

L'ENSEIGNANT ET SES MATHÉMATIQUES : REPENSER LES PRATIQUES DE FORMATION DES ENSEIGNANTS EN FONCTION DES MATHÉMATIQUES VÉCUES AU QUOTIDIEN DE LA CLASSE

Jérôme PROULX

Professeur, Université du Québec à Montréal

GREFEM – Groupe de recherche sur la formation à l'enseignement des mathématiques
proulx.jerome@uqam.ca

Résumé – tiré de la conférence de clôture

« Comment l'activité de l'élève peut-elle nous apporter des éléments pour la formation du maître ? » Voilà une question centrale que j'aborde dans ce texte (tiré de la conférence de clôture), en lien avec les travaux de recherche menés dans notre équipe qui sont axés sur la formation *mathématique* des enseignants (à la formation continue à l'élémentaire et au secondaire). L'angle d'entrée privilégié pour la formation *mathématique* des enseignants a été de favoriser une formation articulée aux expériences mathématiques de la classe vécues au quotidien, et pour lesquelles le travail mathématique de l'élève est central. Je développe, à travers divers exemples, les conceptualisations et réflexions théoriques tirées de cette recherche-formation, ainsi que les retombées de l'approche de formation chez les enseignants ; montrant ainsi la nature des compréhensions mathématiques développées, qui sont enracinées dans l'exercice de leur pratique. À travers cette présentation, j'aborde aussi les questions des liens entre recherche et formation, sous l'angle de l'omniprésence de la recherche dans nos travaux, au niveau de la conception de l'approche de formation, du réinvestissement des travaux de recherche dans les séances, de la diffusion de nos résultats, du fait que nous jouons le double rôle de formateurs-chercheurs, etc.

I - INTRODUCTION ET CONTEXTE

Une des questions du colloque, « Comment l'activité de l'élève peut-elle nous apporter des éléments pour la formation du maître ? », est centrale au propos que je tiens dans ce texte et se jumèle à une autre, toute aussi centrale concernant mes travaux de recherche, soit « Quelle formation mathématique pour l'enseignant de mathématiques ? ». J'aborde ces deux questions, en simultané, à travers un contexte particulier, soit par le jumelage de ma pratique quotidienne de formateur d'enseignants de mathématiques à celui de ma pratique de chercheur sur la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques. J'offre, du même coup, une réponse de chercheur et aussi une réponse de praticien-formateur ; ce double investissement offre une entrée particulière pour répondre à ces questions centrales. Ainsi, tout au long du texte, de façon explicite ou implicite, mes propos se situent à la jonction des deux voix/voies : j'adopte le rôle de formateur-chercheur ou chercheur-formateur, tel que ma collègue et moi-même avons commencé à développer dans Bednarz et Proulx (2010)¹.

Le texte comporte, en plus de l'introduction et de la conclusion, trois parties interreliées s'alimentant l'une de l'autre. En premier lieu, j'offre une certaine conceptualisation de la formation mathématique des enseignants de mathématiques, centrée sur une vision de l'enseignant comme professionnel qui utilise les mathématiques dans son travail de façon professionnelle. De cette conceptualisation, j'explique ensuite l'entrée de notre équipe de recherche pour la formation mathématique des enseignants, une entrée centrée sur les productions et solutions d'élèves pour y décortiquer le sens et le potentiel

¹ L'ordre dans l'expression « chercheur-formateur » ou « formateur-chercheur » importe peu pour moi et est utilisé de façon interchangeable tout au long du texte.

mathématique sous-jacent. En deuxième lieu, je présente deux extraits tirés de notre² projet actuel de formation continue, impliquant dans un cas un groupe d'enseignants du primaire et dans l'autre des enseignants du secondaire, afin de montrer le potentiel relié à l'emploi des productions d'élèves pour la formation mathématique des enseignants. En troisième lieu, j'offre une re-conceptualisation de la nature de la formation continue que nous avons développée durant le projet de recherche, permettant un certain re-cadrage des idées de départ et illustrant le caractère évolutif de cette re-conceptualisation de la formation mathématique des enseignants de mathématiques. Chaque partie est, de plus, bonifiée d'exemples multiples pour permettre de concrétiser le propos et d'une discussion constante (en avant ou en arrière plan) de l'interrelation entre recherche et formation.

II - CONCEPTUALISATIONS DE LA FORMATION MATHÉMATIQUE DES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES

Il existe un important corpus de recherches qui souligne les diverses, et parfois nombreuses, difficultés mathématiques chez les enseignants de l'élémentaire (voir la recension dans Mewborn, 2003 ; ainsi que des exemples du contexte québécois dans Héraud, 2000, et Marchand, 2010). Ce corpus de recherche a toutefois généré plusieurs critiques importantes : ces recherches servant de critique envers les enseignants quant à leurs compréhensions mathématiques ; servant en retour aux enseignants pour critiquer le travail de ces chercheurs envers eux ; ou encore servant à critiquer les chercheurs ayant conduit ces recherches sur la base qu'ils se positionnent dans un modèle déficitaire de la connaissance. Quoi faire de ces nombreuses critiques et appréciations négatives envers la communauté enseignante et envers celle de recherche ? Au-delà de ces critiques, il semble y avoir un phénomène « à mieux comprendre » et « à mieux saisir » pour investiguer les questions de formation mathématique des enseignants. En ce sens, bien que prononcée dans un tout autre contexte, la citation suivante de Brousseau (1988) apparaît inspirante :

Je ne suis jamais critique envers l'enseignement tel qu'il se pratique. Si vous voyez 200 000 profs faire la même chose et que ça vous paraisse idiot, ce n'est pas parce qu'il y a 200 000 idiots. C'est parce qu'il y a un phénomène qui commande la même réaction chez tous ces gens. Et c'est ce phénomène qu'il faut comprendre. [...] On ne l'optimisera pas avec de l'idéologie, ni avec des leçons de morale vers les maîtres.

C'est à ce « phénomène » qu'une majeure partie des travaux menés dans notre équipe s'attarde, c'est-à-dire à mieux comprendre ce qui commande, autant chez les enseignants que chez les chercheurs, cette réaction pour la formation mathématique des enseignants. Cette recherche de compréhension du « phénomène » a stimulé une envie de repenser la formation mathématique des enseignants, et ce, particulièrement autour de deux dimensions : la nature des contenus mathématiques travaillés et la nature de l'activité mathématique proposée dans les contextes de formation mathématique. C'est à travers le développement d'une compréhension plus précise de ces deux dimensions (contenus et pratiques à la formation des enseignants) que nos travaux de recherche à la formation continue nous ont permis de mieux comprendre ce « phénomène » en question (ce à quoi je reviens plus tard).

1 Nature des contenus mathématiques travaillés à la formation des enseignants

Comment enseigner les mathématiques à des adultes qui, même s'ils souffrent de lacunes en mathématiques, possèdent un niveau de raisonnement bien supérieur à celui des enfants ? La réponse à cette question est liée étroitement au fait que les étudiants dont il s'agit vont eux-mêmes devoir enseigner les mathématiques à des élèves. (Kuzniak, 2003, p. 7)

Depuis quelques années, avec ma collègue, nous avons tenté de définir ou plutôt de conceptualiser ce que sont les mathématiques de l'enseignant, celles qu'il mobilise en contexte de pratique (voir Bednarz et Proulx, 2009, 2010 ; Proulx et Bednarz, 2009, 2010). Dans Bednarz et Proulx (2011a, 2011b), nous avons défini l'enseignant comme un professionnel qui travaille avec des mathématiques dans son quotidien, dans sa pratique, tout comme d'autres professionnels utilisant les mathématiques dans leur quotidien

² Dans ce texte, le « nous » est utilisé pour faire référence à l'équipe de recherche qui a travaillé dans le projet, soit Nadine Bednarz, quelques étudiants gradués et moi-même.

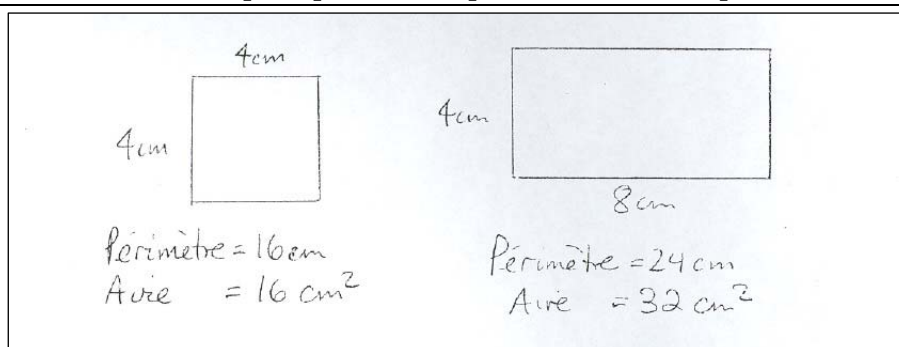
(voir les travaux sur les infirmières, les banquiers, les ingénieurs, etc., de l'équipe de Richard Noss : Hoyles, Noss et Pozzi, 2001 ; Noss, 2002 ; Noss, Bakker, Hoyles et Kent, 2007 ; Noss et Hoyles, 1996 ; Noss, Hoyles et Pozzi, 2002 ; Noss, Pozzi et Hoyles, 1999 ; Pozzi, Noss et Hoyles, 1998)³. Nous avons souligné une petite différence, puisque les enseignants travaillent avec « deux types » de mathématiques dans leur pratique : (1) ils doivent travailler avec les mathématiques du curriculum et (2) ils doivent travailler avec les événements mathématiques qui émergent et entourent l'enseignement-apprentissage des mathématiques en classe. Cette perspective rappelle l'idée des « connaissances [qui] ne font pas habituellement l'objet d'un enseignement » de Briand (2003, p. 35) ou les deux niveaux de savoirs de Kuzniak (2003) :

La réflexion sur la formation des maîtres doit prendre en compte deux niveaux de savoir et de compétences. Le premier concerne le savoir mathématique des élèves de l'école primaire et il fait classiquement l'objet d'études en didactique des mathématiques. Le second niveau concerne les maîtres qui doivent à la fois dominer le savoir mathématique propre à leurs élèves et un autre savoir qui concerne la transmission des connaissances à leurs élèves. La didactique des mathématiques ne prend généralement pas en compte l'acquisition des connaissances des maîtres et ignore de ce fait une partie de la genèse du processus de transposition opérée par ces derniers dans leur enseignement. (p. 7)

Cette entrée potentielle sur les mathématiques de l'enseignant, celles qui émergent et entourent l'enseignement-apprentissage des mathématiques en classe et que nous avons appelé dans Proulx et Bednarz (2010) les « mathématiques professionnelles de l'enseignant », positionne d'emblée sur le terrain de la pratique de l'enseignant. Mais comment penser/développer des tâches, à donner en contexte de formation, pour travailler ces mathématiques « de la pratique » ? Plusieurs entrées ont été développées à l'intérieur de notre projet de recherche avec quatre groupes d'enseignants (un du primaire et trois du secondaire) : par exemple, l'analyse et l'exploration de productions d'élèves ; de questions d'élèves posées en classe ; de contenus mathématiques par l'intermédiaire de problèmes usuels donnés en classe ; de matériel didactique utilisé dans les classes ; de vignettes d'enseignement ; de situation tirées de manuels scolaires anciens et nouveaux ; de situations d'évaluations et d'examens ; de progressions proposées dans les documents curriculaires pour un contenu mathématique ; et de tâches construites par les enseignants eux-mêmes. Dans le cadre de ce texte, j'explore ensemble les deux premières entrées, soit les productions d'élèves et les questions posées par les élèves en contexte de classe. Voici quelques exemples de tâches tirées de notre recherche, que nous avons donné à explorer aux enseignants.

Exemple 1 (tiré de L. Ma, 1999)

Un élève arrive en classe tout excité, il te dit qu'il a trouvé une théorie qui n'a pas été mentionnée en classe. Il t'explique qu'il a découvert que lorsque le périmètre d'une figure augmente, son aire augmente aussi. Il te montre le dessin suivant pour prouver ce qu'il avance. Que répondrais-tu à cet élève ?



³ Nous avons dans Bednarz et Proulx (2011a ; 2011b) établi des parallèles importants et frappants entre les travaux réalisés chez les professionnels et les nôtres chez les enseignants.

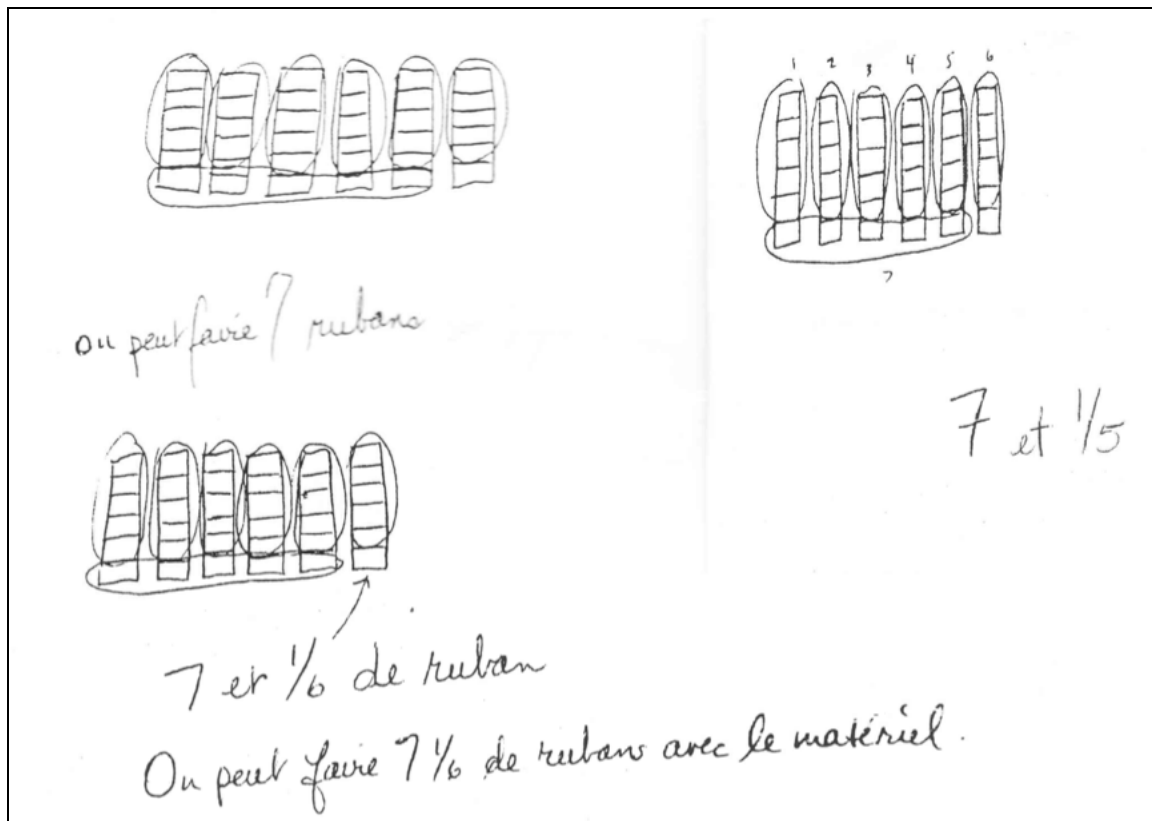
Exemple 2

Quel sens donner à cette réponse : $423 \div 40 = 9$ reste 63 ?

Exemple 3 (adapté de Schifter, 1988)

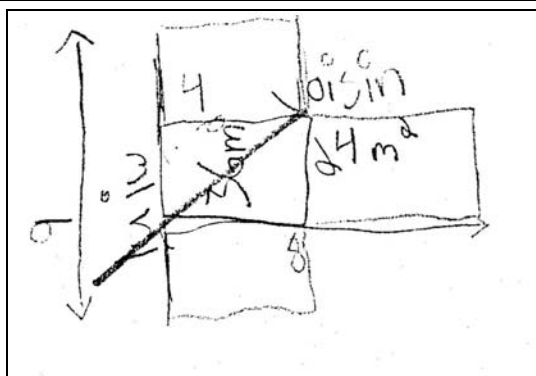
Quel sens donner aux réponses d'élèves pour le problème suivant ?

Mireille a six mètres de tissu. Elle veut faire des rubans de $\frac{5}{6}$ de mètre pour un anniversaire. Combien de rubans pourra t-elle faire au total et combien de tissu restera t-il ?

**Exemple 4**

Quel sens donner à la réponse d'élève pour le problème suivant ?

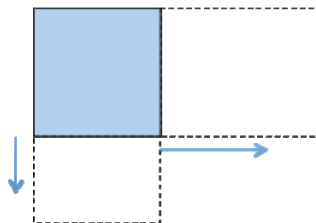
J'ai un terrain rectangulaire. Mon voisin a aussi un terrain, dont la longueur est 3 fois la longueur de mon terrain. Je sais que sa largeur est 2 fois la largeur de mon terrain. L'aire du terrain de mon voisin est combien de fois plus grande que celle de mon terrain ?



L'exploration qui est menée sur ces tâches est particulière, car elle est ancrée dans une intention bien précise de notre part comme formateurs-chercheurs. Nous entrons par le potentiel mathématique

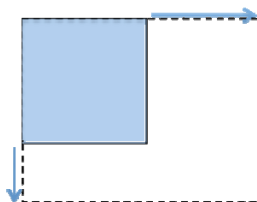
sous-jacent aux productions et aux tâches proposées, dans le but d'explorer, d'exploiter et de pousser ces solutions mathématiques afin d'aller voir où tout cela peut mener mathématiquement. J'illustre dans ce qui suit une certaine exploration du potentiel mathématique sous-jacent à ces tâches.

Dans le cas de l'exemple 1 sur l'aire et le périmètre, il est bien connu qu'il n'existe pas de relation à proprement parler entre la variation du périmètre d'une figure et la variation de son aire. Toutefois, l'exploration des divers cas possibles pour, par exemple, expliquer à l'élève que sa conjecture est fausse ouvre vers un monde mathématique intéressant. En effet, lorsqu'un seul des côtés augmente, comme le fait l'élève dans son exemple, on confirme que l'aire augmente lorsque le périmètre augmente.



Cas 1: un seul côté augmente

En regardant le cas 2, celui où deux des côtés de la figure augmentent simultanément, on confirme encore que l'aire augmente lorsque le périmètre augmente.



Cas 2: les deux côtés augmentent

Finalement, le troisième cas où les deux dimensions de la figure varient de façon différente, par exemple avec un qui augmente et l'autre qui diminue, on obtient une ambivalence, soit certaines situations pour lesquelles la relation périmètre-aire est conservée, alors que d'autres non.

CAS 3: 1 dimension augmente ET 1 dimension diminue

A) $4 \times 8 \Rightarrow 6 \times 7$
 $A=32$
 $P=24$
 $A=42$
 $P=26$
 Périmètre et aire augmentent

B) $4 \times 8 \Rightarrow 10 \times 3$
 $A=32$
 $P=24$
 $A=30$
 $P=26$
 Aire ~~augmente~~ diminue
 périmètre augmente

C) $4 \times 8 \Rightarrow 2 \times 16$
 $A=32$
 $P=24$
 $A=32$
 $P=36$
 Aire demeure la même,
 périmètre augmente

CAS 1 et 2 - élève a raison
 CAS 3 → ça dépend.

Cette exploration mathématique apparaît intéressante, car elle permet de problématiser la présence d'une relation entre l'augmentation du périmètre et celle de l'aire, pour ensuite montrer la présence d'une certaine relation entre les deux, et finalement nuancer la possibilité d'une relation entre l'augmentation du périmètre et de l'aire.

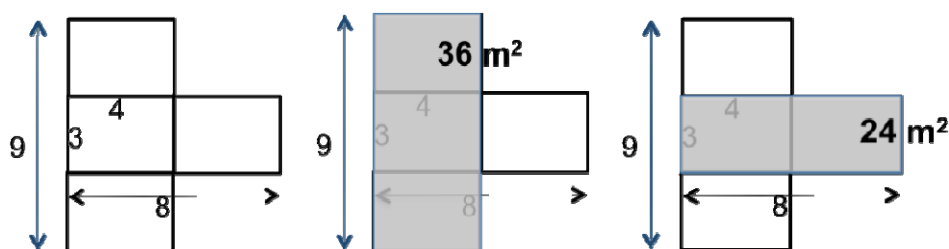
Dans le cas de l'exemple 2, soit la division $423 \div 40 = 9$ reste 63, celui-ci ouvre vers un questionnement de la convention mathématique qui veut que le reste soit toujours plus petit que le diviseur (et plus grand

que 0). On peut alors s'intéresser à explorer d'autres types de réponses, non-conformes conventionnellement, mais fort riches conceptuellement : 10 *reste* 23 ; 11 *reste* -17 ; 10 $\frac{1}{2}$ *reste* 3 ; etc. Ceci ouvre vers la considération de problèmes simples, qui peuvent être rencontrés en contexte scolaire :

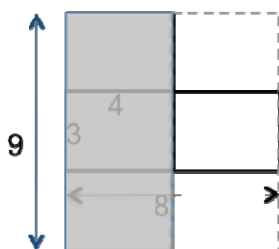
Jean a 17 biscuits à partager en 4 amis et veut leur en donner 3 chacun : $17 \div 4 = 3 \text{ reste } 5$

L'exemple 3 sur les fractions et les différentes valeurs du reste fait ressortir le questionnement relatif au tout de référence de la fraction, c'est-à-dire à quel tout réfère le $\frac{1}{5}$, le $\frac{1}{6}$, etc. Cette exploration du $\frac{1}{6}$, qui est ici relatif à un reste de $\frac{1}{6}$ *de mètre*, permet de contraster avec le $\frac{1}{5}$, qui est ici relatif à un reste de $\frac{1}{5}$ *de ruban* ; elle a même amené (c'est une enseignante du primaire qui a souligné cette possibilité) à penser à $\frac{1}{36}$, qui est ici relatif à $\frac{1}{36}$ de tous les morceaux coupés. Dans cette considération des diverses options relatives à leur tout respectif, une confrontation avec la réponse usuelle obtenue par l'algorithme de division de fractions, soit 7 et $\frac{1}{5}$, fait réfléchir : pourquoi cette réponse plus qu'une autre ? Comment avoir un algorithme qui amène à 7 et $\frac{1}{6}$ ou encore 7 et $\frac{1}{36}$? Peut-on exprimer une réponse avec deux référents, c'est-à-dire 7 qui est un nombre de rubans et $\frac{1}{6}$ qui est relatif aux mètres ? Ces questions sont mathématiquement riches, particulièrement parce qu'elles abordent des considérations au cœur des apprentissages du concept de fraction chez les élèves.

Finalement, l'exemple 4 propose autant une reconsidération de « l'erreur » de l'élève que du sens de la propriété multiplicative sur l'aire d'une figure. En effet, on peut voir cette réponse d'élève comme étant acceptable, alors que l'élève a produit un terrain qui est, véritablement, trois fois plus long et deux fois plus large que son terrain de départ (de largeur 4 et de longueur 3).



Le terrain de l'élève a en effet une largeur de 8 (deux fois plus large qu'une largeur de 4) et 9 en longueur (trois fois plus qu'une longueur de 3). Cette analyse fait émerger une réflexion importante sur la propriété multiplicative, alors qu'il devient évident que pour satisfaire aux intentions (implicites) du problème il faut considérer ce problème par étapes. Il faut dans un premier temps établir une longueur trois fois plus grande, mais, par la suite, « affecter » cette longueur du nombre de fois voulu en largeur, amenant à une conservation de la figure en rectangle qui a pour dimensions une longueur de 9 et une largeur de 8 (et non un « T » avec 9 et 8 comme dimensions).



La propriété multiplicative affecte en effet les deux dimensions de la figure, mais cela ne se fait pas de façon indépendante. En fait, on joue davantage sur la figure elle-même comme rectangle, que sur chacune des dimensions : ce n'est pas uniquement l'idée que la largeur double, mais aussi que toute la figure double. De plus, le passage par étape (un premier terrain, qui devient trois fois plus long, et qui devient par la suite deux fois plus large) permet de considérer le ratio des terrains « en cours de résolution ». Par exemple, le terrain qui est trois fois plus long que le premier a une aire trois fois plus grande. Ce nouveau terrain, qui a une aire trois fois plus grande, est alors doublé sur la largeur, rendant

le nouveau-nouveau terrain six fois plus grand que le premier au niveau de l'aire et deux fois plus grand que le deuxième au niveau de l'aire. Par contre, ces formulations n'éliminent pas la possibilité d'obtenir un terrain qui a une largeur deux fois plus grande, mais une forme qui n'est plus rectangulaire (le T couché du premier terrain), ce qui permet de procéder vers une étude fort intéressante de la signification de la notion de « largeur » et de « longueur » de terrain ; allant même jusqu'à la considération et l'exploration du volume du fameux « L » et son agrandissement de Vergnaud (voir Ricco, Vergnaud et Rouchier, 1983, p. 54), faisant intervenir un solide non standard et la considération de son/ses hauteurs, sa/ses largeurs et sa/ses profondeurs et leurs agrandissements.

Tous ces exemples de tâches centrées sur les productions d'élèves sont présentés dans le but de susciter un questionnement et faire ressortir le sens mathématique sous-jacent aux concepts évoqués et explorés. Cette exploration amène à regarder « pourquoi » et « comment » le tout fonctionne mathématiquement et permet d'interroger (1) l'acceptation ou le refus de façons de faire en mathématiques et (2) ce qui concerne l'utilisation de conventions : des aspects souvent tenus pour acquis pour différents concepts et qui peuvent jouer un rôle fondamental dans l'enseignement-apprentissage avec les élèves. D'une certaine façon, ce type d'exploration permet de toucher aux deux niveaux relatifs aux travaux de Kuzniak : les concepts mathématiques à enseigner (des programmes d'études) et les concepts mathématiques dans l'enseignement.

Les exemples et explications ci-haut traduisent une certaine façon de travailler à la formation mathématique des enseignants, centrée sur des contenus relatifs à la pratique de classe et le contexte d'enseignement-apprentissage des mathématiques. Par contre, une autre dimension est à prendre en considération, soit celle de la nature de l'activité mathématique.

2 Nature de l'activité mathématiques proposée à la formation des enseignants

L'activité mathématique proposée joue un rôle important dans la conceptualisation de la nature de la formation mathématique des enseignants (voir le livre collectif de Proulx, Corriveau et Squalli, 2012). Notre conceptualisation de l'activité mathématique à l'intérieur de laquelle sont plongés les enseignants s'éloigne d'une idée d'exposition magistrale des concepts mathématiques, au profit de l'engagement actif des enseignants dans l'exploration de tâches (comme celles décrites plus haut). Cette idée d'exploration est, de plus, fortement appuyée par divers travaux de recherche et pratiques de formation (Davis, 2010 ; Davis et Simmt, 2006 ; voir ici aussi le collectif de Proulx, Corriveau et Squalli, 2012).

Ce type d'orientation sur l'activité mathématique permet d'installer une pratique de fouille, d'exploration et de questionnement chez les enseignants, c'est-à-dire une certaine culture de mathématisation (Bauersfeld, 1994 ; Proulx et Bednarz, 2010b). Il a une incidence profonde sur l'objectif attribué aux tâches données, ces dernières n'ayant pas de but final préalablement fixé, mais servant plutôt de déclencheur ou de point de départ aux explorations et approfondissements mathématiques des enseignants. Malgré qu'elles soient développées (par les formateurs-chercheurs) avec des intentions précises sur des contenus mathématiques précis, tel que montré dans la section précédente par l'analyse des tâches de productions d'élèves, ces tâches sont en constante redéfinition à travers leur exploration, donnant lieu à des interprétations multiples et des explorations mathématiques imprévues. Cette émergence des explorations mathématiques des concepts s'illustre bien par la figure suivante, où une tâche désignée comme point de départ (à gauche) déclenche divers chemins et embranchements possibles d'exploration par les enseignants.

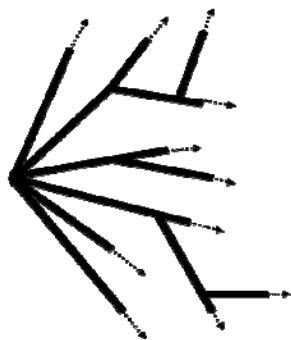


Figure 1 : Embranchements pour illustrer l'idée de tâches comme point de départ (tiré de Proulx, 2010).

L'emploi des tâches comme point de départ nécessite une préparation importante de la part des formateurs-chercheurs, autant au niveau de la conception de ces tâches (analyses préalables, préparation de tâches supplémentaires/*ad hoc* en fonction des entrées possibles prévues) que de la mise en route des tâches durant les séances et l'intervention « dans l'action », en fonction des entrées et explorations empruntées par les enseignants (ainsi que du retour *a posteriori* sur les séances pour développer de nouvelles tâches). Ainsi, le travail requis de la part des chercheurs-formateurs ne peut se limiter à une idée de séquence planifiée d'avance, comprenant des objectifs précis et immuables, organisée autour de tâches spécifiques pour répondre à ces objectifs. Le gage sur l'exploration amène à accepter de front l'idée d'émergence et à négocier les événements dans l'action comme formateurs-chercheurs. Les formateurs-chercheurs sont alors placés/immergés en situation d'enseignement, comme praticiens de la formation, s'approchant des contextes d'enseignements dans les écoles, mais avec toutefois des enseignants comme « élèves »⁴.

Tel que mentionné, cette entrée sur l'activité mathématique à la formation des enseignants est fortement appuyée par la recherche. Ceci dit, pour nous formateurs-chercheurs de l'équipe de recherche, cette entrée ne nous est pas étrangère et ne provient pas de nulle part : notre contexte de formation dans notre institution (l'UQAM) nous mène assez naturellement vers ces façons de faire et penser la formation des enseignants. Les travaux de recherche et les analyses de pratiques soulevées dans la littérature nous aident à supporter ces idées, et même à les faire avancer. Comme formateurs, nous sommes déjà orientés envers elles par nos expériences de formation des enseignants de mathématiques du primaire et du secondaire. On perçoit alors, de façon assez claire, le maillage important qui existe pour nous entre la recherche et l'expertise de formation, les deux pôles jouant un rôle central et mutuellement influent.

3 Rôle des formateurs-chercheurs et processus de recherche-formation

Notre rôle dans les séances de formation continue avec les enseignants est divers. Comme formateurs, et nous sommes deux, nous travaillons à la construction des séances de formation et des tâches à explorer, en ancrant ces tâches et les séances (et même l'organisation de blocs de plusieurs séances sur un même thème) dans une rationalité et suivant une ligne directrice (qui évolue au fil des séances, en fonction des explorations des enseignants), orientées par une certaine analyse didactique, conceptuelle et épistémologique au niveau des contenus (Brousseau, 1998). De plus, nous jouons le rôle de participants actifs durant ces séances de formation en discutant, explorant et interagissant avec les enseignants sur les tâches proposées et le sens qu'ils leur donnent. Nous interagissons avec eux et fouillons, explorons, proposons, ainsi qu'échangeons sur les concepts mathématiques, servant nous aussi de déclencheurs pour l'apprentissage des enseignants. Suite aux séances, et notre rôle est autant celui du chercheur que du formateur, nous les analysons par la tenue d'un journal de bord offrant une analyse initiale des séances et de ses événements ; analyses centrées autant sur des aspects importants à reprendre lors de

⁴ Cette entrée apparaît différente, toutefois, des stratégies d'homologie (voir COPIRELEM, 2003 ; Braconne-Michoux et Zucchetta, ce recueil). L'activité mathématique n'est pas ici vécue afin que les enseignants la reproduisent en salle de classe avec leurs élèves, mais uniquement pour qu'ils vivent une activité mathématique en soi, pour eux, axée sur le développement de concepts mathématiques.

séances futures que sur des aspects qui informent les perspectives de recherche. Cette démarche nous amène à réinvestir ces analyses initiales comme outil de formation pour planifier les séances qui suivent, mais elle sert aussi d'outil de recherche pour l'écriture d'articles pour les revues et conférences scientifiques.

Nous portons donc le double chapeau de chercheurs et de formateurs dans ce projet de formation continue (Bednarz et Proulx, 2010). En jumelant la formation et la recherche, nous sommes des formateurs dans la formation et des chercheurs sur la formation ; mais nous sommes aussi chercheurs *dans* la formation et formateurs *sur* la formation, analysant les séances et formant/enseignant durant les séances en portant *constamment* le double chapeau de formateur et de chercheur. Cette orientation n'est pas sans complexité, mais également source de richesse, comme l'explique Charlier (2005) :

À une conception standardisée des formations continuées d'enseignants, conçues en fonction d'objectifs et de stratégies prédéfinies, cette démarche oppose la conception de formations « sur mesure » conçues et ajustées avec les enseignants eux-mêmes. Formuler cette piste d'action pour les formateurs d'enseignants contribue sans doute à augmenter (encore) la complexité de leur travail, mais, peut-être aussi la richesse et l'intérêt de celui-ci, lorsqu'il s'accompagne d'une activité de recherche sur sa pratique, puisqu'elle permet également aux formateurs d'apprendre et de changer leur pratique de formation. (p. 263)

Cette conception du jeu entre recherche et formation, pour les travaux de formation à l'enseignement, insiste sur le mouvement de va-et-vient continu entre recherche et pratique de formation, chacun se complétant dans leurs projets respectif. De la même façon que Desmarais, Boyer et Dupont (2005) font à propos de la « recherche-action »,

Le trait d'union entre les mots recherche et action ne fait pas que relier deux concepts distincts. Un nouveau concept, en référence à chacun des concepts originaux, induit l'idée d'une nouvelle approche résultant de l'interaction continue entre eux [...] La recherche-action se développe dans une trajectoire oscillatoire entre ces deux pôles. Le pôle recherche est caractérisé par un effort de construction de l'objet dans une dynamique d'identification/distanciation de la part des sujets-acteurs. Il est conçu dans une compréhension donnée. Dans cette oscillation, les apports respectifs de la recherche et de l'action se croisent et se complètent : les connaissances produites, en s'insérant dans l'action, sont questionnées et l'action, en se référant à ces connaissances précise son tir. (pp. 277-278)

il est possible de penser à un nouveau concept, celui de « recherche-formation » (en remplaçant ce dernier dans la citation précédente) :

Le trait d'union entre les mots recherche et **formation** ne fait pas que relier deux concepts distincts. Un *nouveau concept*, en référence à chacun des concepts originaux, induit l'idée d'une *nouvelle approche résultant de l'interaction continue entre eux* [...] Le **recherche-formation** se développe dans une trajectoire oscillatoire entre ces deux pôles. Le pôle recherche est caractérisé par un effort de construction de l'objet dans une dynamique d'identification/distanciation de la part des sujets-**formateurs**. Il est conçu dans une compréhension donnée. Dans cette oscillation, les apports respectifs de la recherche et de la **formation** se croisent et se complètent : *les connaissances produites, en s'insérant dans la **formation**, sont questionnées et la **formation**, en se référant à ces connaissances, précise son tir.* (c'est moi qui souligne)

Avec la recherche-formation, un processus dialectique continu, un dialogue, s'installe entre la recherche et la formation, chacun s'adaptant à l'autre en l'influençant constamment : la formation s'informe de la recherche et la recherche est informée par un regard de l'intérieur, un regard privilégié (Wong, 1995) de formateur. C'est aussi avec ces regards, ou ce regard double, qu'en tant que formateurs-chercheurs nous avons réalisé des activités diverses de diffusion de nos travaux (de recherche et de formation) : des articles théoriques et empiriques dans des revues et conférences scientifiques, des articles dans des revues professionnelles, des ateliers à la communauté enseignante lors de colloques professionnels, ainsi que des participations diverses dans la communauté scientifique (consultation sur des projets de recherche, réactants lors de conférences, etc.) et dans le milieu enseignant (projets ministériels, consultations dans le milieu, offre d'ateliers professionnels spécifiques, etc.). C'est donc cet ancrage particulier, autant dans la recherche que dans la formation, qui définit notre rôle de formateurs-chercheurs.

Maintenant que j'ai offert une illustration du contexte de recherche et de formation du projet, je présente dans ce qui suit des exemples de la formation *en action*, c'est-à-dire des extraits de formation sur des thèmes mathématiques particuliers travaillés avec les enseignants.

III - LA FORMATION EN ACTION – ET SON ANALYSE

Dans cette section, deux extraits de séances de formation touchant aux fractions sont présentés. Nos analyses sont toujours en cours, mais ce qui suit offre un aperçu de ce qui se produit durant les séances, autant au niveau de la nature des explorations réalisées que des compréhensions mathématiques qui se déploient.

1 Premier exemple : émergence et diversité des explorations des concepts mathématiques

Ce premier extrait provient d'une tâche que nous avons proposée aux enseignants de nos trois sites de formation continue au secondaire. Il permet d'illustrer la diversité des compréhensions mathématiques déployées et développées face à la tâche proposée. La tâche est la suivante :

Un enseignant du secondaire m'a fait part d'une procédure particulière de calcul utilisée par un élève dans sa classe pour effectuer la division des fractions suivantes :

$$\frac{26}{20} \div \frac{2}{5} = \frac{26 \div 2}{20 \div 5} = \frac{13}{4}$$

Que pensez-vous d'une telle procédure ? Selon vous, est-ce que cette procédure de calcul est adéquate ? Fonctionne-t-elle toujours ?

1.1 Une entrée par des « preuves »

Une première exploration de la tâche par les enseignants est relative à l'établissement de preuves que cet algorithme fonctionne, c'est-à-dire qu'il est mathématiquement adéquat. Une de ces preuves développée par les enseignants consiste à réinvestir l'algorithme traditionnel de division de fractions (multiplier par l'inverse de la fraction) ; cette entrée implique un passage de la fraction à la division et en retour de la division à la fraction :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \\ \text{et} \\ \frac{a \div c}{b \div d} &= \frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{ad}{bc} \end{aligned}$$

Une autre entrée « par la preuve » tentée par les enseignants fait appel à une analogie pour la multiplication des nombres négatifs, c'est-à-dire qu'un nombre négatif multiplié par un nombre négatif donne un nombre positif.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= (a \div b) + (c \div d) \\ &= a \div b + c \times d \\ &= a + c \div b \times d \\ &= (a + c) \div (b + d) \\ &= \frac{a + c}{b + d} \end{aligned}$$

Dans cet exemple, la preuve développée fait appel à une certaine « distribution » de la division à l'intérieur de la parenthèse, affectant alors les opérations à l'intérieur de cette parenthèse : la division d'une division devenant ainsi une...multiplication. Malgré que cette affirmation ou utilisation des propriétés de la division apparaisse douteuse aux premiers abords, l'initiative mathématique sous-jacente est intéressante et permet d'explorer le sens de cette preuve et le travail des propriétés (qui permet en retour de discuter des propriétés relatives aux nombres négatifs).

1.2 Une entrée par les élèves en arrière plan

Une autre exploration de cet algorithme par les enseignants consiste à l'analyser en se demandant comment *les élèves* arriveraient à donner un sens ou à comprendre cet algorithme et son fonctionnement. Ainsi, les explications mathématiques suivantes ont les élèves « en arrière plan », en fonction de la connaissance que les enseignants ont de leurs élèves. Voici un éventail des façons de faire développées par les enseignants :

- Le recours à l'algorithme usuel de division de fractions, soit la multiplication par l'inverse de la fraction : $\frac{26}{20} \times \frac{5}{2} = \frac{13}{4}$;
- La considération de la division comme opération inverse de la multiplication : si $\frac{26}{20} \div \frac{2}{5} = \frac{13}{4}$ alors $\frac{13}{4} \times \frac{2}{5}$ donne $\frac{26}{20}$;
- Le sens donné à la fraction : $\frac{26}{20} \div 2 = \frac{13}{20}$ donc comme $\frac{2}{5}$ est 5 fois plus petit que 2, on a divisé par un nombre 5 fois trop gros. Donc $\frac{13}{20}$ doit être multiplié par 5, ce qui donne $\frac{13}{4}$;
- Le recours un peu différent à l'algorithme usuel de division de fractions par la multiplication par l'inverse de la fraction : $\frac{26}{20} \div \frac{2}{5} = \frac{26}{20} \times \frac{5}{2} = \frac{26}{2} \times \frac{5}{20} = 13 \times \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$;
- Le travail du dénominateur commun : $\frac{26}{20} \div \frac{2}{5} = \frac{26}{20} \div \frac{8}{20} = 26 \div 8 = \frac{13}{4}$;
- Le sens donné à la division : $26 \div \frac{1}{2}$ s'exprime par combien de $\frac{1}{2}$ entre dans 26 ? Donc, combien de $\frac{2}{5}$ (au lieu de $\frac{1}{2}$) entre dans 26 ?;
- Un autre sens donné à la division : $26 = \frac{130}{5}$ donc $\frac{130}{5} \div \frac{2}{5}$, alors combien de $\frac{1}{5}$ dans $\frac{130}{5}$? 130. Comme $\frac{2}{5}$ est deux fois plus gros que $\frac{1}{5}$, alors j'ai deux fois moins de $\frac{2}{5}$ que de $\frac{1}{5}$ dans $\frac{130}{5}$, soit 65.

Les explorations des enseignants vont souvent au-delà de ce que leurs élèves font, offrant de nouvelles entrées de compréhension sur l'algorithme pour les enseignants eux-mêmes. Toutefois, ces explorations ont, à l'origine, la perspective de leurs élèves. De plus, les explorations des enseignants n'ont pas été produites de façon linéaire, comme le présente cette liste. En séance, les idées fusent de toutes part et s'entrecroisent, offrant un panorama riche, bien que touffu d'idées mathématiques à travailler en groupe. Certaines de ces idées sont davantage explorées que d'autres, alors que certaines le sont dans les séances suivantes, lorsqu'elles reviennent à la surface. C'est cette « gestion » sur-le-champ qui est faite par les formateurs-chercheurs au cours des séances, une gestion qui oblige à naviguer à travers les explorations et les divers chemins pris par les enseignants.

1.3 Un questionnement sur la pertinence et le potentiel de cet algorithme

Une autre exploration des enseignants a été de questionner la pertinence mathématique de cet algorithme, ainsi que l'intérêt ou l'aide que ce dernier peut offrir en classe (pour l'enseignant comme pour l'élève). Voici, en vrac, quelques unes de ces pistes explorées.

Un premier exemple est par le recours à un contre-exemple pour montrer que cet algorithme ne fonctionne pas. Par exemple, si les fractions à diviser sont $\frac{14}{5}$ et $\frac{3}{4}$, on obtient $\frac{14}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{14}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{56}{15}$. Alors que

pour un des enseignants ceci représentait un contre-exemple que l'algorithme ne fonctionnait pas mathématiquement, cet exemple a ouvert une discussion importante sur la notion de validité mathématique et d'efficacité mathématique. En effet, sans être un réel contre-exemple, l'exemple donné montre que l'utilisation de l'algorithme, dans le cas de ces deux fractions, conduit à une boucle qui apparaît peu aidante pour obtenir une réponse fractionnaire simplifiée de la forme $\frac{a}{b}$. Par contre,

ce travail ne montre pas que l'algorithme est faux mathématiquement, puisque la réponse obtenue $\frac{56}{15}$ est toujours valide.

Un contexte d'efficacité est donc mis en cause, parce que l'algorithme en question apporte peu d'aide à l'obtention d'une solution simplifiée pour ces fractions. D'autres exemples ont par la suite été donnés par les enseignants pour montrer une certaine non-efficacité de cet algorithme (par exemple, avec $\frac{26}{20} \div \frac{3}{7} = \frac{26 \div 3}{20 \div 7} = \frac{26\frac{2}{3}}{20\frac{2}{7}}$) : le solutionneur « tourne en rond » en revenant constamment à d'autres divisions de fractions.

Certains enseignants, au contraire, ont tenté de tracer des parallèles entre cet algorithme et les autres algorithmes usuels pour les opérations sur les fractions (+, -, ×), relativement au fait que pour les autres opérations les fractions sont mises sur le même dénominateur avant d'opérer (cette approche est vue comme inutile pour la multiplication, mais est toutefois possible). Ainsi, si cette idée de « mettre les fractions sur le même dénominateur » est reprise dans cet algorithme de division, on obtient une procédure qui devient généralisable et, pour plusieurs, assez efficace : $\frac{14}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{56}{20} \div \frac{15}{20} = \frac{56}{20} \times \frac{20}{15} = \frac{56}{15}$.

Cette entrée est apparue séductrice pour certains enseignants, car elle permet de standardiser l'entrée sur les opérations de toutes les fractions, plutôt que d'opter pour des approches diverses pour chacune des opérations. Ainsi, cette exploration a fait naître pour certains enseignants une possibilité didactique pour leur pratique⁵.

Cette entrée a incité certains enseignants à trouver des jeux de nombres qui fonctionnent en ce sens ; soit par une compatibilité des numérateurs ou des dénominateurs, ou par le jeu des mêmes numérateurs ou des mêmes dénominateurs. Par exemple : $\frac{39}{21} \div \frac{3}{4} = \frac{39 \div 3}{21 \div 4} = \frac{13}{21}$; $\frac{13}{7} \div \frac{3}{4} = \frac{52}{28} \div \frac{21}{28} = 52 \div 21$; $\frac{26}{20} \div \frac{3}{5} = \frac{26 \div 3}{20 \div 5} = \frac{26\frac{2}{3}}{4}$;

$\frac{13}{4} \div \frac{3}{7} = \frac{39}{12} \div \frac{39}{91} = \frac{39 \div 39}{12 \div 91}$. Finalement, toute cette réflexion sur la compatibilité et les numérateurs/dénominateurs communs a introduit l'idée de se questionner sur la présence de fractions réduites. En effet, dans plusieurs des cas mentionnés plus haut, et particulièrement dans l'exemple du départ, certaines fractions ne sont pas réduites et permettent la division des numérateurs ou dénominateurs l'un par l'autre. Des exemples comme « $\frac{27}{20} \div \frac{3}{7} = \dots ?$ » rendent différente l'utilisation de cet algorithme et impliquent un recours à des numérateurs ou dénominateurs communs, comme précédemment discuté.

⁵ Il est à noter que les enseignants n'ont pas utilisé l'exemple de départ, mais le « contre-exemple » proposé auparavant.

1.4 Retour sur ces exemples

Ces exemples d'exploration, ayant une seule tâche comme point de départ aux explorations, montrent bien la richesse et la diversité des compréhensions mathématiques déployées et développées par les enseignants. On retrouve une fouille constante des idées est en cours et incite les enseignants à se questionner mathématiquement sur des notions courantes de leur pratique, soit la division de fractions (et les fractions elles-mêmes). Ces explorations se construisent à partir d'aspects évidemment mathématiques et connectés à leur programme d'étude, mais aussi par des mathématiques « de la pratique », connectées en premier lieu avec une solution d'élève (la tâche elle-même) mais aussi par des réflexions qui sont tenues par les enseignants alors que les élèves sont au cœur de leurs discussions et considérations, autant mathématiques que didactiques (contre-exemples, façons d'expliquer, efficacité mathématique, standardisation d'une approche pour toutes les opérations, etc.).

Alors que dans ce premier extrait l'angle de discussion était la diversité des compréhensions mathématiques déployées par les enseignants, le prochain extrait (encore sur les fractions) offre une illustration de la richesse du questionnement mathématique (et didactique) provoqué par les explorations des enseignants.

2 Deuxième exemple : développement de compréhensions ancrées dans la pratique

Ce deuxième exemple provient de notre site de formation continue au primaire (3^{ème} à 6^{ème} année du primaire). L'extrait choisi offre une illustration de la richesse de l'exploration des productions d'élèves pour déclencher un questionnement mathématique significatif relatif à l'enseignement.

2.1 Déroulement d'une partie de la séance

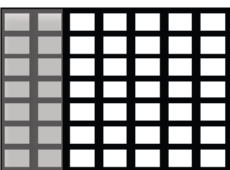
Dans un premier temps, les enseignantes⁶ ont comme tâche d'anticiper les réponses que donneraient leurs élèves aux questions suivantes, et d'en discuter entre elles en équipes de 2 à 3.

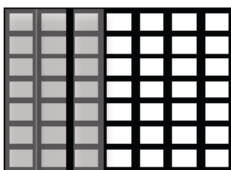
- 1) Trouve une fraction entre $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{7}$.
- 2) Indique si l'énoncé suivant est vrai ou faux. Si faux, corrige l'erreur
« Il n'y a pas de fractions entre $\frac{3}{11}$ et $\frac{4}{11}$ »

Par la suite, chacune des équipes reçoit des solutions d'élèves à ces mêmes deux questions. Ils doivent alors les comparer à leurs anticipations, mais surtout explorer le sens mathématique sous-jacent à celles-ci. Voici des exemples de solutions d'élèves distribuées.

1) Trouve une fraction entre $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{7}$

Jasmine:


 $\frac{2}{7} = \frac{14}{42}$


 $\frac{3}{7} = \frac{21}{42}$

Réponse = $\frac{15}{42}$

David: $\frac{2}{6}$ ou $\frac{2}{8}$

Krystel: $\frac{4}{14} < \frac{5}{14} < \frac{6}{14}$

Annie: $\frac{2.5}{7.5}$

Exemples des réponses d'élèves distribuées aux enseignantes pour la 1^{ère} tâche

⁶ J'utilise ici le féminin « enseignantes », car ce groupe était composé exclusivement de femmes.

2) Indique si l'énoncé suivant est vrai ou faux. Si c'est faux, corrige l'erreur.
« Il n'y a pas de fraction entre $\frac{3}{11}$ et $\frac{4}{11}$ »

Krystel: faux $\frac{3\frac{1}{2}}{11}$ **David:** Vrai. Il n'y a pas de fraction entre $\frac{3}{11}$ et $\frac{4}{11}$, on passe de 3 à 4.

Alex: faux $\frac{30}{110}$ et $\frac{40}{110}$ alors $\frac{31}{110}; \frac{32}{110}; \frac{33}{110}; \frac{34}{110}; \frac{35}{110}; \frac{36}{110}; \frac{37}{110}; \frac{38}{110}; \frac{39}{110}$

Steve: faux $\frac{3.5}{11}$ **Rachel:** faux $\frac{3.1}{11}$... jusqu'à l'infini **Carolyn:** faux $\frac{30}{110}$ $\frac{35}{110}$ $\frac{40}{110}$

Jasmine: faux $\frac{3}{11} \times 11 = \frac{33}{220}$ et $\frac{4}{11} \times 11 = \frac{44}{220}$ **Jonathan:** faux $\frac{3\frac{1}{2}}{11}$ $\frac{3\frac{1}{3}}{11}$ $\frac{3\frac{1}{4}}{11}$

Exemples de réponses distribuées aux enseignantes pour la 2^{ème} tâche

Finalement, un retour en groupe est organisé pour discuter des diverses anticipations de chacune et des sens mathématiques explorés. Cette plénière sert aussi de déclencheur pour d'autres explorations, suite à l'interaction avec les autres équipes d'enseignantes et avec les deux formateurs.

2.2 Analyse des compréhensions mathématiques des élèves par les enseignantes

Ces explorations ont mené à un questionnaire important sur le sens mathématique sous-jacent aux réponses d'élèves, déclenché en premier lieu par la questions suivante : « quels raisonnements et quelle logique sous-jacente à ces réponses d'élèves ? ». On peut par exemple penser au passage aux fractions équivalentes $\frac{4}{14}$ et $\frac{6}{14}$ pour Krystel, à la recherche d'un nombre « à mi-chemin » entre 2 et 3 et 7 et 8 pour Annie, au recours à une représentation dessinée et un partitionnement commun pour Jasmine, ainsi qu'à toutes les complications ou facilités que chacune de ces réponses entraîne ou contient. En deuxième lieu, au delà du sens mathématique sous-jacent à chacune de ces solutions, apparaît la question de la validité des solutions proposées : « Est-ce que le raisonnement fonctionne ? Est-il valide mathématiquement ? ». Un bon exemple est celui de la procédure quelque peu inusitée employée par Annie pour obtenir $2,5/7,5$; on peut se demander si cette stratégie d'ajout de « 0,5 » fonctionne toujours ? Ces entrées sur le sens mathématique sous-jacent aux solutions, et les explorations qui en découlent, entraînent diverses façons de faire et de résoudre une tâche qui peuvent apparaître simples au premier abord, telles qu'une entrée sur les représentations dessinées, les écritures décimales, les fractions équivalentes, etc., mais qui ont le potentiel d'élargir l'espace du possible (Sumara et Davis, 1997) au niveau des façons de résoudre cette tâche.

Ces explorations de solutions d'élèves ont aussi suscité un questionnaire important autour de l'écriture et du symbolisme mathématique. Les enseignantes ont été amenées à se demander si les fractions ayant une fraction ou un nombre à virgule au numérateur ou au dénominateur représentaient des écritures acceptables pour exprimer une fraction – on pense alors aux solutions de Annie ($\frac{2,5}{7,5}$), de

Krystel ($\frac{3\frac{1}{2}}{11}$), de Steve ($\frac{3,5}{11}$), de Rachel ($\frac{3,1}{11}$) et de Jonathan ($\frac{3\frac{1}{2}}{11}, \frac{3\frac{1}{3}}{11}, \frac{3\frac{1}{4}}{11}$) – soulevant des discussions importantes au niveau des conventions d'écritures pour les fractions. Les enseignantes se sont demandées si ces écritures étaient acceptables ou problématiques, et pourquoi. L'exploration de la rationalité sous-jacente à ces écritures a stimulé une discussion sur la différence entre une « convention mathématique » et un « raisonnement mathématique », et l'importance de chacun, puisque ces écritures peuvent décrire un bon raisonnement sans être conventionnellement acceptables. De plus, ceci a stimulé une discussion relative au niveau scolaire des élèves alors que certaines écritures peuvent être acceptables pour l'apprentissage de notions particulières dans certaines années scolaires (la densité de la droite numérique, par exemple, ou le fractionnement de l'unité), mais inacceptables pour d'autres

années scolaires ; différentes enseignantes, de différents niveaux, faisaient valoir leurs points de vue, ancrés dans leur contexte de pratique, et ce qu'elles mettent de l'avant dans leur enseignement de ces mêmes concepts. Il est intéressant de souligner que le groupe d'enseignantes a toutefois évoqué un malaise important vis-à-vis de ces écritures quant au sens que celles-ci symbolisent. En effet, ces écritures deviennent problématiques lorsque le tout de référence associé au numérateur est considéré. Par exemple, dans $\frac{3\frac{1}{2}}{11}$, le 3 réfère à trois parties d'un tout sectionné en 11 parties, la $\frac{1}{2}$ possède un référent différent, soit un demi d'un onzième ($\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{11}$) ; ce n'est pas un demi d'un tout sectionné en 11 parties, car ceci représenterait $\frac{5\frac{1}{2}}{11}$. Ainsi, avec l'écriture $\frac{3\frac{1}{2}}{11}$, on peut penser qu'on se retrouve avec un même numérateur qui possède deux référents (soit le tout sectionné en 11 parties et le $\frac{1}{11}$), tandis qu'habituellement, non seulement ce référent est le même, mais il est aussi explicite (soit le tout partitionné en onzièmes). Cette écriture cache un autre « tout » implicite, soit un onzième, rendant cette écriture peu explicite donc peu souhaitable. Cette explication, offerte par les enseignantes revêt un caractère hautement didactique pour leur pratique (« peu souhaitable, car obscure »), mais aussi très mathématique (« le(s) référent(s) de la fractions »).

Ainsi, ce travail a permis aux enseignantes de développer des ressources pour interagir avec des représentations et façons de faire « moins » habituelles, qui peuvent camoufler des compréhensions mathématiques importantes non-négligeables dans l'enseignement-apprentissage des concepts mathématiques de fraction.

3 Retour sur les deux extraits tirés de séances de formation continue

Ces deux extraits, provenant du secondaire et du primaire, permettent d'illustrer l'émergence exceptionnelle de sens et compréhensions mathématiques déployés et développés par les enseignants durant les séances. On voit apparaître un questionnement mathématique profond chez les enseignants, relativement à des concepts quotidiens de leur pratique. Ces explorations ont permis de démarrer des prises de conscience importantes sur les concepts mathématiques qu'ils enseignent (et que leurs élèves apprennent) et le sens qui peut être développé pour ces concepts en situation d'enseignement-apprentissage. D'une certaine manière, les enseignants, durant les séances, travaillent avec leurs propres mathématiques, les explorent et les poussent. Les concepts mathématiques explorés sont ceux du programme d'étude, mais en même temps ils sont plus que ce dernier, touchant à des aspects spécifiques de la classe et des élèves en contexte d'enseignement-apprentissage. C'est cette dimension que j'explore dans la prochaine section. Elle amène à un certain recadrage de ce que nous conceptualisons comme la formation mathématique des enseignants. Toutefois, avant d'offrir ce recadrage, j'offre dans ce qui suit un aperçu des retombées de ces formations sur les enseignantes, alors que des entrevues ont été menées avec elles sur leurs expériences de formation.

4 Retombées vécues et perçues par les enseignantes de la formation : entrevues de mi-parcours et de fin de parcours

Des entrevues ont été réalisées avec les enseignantes du groupe du primaire au milieu et à la fin du projet pour mieux comprendre leur expérience vécue et les retombées de la formation pour elles. Les analyses sont en cours, mais déjà des dimensions intéressantes et importantes ressortent.

Le premier élément très présent dans leurs discours, et ce, autant au milieu qu'à la fin de parcours, est qu'un tout nouveau monde mathématique s'ouvre aux enseignantes à travers ces formations ; un monde mathématique et des façons de penser et faire les mathématiques qui leur sont nouvelles et attrayantes. Il apparaît important de mentionner que cette ouverture les touche à un niveau très profond, à la fois comme personnes et comme enseignantes. En effet, les entrevues de milieu et de fin de parcours sont très émotives et les commentaires des enseignantes témoignent d'une sensibilité, voire même d'une reconnaissance, envers ce qu'ils ont vécu en formation. Ce qui frappe est l'intensité de l'impact de la

formation sur elles, sur ce qu'elles ont appris et vécu ; la formation semble les avoir transformées, au niveau mathématique, et elles le témoignent d'une façon vibrante durant les entrevues.

Au niveau mathématique, voire à un niveau méta-mathématique au delà des contenus, cinq aspects se démarquent. Un premier aspect est le fait qu'il existe beaucoup de liens entre les concepts mathématiques. Plusieurs d'entre elles ont fait ce constat durant la formation, alors que de nombreux concepts qu'elles enseignent étaient auparavant vus de façon isolée, compartimentée. Il semble que la formation leur a permis de relier et connecter plusieurs concepts ensemble et d'entrevoir les liens qui les unissent (entre fractions, aire, volume, division, décimaux, périmètre, etc.). Un deuxième aspect relevé par les enseignantes est l'importance des images mentales. La formation leur a permis de voir le potentiel d'un travail mathématique en termes d'images, et non uniquement en termes de nombres, de calculs et d'algorithmes (autant pour elles comme personne faisant des mathématiques que comme enseignantes pour leur pratique). Par exemple, elles ont réalisé la richesse mathématique de faire des représentations dessinées des fractions ou de la division, de revenir à des représentations géométriques pour le volume et l'aire et non de centrer uniquement sur le *calcul* d'aire et les dimensions des solides et figures, de représenter les nombres ou les objets mathématiques avec du matériel de manipulation, etc. Un troisième aspect, relié au précédent, concerne l'importance de faire davantage que montrer des algorithmes et procédures de calcul pour arriver à travailler sur le sens des concepts. D'une certaine façon, les enseignantes ont exprimé l'intérêt de travailler sur le sens, ainsi que de ne pas canaliser uniquement sur l'obtention de la réponse finale mais aussi sur le raisonnement et le sens mathématique donné en cours de résolution. Un quatrième aspect mentionné, encore relié aux précédents, est l'importance de donner le temps aux élèves de faire les mathématiques, et non de les amener à développer rapidement des réponses pour terminer les problèmes donnés. Les enseignantes ont expliqué avoir réalisé que certains problèmes demandent du temps, que le développement du raisonnement se fait à long terme, et que l'investissement en temps en vaut la peine autant à court qu'à long terme. Plusieurs d'entre elles ont expliqué avoir fait plusieurs essais durant l'année où elles permettent à leurs élèves de manipuler, de discuter, etc., et ont trouvé cette orientation sur l'enseignement-apprentissage fort intéressante et porteuse de sens pour leurs pratiques et leurs élèves.

Finalement, le dernier aspect concerne leur attitude d'enseignante : plusieurs d'entre elles ont expliqué donner plus de place à la curiosité et au questionnement dans la classe, autant pour les élèves que pour elles. En fait, plusieurs d'entre elles disent poser beaucoup plus de questions à leurs élèves depuis le début de la formation, un effet qu'elles voient provenir de la formation, suite à la façon dont les deux formateurs ont agi avec elles en les questionnant, en semant le doute sur leurs certitudes et en les amenant à préciser leurs réflexions. Elles diront en entrevue, par exemple, des énoncés comme « Je me vois comme un mini-Jérôme dans ma classe, questionnant mes élèves sans arrêt ! », « Je questionne, je sème le doute, je ne les lâche pas avec mes questions, je les force à réfléchir et à ne rien accepter tout cuit dans le bec ! », « Je leur demande "Oui, mais si on avait..." ou "As-tu pensé à..." ». Ainsi, même si la formation n'a pas à la base une intention d'homologie (voir la note de bas de page 4), les enseignantes l'ont vécu à un certain degré, surtout en ce qui concerne l'idée de voir le formateur comme un « modèle d'enseignement » (voir aussi le cas d'Enrico dans Proulx, 2003, 2006).

Toutefois, malgré tous ces aspects positifs qui ressortent fortement de la formation (il y en a d'autres vécus à des niveaux plus individuels chez chacune d'entre elles), la question du « réinvestissement » dans leur pratique de classe est complexe. À travers les diverses entrevues, et ce, autant pour le groupe du primaire que celui du secondaire, les enseignants ont expliqué que le réinvestissement de la formation de façon concrète n'allait pas de soi et qu'il n'était pas simple de savoir exactement comment l'actualiser dans leurs pratiques. Certaines enseignantes diront « Enfin, une formation pour nous et non pour nos élèves et ce que nous ferons demain matin avec eux ! ». Cette affirmation n'est pas anodine, car plusieurs des enseignantes ont senti que cette formation s'adressait à elles, comme professionnelles, et ne servait pas à leur donner des trucs et des façons de faire qu'elles devaient appliquer immédiatement dans leurs classes. Elles étaient en situation d'exploration pour en apprendre davantage sur les mathématiques. Ainsi, elles sentent que cette formation « brasse des choses en dedans » d'elles – de là

peut-être l'aspect émotif – mais sont également un peu prises avec un certain « embarras du choix » de façons de faire, ainsi qu'avec des visions et compréhensions des mathématiques qu'elles ont développées qui peuvent être en contradiction avec les recommandations ministérielles dans les programmes d'étude. Néanmoins, elles affirment que cela est positif, car elles en savent « plus » ; et que c'est donc à elles, comme professionnelles, à gérer leurs pratiques d'enseignement avec ces connaissances nouvelles et voir comment travailler avec ces idées dans leur enseignement⁷. Ceci s'arrime bien avec les travaux que nous avons menés sur le développement d'un cadre de référence (mathématique) personnel d'enseignant (Bednarz, 2010 ; Proulx, 2003, 2006).

Ces « résultats » d'entrevues donnent une bonne idée de la manière dont la formation est vécue par les participants et montrent le potentiel d'une formation mathématique ancrée dans la pratique. Ces entrevues donnent également un aperçu de la nature des expériences vécues par les enseignantes dans le jeu complexe entre formation et pratique d'enseignement. La prochaine section développe cet aspect d'ancrage dans la pratique, dans une perspective de re-cadrage des questions et conceptualisations de la formation mathématique que le projet nous a forcé à faire.

IV - RE-CADRAGE DE LA CONCEPTUALISATION DE LA FORMATION MATHÉMATIQUE DES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES

Le travail mathématique proposé dans nos formations a un ancrage spécifique dans la pratique d'enseignement des mathématiques. Il a aussi un ancrage par l'exploration d'un potentiel sous-jacent aux productions d'élèves, dans une compréhension mathématique spécifique (un usage et une vision des mathématiques) guidée par un regard particulier, soit celui du formateur-chercheur en didactique des mathématiques. Ce double ancrage est provoqué par notre sensibilité et notre envie, en tant que communauté de didacticiens des mathématiques, de repenser les contenus mathématiques sous un autre jour, sous un autre sens, et de les analyser sous toutes leurs coutures. Nos yeux de didacticiens des mathématiques nous amènent à ne pas nous restreindre à une vision des mathématiques rigide et contrainte par un certain standard mathématique prescriptif : nous désirons élargir l'espace (mathématique) du possible (Sumara et Davis, 1997).

Toutefois, malgré un certain ancrage dans la pratique enseignante, ces façons de voir les mathématiques, de les approcher et de les questionner, sont nouvelles pour ces enseignants (tous groupes, primaire et secondaire, confondus) : le travail mathématique se fait souvent autour de façons de voir, de faire et de penser les mathématiques qui ne leurs sont pas familières. Ainsi, la nature du travail mathématique proposé dans nos formations amène à penser que la formation mathématique développée est davantage « articulée » à, qu'ancrée dans, la pratique enseignante. La formation n'est pas axée sur la pratique elle-même, mais elle n'est pas non plus en dehors d'elle : c'est une entrée mathématique qui les amène au-delà de la pratique, tout en restant avec elle⁸. Toutefois, cette conceptualisation d'un travail « articulé » à la pratique est toujours en développement, alors que nos analyses nous aident à raffiner ce que peut signifier une pratique articulée à la pratique enseignante⁹. Une métaphore qui semble aidante, à ce stade

⁷ Ceci fait beaucoup pensé à un commentaire émis par Z. Krygowska dans une conférence donnée au Département de mathématique de l'UQAM en 1973 ayant pour titre « Le rôle de la didactique de la mathématique dans les études du futur enseignant » : [...] je savais très bien enseigner les fractions avant d'avoir fait mes études [...] maintenant je ne sais pas du tout comment je dois faire cet enseignement et c'est là le résultat de la didactique de la mathématique. Je ne sais pas en ce sens que je suis obligé de choisir, parmi les différentes solutions possibles, celle qui est la plus adaptée à ma classe ; maintenant que je connais ces possibilités, je me sens obligé [*sic.*] de changer mes conceptions au cours de l'interaction enseignant-élève, j'ai des doutes, je vois les difficultés des élèves auxquelles je n'avais pas pensé auparavant. C'est l'embarras des richesses qui est maintenant la raison de mes inquiétudes, de mes doutes [...] mais cette richesse m'ouvre la possibilité de faire des recherches étroitement liées à mon métier [...] et qui me donnent une grande satisfaction [...]. (tiré de Bednarz, 2000, p. 77)

⁸ Ceci semble en lien avec ce que Houdement (2003, p. 27) offre comme explication : « En quelque sorte, des indices pour les choix des formateurs sont à chercher en *amont* de la formation (les étudiants AVANT) mais aussi en *aval* de la formation (le milieu des enseignants qui les accueillera et réglera leurs jeunes habitudes) ».

⁹ L'articulation de la formation à la pratique est au cœur des travaux de notre groupe de recherche, le GREFEM, qui a récemment produit une analyse de diverses pratiques de formation articulées à la pratique enseignante (GREFEM, 2012).

de notre (re-)conceptualisation, est celle d'une articulation du corps humain, particulièrement celle du coude, où la pratique enseignante est désignée par l'os du bas (le cubitus), les mathématiques dites standards par l'os du haut (l'humérus), et notre formation sur les mathématiques professionnelles située entre les deux, comme le liquide synovial (la synovie), tel que le montre la figure 2.

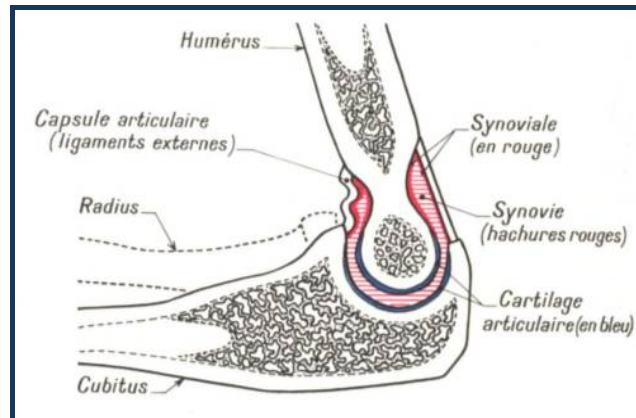


Figure 2 : Une image de l'articulation du coude et son liquide synovial comme métaphore pour conceptualiser une formation mathématique articulée à la pratique enseignante (tiré de <http://membres.multimania.fr/renejacquemet/sport/accidents/accidents.html>)

Cette image devient encore plus signifiante lorsqu'on lui annexe, de façon quelque peu humoristique, cette définition du rôle du liquide synovial pour représenter l'objectif d'une formation mathématique telle que nous l'avons développée :

[...] Il a notamment pour fonction de réduire la friction en lubrifiant l'articulation, d'absorber les chocs, de fournir de l'oxygène et des nutriments aux chondrocytes du cartilage articulaire et d'éliminer de ces derniers le dioxyde de carbone et les déchets métaboliques [...] Le liquide synovial contient également des phagocytes qui éliminent les microorganismes et les débris issus de l'usure normale ou de la déchirure de l'articulation. Lorsqu'une articulation synoviale est immobilisée pendant un certain temps, le liquide devient plus visqueux (gélatineux) mais, à mesure qu'on augmente le mouvement, sa viscosité diminue. [...] (tiré de http://fr.wikipedia.org/wiki/Liquide_synovial)

L'image, ou l'analogie, est en effet frappante ! Et elle alimente une certaine intentionnalité à la formation mathématique des enseignants, en plus d'une certaine fonctionnalité. Ceci dit, ce jeu de tensions et d'articulations entre formation mathématique et pratique enseignante n'est pas toujours simple. En effet, durant les séances il est arrivé que ce que nous avons proposé aux enseignants soit rejeté d'emblée, car ces derniers jugeaient que nous allons « trop loin ». Un de ces exemples est lorsque nous avons travaillé le reste de la division avec l'exemple 2 mentionné plus haut de $423 \div 40 = 9 \text{ reste } 63$, où une proposition a été suggérée de considérer une réponse comme « 11 reste -17 ». La réaction, presque unanime des enseignantes, a été d'affirmer quelque chose semblable à « En 20 ans de carrière, jamais je n'ai rencontré ceci. Non, ça c'est trop poussé ! ». Pourtant, il est intéressant de noter ou même contraster cette réaction à des réponses comme « $10 \frac{1}{2} \text{ reste } 3$ », qui leur ont semblé tout à fait pertinentes à considérer. Il n'est donc pas toujours évident, comme formateur-chercheurs, de savoir où sont nos écarts, nos excès, etc. D'une certaine façon, on peut dire que les enseignants sont de très bons baromètres dans le jeu d'articulation, établissant eux-mêmes une certaine limite où le travail mathématique proposé exagère et dépasse ce qui les touche, devient « tiré par les cheveux », etc., comme si nous sortions, pour abuser de notre métaphore, du liquide synovial, voire du coude ! Par contre, il semble peu judicieux, dans une perspective de formation mathématique qui promeut le développement et l'enrichissement des compréhensions mathématiques chez les enseignants, de demeurer uniquement avec ce qui peut leur sembler pertinent. En effet, l'intention de cette formation « articulée » est de les « pousser » un peu, de leur faire voir des façons différentes de faire les mathématiques et de les comprendre, etc. ; le formateur-chercheur jouant alors entre ses propres intentions et les réactions des enseignants sur ces interventions,

tendant de stimuler l'exploration et de faire voir ce nouveau monde mathématique aux enseignants. C'est donc un travail dans l'action, comme toute pratique d'enseignement l'est, qui définit le travail du formateur-chercheur dans le contexte de formation mathématique : le formateur-chercheur transige et négocie l'imprévu, permet des ouvertures, force un certain questionnement, tente de déclencher des réflexions et d'interagir avec ce qui se présente ... le formateur-chercheur devient, à proprement parler, un praticien de la formation continue.

V - QUELQUES ÉLÉMENTS DE CONCLUSION

La formation mathématique que j'ai présentée dans ce texte, tirée de notre projet de recherche-formation, est axée sur les mathématiques de la pratique des enseignants, dans une idée d'articulation avec celle-ci. Cet axe sur la pratique se retrouve à l'intérieur du choix des concepts mathématiques travaillés, mais surtout dans la façon avec laquelle les « élèves » interviennent et apportent des éléments de travail pour la formation continue des enseignants. C'est de cette manière que la première question posée « Comment l'activité (mathématique) de l'élève peut-elle nous apporter des éléments pour la formation du maître ? » est abordée ; l'élève, son activité et ses productions, devient le point de départ, le déclencheur, pour les explorations mathématiques des enseignants. Ainsi, au cœur de l'approche de formation mathématique se retrouve l'intention d'explorer le potentiel mathématique sous-jacent aux productions d'élèves. Les productions d'élèves, dans ce contexte, ne servent pas vraiment d'outil d'analyse de l'apprentissage ou de la compréhension des élèves (même si elles le sont un peu), mais sont surtout des objets mathématiques à explorer.

En ce qui concerne les nombreuses critiques adressées en recherche (et ailleurs) à l'égard de la faiblesse des compréhensions mathématiques des enseignants de l'élémentaire et du secondaire, quelques réponses ou pistes de réflexion sont possibles. Dans un premier temps, il est clair, à la vue de ce qui a été présenté dans ce texte, que lorsque les enseignants sont placés dans un contexte où ils ont la chance d'explorer les concepts mathématiques ils réussissent et développent des compréhensions mathématiques riches et pertinentes à leur pratique. Ces enseignants ne sont pas incapables de faire des mathématiques ou d'en apprendre. Par contre, plusieurs d'entre eux sont non familiers avec une certaine façon de faire les mathématiques : un certain « non vécu », « non familier », « non habituel » avec les mathématiques qui nous intéressent dans notre communauté de didactique des mathématiques. Par exemple, une recherche du lien entre périmètre et aire, la possibilité qu'un reste soit représenté par plusieurs fractions avec différents référents, une division donnant un reste négatif ou fractionnaire ou plus grand que le diviseur, etc. Il apparaît alors évident, face à leur non-familiarité avec cette entrée sur les mathématiques, que des failles importantes dans leurs connaissances mathématiques peuvent être décelées si ces enseignants sont questionnés sans préavis (ou « sur-le-champ »). Toutefois, plongés dans un contexte de formation tel que développé dans nos recherches, les enseignants réussissent à explorer ces idées, déploient des compréhensions mathématiques puissantes et enrichissent leur vécu mathématique. Cette réflexion souligne aussi l'aspect « activité » ou « faire » des mathématiques, car les enseignants sont amenés par la formation à faire des mathématiques, à les explorer, à développer des compréhensions ; compréhensions qu'ils n'ont peut-être pas, de façon explicite, de prime abord. C'est une façon, certains diront, des les aider à se former eux-mêmes – les former à se former – parce qu'ils développent des habiletés à faire des mathématiques et les explorer, et ils pourront réinvestir ces habiletés par eux-mêmes par la suite dans d'autres contextes mathématiques.

Pour en revenir au fameux « phénomène » cité plus haut tiré de la citation de Brousseau, celui qu'il faut mieux comprendre, quelques commentaires sont nécessaires. Le phénomène à considérer pour les questions de formation mathématique devient alors davantage celui des mathématiques *articulées* à la pratique, et non pas celui des mathématiques standardisées à apprendre par tous. Cette idée repose sur la réalisation que l'enseignant mobilise des mathématiques très particulières dans sa pratique, bien différentes des mathématiques usuelles et même de celles du programme d'études (Bednarz et Proulx, 2009) ... et que ces connaissances mathématiques spécifiques sont très importantes à prendre en considération et à explorer davantage. C'est ce qui a été tenté dans cette formation mathématique avec

des enseignants du primaire et du secondaire : travailler non pas uniquement autour des mathématiques de la pratique, mais aussi stimuler des réflexions et compréhensions mathématiques au-delà de la pratique. Voilà la conceptualisation développée d'une formation mathématique articulée à la pratique. Le rôle d'une formation mathématique pour un enseignant est d'être en lien avec la pratique, mais de ne pas être uniquement que de la pratique car ce serait une visée utilitaire, réductrice et peu enrichissante au niveau professionnel : la formation mathématique doit être connectée à la pratique, tout en tirant cette pratique vers de nouveaux horizons...

Il semble donc y avoir une certaine responsabilité de formation, sur ces mathématiques articulées, sur ces façons de faire les mathématiques dans l'enseignement. Toutefois, cette responsabilité « exige ». Elle « exige » un recadrage de ce que signifie préparer un enseignant de mathématiques et de ce que sont les mathématiques pertinentes à un enseignant dans sa pratique. Elle « exige » un relâchement d'un certain standard mathématique « nécessaire » à avoir acquis pour un enseignant : l'enseignant, comme professionnel, doit devenir ou être vu comme quelqu'un qui peut faire des mathématiques, mais pas n'importe lesquelles : celles qui sont en lien avec sa pratique professionnelle, celles qui sont pertinentes à son travail enseignant, celles qui s'y articulent. Allez savoir si c'est le formateur ou le chercheur qui offre cette perspective...l'argument ayant des racines encore une fois dans ces deux mondes connectés...

Cette recherche a été rendue possible grâce au support financier du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (CRSH, subvention #410-2008-0284).

BIBLIOGRAPHIE

BEDNARZ N. (2000) Formation continue des enseignants en mathématiques: Une nécessaire prise en compte du contexte, pp. 63-78, in P. Blouin & L. Gattuso (dir.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Montréal : Éditions Modulo.

BEDNARZ N. (2010) La formation à l'enseignement des mathématiques au secondaire : quelques enjeux, pp. 185-192, in J. Proulx & L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*, Sherbrooke : Éditions du CRP.

BEDNARZ N. & PROULX J. (2009) Knowing and using mathematics in teaching: Conceptual and epistemological clarifications taking their source in teachers' practice. *For the Learning of Mathematics* (Numéro thématique sur « Knowing and using mathematics in teaching »), **29**(3), 11-17. [Une version en français a été publiée sur le site de FLM (<http://flm.educ.ualberta.ca>) sous le titre de Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement : Clarifications conceptuelles et épistémologiques prenant leur source dans une analyse de la pratique des enseignants].

BEDNARZ N. & PROULX J. (2010) Processus de recherche-formation et développement professionnel des enseignants de mathématiques : Exploration de mathématiques enracinées dans leurs pratiques. *Éducation et Formation*, **e-293**, 21-36. <http://ute3.umh.ac.be/revues/>

BEDNARZ N. & PROULX J. (2011a) An attempt at defining teachers' mathematics through research on mathematics at work, in *Proceedings of CERME-7*, Rzeszow, Pologne.

BEDNARZ N. & PROULX J. (2011b) Spécificité du travail mathématique de l'enseignant: un ancrage pour la formation continue, in *Actes du colloque « Le travail enseignant au XXI^e siècle Perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle »*, Lyon, France, INRP, CD-ROM.

BRIAND J. (2003) Enseigner l'énumération en moyenne section de maternelle, Tome 1, pp. 33-52, in *Concertum : dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques*, ARPEME.

BROUSSEAU G. (1988) Fragilité de la connaissance et fragilité du savoir. *Conférence donnée au CIRADE*, 22 janvier 1988 [VHS/couleur/2 cassettes]. Montréal, Canada: UQAM/CIRADE.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée sauvage.

DAVIS B. (2010) Concept studies: designing settings for teachers' disciplinary knowledge, vol.1, 63-78, in *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

DAVIS B., & SIMMT E. (2006) Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, **61**(3), 293-319.

GREFEM (2012) Formation didactique articulée à la pratique enseignante: illustrations et conceptualisations, in *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2012*.

HÉRAUD B. (2000) Quelles approches doit-on privilégier dans la formation initiale des enseignants au primaire pour l'enseignement des mathématiques ? 41-52, in P. Blouin & L. Gattuso (dir.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Montréal : Éditions Modulo.

HOUEMENT C. (2003) Autour des stratégies de formation des maîtres du premier degré en mathématiques, Tome 3, pp. 23-31, in *Concertum : dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques*, ARPEME.

HOYLES C., NOSS R., & POZZI S. (2001) Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, **32**(1), 4-27.

KUZNIAK A. (2003) Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, Tome 3, pp. 7-22, in *Concertum : dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques*, ARPEME.

MA L. (1999) *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

MARCHAND P. (2010) Formation initiale des maîtres au primaire et en adaptation scolaire et sociale : quelle formation mathématique ? pp. 11-42, in J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*. Sherbrooke : Éditions du CRP.

MEWBORN D. S. (2003) Teaching, teachers' knowledge, and their professional development, pp. 45-52, in J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (dir.), *A research companion to the Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NOSS R. (2002) Mathematical epistemologies at work, vol. 1, 47-63, *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

NOSS R., BAKKER A., HOYLES C., & KENT P. (2007) Situated graphs as workplace knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, **65**, 367-384.

NOSS R., & HOYLES C. (1996) The visibility of meanings: modeling the mathematics of banking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **1**(1), 3-31.

NOSS R., HOYLES C., POZZI S. (2002) Abstraction in expertise: a study of nurses' conceptions of concentration. *Journal for Research in Mathematics Education*, **33**(3), 204-229.

NOSS R., POZZI S., & HOYLES C. (1999) Touching epistemologies: meanings of average and variation in nursing practice. *Educational Studies in Mathematics*, **40**(1), 25-51.

POZZI S., NOSS R., & HOYLES C. (1998) Tools in practice, mathematics in use. *Educational Studies in Mathematics*, **36**, 105-122

PROULX J. (2003) *Pratiques des futurs enseignants de mathématiques au secondaire sous l'angle des explications orales : Intentions sous-jacentes et influences*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec, Canada.

PROULX J. (2006) « Objectifs comme points de départ » versus « objectifs à atteindre à la fin » : Un défi pour les programmes de formation des maîtres, in *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2006* (CD-ROM). Sherbrooke, QC : Éditions du CRP.

PROULX J. (2007) *(Enlarging) secondary-level mathematics teachers' mathematical knowledge: An investigation of professional development*. Thèse de doctorat, Université de l'Alberta, Alberta, Canada.

PROULX J. (2009) Réflexions préliminaires sur les connaissances mathématiques des enseignants du secondaire : Connaissances factuelles et développement de connaissances, in *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2009*. <http://fastef.ucad.sn/EMF2009/colloque.htm>

PROULX J. (2010) Et si toute la question de la formation des enseignants en mathématiques était plus simple qu'on le pense ? Pratiques de formation continue pour les enseignants de mathématiques du secondaire centrées sur le travail des mathématiques scolaires, pp. 203-224, in C. Couture & L. Dionne (dir.), *Formation initiale et continue*

dans le domaine des sciences, des mathématiques et de la technologie: Vers quel développement professionnel des enseignants. Ottawa, ON: Presses de l'Université d'Ottawa.

PROULX J., & BEDNARZ N. (2009) Resources used and “activated” by teachers when making sense of mathematical situations, vol. 4, pp. 417-424, in *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

PROULX J., & Bednarz N. (2010a) Enhancing teachers' mathematics of their practice: A professional development project, vol. 4, pp. 65-72, in *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

PROULX J., & BEDNARZ N. (2010b) Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 1 : Réflexions fondées sur une analyse des recherches. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana*, **1**(1). <http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia>

PROULX J., CORRIVEAU C., et SQUALLI H. (dir.). (2012) *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : pratiques, orientations et recherches*. Québec, Qc : Presses de l'Université du Québec.

RICCO G., VERGNAUD G., et ROUCHIER A. (1983) Représentation du volume et arithmétisation - entretiens individuels avec les élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en didactique des mathématiques*, **4**(1), 27-69.

SCHIFTER D. (1998) Learning mathematics for teaching: From a teacher' seminar to the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, **1**(1), 55-87.

SUMARA D. J., & DAVIS B. (1997) Enlarging the space of the possible: Complexity, complicity, and action-research practices, pp. 299-312, in T. R. Carson & D. J. Sumara (dir.), *Action research as a living practice*. New York: Peter Lang.

WONG E. D. (1995) Challenges confronting the researcher/teacher: Conflicts of purpose and conduct. *Educational Researcher*, **24**(3), 22-28.