

LE JEU DE TÂCHES, UNE INTERACTION DE CONNAISSANCES PARTICULIÈRE ENTRE EXPÉRIMENTATEUR ET ÉLÈVES

Christine DEL NOTARO

Chargée d'enseignement, Université de Genève
Christine.DelNotaro@unige.ch

Résumé

Notre communication a mis en évidence quelques résultats de recherche visant à montrer une manière particulière d'interagir avec l'élève : le jeu de tâches. Il s'agit d'un ensemble de tâches qui découlent en principe les unes des autres, sans être hiérarchisées pour autant. L'expérimentateur est un élément du milieu (au sens de Bloch, 2002) qui va mettre en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et avec le milieu de l'élève. Cet ensemble de tâches procède d'un savoir mathématique et met en évidence les connaissances que les élèves ont accumulées et qui constituent leur expérience. En effet, au fil des tâches, l'élève se constitue peu à peu une expérience, par exemple, à propos des nombres, et plus particulièrement, en ce qui nous concerne, des relations de divisibilité. Nous avons tenté d'en montrer quelques manifestations d'une part et d'autre part, d'exposer comment on peut convoquer cette expérience dans l'interaction et de quelle manière elle se donne à voir.

Nous avons expérimenté des jeux de tâches dans le domaine des critères de divisibilité en 5e et 6e primaire (11-12 ans), alors que cela avait été effectué essentiellement en géométrie auprès d'élèves de l'enseignement spécialisé (DDMES).

Il est encore trop tôt pour envisager un dispositif de formation, mais on peut toutefois entrevoir l'avantage de mettre des étudiants en situation d'engager leurs propres connaissances dans l'interaction avec les élèves, plus habitués à être observateurs des procédures des élèves.

Nous avons dirigé un travail de maîtrise intitulé : Un exemple de jeux de tâches pour explorer le milieu des puissances en 6P (Thévenaz, 2010) qui se révèle être une tentative intéressante de reprise de cette notion par une étudiante.

I - CONTEXTUALISATION DE LA NOTION DE JEU DE TÂCHES

Le jeu de tâches est une interaction particulière entre expérimentateur et élèves. Ce concept a été élaboré par le groupe DDMES¹ et a fait notamment l'objet d'une présentation en 2003 au séminaire National de Paris². Nos recherches ne se situent pas dans le secteur de l'enseignement spécialisé mais nous avons repris ce concept (Del Notaro, 2010), pour tenter de le faire fonctionner avec des élèves de l'enseignement ordinaire et afin de mener des observations à propos du nombre. Ainsi, là où DDMES investit essentiellement des notions de géométrie dans le milieu de l'enseignement spécialisé, nous nous démarquons quelque peu en proposant des jeux de tâches autour de notions numériques (les relations de divisibilité), dans le cadre de l'enseignement ordinaire.

¹ Didactique des Mathématiques pour l'Enseignement Spécialisé. Groupe animé par F. Conne (Université de Genève et de Lausanne) et J.-M. Favre (CFPS, Château du Seedorf, Noréaz). Membres : C. Cange (Institut Pré-de-Vert, Rolle), L. Del Notaro (École du Mail, Genève), P. Depommier (Collège Arnold Reymond, Pully), D. Jean Richard (CPHV, Lausanne), C. Maréchal (Université de Genève), A. Meyer (ECES, Lausanne), J.-D. Monod (Gymnase cantonal, Nyon), C.-L. Saudan (Fondation de Vernand, Cheseaux-sur-Lausanne), A. Scheibler (enseignement secondaire, Aigle).

² DDMES (2003). L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. *Actes du Séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris, 28-29 mars.

Dans son texte de 2003, le groupe DDMES a exposé une idée qui a constitué pour nous un tournant décisif dans nos recherches : l'idée d'étirement du milieu. Sans trop nous arrêter sur cette question, il convient néanmoins d'en dire quelques mots. Cette notion consiste à explorer, investiguer le milieu de manière approfondie. Dans la notion d'étirement, il y a l'idée de repousser les limites de la tâche qui va s'enrichir, s'amplifier, se prolonger tout en résultant évidemment du savoir mathématique ; le milieu n'est pas une entité statique mais au contraire, dynamique : nous y associons une certaine liberté dans le questionnement des élèves. Ainsi, nous nous autorisons à interagir avec l'élève selon notre propre représentation de la tâche et en dehors, parfois, de notre analyse préalable. Nous cultivons l'idée qu'il y a un enjeu à saisir, un étonnement (de notre part ou de celle des élèves) à l'exploiter sur le vif. Cela signifie que nous ne cherchons pas ici à faire réussir l'élève, mais que nous sommes bien dans la perspective épistémologique de comprendre comment les connaissances des élèves s'agencent. De ce fait, il se peut que nous abandonnions abruptement une tâche, que nous laissions flotter des erreurs sans les discuter ou encore, que nous intervenions en donnant des contre-exemples, que nous empêchions l'élève de réfléchir par nos questions, ou que nous le déstabilisions pour tenter de saisir le fil de sa pensée. Cela peut paraître particulier, mais il n'en demeure pas moins que les élèves adorent ce type d'interaction sans que nous ne nous l'expliquions véritablement.

Pour déterminer le type de milieu dans lequel nous questionnons les élèves, nous précisons qu'il s'agit d'un milieu de type expérimental, au sens de Bloch (2002) ³ qui définit différents modèles de milieux, selon s'ils se trouvent du côté de la théorie, de l'expérimentation ou de la contingence. Ainsi, le modèle de milieu expérimental nous permet-il non seulement de prévoir et d'analyser un phénomène d'enseignement, les rapports à la connaissance et au savoir des élèves et du professeur ainsi que leur articulation, mais encore, de construire des situations expérimentales, de les étudier et de les analyser dans la contingence. Le milieu théorique *a priori* sera constitué non pas d'une situation fondamentale, au sens de la *Théorie des situations didactiques*, mais d'un *jeu de tâches*. Le milieu théorico-épistémologique de notre objet mathématique (les critères de divisibilité par 4) réfère à l'étude de l'anneau des nombres entiers relatifs. L'expérimentateur est un élément du milieu qui va mettre en jeu ses propres connaissances dans son interaction avec les milieux de la tâche et de l'élève, pour tenter de cerner les connaissances engagées par ce dernier. Il ne dispose pas à proprement parler d'une liste de tâches au sens de Favre (2008), mais il en a défini quelques-unes, *a priori*, qui sont à l'image de sa propre exploration du contenu, en lien avec ce qu'il a compris au préalable du jeu de l'élève. Il reste que certaines tâches n'ont pas été prévues et ont été proposées dans le feu de l'interaction : il arrive que l'expérimentateur mette en jeu une tâche spontanément ou qu'il se laisse emporter par une proposition d'élève. Cela étant, cet ensemble de tâches doit pouvoir mettre en exergue les connaissances que les élèves ont accumulées par leur expérience du nombre, ce qui nous permettra de spécifier celles qui se manifestent en rapport avec une tâche précise. La distinction de Favre (2008) en ce qui concerne un *jeu de tâches effectif*⁴ et les *cartes du jeu*⁵ nous semble d'importance, car elle fait état de l'écart toujours présent entre une prévision et ce qui se passe réellement avec les élèves. Nous nous sommes saisie de cette liberté pour suivre les élèves dans leur pensée et nous sommes autorisée à suivre ce cheminement, qui nous a mené parfois assez loin dans les mathématiques abordées.

Le jeu de tâches se joue donc dans une interaction de connaissances : celles de l'expérimentateur sont engagées dans le milieu et sont parties prenantes de l'interaction, ce qui nous a permis de libérer l'espace de l'expérimentation avec les élèves, nous menant bien plus loin dans notre échange que si les interventions de l'expérimentateur avaient été figées et celles de l'élève prises comme telles, sans que l'on ne puisse considérer de transformation de la pensée de l'élève en interaction avec celle de l'expérimentateur, et vice-versa. L'enjeu est donc de partir des réponses des élèves pour poser d'autres

³ Cf. figure en annexe

⁴ Les jeux de tâches (échanges) ayant effectivement eu lieu.

⁵ Les différents jeux prévus par l'expérimentateur.

questions, à l'aune de ce que nous comprenons que les mathématiques mises en jeu produisent sur les connaissances des élèves.

Notre milieu expérimental nous permet de vérifier dans un premier temps les observations faites dans le milieu de la contingence ordinaire de départ, de les analyser dans le milieu théorique et d'en avérer certaines ; le but étant de les confronter ensuite à une contingence, cette fois-ci de nature expérimentale, et de dépasser ainsi les simples observations empiriques. Les expérimentations nourrissent de ce fait le milieu théorique, qui a son tour contrôle le milieu expérimental. La confrontation à la contingence expérimentale des tâches sera réalisée par le chercheur. De la sorte, ce dernier se fait expérimentateur et *pilote*⁶ de la situation après avoir mis au point une série de tâches procédant du savoir mathématique visé. Nous interrogeons ces différents milieux par le biais du jeu de tâches et nous centrons essentiellement sur le milieu expérimental *a priori*.

Le jeu de tâches laisse une place importante à l'investigation du milieu en partant d'une tâche qui va s'enrichir, s'amplifier, se prolonger tout en résultant du savoir mathématique. Il procède donc d'une démarche de recherche axée sur l'investigation du milieu. Nous définissons le jeu de tâches comme un ensemble de tâches qui découlent en principe les unes des autres, mais pas toujours, dans le sens que nous ne les avons pas hiérarchisées. Il s'agit ici en particulier d'une interaction particulière, permettant de cerner les connaissances spécifiques engagées par des élèves de 11-12 ans, au sujet de diverses relations de divisibilité et de l'expérience que ces derniers peuvent en faire.

Dans notre milieu théorique *a priori*, nous avons défini une ou plusieurs tâches préalablement et nous sommes laissé la possibilité de bifurquer une fois sur le terrain, selon les apports des élèves sur le moment, ce qui présuppose entre autres, de connaître les entours de la tâche. Les tâches sont en conséquence déterminées pour une part, *a priori*, et pour une autre part, dans l'action même de l'expérimentation. Le type d'entretien mené n'est pas neutre de la part du chercheur qui, rappelons-le, s'autorise toute intrusion dans la réflexion, les propos ou le travail papier-crayon de l'élève et satisfait ainsi un souci de précision immédiate dans un but d'investigation du milieu et dans l'interaction de connaissances entre chercheur et élève-s.

Pour sonder le milieu, cet *interventionnisme* est nécessaire car on ne peut se contenter de l'observer de manière naturaliste. Nous pensons que pour trouver des réponses, il faut d'une certaine manière, les provoquer. Ce terme à double sens comporte à la fois l'idée de les inciter – par mise en place du milieu – et celle de les défier, par des déstabilisations, pour tester la résistance des connaissances.

En d'autres termes, nous interrogeons les connaissances mathématiques des élèves à travers leur expérience de la structure du nombre dans un jeu qui nous permettra de repousser toujours plus loin les limites de la tâche. Il s'agira dans un premier temps d'élargir le milieu ; on aura donc recours à des expérimentations diverses et variées.

Avant d'exposer la manière dont nous enchaînons les tâches, il convient de donner un exemple de jeux de tâches, que nous commentons minimalement afin d'en assurer la compréhension.

1 Un exemple de jeux de tâches

L'exemple ci-après est représentatif des différents cas de figure décrits : deux tâches ont été prévues et effectuées, enrichies de propositions d'élèves (tâches 3 et 4), puis d'une suggestion de l'expérimentateur en dernier lieu (tâche 5). La séance est consacrée à l'étude des multiples de 4 et de 3, par l'intermédiaire de jeux exploratoires :

1. Pyramide de nombres : deux élèves sont chacun « chef » de multiples (l'un des multiples de 3 et l'autre des multiples de 4) ; des nombres sont agencés en pyramide l'un sous l'autre (1, 12, 123, 1234,...), chaque élève possède sa propre pyramide. Il est demandé aux élèves, à tour de rôle, de rendre le nombre multiple de sa catégorie en y adjoignant un chiffre au besoin. L'autre élève vérifie

⁶ Terme emprunté à Favre, 2008.

si le nombre de son adversaire n'est pas multiple de sa catégorie, auquel cas il marque un point. Par exemple 12 doit être « transformé » pour n'être que multiple de 3 (ex. en accolant un 6: 126) ou uniquement multiple de 4 (124), selon quel joueur commence. Un exemple : le joueur chef des multiples de 3 a laissé le 12 sans rien accoler, ce qui a eu pour conséquence que l'autre a marqué un point, puisque 12 est également multiple de 4.

2. Multiples de 3 contre multiples de 4 : le jeu « chefs de multiples » se poursuit. Un élève par groupe joue contre un élève de l'autre groupe pour rendre le nombre de départ (11) multiple de 3 ou multiple de 4, etc. (11 – 111 – 1112 – 11121 – 111216 – 1112160 – 11121604 – etc.)
3. Knox (1) : (proposition des élèves). Les élèves récitent la suite des nombres ; le jeu consiste à dire ce mot (knox) lorsque l'on tombe sur un multiple de 3 ou un nombre contenant le chiffre 3. L'expérimentatrice accepte cette règle de jeu, pour voir... Il en a résulté la découverte de la règle de réduction d'un nombre dans la règle de divisibilité par 3. Arrivé à 57, un élève a repéré que l'on pouvait faire $5+7 = 12$ et 12 est multiple de 3 ou continuer jusqu'à n'obtenir qu'un seul nombre, $1 + 2 = 3$.
4. Knox (2) : ... avec les multiples de 4 ou un nombre contenant le chiffre 4.
5. Knox (3) : (l'expérimentateur complexifie) ... avec les multiples de 3 et les multiples de 4, (sans tenir compte des chiffres 3 et 4, comme dans leur proposition de jeu). Il nous a semblé pertinent de donner suite à la proposition 3), dans la mesure où il s'agit de reconnaître un multiple de 3 dans une suite de nombres récitée, avec la contrainte « parasite » du chiffre 3 qui permet de faire des liens. Ainsi, la comparaison par exemple de 13, 33, 133, devient-elle intéressante, en relation avec ces deux contraintes. Les élèves sont allés assez loin sans se tromper. Le jeu s'est terminé à deux élèves, les deux autres ayant été éliminés à la première erreur ; il demande toutefois une grande mobilisation cognitive.

La conception de notre jeu de tâches est véritablement de suivre l'élève dans son raisonnement, de le comprendre, de le contredire en lui opposant des suggestions éventuellement déstabilisantes, afin de saisir de quelle manière il va soutenir le fil de sa pensée et peut-être, la modifier. Dans ce cas, il nous importe de pouvoir saisir quel indice l'a fait changer d'avis. Ainsi, juste après l'échange entre l'élève et l'expérimentateur commence pour ce dernier, un travail minutieux consistant à pointer les éléments susceptibles de lui faire élaborer une nouvelle tâche directement reliée à ce qui s'est passé lors de la séance avec l'élève. Ses propres connaissances sont engagées non seulement pendant l'interaction, mais aussi à ce moment précis du différé.

2 L'enchaînement des tâches (jeux) à partir d'une tâche de départ

En ce qui concerne l'enchaînement des tâches, il faut préciser ici que nous effectuons *des sauts par les tâches* pour *rester dans les tâches*. Il s'agit d'une manière de relancer a-didactiquement, pourrait-on dire. Cela signifie que nous avons un réservoir substantiel de tâches, qui fonctionnent comme autant de variables didactiques, en relation avec ce que les élèves vont faire ou dire.

Avant de poursuivre avec un exemple d'interaction, il convient ici de s'arrêter sur le nombre considérable de connaissances que les élèves ont injectées dans le milieu et qui ont enrichi les cartes du jeu proposé par l'expérimentateur. On constatera là encore, qu'il s'agit d'une interaction dans laquelle l'expérimentateur est partie prenante du milieu ; ce dernier va répondre en fonction de ce que les élèves disent.

Il y a une correspondance entre notre propre investigation du milieu et celle des élèves : nous récupérons celle des élèves pour procéder à notre tour à une exploration et proposer en retour, une nouvelle expérience aux élèves. C'est un phénomène bouclé, dans lequel les explorations sont liées et s'alimentent entre elles. Il y a quelque chose de communicatif dans ce va et vient. Plus les élèves s'investissent et plus nous investiguons le milieu à notre tour pour fournir à la séance suivante, une tâche susceptible d'alimenter leur curiosité. Nous supposons que si cela n'existe pas à l'école, c'est parce que les professeurs n'explorent pas eux-mêmes le milieu, cela nous semble lié.

Cette idée d'exploration pure et déliée de toute contrainte est vivace chez les mathématiciens et le fait de l'importer en classe nous permet d'observer un fait particulier : les élèves ont un intérêt, certes différent du nôtre, mais un intérêt très fort et très grand pour l'exploration mathématique, au point que cela nous a profondément questionnée. Très surprise dans un premier temps, nous avons cultivé cela par la suite et décidé de persévérer dans ce questionnement. C'est même cet intérêt porté par les élèves qui a nourri le nôtre et nous a entraînée dans cet élan.

Nous n'avons pas l'illusion de faire des mathématiques comme les mathématiciens, mais gardons vifs à l'esprit, les propos de Delahaye (2004) concernant les liponombres de Graner : « *Ces résultats de lipomathématiques sont d'une utilité incertaine, mais le plaisir de mener des dénombrement et de faire travailler les ordinateurs pour qu'ils résolvent des énigmes originales justifient le temps et l'argent dépensés. J'espère que des passionnés poursuivront le travail de Nicolas Graner* ». En ce qui concerne notre travail avec les élèves, l'utilité de ce type de jeux mathématiques ainsi que leur plaisir sont indubitables, mais il faut du temps. Il faut pouvoir investir sur le plus long terme car nous avons observé que les liens établis par les élèves viennent souvent plus tard, même beaucoup plus tard (trop, sans doute, pour des programmes scolaires impatientes) et souvent, lorsque l'on ne s'y attend pas.

A partir de notre tâche de départ⁷ que nous n'analyserons pas dans cet article, nous avons mené un grand nombre de jeux de tâches ; nous nous proposons d'en présenter quelques-uns dans la partie suivante.

II - EXEMPLES D'INTERACTIONS

Nous allons montrer dans cette partie, ce que ces tâches ont à voir les unes avec les autres, comment elles s'agencent entre elles et quelle est la part éventuelle d'improvisation de la part de l'expérimentatrice. A priori, il n'est pas aisé de voir cet agencement, justement du fait qu'il résulte d'un jeu de tâches effectif, ce que nous allons essayer de faire ressortir.

1 Les tâches de la séance S1

Les tâches proposées ci-dessous sont le résultat d'un jeu de tâches effectif. Nous distinguons « *cartes du jeu de tâches* », qui se rapporte à ce qui a été prévu par l'expérimentatrice et « *jeu de tâches effectif* », qui caractérise ce qui a véritablement été effectué. Le jeu de tâches effectif peut être ressemblant aux cartes du jeu de tâches, ou alors enrichi, voire même différent du premier, comme on l'aura compris.

Il n'y a qu'une carte dans ce jeu indiquée en gras (tâche 1), les autres s'étant greffées dans l'interaction.

- 1. Dire un nombre qui se divise par 3. Un autre, plus grand, plus petit, de trois chiffres, quatre chiffres, etc.**
2. Chercher tous les livrets⁸ dont 108 fait partie.
3. 1532 se divise-t-il par 3 ?
4. Transformer ce nombre pour qu'il devienne multiple de 3. Changer un seul chiffre.
5. Contre-exemple avec les multiples de 4.

Ces jeux de tâches ont mis en valeur un nombre impressionnant de connaissances manifestées par les élèves. Nous les avons toutes recensées, ce qui a fait partie du travail minutieux décrit plus haut, qui intervient après la séance avec les élèves, et nous a permis d'alimenter notre jeu.

⁷ Charrière, 1991 : « 2.7. $\div 4$. Trouve toutes les façons de compléter ce nombre pour que la division par 4 ne donne pas de reste. Remplace le 7 des dizaines par un autre chiffre : combien y aura-t-il, dans chaque cas, de nombres divisibles par 4 ? »

⁸ Le mot « livret » est une désignation suisse romande pour dire « table ».

1.1 Les connaissances manifestées par les élèves

Les connaissances manifestées par les élèves enrichissent et alimentent le jeu de tâches. Nous proposons un extrait des connaissances exprimées par les élèves ; nous les avons recensées, qu'elles soient justes ou fausses, puisque chacune représente ce que pense l'élève et nous permet potentiellement de repartir de ses affirmations. Reprenons le point 1 pour commencer : « Dire un nombre qui se divise par 3. Un autre, plus grand, plus petit, de trois chiffres, quatre chiffres, etc. » ; à ce propos, les élèves disent ceci :

Pour donner un nombre qui se divise par 3

- Il faut compter de 3 en 3 depuis 90, ce sont les multiples de 3, jusqu'à 108
- 108 n'est pas dans table de 3 mais dans table de 9 car $108 = 9 \times 12$ mais comme $3 \times 3 = 9$, alors ça marche : 108 est dans la table de 3
- 12 est aussi dans la table de 3, car ils sont multiples l'un de l'autre ($9 \times 12 = 108$)
- Si on peut dire : $3 \times 3 = 9$ et 108 est dans la table de 9 alors 108 est dans la table de 3, on peut dire aussi pour 36, puisque 36 est le triple de 12.
- Il y a 4 tables, car on a 12, 9, 3, 36 (9×12 et 3×36). 108 est dans les tables de 12, 9, 3, 36
- Il y a 6 aussi, 6×18 ; c'est pas étonnant puisque 6 et 18 sont dans le livret de 3.
- 108 se trouve dans 12 livrets. 1×108 , 2×54 , 3×36 , 4×27 , 6×18 et 9×12

Pour savoir si un nombre se divise par 3, 6

- Pour 1532, il faut additionner les chiffres. 1532 est dans la table de 11 car $RN^9 = 11$ ($1+5+3+2 = 11$)
- Ça marche aussi pour les multiples de 4 ; 435 est un multiple de 4 puisque $4+3+5 = 12$ et que 12 est un M4
- Logiquement, ça devrait marcher avec 3, 6 et 9
- $435 \div 6 = ?$ on peut le diviser car $4+3+5 = 12$; 12 est multiple de 6
- Ça ne marche pas avec 2 (435 est un nombre impair et pas pair) ; si c'est pas possible avec 2, alors ce n'est pas possible avec 6 non plus.
- Pour 378, $3+7+8 = 18$, et puis 18 est un multiple de 3, de 6 et de 9

De même que pour la première séance, nous proposons ci-après, un extrait de la liste des connaissances manifestées par les élèves lors de la deuxième séance (S2). Nous la présentons à la suite car elle illustre le cheminement des élèves, même si elle se présente pêle-mêle et de manière non hiérarchisée. On constatera néanmoins que les connaissances se font et se défont, qu'elles ne sont pas stables et se transforment au gré des éléments qui arrivent dans le milieu.

Les multiples de 6

- Ça marche si ça finit par 6, ou s'il n'y a que des 6
- 185 et 145 : marche pas avec 6 car $6 > 5$
- Ça ne doit pas finir par un impair

Des nombres « embêtants » et/ou « étonnants »

- 585, multiple de 3 et de 9
- 435, multiple de 3 seulement, pourquoi pas de 9
- 603 : pourquoi pas multiple de 6, puisque six centaines
- 156 : multiple de 3 et de 6 pourquoi pas de 9
- 1728 ça marche pour les multiples de 3, de 6 et de 9.
- Mais pourquoi 9 puisque $3 \times 9 = 27$???

Nombres qui marchent pour les multiples de 3, de 6 et de 9

⁹ RN = racine numérique = somme des chiffres du nombre

- 108, 216, 432, 864

1.2 Les cartes des jeux des séances S2, S3, S4

A partir de ces affirmations, il nous est possible d'affiner notre jeu en différencié, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut. Il y a donc plusieurs façons d'alimenter un jeu de tâches : d'une part dans l'interaction et d'autre part, dans le travail après-coup de la relecture des notes prises et/ ou de la narration effectuée, le cas échéant.

Séance S2

1. Prendre un nombre de trois chiffres et dire s'il est divisible par 3, 6, 9.
 - a. Faire l'essai avec plusieurs nombres.
 - b. Pourquoi ça ne marche pas avec 6 ?
 - c. Avec 435, si ce n'est pas possible avec 2 alors ce n'est pas possible avec 6 ; qu'est-ce que ça veut dire ?
2. Diviseurs de 108 (reprise de la dernière fois). Est-ce que ce seront les mêmes diviseurs pour la moitié de 108 ? Le double de 108 ? Le tiers de 108 ?

Cette séance illustre le travail après-coup que nous évoquions plus haut. Nous avons saisi les hésitations, les surprises (*Logiquement, ça devrait marcher avec 3, 6 et 9*), les connaissances induites par le milieu ($435 \div 6 = ?$ on peut le diviser car $4+3+5 = 12$; 12 est M6) etc. pour explorer ce milieu. Les séances S3 et S4 sont des jeux effectifs et permettent au lecteur de tenter d'imaginer le fil de pensée suivi pour alimenter les jeux de tâches.

Séance S3

1. Dire un nombre qui se divise par 4. Un autre, plus grand, plus petit ; un nombre de 3 chiffres, de 4 chiffres, ...
2. 2376 se divise-t-il par 4 ?
3. Y a-t-il plus de nombres divisibles par 4 ou multiples de 4 ?
4. Y a-t-il des nombres à la fois divisibles par 4 et multiples de 4 ?

Séance S4

1. Faire des liens entre les multiples de 4 et de 8 et leurs critères de divisibilité
2. Ecrire des nombres de 4 chiffres dont vous pensez qu'ils se divisent par 8.
3. Tableau partiel des multiples de 8, à observer et faire des commentaires, remplir, dire quel nombre il y aura dans telle ou telle case.
4. Quelles règles de divisibilité pourrait-on trouver ?
5. Ecrire quatre nombres de 4 chiffres et dire s'ils sont multiples de 8

1.3 Les interactions de connaissances ayant permis l'agencement des tâches

Afin de montrer de quelle manière l'agencement des tâches est soumis à l'interaction des connaissances de l'expérimentatrice et des élèves et comment ces dernières se manifestent, nous en revenons à notre première séance S1 et à son jeu effectif, pour tenter de rendre plus lisible cet enchaînement de tâches.

Dans la colonne de gauche, on reconnaîtra le jeu de tâches, et dans celle de droite, son commentaire.

1. Dire un nombre qui se divise par 3. Un autre, plus grand, plus petit, de trois chiffres, quatre chiffres, etc.	• Une élève trouve 108 et hésite quant à son appartenance à la table de 3, 6 ou 9 ; • Nous décidons de creuser l'idée et proposons en 2) :
2. Chercher tous les livrets dont 108 fait partie.	• Un élève déclare : « On a écrit tous les livrets où on trouve 108, mais y en a peut-être d'autres, 2 et 4 ? ».

	- Ils ne reconnaissent pas les tables de 2 et de 4 dans ce qu'ils ont écrit : 1×108, 2×54, 3×36, 4×27, 6×18 et 9×12. - Nous posons la question suivante en 3) :
3. Est-ce que les nombres qui divisent 108, ce sont les mêmes que les livrets où on trouve 108 ?	- Il répondent : « non pas du tout, c'est pas la même chose ». - Nous proposons en 4) :
4. Dire si 1532 se divise par 3.	- Confusion entre les deux critères de 3 et 4 ; - Nous tentons l'idée gardée en réserve, de demander de « transformer » quelque chose au nombre pour qu'il devienne multiple de 3. (Il ne s'agit pas d'une opération que l'on effectuerait sur 1532, mais d'un jeu sur les chiffres). - En 5):
5. Transformer ce nombre pour qu'il devienne multiple de 3. Changer un seul chiffre.	- À partir de là, nous supposons que le fait que l'addition des chiffres du nombre n'est pas adéquate pour les multiples de 4 va leur « apparaître ». - Nous proposons un contre-exemple en 6):
6. Contre-exemple avec les multiples de 4.	Ils disent que oui (ex.: $4+3+5 = 12$ et c'est M4). Après essais, ils en concluent que 1532 ne marche pas avec 11 ni 4 mais que ça devrait marcher avec 3, 6 et 9 (car 12 est M6). Mais si c'est impossible avec 2 alors c'est impossible avec 6. 435 est un nombre impair et pas pair.

Ce que nous retirons du jeu de tâches est le fait que cette façon d'interagir avec le milieu de l'élève apporte une ouverture dans les échanges ; le jeu de tâches joue un rôle dans l'élaboration d'une logique dans la mesure où il laisse toute la place à l'expérience, voire la préconise.

L'aménagement du milieu en jeux de tâches permet à l'élève à la fois d'explorer ce milieu et de se constituer des expériences autour des critères de divisibilité en question, de faire ressortir des connaissances plus anciennes et de le confronter au milieu et ainsi, d'élaborer de nouvelles connaissances. Si nous reprenons l'exemple de la divisibilité par 6, on peut évidemment rapidement expliquer la règle à l'élève mais dans ce cas, on le prive de sa propre réflexion, de son propre cheminement intellectuel. Au contraire, si on le laisse faire l'expérience des critères particuliers ou encore, s'il se trouve confronté à un questionnement qui peut piquer sa curiosité (Pourquoi ça ne marche pas avec 6 ?) on permet à l'élève de se constituer ses propres connaissances.

III - UN CAS PARTICULIER, LE CAS DE SARA

1 Le jeu de tâches donne à voir les connaissances des élèves

Le cas que nous présentons nous semble intéressant dans le sens où l'analyse du jeu de tâches donne des informations quant à l'activité mathématique particulière d'une élève qui se révèle, à première vue, un peu en marge du groupe que nous interrogeons. Il est à préciser que c'est au travers de la narration de ce

jeu de tâches que nous avons pu mettre à jour les éléments d'analyse qui suivent et les conclusions que nous en avons tiré. Nous ne développerons toutefois pas cette question dans cet article.

1.1 Les cartes du jeu de tâches

1. Nicolas a dit : 4444 est un M4 car $4+4+4+4 = 16$ et 16 est un M4. Qu'en pensez-vous ?
2. Comparer ces affirmations, qu'en pensez-vous ?
 - a. dictionnaire 6P¹⁰ : « un nombre naturel est divisible par 6 ou est multiple de 6 s'il est un multiple de 2 et de 3, donc divisible par 2 et 3 »
 - b. ce que nous disons depuis quelques séances : « un M6 est un nombre pair, multiple de 3. Donc, un nombre pair, dont la somme des chiffres est un multiple de 3 ».
3. Comment on reconnaît-on un multiple de 6 ? Écrire une phrase qui l'explique (dans l'interaction)

1.2 Le jeu de tâches de Sara¹¹

1. Diviser de grands nombres par 4 à la calculatrice
2. Écrire la table de 4 jusqu'à 100
3. Écrire les tables de 3, 6, 9
4. Reprendre les divisions par 4 sur la calculatrice (« ça donne des nombres à virgule parfois ou des nombres entiers »)
5. Multiplier un nombre décimal par une puissance de 10 :
 1. $1754,8 \times 10^2 = 175\,480$
 2. $1754,8 \times 10^3 = 1\,754\,800$
 3. $1754,8 \times 10^4 = 17\,548\,000$, etc. (ce qui provoque une grande surprise)
6. Refaire les opérations des autres avec sa calculatrice : $3+2+4+5+6=20$
7. Reprendre 3136 et dire que ce n'est pas un multiple de 6 car $3+1+3+6 = 13$ et 13 n'est pas multiple de 6

Ce qui fait sens pour cette élève est d'explorer le nombre à l'aide de la calculatrice et l'on observera de quelle manière son jeu rejoint celui de ses camarades, grâce au détour personnel effectué durant ces quelques séances.

1.3 Confrontation des différents jeux de tâches

Nous avons confronté les différents jeux de tâches afin de comprendre le jeu particulier de Sara et de pouvoir saisir les liens qui les unissent. Nous avons mis en tableau ces différents jeux pour en faciliter la lecture. Les cartes du jeu de tâches comportent une tâche (2) qui a été abandonnée car elle ne revêtait aucun sens pour les élèves. Manifestement ici, en tant qu'expérimentatrice nous n'avons pas saisi l'enjeu des connaissances des élèves qui n'en n'étaient pas à comparer des définitions.

Ceci illustre le fait que certains jeux sont à abandonner et que c'est dans l'interaction que cela se comprend.

¹⁰ Feuillet figurant dans le manuel de 6^{ème} primaire, qui recense des définitions mathématiques

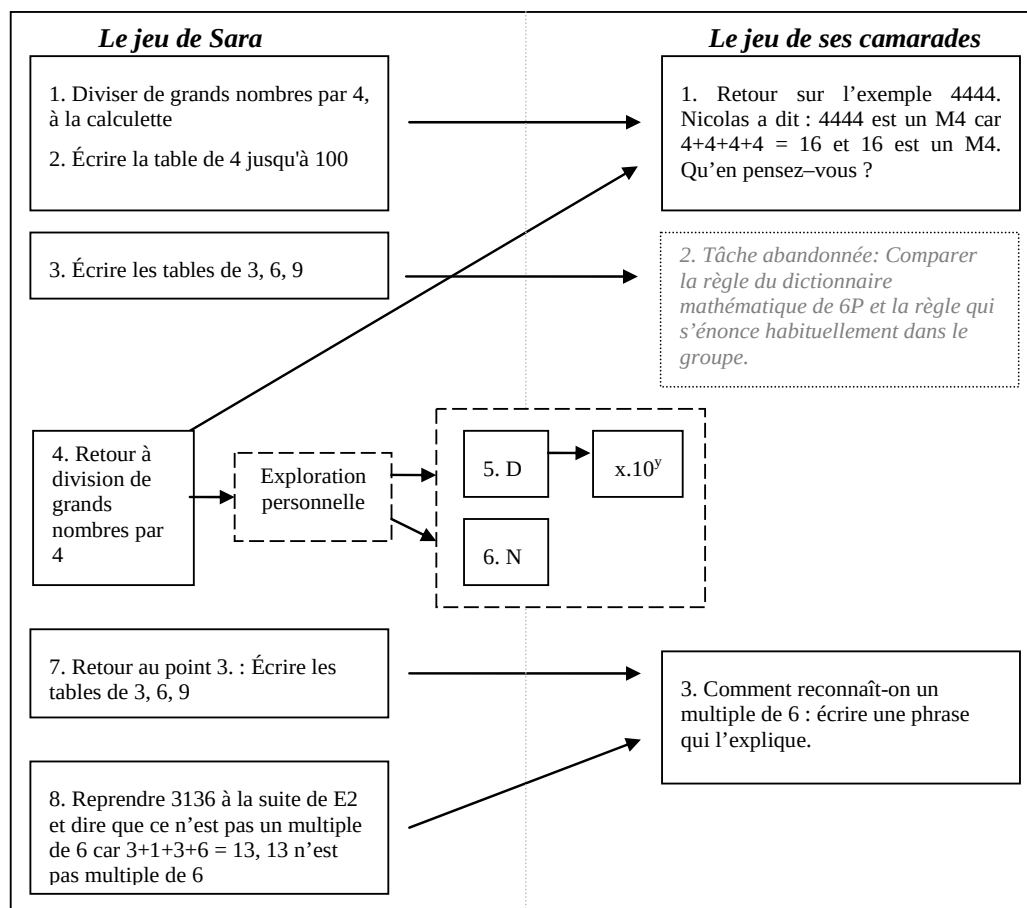
¹¹ Il convient ici de préciser que la dénomination *Jeu de tâches de Sara* définit la succession des tâches réellement effectuées par l'élève (« jeu effectif »), en interaction avec le jeu prévu par l'expérimentateur, défini par *Cartes du jeu de tâches*.

<i>Le jeu effectif de Sara</i>	<i>Le jeu effectif de ses camarades</i>	<i>Les cartes du jeu de tâches</i>
1. Diviser de grands nombres par 4 à la calculatrice 2. Écrire la table de 4 jusqu'à 100 3. Écrire les tables de 3, 6, 9 4. Reprendre les divisions par 4 sur la calculatrice (<i>ça donne des nombres à virgule parfois ou des nombres entiers</i>) 5. Multiplier un nombre décimal par une puissance de 10 : $1754,8 \times 10^2 = 175480$, $1754,8 \times 10^3 = 1754800$, $1754,8 \times 10^4 = 17548000$, etc. (<i>ce qui provoque une grande surprise</i>) 6. Refaire les opérations des autres avec sa calculatrice : $3+2+4+5+6=20$ 7. Reprendre 3136 à la suite de E2 et dire que ce n'est pas un multiple de 6 car $3+1+3+6 = 13$ et 13 n'est pas multiple de 6¹²	1. Retour sur l'exemple 4444. Nicolas a dit : 4444 est un M4 car $4+4+4+4 = 16$ et 16 est un M4. Qu'en pensez-vous ? 2. Comment reconnaît-on un multiple de 6 ? Écrire une phrase qui l'explique	1. Retour sur l'exemple 4444. Nicolas a dit : 4444 est un M4 car $4+4+4+4 = 16$ et 16 est un M4. Qu'en pensez-vous ? 2. Comparer dictionnaire 6P : « un nombre naturel est divisible par 6 ou est multiple de 6 s'il est un multiple de 2 et de 3, donc divisible par 2 et 3 » et ce que nous disons depuis quelques séances : « un M6 est un nombre pair, multiple de 3. Donc, un nombre pair, dont la somme des chiffres est un multiple de 3 ». 3. Comment on reconnaît-on un multiple de 6 ? Écrire une phrase qui l'explique (dans l'interaction)

1.1 Le jeu de Sara est lié à celui de ses camarades

La carte du jeu prévue (2.) n'a donc pas été retenue dans l'analyse car elle s'est avérée sans consistance pour les élèves, ainsi que nous l'avons déjà précisé. Nous constatons sans peine les liens entre les tâches auxquelles Sara s'est astreinte d'elle-même, en jouant avec sa calculatrice et celles menées par les autres élèves. Le jeu de Sara est complètement lié à celui de ses camarades. En mettant ainsi en regard le jeu de Sara et celui des autres élèves, sa logique nous devient accessible à travers les mathématiques qu'elle fait : on voit clairement comment Sara suit de loin ce qui se passe et comment elle répond aux sollicitations du milieu, bien qu'elle se soit apparemment extraite du processus.

¹² On aura toutefois remarqué que bien que la réponse soit exacte, la justification fait partie de ces éléments de saturation très souvent constatés : le critère de 6 est « pair et M3 », et non pas M6. Cette confusion est très courante.



Ainsi, lorsque de son côté, elle effectue les tâches 1 et 2, on peut remarquer que ces tâches sont en lien avec la première carte « jouée » de l'expérimentatrice ; les autres élèves entrent, quant à eux, dans ce jeu, contrairement à Sara qui se met à diviser des grands nombres par 4, à l'aide de sa calculette d'une part, puis à écrire la table de 4 sur sa feuille. Ensuite, bien que la deuxième carte ait été abandonnée par l'expérimentatrice et les autres élèves, nous observons que Sara se met à écrire les nombres des tables de 3, 6 et 9 de son propre chef. Il est peut être utile de préciser ici que cette élève se met en retrait à chaque fois que nous travaillons avec ce groupe d'élèves, demandant de *faire des maths avec la calculette*. Nous avons accédé à cette requête car cette élève ne parvenait pas à s'insérer dans le groupe de travail mais souhaitait néanmoins pouvoir s'y joindre. En ce qui concerne sa quatrième tâche, Sara revient à la première carte – ou alors, à sa première tâche – ainsi que l'indique la flèche, tout en poursuivant une exploration personnelle. Pour terminer, on observera que les tâches 7 et 8 sont également reliées au jeu des autres élèves.

L'exploration du milieu par le jeu de tâches a pour fonction de permettre aux élèves, de se constituer une expérience du nombre qui fait souvent défaut à l'école. Elle permet tout à la fois à l'expérimentatrice, et par extension, au professeur qui déciderait de procéder de la sorte, de se confronter à ses propres représentations du nombre (en l'occurrence, des relations de divisibilité), de les confronter à celles des élèves et de faire interagir ces différentes expériences, de les rendre publiques, en quelque sorte, et accessibles aux autres. Le jeu de tâches est donc tout autant alimenté par cette exploration, qui, elle-même, enrichit l'expérience.

Si l'on repense au cas de Sara, la dimension exploratoire de ses expérimentations à la calculette lui fournit des éléments d'expérience qu'elle va pouvoir ensuite réinjecter dans la séance, en tant qu'éléments de réponse à une sollicitation du milieu.

IV - LE JEU DE TÂCHES DANS LA FORMATION ?

Avant de se saisir de cette notion dans le cadre de la formation des enseignants, il faut en poursuivre la théorisation ; le défi réside notamment dans le fait de réussir à éviter l'écueil de considérer le jeu de tâches comme une nouvelle technique potentielle. Nous entrevoyons en effet les glissements possibles d'une sorte de naturalisation de cette façon d'interagir, vers une technique confirmée, ce qui ferait courir le risque de la réduire à une simple méthode : le jeu de tâches est avant tout une interaction de connaissances qui suppose l'investissement des deux parties.

1 Le jeu de tâches exploité dans un mémoire de maîtrise

Thévenaz (2010) montre dans son mémoire mention enseignement, comment elle a créé des jeux de tâches autour de la notion de puissances et ce que ces jeux lui ont apporté, ainsi qu'aux élèves interrogés. Elle s'est autorisée à improviser à partir de ce que l'élève a dit ou fait et s'est laissée emmener assez loin dans les relations qu'elle a pu établir entre ce savoir, les connaissances des élèves et les siennes.

Elle montre habilement deux choses : premièrement, bien que l'ossature soit construite au préalable par l'étudiante-chercheuse (liste de jeux de tâches, comme autant de cartes possibles à abattre dans le jeu entre ses élèves et elle), ce sont toutefois les interactions entre élève-s et chercheuse qui en constituent la chair. Distinction entre *cartes du jeu de tâches* et *jeu de tâches effectif*.

Du point de vue de la formation, ce qui nous semble intéressant pour la suite de nos travaux est de constater à la fois la manière dont un objet peut enthousiasmer une étudiante-chercheuse et comment, par le biais du jeu de tâches, cette dernière s'est laissée aller à sa propre exploration.

Nous proposons quelques tâches issues de son travail afin d'en illustrer l'enchaînement, miroir du fil de sa pensée, des connaissances invoquées dans l'interaction et des représentations exprimées à travers ses choix.

La tâche de départ, un exercice du manuel officiel : « *Cette semaine, j'écris à quatre copains. La semaine prochaine, chacun d'eux écrira une carte à quatre autres de ses amis, lesquels feront de même la semaine suivante, et ainsi de suite. Combien de personnes au maximum recevront une carte, la quatrième semaine ? Et à la fin de la dixième semaine ?* ».

Le jeu de tâches effectif qui s'en est suivi :

1. Lancement de la tâche de départ. Les élèves font des multiplications et non des puissances → Faire représenter la situation de départ à l'aide de dessins, de schémas ou d'arbres.
2. Les élèves dessinent le résultat et non la situation → Faire construire et explorer le triangle de Pascal.
3. Les élèves font diverses découvertes, dont celle des puissances de 2 → Se servir de cette découverte pour revenir à la tâche de départ.
4. Comparer la découverte-s dans le triangle avec les résultats de la tâche de départ → Cela ne suffit pas pour que les élèves fassent le lien entre les puissances et la tâche de départ → La construction d'un arbre peut les aider à faire ce lien.
5. Construire un arbre qui représente la tâche de départ → L'arbre nous permet de faire le lien entre les puissances et la tâche de départ → Continuer les recherches dans le triangle de Pascal.

Nous relevons que la liberté que cette étudiante s'est permise concernant une tâche du manuel lui est donnée par sa propre utilisation du jeu de tâches. Il y a une interaction de connaissances entre les siennes et celles des élèves que l'on l'observe, par exemple, dans le passage au triangle de Pascal : ce que font les élèves la renvoie à ses propres connaissances, qui se traduisent par la proposition de travailler avec le triangle de Pascal. Nous pouvons nous demander dans quelle mesure l'étudiante se serait autorisée ce détour, par ailleurs fort intéressant, si elle avait mené une leçon de façon plus habituelle.

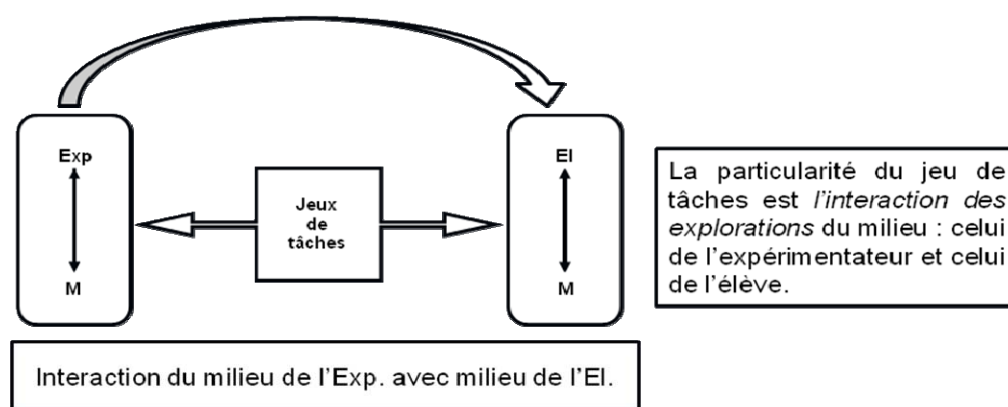
V - CONCLUSION

A la suite des travaux de DDMES (2003) et Favre (2008), nous souhaitons continuer à développer la notion de jeu tâches, que nous considérons comme une idée forte, sans qu'il soit dans notre intention d'en faire un outil ou une technique parmi d'autres. Pour nous, il s'agit bien de l'envisager comme un élément de l'interaction mathématique entre des élèves, un savoir et un chercheur et/ou professeur. Pour l'instant, il est un instrument de recherche qui nous permet d'investiguer le milieu.

Nos observations montrent que l'intérêt des élèves *s'auto-alimente* ; tant que la situation se présente à eux comme problématique, la dimension de recherche est maintenue, il n'en faut pas plus.

Il y a un jeu difficile pour le chercheur et/ou le professeur pour maintenir cet état. Avant tout, il s'agit de se mettre en position de suivre la pensée de l'élève, et de ne se permettre de la diriger qu'en la poussant, par l'arrière, et non en la tirant vers le but que l'on s'est préalablement fixé. Les apprentissages ne manqueront pas, et il sera toujours possible de référer l'expérience ainsi acquise à des savoirs que l'on enseignera ultérieurement, plus directement, voire même frontalement.

Pour terminer, nous insistons une dernière fois sur ce qui nous semble le plus important : le jeu de tâches comme une interaction de connaissances entre l'expérimentateur et l'élève et par conséquent, comme une interaction des explorations du milieu respectives.



VI - BIBLIOGRAPHIE

BLOCH I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherche en didactique des mathématiques* 19/2, 135-193, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieux dans la théorie des situations, in *Actes de la XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHARRIÈRE G. & al. (1991). Sur les pistes de la mathématique en division moyenne, *cahier n° 40 du Service de la Recherche Pédagogique*, Département de l'instruction publique, Genève.

CONNE F. (1992). *Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique*. *Didactique des mathématiques*, Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 1996.

DDMES (2003). L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence, in *Actes du Séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris, 28-29 mars.

DEL NOTARO C. (2010). Chiffres mode d'emploi. Exploration du milieu mathématique et expérience à l'école primaire autour de quelques critères de divisibilité. Thèse de doctorat, Genève. <http://archive-ouverte.unige.ch/unige:11825>

FAVRE J.-M. (2008). Jeux de tâches. Un mode d'interactions dynamique pour aménager des expériences mathématiques aux acteurs de la relation didactique dans l'enseignement spécialisé, *Grand N*, **82**, 9-30, IREM de Grenoble.

THÉVENAZ K. (2010). Un exemple de jeu de tâches pour explorer le milieu des puissances en 6P. Mémoire de licence en sciences de l'éducation, Université de Genève.

VII - ANNEXES

Annexe 1. Schéma de Bloch, 2002.

