L'EXEMPLE DU RAISONNEMENT PAR ANALYSE ET SYNTHÈSE EN TANT QUE CONNAISSANCE MATHÉMATIQUE NÉCESSAIRE POUR ENSEIGNER LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Yves MATHERON
Maître de conférences, IFÉ-ÉNS de Lyon
IREM d'Aix-Marseille & UMRP3-ADEF
yves.matheron@free.fr

Annie NOIRFALISE
Maître de conférences honoraire, IREM de Clermont-Ferrand
annie.noirfalise@free.fr

Résumé

Notre propos porte sur les techniques et technologies (discours rationnels justificatifs et producteurs des techniques) relatives à la construction et la reproduction de figures géométriques, à travers l'analyse de propositions contenues dans des manuels de l'école élémentaire (fiches de travaux collectifs, exercices individuels). Ces techniques dépendent de la situation dans laquelle est placé celui dont on attend la réalisation de la tâche. Elles peuvent ne s'appuyer que sur les seuls niveaux perceptifs et moteurs (suivre les contours de la figure, décalquer ; la vérification à l'œil nu de la superposition des deux objets sert alors de justification). Mais les techniques ostensives rencontrent rapidement les limites de leur validité mathématique et devraient, pour la retrouver, relever d'un raisonnement plus théorique, par analyse et synthèse par exemple. Bien évidemment, s'il ne s'agit jamais, à ce niveau, d'utiliser un tel type de raisonnement, la technique utilisée se situe souvent à mi-chemin entre les deux techniques évoquées ci-dessus. Le professeur doit néanmoins être capable de choisir de manière raisonnée les variables des situations proposées, afin de voir mobilisées les propriétés dont l'étude est visée. Il devrait ainsi être amené, au moins dans ses activités de préparation, à conduire de manière plus ou moins implicite un travail d'analyse et synthèse.

I - INTRODUCTION

Une certaine lecture des instructions officielles concernant la géométrie pourrait laisser penser que les élèves de l'école primaire travaillent exclusivement dans un ***monde sensible***, c'est-à-dire dans un espace contenant des objets qui sont accessibles à la fois par le moyen des sens (vue, toucher, etc.) et de la motricité ; monde où l'accomplissement des tâches ne requiert que des techniques visuelles, tactiles, motrices. Ces pratiques peuvent paraître étrangères à un ***monde géométrique*** au sens où l'entendent les mathématiciens, dans lequel les objets ne peuvent être exclusivement perçus par les sens, mais où les tâches relèvent de la manipulation d'énoncés suivant les techniques de la démonstration à l'intérieur d'une théorie mathématique. Toutefois la lecture attentive des instructions montre que, très tôt, les techniques entrainées pour l'appréhension du monde sensible sont intimement liées aux objets du monde géométrique. Depuis sa création, la géométrie a toujours joué un rôle de technologie[1] de la

[1] Rappelons que le terme *technologie* ne renvoie pas, dans ce texte et plus généralement en didactique, au sens qui lui est donné dans le langage courant et qui l'associe à une discipline qui porte ce nom. Le sens premier à lui attribuer relève de son étymologie (*τεχνη* « art manuel » et *λόγος* « parole », « raison ») ; autrement dit, il désigne un discours tenu sur des pratiques, c'est-à-dire sur des types de tâches accomplies grâce à des techniques.

maîtrise pratique de l'espace et lorsqu'il est question, dès l'école maternelle, d'apprendre à se repérer dans différents espaces, à s'y déplacer, à reconnaître et représenter les objets qui s'y trouvent, à coder un déplacement, le vocabulaire et les techniques attendues peuvent se justifier, pour un lecteur ayant une culture mathématique, par un savoir technologico-théorique[2] relevant de la géométrie élémentaire[3] ; ce qui ne veut pas dire qu'en situation, ce même lecteur utiliserait la géométrie pour accomplir les tâches correspondantes. Toutefois il y a de multiples façons de penser une pratique car les praxéologies impliquant un type de tâches dépendent de l'institution où elles sont accomplies, et il est évident qu'elles ne seront pas les mêmes pour un élève de l'école primaire et un mathématicien. Il est donc nécessaire de préciser quels types de rapports au savoir géométrique les instructions officielles engagent à entraîner. Dans un premier temps nous préciserons, à la lecture des textes officiels, les hypothèses que nous faisons à ce sujet. Nous reviendrons ensuite sur certaines études conduites dans ce domaine pour situer nos préoccupations par rapport à leur objet. Enfin nous présenterons les pistes de travail que nous envisageons. Dans ce qui suit, nous centrerons essentiellement notre propos sur l'« étude des formes ».

II - LA GÉOMÉTRIE, TECHNOLOGIE DE LA MAÎTRISE DE L'ESPACE

1 Premiers éléments d'analyse à partir de la lecture des textes officiels

Dans un paragraphe du programme de l'école maternelle de 2008 intitulé « *Découvrir le monde* », et sous le titre « *Découvrir les formes et les grandeurs* », il est indiqué qu'« *en manipulant des objets variés, les enfants repèrent d'abord des propriétés simples (petit / grand ; lourd / léger). Progressivement, ils parviennent à distinguer plusieurs critères, à comparer et à classer selon la forme, la taille, la masse, la contenance* » (p. 15). L'expression « *en manipulant* » évoque des pratiques relevant de techniques sensorielles, essentiellement du touché et de la vue, et mettant en jeu la motricité, mais rien n'est dit des critères à prendre en compte pour les comparaisons et les classifications. Seul est mentionné qu'« *à la fin de l'école maternelle l'enfant est capable de... dessiner un rond, un carré, un triangle* ». Quant à la fonction de ce vocabulaire pour lequel à ce niveau aucune référence n'est faite à la géométrie, et aux conditions de son émergence, le texte est sur ce point encore, muet.

Prenons un exemple. Imaginons un jeu de dominos dont les cases comportent des « ronds, des carrés et des triangles » de différentes tailles et des blancs. Pour jouer, il faut accomplir des tâches du type « reconnaitre un rond, un carré, un triangle » de façon à positionner en contiguïté les cases sur lesquelles la même forme est représentée. La technique est certainement visuelle, mais quelles informations la vue donne-t-elle à un élève de maternelle pour lui permettre de conclure que c'est « un rond, un carré ou un triangle » ? On pourrait dire « c'est un rond parce que ça se voit », mais cette réponse est une description fort sommaire de la technique et ne délivre aucun élément technologique. On peut imaginer puisqu'il est question de manipulations, que le mot rond ait été associé à des objets dont le bord ou la surface roule sous la main, en attirant l'attention sur l'analogie entre les sons « ron » et « rou » (la même consonne et des sons sourds), donc à des objets qui ne sont pas pointus, dont la représentation se fait par un trait continu, fermé et sans à-coups, associant ainsi ce qui est entendu et perçu au touché et à la vue. Ces éléments, verbalisés, peuvent constituer des éléments technologiques pour guider l'élaboration d'une

[2] Au sein d'un groupe social légitimé, quelle que soit sa taille (une *institution* au sens qui lui est donné en anthropologie ; *cf.* Douglas (1999, p. 66)), la technologie remplit trois fonctions : justifier, rendre compréhensible et produire des techniques. Quant à la théorie (de *θεωρεῖν* « observer, contempler »), elle remplit ces trois mêmes fonctions relativement à la technologie ; le terme « théorie » a donc un sens plus large que celui qui lui est donné dans, par exemple, l'expression *la théorie des groupes*.
Voir à ce sujet : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf

[3] On trouvera ci-dessous des extraits commentés des instructions officielles concernant l'étude des formes, thème auquel on se limite ici et illustrant notre propos.

technique où l'œil cherche les « bosses » du tracé. Il aura été nécessaire qu'un discours ait été élaboré et accepté pour permettre la production de la technique imaginée de reconnaissance du « rond ». Ce discours aura sans doute été produit au cours d'activités successives rencontrées en dehors de l'école ou choisies par le professeur à cette fin[4]. À leur issue, celui-ci devra organiser le passage d'expériences sensorielles (tactiles, auditives ou visuelles) à leur verbalisation et à leur trace graphique ; ces deux modes de représentation servant en quelque sorte de *compte rendu* commun à ces expériences et constituant des *invariants liés à la forme*. Ces invariants, institutionnalisés, participent alors à l'équipement technologique des élèves qui se voient ainsi accordé le droit de l'utiliser pour accomplir d'autres tâches.

Des scénarios analogues peuvent être envisagés pour le triangle « trois fois pointu », le carré « quatre fois pointu ». Tout ceci pourrait paraître relever de la fiction ; néanmoins, celle-ci n'est pas bien éloignée de ce que l'on rencontre dans les classes. Cet exemple veut attirer l'attention sur l'existence d'un bloc technologico-théorique dans toute praxéologie[5], bloc souvent implicite, sur lequel l'institution ne dit rien ou bien peu et qui, de ce fait, demeure souvent invisible à ses propres sujets (professeurs et élèves). Il est sans doute très éloigné de ce que la communauté des mathématiciens pourrait reconnaître comme appartenant à un bloc technologico-théorique fait d'axiomes explicites ou implicites, de théorèmes et de définitions : dans cette institution, un cercle n'est pas « un rond » et « être pointu » n'a pas de sens. Les exemples qui viennent d'être évoqués montrent aussi la fonction de certains moments didactiques qui, bien que réalisés en acte, sont parfois, eux aussi, passés sous silence : moments de l'élaboration de techniques de reconnaissance des formes, de la constitution de l'environnement technologico-théorique, de l'institutionnalisation.

Les documents d'application des programmes publiés en 2002 postulaient « *certaines figures planes sont reconnues globalement de façon perceptive par les élèves* » en début de cycle 2 (p. 27). Si la reconnaissance est décrite comme relevant d'une activité perceptive, l'expression « *reconnues globalement* » ne permet pas de décrire une quelconque technique et d'inférer des éléments technologiques ; ceci rend impossible la constitution d'invariants évoquée précédemment. La constitution des invariants permettant de reconnaître une forme – invariants qui évolueront au cours de la scolarité – ne devrait pas relever de contingences propres à chaque élève ; pour ne pas être discriminatoire, elle devrait être sous la responsabilité du maître qui la guide en fonction de son développement ultérieur.

Si en maternelle il n'est pas question de géométrie à propos de l'étude des formes, en CP et CE1, un paragraphe du programme de 2008 intitulé « *Géométrie* » fournit quelques directives générales sur ce thème : « *Ils* [les élèves] *apprennent à reconnaître et à décrire des figures planes... Ils utilisent des instruments et des techniques pour tracer des figures planes. Ils utilisent un vocabulaire spécifique* » (p. 18). Suivant cette perspective, dans le tableau donnant « *des repères pour organiser la progressivité des apprentissages…* », une initiation au « *vocabulaire géométrique* » (p. 33) prévoit, dès le CP, la perception et la reconnaissance de « *quelques relations et propriétés géométriques : alignement, angle droit, axe de symétrie, égalité de longueurs* » qui seront entraînées au cours du CE1. Utiliser « *un vocabulaire géométrique élémentaire* » correspondant est

---

[4] Pour une étude beaucoup plus précise on pourra se référer aux travaux de L. Pinet et E. Gentaz (2007) et E. Gentaz (2010). Ces travaux confortent notre thèse ; leur étude montre en effet l'intérêt des éléments technologiques : « l'introduction de la modalité "haptique", (traitement analytique et/ou double codage, visuel et moteur), dans les exercices de reconnaissance des figures et l'utilisation du vocabulaire approprié, aideraient les enfants à mieux se représenter les figures planes ».

[5] « *En toute praxéologie, il y a de la théorie, du théorique, comme il y a du technologique, de la technologie. Dire qu'il existerait, chez une personne ou dans une institution, de la technologie sans théorie, de la technique sans technologie est a priori exclu, ce qui entraîne notamment ceci : derrière ce que fait un enfant de trois ans, la TAD postule qu'on peut apercevoir le jeu de ficelles technologiques et/ou théoriques : même cet enfant qui parle à peine " a de la théorie "* ». CHEVALLARD Y. La diffusion déformante de la TAD, in *Journal du séminaire TAD/IDD*, séance 5 du 15 avril 2011, texte disponible sur Internet aux adresses :

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=176 (où l'on trouve un ensemble d'autres textes) ou http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fdf/2010-2011/tad_idd_11.html suggéré à ce niveau. Il doit permettre de décrire quelques formes : « *un carré, un rectangle, un triangle rectangle …* » (p. 33). Les propriétés attendues pour chacune des formes ne sont pas précisées. Le programme prévoit l'utilisation de « *règle, quadrillage, papier calque* » en CP, d'« *équerre ou gabarit d'angle droit* » en CE1. En fin de CE1, les élèves doivent être capables d' « *utiliser la règle et l'équerre pour tracer avec soin et précision un carré, un rectangle, un triangle rectangle* » (p. 20).

En cycle terminal, c'est aussi dans un paragraphe intitulé « *Géométrie* » (p. 23) que l'on trouve les directives générales sur ce thème. Par rapport au cycle précédent, quelques ajouts apparaissent :

- concernant des propriétés géométriques : on ne parle plus « *d'angle droit* », mais de « *perpendicularité* » et on ajoute le « *parallélisme* », il s'agit donc de propriétés d'incidence entre droites ; à l'« *égalité de longueurs* » s'adjoint le « *milieu d'un segment » ;*
- concernant les instruments : l'usage du compas est introduit dès le CE2 ;
- concernant les formes étudiées : aux carré, rectangle et triangle rectangle s'ajoutent « *le losange, le parallélogramme, le triangle et ses cas particuliers, le cercle* » (p. 23) ;
- concernant le vocabulaire : au cycle des apprentissages fondamentaux les attentes restaient vagues « *S'initier au vocabulaire géométrique* » ou « *Connaître et utiliser un vocabulaire géométrique élémentaire approprié* » (p. 33), mais dès le CE2 le vocabulaire est précisé « *côté, sommet, angle, milieu* », puis en CM1 « *points alignés, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, segments, milieu, angle,...* » (p. 39) ;
- concernant les techniques attendues. Les formulations condensées, relatives aux techniques, diffèrent peu d'un cycle à l'autre : « *l'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure* » (p. 23), et durant le cycle des apprentissages fondamentaux, « *ils apprennent à reconnaître et à décrire des figures planes et des solides. Ils utilisent des instruments et des techniques pour reproduire ou tracer des figures planes* » (p. 18). Néanmoins on peut faire l'hypothèse que, compte tenu des différences précédemment relevées, les savoir-faire attendus ne sont pas les mêmes en fin de CE1 et en fin de CM2. Précisons ce point.
-

2 Techniques et technologies pour le type de tâches « vérifier la nature d'une figure »

Il n'est pas bien difficile de décrire quelques techniques – et les éléments technologiques correspondants – qui permettent de « *vérifier la nature d'une figure en utilisant la règle graduée, l'équerre, le compas* » ou de « *vérifier la nature d'une figure en ayant recours aux instruments* »[6]. La situation est la suivante : les élèves étant face à un tracé, sur une feuille de papier ou au tableau, ils pensent reconnaître de manière perceptive un objet géométrique, ou encore il se peut que le maître l'ait nommé, et ils doivent « *en ayant recours aux instruments… vérifier la nature [de la] figure* ». Contractuellement, la lecture globale de la figure n'est pas attendue, mais plutôt sa lecture analytique à partir de l'utilisation implicite ou explicite d'un énoncé – celui des propriétés géométriques reconnues caractérisant la forme –, afin de guider les gestes matériels et de justifier la réponse. Derrière l'action de « vérification » demandée aux élèves est émise l'hypothèse implicite qu'il leur est possible de conduire le raisonnement suivant : « pour que l'objet concret – constitué de l'ensemble des tracés à identifier – soit réputé représenter tel objet géométrique, il suffit que telles propriétés géométriques soient vérifiées et que les éléments de la figure les respectent ».

Les propriétés invoquées ne sont pas les mêmes en cycle 2 et en cycle 3. En CE1 par exemple, il s'agit de vérifier que des angles sont droits, mais en CM2 il s'agit plutôt de vérifier que des côtés sont perpendiculaires ; ces vérifications devant être effectuées grâce aux instruments. Dans la figure à étudier, les élèves sont donc appelés à être attentifs aux positions relatives, aux mesures de longueurs, d'angles, etc. Par exemple, pour conclure qu'« un angle est droit » la technique attendue consiste à faire coïncider

[6] BO. hors série n° 3 du 19 juin 2008, page 39.

le sommet de l'équerre avec le sommet de l'angle et à vérifier visuellement la superposition de ses bords avec les côtés de l'angle après avoir fait tourner l'équerre. Tandis que pour conclure que « deux demi-droites sont perpendiculaires », la technique attendue consiste à amener un bord de l'équerre en coïncidence avec une des demi-droites, le sommet de l'équerre étant placé en son origine, l'autre côté de l'équerre coïncidant avec la seconde demi-droite. La mise en œuvre de ces techniques implique des gestes moteurs, visuels, tactiles. Les instruments dont les élèves se servent pour évaluer et qualifier ces positions et mesures (règles, équerre…) sont des objets matériels qui peuvent, au moins contractuellement dans l'institution-classe, être modélisés par des objets géométriques possédant des propriétés connues (égalité de longueur de segments, angle droit, orthogonalité de droites…), et qu'ils modélisent à leur tour. En ce sens, les instruments jouent aussi, en acte, une fonction technologique. Par exemple, pour l'équerre, celle d'une définition : « on appelle angle droit tout angle tel que l'équerre coïncide avec chacun de ses côtés ». Les énoncés des propriétés utilisées ont acquis un « *statut de lois* » dans la classe. Par exemple, une ou plusieurs expériences ont permis de constater un résultat, ou celui-ci a été admis : qu'il s'agisse du lien entre les instruments et les objets géométriques représentés, ou des énoncés des propriétés utilisées. Il a été nécessaire que le résultat qui correspond à la propriété émerge des conditions particulières de son apparition empirique pour qu'il puisse prendre le « statut de loi », et entrer dans le dispositif grâce auquel les élèves peuvent travailler. Ce qui est visible pour un observateur extérieur relève essentiellement du monde sensible, mais les gestes accomplis sont légitimés par les connaissances du monde géométrique jusqu'alors élaborées : en ce sens, la géométrie joue une fonction technologique pour les tâches institutionnellement vues comme relevant de la maîtrise de l'espace. La question qui se pose est alors celle des conditions que le professeur doit mettre en œuvre afin que le travail des élèves permette qu'ils construisent ce type de rapports aux savoirs géométriques.

3 Notre position relativement à des études connexes

De nombreuses recherches s'appuient sur le travail de thèse de M.-H. Salin et R. Berthelot (1992). Il est fondamental dans le développement de notre réflexion, mais les outils théoriques propres à la Théorie des Situations Didactiques (TSD) et à la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) diffèrent ; aussi est-il nécessaire de préciser l'incidence de ces choix.

Le cadre théorique utilisé par R. Berthelot et M.-H. Salin est celui de la TSD. Leur préoccupation est la description précise, dans les situations de géométrie évoquées, de la structuration des milieux avec lesquels l'élève interagit afin de démêler les fonctionnements didactiques et adidactiques. Dans le cadre de la TAD, les activités humaines sont analysées en termes de praxéologies – types de tâches, techniques ou manière de faire, technologie ou discours raisonné sur la technique, théorie –, et les rapports qu'un sujet peut entretenir à un objet du monde sensible ou du monde géométrique relèvent de praxéologies distinctes, caractérisées à grands traits dans les paragraphes précédents.

Dans leur thèse R. Berthelot et M.-H. Salin évoquent la distinction, classiquement faite, entre « *espace sensible* » et « *espace géométrique* » (Chapitre B-2, p. 28 et suivantes), et conviennent que : « *En terme de la théorie des situations, chacun des espaces constitue un milieu pour l'élève, et l'interaction avec chacun de ces milieux se contrôle avec des moyens spécifiques* » (p. 32). Toutefois, dès le début de leurs travaux, M.-H. Salin et R. Berthelot précisent que « *l'invitation qui est faite aux élèves de sortir d'un espace " sensible " pour rentrer dans un espace " géométrique " intellectuel, par un espèce de saut, ne peut que se heurter à des difficultés profondes* », et « *que pour progresser dans la compréhension des difficultés de la géométrie, enseignement qui fait nécessairement intervenir à la fois le modèle géométrique et la réalité physique qu'il modélise, il faut aller au-delà de la simple prise en compte du type d'espace dans lequel on veut placer l'élève, et étudier les rapports établis entre l'élève d'une part et chacun de ces espaces d'autre part* » (p. 32). Ils proposent « *une autre alternative qui consiste à envisager la géométrie comme une théorie physique de l'espace* ». « *Il ne s'agit plus de faire effectuer* [à l'élève] *un saut d'un monde dans un autre mais de passer de rapport effectifs et contingents avec un certain espace à la modélisation de rapports avec cet espace. En quelque sorte, passer du fait à la loi ...* » (p. 32). Ce point de vue est cohérent avec l'analyse des textes officiels exposée dans les paragraphes précédents. Cette nouvelle alternative les conduit à définir des « *types de situations correspondant à des pratiques différentes* », qu'ils distinguent en trois groupes repérés en termes de « *problématiques* »[7] : « *problématique de la géométrie* », « *problématique de modélisation* » *et* « *problématique pratique* » (p. 46).

Au sein du cadre théorique de référence, la TSD, et face à un problème donné, les auteurs décrivent dans chacun des trois cas ce que signifie « *se placer dans telle problématique* », en précisant pour chaque type de problématiques, la nature des espaces de référence, de résolution et de validation des situations relevant de ce type. Au sein du cadre de la TAD, « *les rapports établis entre l'élève d'une part et chacun de ces espaces d'autre part* [espace sensible / espace géométrique] » sont, comme il a été dit, analysés en terme de praxéologies. On peut alors caractériser les praxéologies correspondant aux trois « problématiques » évoquées, de la façon suivante :

- **se situer dans une problématique pratique**, c'est accomplir une tâche impliquant des objets matériels accessibles par le moyen des sens (vue, toucher, etc.) et en recourant à la motricité ; tâche pour l'accomplissement de laquelle on recourt à des techniques visuelles, tactiles, motrices, dont la seule justification explicite relève de la confiance que l'on a en sa propre perception (parce que « ça se voit », parce que « je le sens »...). Néanmoins, comme cela a été montré plus haut, le recours à ces outils pour ces techniques n'exclut pas l'existence d'un équipement technologique permettant de les élaborer et de les justifier pour accomplir les types de tâches dont on attend la maîtrise.
- **se situer dans une problématique géométrique**, c'est accomplir une tâche impliquant des objets abstraits, éventuellement représentés par des écritures ou graphiques, dont l'existence est postulée comme objets primitifs d'une théorie axiomatique du domaine géométrique, ou démontrée déductivement dans le cadre de cette théorie, grâce à des techniques relevant de la manipulation d'énoncés suivant les règles du raisonnement hypothético-déductif ; ces éléments technologiques relèvent des énoncés déjà établis dans la théorie, celle-ci pouvant correspondre à la logique formelle.
- **se situer dans une problématique de modélisation** c'est, comme dans une problématique pratique, accomplir une tâche impliquant des objets matériels accessibles par le moyen des sens et grâce à la motricité. Mais, dans ce cas, la technique engage une modélisation géométrique des objets concernés de l'espace sensible : « *la solution d'un problème par modélisation est construite complètement dans le système symbolique du modèle selon la dynamique de ce système* » écrivent M.-H. Salin et R. Berthelot (p. 50). Plus précisément, un va-et-vient entre le monde sensible et le monde géométrique est opéré : les objets matériels sur lesquels porte la tâche sont modélisés par des objets géométriques, mais les connaissances relatives à ces objets, qui en général relèvent d'énoncés pouvant être élaborés dans le monde géométrique – celui des mathématiciens − ont été admis ou constatés comme compte rendu d'expérience dans le monde sensible. Ces énoncés, en tant qu'assertions considérées contractuellement vraies (M.-H. Salin et R. Berthelot parlent de « *loi de type loi physique* », p. 72), guident le choix des gestes à accomplir dans le monde sensible pour réaliser un ensemble de types de tâches. Ils fournissent alors les éléments technologiques qui permettent d'élaborer une technique relevant de gestes perceptifs et moteurs et assurent son intelligibilité.

La description de deux techniques et d'éléments technologiques associés pour accomplir la tâche suivante permet d'illustrer notre propos : « *Ayant tracé un triangle dont les longueurs des côtés mesurent en cm 3, 5 et 7, dire si ce triangle est rectangle* »[8] :

[7] M. H. Salin et R. Berthelot précisent ultérieurement, dans l'ouvrage *Sur la théorie des situations didactiques* (2005) : « Le terme de problématique indique que nous nous situons ici du point de vue d'un ensemble de problèmes que l'institution (système familial, enseignant) propose et dont elle attend la maîtrise » (p. 126).

[8] Exemple tiré de HOUDEMENT C., (2007).

- « *si un triangle T est un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit au triangle ; on essaie de prendre le milieu de tous les côtés et d'y faire des cercles : aucun cercle n'est le cercle circonscrit au triangle donc T n'est pas un triangle rectangle.* »
- « *je sais qu'une équerre représente un angle droit, pour savoir si ce triangle est rectangle je regarde si les deux côtés de mon équerre coïncident avec deux côtés du triangle.* »

Il semble que l'institution scolaire, à travers les indications fournies par le programme, attende des élèves du primaire qu'ils développent ce dernier type de rapports au monde sensible. C'est-à-dire qu'ils utilisent progressivement des énoncés comme des « invariants », non pour conduire des démonstrations – cela relèvera des attentes du Collège, voire au-delà[9] –, mais comme éléments technologiques pour agir dans le monde sensible. Ces énoncés, en général constatés empiriquement, sont amenés à prendre le « *statut de lois* » grâce auxquelles l'institution attend des élèves qu'ils reconnaissent et construisent formes et solides, décrivent un déplacement ou la position d'objets dans l'environnement, quelle que soit la situation.

***Si l'enjeu de l'enseignement de la géométrie dans l'enseignement primaire est de faire entrer les élèves dans ce type de rapports aux problèmes spatiaux, il s'agit alors d'étudier ce qui, dans les pratiques de classe, peut permettre d'établir un contrat didactique conduisant l'élève à accomplir les gestes correspondants*.**

Avant de proposer des pistes de travail, il est encore nécessaire de revenir sur un dernier domaine de recherche. En général, le bloc technologico-théorique intervenant dans les praxéologies évoquées précédemment se réfère[10] à la géométrie euclidienne dont les objets primitifs sont des points et des droites pour la géométrie plane, et des points, droites et plans pour l'espace. Cela suppose la perception et l'interprétation des éléments matériels à propos desquels sont posées des questions : que cette « perception-interprétation » soit celle des formes (par exemple pour identifier des angles droits) ou que ce soit celle de réseaux de droites, de points et éventuellement de plans (par exemple pour identifier des droites perpendiculaires). Ceci constitue une difficulté relevée dans plusieurs articles publiés par les membres de l'équipe de recherche de l'IUFM du Nord-Pas de Calais autour de R. Duval et M.-J. Perrin. Les démarches proposées pour entraîner une mobilité du regard constituent des aides à la modélisation du monde sensible. Néanmoins l'élaboration et l'utilisation d'énoncés théoriques ayant statut de lois restent nécessaires ; y compris quand la géométrie de référence est une géométrie topologique dont les énoncés portent sur les propriétés des formes : ouvert / fermé, juxtaposition / superposition, etc. Si la mobilité de regard conduisant à envisager une figure comme un « *assemblage de parties ou de surfaces* » ou comme un « *assemblage de lignes et de points* » suivant les cas, est indispensable, elle ne suffit pas à permettre une utilisation des énoncés pertinents comme lois.

III - PISTES DE TRAVAIL

Nous avons vu précédemment qu'un des objectifs des débuts de l'enseignement de la géométrie consiste à faire entrer les élèves dans un type de rapports au monde sensible pour lequel elle joue le rôle de technologie de la maîtrise de l'espace, alors que le monde géométrique leur est à ce stade inaccessible. La difficulté de l'entreprise nécessite que les enseignants choisissent des activités et organisent leur gestion afin que les élèves s'approprient des invariants – c'est-à-dire, dans ce cas, des éléments technologiques – produits à cette occasion. Cela nécessite que les enseignants aient reçu une formation géométrique et

[9] NOIRFALISE R., (1993). L'auteur décrit, en classe de 6e, des rapports aux figures géométriques et à leurs propriétés très différents d'un élève à l'autre, allant de la lecture des propriétés sur la figure à des gestes préparant une pratique démonstrative ; position dans laquelle des énoncés de résultats ont été produits dans la classe et entrent dans le dispositif avec lequel l'élève va pouvoir travailler.

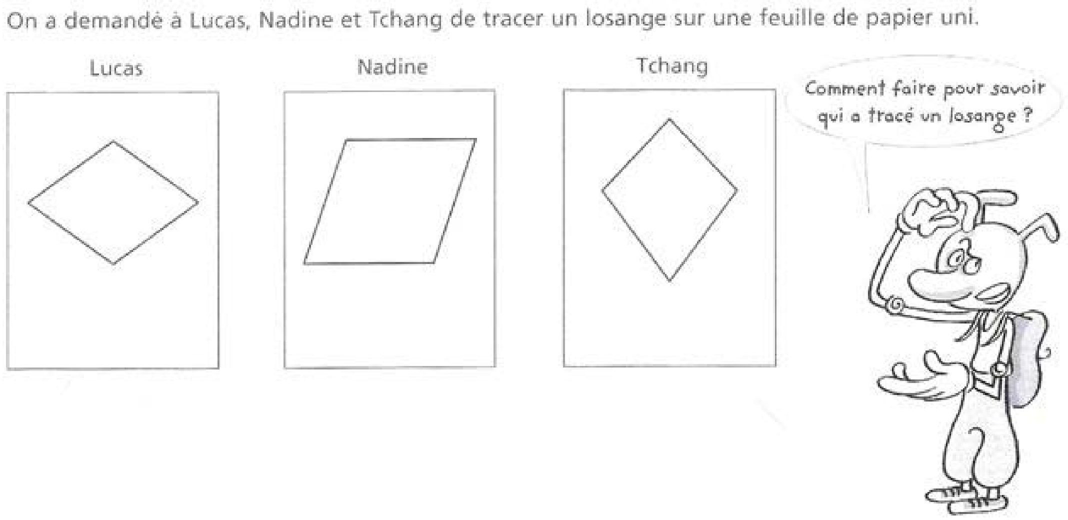
[10] La théorie mathématique de référence rend intelligible les choix des concepteurs de programmes ainsi que les gestes de l'enseignant qui guident l'activité de l'élève.

didactique suffisante pour pouvoir contrôler la pertinence et la cohérence des éléments technologiques à mobiliser.

Nous faisons l'hypothèse que pour qu'un résultat acquière un statut de loi, son énoncé et son écriture sont indispensables afin de pouvoir s'y référer, mais aussi et surtout, pour l'utiliser dans des situations variées où il s'avèrera fonctionnel, voire incontournable. Dans ce qui suit, nous ne faisons qu'envisager deux pistes pouvant permettre d'engager cette étude, pistes pour lesquelles nous présentons des exemples de travail possible portant sur des propriétés des quadrilatères étudiés en cycle 3. Il s'agit d'une part d'analyser, dans quelques ouvrages scolaires, les conditions d'émergence des résultats concernant les instruments de travail et les énoncés géométriques. Ce travail permet, d'autre part, de repérer les activités qui peuvent faire évoluer le rapport des élèves aux éléments de géométrie utilisés et d'enrichir leur équipement technologique. Il permet aussi d'imaginer des activités poursuivant ce but ainsi que leur mise en œuvre.

1 Une première analyse des activités proposées dans les manuels

Dans les limites de caractères accordées à ce texte nous ne donnons qu'un exemple d'analyse d'une leçon portant sur les quadrilatères, extraite de l'ouvrage de CM2 de la collection « *Pour comprendre les mathématiques* »[11], et dont on trouve une reproduction dans les lignes qui suivent. En fait, seule l'étude des régularités trouvées dans l'ensemble des activités proposées par une collection d'ouvrages scolaires devrait permettre de préciser le type de gestes requis contractuellement de la part des élèves pour l'étude des formes, et de mieux cerner le statut des résultats qui se construisent ainsi. Ce travail nécessite des analyses du type de celle proposée dans ces lignes. Dans l'exemple traité, comme pour toutes les leçons de la collection, celle-ci débute par une « *activité collective, de courte durée, conduite par l'enseignant, et permettant d'introduire la leçon* » :

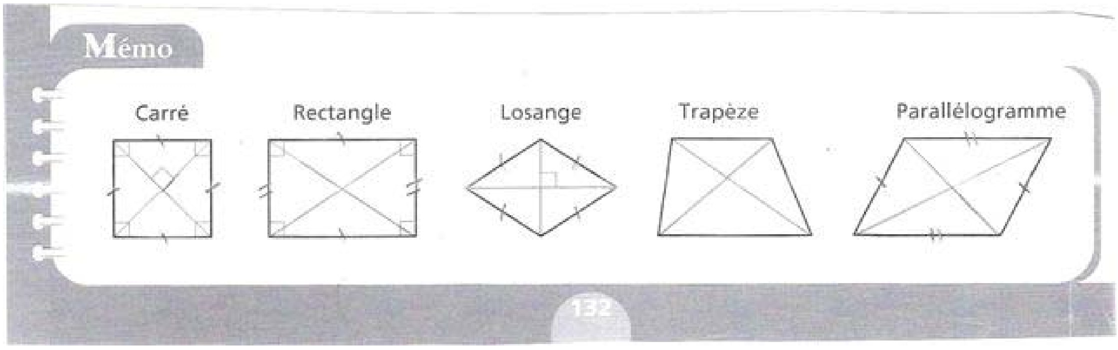


D'après les auteurs, le débat qui s'en suit est l'occasion de faire le point sur les acquis des élèves en matière de vocabulaire relatif aux quadrilatères et à leurs propriétés, et de vérifier qu'ils sont capables de les mettre en œuvre pour construire des figures. Le guide pédagogique indique, p. 165, que lors de la mise en commun, l'enseignant doit « *retenir quelques éléments qui orientent la réponse : il faut vérifier quelle figure possède les propriétés du losange ; pour y parvenir, on doit utiliser les instruments de géométrie : la règle graduée ou le compas pour comparer les longueurs de côtés ; l'équerre afin de vérifier que les diagonales sont perpendiculaires ; on peut aussi décalquer les figures, les découper et chercher par pliage les axes de symétrie* ».

---

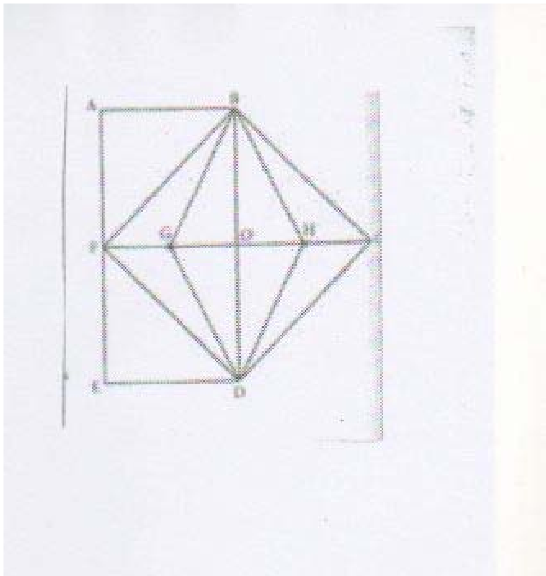
11 « *Pour comprendre les mathématiques* », C.M.2, livre élève pages 132 et 133, édition 2008 et guide pédagogique pages 165 et 166, édition 2009, édition Hachette.

Remarquons que les auteurs parlent au singulier de figure possédant les propriétés du losange : avec la précision des instruments de mesure à la disposition des élèves, les deux figures de gauche sont pourtant des losanges. L'objectif didactique de l'activité étant de vérifier (toutes) *« les propriétés du losange »*, quelle gestion l'enseignant fera-t-il d'une réponse d'élève du type : « La première figure est un losange parce que les quatre côtés sont égaux, la dernière n'est pas un losange parce que les quatre côtés ne sont pas égaux » ? Peut-on imaginer qu'à l'aide des figures décalquées et découpées, l'enseignant fasse retrouver, par pliage, et comme le suggère le guide pédagogique, les propriétés non évoquées ? Le statut logique des propriétés géométriques des quelques formes étudiées n'est pas précisé à ce niveau : le programme de 2008 parle de « *description* » de figures planes (p. 23). Dans les rares cas où les manuels scolaires de ce niveau fournissent des énoncés dont les élèves pourraient disposer, ce sont les listes de certaines des propriétés de chaque forme, sans préciser s'il s'agit de conditions nécessaires ou conditions suffisantes pour cette forme. Dans le manuel étudié, les propriétés des quadrilatères sont consignées sous la forme suivante, sans recourir à un énoncé écrit (on peut aussi remarquer que la propriété du point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme n'est pas codée) :



Des énoncés oraux travaillés sous la direction de l'enseignant pourraient au mieux devenir : « Si cette figure représente telle forme, alors nécessairement elle possède telle propriété ». Ils peuvent permettre de justifier que telle figure n'est pas un losange, comme c'est par exemple le cas du dernier des trois quadrilatères de l'activité. Mais alors, comment gérer le débat pour les deux premiers qui sont des losanges ?

Cette première activité fixe clairement le contrat : il s'agit d'utiliser « les » propriétés des quadrilatères qui doivent être exposées par les élèves au cours du débat. Dans ce type de travail, la mobilisation d'un énoncé, explicitement ou même implicitement, n'est pourtant pas toujours indispensable à ce niveau pour répondre à une question de reconnaissance. Les élèves de CM2 possèdent en effet une familiarité suffisamment grande avec les formes étudiées pour les reconnaître globalement, donner leur nom, vérifier avec des instruments des propriétés géométriques repérées visuellement avant même l'usage des instruments, sans que ces propriétés viennent justifier le nom donné à la forme. La nécessité d'une condition suffisante exprimée explicitement ou non, en tant que loi à laquelle se référer en classe, n'apparaît pas. La contrainte d'énonciation de propriétés, dont le statut « nécessaire » ou « suffisant » n'est même pas rencontré « en acte », est donc imposée par l'enseignant sans que cela apparaisse comme cause nécessaire ; c'est-à-dire produite par des raisons émergeant du travail d'une situation adidactique.



Au cours de la seconde activité, des groupes de deux ou trois élèves ont à reconnaître des quadrilatères dans une figure complexe, puis à répondre à la question « *quelles propriétés de chaque quadrilatère a-t-on utilisées pour le construire ?* » (livre de l'élève, p. 132). La seconde consigne peut surprendre : comment savoir quelle technique ont utilisée les auteurs de l'ouvrage pour produire cette figure ? Elle trouve sans doute sa justification dans la remarque précédente : pour reconnaître le rectangle, les carrés et les losanges de la figure, le recours explicite aux propriétés géométriques n'est certainement pas nécessaire à ce niveau. Le guide pédagogique précise que la correction collective est de nouveau l'occasion de récapituler « *les propriétés des quadrilatères les plus connus : rectangle, losange et carré* », sous forme de description de trois quadrilatères particuliers de la figure : propriétés des côtés, des angles, des diagonales et existence d'axe de symétrie. Ils ne précisent pas quelle est la fonction assignée à ces énoncés relativement à la consigne. Parmi toutes les propriétés rencontrées, le problème de savoir quelles sont celles permettant de construire effectivement tel quadrilatère de la figure n'est pas donc posé. ***Au cours de ces deux premières activités, il n'a donc été fait aucun usage fonctionnel des propriétés énoncées pour construire des quadrilatères respectant certaines contraintes.***

Dans la troisième activité, les élèves doivent, par groupe de deux, reproduire la figure sur laquelle ils viennent de travailler en respectant les dimensions et « *écrire chacune des étapes du travail* » (p. 132). Pour les auteurs du manuel, il s'agit de « *décrire la construction en justifiant chaque tracé* » (guide pédagogique, p. 165). Les auteurs donnent un exemple : « *Je trace le rectangle ABDE. Pour cela j'utilise l'équerre pour tracer quatre angles droits et la règle graduée ou le compas pour tracer les côtés. Je prends soin de dessiner les côtés opposés de la même longueur. Je trace ensuite le carré BCDF. J'utilise...* » (p. 165). La correction suggère de reproduire la figure au tableau – la consigne de respect des dimensions doit-elle être supprimée ? –, l'important étant de « *justifier chacune d'elles* [les constructions] *en s'appuyant sur les propriétés qui permettent de tracer ces quadrilatères.* » (p. 165).

L'exemple donné dans le guide pédagogique montre que, pour chacune des figures, sont attendues la liste des instruments à utiliser et la propriété du quadrilatère justifiant cette utilisation. Les propriétés lues directement sur la figure semblent suffire pour effectuer la construction : les angles en A et E sont visiblement droits, le report sur les demi-droites $[AB)$ et $[ED)$ des mesures AB et ED, relevées à la règle graduée ou au compas sur la figure-modèle, donne les positions de B et D, et il en est de même des positions des autres points. Dans ce cas encore, la tâche peut être accomplie sans que les propriétés des différentes formes en jeu aient été utilisées comme éléments technologiques pour produire, justifier ou expliquer la technique mise œuvre.

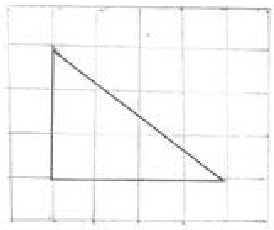
2 Où devrait apparaître le raisonnement « par analyse et synthèse »

Après une quatrième activité dont l'analyse montre que la production d'énoncés généraux tels que « tout carré est un losange » ou « un rectangle n'est pas un losange » ne correspond à aucune fonctionnalité, si ce n'est à une « visite de savoirs » qui pourrait satisfaire des mathématiciens et donc se garantir d'une certaine légitimité épistémologique, les élèves passent aux activités pour « *S'exercer et résoudre* ». Celles-ci doivent permettre de « *mettre en pratique individuelle et progressive les apprentissages abordés dans l'activité de recherche* » (livre de l'élève, p. 2). L'organisation didactique est peu développée, et seule la lecture du guide pédagogique permet d'émettre des hypothèses sur ce qui a dû être institutionnalisé à la suite des trois activités de recherche.

Le premier exercice demande le tracé à main levée d'un parallélogramme, tandis que dans le second, le recours à un gabarit permettra de tracer un rectangle, un parallélogramme et un losange.

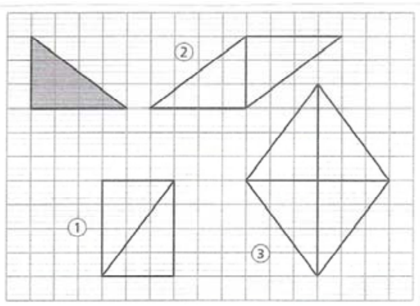
1) Sur une feuille de papier quadrillée, trace à main levée un parallélogramme ABCD.
Le côté AB mesure 5 carreaux.

2) Reproduis ce gabarit et utilise-le pour construire :
- un rectangle ;
- un parallélogramme ;
- un losange.



Les propriétés du parallélogramme énoncées lors de la quatrième activité, et que l'on retrouve pour la plupart codées dans la représentation graphique du paragraphe « *Mémo* » (*cf.* pages précédentes), doivent servir d'éléments technologiques. Les auteurs du guide pédagogique préconisent, pour le premier exercice, de tracer deux segments de 5 carreaux horizontaux, de joindre leurs extrémités deux à deux, et de vérifier que les côtés opposés sont égaux et parallèles. Pour les deux premiers segments, le quadrillage assure l'égalité et le parallélisme, pour les deux derniers l'égalité peut se vérifier à la règle graduée ou au compas mais rien n'est dit quant à la vérification du parallélisme. Ce type d'exercices devrait engager vers un travail du type « analyse et synthèse » pour lequel les propriétés du parallélogramme servent d'éléments technologiques :

- Partie analyse : si le quadrilatère est un parallélogramme, alors deux côtés opposés sont égaux et parallèles, le côté [*AB*] doit mesurer 5 carreaux, donc le côté [*CD*] doit aussi mesurer 5 carreaux ; si [*AB*] est horizontal, alors [*CD*] doit être horizontal (conditions nécessaires pour la construction), donc je trace deux segments de 5 carreaux horizontaux, et je termine le tracé du quadrilatère *ABCD*,
- Partie synthèse : je dois vérifier que le quadrilatère ainsi tracé répond à la question, c'est-à-dire que ses côtés deux à deux opposés sont égaux et parallèles (condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, excluant le quadrilatère croisé).



Pour le second exercice, les auteurs demandent aux élèves de recourir à un « *gabarit* » pour désigner le triangle rectangle à reproduire. Le terme évoque un objet que l'on peut déplacer et reproduire. Dans les réponses proposées par le guide pédagogique, le triangle n'est pas dans la position initiale, mais a été déplacé et reproduit deux ou quatre fois. On peut penser que les auteurs attendent des élèves qu'ils traitent cet exercice comme une construction de puzzle dont l'état final leur est suffisamment familier pour anticiper et guider leurs gestes. Les auteurs évoquent les propriétés des diagonales du losange sans qu'on sache pourquoi puisque, dans ce cas, l'égalité des quatre hypoténuses suffit.

On aurait pu, en modifiant la consigne, proposer un travail analogue au précédent : « Reproduis sur ton cahier ce triangle rectangle :

- construis un rectangle et un parallélogramme en juxtaposant à ce premier rectangle des triangles identiques ; chacun de ces quadrilatères doit avoir deux côtés confondus avec deux côtés du triangle rectangle,
- construis, en juxtaposant à ce premier triangle rectangle des triangles identiques, un losange dont un côté est un côté du triangle et les deux autres côtés du triangle portent ses diagonales. »

Une telle consigne attire l'attention sur le fait que l'on travaille sur des figures qui sont des assemblages de traits ayant des propriétés d'incidence précises. Pour la première consigne, le maître peut tout d'abord engager les élèves dans la recherche des différentes possibilités pour choisir deux côtés parmi trois. Deux côtés étant choisis, on peut alors faire une hypothèse sur le type de quadrilatère que l'on peut construire sur ceux-ci : avec les deux côtés de l'angle droit on peut construire un rectangle, avec un côté de l'angle droit et l'hypoténuse ce sera nécessairement un parallélogramme. Pour le rectangle, on peut penser qu'il sera complété sans autre recours aux propriétés géométriques de cette forme familière.

Pour le parallélogramme ***une phase d'analyse*** est nécessaire : si deux côtés du triangle sont les côtés d'un parallélogramme, alors nécessairement les côtés opposés seront parallèles et égaux. A l'aide du quadrillage, la construction de ces deux autres côtés est simple. Celle-ci ayant été réalisée, il reste à s'engager dans ***une phase de synthèse*** : vérifier que le quadrilatère obtenu et le triangle ainsi juxtaposé répondent à la question.

Pour la seconde consigne portant sur le losange, ***une phase d'analyse*** est de nouveau nécessaire : si deux côtés du triangle portent les diagonales du losange, alors ces côtés doivent être perpendiculaires, donc ce sont nécessairement les côtés de l'angle droit du triangle, et un côté du losange sera l'hypoténuse du triangle. En utilisant la description du losange donnée dans la deuxième activité, le losange doit avoir deux axes de symétrie, donc nécessairement les deux autres sommets du losange sont les symétriques des extrémités de l'hypoténuse, obtenues par exemple en pliant suivant chacun des deux côtés de l'angle droit. On peut alors construire un quadrilatère en joignant les quatre sommets et vérifier, lors d'une ***phase de synthèse***, qu'il répond à la question : les pliages effectués assurent que les quatre côtés sont égaux et que les quatre triangles rectangles constitués respectivement par les quatre demi diagonales et les quatre côtés sont superposables donc identiques.

Sans poursuivre au-delà l'analyse des exercices, un certain nombre d'enseignements peuvent d'ores et déjà être tirés :

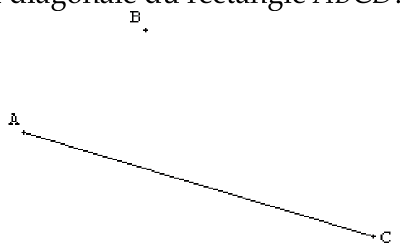
- sur six activités analysées, deux pourraient donner lieu à un usage fonctionnel des propriétés géométriques des quadrilatères, mais il est certainement nécessaire pour cela que l'étude des questions posées aux élèves soit dirigée par des enseignants très au fait du statut logique des énoncés utilisés, et pour lesquels la technique utilisée et la technologie la justifiant sont à mettre au premier plan, bien davantage que la construction attendue,
- il est difficile de s'assurer de la mobilisation effective des propriétés géométriques dans les activités de reconnaissance de figures, tant la familiarité avec les formes à reconnaître est grande,
- l'énoncé, dans les rares cas où il existe, et le plus souvent l'ostension des propriétés à travers le codage des figures, ne permettent pas de distinguer entre conditions nécessaires et conditions suffisantes ; ce qui conduit vers des obstacles didactiques,
- les activités de construction nous semblent beaucoup plus appropriées pour l'usage des énoncés de géométrie comme éléments technologiques, à condition que l'étude en soit guidée par un enseignant ayant de solides connaissances de la géométrie élémentaire, et donc qu'il connaisse et identifie afin d'en tenir compte, et non pas de les masquer ou de les ignorer, des points saillants et des difficultés propres à l'enseignement de ce domaine des mathématiques,
- les activités de construction proposées en fin de cycle 3 sont propices à la rencontre, par les élèves, de raisonnements du type « analyse – synthèse », mais leur transposition didactique n'est actuellement pas assurée par les auteurs des manuels.

Un travail transpositif pourrait suivre un schéma en trois étapes. Une partie « analyse » constituée de l'élaboration d'une figure d'étude à main levée et de l'énoncé des propriétés nécessairement vérifiées par les éléments de la figure ; cet énoncé aboutissant au codage correspondant sur la figure à main levée. Une partie « constructibilité », basée sur l'étude de la possibilité de la construction des éléments manquants grâce aux propriétés énoncées et en utilisant les instruments à disposition. Puis une partie « synthèse » qui réunit la construction effective des éléments manquants et la vérification que le tracé répond à la demande.

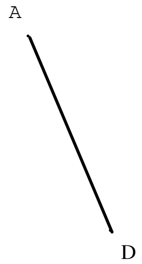
3 Exemples d’activités et ce qu’elles permettent d’analyser et d’observer

Les remarques précédentes permettent de penser des activités que nous avons mises en œuvre dans deux classes de CM2. Les trois tâches suivantes ont été proposées successivement aux élèves, chacune sur une feuille blanche [12] :

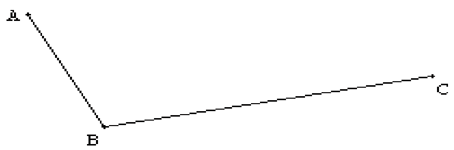
- **Première tâche :** [*AC*] est la diagonale du rectangle *ABCD*. Construis ce rectangle.[13]



- **Deuxième tâche** : *ABCD* est un carré. Construis ce carré.



- **Troisième tâche** : *ABCD* est un parallélogramme. Construis ce parallélogramme.



Le travail d’analyse mathématique *a priori* à mener renvoie à la formation des futurs professeurs des écoles relativement à la conduite des activités que l’on souhaiterait proposer aux élèves. Pour les activités géométriques exposées, et dont on trouve des propositions dans les manuels actuels du cycle 3, cette formation devrait sans doute inclure des éléments relatifs au raisonnement par analyse – synthèse. Par exemple, pour la deuxième tâche consistant à construire un carré à partir de la donnée d’un côté, on pourrait imaginer que la formation initiale d’un professeur lui permette de mener à bien une analyse *a priori* intégrant les seules connaissances des élèves disponibles au CM2 (travail qui n’est évidemment pas attendu des élèves de ce niveau !). Travail *a priori* qui pourrait prendre la forme suivante :

« *Analyse à partir des connaissances d’élèves de CM2 supposées disponibles*
Si le carré *ABCD* existe, alors il a un angle droit en *A*, un angle droit en *D* et $AB = AD = DC$. Donc *B* est un point de la perpendiculaire à (*AD*) passant par *A* tel que $AB = AD$, et *C* est un point de la perpendiculaire à (*AD*) passant par *D* tel que $AC = AD$.

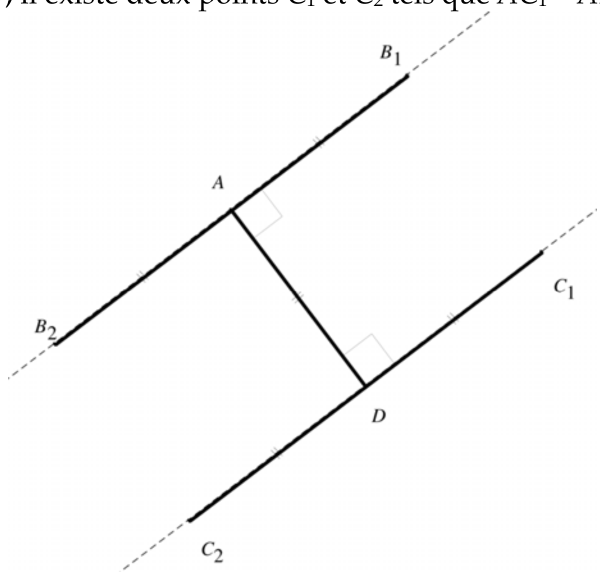
---

[12] Exercices inspirés des exercices n° 2 et 3 page 141, et n° 21 page 147, du manuel « Pour comprendre les mathématiques », CM2, édition Hachette, 2005. Dans l’ouvrage de référence, la technique préconisée pour construire des perpendiculaires et des parallèles à une droite donnée, passant par un point donné, utilise le quadrillage du cahier. Nous n’avons pas voulu utiliser cette technique, qui ne peut s’appuyer à ce niveau que sur des éléments technologiques perceptifs. Nous avons donc choisi de demander ces constructions sur du papier blanc avec une règle graduée et une équerre.

[13] L’angle en *B* sur le document donné aux élèves était droit, ce qui n’est peut-être pas le cas dans cette reproduction.

Constructibilité à l'aide des instruments à disposition des élèves de CM2

Soit (Δ_1) la perpendiculaire à (AD) passant par A et (Δ_2) la perpendiculaire à (AD) passant par D, construites à l'aide d'une équerre. Sur (Δ_1) on reporte, avec la règle graduée ou au compas, la distance AD, il existe deux points B_1 et B_2 tels que $AB_1 = AD$ et $AB_2 = AD$. Sur (Δ_2) on reporte, avec la règle graduée ou au compas, la distance AD, il existe deux points C_1 et C_2 tels que $AC_1 = AD$ et $AC_2 = AD$.



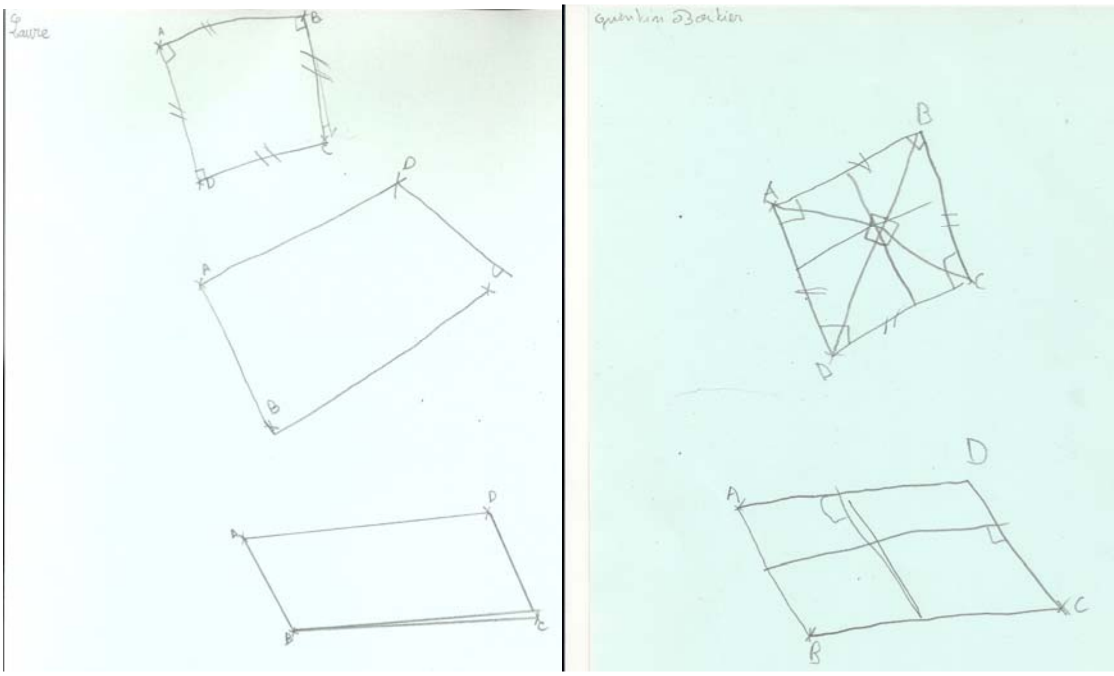
On voit déjà que les conditions nécessaires précédentes ne sont pas suffisantes pour construire un carré, qui est un quadrilatère convexe. Il faudra rajouter la condition : B et C sont nécessairement dans le même demi-plan limité par (AD). On obtient donc deux quadrilatères convexes.

Synthèse à partir des connaissances d'élèves de CM2 supposées disponibles

Dans l'état des connaissances des élèves de CM2, il sera nécessaire de vérifier que chaque quadrilatère obtenu a quatre angles droits et quatre côtés égaux. »

On verra, dans les deux productions d'élèves données ci-dessous, que la possibilité d'un carré « vers le bas à gauche » n'apparaît pas. La question du choix du demi-plan avait été abordée collectivement lors de l'élaboration de la figure à main levée (voir ci-dessous la description du protocole didactique). Pour conduire chaque activité, nous avons utilisé le protocole didactique suivant :

- sur une feuille de brouillon (verte), les élèves ont été invités à reproduire les éléments qui figuraient sur la feuille blanche et à élaborer une figure d'étude à main levée répondant à la question ; ce travail a été accompli individuellement par les élèves et simultanément au tableau,
- nous les avons invités à chercher les propriétés nécessairement vérifiées par les éléments de la figure si elle répond à la question, et à noter le codage correspondant sur la figure à main levée (***travail d'analyse***), voir ci-dessous :



- nous les avons invités à chercher quelles propriétés énoncées permettent de construire les éléments manquants avec les instruments à leur disposition qui sont la règle graduée et l'équerre ***(travail de constructibilité)***,
- nous leur avons demandé de construire effectivement sur la feuille blanche les éléments manquants (***travail de construction et de synthèse***).

Pour les première et troisième tâches, les différentes étapes ont donné lieu à des échanges collectifs avant le travail individuel. Pour la seconde tâche, faute de temps, seule la figure d'étude à été élaborée collectivement. La mise en œuvre de ce travail nous a montré que :

- les figures d'étude sont tracées entièrement à la règle dans plus d'un tiers des productions, et partiellement dans 17 %,
- la verbalisation des propriétés est relativement facile, mais la description verbale de leur repérage sur la figure d'étude, ainsi parfois que son codage, sont très difficiles,
- la question de la possibilité de construire les éléments manquants, avec les propriétés énoncées et avec les instruments à disposition, n'est pas prise en compte, les élèves débutent immédiatement la construction,
- les gestes à faire avec les instruments sont très difficilement décrits.

Les maîtresses présentes ont été surprises de tant de difficultés verbales et instrumentales. Elles ont été intéressées par l'investissement important des élèves dans ces activités et la structuration de la conduite utilisée.

Cette expérience a, bien évidemment, un intérêt limité. En particulier, le travail ayant été collectif, il est difficile d'observer les techniques utilisées individuellement, de savoir si elles s'appuient ou non sur des propriétés avancées sur la figure d'étude, propriétés qui ne sont pas toujours codées. Néanmoins la structuration introduisant le passage par une figure d'étude à main levée, que l'on code en fonction des propriétés attendues, permet d'assurer leur visibilité. Le travail à partir de la question « quelles propriétés permettent de construire les éléments manquants avec les instruments à disposition ? » permet l'explicitation de leur fonctionnalité. Enfin l'expérience nous a montré que la distinction entre une étude de constructibilité et une étude de construction effective est difficile à assumer à ce niveau, mais cela relève sans doute d'une préoccupation d'un autre niveau.

IV - CONCLUSION

Dans cette communication, nous souhaitions attirer l'attention :

- sur « l'existence d'un bloc technologico-théorique dans toute praxéologie, bloc souvent implicite, sur lequel l'institution ne dit rien ou bien peu et qui, de ce fait, demeure souvent invisible à ses propres sujets (professeurs et élèves) », privant les élèves d'outils pour travailler,
- sur le fait qu'une lecture attentive des instructions officielles éclairée par une formation en géométrie théorique permet de faire évoluer ce bloc, comme nous le montrons très sommairement – trop sommairement, mais la place est limitée – dans le second paragraphe de notre communication,
- sur la possibilité de faire passer les élèves, à travers des activités comme les constructions de figures, d'une position de lecteur de propriétés sur la figure, à une position où ils travaillent avec des énoncés produits dans la classe – position préparant la pratique démonstrative –, cette possibilité étant tributaire de l'analyse que le maître fera de ces activités, et en particulier de sa culture géométrique.

V - BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R. & SALIN M. H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de l'Université de Bordeaux I.

BERTHELOT R. & SALIN M. H. (2005) Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement élémentaire de la géométrie, in Salin, Clanché, Sarrazy, éds. *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures... Hommage à Guy Brousseau.* Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **19(2)**, 221-266.

CHEVALLARD Y. (2011) La diffusion déformante de la TAD, in *Journal du séminaire TAD/IDD*, séance 5 du 15 avril 2011 : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=176

DOUGLAS M. (1999) *Comment pensent les institutions.* Paris : Editions La découverte et Syros.

DUVAL R. & GODIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76**, 7-27.

GENTAZ E. (2010) Toucher pour connaître et apprendre, site de l'auteur : http://webu2.upmf-grenoble.fr/LPNC/LpncPerso/Permanents/EGentaz/web/?

HOUDEMENT C. (2007) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, *Repères IREM*, **67**, 69-84.

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M. J. & DELPLACE J. R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, **79**, 33-60.

NOIRFALISE A. & MATHERON Y. (2009) *Enseigner les mathématiques à l'école primaire. Géométrie, grandeurs et mesures*. Paris : Vuibert.

NOIRFALISE R. (1993) Contribution à l'étude didactique de la démonstration. Etude de régularités dans les modalités de fonctionnement du savoir mathématique dans les divers chapitres de géométrie d'un manuel de sixième. *Recherches en didactique des mathématiques*, **13(3)**, 229-256.

PINET L. & GENTAZ E. (2007) La reconnaissance des figures géométriques planes par les enfants de 5 ans, *Grand N*, **80**, 17-28.