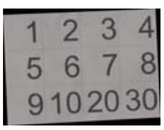
Celles-ci pouvant par contre servir lorsqu'on utilise l'abaque pour calculer : **2300 + 130**

Ecrire la date : une opportunité pour découvrir la mise en signes écrits des nombres

Le « rituel de la date » en maternelle et en cycle 2 doit permettre de vivre et découvrir les nombres. Cependant, dans la majorité des classes et sur les sites proposant des documents à imprimer pour préparer le matériel de la date, on observe :

- 31 cartons pour le quantième, pratiquement toujours monochromes
- parfois 31 cartons avec une deuxième couleur pour le chiffre des dizaines
- très rarement, la série monochrome suivante : 0 1 1 2 2 3 3 4 5 6 7 8 9

Si la troisième proposition démontre une réflexion de l'enseignant pour travailler la numération avec le « rituel de la date », les enfants verbalisent [quinze], [C'est un et cinq] ou [C'est cinq et un]...



J'ai personnellement essayé une autre solution dès la Moyenne Section, pour la date (ordinal) et le nombre de présents (cardinal), utilisant les cartons Montessori (monochromes évidemment) présentés ci-contre, en parallèle à tout un travail sur le groupement par 10 pour le nombre de présents. Celle-ci semble favoriser la découverte de notre système de numération **sans faire l'impasse sur son caractère positionnel**.

__15__ [quinze], [un-dix cinq] ou [un-dix et encore cinq] *__24__ [deux-dix quatre] ou [deux-dix et encore quatre]*

Pour écrire [douze ou un-dix et encore deux], le matériel impose un ordre dans la manipulation : on prend l'étiquette de 2 chiffres <10> sur laquelle on fixe à la gomme-fixe l'étiquette de un chiffre <2> sur le zéro. S'ils se trompent dans la manipulation au départ, des élèves de MS sont capables de corriger lorsqu'ils voient <20> au lieu de <12> inscrit sur l'éphéméride par exemple.

Dès le début des apprentissages et jusqu'au CM, ce matériel peut favoriser :

- l'appropriation visuelle de la valeur des chiffres (tous nos élèves ne sont pas auditifs)
- le travail du lire/dire/écrire les nombres, qu'on fait à partir de la gauche, où se trouve le chiffre d'ordre supérieur (« le plus fort » ou « qui vaut le plus »)
- la compréhension de la décomposition/recomposition décimale canonique par la manipulation
- l'observation de convergences ou de divergences avec la numération orale

Ce matériel sous forme de cartons opaques ou transparents autrefois commercialisé est facilement fabricable par les enseignants sous deux formes : avec les zéros ou avec les points.

2 0 0 0	**2 . . .**
1 0 0	**1 . .**
4 0	**4 .**
7	**7**

On peut imaginer l'intérêt de celui-ci si on l'utilise en lien avec la numération parlée pour les nombres comprenant des coefficients nuls comme 3020. L'élève dit/prend/écrit 3000 et 20.

Les erreurs de décomposition du type 2000 + 100 + 00 + 40 + 7 n'apparaissent plus.

C'est en apprenant à écrire les nombres manuellement, sur le clavier de l'ordinateur ou de la calculatrice dès le cycle 2, qu'on apprend à écrire le chiffre 1 en premier suivi du chiffre 5 pour quinze.

2.3 Enseigner la particularité du zéro

Je trouve particulièrement risqué pour la construction conceptuelle de dire et d'écrire au tableau des choses différentes. J'ai voulu attirer l'attention des collègues sur ce point. J'ai demandé à un volontaire d'écrire le nombre [deux-cent trois] au tableau.

Nous avons constaté que si le maître écrit les chiffres 2, 0 puis 3 en disant [deux-cent trois] il y a un temps de confusion entre ce que l'élève entend et ce qu'il voit, à savoir :

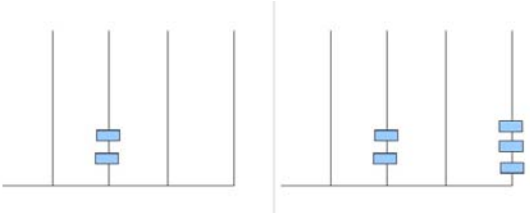
<2> puis <20> alors qu'il entend [deux-cent]... puis il voit <203> pendant [trois]

On peut penser que si l'enseignant a pour habitude d'écrire en parlant comme ci-dessus, puisque lui a intégré le système de numération et sa mise en signes oraux et écrits, les élèves peuvent éprouver des difficultés. Ceux-ci peuvent penser écrire juste en écrivant <21003>. Ce type d'erreur fréquente montre que l'élève tente de reproduire la façon de faire de l'enseignant et qu'il tient compte - à sa manière d'apprenant - de tous les mots qu'il entend.

Et qu'en est-il d'écrire <1> pour 10 puis <5> en disant [quinze] dès la maternelle ?

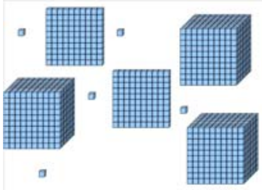
Je propose donc dès le début des apprentissages :

- Le marquage systématique de points (<2 . . > dans l'exemple précédent) sur lesquels viennent s'ajouter les chiffres-coefficients prononcés sur le point correspondant à l'ordre et d'ajouter le(s) zéro(s) après. Cette procédure aide à l'acquisition des grands nombres en CM.
- L'utilisation de l'abaque pour aider à l'écriture chiffrée comme ci-contre. L'élève est amené à réfléchir pour positionner les perles sur les tiges. On prend le nombre de perles donné par le mot-chiffre-coefficient (2) et on les place sur la tige correspondant à l'ordre (cent). Puis pour [trois].



- L'absence du chiffre zéro dans le tableau de numération. Il suffit de placer le mot-chiffre-coefficient dans la bonne colonne-ordre, comme sur l'abaque ou de tenir compte de la position dans telle colonne pour lire, en particulier avec la langue des maths. Comme sur l'abaque, c'est en « sortant» les nombres du tableau, pour les écrire au tableau, sur le cahier ou sur un clavier numérique, dans des situations de communication, que la présence de zéros devient nécessaire. Les élèves en prennent ainsi conscience.

m	c	d	u
3	2		5



- L'utilisation de lettres pour marquer l'ordre, en écriture intermédiaire, qui par expérience est plus facilement et rapidement maîtrisée par les élèves que l'écriture avec les zéros en ligne. 3m 2c 5u 3000 + 200 + 5 3x1000 + 2x100 + 5x1 D'autres écritures sont possibles comme 3M 2C 5I en lien avec la numération romaine qu'on rend ainsi multiplicative à partir de l'écriture dite ancienne MMMCCIIIII.

3000
200
5

Travailler le passage d'une représentation à l'autre, dans les deux sens à chaque fois, ou s'y référer lorsqu'il y a eu une erreur, en numération ou en calcul, aide les élèves à mieux maîtriser la numération écrite chiffrée (annexe B).

Si ces exercices peuvent se faire sans parler les nombres ou en utilisant la langue régulière intermédiaire, il reste à apprendre à maîtriser la numération orale française. En plus d'étudier les mots comme quatre-vingts = 20 x 4 par exemple, on peut aider les élèves en difficultés en proposant de traduire la langue des maths en français.

Le dictionnaire des nombres de 0 à 99

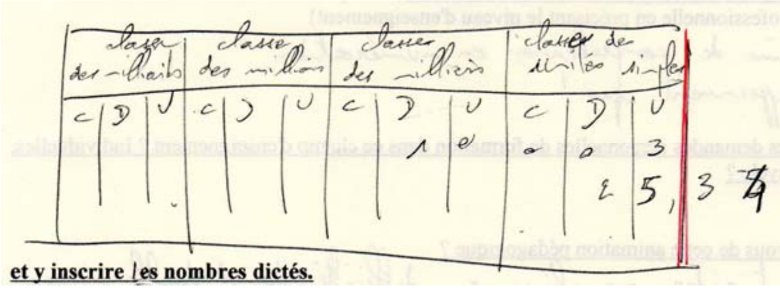
	0 zéro	1 un	2 deux	3 trois	4 quatre	5 cinq	6 six	7 sept	8 huit	9 neuf
	10 dix	11 onze	12 douze	13 treize	14 quatorze	15 quinze	16 seize	17 dix-sept	18 dix-huit	19 dix-neuf
vingt	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
trente	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
quarante	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
cinquante	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
soixante	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
soixante	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
quatre-vingt(s)	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
quatre-vingt(s)	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Voici le dictionnaire que l'on peut élaborer avec ses élèves. (source du document original inconnue)

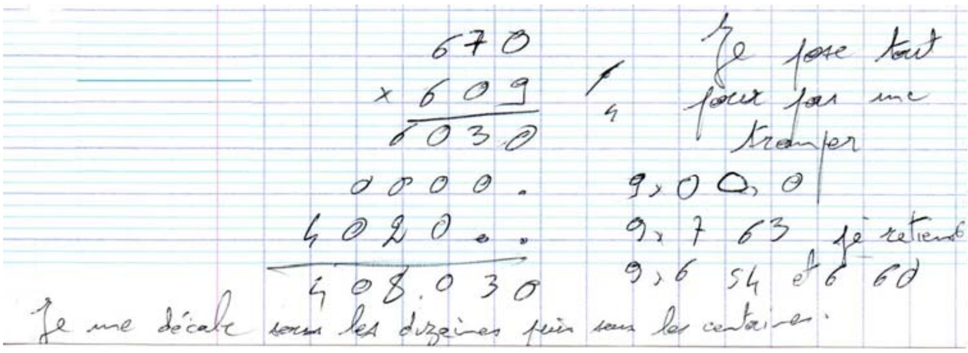
Enfin, en s'appuyant sur la compréhension de la numération écrite chiffrée, en particulier la valeur de chacun des chiffres d'un nombre, les élèves peuvent élaborer des procédures de calcul efficaces.

III - RÉFLEXION SUR LA CONSTRUCTION DE LA TECHNIQUE POSÉE DE LA MULTIPLICATION POUR PRÉSENTER L'INTÉRÊT D'ENSEIGNER NUMÉRATION, CALCUL MENTAL ET TECHNIQUES OPÉRATOIRES EN COMPLÉMENTARITÉ.

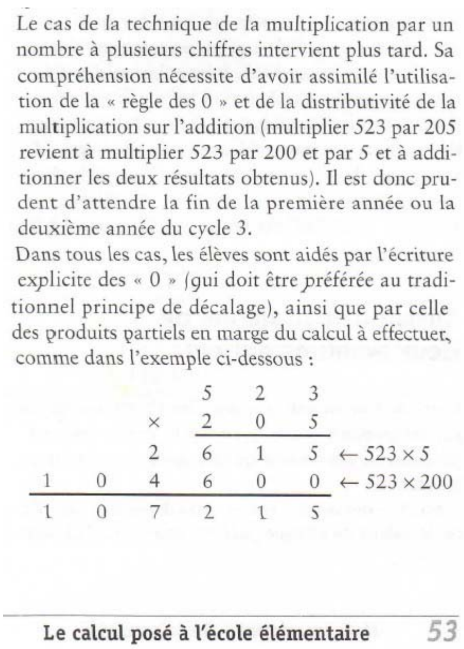
Mis en situation d'exposer et de comparer comment ils utilisent un matériel comme le tableau de numération (noté TN par la suite) et comment ils calculent eux-mêmes ou enseignent les techniques opératoires posées (TOP), les collègues ont pris conscience des difficultés potentielles pour leurs élèves, impliquées par certains de leurs choix. J'expose ici un exemple.



Tous les enseignants présents écrivent les zéros dans le TN. Dans la TOP de la multiplication, la plupart n'écrivent pas les zéros pour multiplier par 10, 100, etc. (décalage simple ou avec pointage) et aucun n'écrit les produits partiels alors qu'il est préconisé de le faire.



Si on écrit au tableau 78 x 205 , certains se sentent obligés de poser en suivant l'ordre, 78 en haut et 205 en bas en alignant les groupements, mais sont dérangés par l'aspect visuel. D'autres, expliquent qu'on doit poser le nombre qui a le plus de chiffres en haut et l'autre en bas...pour « aligner plus facilement es unités avec les unités »



Le cas de la technique de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres intervient plus tard. Sa compréhension nécessite d'avoir assimilé l'utilisation de la « règle des 0 » et de la distributivité de la multiplication sur l'addition (multiplier 523 par 205 revient à multiplier 523 par 200 et par 5 et à additionner les deux résultats obtenus). Il est donc prudent d'attendre la fin de la première année ou la deuxième année du cycle 3.

Dans tous les cas, les élèves sont aidés par l'écriture explicite des « 0 » (qui doit être préférée au traditionnel principe de décalage), ainsi que par celle des produits partiels en marge du calcul à effectuer, comme dans l'exemple ci-dessous :

			5	2	3	
		×	2	0	5	
		2	6	1	5	← 523 × 5
1	0	4	6	0	0	← 523 × 200
1	0	7	2	1	5	

Le calcul posé à l'école élémentaire 53

La confrontation avec d'autres pratiques, comme la technique allemande de la TOP de la multiplication renforce le sentiment que nous imposons des modèles, souvent sur le mode transmissif. Les collègues ont parlé d'un « conditionnement » remontant à leur propre scolarité.

205 x 78

15600

390

15990

De plus, dans la technique allemande, on choisit le multiplicateur dans l'intention de se simplifier les calculs.

Ils ont également pris conscience qu'ils parlent la technique posée à la française, en commençant à multiplier par le chiffre des unités, en nommant les chiffres sans tenir compte de leur valeur positionnelle et qu'ils [décalent] ou [mettent/écrivent tant de zéros]. Donc ils montrent le chiffre valant 200 en disant [deux].

Or en calcul mental, on amène à utiliser la distributivité de la multiplication : 26 x 7 = (20 x 7) + (6 x 7) . Puis on apprend à multiplier par 11, 21, 12, etc...

En s'appuyant sur ce travail, on peut proposer en calcul mental, de multiplier par des nombres de deux ou trois chiffres. Tous les élèves continuent à décomposer le multiplicateur pour commencer à multiplier par le chiffre des dizaines ou des centaines selon le cas, et non par celui des unités.

34 x 12 = (34 x 10) + (34 x 2)   26 x 105 = (26 x 100) + (26 x 5)

Si la TOP n'est que la transcription de la procédure mentale, on continue de parler juste, ce qui a pour effet de ne perdre aucun élève dans l'écriture des produits intermédiaires et dans les calculs. Plus de lignes de zéros ! Cette erreur n'apparait plus.

Si on reprend l'exemple du ***Calcul posé à l'école***, il suffirait d'accepter d'inverser l'ordre des produits partiels (d'ailleurs opposé au chemin mental décrit neuf lignes au-dessus dans le document) et de parler comme suit, pour rester proche de la technique traditionnelle en France :

- [Je multiplie par deux cent cinq]
- [Je multiplie d'abord par 200 : je multiplie par 100 (en écrivant deux zéros de droite à gauche), et je multiplie par 2, 2x3 6, 2x2 4, 2x5 10]
- [Ensuite, je multiplie par 5 : je multiplie par 5, 5x3 15, 5x2 10 + 1 11, 5x5 25 + 1 26]

Au passage, on peut remarquer que la majorité des enseignants demandent d'*aligner* dans des colonnes, en lien avec le tableau de numération probablement. Non seulement, le vocabulaire employé ne correspond pas à l'action attendue et l'alignement des chiffres n'est pas facilement réussi par tous dans une colonne. On peut demander d'aligner sur les *lignes*, en se référant à l'abaque et à sa représentation. Mais l'alignement n'est nécessaire, car facilitateur, que pour additionner la somme intermédiaire mais inutile pour le produit (voir technique allemande).

Ce travail de réflexion renvoie l'enseignant à ses choix, qu'il pourrait modifier au sein d'une équipe de cycle ou d'école afin de travailler en continuité et avec cohérence d'une classe à l'autre, du point de vue de l'élève, tout en restant dans le cadre des programmes.

Pour finir, un petit texte de 1850 (ci-contre) pour nous inviter à continuer à réfléchir et à œuvrer à la modification des pratiques.

" Qui a zéro et veut payer trois ne peut pas; j'emprunte une dizaine ou dix au chiffre cinq et je dis alors: qui de dix en paie trois, reste sept. Comme j'ai emprunté une dizaine à cinq, ce cinq ne vaut plus que quatre; par conséquent: qui de quatre paie six ne peut; j'emprunte une centaine ou dix dizaines au chiffre quatre, et je dis: dix et quatre valent quatorze; qui de quatorze en paie six reste huit; les quatre centaines n'en valent plus que trois, à cause de l'emprunt de une centaine; donc, qui de trois paie deux, reste un".

Les temps ont bien changé et le Professeur des écoles d'aujourd'hui s'adresse à l'intelligence des élèves. Il vise la compréhension. Même si une phase d'entraînement pour apprendre à lire/dire/écrire les nombres et pour automatiser les techniques demeure indispensable à l'acquisition des compétences jusqu'à leur maîtrise en autonomie par l'ensemble des élèves, elle permet au fil des erreurs qui apparaissent de travailler la compréhension de notre numération écrite chiffrée, des liens qu'elle entretient avec les mots d'une numération annexe régulière et avec la numération orale française

CONCLUSION

Cette formation de circonscription, où l'inscription se voulait volontaire, n'a touché qu'un petit nombre de collègues. La difficulté relevée dans les rapports IGEN est bien réelle : les enseignants ne s'inscrivent pas facilement à une formation continue en mathématiques.

Je retiens de cette action de formation, qu'en abordant des sujets en lien direct avec l'activité des élèves et leurs difficultés, on peut proposer en formation continue des situations d'échanges et d'analyse semblant agir comme élément moteur dans la réflexion sur la pratique propice probablement à une évolution de celle-ci.

Si les situations de formation et les pistes didactiques présentées dans cet article semblent avoir interpellé les enseignants et les avoir amenés à interroger leur pratique, qu'en sera-t-il d'une évolution effective de leur pratique ?

J'espère que la réflexion qu'ils ont engagée leur permettra, au moment de concevoir puis de conduire leur enseignement, de prendre le temps de travailler le caractère positionnel de notre numération écrite chiffrée afin d'amener leurs élèves à utiliser leur connaissance du système de numération dans l'élaboration de procédures de calcul mental puis posé, les erreurs des élèves devenant des indicateurs d'une compétence à continuer de travailler.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BRIAND J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique, *in Recherches en Didactique des Mathématiques n°19.*

BRISSIAUD R. (2003) *Comment les enfants apprennent à calculer*, Retz

BRISSIAUD R. (2001) Enseigner une comptine numérique "à l'asiatique" au CP : Pourquoi et comment ?, Communication C6, *in Actes du XXVIIIe Colloque COPIRELEM*, IREM de Tours

MOUNIER E. (2010) Une analyse de l'enseignement de la numération au CP, vers de nouvelles pistes, *thèse de Doctorat es Didactique de mathématiques.*

PAROUTY V. *(2004)* Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3, Communication D6, *in Actes du XXXIe colloque COPIRELEM*, IREM de Toulouse.

V - ANNEXE

Annexe A

PROGRESSION DANS LES PROGRAMMES 2008 concernant les nombres

CP	CE1	CE2	CM1	CM2
NOMBRES ET CALCUL				
Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100.	Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000.	**Les nombres entiers jusqu'au million** Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million.	**Les nombres entiers jusqu'au milliard** Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard.	
			Fractions - Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. - Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.	**Fractions** - Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. - Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.
			Nombres décimaux - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème). - Savoir passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.	**Nombres décimaux** - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000ème). - Savoir donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.
- Comparer, ranger, encadrer ces nombres.	- Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer.	- Comparer, ranger, encadrer ces nombres.	-Comparer, ranger, encadrer ces nombres.	- Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs.
- Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.	- Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc.		- Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée, . les comparer, les ranger, . les encadrer par deux nombres entiers consécutifs.	Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, . les comparer, les ranger, . produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant10 :
- Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20.	- Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant.	- Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier. - Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30 et 60.	- La notion de multiple : reconnaître les multiples des nombres d'usage courant : 5, 10, 15, 20, 25, 50.	
- Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 ("table d'addition").		**CALCUL SUR NOMBRES ENTIERS** **Calculer mentalement**	**CALCUL** **Calculer mentalement**	**CALCUL** **Calculer mentalement**
- Connaître la table de multiplication par 2.	- Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5.	- Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication.		
- Calculer mentalement des sommes et des différences.	- Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits.	- Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits.	- Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat.	- Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. - Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.
- Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous.	- Calculer en ligne des suites d'opérations.	**Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction et multiplication. - Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre. - Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental, posé, où à l'aide de la calculatrice.	**Effectuer un calcul posé** - Addition et soustraction de deux nombres décimaux. - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. - Division euclidienne de deux entiers. - Division décimale de deux entiers.	**Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. - Division d'un nombre décimal par un nombre entier.
- Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100).	- Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1 000).			
	- Connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre.			
	- Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier).			

2010- PEMF Valérie Bagou

Annexe B

Tableau de numération

V. Bagou
PEMF
2010/2011

① Traçage au tableau

⚠ Toujours commencer par les unités à DROITE

c	d	u

DIRE : « Les unités sont toujours à droite » EN Y ASSOCIANT GESTE et TRACER LE TRAIT puis « unités / dizaines / centaines/… »

MILLION(S)

u	c	d	u (mille)	c	d	u	D	C	M

$(10^9 = 1000 . 10^6)$

② Utiliser le tableau pour dire/lire/écrire/dé- ou re-composer les nombres

⚠ Pas de zéro dans le tableau

d	u	
1	9	→ 19 [un dix neuf]
2		→ ~~2~~ 2d ou 2. ou 20 [deux dix]

La lecture est directe en « langue des maths »

MILLION(S)

c	d	u	c	d	u (mille)	c	d	u
	4		1		2	1		4
			8	5		3		7

⇒ Entrer / sortir les nombres dans le tableau
- avec les ~~lettres~~/mots 40 MILLIONS 102 MILLE 104
- méthode des points 40 1:: 1:4
- avec mots en « langue maths » → « dico français »

⇒ Décomposer / recomposer les nombres

$2047 + \frac{4}{100} = 2047,04$

850370
800000
50000
300
70

③ Additionner - Soustraire - Multiplier

m	d	c	u
		1	
		2	4
	1		
+	3	4	5
+		8	1
	4	5	0

Au tableau, écrire en ligne

24 + 345 + 81

351 − 16

47 x 10 47 x 100

×10 :10

m	c	d	u
		4	7
	4	7	.
4	7	.	.

⇒ Ceci amène à poser en « colonnes »

m	c	d	u
	3	5	⑪ 1
−		1	6
	3	~~4~~ 3	5

ou

m	c	d	u
	3	~~5~~ 4	⑩ 1
−		1	6
	3	3	5

ou

m	c	d	u
	3	5	1
−		① 1	6
	3	3	5