Actes

XXXVIIIème Colloque COPIRELEM

colloque international francophone des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques

22 - 23 - 24 JUIN 2011

IUFM de Bourgogne - site de Dijon

Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants

Ateliers

Ateliers

DES VIDÉOS SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA MODÉLISATION EN CP ET CM1 : DE L'ACTIVITÉ DE L'ÉLÈVE À LA FORMATION

Richard CABASSUT
PIUFM, IUFM d'Alsace
LDAR, Université Paris 7
richard.cabassut@unistra.fr

Résumé

De 2007 à 2008, quatre séquences de résolution d'un problème ouvert, à plusieurs étapes et complexe, en lien avec la réalité, appelé encore problème de modélisation, ont été mises en œuvre, deux dans une classe de CP, et deux dans une classe de CM1, dans le cadre du projet européen LEMA[1]. L'atelier a proposé d'étudier dans ces vidéos l'activité de l'élève et de réfléchir à leur utilisation en formation. Le visionnage des vidéos devrait permettre de dégager des invariants pour la formation. Quelle activité de l'élève apparaît ? Est-elle spécifique à la vidéo (tâche, classe...) présentée ou commune à toutes les vidéos ? Est-elle spécifique de la modélisation ? Quelles retombées peuvent être utiles pour la formation ? On rend compte des difficultés à analyser l'activité de l'élève au travers des comptes rendus des groupes et de la discussion.

I - CONTEXTE DES VIDÉOS

1 Le projet LEMA

De 2006 à 2010, le projet européen LEMA a conçu et expérimenté un cours de formation à l'enseignement de la modélisation. Ce cours est destiné à des enseignants de mathématiques, de l'école primaire ou de l'école secondaire. Comme ressources à disposition des formateurs, des vidéos de mise en œuvre de séances de modélisation ont été réalisées. Certains extraits de ces vidéos ont été mis en ligne sur le site internet du projet (www.lema-project.org), parmi lesquels un extrait réalisé en France dans une école primaire : le bouchon. Les autres réalisations sont accessibles de manière restrictive sur l'intranet du site de l'IUFM d'Alsace. Chaque mise en œuvre a été montée en une vidéo de 20 à 30 minutes, découpée en épisodes jugés intéressants pour la formation de futurs professeurs. Il est donc important de noter que ces vidéos n'ont pas été conçues à l'origine comme ressources pour analyser l'activité de l'élève. On demande donc aux membres de l'atelier d'essayer de dépasser les biais introduits par le montage, ou par le fait que certains épisodes sont concentrés sur l'activité du professeur, pour analyser l'activité de l'élève présente dans la vidéo, ou au contraire absente.

2 La modélisation

Une autre caractéristique de ces vidéos est qu'elle concerne la mise en œuvre de tâches de modélisation. (Kuzniak & al., 2008) rappelle que plusieurs conceptions de la notion de modélisation existent. Nous adoptons ici le cycle de modélisation proposé par l'étude (PISA, 2006), elle-même inspirée par les travaux de Blum, Schupp, Niss, Neubrand et Pollak.

[1] Une présentation du projet est accessible sur www.lema-project.org ou dans (Cabassut, 2008).

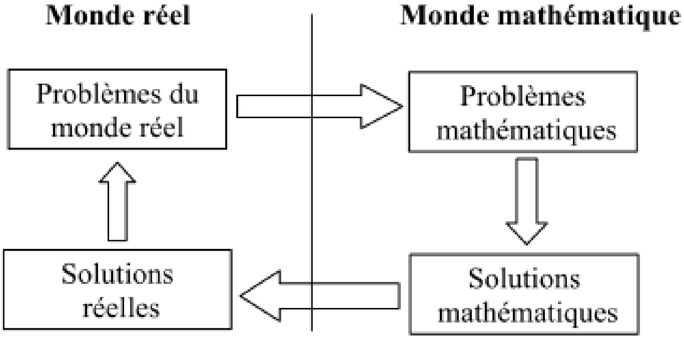


Figure 1 - cycle de modélisation

En utilisant les notions de problèmes complexes et à plusieurs étapes proposées par les programmes français de 2008 de l'école primaire, on peut considérer qu'un problème de modélisation est un problème ouvert, à plusieurs étapes, complexe, en lien avec la réalité. L'ouverture du problème réside dans les données qui ne sont pas explicitement fournies par l'énoncé de la tâche, dans la procédure de résolution du problème qui n'est pas imposée par l'énoncé et qui nécessite souvent des hypothèses supplémentaires, et enfin dans la question posée, qui n'est pas toujours précisée ou précise. La résolution du problème a plusieurs étapes : il ne s'agit pas de l'application d'une procédure à une étape, comme l'est par exemple l'application d'une formule de calcul. La complexité est liée, non seulement à l'existence de plusieurs étapes de résolution, mais également au fait que l'on doit chercher les données du problème, les compléter par des hypothèses et qu'une solution n'est pas une solution familière, ce qui distingue notamment le problème d'application où le modèle est fourni et doit être appliqué, du problème de modélisation où le modèle du problème est à construire. Enfin, le lien avec la réalité caractérise notre conception de la modélisation, à la différence d'une conception d'une modélisation intra-mathématique qui n'exige pas de lien avec la réalité.

3 Initialisation de la réflexion et consignes pour le travail en groupe

Quatre tâches de modélisation ont été mises en œuvre entre mars et juin 2007 dans une école primaire d'application de Strasbourg, dans des classes de maîtres formateurs, une classe de CP et une classe de CM1. Des vidéos de 20 à 30 min ont été montées. L'atelier propose d'étudier dans ces vidéos l'activité de l'élève et de réfléchir à leur utilisation en formation. Le visionnage des vidéos est fait séparément (une vidéo par groupe). Le bref descriptif suivant des tâches de modélisation mises en œuvre dans les vidéos est communiqué aux participants pour qu'ils puissent se répartir dans les groupes.

CP : la file d'attente. Vous arrivez à Europapark et il y a une file d'attente de 20 m pour rentrer dans le parc. Combien de temps allez-vous attendre pour rentrer ?

CP : lecture à la maternelle. La classe de CP va lire un nouveau livre à la maternelle. Combien de pages chaque enfant va-t-il lire ?

CM1 : le géant. Quelle est la taille approchée de la silhouette dont on peut voir seulement un pied ? Cette photo[2] a été prise dans un parc de loisirs.

CM1 : le bouchon. Sur l'autoroute, à l'entrée de Strasbourg, il y a un accident juste avant la sortie Baggersee. La circulation est bloquée entre les sorties La Vigie et Baggersee. (Combien de véhicules sont bloqués ?)[3]

Le cahier des charges du colloque 2011 de la Copirelem propose de distinguer la dimension fonctionnelle de l'activité et sa dimension structurante et de faire ressortir les thèmes, les obstacles,

---

[2] La photo est proposée plus loin dans l'article.

[3] La question entre parenthèse n'est pas communiquée au début de la tâche mais devra être construite dans une première phase de travail des élèves sur l'énoncé sans question de la tâche.

difficultés et erreurs rencontrées par l'élève, de préciser les méthodes d'observation et d'analyse de l'activité, d'étudier les processus de différenciation. (Robert 2003, p.2) proposent de décrire et justifier « *ce qui est retenu dans les activités des élèves. Ce sont des variables dont nous faisons l'hypothèse qu'elles peuvent influencer les apprentissages : elles sont liées aux contenus mathématiques abordés - scénario global et tâches précises, formes de travail et accompagnements en classe* ». L'analyse se centre sur le couple (tâche prescrite, déroulement). Dans l'analyse du déroulement on observe le scénario, le contrat (temps, recherche collective, individuelle …), la production attendue, les formes de travail des élèves, les accompagnements… Les éléments du cahier des charges du colloque de la Copirelem, de (Robert, 2003) et de (Roditi, 2006) permettent d'initier la réflexion en proposant la diapositive suivante aux membres de l'atelier.

Initialisation de la réflexion a priori
Faire avec les vidéos proposées (déjà montées) qui n'ont pas été conçues pour cet atelier.
Décrire ce qu'on voit et ce qu'on ne voit pas (ce qui manque) dans l'activité de l'élève : quels critères de description et d'analyse partageons-nous a priori ?
Fonctions de l'activité, structure de l'activité, prescription, initiatives, aides, difficultés, obstacles, erreurs, différenciation... (On pourra en rajouter a posteriori après visionnage)
Quelles variables de l'activité de l'élève ? Contenu mathématique, scénario global, tâches précises, formes de travail, accompagnements en classe...
Qu'est-ce qui est spécifique à la modélisation ? Qu'est-ce qui est générique ?
Quelles retombées pour la formation ?

Au cours de cette initiation de la réflexion, aucune autre proposition d'analyse de l'activité de l'élève n'est ajoutée, ce qui est peut-être un premier signe de la difficulté à analyser cette activité.

4 Consigne de travail en groupe

La présentation de la consigne de travail des groupes et des objectifs de production de chaque groupe est précisée par la diapositive suivante.

Analyse de la vidéo au regard de deux questions
Quelle analyse de l'activité de l'élève ?
Quelles retombées pour la formation ?
Rédaction d'un texte présentant l'analyse (sur support numérique) (illustré éventuellement par des extraits de la vidéo repérés avec l'horloge)
Critères partagés ?
Présentation de chaque groupe (10 min par groupe soit 40 min)
Discussion générale (20 min)

Chaque groupe est muni d'un ordinateur permettant le visionnage de la vidéo et d'une feuille présentant les découpages de la vidéo en épisodes repérés par le temps de début de l'épisode, afin de permettre un retour en arrière plus facile. Rendons compte des différentes présentations des travaux des groupes et des discussions. Les premiers comptes rendus seront plus précis ; les suivants seront plus concis pour ne pas reprendre des éléments de discussions des premiers.

II - PRÉSENTATIONS DES TRAVAUX DES GROUPES ET DES DISCUSSIONS

1 La file d'attente

Dans le cadre du projet LEMA, il était important de vérifier si une tâche de modélisation pouvait être proposée dès le début de l'école primaire, ici une classe de CP. Ce type de tâche, détermination de la longueur d'une file d'attente, a été proposé à différents niveaux de l'enseignement primaire et secondaire. Elle a donc été négociée avec le professeur en charge de la classe. Pour rendre le contexte de la tâche familier aux élèves, il a été choisi de la situer dans un parc d'attraction régional, connu des élèves de la classe. L'énoncé de la tâche est le suivant. " Vous arrivez à Europapark et il y a une file d'attente de 20 m pour rentrer dans le parc. Combien de temps allez-vous attendre pour rentrer ? " La vidéo dure 26'48 pour l'ensemble des deux séances mises en œuvre début juin. La description suivante des épisodes est proposée au groupe.

Première séance

Présentation de la tâche (0'28)

20 m c'est quoi ? (2'42)

Dans la cour (4'25)

Représentation d'une file d'attente.

Retour en classe (5'57)

Travail en groupes (7'33)

Dans un groupe avec le professeur (8'05)

Groupe sans le professeur (9'04)

Retour du professeur (9'20)

Mise en commun (10'29)

Compter les personnes.

Mesurer les personnes

Dessiner des personnes, des ronds dehors

Se mettre sur la ligne d'attente pour jouer la queue et faire venir les autres classes

Retour dans la cour (13'41)

Mise au point dans la cour (14'31)

Compter le nombre de ronds personnes

Regarder comment on a tracé les ronds

Double comptage du nombre de ronds (14'57)

70 ronds 75 ronds

Densité de la file (15'57)

Des élèves serrés et des élèves écartés

Durée d'attente (16'31)

Combien de temps les 75 personnes mettent pour passer ?

Modèle pour mesurer la durée (17'29)

Chronométrage d'un passage de 75 personnes

On mesure le temps que prennent 5 personnes pour passer : 10 secondes

Quand on est passé on continue la file des ronds en se plaçant au premier rond inoccupé

Mise en œuvre du modèle (21'09)

Premier passage à l'avant de la file (21'15)

Autre passage à l'avant (21'25)

Prolongement de la file à l'arrière (21'39)

Synthèse collective (21'48)

Selon qu'on marche et qu'on court

Selon qu'on est serré ou écarté

Donc on a trouvé une solution mais il peut y en avoir plusieurs

Deuxième séance (22'33)

Schématisation de la file d'attente (22'40)

« Voici la reproduction de la ligne de 20 mètres tracée sur le sol. Nous avons replacé les ronds représentant les personnes qui sont dans la file d'attente ». La reproduction a été faite par la maîtresse.

Schématisation tactile (22'58)

Techniques de groupement en base 10 (23'07)

Comptage des ronds : il y a 77 ronds

Association constellation écriture chiffrée (23'17)

Utilisation d'une bande numérique pour représenter le nombre de personnes de la file d'attente (23'24)

Vers le comptage (23'42)

Comptage 1 par 1 (2''10)

Comptage 10 par 10 (24'19)

Surcomptage à l'unité (24'34)

Détermination de la durée d'écoulement de la file d'attente (24'54)

Regroupement des enfants par paquet de 5 (25'28)

5 enfants passent en 10 secondes

Bon de commande de cartes de 10 secondes (25'39)

Combien de cartes de 10 secondes dois-je commander ? 16 cartes donc environ 160 secondes

Autre méthode : appariement de paquets de 10 secondes et de paquet de 5 personnes (25'58)

15 cartes de 10 secondes et il reste 2 enfants à rentrer

Fin (26'48)

Analyse de la vidéo

Concernant l'action de l'enseignante, l'enseignante donne la consigne, puis la classe se déplace dans la cour pour modéliser la file d'attente ; l'enseignante a visiblement une idée préconçue sur la manière de résoudre le problème ; c'est elle qui apporte la modélisation et le problème d'écoulement. Mais elle différencie et aide les élèves en difficulté. Elle a coupé le problème en petits morceaux ; les élèves ont été très dynamiques, répondent bien mais semblent avoir perdu le but global.

Concernant la formation, la séance est bien structurée ; la différenciation apparaît, les problèmes de vocabulaire peuvent être illustrés. Mais quel est objectif réel de la séance ?

Concernant l'activité de l'élève, les élèves apparaissent dynamiques, volontaires, réagissant aux questions de l'enseignante. Mais les réalisations restent locales, avec peu d'initiatives. Y a-t-il eu appropriation du problème par les élèves ? L'enseignante a guidé les élèves, a extrait des éléments qu'elle attendait d'une élève en particulier, a structuré différents moments où les élèves n'ont eu que des tâches locales à traiter : un problème déstructuré au final.

Il reste des points positifs pour l'enseignante : différenciation, en particulier, pour un public spécifique. Comme retombées pour la formation, on observe les éléments suivants : une enseignante qui structure les séances, gère la classe, différencie ; les problèmes avec le vocabulaire, par exemple temps/durée ou compter/dénombrer ; les problèmes avec la gestion du tableau : des informations de natures différentes sont mises au même niveau. Quels sont les objectifs pour les deux séances ? Modélisation ? Groupements par 10 ?... Concernant le problème posé et son usage en formation, quels sont les objectifs et pour quels niveaux ?

En formation, quel est le statut de l'observateur qui visionne la vidéo ? Ce statut conditionne la façon dont on regarde la vidéo. Tout ne peut pas être pris en compte et analysé en un visionnage.

Il y a un temps relativement long passé dans la cour pour travailler la modélisation : mais la modélisation de l'écoulement est délicate et problématique. Il est possible que le passage par la cour vise à aider les élèves à représenter des objets (longueur de 20 m, file d'attente, écoulement de la file d'attente) pour ensuite aider à construire une modélisation empirique du problème. Le problème de l'activité des élèves dans ces passages par la cour est difficile à évaluer : certains élèves paraissent inactifs ; que retiennent-ils vraiment de ces moments dans la cour ?

Dans l'atelier le regard est orienté, plutôt critique et négatif, alors qu'il y avait quand même des choses positives dans l'action enseignante.

Le problème aurait pu être résolu entièrement par empirisme, donc il y a questionnement sur la nécessité d'une résolution mathématique. La question posée (temps d'attente) n'en est pas une, c'est un problème à part entière nécessitant la mise en place de sous-problèmes. La légitimité de la résolution mathématique n'est pas évidente. L'aller-retour entre problème et réalité ne permet-il pas de se passer d'une modélisation mathématique ? En modélisation, il n'y a pas toujours nécessité d'une résolution mathématique. D'abord, qu'est-ce qu'une résolution mathématique ? On peut comparer des résolutions qui utilisent les mathématiques ou pas.

La mise en œuvre de la première tâche " la file d'attente " montre que cette tâche est peut-être trop complexe pour une classe de CP (difficulté à concevoir l'écoulement de la file d'attente) et trop ouverte (beaucoup de données sont à préciser à partir d'hypothèses qu'il faudrait valider, ce qui n'est pas toujours aisé pour des élèves de CP). Examinons une autre tâche qui pourrait paraître plus simple.

2 Lecture à la maternelle

La classe de CP est la même que la classe précédente. La tâche proposée ici a été mise en œuvre après la tâche présentée précédemment. L'énoncé de la tâche précédente avait été négociée avec l'équipe du projet LEMA : la tâche est apparue trop complexe pour une classe de CP. L'énoncé de cette nouvelle tâche a été conçue entièrement par le professeur en charge de la classe : elle apparaît plus simple (ce qui n'empêche pas cette tâche de rester complexe et à plusieurs étapes) et mieux ancrée dans la vie de la classe. La vidéo rend compte de la tâche suivante effectuée fin juin : "La classe de CP va lire un nouveau livre à la maternelle. Combien de pages chaque enfant va-t-il lire ? " Il est à noter que les élèves avaient l'habitude d'aller lire une histoire dans la classe maternelle voisine mais c'était la première fois qu'était explicitement posé le problème du partage des pages à lire. Les objectifs visés par les séances sont : résoudre un problème de modélisation. La vidéo dure 22'23 et la description suivante des épisodes est proposée au groupe.

Présentation de la tâche (0’20)

Vérification de la compréhension de la tâche (0’50)

Consignes de travail en groupes (1’54)

Que chercher dans le groupe ? (2’02)

Matériel pour élève malvoyant (2’53)

Travail en groupes

Comptage des pages en groupes (3’02)

Nombre de pages à lire (3'51)
Nombre d'enfants (4'45)
Comment partager ?
Représentation par un dessin (4'55)
Représentation avec des cubes (5'03)
Représentation par un calcul (5'12)
Dans un groupe : partager 48 pages entre 17 enfants (6'38)
Comment distribuer les pages aux enfants ? (6'43)
Cubes pour représenter la distribution (1 cube = 1 page) (7'24)
Distribution 2 par 2 (8'06)
Traitement du reste (8'41)
Distribution 3 par 3 (8'59)
2 pages chacun : il en reste 3 pages chacun : il n'y en a pas assez. (10'05)

Autre groupe distribuant 48 pages à 17 enfants (10'25)
Chaque enfant commence par lire 1 page (10'26)
Utilisation de cubes pour distribuer les pages (11'30)
3 distributions de 1 page par enfant (12'20)
Il manque des pages (13'38)

Groupe utilisant la bande numérique (14'46))
Un élève propose de distribuer 4 pages par élève (14'50)
Utilisation de la bande numérique et de cubes (1 cube marque 1 nouvel élève sur la bande numérique qui compte les pages) (15'33)
Il reste 5 enfants sans pages à lire (15'53)
Distribution de 2 pages par élève (16'50)
Il reste des pages sans élèves pour les lire (17'00)
Distribution de 3 pages par élève (17'07)
Il reste 1 enfant sans pages à lire (17'23)

Travail collectif : bilan des groupes (17'32)
Nombre de pages (17'35)
Phase de validation d'une distribution de 2 pages par enfants (18'39)
Phase de validation d'une distribution de 3 pages par enfants (19'53)
Fin (22'23)

Analyse de l'activité de l'élève

En remarque initiale nous regrettons notre tendance à observer plutôt le travail de l'enseignante que celui des enfants ; et l'autre tendance qui consiste à chercher d'abord les défauts. Une lecture va être organisée par les CP pour les maternelles. Cela a déjà été fait, mais cette fois-ci, les enfants vont devoir se les partager eux-mêmes : la situation est pleine de sens.

La consigne orale est la suivante : " Combien de pages chaque enfant va lire ? Est-ce que certains vont lire beaucoup, d'autres moins ? "

Il y a vérification de la compréhension de la consigne. Les enfants suggèrent de compter le nombre de pages pour se les répartir. Un élève est non-voyant et dispose d'une version braille reproduite en photocopies : la modélisation est déjà faite, elle dit : « Si j'ai trois pages, est-ce qu'il y en aura assez pour que les autres aient trois pages ? »

Pauline a dit que ce n'était pas juste que certains en aient plus que d'autres avec forte induction de la maîtresse. Le montage ne fait pas apparaître la discussion sur un partage équitable ou non : pourquoi ceux qui aiment lire ne pourraient-ils pas lire davantage de page que les autres ? Finalement, la maîtresse suggère de choisir l'équirépartition. On voit ici un des problèmes du montage : on ne connaît pas le vrai minutage de l'activité (certainement des choix éditoriaux faits et des « sacrifices »).

Les élèves comptent les pages et obtiennent des résultats différents.

Des procédures de comptage différentes, utilisant ou non des cubes, qui représentent pour certains les enfants et pour d'autres les pages. La maîtresse induit fortement que le cube est le modèle de l'enfant. Et elle dirige le travail du jeune garçon. Est-ce parce que le groupe a du mal à commencer ?

En termes d'apprentissage, quel est le bilan pour les élèves ? Qu'ont-ils compris ? Qu'ont-ils appris ?

Conséquences sur la formation

Des questions surgissent pour la formation.

Il y a des changements importants entre la question initiale et la suite des activités : il faut se mettre d'accord pour répartir, pour partager équitablement. Comment négocier ces changements ?

On peut se demander ce qui est induit par la maîtresse : par exemple, la distribution des cubes pour représenter les pages et mettre en œuvre la procédure de distribution, le choix de la quatrième de couverture pour qu'il n'y ait pas de reste dans le partage équitable.

Concernant les groupes travaillant avec des cubes : tous les élèves travaillent-ils ? Comment est-ce choisi ?

Les étudiants seraient sans doute étonnés de voir qu'une telle activité peut être menée et en plus qu'il y a diverses manières de mener les groupes.

Quelle longueur maximale d'une vidéo à regarder avec des étudiants ? Vaut-il mieux un extrait entier et complet sans montage ? Un montage avec des choix de sacrifices et d'intitulés des épisodes ? Le montage n'aide pas à savoir d'où viennent les procédures observées, induites ou pas par l'enseignante.

Dans la réalité, il y avait deux maîtres, le maître formateur et le professeur qui partage la classe avec le maître formateur lorsque celui-ci assure des formations. Dans les différentes utilisations de cette vidéo, on pourrait axer l'observation sur les différentes « postures » de l'enseignante. Il paraît souhaitable de fractionner la vidéo en plusieurs extraits pour un total maximal de 15 minutes. Concernant le partage, l'enseignante insiste trop sur le fait qu'il faut absolument que ça tombe juste. En formation on peut illustrer la nécessité de prévoir des aides.

3 Le géant

La tâche du géant est la première tâche mise en œuvre par le groupe français du projet LEMA. Cette tâche a été mise en œuvre en mars dans une classe de CM1 où la proportionnalité n'a pas encore été abordée. L'énoncé de la tâche est le suivant :

" Quelle est la taille approchée de la silhouette dont on peut voir seulement un pied ? Cette photo[4] a été prise dans un parc de loisirs. "

Les objectifs visés par les séances sont : résoudre un problème en lien avec la réalité pour lequel les élèves doivent formuler des hypothèses pour construire un modèle ; utiliser le modèle de proportionnalité. La vidéo dure 17'47 et la description suivante des épisodes est proposée au groupe.

Support de l'énoncé du problème (0'40)

Le professeur distribue cette photo aux élèves accompagnée de la question écrite suivante :

Quelle est la taille approchée de la silhouette dont on peut voir seulement un pied ? Cette photo a été prise dans un parc de loisirs.

Prise de connaissance du support du problème avec notamment pris en compte de handicaps (1'02).

Préparer le matériel tôt à l'avance (ici le centre braille).

Essayer d'anticiper les problèmes que peut poser le matériel.

Compréhension du problème (1'23)

Reformulation précise.

Ne pas orienter les élèves

Travail individuel (2'40)

Mise en commun (3'00)

Reprises du travail de groupes (5'45)

Rôle du professeur dans le groupe (8'19)

Travail autonome sans le professeur (10'25)

Le professeur dans un autre groupe (11'00)

Présentation des solutions trouvées (11'58)

Difficulté des élèves à communiquer leurs solutions (confusion)

Reformulation du professeur (12’48)

Une autre solution (13'34)

Le lendemain synthèse des solutions précédentes (15'08)

Rédaction écrite individuelle (16'40)

Analyse de la vidéo

La vidéo présente des phases uniquement positives : on ne voit pas de phases de recherches improductives. La modélisation est imposée par l'enseignant. L'objectif de la séance n'est pas clair : proportionnalité ? modélisation ? Les débats entre élèves sont riches et montrent leur capacité à mobiliser leurs connaissances. En formation on peut travailler sur l'ouverture des problèmes et éventuellement sur la problématique de la proportionnalité. Il faut également clarifier le lien entre mathématiques, réalité et pseudo réalité. Dans l'activité des élèves, un moment important apparaît lorsque les élèves demandent dans leur groupe une preuve formelle d'une réponse plutôt qu'aléatoire, à propos d'un pied de 45 m. On trouvera une analyse approfondie de cette mise en œuvre dans (Cabassut, 2009).

4 Le bouchon

La tâche du bouchon est proposée dans la même classe de CM1 que la tâche précédente, mais en fin d'année au mois de juin. L'énoncé de la tâche est le suivant. " Sur l'autoroute, à l'entrée de Strasbourg, il y a un accident juste avant la sortie Baggersee. La circulation est bloquée entre La Vigie et Baggersee. "

[4] Photo publiée avec Copyright Richard Phillips 2001/2009 www.problempictures.co.uk

Dans un premier temps il n'est pas précisé de question mais la question attendue par le professeur est : Combien de véhicules sont bloqués ? Les objectifs visés de la séance sont : résoudre un problème en lien avec la réalité pour lequel les élèves doivent formuler des hypothèses pour construire un modèle ; utiliser le modèle multiplicatif. La vidéo dure 25'51 et la description suivante des épisodes est proposée au groupe.

Présentation de l'énoncé (0'42)

Recherche de questions (1'02)

Travail individuel sur le cahier d'essais (1'21)

Mise en commun des questions trouvées (1'35)

Travail individuel (2'51)

Mise en commun des idées (3'12)

Travail en groupe (3'52)

Autres groupes (4'14)

Recherche de la longueur d'une voiture (13'30)

Recherche de la distance entre les deux sorties (14'38)

Relance collective (15'02)

Travail en groupes (16'06)

Comparaison des affiches des groupes (16'44)

Bilan (24'54)

Analyse de la vidéo

Ici le choix initial du maître est de ne pas poser de question et de demander aux élèves de rechercher des questions relatives à la situation, la question attendue concernant le nombre de voiture prises dans le bouchon. Ce type d'activité de l'élève peut l'entraîner à repérer la problématicité d'une situation et à prendre conscience de la diversité des points de vue sur cette problématicité. Cette mise en activité des élèves autour de la question est intéressante. La difficulté est qu'il n'est pas sûr que la question attendue sorte, et que dans le cas où plusieurs questions sortent, ce sera au professeur d'orienter vers la question attendue, en opposition au principe de dévolution du choix de la question aux seuls élèves. On peut également adopter la question choisie par les élèves après débat, mais ce choix peut engager le maître dans un scénario qu'il peut ne pas avoir anticipé, avec les risques de déstabilisation du professeur. On voit bien qu'aucun choix n'est idéal. Le choix de la question est une option du degré d'ouverture de la situation de modélisation. De manière plus générale, l'ouverture d'une situation peut s'effectuer au niveau de la question, au niveau des données, au niveau de la procédure de résolution.

Dans la situation du bouchon, l'ouverture au niveau des données se caractérise ici par le fait que la seule information donnée concernant le bouchon est qu'il se situe sur l'autoroute, entre les sorties La Vigie et Baggersee et dans la direction La Vigie et Baggersee. Dans la vidéo, on voit des élèves en activités pour rechercher la distance Baggersee - La Vigie : la procédure trouvée pour obtenir cette distance est de consulter le site internet Mappy. Une autre procédure avait été envisagée mais non retenue : consulter une carte routière.

Le choix de la question est également déterminant et peut être une variable importante de la situation. Dans les mises en œuvre de la tâche proposée en Allemagne décrites dans (Cabassut, 2007), la question était " combien de voitures y a-t-il dans le bouchon ? " à l'école primaire et " combien de personnes sont prises dans le bouchon ? " à l'école secondaire. Pour l'école secondaire, la complexité est augmentée. On remarquera que pour le problème de la file d'attente au CP, on aurait pu poser la question " combien de personnes sont dans la file d'attente ? ". En posant la question " combien de temps allez-vous attendre pour rentrer ? " on oblige non seulement à modéliser une file d'attente mais également son écoulement, ce qui augmente la complexité du problème.

III - DISCUSSION GÉNÉRALE

1 La modélisation comme objectif visée pour l'activité des élèves

Un des objectifs du projet LEMA est de promouvoir un enseignement de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques dès l'école primaire, en considérant qu'un problème de modélisation est un problème ouvert, à plusieurs étapes et complexe, en lien avec la réalité, et utilisant les mathématiques pour sa résolution. Conformément au cycle de modélisation évoqué précédemment, il s'agit donc de promouvoir dans les activités des élèves les activités de construction d'un modèle mathématique, de résolution du problème du modèle mathématique, d'interprétation de la solution mathématique, et de validation de la solution réelle du problème réel, avec comme activités transversales des activités de communication. Les programmes français de l'école primaire ne placent pas la résolution de problèmes complexes ou à plusieurs étapes comme une compétence exigible dès le CP, ce qui signifie que les compétences travaillées sont d'abord des compétences fréquentées et qu'elles deviendront exigibles plus tard en fin de cycle 3. On garde également à l'esprit que l'objectif de maîtrise de la preuve mathématique se situe au collège, mais il paraît intéressant de le préparer dès l'école primaire, dans les activités des élèves, en différenciant les modèles mathématiques des modèles non mathématiques, les arguments mathématiques des arguments non mathématiques. Certains pensent que les activités transversales du type résolution de problèmes, modélisation ou démonstration n'ont pas à être des objets d'enseignements, même si elles sont présentes dans l'enseignement : le débat reste ouvert en l'absence de programmes scolaires explicites sur cette question.

Il n'y a pas d'objectif d'apprentissage d'une notion mathématique nouvelle, même si dans le problème du géant les élèves découvrent des situations de proportionnalité non encore étudiées en classe, et même si dans chaque vidéo, des notions mathématiques anciennes sont mobilisées et exercées, par exemple les problèmes multiplicatifs dans le bouchon, ou la lecture à la maternelle. Il est délicat d'évaluer l'atteinte de ces objectifs et un travail intéressant de formation serait de travailler sur des critères opérationnels d'évaluation comme suggérés dans (Cabassut, Villette, 2010). On peut observer dans la vidéo sur le bouchon que des élèves font référence au problème du géant, travaillés précédemment dans l'année. Ces élèves ont donc bien repéré les caractéristiques de ce type de tâche et ont bien compris un contrat didactique implicite, avec la mise en jeu de compétences distinctes des compétences habituelles mises en œuvre par exemple dans des situations d'application directe de connaissances.

2 La distinction entre fait et hypothèse à travers l'activité de l'élève

Commençons par préciser que les choix de terminologie sont toujours délicats car suivant le " monde ", mathématique ou réel, le même mot peut avoir des sens différents. D'abord le mot " fait " est plutôt relié à la réalité, à une action ou un état réalisés. Par exemple sur la photo l'homme à l'avant mesure environ 7 cm. Ou encore, dans la tâche de la file d'attente, la file d'attente a 20 m de longueur. On pourrait définir un fait comme une donnée imposée par la situation initiale, et qui n'est pas contestable, c'est-à-dire qui est considérée comme vraie par tous. On voit qu'on peut pinailler sur cette définition, en remarquant que ce qui n'est pas contestable dans une première approche, peut le devenir après une réflexion plus approfondie, ou encore qu'il faudrait définir la notion de vérité, que ce qui s'impose à un professeur ne s'impose pas toujours à un élève et réciproquement.

On appelle hypothèse une donnée sur la situation initiale, qu'on suppose vraie, sans que cette vérité s'impose incontestablement. Par exemple, dans la situation du géant, une hypothèse est qu'un géant est un agrandissement d'un homme, ou encore que dans l'ensemble des hommes, la proportion d'un pied par rapport à la taille est approximativement constante. Dans la tâche du bouchon, le nombre de voies de l'autoroute peut constituer une hypothèse, ou la répartition des camions par rapport aux voitures. Des élèves font l'hypothèse de trois voies de circulation. Il n'y a pas validation de cette hypothèse si ce n'est par recours à des témoignages (souvenirs des élèves ayant parcouru l'autoroute). On aurait pu valider en utilisant un logiciel du type Googlemaps qui permet de visualiser des photographies aériennes de tronçons d'autoroute. Ce qui est typique des activités des élèves en situations de modélisation, c'est qu'ils doivent trouver les données manquantes en développant des procédures qui ne sont pas de type mathématique (mais plutôt du type de celles des sciences expérimentales) ou en posant des hypothèses (qui sont la plupart du temps validées par des procédures non mathématiques). Dans les formations ou débats avec des enseignants ou des mathématiciens, l'ouverture de la situation quant aux données déstabilise : on qualifiera souvent ces situations de modélisation de mal posées ou ne relevant pas de problèmes mathématiques, pour lesquels certains considèrent que toutes les données doivent être précisées tout comme les questions. Dans les activités des élèves observées dans la vidéo, une difficulté récurrente est relative à la collecte des données. La plupart du temps la validation de la collecte est pragmatique : les faits rassemblés ou les hypothèses posées sont bonnes puisqu'elles permettent d'avancer dans la résolution du problème. C'est le cas pour le choix du nombre de voies sur l'autoroute, ou encore sur le fait que sur une des voies il n'y a que des camions et sur les autres des voitures, ou encore sur la longueur d'un camion ou d'une voiture. Il faut donc apprendre à valider les données, souvent par des arguments et des procédures extra-mathématiques relevant essentiellement des validations expérimentales ou par débat.

IV - CONCLUSION

Pour la création et la diffusion de ressources vidéos centrées sur l'activité de l'élève

L'atelier a montré que les participants étaient très centrés sur l'analyse de l'activité de l'enseignant dans les extraits vidéos utilisés. Pour justifier cette difficulté à analyser l'activité de l'élève, il a été remarqué que les ressources proposées dans l'atelier présentent un montage d'extraits de séances, permettant d'avoir un aperçu global d'une séance, en privilégiant les moments productifs des élèves et en centrant souvent sur l'activité de l'enseignant. Il manque donc, pour la formation, des vidéos qui permettent de suivre la genèse des procédures des groupes d'élèves. Avec le montage des extraits de leur travail, il manque le déroulement complet d'une idée, de sa naissance à sa mise en œuvre. Il serait donc intéressant de collecter ou de créer des ressources disponibles à tous[5] dont la fonction principale serait d'observer et d'analyser l'activité de l'élève.

Pour une formation à des cadres théoriques et méthodologiques partagés pour analyser l'activité de l'élève

Les participants devaient partager des critères de description et d'analyse de l'activité de l'élève, en précisant les fonctions de l'activité, la structure de l'activité, les prescriptions, les initiatives, les aides, les difficultés, les obstacles, les erreurs. Ils devaient préciser des variables de l'activité de l'élève : contenu mathématique, scénario global, tâches précises, formes de travail, accompagnements en classe. Il a été difficile de trouver des éléments communs de description de cette activité. Ceci montre le besoin de formation à l'analyse de cette activité. Les cadres généraux de la théorie anthropologique du didactique, de la théorie des situations didactiques ou de la double approche, mentionnés par (Robert 2004) ou (Roditi, 2006), pourraient être utilisés pour cette formation. Les productions récentes des colloques de la

[5] Une autre difficulté est l'accès restreint de certaines ressources, comme par exemple les ressources vidéos qui ne sont disponibles que dans l'intranet d'une université, ce qui limite l'accès aux membres de cette université. Cette restriction s'explique par la volonté des familles d'élèves de protéger l'image de leurs enfants.

CORFEM[6] et COPIRELEM[7], et du symposium CADIVAM[8] seront à étudier et à adapter éventuellement à l'enseignement primaire pour proposer cette formation à l'analyse de l'activité de l'élève.

Éléments génériques de l'activité de l'élève

Les activités d'élèves observées sont illustrées dans trois modalités de travail : individuelle, en groupe, et en collectif. On peut y observer des élèves dynamiques et productifs. Sans l'intervention de l'enseignant, l'auto-validation peut apparaître : élève annulant sa production en barrant ce qu'il a inscrit sur sa feuille de papier, position contestée ou défendue en groupe. Dans ces cas, du fait de la non intervention de l'enseignant, certains arguments ne sont pas suffisamment explicites et il est difficile de les reconstituer. Lorsque l'enseignant intervient dans l'activité de l'élève, il est difficile de limiter son intervention à une régulation du débat ou à une demande d'explicitation d'arguments, qui laisserait la dévolution du problème aux élèves. Il peut parfois paraître nécessaire à l'enseignant de réorienter ou d'accélérer l'activité des élèves pour respecter notamment les contraintes de temps qu'il s'est fixées, ou de maintien de la participation et de l'attention des élèves. Il serait intéressant, pour la formation, de pouvoir illustrer ces différents moments, qu'ils soient positifs ou négatifs pour le déroulement de l'activité de l'élève, afin d'étayer les formations à la préparation, au déroulement et à l'évaluation de l'activité de l'élève. On revient au besoin en ressources vidéos spécifiques à une formation à l'analyse et au développement de l'activité de l'élève.

Éléments spécifiques à la modélisation

Les activités d'élèves doivent gérer les validations extra-mathématiques inhérentes au cycle de modélisation. La double transposition de la validation mathématique et de la validation extra-mathématique (décrite dans Cabassut - 2009) devient donc un enjeu de formation : préparer des scénarios d'activités d'élèves intégrant cette double transposition, la réguler lors du déroulement de l'activité et l'évaluer. D'autres éléments qui conditionnent l'activité de modélisation de l'élève doivent être développés : l'ouverture de l'activité (données, questions, procédures), le lien avec la réalité, la familiarité avec le contexte de la tâche, la complexité de la tâche, et la disponibilité de modèles mathématiques qui permettront de décomposer la tâche. À l'instar du projet de formation LEMA (www.lema-project.org), il faut donc développer et évaluer des formations à la modélisation qui prennent en compte ces éléments favorisant l'activité de modélisation de l'élève.

Le prochain colloque de la Copirelem pourrait être l'occasion d'étudier ces formations au développement de l'activité de l'élève et leurs évaluations.

V - BIBLIOGRAPHIE

CABASSUT R. (2007) Exemples de modélisation à l'école primaire allemande : quels enjeux pour la formation des maîtres? in *Actes du XXXIII^{ème} Colloque Copirelem*, IREM de Paris 7.

CABASSUT R. (2008) Problèmes dans un exemple de formation continue à la modélisation, in *Actes du 35e Colloque Copirelem*. IREM de Bordeaux.

[6] Le colloque de la CORFEM s'est réuni à Besançon les 16 et 17 juin 2011 sur le thème « L'enseignement des grandeurs au collège et au lycée. Quelle utilisation des vidéos dans la formation initiale ou continue ? » http://www.fcomte.iufm.fr/conferences_colloques_seminaires/colloque_corfem_2011/annonce_corfem_besancon_2011.pdf

[7] Le colloque de la COPIRELEM s'est réuni à Dijon des 22 au 24 juin 2011 sur le thème " Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants" http://www.copirelem.free.fr/presentation.php

[8] Le symposium CADIVAM s'est réuni à Lausanne du 23 au 25 juin 2011 sur le thème "Filmer en classe, et après ? La vidéo dans les leçons de maths et de sciences" http://www.hepl.ch/fileadmin/promcom/images/Actualites/cadivam/HEP_CADIVAM_LIVRET_DEF_TC_DEF.pdf

CABASSUT R.(2009) Articulation entre réel et mathématiques : spécificité et généricité de la modélisation, in *Actes du colloque Didirem " Approches plurielles en didactique des mathématiques Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ? "* Université Paris 7.

CABASSUT R. VILLETTE J.-P. (2010) Evaluation en formation de professeurs sur l'enseignement de la modélisation, in *Actes du 37ème Colloque Copirelem.* IREM de Montpellier.

KUZNIAK A. & al. (2008) Du monde réel au monde mathématique – un parcours bibliographique et didactique. *Cahier Didirem n°58.* IREM de Paris 7.

PISA (2006) *Assessing scientific, Reading and mathematical literacy: a framework for PISA.*OECD.

ROBERT A. (2003) *Analyses de vidéo de séances de classe : des tâches prescrites aux activités de l'élèves, en passant par les pratiques des enseignants de mathématiques (second degré).* Cahiers Bleus n°2. IREM de Paris 7.

ROBERT A. (2004) Une analyse de séance de mathématiques au collège, à partir d'une vidéo filmée en classe. La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants. Perspectives en formation d'enseignants. *Petit x* 65, 52-79. IREM de Grenoble.

RODITI E. (2006) Les analyses de vidéos : outils de recherche et moyens de formation, in *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM*, IREM de Strasbourg.

SITUATIONS DE « RÉFÉRENCE » POUR ENSEIGNER LE NUMÉRIQUE AU CYCLE 2

Laetitia BUENO-RAVEL
MCF, IUFM DE BRETAGNE-UBO
CREAD – IREM de Rennes
Laetitia.bueno-ravel@bretagne.iufm.fr

Gabriel LE POCHE
PIUFM, IUFM DE BRETAGNE-UBO
IREM de Rennes
Gabriel.le-poche@bretagne.iufm.fr

Résumé

L'atelier s'appuie sur le travail d'un groupe de l'IREM de Rennes dont l'objectif est de construire une ingénierie (Artigue, 1990 et 2011) d'enseignement du numérique au cycle 2. L'ensemble des dix situations (reprises d'anciens travaux de l'IREM, de l'INRP, ou de l'IUFM de Bretagne) constituant cette ingénierie ont été retravaillées afin d'être mises en œuvre selon un dispositif original.
Deux situations devaient être soumises à l'analyse des participants (appui sur des travaux d'élèves ou d'extraits vidéos de séances) : « La Marionnette », portant sur la perception par paquets des éléments d'une collection en GS et en CP (Le Poche, 1993 ; Hili et Ruellan-Le-Coat, 2009) et « Règles et réglettes », portant sur des procédures de calculs de sommes ou de différences en CE1 (Oyallon, 1991). Seule la seconde a fait l'objet d'une analyse.
Ces analyses et les échanges qui suivent s'attachent à questionner principalement les points suivants : l'adéquation entre le dispositif choisi et les objectifs de différenciation affichés ; le fait que ces situations puissent être qualifiées de situations de« référence » ; etc. Nous ouvrons la discussion sur les modalités de formation continue qu'il conviendrait de mettre en œuvre si l'on souhaite diffuser de telles situations.

Nous débutons ce texte par une brève présentation de l'ensemble des dix situations de « référence » que nous avons retenues car nous permettant d'aborder les aspects essentiels de l'enseignement du numérique au cycle 2. Nous revenons à cette occasion sur les raisons de ce choix de situations, ce point ayant été discuté lors de l'atelier. Nous exposons ensuite la situation « Règles et réglettes », appelée « Jeu des règles et des bracelets » par Oyallon (1991), qui a servi de base au travail dans l'atelier. Nous commençons par donner des éléments d'analyse de cette situation travaillant un des aspects de la soustraction. Nous montrons ensuite comment nos conceptions sur l'enseignement–apprentissage (Brousseau, 1998) des mathématiques, notamment au sujet de la différenciation et du rôle de l'enseignant, nous ont conduits à adopter un dispositif de mise en œuvre original de cette situation ainsi que de l'ensemble des dix situations de « référence ». Le travail de l'atelier s'est appuyé sur la description du « Jeu des règles et des bracelets » d'Oyallon (1991), des extraits vidéos de la situation « Règles et réglettes » expérimentée en 2010-2011 dans une classe de CE1 ainsi que les travaux des élèves de la classe filmée.

Le texte ci-dessous prend en compte les réactions des participants à l'atelier. Nous remercions d'ailleurs particulièrement les deux rapporteurs de l'atelier pour leur travail enrichissant.

I - LES DIX SITUATIONS DITES DE « RÉFÉRENCE »

Le groupe « Situations de référence pour enseigner le numérique en cycle 2 » a été créé en 2009-2010 à l'IREM de Rennes avec un double objectif de formation et de recherche. Il s'agit d'examiner les potentialités de dix situations dites de « référence » pour favoriser l'enseignement–apprentissage du numérique en cycle 2, afin d'aboutir à une ingénierie (Artigue 1990, 2011) pour l'enseignement du numérique en cycle 2 et à une version de cette ingénierie « communicable » en formation continue des professeurs des écoles. Ces dix situations faisaient déjà l'objet d'une diffusion en formation initiale et continue par l'un des membres du groupe IREM. Nous avons voulu, par le travail du groupe, les décrire et les analyser finement tout en les expérimentant dans des classes ordinaires pour voir si ces situations méritaient d'être portées en formation et, si cela est le cas, produire des ressources pour accompagner ces formations.

Les dix situations sont les suivantes : S1 : Voitures et Garages ; S2 : Le TGV ; S3 : La marionnette ; S4 : Carrelage ; S5 : Trésor ; S6 : Calculette ; S7 : Cartoucherie ; S8 : La boîte ; S9 : Règles et réglettes et S10 : Grilles. Une présentation des objectifs de ces dix situations, de la programmation ainsi que de leur origine est donnée en annexe 1[1].

1 Comment ces situations ont-elles été choisies ?

Ces dix situations ne sont pas des situations nouvelles. Certaines sont anciennes et tirées de travaux de l'IREM de Bordeaux, d'ERMEL ou de la COPIRELEM. D'autres n'ont pas été publiées mais diffusent parfois en formation. Ce choix de situations est bien évidemment discutable. Comme cela a été souligné lors de l'atelier, il peut donner l'effet d'un patchwork plus ou moins cohérent. En effet, dans les publications de chacune de nos trois sources principales (IREM de Bordeaux, Équipe ERMEL, COPIRELEM), on trouve un ensemble de situations permettant de travailler les objectifs de l'annexe 1. Mais le choix de ces dix situations a été fait en liaison avec le dispositif de mise en œuvre particulier[2] que nous souhaitions expérimenter. Ces dix situations ont été choisies car elles sont toutes des situations de construction de connaissance auto-validantes. Le fait que ces situations soient auto-validantes s'inscrit dans une position didactique assumée sur le rôle de l'enseignant en classe : selon nous, lors de situations de construction de connaissance, l'enseignant doit être disponible pour les élèves ayant le plus besoin de soutien, les autres travaillant en autonomie, sous son contrôle. Ainsi, pour les dix objectifs retenus, nous avons choisi les situations qui s'adaptaient le mieux à notre dispositif.

2 Pourquoi ces situations sont-elles dites de « référence » ?

Nous avons choisi le terme de « référence » pour qualifier ces situations car il nous semble qu'il permet de désigner le rôle que peuvent avoir ces situations pour l'enseignant ainsi que pour les élèves.

Pour l'enseignant, ces dix situations sont dites de « référence » car en mettant en place ces dix situations, il traite la quasi-totalité des connaissances à construire en numérique en cycle 2.

Pour les élèves, ces dix situations sont dites de « référence » car ce sont celles auxquelles on se réfère en classe, pendant l'ensemble du cycle 2, pour la quasi-totalité des connaissances à construire en numérique. Ces situations ont également un statut particulier pour les élèves car, comme nous le verrons lors de la description du dispositif, ces derniers possèdent pour chacune d'elles un dossier spécifique.

[1] La programmation de ces situations est en cours de travail et leurs noms ne sont pas encore fixés, notamment pour les situations non publiées.

[2] Pour une description détaillée du dispositif, voir partie II.

Pour les formateurs et chercheurs en didactique des mathématiques, l'analyse des dix situations de « référence » montre que celles-ci ont un fort potentiel adidactique (Brousseau, 1998). Nous préférons cependant éviter ce terme : « adidactique » en formation car il véhicule malheureusement souvent beaucoup d'idées fausses sur le rôle de l'enseignant lors de la gestion de ce type de situations en classe.

Nous avions initialement prévu de présenter deux situations pendant l'atelier : « La marionnette » et « Règles et réglettes ». Mais du fait des débats nourris suite à la présentation et à l'analyse de la situation « Règles et réglettes » et du dispositif de mise en œuvre, la situation « La marionnette » n'a pas été analysée. Nous renvoyons donc les lecteurs aux publications de Le Poche (1993) et de Hili et Ruellan-Le-Coat (2009) pour une analyse de cette situation et à la future brochure du groupe IREM en cours de rédaction pour une description de mise en œuvre de cette situation selon le dispositif travaillé par le groupe.

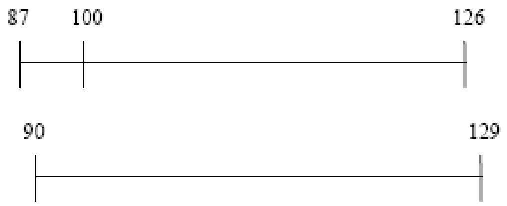
Nous allons maintenant faire une brève analyse de la situation « Règles et réglettes » avant d'exemplifier le dispositif sur une mise en œuvre de cette situation dans une classe de CE1 en 2010-2011.

II - LA SITUATION « RÈGLES ET RÉGLETTES »

La situation « Règles et réglettes » a été construite à partir de la situation « Jeu des règles et des bracelets » décrite par J-L. Oyallon (1991). Il s'agit, comme le souligne Oyallon, de travailler sur « l'aspect écart » de la soustraction. Cet aspect est présenté dans le contexte des nombres comme repères. Par ailleurs, « le jeu décrit ne nécessite pas la production d'une écriture (additive ou soustractive) de la part des joueurs. Il faudra transformer la situation de base (communication, abandon de la manipulation) pour nécessiter des écritures additives ou soustractives des nombres en jeu » (ibid., p. 34).

L'objectif est de faire acquérir aux élèves une procédure de calcul des écarts ; ici les « petits sauts ». Cette situation permet également, en prolongement, de travailler sur l'invariance de l'écart par translation. Nous faisons l'hypothèse que ces procédures de calcul pensé ne peuvent apparaître chez les élèves sans enseignement.

- le calcul de 126 – 87 peut s'effectuer, à l'aide d'un support écrit :



- en **calculant, à l'aide de « petits sauts », l'écart** entre les 2 repères 87 et 126 : 13 + 26 = 39

- en **effectuant une translation de l'écart** qui rend le calcul plus aisé : écart entre 129 et 90 soit 39.

Fig. 1 : Deux procédures de calcul pensé de 126 – 87 (Le Poche, 2010, p. 44)

Le matériel avec lequel les élèves travaillent est constitué d'une grande règle graduée, appelée règle, et d'une petite règle graduée, appelée réglette.

Sur la règle, se trouvent deux élastiques déplaçables. Pour reprendre l'exemple ci-dessus, pour l'écart entre 126 et 87, un élastique est placé sur 87 et l'autre sur 126. La règle sert donc à matérialiser l'écart.

Sur la réglette, il y a également deux élastiques mais l'un est fixé sur la graduation « 0 », le second est déplaçable. Dans le cas du calcul de l'écart entre 126 et 87, le second élastique de la réglette doit être mis sur la graduation « 39 ». Ensuite, les deux règles sont rapprochées et les écarts matérialisés sur les deux règles doivent coïncider. La réglette permet donc de mesurer l'écart marqué sur la règle et de valider le calcul de cet écart.

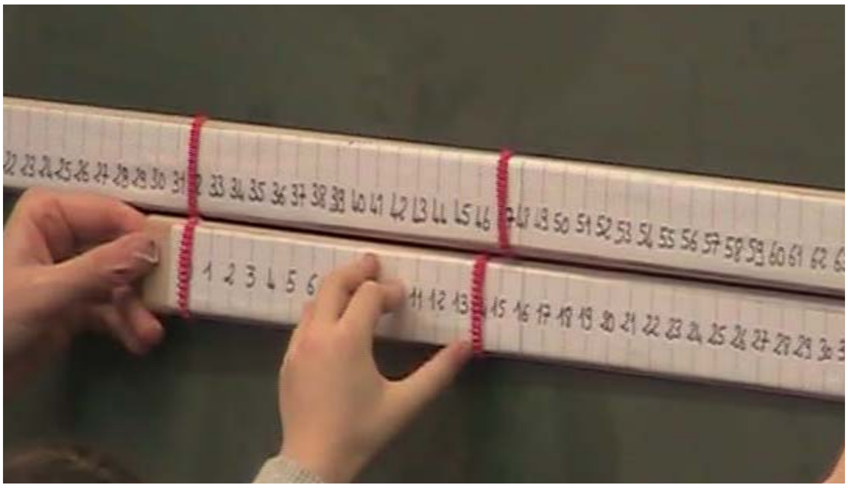


Fig. 2 : Exemple de validation au tableau avec la réglette du calcul d'un écart (ici, écart entre 32 et 47 ; écart trouvé par l'élève : 14 ; les élastiques de la règle et de la réglette ne coïncident pas)

Le jeu initial décrit par Oyallon (1991) se décline en quatre situations qui sont présentées en annexe 2. Dans la suite du texte, nous centrerons nos analyses sur la reprise par le groupe IREM de la situation 1.

1 Éléments d'analyse – Procédures d'élèves

Les participants à l'atelier devaient trouver des procédures élève pour la situation 1 (voir annexe 2) : il s'agit de déterminer l'écart entre 27 et 52.

Cinq procédures ont été proposées :

Procédure 1 : Essai-ajustement. Les élèves positionnent visuellement l'élastique mobile sur la réglette puis le déplacent pour faire correspondre les élastiques de la règle et ceux de la réglette.

Procédure 2 : Comptage de un en un des graduations entre 27 et 52 sur la règle. Soit l'élastique mobile de la réglette est déplacé progressivement (au fil du comptage), soit il est positionné sur la réglette à la fin du comptage.

Procédure 3 : Les élèves partent du « 0 » de la réglette et comptent (en déplaçant l'élastique) de la façon suivante : 0-27, 1-28, 2-29, …, 15-52

Procédure 4 : Procédure mixte de comptage et calcul.

Soit avec passage à la dizaine supérieure : $27 \xrightarrow{+3} 30 \xrightarrow{+10} 40 \xrightarrow{+10} 50 \xrightarrow{+2} 52$

Soit en ajoutant 10 puis en complétant de 47 à 52 : $27 \xrightarrow{+10} 37 \xrightarrow{+10} 47 \xrightarrow{+5} 52$

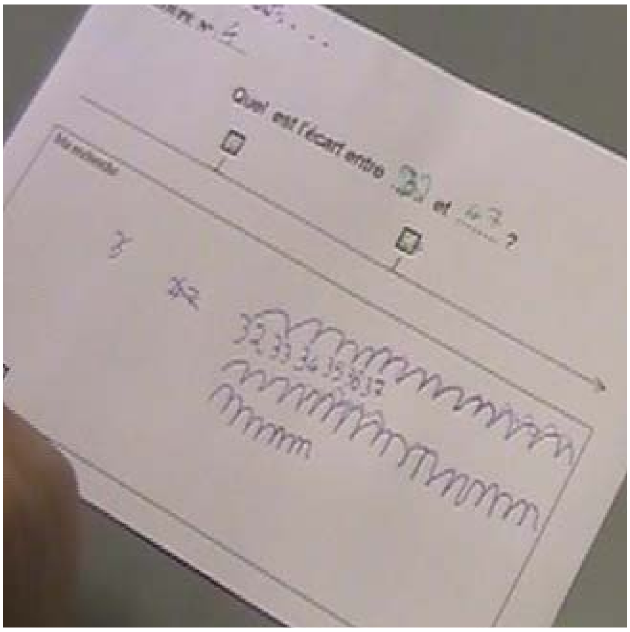
Procédure 5 : Procédure plus experte débouchant sur l'addition à trou : 27 + ? = 52. Que faut-il rajouter à 27 pour arriver à 52 ?

Il faut tout d'abord souligner que cette situation n'a pas été construite pour introduire une technique opératoire de la soustraction. La procédure experte attendue est la procédure 4 que l'on nommera par la suite procédure par « petits sauts ».

Les procédures 1, 2 et 3 ont permis d'entamer la discussion sur le rôle du matériel dans cette situation. La description du jeu produite par Oyallon (1991) ne précise pas explicitement à quel moment du jeu les joueurs ont accès aux règles et réglettes, même si l'extrait ci-dessous laisse supposer que le matériel n'est utilisé que lors de la validation du résultat :

> « Dans le jeu, l'enfant est autonome et peut faire évoluer ses procédures puisque la validation de son résultat est immédiate (situation adidactique, situation d'action, situation « fondamentale » pour la notion d'écart). » (Ibid, p. 34)

Dans la situation retravaillée par le groupe de l'IREM de Rennes, la consigne est écrite au tableau par l'enseignant et les élèves reportent les nombres proposés sur une fiche de recherche individuelle (voir fig. 3 ci-dessous). Ils ne doivent pas manipuler les règles et les réglettes avant d'avoir un résultat à proposer. Ils écrivent le résultat auquel ils sont arrivés sur leur fiche puis ils peuvent manipuler le matériel. Ils inscrivent alors les deux nombres proposés avec les élastiques mobiles sur la règle. Puis ils inscrivent leur résultat sur la réglette en déplaçant l'élastique mobile. Enfin, ils mettent bord à bord la règle et la réglette pour vérifier si leur résultat correspond à l'écart entre les deux nombres proposés.



Cette photo montre une fiche de recherche individuelle d'un élève ayant à trouver l'écart entre 32 et 47. Il fait des petits sauts de un à partir de 32 matérialisés par des petits ponts et inscrit à l'extrémité droite des ponts le nombre atteint. Il arrête d'écrire les nombres à 37 mais dessine 45 petits ponts.

Fig. 3 : photo d'une fiche de recherche individuelle d'élève.

Le fait de ne donner accès au matériel que pour la validation du résultat bloque les procédures 1, 2 et 3. Les élèves peuvent cependant utiliser des procédures utilisant les mêmes connaissances en dessinant les graduations sur leur fiche de recherche individuelle (la procédure 2 revient à faire des petits sauts de un). Cependant, nous faisons l'hypothèse que ces procédures se révèlent vite coûteuses et sources d'erreur lorsque l'écart à calculer est grand. L'analyse des travaux d'élèves distribués aux participants à l'atelier a confirmé cette hypothèse (voir notamment Fig. 3, ci-dessus). Après deux séances, l'ensemble des élèves utilise la procédure 4, avec quasi unanimement le passage par la dizaine supérieure comme le montre la photo ci-dessous et quelques élèves font parfois des sauts de 20 ou plus.

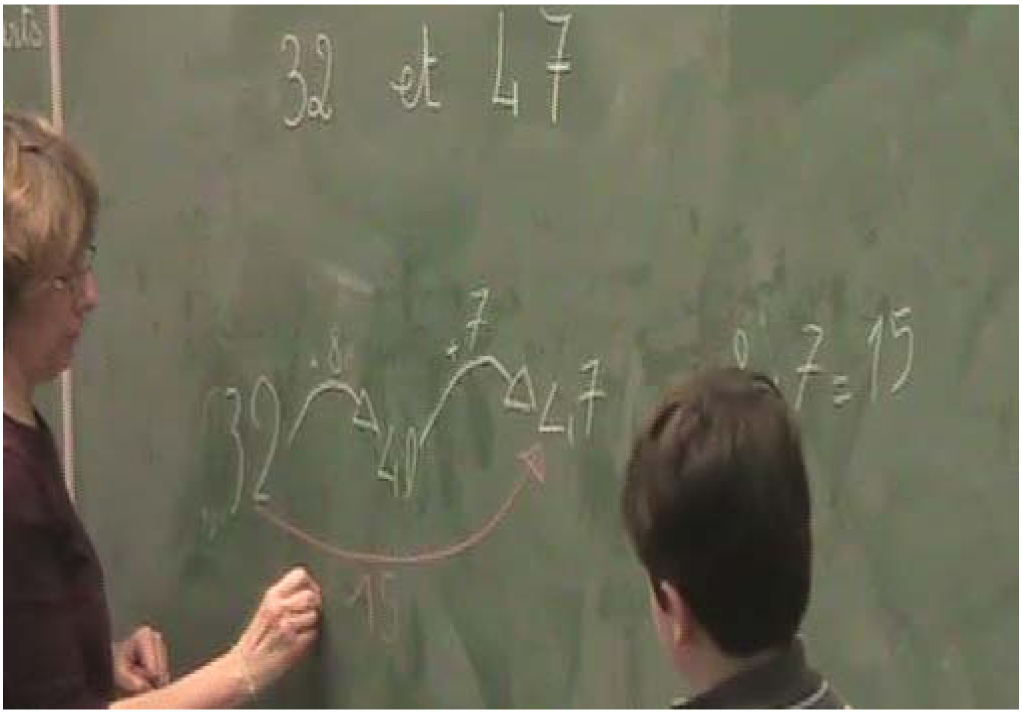


Fig. 4. : La procédure 4 avec passage à la dizaine supérieure faite au tableau par un élève, aidé de l'enseignante, pour le calcul de l'écart entre 32 et 47.

2 Le dispositif de mise en œuvre

Nous allons maintenant détailler le dispositif particulier que nous adoptons pour l'ensemble des dix situations. Cette présentation prend appui sur la situation « Règles et réglettes » expérimentée dans une classe de CE1 en 2010-2011 ; la séquence est brièvement décrite en annexe 3. Nous rappelons que le dispositif choisi nous permet de faire en sorte que lors de situations de construction de connaissance, l'enseignant soit disponible pour les élèves ayant le plus besoin de soutien, les autres travaillant en autonomie, sous son contrôle.

Les dix situations proposées sont à peu près toutes mises en œuvre lors de séquences de huit séances. Les séquences sont organisées schématiquement en trois phases : une phase d'approche, une phase de construction de connaissance et une phase de consolidation qui occupe la moitié du temps consacré à la séquence.

2.1 Phase d'approche

Lors de cette phase, l'enseignant est amené à faire passer aux élèves une évaluation diagnostique avec obstacle afin de déterminer d'une part, quels élèves constitueront le groupe de soutien qu'il encadrera et d'autre part, les rôles à attribuer aux élèves qui seront dans les groupes travaillant en relative autonomie.

Dans le cas de la situation « Règles et réglettes », l'évaluation diagnostique consiste à demander aux élèves de trouver, par exemple, l'écart entre 20 et 26, puis entre 42 et 57 et enfin entre 36 et 72. Les réponses des élèves permettent à l'enseignant de voir si tous les élèves comprennent ce qu'est un écart et quelles sont leurs procédures. L'enseignante a ainsi pu faire son groupe de soutien et prévoir les rôles (manipulateur, secrétaire et vérificateur) des élèves.

Cette phase peut également être l'occasion d'un temps de familiarisation avec le matériel qui va être utilisé dans la situation si cela est nécessaire.

Il est important de souligner que certaines de ces situations gagnent à être anticipées pour favoriser la compréhension des élèves.

Par exemple, dans le cas de la situation « Règles et réglettes », l'enseignante qui a expérimenté cette situation dans sa classe de CE1, a spécifiquement travaillé ce que signifie « être écarté », qu'il y a des « grands écarts » et des « petits écarts ». Elle avait demandé aux élèves de trouver des nombres qui ont pour écart 2, ou 5, etc. Par ailleurs, elle avait fait un travail important sur les compléments à dix en amont de la situation « Règles et réglettes » pour que les élèves puissent mettre en œuvre la procédure 4. Pendant la situation « Règles et réglettes », « la maison du dix » (voir ci-contre) était affichée dans la classe.

Fig. 5 : Affichage de la « maison du 10 » dans la classe de CE1 observée

2.2 Phase de construction de connaissance

Avant d'expliciter le contenu de cette phase, il faut préciser que lors des temps de construction de connaissance, les élèves travaillent par groupe[3] (en binôme en CP et en trinôme en CE1). Ils ont également un ensemble de fiches sur lesquelles ils auront à travailler : une fiche blanche (par exemple) de recherche individuelle, une fiche verte de réponse du groupe et un dossier ayant pour titre le nom de la situation dans lequel ils placeront leurs fiches de recherche individuelle ainsi que les synthèses et leurs fiches d'exercices d'entraînement.

La phase de construction de connaissance est organisée en trois temps : un temps d'appropriation de la tâche, un temps d'apprentissage et un temps de synthèse.

L'appropriation de la tâche est d'abord vécue de manière collective puis individuelle. Lors de **l'appropriation collective**, un groupe d'élèves réalise la tâche, sans obstacle, devant l'ensemble de la classe. Ils remplissent exactement les mêmes fiches que celles qu'ils auront à remplir lors de la phase d'apprentissage, ils vivent toutes les étapes de l'activité, en respectant les rôles prévus tout en utilisant un matériel grand format pour que les élèves observateurs puissent voir. Il s'agit d'amorcer la dévolution du problème aux élèves et de faire en sorte qu'ils s'approprient le dispositif et le matériel pour que cela ne fasse pas obstacle lors de la phase d'apprentissage.

Dans le cas de la situation « Règles et réglettes », la consigne donnée était de trouver l'écart entre 10 et 17. Ce choix de valeurs numériques n'est pas un obstacle pour les élèves. Trois d'entre eux sont allés résoudre ce problème au tableau devant les autres élèves. Ils ont chacun rempli leur fiche de recherche individuelle (en inscrivant la date, leur prénom, leur recherche, leur réponse), puis ils ont discuté pour se mettre d'accord sur le résultat au tableau, devant les autres élèves. Le secrétaire a rempli la fiche verte du groupe. Ensuite le manipulateur a placé les élastiques mobiles de la règle grand format (voir fig.2 pour le matériel collectif) sur 10 et 17 puis l'élastique mobile de la réglette grand format sur 7 puis a rapproché les deux règles pour voir si les élastiques coïncidaient. Cette manipulation s'est faite sous l'œil du vérificateur qui doit vérifier si les élastiques ont été bien positionnés. Ensuite, ils constatent à trois que leur résultat est correct et le secrétaire marque sur la fiche du groupe qu'ils ont trouvé le bon résultat.

L'appropriation collective est suivie d'une **appropriation individuelle**. Il s'agit là encore de faire vivre aux élèves la tâche sans obstacle mais contrairement à l'appropriation collective, tous les élèves vivent la situation lors de l'appropriation individuelle. Cela permet de continuer la dévolution du problème et de s'assurer que tous les élèves se repèrent bien dans les différents temps de l'activité, comprennent leur

[3] La modalité de travail est un peu différente en maternelle (cf. situations 1 et 2). La phase de construction de connaissance de ces situations se fait généralement en atelier principal dirigé par l'enseignant.

rôle et savent quand remplir les différentes fiches. La classe est alors organisée en petits groupes qui seront ceux de la phase d'apprentissage et l'enseignant reste principalement avec le groupe de soutien.

Suite à l'appropriation collective puis individuelle de la tâche, les élèves sont confrontés à la même tâche mais avec obstacle : il s'agit de la **phase d'apprentissage**. Il est important que la tâche proposée aux élèves soit identique à celles qu'ils ont vues ou vécues lors de l'appropriation. Par un jeu sur les variables de la situation, ils sont confrontés à l'obstacle et doivent faire évoluer leurs procédures initiales pour pouvoir répondre à la question posée. Les valeurs des variables peuvent être différentes d'un groupe à l'autre, en fonction des résultats des élèves à l'évaluation diagnostique. Par exemple, les élèves du groupe de soutien ont souvent des nombres appartenant à un domaine numérique moins grand que le reste de la classe mais ils réalisent la même tâche, ce qui peut permettre à l'enseignant de prendre appui sur leur travail lors des mises en commun ou des synthèses. Une mise en commun est organisée au tableau ; l'enseignant ne fait pas passer tous les groupes, il favorise ceux ayant trouvé le bon résultat et les procédures permettant de faire évoluer celles des élèves n'ayant pas réussi à résoudre le problème.

Dans le cas de la situation « Règles et réglettes », les variables pertinentes à modifier sont la taille de l'écart (au dessus ou au dessous de 10) et le choix des deux nombres dont il faut trouver l'écart (ont-ils le même nombre de dizaines ? le chiffre des unités du nombre a est-il inférieur ou supérieur à celui du nombre b ?). Dans la classe observée, l'enseignante a choisi de demander aux élèves quel est l'écart entre 32 et 47. Parmi les 6 groupes de 3 élèves travaillant en autonomie, un groupe n'a pas réussi à trouver 15 comme écart. Dans les autres groupes en autonomie, les élèves n'ayant pas trouvé le résultat ont été aidés par les autres. Le groupe en soutien a réussi à trouver le résultat avec un étayage fort de la part de l'enseignante. Lors de mise en commun du premier temps d'apprentissage, l'enseignante a fait passer deux élèves au tableau. Un des élèves a expliqué sa procédure (procédure 4 avec passage à la dizaine supérieure ; voir fig. 4) puis un second élève est venu présenter la sienne (procédure 4 avec ajout de 10).

Chaque temps d'apprentissage se termine par une **synthèse** qui s'appuie sur le travail fait en classe. Cette synthèse est menée soit à la suite du temps d'apprentissage, soit en différé afin de sélectionner les travaux significatifs. Elle est écrite ou complétée par les élèves et collée dans le dossier de la situation.

Dans le cas de la situation « Règles et réglettes », la synthèse faite après le premier temps d'apprentissage reprend la procédure que l'on voit écrite au tableau dans la fig. 4 ci-dessus. Les deux procédures expliquées au tableau ont fait l'objet d'un affichage dans la classe et sont restées affichées lors du second temps d'apprentissage pour que les élèves qui en avaient besoin puissent s'y référer et s'en inspirer pendant leur recherche individuelle.

La phase de construction de connaissance ne se limite pas à un temps d'appropriation, suivi d'un temps d'apprentissage puis enfin d'un temps de synthèse. En effet, après la première synthèse, la situation est reprise, généralement avec une appropriation individuelle, etc. Si l'enseignant s'aperçoit que cela est nécessaire, il refait également une appropriation collective. Plusieurs temps d'apprentissage (et donc plusieurs synthèses) sont nécessaires pour arriver à ce que la plupart des élèves réussissent la tâche avec obstacle.

2.3 Phase de consolidation

Cette phase occupe près de la moitié du temps consacré à la séquence portant sur une situation. Les élèves ont à faire des exercices d'entraînement sur les connaissances construites. Ils se détachent progressivement du matériel utilisé lors de la phase d'apprentissage. Enfin chaque séquence se termine par une institutionnalisation et une évaluation.

Dans le cas de la situation « Règles et réglettes », les élèves ont eu des écarts à calculer. Les règles et les réglettes étaient tout d'abord à disposition des élèves s'ils souhaitaient vérifier leurs résultats puis les règles et les réglettes n'ont plus été distribuées.

III - CONCLUSION

Pour conclure, nous souhaitons revenir sur deux points qui ont donné lieu à des échanges nourris lors de l'atelier : l'intérêt de la situation « Règles et réglettes » pour des classes de CE1 et l'intérêt du dispositif particulier décrit précédemment.

La situation « Règles et réglettes » a été diversement accueillie par les participants de l'atelier. En effet, certains trouvaient que cette situation n'avait pas sa place en cycle 2 car, à ce niveau, il faudrait favoriser l'aspect cardinal des nombres. Il a alors été précisé que les situations S4 « carrelage » et S4bis « carrelage groupé » (voir annexe 1) permettaient le travail indispensable sur cet aspect quantité du nombre en utilisant du matériel de type groupement.

Cette situation a été alors vue comme intéressante en cycle 3, avec les nombres décimaux. D'autres participants estimaient au contraire que cette situation avait plutôt sa place en fin de C.P. Nous pensons que cette situation a l'avantage de prendre en charge la construction d'une procédure de calcul pensé pour calculer des différences « les petits sauts », qui n'est pas toujours présentée dans les manuels de cycle 2 et qui nécessite une bonne compréhension de la numération décimale ainsi qu'une structuration de la droite numérique. Si ces procédures de calcul pensé ne sont pas enseignées, il y a peu de chances que les élèves les développent seuls.

Le dispositif a été plus favorablement reçu car il permet d'apporter des éléments de réponse à une demande forte des enseignants d'avoir une organisation pédagogique et des gestes professionnels favorisant la prise en compte de l'hétérogénéité des classes. Nous tenons ici à en rappeler les caractères essentiels.

Le fait que les dix situations proposées soient auto-validantes libère l'enseignant pour qu'il puisse faire avancer les élèves les plus fragiles à l'aide d'une conception plus transmissive des apprentissages.

La mise en œuvre proposée, qui débute par une phase d'approche, permet à l'enseignant de repérer, dès le départ, les élèves qui devront bénéficier de son étayage. Par ailleurs, le fait que les élèves dans le groupe de soutien travaillent sur la même tâche que le reste de la classe, leur permet de participer activement aux synthèses car l'enseignant sait de façon précise ce qu'ils ont collectivement vécu et quel a été son apport. C'est ainsi que les choix des supports faits lors de la gestion des mises en commun et des synthèses par l'enseignante qui avait mis en place la situation « règles et réglettes » dans sa classe ont été particulièrement appréciés.

Ce temps de mise en commun et de synthèse est une étape fondamentale dans le dispositif car c'est un temps collectif fort, après un long travail en autonomie, pendant lequel il s'agit pour l'enseignant de faire avancer l'apprentissage de tous les élèves. Pour gérer l'hétérogénéité de la classe et viser une plus grande efficacité, le choix est fait de ne s'appuyer que sur les procédures les plus proches des procédures expertes visées auxquelles l'ensemble des élèves doit parvenir en fin d'apprentissage. Au cours de ce moment, l'apport de l'enseignant n'est pas négligeable : il s'agit pour lui de s'appuyer sur des travaux d'élèves qui ont conduit à un bon résultat tout en les structurant davantage et en pointant l'essentiel. Ce moment de synthèse fait l'objet, comme nous l'avons dit, d'une trace écrite individuelle qui sert d'appui aux recherches futures et qui fait l'objet d'une reprise collective à la séance suivante.

Il reste maintenant au groupe à analyser comment diffuser ces situations et le dispositif associé auprès des enseignants. C'est un travail difficile car l'expérience montre que cela nécessite une longue fréquentation de ce type de dispositif afin d'en comprendre tous les enjeux pas toujours abordés au cours de la formation initiale. Faute de temps, ce point n'a pas été abordé au cours de l'atelier.

Le groupe compte s'appuyer sur des vidéos commentées qui mettront en évidence les moments les plus délicats comme par exemple : l'appropriation des tâches par chacun des élèves de la classe, le rôle particulier du maître en action auprès d'un groupe d'élèves ayant besoin de son apport et lors des moments de synthèse destinés à tous. Il espère pouvoir les présenter lors d'un prochain colloque.

IV - BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M. (1990). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques***, *9(3)***, 281-308.

ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vanderbrouck & F. Wozniak (Eds), *Actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

HILI, H. & RUELLAN-LE-COAT, J. (2009). « Freddy la grenouille », ou la notion de groupement en CP. *Grand N*, ***83***, 97-116.

LE POCHE, G. (1993). La marionnette. In Commission Inter-Irem Copirelem (Eds), *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, T2* (pp.77-82) IREM de Bordeaux.

LE POCHE, G. (2010). Débuter la numération. In J.-L. Durpaire et M, Mégard (Coord), *Le nombre au cycle 2, Ressources pour faire la classe* (pp.39-49), Scérén - CNDP-CRDP.

MARGOLINAS, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* ***12(1)***, 113-158.

OYALLON, J.-L. (1991). Jeu des règles et des bracelets. In Commission Inter-Irem Copirelem (Eds), *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques T1* (pp 33-36) IREM de Paris 7.

V - ANNEXE 1 - LES DIX SITUATIONS DITES DE « RÉFÉRENCE » POUR ENSEIGNER LE NUMÉRIQUE EN CYCLE 2

Les nombres comme outil			
S1	Nombre mémoire de la quantité	Voitures et Garages MS et GS (Périodes 1 et 2 en GS)	Nombre de voitures à chercher : supérieur à 6, collection non organisée, on peut aller jusqu'à 12. Source : IREM de Bordeaux
S2	Nombre mémoire de l'ordre (de la position)	Le TGV GS (Périodes 3 et 4)	Le train est une bande qui va jusqu'à 31 cases. On place un voyageur dans l'une des cases, autour de la 12ième position. Le train modèle est observable aussi longtemps que souhaité, à distance des trains des élèves. Puis l'élève va devant son train et doit placer un voyageur à la même place (Appropriation : mettre un objet sur la 2ième case) Source : IREM de Bordeaux
Comprendre l'écriture du nombre (Numération)			
S3	Passer d'une perception élément par élément à une perception par groupement	La marionnette GS (Période 5) CP pour signe « + » (Période 1)	Le signe « + » est introduit dans le codage des commandes. Source : publication Copirelem de G. Le Poche
S4	Aspect sémantique de la numération, matériel type groupement	Carrelage CP (Période 3)	Source : Équipe ERMEL, INRP
S5	Aspect sémantique de la numération, matériel type échange	Trésor CP (Période 3)	Il s'agit d'amener les élèves à différencier valeur et quantité.
S6	Aspect algorithmique de la numération	Calculette CP (Période 2)	Il s'agit de comprendre le procédé de fabrication de la suite des écritures chiffrées et en particulier, celui du successeur d'une écriture chiffrée quelconque. Cette suite est régulière, contrairement à la suite orale. On peut utiliser la calculatrice pour travailler sur ce procédé de fabrication.

Calculer (Transformer des désignations orales ou écrites cf. « 9 c'est 4 et 5 », « 2 et 2 » calcul à l'oral)			
S7	Calcul écrit additif (appui sur le 5 puis sur le 10)	Cartoucherie CP (Périodes 2 et 4)	Il s'agit d'apprendre à calculer, c'est-à-dire transformer des écritures symboliques, sans avoir recours aux représentations des quantités, en travaillant les décompositions et recompositions additives par rapport au nombre 5, puis au nombre 10. Ce que l'on souhaite, c'est arriver à des transformations d'écritures additives par ligne (1 transformation par ligne) et aboutir à un arbre de calcul.
S8	Donner du sens aux opérations (structures additives)	La boîte CE1 (Période 2) Matériel de type groupement	Source : IREM de Bordeaux
S9	Donner du sens aux opérations (structures additives), au calcul pensé	Règles et réglettes CE1 (Période 3)	L'objectif est de faire acquérir une méthode de calcul des écarts : méthode des « petits sauts ». On met deux élastiques sur 2 graduations d'une règle en bois graduée et on demande quel est l'écart entre les élastiques (ex : un élastique placé sur 17 et un autre sur 43) Source : publication Copirelem de J.-L. Oyallon
S10	Structures multiplicatives	Grilles CE1 (Période 4)	Source : publication Copirelem, brochure Elem Math2

Remarque :

Il existe une situation **S4-bis** : « Carrelage groupé » pour travailler sur une technique opératoire de l'addition, à faire en CP (Période 5) et en CE1 (Période 1).

Ce n'est pas une nouvelle situation de référence car la situation « Carrelage » a déjà été faite avec les élèves pour travailler sur l'aspect sémantique de la numération, avec du matériel de type groupement (voir tableau ci-dessus). « Carrelage groupé » sert à introduire une technique opératoire de l'addition.

VI - ANNEXE 2 - LE JEU DES RÈGLES ET DES BRACELETS (OYALLON 1991, PP. 33-34)

Situation 1 :

Les bracelets sont fixés sur la règle, le joueur doit positionner le bracelet mobile sur la réglette. (Ex : élastiques sur les graduations 27 (ou **a**) et 52 (ou **b**). de la règle). Le joueur gagne s'il positionne le bracelet mobile de la réglette sur 25 (ou **e**)

« **objectif** » : déterminer l'écart entre deux nombres.

Situation 2 :

Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, le bracelet de **gauche** est positionné sur la règle en **a**. Le joueur doit positionner le bracelet de **droite** sur la règle.

« **objectif** » : trouver la somme des deux nombres **a** et **e**.

Situation 2' :

Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, le bracelet de **droite** est positionné sur la règle en **b**. Le joueur doit positionner le bracelet de **gauche** sur la règle.

« **objectif** » : trouver la différence des deux nombres **b** et **e**.

Situation 3 :

Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, pas de bracelet positionné à l'avance sur la règle. Le joueur doit trouver une position possible des deux bracelets (parmi beaucoup).

« **objectif** » : produire deux nombres dont l'écart est **e**.

Savoirs visés : distance – soustraction (sens)

VII - ANNEXE 3 - LA SITUATION RÈGLES ET RÉGLETTES VÉCUE DANS UNE CLASSE DE CE1 EN 2010-2011

Séance 1 :
Évaluation diagnostique et appropriation collective

Séance 2 :
Appropriation individuelle : écart entre 20 et 24
Apprentissage (obstacle) : écart entre 32 et 47

Séance 3 :
Appropriation collective : écart entre 10 et 17
Apprentissage (obstacle) : écart entre 43 et 72

Séance 4 :
Apprentissage (obstacle) : écart entre 34 et 91

Entraînement :
Écarts entre 24 et 73, 47 et 92, 31 et 89, 17 et 65

Évaluation :
Écarts entre 18 et 73, 32 et 97

DES CAHIERS D'ÉLÈVES POUR ANALYSER LA PRATIQUE DU MAÎTRE ET QUESTIONNER LA FORMATION

Agnès BATTON
PIUFM Mathématiques, IUFM de Versailles, site de Cergy,
Université Cergy-Pontoise, Copirelem
agnes.batton@laposte.net

Pierre DANOS
PIUFM Mathématiques, IUFM Midi-Pyrénées, site d'Auch,
Université Toulouse 2 Le Mirail, Copirelem
pierre.danos@toulouse.iufm.fr

Résumé

L'atelier tente de montrer ce qu'il est possible ou non d'inférer des pratiques enseignantes à partir de l'analyse de différents types de cahiers d'élèves. L'étude des cahiers se centre sur la notion de fractions en CM1-CM2.
Les points suivants ont été abordés :
- la progression envisagée par l'enseignant sous l'éclairage du cadrage institutionnel et le respect de la programmation du manuel,
- la place, le rôle des cahiers et des traces écrites dans l'apprentissage des élèves,
- le lien entre les informations issues de tels documents et la pratique supposée de l'enseignant,
- un retour sur la notion mathématique abordée, du point de vue de l'enseignant et des élèves.

L'atelier s'est déroulé suivant le plan suivant :

1- Présentation de l'atelier

2- Mise au point sur un vocabulaire commun

3- Autour des traces écrites à regarder en visite

4- Informations à inférer ou non sur les pratiques et conceptions des enseignants à partir des traces écrites de cahiers d'élèves.

5- Application à la notion de fraction sur des cahiers d'élèves de CM2.

I - PRÉSENTATION DE L'ATELIER

Cet atelier est une deuxième version d'un atelier déjà présenté par la Copirelem en janvier 2011 à l'ESEN (École Supérieure de l'Éducation Nationale) lors d'une formation d'IEN « missions Maths ». Il a pour objectif de questionner les écrits de la classe, en particulier les écrits d'élèves.

En introduction, une première mise au point est faite sur des termes nécessaires à la discussion.

Pour la suite le travail s'effectue en six groupes. Un premier temps d'échanges a lieu autour des écrits que l'on trouve en classe lors d'une visite. Un deuxième temps de travail se fait autour de cahiers de neufs élèves de CM2. Il s'agit de voir quelles informations on peut tirer de ces cahiers sur ce qui se passe en classe, de manière générale, mais aussi de regarder plus particulièrement ce que l'on peut déduire du travail fait en classe sur une notion particulière, la notion de fraction.

II - MISE AU POINT D'UN VOCABULAIRE COMMUN

Il s'agit dans un premier temps, avant de commencer toute discussion, de se mettre d'accord sur une série de termes qui, selon les auteurs, n'ont pas toujours le même sens. Une fois ce glossaire mis en commun, le travail de réflexion peut débuter.

1 Séquence :

Une séquence est définie dans cet atelier comme une unité d'objectif, une unité d'apprentissage.

2 Séance

Une séance est utilisée dans l'atelier comme une unité de temps.

3 Progression

Nous définissons la progression ici comme un enchainement logique de séquences.

Citons par exemple une progression possible sur les décimaux : commencer par les écritures fractionnaires des rationnels (« fractions ») puis les écritures fractionnaires des décimaux (fractions décimales) pour ensuite arriver à l'écriture décimale (écriture à virgule)

4 Programmation

Lorsque nous parlons dans l'atelier de programmation, il s'agit de découpage fixé selon les périodes de l'année.

5 Types de séance

De même lorsque nous parlons des séances nous utilisons la typologie suivant l'objectif :

- évaluation diagnostique préalable,
- construction de nouvelle(s) connaissance(s),
- consolidation :
  - de type entraînement,
  - de type réinvestissement,
- évaluation sommative.
-

III - QUELLES TRACES ÉCRITES MATHÉMATIQUES PEUT-ON OBSERVER LORSQUE L'ON EST EN VISITE DANS UNE CLASSE ?

Arrivé en visite en classe, le formateur va consulter plus systématiquement le cahier journal et la programmation. Le visiteur s'attend, du côté du maître, à trouver dans le classeur de préparations la programmation, les progressions sur les différentes notions : séquences, séances accompagnées de bilans *a posteriori* jusqu'à l'évaluation sommative, les consignes, les institutionnalisations. Reste à regarder ce que les élèves ont à leur disposition.

Il s'agit, lors de cet atelier, de questionner les écrits auxquels les élèves ont accès, autres que le cahier-journal et les progressions et programmations de l'enseignant. Les groupes discutent puis une synthèse est faite. Les différents écrits sont organisés de l'écrit public à l'écrit privé de l'élève :

- les affichages de la classe :
  - écrits de référence ;

  - écrits intermédiaires (traces temporaires de résolution de problèmes, procédures de calcul réfléchi ou autres plus ou moins contextualités) ;

- le tableau de la classe ;
- cahier-outil ou cahier de leçons (de la classe, sur le cycle) ;
- cahier (ou dossier) de situations de référence ;
- cahiers du jour et/ou cahiers de mathématiques, fichier ;
- cahiers d'évaluation ;
- cahiers de recherche et d'expérience ;
- cahier de brouillon ;
- ardoises ou autres écrits éphémères …

La synthèse se poursuit par une référence au rapport des IGEN de juin 2006 ***L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire.*** Les différents types d'écrit y sont référés :

- les écrits pour chercher ;
- les écrits pour communiquer une démarche, un résultat ;
- les écrits de référence.

Ce rapport précise la faible utilisation du cahier de brouillon. Sur ce cahier, « on trouve plutôt des activités que des règles ou des références. L'habitude de noter des résultats ou des démarches est trop rare. »

L'examen des travaux écrits des élèves met en évidence que chaque élève dispose d'un cahier de mathématiques ou d'un cahier du jour ou encore d'un classeur pour les mathématiques. Le rapport fournit un tableau de fréquence d'utilisation des différents types de cahiers.

La description de ces différents types d'écrits se retrouve dans les programmes de collège 2008.

La programmation peut se repérer dans le cahier journal du maître mais également dans le cahier du jour élève au regard des dates.

Le cahier du jour n'est qu'une trace écrite parmi d'autres, dans lequel on retrouve essentiellement des exercices de type consolidation et pas ou peu d'information sur la façon dont l'apprentissage des notions est abordé, la construction des connaissances...

Cependant lorsqu'un visiteur arrive dans une classe en observation, il prend au hasard en général quelques cahiers du jour d'élèves.

Une discussion s'ensuit concernant le terme « brouillon » mais également les supports destinés à des premières recherches. Certaines collègues proposent de ne pas utiliser le mot « brouillon » avec les élèves car il induit dans ce cas une idée de non propreté, de travail négligé, bâclé. « Cahier d'essais » semble plus judicieux et plus « pédagogiquement correct ». Dans les programmes de 2002 les textes officiels préconisaient l'utilisation de « cahiers d'expérience » ; en 2008 en Arts Visuels les programmes parlent de « cahiers de croquis » ce qui semble être la version artistique du cahier d'essais.

Des collègues proposent de ne pas donner un cahier mais des feuilles recyclées, des feuilles de brouillon (un recto utilisé, le verso reste vierge pour y écrire ses recherches), sans ligne. Ainsi il apparait que les élèves se trouvent plus libres de se laisser aller à écrire ce qui leur passe par la tête, ils se sentent moins contraints par un support apparemment moins scolaire. On s'accorde à bien insister sur l'aspect privé de ce type d'écrit afin que les élèves puissent entrer sans contrainte dans leurs recherches en mathématiques.

D'autres collègues ont remarqué que certains professeurs d'école font mettre entre parenthèses les erreurs et ne les font pas barrer. D'autres encore proposent de ne travailler qu'avec les crayons papier, de prohiber l'encre.

Des questions se posent concernant le rôle des cahiers du jour : servent-ils de trace écrite aux élèves, leur permettant de s'y référer afin de refaire les exercices, de s'entraîner ?… en général non. Ces cahiers servent de façon beaucoup plus sûre aux remplaçants, à l'institution, aux parents …

D'autres questions sont posées concernant l'existence de « cahier de texte virtuel » sur lequel sont indiqués les « devoirs » mais également les chroniques des journées. A la rentrée 2011, ce « cahier de texte virtuel » est rendu obligatoire dans les collèges et lycée. Certains collègues de classes élémentaires s'en servent également.

IV - À PARTIR D'EXTRAITS DE CAHIERS D'ÉLÈVES DE TROIS CLASSES DIFFÉRENTES DE CM2.

Ces extraits de cahiers proviennent de trois classes de trois écoles différentes. Dans le panel, il y a pour chaque classe un bon élève, un moyen, un élève en difficultés (ou du moins étiquetés comme tels par les maîtres ou maîtresses qui nous ont confié leurs écrits). Notre demande était d'avoir tous les écrits qu'avaient en main les élèves : il y a donc au moins le cahier du jour.

Les documents en notre possession sont :

- pour la classe de l'école 1, des extraits de « cahier de mathématiques », des extraits du DicoMaths CapMaths CM1-CM2 (2010), des extraits du manuel utilisé « CapMaths CM2 » (2010) ;

- pour la classe de l'école 2, des extraits de cahier du jour, des extraits du cahier outil et des extraits du manuel utilisé « A nous les maths » version 2001 ;

- pour la classe de l'école 3, des extraits de « cahiers du jour » et du « cahier de leçon ».

Dans un premier temps, seuls les extraits de cahier du jour des différents élèves sont distribués aux différents groupes (deux groupes sur une même classe). Les autres documents leur seront distribués à la demande, selon les questions posées par les différents groupes.

1 Quelles informations nous fournissent ces cahiers ? Quelles questions pourrait-on poser à l'enseignant(e) pour compléter ces informations ?

1.1 À partir des cahiers du jour, on peut avoir accès à :

- la programmation des notions (en se référant aux dates) ;
- la progression (spiralaire ou non) ;
- la fréquence d'apparition des exercices sur une même notion ;
- la nature et les supports de certaines activités ;
- des conceptions privilégiées sur les notions (cadres et aspects concernant les rationnels et décimaux ici) ;
- des procédures et erreurs d'élèves (et leur utilisation en classe)

La progression est plus difficile à repérer sur les cahiers d'élèves mais on peut également les confronter au manuel, au fichier, au classeur de préparation du maître.

Le cahier permet également de repérer s'il y a variété des tâches et des situations proposées : des séances de calcul mental, la place du calcul posé, des situations-problèmes.

On peut avoir accès à quelques détails sur le traitement de l'erreur : ratures ou non, erreurs soulignées, utilisation de plusieurs couleurs (en général vert ou rouge) mais il faut un entretien avec le maître pour que l'on sache exactement la manière dont la correction se fait, et par qui. On voit dans certains cahiers des annotations (B, TB, vu, à revoir...), des notes (sur 5, sur 10…). Qui les écrit ?

On y repère également d'éventuelles références au manuel de la classe, des photocopies de documents issus d'autres manuels…

On peut aussi parfois y repérer des stigmates de différenciation : des exercices différents selon les élèves, plus d'exercices pour certains mais cela doit se confirmer lors d'un entretien.

1.2 À partir des cahiers du jour, on peut (se) questionner sur :

- l'existence d'une différenciation ;
- l'utilisation des procédures élèves en classe ;
- le traitement de l'erreur ;
- la place des activités de recherche ;
- la place et la nature des activités de calcul mental (uniquement sur des nombres ou dans des problèmes ;
- la mise en place d'une aide individualisée ;
- les conceptions sur une notion privilégiées par l'enseignant ;
- les compétences privilégies sur la notion ;
- l'utilisation de matériel en classe (lequel ? comment ?)

…

Concernant le traitement de l'erreur, on peut se demander qui corrige ? Quel type de correction a lieu ? La correction est-elle collective, individuelle ou personnelle ? De quelle nature sont les commentaires ? Qui les écrit ? Y a-t-il des possibilités d'autocorrection ? Si oui quand et comment ?

V - FRACTIONS ET DÉCIMAUX DANS LES CAHIERS PRÉSENTÉS

1 Mise au point sur les aspects et composantes concernant les nombres rationnels

Trois composantes nécessaires et complémentaires sont utilisés pour les fractions dans la brochure de l'IREM de Rennes, De *l'écriture fractionnaire à la multiplication des décimaux*, *Liaison Cycle3 – 6ème*, :

- « partage d'une grandeur » : partage d'une grandeur en *b* parts égales, sans référence à la mesure ; les objets à partager sont des grandeurs continues, le quotient d'une grandeur par un nombre est une grandeur ;
- « mesures » : il permet de travailler sur les nombres , il faut se donner un étalon (unité de mesure), le résultat de la mesure d'une grandeur dans l'unité donnée est un nombre ;

- « graduations » : le repérage est en jeu.

Ces trois composantes se conjuguent avec trois origines possibles de la fraction $\frac{a}{b}$:

- « a-bièmes » : $\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{b}\ (a\ fois)$
- « a divisé par b » : $\frac{a}{b}\times b = a$
- Notation fonctionnelle : $\frac{a}{b}$ *de* … (prendre les a-bièmes de…)

2 Exemples

2.1 Aspect de « cinq tiers » dans le champ « partage de grandeurs »

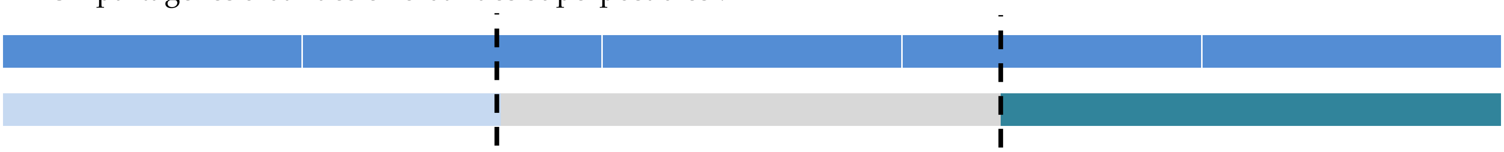
On considère cinq bandes, chacune de longueur *L*.

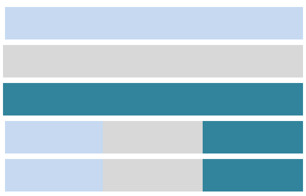
On partage chacune des bandes en trois bandes superposables

Par définition, la longueur de chacune de ces petites bandes est donnée par $\frac{L}{3}$ noté aussi $\frac{1}{3}L$. La longueur de la bande obtenue en mettant bout à bout cinq petites bandes est donnée par $\frac{L}{3}+\frac{L}{3}+\frac{L}{3}+\frac{L}{3}+\frac{L}{3}=5\times\frac{L}{3}$. On notera alors que c'est $\frac{1}{3}L+\frac{1}{3}L+\frac{1}{3}L+\frac{1}{3}L+\frac{1}{3}L=\left(5\times\frac{1}{3}\right)L=\frac{5}{3}L$ soit « cinq tiers *L* » noté $\frac{5}{3}L$.

2.2 Aspect « 5 divisé par 3 » dans le champ « partage de grandeur »

On partage les 5 bandes en 3 bandes superposables :



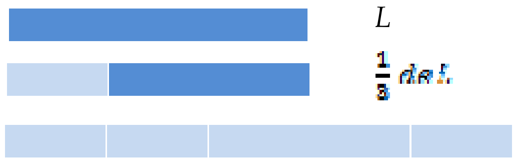


Chacune des trois bandes superposables a pour longueur $L+\frac{L}{3}+\frac{L}{3}=L+\frac{1}{3}L+\frac{1}{3}L=\left(1+\frac{2}{3}\right)L=\frac{5}{3}L$

On posera et lira alors « cinq divisé par trois *L* », soit $\frac{5}{3}L$, (5 : 3) L

2.3 Aspect fonctionnel dans le champ « partage de grandeur » (« cinq tiers de… »)

Cette définition se traduit dans le langage courant par « prendre les *cinq tiers* **de** la longueur de la bande ».



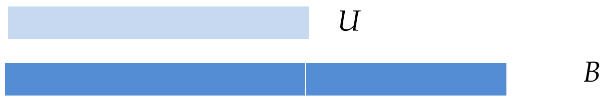
$5 \text{ fois } \frac{1}{3} \text{ de } L = \frac{5}{3} \text{ de } L$

La bande de longueur L est partagée en 3 bandes superposables et on prend 5 morceaux de ce type (la fonction d3 – diviser par 3 – est suivie de la fonction m5 – multiplier par 5 – ou alors on prend 5 fois L que l'on partage en 3 morceaux superposables.

2.4 Aspect de « cinq tiers » dans le champ « mesure »

Il s'agit ici de mesurage de la bande B par fractionnement de l'unité U

On veut mesurer la longueur *B* d'une bande avec comme unité la longueur *U*.



Par abus de langage, on parle de fractionnement de l'unité : partition de l'unité puis multiplication.

On fractionne l'unité *U* en trois.

Par définition, la mesure de la longueur de chacune de ces parties, en prenant comme unité *U*, est $\frac{1}{3}$.

La mesure de la longueur *B* (*U étant l'unité*) est

$$5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 2 - \frac{1}{3}$$

2.5 Aspect « 5 divisé par 3 » dans le champ « mesure »

Il s'agit ici de mesurage par « commensuration ».

On considère les bandes de longueurs *B* et *U*.

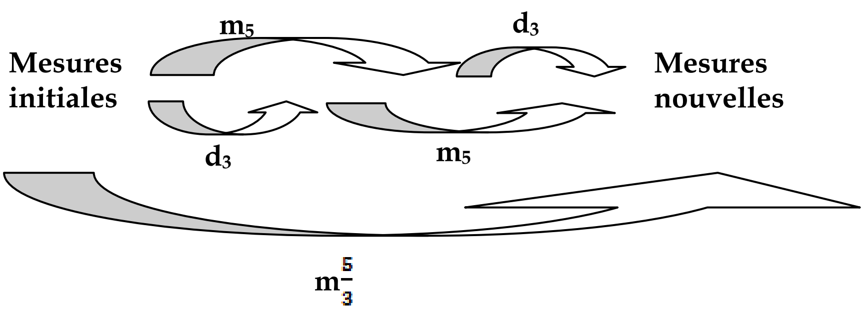
On cherche une « commune mesure » des longueurs *B* et *U*, c'est-à-dire que l'on cherche à faire coïncider un nombre entier de *B* avec un nombre entier de *U*.

On constate que 3B = 5U soit $B = \frac{5}{3} U$

$\frac{5}{3}$ est défini comme le rapport des longueurs *B* et *U* : c'est le nombre qui, multiplié par 3, donne 5.

2.6 Aspect fonctionnel dans le champ « mesure » (« cinq tiers de… »)

On considère un agrandissement avec un coefficient de proportionnalité $\frac{5}{3}$



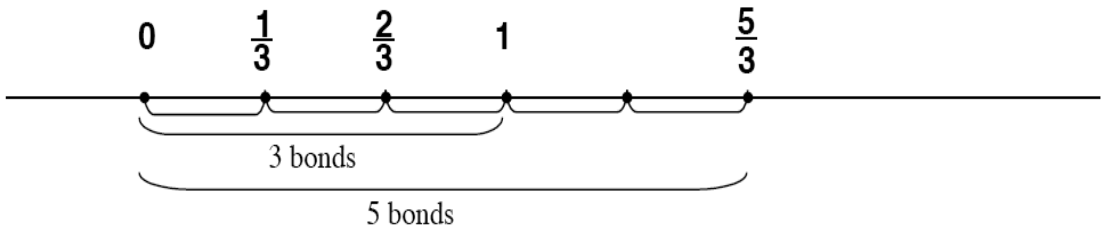
Il y a proportionnalité entre les mesures : multiplier par 5 tiers.

2.7 Aspect de « cinq tiers » dans le champ « graduations »

On considère un robot qui se déplace sur la droite numérique par bonds réguliers en partant du nombre-repère 0.

Sachant qu'il parvient au nombre-repère 1 au bout du troisième bond :

- Le nombre-repère atteint à l'issue du premier bond est $\frac{1}{3}$;
- Le nombre-repère de la graduation atteint à l'issue du cinquième bond est $\frac{5}{3}$.

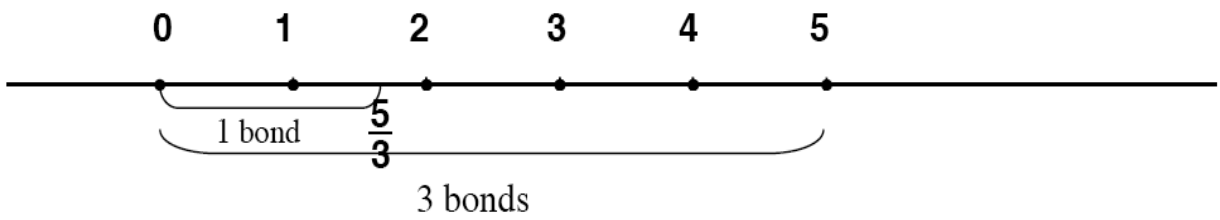


2.8 Aspect « cinq divisé par 3 » dans le champ « graduations »

On considère un robot qui se déplace sur la droite numérique par bonds réguliers en partant du nombre-repère 0.

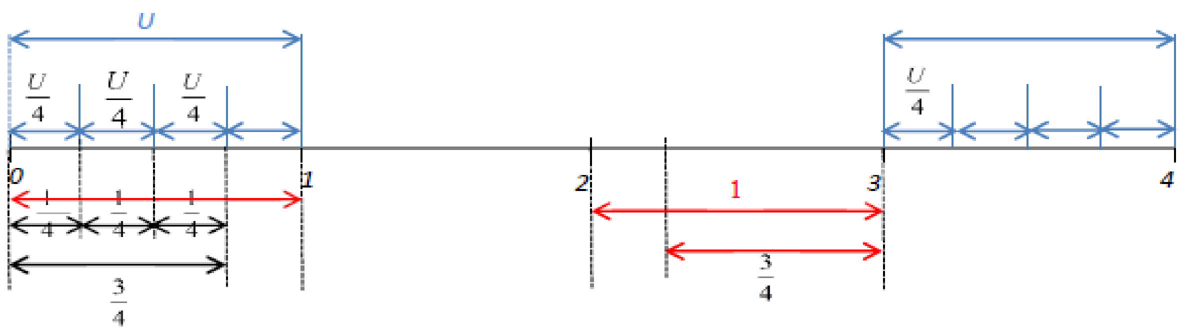
Sachant qu'il parvient au nombre-repère 5 au bout du troisième bond :

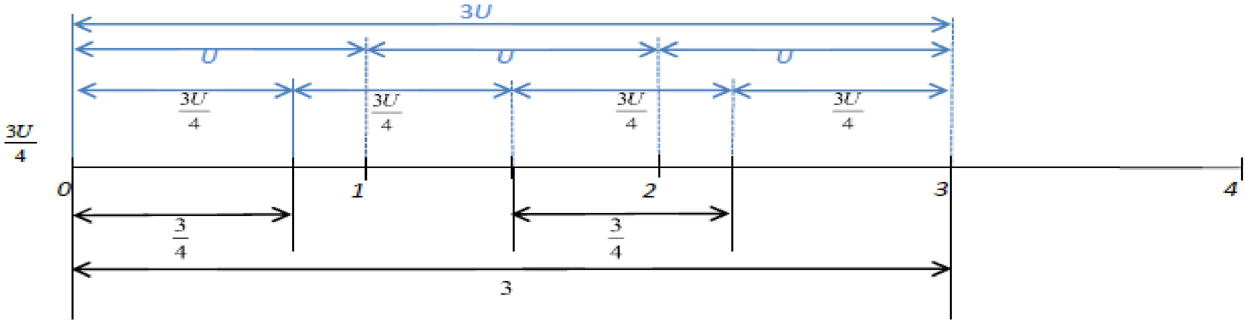
- Le nombre-repère atteint à l'issue du premier bond est $\frac{5}{3}$;
- $\frac{5}{3}$ apparaît comme le nombre qui, multiplié par 3, donne 5.



2.9 Synthèse dans le champ « graduations »

Voici différentes façons de « voir » $\frac{3}{4}$:





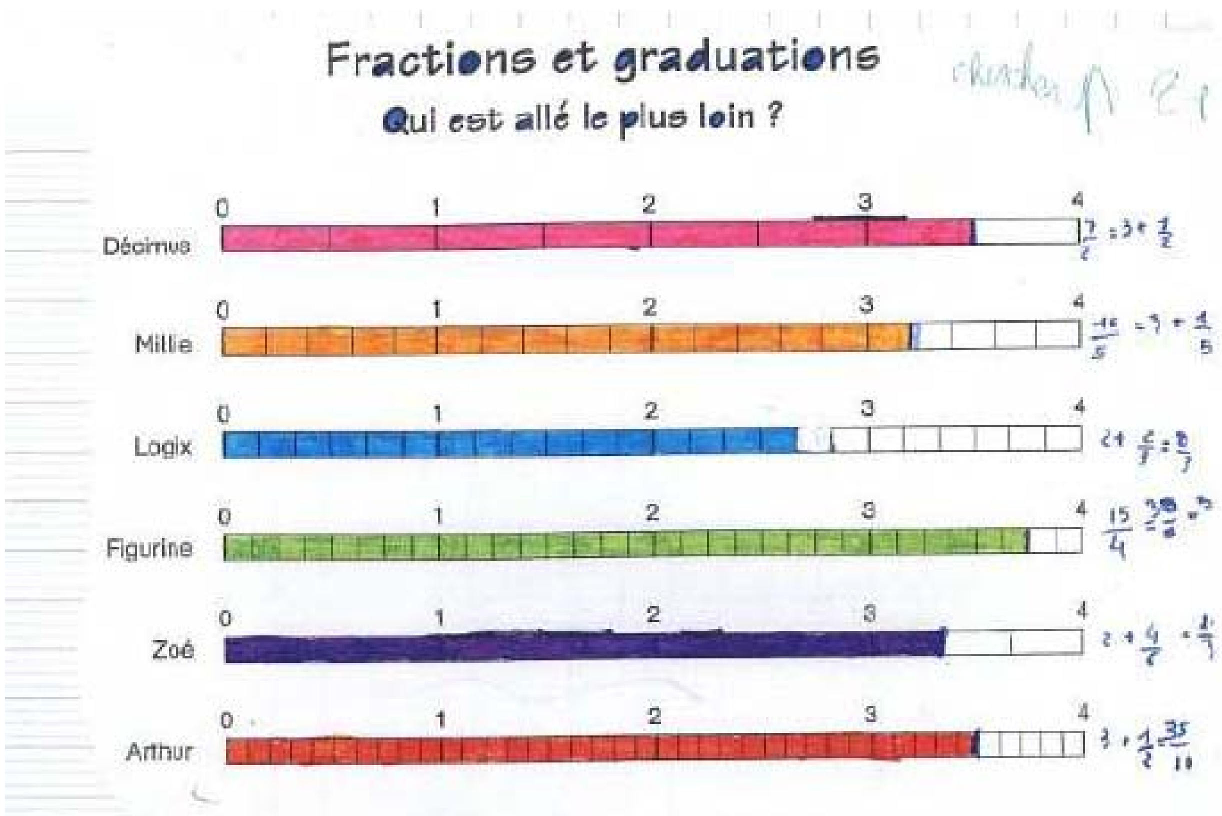
Même si ce champ n'est pas retenu pour l'introduction de la notion, il s'avère indispensable car il permet de traiter convenablement les problèmes d'intercalation (décimal entre deux entiers, décimal entre deux décimaux), de comparaison et de rangement des fractions et des décimaux.

Sur une droite graduée, peuvent apparaître les nombres-repères (abscisses) et les nombres-mesures.

3 Pour l'enseignement des rationnels et décimaux, quels sont les champs de problèmes et les aspects qui semblent privilégiés par cet(te) enseignant(e) ?

3.1 École 1 :

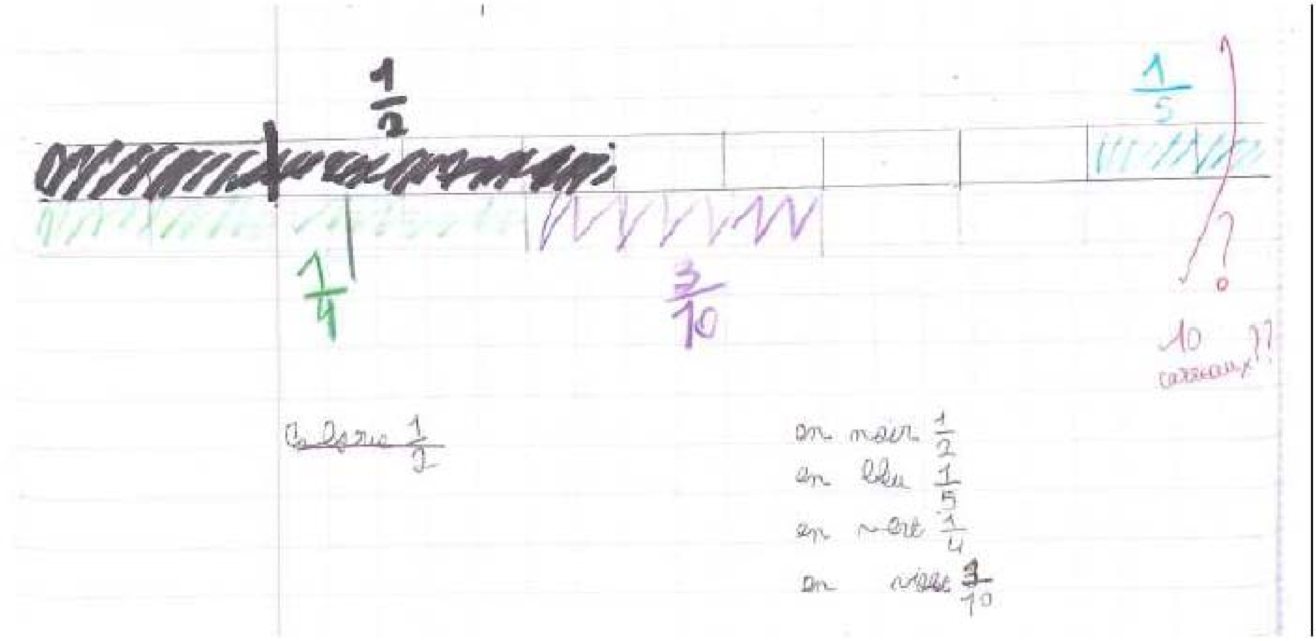
Les activités sont étroitement liées au manuel utilisé. Les aspects « outil » et « objet »[1] sont travaillés, le champ de problèmes est celui des mesures et graduations, le sens a $b^{\text{ièmes}}$ est privilégié.

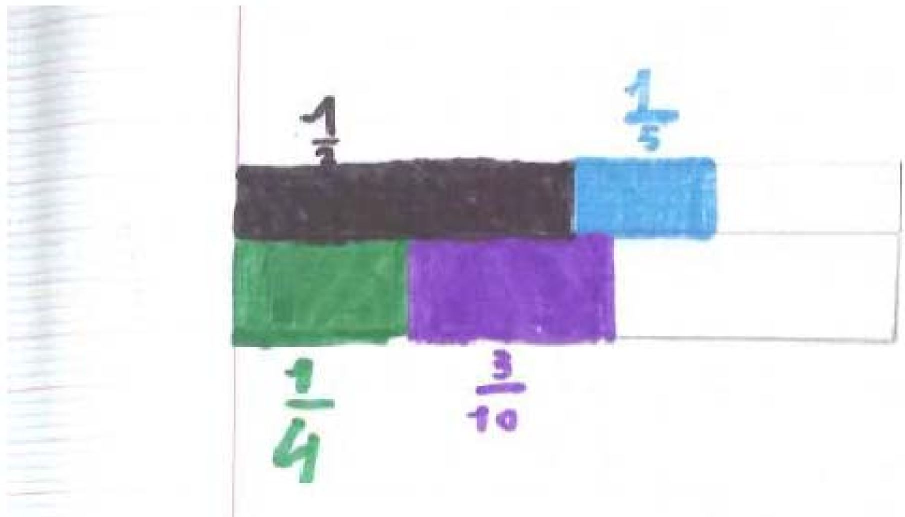


[1] Selon la dialectique outil – objet de Régine Douady

3.2 École 2 :

L'aspect « objet »[2] est privilégié, les exercices semblent travailler des techniques sans les justifier. Il n'y a pas de champ de problème privilégié, l'aspect fonctionnel d'une grandeur est retenu pour le premier exercice.





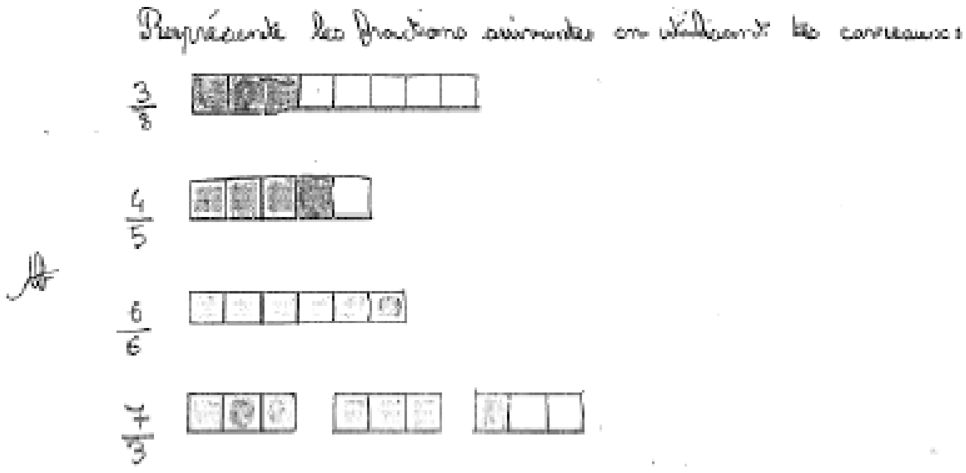
3.3 École 3 :

Les décimaux apparaissent comme outils dans les conversions de grandeurs, avant le travail sur les rationnels. L'aspect « outil » [3]est privilégié. L'enseignant n'utilise manifestement pas de manuel.

On trouve une trace écrite pour le moins ambigüe, qui laisse penser que toute fraction de l'unité est représentée par un carreau.

[2] Selon la dialectique outil – objet de Régine Douady

[3] Selon la dialectique outil – objet de Régine Douady



VI - CONCLUSION

Cet atelier a permis d'engager un débat autour des pratiques de formateurs lors des visites de stagiaires en classe. Pour rendre compte du travail engagé en classe avec les élèves, le formateur va naturellement examiner l'ensemble des écrits à disposition, tant du côté élève que de celui de l'enseignant, des écrits publics aux écrits privés de l'élève lorsque c'est possible. Ces écrits doivent permettre de mettre en évidence les choix pédagogiques et didactiques de l'enseignant, ainsi que l'activité des élèves. On peut y repérer la programmation des notions (en se référant aux dates) , la progression (spiralaire ou non), la fréquence d'apparition des exercices sur une même notion, la nature et les supports de certaines activités, des conceptions privilégiées sur les notions, des procédures et erreurs d'élèves, des références à des manuels, des traces (ou non) de différenciation…

Ensuite le formateur questionnera probablement le stagiaire afin d'affiner certains points. Ainsi il est intéressant de demander des précisions sur la manière dont se fait la validation des résultats produits, correction collective, individuelle ou personnelle, savoir ce qui est à la charge de l'élève en terme de correction. En effet, on peut s'interroger sur le réel aspect réflexif de ces écrits pour les enfants. Ce questionnement portera aussi sur l'utilisation pédagogique des erreurs d'élèves, de leurs procédures, sur la façon dont le maître différencie son enseignement…

Lors de cet atelier a clairement été évoquée l'utilisation qui peut être faite de ces écrits en formation de formateurs. Mais ce questionnement peut également être appliqué en formation continue lors d'un travail sur les différents types d'écrit existant en classe mais aussi pour amener les collègues à réfléchir aux différentes approches possibles d'une notion (ici les rationnels et décimaux).
On peut imaginer, en adaptant le scénario et les supports, transférer ce travail de réflexion en formation initiale notamment sur des temps de préparation au métier et aux gestes professionnels, au sein des masters de formation des futurs enseignants.

VII - BIBLIOGRAPHIE

BELLIAN C., BOUYAUX T., DENMAT M-N., GIORGUITTI I., KHLIFI L., LE POCHE A., LE POCHE G., LOHYN M., METAYER M., TETARD P., (2002) De l'écriture fractionnaire à la multiplication des décimaux, *Liaison Cycle3 – 6ème*, IREM de Rennes.

DOUADY R., (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, RDM vol 7-2, La pensée sauvage.

DURPAIRE JL., (2006) L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire, *Rapport des IGEN*.

VIII - ANNEXE

Extrait du rapport IGEN, juin 2006

L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire

Traces				
Support	Présence	Utilisation		
	Oui	Quotidienne	Régulière	Ponctuelle
Cahier de brouillon	87 %	69 %	26 %	5 %
Cahier du jour	66 %	74 %	20 %	6 %
Cahier de maths	63 %	43 %	26 %	31 %
Cahier d'évaluations	58 %			100 %
Classeur	45 %	30 %	10 %	60 %
Fichier	8 %	50 %	35 %	15 %

DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE DE JEUX TRADITIONNELS À LA CONCEPTION DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE POUR L'ÉCOLE PRIMAIRE

Pierre EYSSERIC
PIUFM, Université de Provence
p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr

Pascale MASSELOT
Maître de Conférence, IUFM de l'académie de Versailles - UCP
LDAR
PMasselot@aol.com

Claire WINDER
PIUFM, Université de Nice Sophia Antipolis
claire.winder@free.fr

Résumé

Lors de cet atelier, les animateurs ont présenté ce qu'ils désignent par « architecture mathématique d'un jeu », à partir de l'exemple du jeu de loto. Ce type d'analyse, précisé dans la première partie de ce compte-rendu, constitue un approfondissement des travaux sur les jeux réalisés par Bolon (1994), en particulier le repérage des variables d'un jeu. Il affine certains apports de Rodriguez (1993), avec la reprise de la notion de trame des apprentissages proposée par Descaves (1992) en substitution à celle de progression, pour définir le rôle du jeu dans les apprentissages mathématiques. Il prolonge également les premiers travaux d'Eysseric (1999) sur ce sujet.
Les participants, répartis en groupe, ont été conduits à dégager l'architecture mathématique de trois jeux traditionnels : le jeu de bataille, le jeu des dominos et le jeu de l'oie. Ce premier travail a permis de faire émerger une catégorisation de ces jeux du point de vue des mathématiques sous-jacentes. Dans un deuxième temps, cette analyse a été réinvestie dans l'élaboration de variantes de ces jeux, puis de pistes pour la conception des situations d'apprentissage.
La dernière partie de cet article est consacrée à la présentation de scénarios de formations.

Les jeux sont des supports souvent utilisés par les professeurs des écoles dans leur pratique professionnelle (pas seulement en mathématiques…), et leur usage est d'ailleurs explicitement cité dans les programmes de maternelle[1]. Le jeu permet l'implication du joueur, il est un lieu où l'enfant décide ; il lui permet d'essayer quelque chose sans risque… C'est un lieu de gestion de la communication. Lors d'un jeu, perdre n'est pas synonyme de manque de connaissances.

Or, même dans de récentes Instructions Officielles[2], la confusion pratique du jeu/apprentissage existe. L'objectif des animateurs de cet atelier est d'organiser un dispositif de formation permettant de conduire à la réflexion suivante : « Comment transformer un jeu en un élément du milieu constitutif d'une situation d'apprentissage ? ».

L'objectif de l'atelier se décline alors en deux points :

---

[1] B.O. hors série n°3 ; 18 juin 2008

[2] Une nouvelle ambition pour les sciences et les technologies à l'école ; dossier de presse - 31 janvier 2011 ; http://www.education.gouv.fr/cid54824/une-nouvelle-ambition-pour-les-sciences-et-les-technologies-a-l-ecole.html et circulaire n° 2011-038 du 4-3-2011, Promotion des disciplines scientifiques et technologiques, BO n°10 du 10 mars 2011.

- le premier concerne les domaines qu'il est possible d'aborder avec un jeu ; il s'agit d'apporter des réponses à la question : « En quoi un jeu peut-il servir de support d'apprentissage ? » ;

- le second point concerne la mise en œuvre dans une classe et tente de répondre à la question : « Comment un jeu peut-il servir de support d'apprentissage ? ».

Chacune de ces deux interrogations a fait l'objet d'une présentation collective s'appuyant sur l'exemple du jeu de loto, suivie par une mise en activité en petits groupes des participants de l'atelier ; chaque groupe ayant à sa charge un jeu « traditionnel » particulier (jeu de dominos, jeu de bataille ou jeu de l'oie). Pour ne pas multiplier les contextes, seuls des jeux comportant une part de hasard ont été analysés au cours de l'atelier. Une mise en commun globale des réflexions et productions des groupes a conclu l'atelier.

La première partie de cet article présente le cadre d'analyse, comportant deux temps, proposé aux participants : définition des différents points qui constituent « l'architecture mathématique » d'un jeu et pistes pour la mise en œuvre de situations d'apprentissage à partir d'un jeu.

Dans les parties suivantes, en liaison avec les productions des groupes, quatre jeux traditionnels sont analysés : le jeu de loto, le jeu de dominos, le jeu de bataille et le jeu de l'oie. Les jeux sélectionnés font partie de notre patrimoine culturel, ce qui permet de limiter le travail nécessaire d'appropriation des règles. Cependant, il est apparu nécessaire au cours de l'atelier de se mettre d'accord sur les règles ou le vocabulaire employé, car ceux-ci peuvent varier d'une région à l'autre… C'est pourquoi, pour chaque jeu, une règle « usuelle » est énoncée. L'architecture mathématique du jeu est ensuite mise en évidence, puis des conditions de mise en œuvre de ce jeu dans une classe sont déclinées. Enfin, des exemples de jeux, variantes ou non, mais qui lui sont proches au niveau de l'architecture, sont donnés.

Nous ajoutons une dernière partie (non présentée au cours de l'atelier), consacrée à la description de modules de formation de professeurs des écoles dans lesquels ces points d'analyses sont intégrés.

I - CADRE D'ANALYSE PROPOSÉ

1 Architecture mathématique d'un jeu

Le premier temps de l'analyse est lié à la question : « En quoi un jeu peut-il servir de support d'apprentissage ? ». Il s'agit de dégager les éléments génériques d'un jeu, c'est-à-dire à la fois *la structure mathématique sous-jacente* et ses *modalités caractéristiques*. Ces deux éléments constituent ce que nous nommons *architecture* du jeu. Un tel modèle d'analyse conduit à un regroupement des jeux en fonction de leur architecture, et par suite permet à l'enseignant le choix d'un jeu particulier comme support d'apprentissage *en fonction* des objectifs d'apprentissage visés.

Ainsi, selon l'enjeu qu'il souhaite privilégier, le professeur pourra choisir parmi des jeux construits selon la même architecture. En effet, la structure mathématique sous-jacente conduit à identifier les différents domaines mathématiques dans lesquels on peut proposer ce jeu à des fins d'apprentissage, et les modalités caractéristiques permettent d'accéder aux variables du jeu qui selon leurs valeurs, conduisent à la déclinaison de différentes variantes utiles pour adapter ce jeu en fonction des compétences visées et des divers types de publics.

Ces deux notions sont exemplifiées dans les parties suivantes.

2 Intérêt pour une mise en œuvre dans la classe

Pour que les jeux deviennent de véritables outils au service des apprentissages à l'école, il est nécessaire de surmonter la contradiction apparente entre le jeu dont la vocation première est le loisir, la distraction, … et les pratiques scolaires centrées sur l'apprentissage avec des contraintes, des règles à respecter.

Le simple repérage de connaissances mathématiques intervenant dans la pratique d'un jeu ne garantit pas un apprentissage de savoirs mathématiques en jouant. Tout au plus aura-t-on une mobilisation dans le jeu de connaissances mathématiques que l'élève sera ensuite incapable de réutiliser en dehors du contexte de jeu. Il est nécessaire de procéder à un minimum de « didactisation » du jeu afin que chacun des acteurs de la situation ait conscience que certes on joue, mais qu'on joue pour apprendre et qu'on apprend en jouant le jeu !

Pour cela, il faut dans un premier temps adapter le jeu au temps de la classe, ainsi qu'aux apprentissages visés : partir du savoir mathématique pour proposer un jeu adapté et non l'inverse. La connaissance de l'architecture de différents jeux favorisera un choix de jeu en cohérence avec les savoirs visés et permettra d'agir de façon pertinente sur les variables disponibles.

Le jeu pourra être utilisé à différents moments de l'étude : découverte d'une notion au travers d'un jeu dans lequel elle intervient ; entraînement à l'utilisation de certaines techniques, au réinvestissement ; confrontation au travers d'un jeu à des problèmes …

Dans tous les cas, l'efficacité du jeu pour provoquer des apprentissages va résider dans la capacité de l'enseignant à faire alterner les moments de jeu « pur » qui vont avoir un impact important dans l'enrôlement des élèves et dans leur motivation pour les apprentissages liés au jeu, et les *exercices de jeu* qui vont permettre à l'élève de prendre de la distance par rapport au jeu, de réfléchir sur le jeu et de s'approprier les savoirs mathématiques qui y sont reliés, voire même de travailler des compétences complémentaires à celles introduites travaillées dans le jeu, le jeu n'étant plus qu'un prétexte à de nouvelles interrogations. Ces exercices de jeu vont se matérialiser dans la classe par des écrits collectifs et/ou individuels que nous qualifierons de *mémoire de jeu*.

La mémoire de jeu

Nous reprenons cette expression utilisée, il y a quelques années, par Rodriguez dans un dossier du Journal des Instituteurs[3] analysant les conditions pour mettre un jeu au service des apprentissages mathématiques ; cette analyse s'appuyait sur le concept de *trame* proposé par Descaves[4] pour remplacer, avec un gain de souplesse, celui de progression.

Une mémoire de jeu sera une trace écrite qui rendra compte :

- soit de tous les instants du jeu ;
- soit de certains moments décisifs : lorsqu'un choix doit être fait par le joueur, par exemple pour décider du gagnant en fin de partie…

Elle est élaborée par chaque joueur et lui permet de revenir en arrière au cours d'un jeu pour analyser ses choix et leur impact : analyse d'erreurs, comparaison et formulation de stratégies…

Elle peut s'appuyer dans un premier temps sur des exercices de jeu (notion que nous précisons dans la suite du texte) proposés par l'enseignant qui conduisent à mettre en lumière certaines procédures ou certaines stratégies.

Elle peut ensuite déboucher sur des exercices de jeu dont l'objectif est d'améliorer certaines stratégies, ou de s'entraîner à la mise en œuvre de techniques dont la maîtrise s'est avérée importante dans la pratique du jeu.

Les mémoires de jeux pourront aussi être utilisées en classe comme illustrations lors des phases d'institutionnalisation des savoirs mathématiques rencontrés dans les jeux, qui donneront lieu ensuite à des décontextualisations avec des exemples pris en dehors des jeux.

En maternelle, le recours à des mémoires de jeu sera très limité. En revanche, les exercices de jeu, sous la forme de *jeu interrompu* au sens de Bolon[5] sont parfaitement adaptés : à partir d'une disposition des

---

[3] RODRIGUEZ A. (1993) Dossier Mathématiques : jouez le jeu !, Journal des Instituteurs, 49-63.

[4] DESCAVES A. (1992) Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes. Hachette.

[5] BOLON J. (1994) Comment analyser un jeu mathématique. Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques tome III, COPIRELEM, 57-60.

éléments du jeu, comme une sorte de jeu interrompu, il s'agit dans les jeux de hasard, de faire parler les élèves sur ce qui serait favorable ou défavorable et d'expliquer en quoi, et dans les jeux de stratégie, de demander ce qu'ils aimeraient jouer et pourquoi.

II - LE JEU DE LOTO

1 Règle usuelle

Le jeu de loto est un jeu de société fondé sur le hasard.

Le nombre de joueurs n'est pas limité.

Chaque joueur dispose d'un ou plusieurs cartons.

Sur chaque carton figure une grille comportant trois lignes et neuf colonnes. Parmi les cellules qui en résultent, quatre, dans chaque ligne, sont vides alors que cinq comportent un nombre (de 1 à 90). Notons que dans chaque colonne figurent un à trois nombres ayant le même chiffre des dizaines mais non ordonnés. Ainsi chaque carton affiche 15 numéros.

Un jeu de loto traditionnel

Des jetons sur lesquels figurent chacun des 90 nombres sont placés dans un sac opaque. Un meneur de jeu prélève au hasard dans ce sac un jeton désignant l'un des nombres. Si ce nombre est présent sur le carton d'un joueur, celui-ci dépose une graine sur l'emplacement correspondant de son carton.

Le gagnant est celui qui remplit le premier une ligne ou un carton. Il remporte alors un lot.

2 Analyse du jeu de loto

2.1 Architecture du jeu de loto

Dégager l'architecture du jeu revient à passer du particulier au générique :

Un jeton est le support d'un élément d'une collection.

Un nombre est un élément ou une représentation d'un élément de cette collection.

Le sac opaque permet de masquer cette collection et le tirage introduit le hasard dans le jeu.

Chaque carton correspond à un espace support d'une deuxième collection.

Les graines permettent le repérage sur l'espace support.

Le meneur peut être vu comme le vecteur d'information conduisant à relier les éléments des deux collections.

La plaque de vérification, trace des éléments déjà tirés au sort, permet la validation.

Les lots correspondent aux enjeux de ce jeu.

Finalement, le jeu de loto est un jeu de **mise en relation** : il s'agit d'associer, lorsque c'est possible, un élément d'une première collection à un élément d'une deuxième collection.

- La règle d'association peut être définie mathématiquement par une relation d'équivalence entre les éléments des deux collections (celle des jetons et celle des cases de la grille).

- Les collections peuvent être présentes ou représentées.

- Les éléments de la deuxième collection sont répartis entre les joueurs en sous-collections non forcément disjointes, organisées spatialement ou non.

À partir de l'architecture du jeu, il est possible de dégager les variables du jeu. Elles sont liées au type de jeu, il s'agit de ce sur quoi on peut « jouer », des choses à propos desquelles les choix à effectuer devront être « conscients », par rapport à leur incidence sur le jeu.

2.2 Variables du jeu de loto

Dans le cas de ce jeu, différentes variables peuvent être identifiées ; elles concernent :

Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.

Statut du meneur : maître ; élève ; absence de meneur.

Tirage des éléments de la première collection : aléatoire ou non.

Exhibition de l'élément de la première collection : montrer ; nommer ; montrer et nommer ; décrire par une paraphrase avec ou sans contrainte.

Éléments des collections : réels ; représentés.

Nature de la relation d'équivalence : identité ; équipotence ; équivalence de grandeur ; équivalence de forme ; désignation du même objet …

Nombre d'éléments par sous-collection (deuxième collection).

Validation : qui ? comment ? à quel moment du jeu ?

2.3 Domaines mathématiques

Les domaines mathématiques qu'il est envisageable d'aborder avec le jeu de loto sont liés à la nature des éléments des collections et à celle de la relation d'équivalence.

Numérique (nombres et/ou calculs) : les éléments des collections sont des nombres représentés par une constellation, une écriture chiffrée, une écriture utilisant les signes d'opérations… ou encore des représentations de collections d'objets organisées ou non.

Géométrique : les éléments des collections sont des formes ou des assemblages de formes, des noms de formes, des représentations par le dessin ou par la description…

Grandeurs : les éléments sont des objets réels ou représentés à comparer par rapport à leurs longueurs, leurs masses, leurs contenances…

Logique (classements) : les éléments sont des objets réels ou représentés, classés selon un critère (couleur, taille, …).

3 Mémoire de jeu et exercices de jeu

Une mémoire de jeu peut être un tableau de correspondance entre les éléments de la première collection et ceux de la deuxième, ou un extrait de ce tableau.

Le jeu de loto est un jeu de hasard. Le jeu interrompu est l'exercice de jeu qui consiste à faire verbaliser les élèves, au cours d'une partie, sur les nombres qu'ils souhaiteraient voir tirer. On peut aussi proposer une grille de jeu partiellement remplie et solliciter l'élève pour anticiper l'élément qui doit être tiré au sort pour qu'il gagne au coup suivant.

4 Jeux dont l'architecture est proche de celle du jeu de loto traditionnel

4.1 Les lotos dans ERMEL[6]

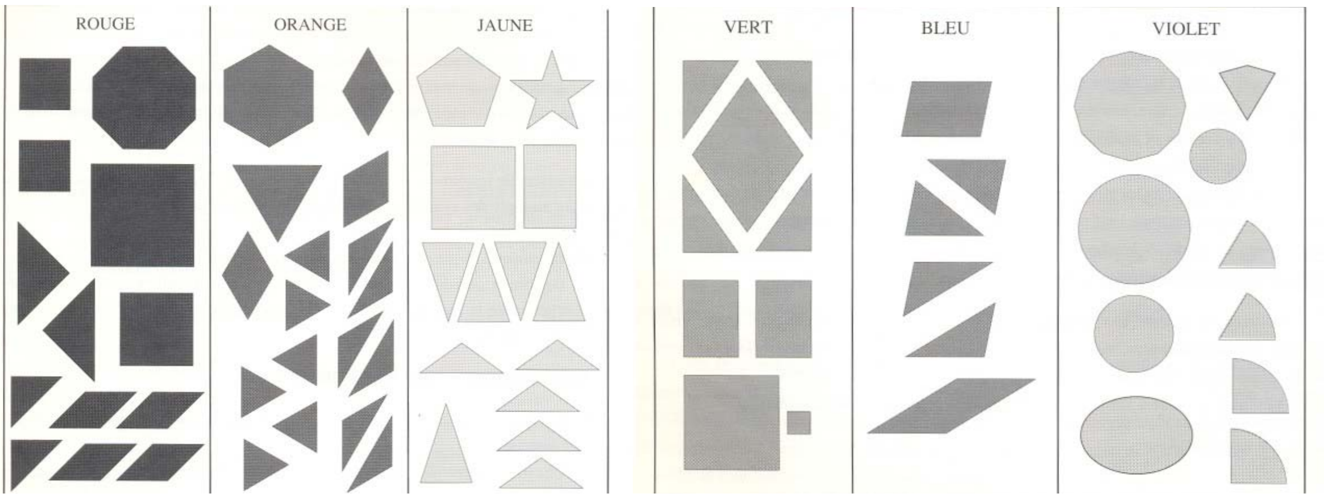
Pour l'entraînement à la mémorisation des répertoires et au calcul rapide, divers jeux de loto ont été proposés dans les travaux de l'équipe ERMEL[7]. Dans ces jeux, la collection de référence est un ensemble

[6] *Apprentissages numériques et résolutions de problèmes* ; ERMEL ; Hatier,

de nombres choisis en fonction des apprentissages visés ; l'écriture chiffrée usuelle est remplacée soit sur les jetons, soit sur les cartons par une écriture mettant en jeu l'addition, la soustraction, la multiplication … selon le type de calculs dont on vise l'entraînement.

4.2 Le loto des formes avec le matériel « La moisson des formes »

La moisson des formes est un ensemble instrumental d'expression géométrique créé par Bernard Bettinelli[8].



Vue du matériel « La moisson des formes »

Les principales variables du jeu du loto des formes sont les suivantes :

Collections : un lot de formes géométriques ou des représentations dessinées de ces formes.

Meneur = Enseignant

- Montre
- Montre et nomme
- Nomme seulement

| des formes géométriques

Meneur = élève

- Montre
- Montre et nomme
- Nomme
- Décrit

| des formes géométriques

Pas de meneur

Le joueur prend → sans déplacement → avec déplacement → en aveugle

Le joueur demande → sans déplacement → avec déplacement

Demande orale Demande dessinée

[7] Les éditions Hatier proposent plusieurs valisettes contenant le matériel nécessaire à la mise en œuvre de ces jeux dans les classes de cycle 2 et 3 ; il est aussi possible de fabriquer soi-même le matériel en s'appuyant sur les propositions faites dans les ouvrages d'ERMEL.

[8] http://une.education.pour.demain.pagesperso-orange.fr/materiels_pedago/mathematiques/moisson.htm pour plus d'informations sur ce matériel.

Nom
Description

Représentation des formes

Tailles identiques dans les deux collections

Tailles différentes

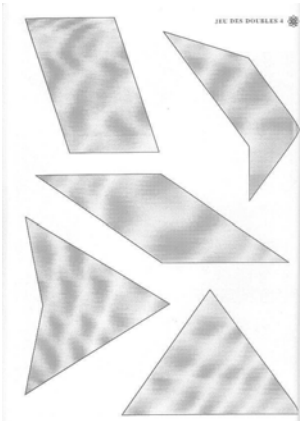
Représentation partielle (par exemple figure à compléter par symétrie axiale)

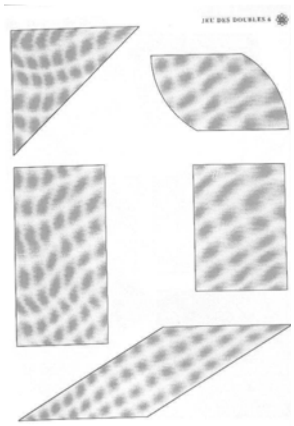
Forme superposable (par exemple deux figures inscrites l'une dans l'autre)

Nombre de formes pour gagner

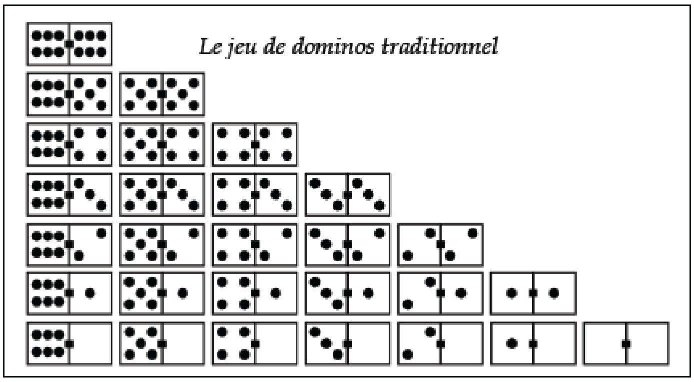
Forme unique ou assemblage

Exemples de cartons de jeu :





III - LE JEU DE DOMINOS



1 Règle usuelle

Le jeu de dominos est un jeu de société d'origine chinoise, mélangeant hasard et stratégie. Il comporte 28 pièces, réparties en nombre égal entre les joueurs (entre deux et sept joueurs). Au besoin, une pioche est ménagée avec quelques dominos (lorsque le nombre de joueurs n'est pas 4, ni 7 !).

Les joueurs cherchent à former une ligne en plaçant à tour de rôle un domino. Deux dominos se touchent à la seule condition de représenter la même image de la quantité de points. Quand un joueur ne peut pas poser de domino dans la chaîne, il pioche ou passe son tour.

Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs a posé tous ses dominos ou lorsque le jeu est complètement bloqué. Le gagnant est le joueur qui totalise le moins de points avec ses dominos restants.

2 Analyse du jeu de dominos

2.1 Architecture du jeu de dominos

Un domino correspond à un espace support de représentations de plusieurs éléments d'une collection : on parlera dorénavant de « plaque ».

Le jeu de dominos est un jeu de **mise en relation** : il s'agit d'associer, lorsque c'est possible, une représentation à une autre. Chaque représentation se trouvant sur une plaque, cette mise en relation doit traduire par concaténation des deux plaques concernées.

À la différence du jeu de loto, la règle d'association peut prendre différentes formes.

L'architecture de ce jeu, très proche de celle du jeu de loto puisque c'est un jeu de mise en relation, permet une transposition de l'un à l'autre, de la plupart des situations construites. Le loto sera davantage utilisé dans des modalités en collectif ou en petit groupe, alors que les dominos seront plus adaptés à un travail par deux ou en individuel.

2.2 Variables du jeu de dominos

Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.

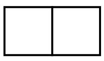
Nature de la règle d'association : règle d'équivalence : identité, équipotence, équivalence de grandeur, équivalence de forme ; règle de désignation du même objet ; complémentarité (par exemple compléments à 10) ; relation fonctionnelle (exemples : associer un nombre à son suivant, associer un nombre à son double, …) ; relation d'ordre…

Les dominos permettent ainsi un travail centré sur des relations fonctionnelles entre éléments d'une collection qui est plus pertinent qu'avec le loto : le fait que les deux éléments soient accolés permet de mettre en évidence la relation fonctionnelle et rend plus aisée la vérification des mises en relation.

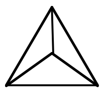
Éléments des collections : réels ; représentés.

Forme des plaques : dominos (deux possibilités pour associer), « triminos » (trois possibilités pour associer), « quadriminos » (quatre possibilités pour associer), hexaminos…

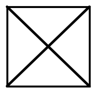
Exemples de formes :



Domino



« Trimino »



« Quadrimino »

Nombre de plaques : nombre total et nombre par joueur.

Opacité du jeu : plaques visibles des autres joueurs ou non.

Tirage des plaques déposées : aléatoire ou non.

Règles à respecter : dans la « fabrication » du chemin… taille du support, espace ouvert ou limité, silhouette des pièces dessinées ou pas, nombres d'emplacements, nombre d'entrées « possibles », disposition des doubles…

Validation : qui ? comment ? à quel moment du jeu ?

2.3 Domaines mathématiques

Les domaines mathématiques qu'il est envisageable d'aborder avec le jeu de dominos sont les mêmes que pour le jeu de loto et sont liés à la nature des éléments des collections et à la règle d'association.

Numérique (nombres et/ou calculs) : les éléments des collections sont des nombres représentés par une constellation, une écriture chiffrée, une écriture utilisant les signes d'opérations… ou encore des représentations de collections d'objets organisées ou non.

Géométrique : les éléments des collections sont des formes ou des assemblages de formes, des noms de formes, des représentations par le dessin ou par la description…

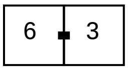
Grandeurs : les éléments sont des objets réels ou représentés à comparer selon leurs longueurs, leurs masses, leurs contenances…

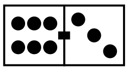
Logique (classements, rangements) : les éléments sont des objets réels ou représentés, classés selon un critère (couleur, taille, …).

3 Mémoire de jeu et exercices de jeu[9]

Les mémoires de jeu peuvent être produites à partir de dominos fixés sur un support mobile à la gomme adhésive, ou de dominos collés si le jeu est reproduit sur papier ou carton. Il est également possible de compléter des chemins (vierges) sur fiches par le schéma des dominos utilisés.

En cycle 2, on peut envisager des changements de représentation sémiotique, en retranscrivant les dominos avec des écritures chiffrées.

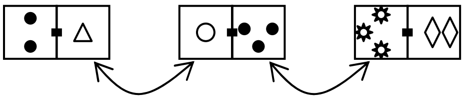
Exemple : 

pour 

Les exercices de jeux peuvent consister en :

- des jeux interrompus ;
- des jeux imposés où la forme et la longueur du chemin, ainsi que le nombre de dominos, sont fournis ; avec une seule manière d'optimiser…
- des jeux de devinettes à partir d'une chaîne terminée dont on vient de retirer deux ou trois dominos à identifier (par le schéma, par une description…).
- des jeux dont les dominos n'ont pas le graphisme usuel des constellations : motifs variés, dispositions spatiales quelconques ou couleurs distinctes (seul le paramètre « même nombre d'éléments » permettant alors d'associer deux dominos).

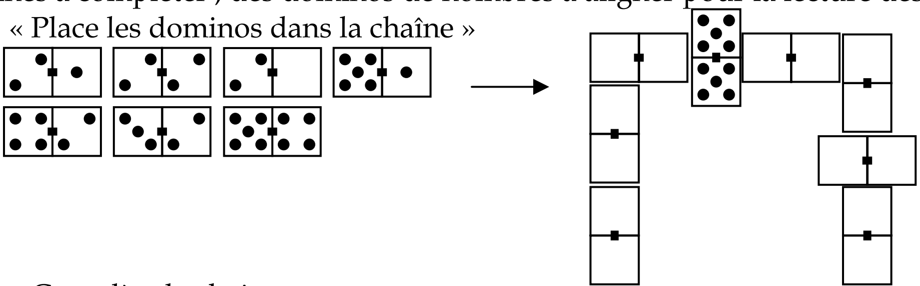
Exemple :



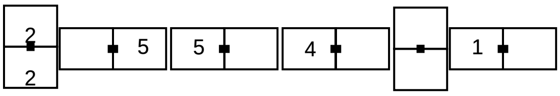
Il est possible de mettre en place les évaluations à partir des interventions orales des élèves dans les temps de rétroactions. Des pistes possibles :

- des fiches-mémoires de jeux réels ;
- des fiches de jeux fictifs à vérifier (*exemple* : « Barrer ce qui ne convient pas ») ;
- des fiches de jeux fictifs à terminer (*exemple* : « Dessiner les dominos manquants ») ;
- des chaînes à compléter ; des dominos de nombres à aligner pour la lecture des chiffres.

Exemples : 1) « Place les dominos dans la chaîne »

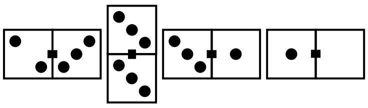


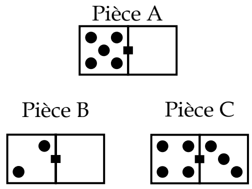
2) « Complète la chaîne » :



[9] D'après le dossier *Mathématiques : jouez le jeu !* in JDI ; A. RODRIGUEZ ; 10/1993, 93/94-02.

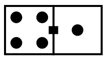
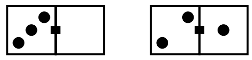
3) Jeu interrompu : « Quelles sont les différentes possibilités pour jouer, si on dispose des pièces A, B et C ? »





4) Une mémoire de jeu s'appuyant sur un moment décisif et mettant en lumière une stratégie :

« Les jeux des deux joueurs étant visibles, on est dans la situation suivante :

Jeu du joueur A :  Jeu du joueur B : 

Sur la table : 

Si le joueur B joue sa première pièce à gauche, le joueur A peut jouer à droite sa dernière pièce et il gagne. Si le joueur B joue sa deuxième pièce à droite, le joueur A ne peut pas jouer et c'est le joueur B qui gagne au coup suivant en plaçant sa dernière pièce à gauche. »

Cette mémoire de jeu pourra conduire à l'élaboration d'une stratégie gagnante sous forme de raisonnement inductif : « *Si j'ai la possibilité de poursuivre la chaîne aux deux extrémités, je choisis celle qui à la fois m'ouvre des placements de dominos et ferme le jeu pour les autres* ».

4 Variantes et jeux dont l'architecture est proche de celle du jeu de dominos

Les variantes du jeu de dominos correspondent à des jeux pour lesquels la mise en relation de deux éléments se traduit par la concaténation des deux plaques sur lesquelles figurent ces éléments. Elles ont donc toutes la même architecture. Plusieurs sont présentés dans ce qui suit, correspondant à différents domaines mathématiques et différentes règles d'associations.

Il existe également d'autres jeux de mise en relation, comme le loto précédemment étudié : leur architecture est donc proche de celle du jeu de dominos, sans être exactement la même. D'autres exemples sont donnés ci-dessous.

4.1 Quelques variantes

Parmi les variantes du jeu de dominos, on pourra citer :

Le domino des cartes de Noël[10]

16 cartes portant chacune une demi-image, coupée selon l'axe de symétrie de la figure.

Deux dominos peuvent s'associer si les deux demi-images forment une image complète.

Domaine mathématique : géométrie

Règle d'association : relation de symétrie.

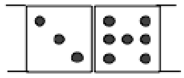
Exemple de carte

[10] In *Maths en pousse - 17 jeux mathématiques* ; J-L. BRÉGÉON, G. MÉTÉNIER, E. GÉROME ; collection Diagonale MS ; Nathan ; 1994 ; p. 13

Les dominos-points[11]

36 pièces sans double, représentant les constellations de 1 à 9.

Deux dominos peuvent s'associer si les nombres en contact totalisent 10.



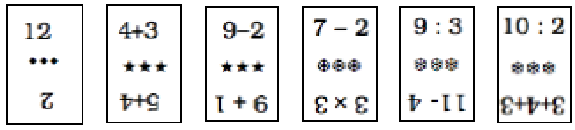
Exemple

Domaine mathématique : numérique

Règle d'association : complémentarité.

Les dominos numériques[12]

Deux dominos sont accolés si les cases en contact portent le même nombre (sous deux écritures différentes).



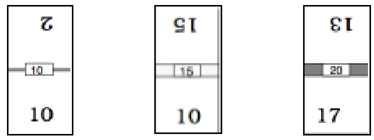
Exemple de dominos numériques

Domaine mathématique : numérique ; sont en jeu les nombres de 1 à 12, sous forme chiffrée simple, ou de décomposition additive ou soustractive, ou encore multiplicative.

Règle d'association : identité.

Faire dix, quinze ou vingt[13]

Trois familles de 35 plaques portant les nombres écrits en chiffres. Deux plaques sont accolées si les nombres en contact totalisent 10 (première famille), 15 (deuxième famille), ou 20 (troisième famille).



faire dix *faire quinze* *faire vingt*

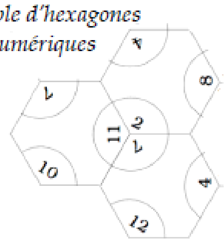
Exemples de dominos-nombres

Domaine mathématique : numérique

Règle d'association : complémentarité.

Hexagones numériques[14]

Exemple d'hexagones numériques



19 hexagones portant chacun 3 nombres. Les secteurs en contact se raccordent s'ils font un total de 20.

Domaine mathématique : numérique

Règle d'association : complémentarité.

Faire cent[15]

48 carrés portant un nombre en chaque sommet. Lorsque quatre sommets sont associés, le total en ces quatre sommets doit être 100.

Exemple d'agencement

Domaine mathématique : numérique , calcul mental

Règle d'association : complémentarité.

Le jeu des trentaines[16]

25 carreaux sur lesquels sont inscrits quatre nombres entiers, à placer sur une grille.

La somme des deux nombres situés sur les côtés en contact de deux carreaux doit être égale à 30.

Domaine mathématique : numérique

---

11 in *Faites vos jeux* ; F.BOULE ; Editions Didier ; 2005 ; p.35

12 Ibid ; p. 39

13 Ibid ; p.40

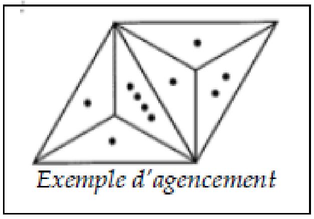
14 Ibid ; p. 39

15 Ibid p.40

16 Voir http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/07_Trentaines_p_26.pdf

Règle d'association : complémentarité.

Les triminos numériques[17]



20 triangles partagés en 3 parties, chaque partie comportant une constellation de points. Deux côtés sont accolés si le total de leurs points est égal à 5.

Domaine mathématique : numérique

Règle d'association : complémentarité.

D'autres jeux…

Solitaire, boîtes de rangements[18],…

4.2 Jeux dont l'architecture est proche de celle du jeu de dominos

Comme explicité précédemment, d'autres jeux possèdent une architecture proche de celle du jeu de dominos. Citons par exemple :

Tous les jeux de Mémory : dans ces jeux la mise en relation se traduit par l'association de deux plaques qu'il faut retrouver parmi d'autres, faces cachées. Dans ce type de jeu de mémoire, des compétences du domaine de la structuration de l'espace interviennent également (repérage dans un plan).

Les jeux de mariages, comme le « pouilleux », le « jeu des mariages de la table de Pythagore »[19]…

Comme évoqué précédemment à propos du jeu de loto, la plupart des situations construites pourront dans une certaine mesure être transposées des unes aux autres.

IV - LE JEU DE BATAILLE

1 Règle usuelle du jeu de bataille

Ce jeu de hasard se joue habituellement à deux joueurs (mais le nombre de joueurs peut être supérieur).

On distribue l'ensemble d'un jeu de cartes (52 ou 32) aux joueurs, qui n'en prennent pas connaissance.

À chaque tour, chacun des joueurs retourne simultanément la carte du haut de son paquet. Celui qui possède la carte de la plus haute valeur — selon la hiérarchie : As, Roi, Dame, Valet, dix... jusqu'au deux — gagne les cartes posées sur la table, qu'il place sous son paquet.

En cas d'égalité de valeurs, les joueurs en ballottage disent « bataille ! » et commencent par placer une première carte face cachée puis une seconde carte face visible pour décider qui gagnera le tour. En cas de nouvelle égalité, la procédure est répétée.

Le jeu se termine quand un des joueurs a épuisé son paquet et le gagnant est celui qui a en sa possession toutes les cartes du jeu.

---

[17] In *Maths en herbe - 20 jeux mathématiques* ; J-L. BRÉGÉON, G. MÉTÉNIER ; collection Diagonale GS ; Nathan ; 1994 ; p. 24. D'autres jeux du commerce se sont développés, comme Triominos©, jeu édité par Goliath.

[18] In Jeux 5 ; brochure APMEP n° 119; 1998

[19] Sur chaque carte, un produit est écrit ; il s'agit, par exemple, d'associer deux cartes dont la somme des résultats est un multiple de dix. ERMEL Mariages

2 Analyse du jeu de bataille

2.1 Architecture du jeu de bataille

Une carte correspond à un espace support de représentation d'un élément d'une collection.

Le jeu de bataille est un **jeu de comparaison**.

- La règle de comparaison peut être définie mathématiquement par une relation d'ordre soit entre des objets, soit entre des grandeurs, soit entre des collections, soit entre des quantités, soit entre des nombres.

- Le joueur qui possède l'élément le plus grand au sens de cette relation d'ordre, gagne tous les éléments comparés.

À partir de l'architecture du jeu, il est possible de dégager les variables du jeu.

2.2 Variables du jeu de bataille

Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.

Nature de la relation de comparaison : comparaison de quantités ; comparaison de grandeurs (longueurs ; périmètres ; aires ; masses ; durées (et aussi avant, après…)…) ; comparaison de nombres ou de mesures.

Nature des objets comparés : collections ; formes géométriques ; objets ; désignations ; résultats de calculs.

Collections ou objets : peuvent être réels ou représentés.

Obtention des objets à comparer : choix délibéré ou hasard.

Validation : qui ? comment ? éventuellement à l'aide de quel outil ? à quel moment du jeu ?

2.3 Domaines mathématiques

Seuls deux domaines mathématiques peuvent être abordés : le domaine des nombres et calculs, ainsi que celui des grandeurs et des mesures.

Numérique (nombres et/ou calculs) : les nombres sont énoncés, ou représentés par une constellation, une écriture chiffrée, une écriture utilisant les signes d'opérations… ou encore des représentations de collections d'objets organisées (constellations, matériel de numération…) ou non.

Grandeurs et mesures : les éléments sont des objets ou des assemblages d'objets, des représentations de ces objets ou assemblages ; on utilise la comparaison directe ou on a recours à la mesure ; dans ce dernier cas, les mesures peuvent être exprimées dans la même unité ou dans des unités différentes.

3 Mémoire de jeu et exercices de jeu

Pour le jeu de bataille, les reproductions de différentes situations de jeu avec le résultat de la comparaison serviront de mémoires du jeu ; elles seront aussi utilisées pour proposer aux élèves divers exercices de jeu destinés à renforcer l'appropriation des techniques rencontrées.

Jeux interrompus :

- Une situation de jeu étant donnée, déterminer le gagnant ; par exemple :

  Joueur A : $\boxed{7}$ Joueur B : $\boxed{6}$

- La carte du joueur A étant connue, il est possible d'amener les élèves à rechercher (en général ou dans un lot de cartes) toutes les cartes qui permettraient au joueur B de l'emporter.

Exercices de jeu :

- Les reproductions de diverses situations de jeu étant données, déterminer le gagnant.

- Rechercher les erreurs dans des situations de jeu proposées pour lesquelles on indique le gagnant.
-

4 Variantes et jeux dont l'architecture est proche de celle du jeu de bataille

4.1 Variantes de la bataille

La batawaf© (Djeco)

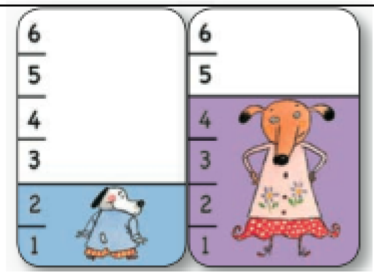
La carte sur laquelle est représenté le chien le plus grand l'emporte.

Cette variante est adaptée aux élèves de petite et moyenne section.

Domaine mathématique : grandeurs.

Relation de comparaison : comparaison directe de longueurs.

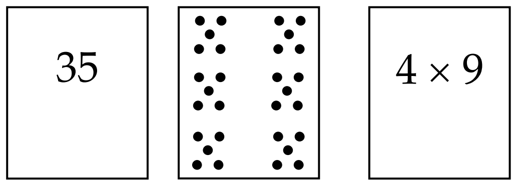
Dans ce jeu, on peut s'interroger sur la présence et le rôle des nombres et des graduations qui risquent de faire basculer la tâche vers une comparaison de nombres, la comparaison directe des longueurs étant rendue difficile du fait que les objets sont représentés et non manipulables.



Des cartes de la Batawaf

La bataille des constellations[20]

Trois types de cartes présentant différents types de désignations des nombres sont mélangés : des cartes sur lesquelles figurent des nombres, des cartes sur lesquelles figurent des produits ainsi que des cartes-constellations (rendant possibles plusieurs lectures des collections selon le point de vue adopté). Cette variante est adaptée à des élèves de cycle 3.



Cartes de la bataille des constellations

Domaine mathématique : domaine numérique. Il s'agit de travailler à la fois sur la compréhension de la multiplication (comme addition réitérée ou dans le cadre de la configuration rectangulaire) et d'œuvrer à la mémorisation de certains faits numériques.

Relation de comparaison : comparaison de nombres entiers naturels.

La bataille des masses[21]

Une boîte ouverte contient un lot de dix objets différents dont deux seulement de même masse. Douze cartes représentent ces objets : les deux objets de même masse sont représentés sur deux cartes chacun ; les autres objets sur une seule carte. Les douze cartes sont mélangées et distribuées également aux deux joueurs, qui les placent en pile devant eux, faces cachées.

Les deux joueurs retournent en même temps leur première carte. Ils choisissent chacun dans la boîte l'objet représenté sur leur carte et le posent sur un plateau d'une balance pour déterminer le plus lourd. Celui qui possède la carte représentant l'objet le plus lourd ramasse les deux cartes et les place sous sa pile. L'autre enfant replace les objets dans la boîte.

Domaine mathématique : grandeurs.

Relation de comparaison : comparaison directe de masses (sans recours à la mesure).

---

[20] Travail du groupe IREM de Draguignan ; 2009/2010.

[21] Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur, coordonné par Nicolas Rouche, collection "De la prime enfance à l'âge adulte", CREM, 2002 - document téléchargeable à l'adresse http://www.crem.be/index.php/Publications/dl/?Id=4.

La bataille des longueurs[22]

On s'affranchit ici du support des cartes.
Les joueurs disposent d'un même lot de 8 à 10 baguettes de longueurs différentes et d'un pot rempli de sable ou de semoule dans lequel ses baguettes sont plantées de façon à masquer les différences de longueurs.

Les deux joueurs choisissent une baguette dans leur pot et comparent ensuite les longueurs des deux baguettes tirées. Celui qui a la baguette la plus longue garde devant lui les deux baguettes. En cas d'égalité, chaque joueur choisit une autre baguette dans son pot ; la comparaison des longueurs de celles-ci permet de déterminer celui qui emporte les quatre baguettes.
On continue ainsi jusqu'à ce que les pots soient vides.

Deux règles sont alors possibles pour déterminer le gagnant de la partie :
Règle 1 : le gagnant est celui qui a emporté le plus grand nombre de baguettes.
Règle 2 : le gagnant est celui qui, en plaçant les baguettes gagnées bout à bout, obtient la plus grande longueur totale.

Afin de décontextualiser et de faire comprendre que le concept de longueur n'est pas attaché aux objets rectilignes rigides, on peut remplacer les baguettes par des bouts de laine ou de ficelle, placés dans une enveloppe opaque pour masquer les différences de longueur. Afin de prendre en compte les difficultés liées aux manipulations plus complexes dans ce cas, on prendra un lot de 5 à 7 bouts de laine et on se limitera à la règle 1 pour déterminer le vainqueur.

Domaine mathématique : grandeurs.

Relation de comparaison : comparaison directe de longueurs.

La bataille des évènements[23]

Les cartes reproduisent les pages d'un album connu des élèves ou une partie de ces pages permettant de repérer des évènements marquants de l'histoire ; chaque page (ou évènement) figure sur une ou deux cartes ; on constitue ainsi un jeu de 12 à 20 cartes que l'on répartit équitablement entre les joueurs.

Les joueurs retournent en même temps une de leurs cartes. Pour déterminer celui qui emporte les cartes, on compare les évènements : celui dont l'évènement se situe après emporte les deux cartes ; on peut recourir à l'album pour valider : en général, la structuration temporelle de l'histoire correspond à l'ordre des pages de l'album.

Domaine mathématique : grandeurs.

Relation de comparaison : ordre chronologique.

4.2 Jeux d'architecture proche

Les jeux dont l'architecture est proche de celle du jeu de bataille correspondent à des jeux de comparaison.

Le jeu des boîtes empilées[24]

Des boîtes contiennent un certain nombre d'objets (3, 5, 4, 1, 2, 4, par exemple) ; ces objets peuvent être des jetons, des billes… ; les boîtes sont empilées, seul le contenu de la boîte du dessus est visible.

À tour de rôle, chaque joueur lance le dé. Il prend la boîte du dessus de la pile si le nombre d'objets de la boîte est plus petit que le nombre représenté sur le dé. S'il ne peut pas prendre la boîte, c'est au joueur suivant de lancer le dé. Le gagnant est le joueur qui possède le plus d'objets.

Domaine mathématique : domaine numérique.

---

[22] D'après une idée de P. Eysseric.

[23] Ibid.

[24] In *Apprentissages numériques* ; ERMEL GS ; Hatier ; pp 68-76

Relation de comparaison : comparaison de nombres entiers naturels inférieurs à 10.

Le jeu des boîtes alignées[25]

Cette situation d'apprentissage fait suite au jeu des boîtes empilées. Le principe reste le même, le choix de la boîte parmi un lot de boîtes revenant cette fois au joueur.

V - LE JEU DE L'OIE

1 Règle usuelle du jeu de l'oie

La première mention du jeu de l'oie provient de la cour des Médicis à Florence, vers 1580. Traditionnellement, ce jeu de hasard comprend un plateau sur lequel figure une piste de 63 cases disposées en spirale enroulée vers l'intérieur et comportant un certain nombre de cases pièges et de cases chance et deux dés. À tour de rôle, chaque joueur lance les deux dés, et fait le total des points. Il avance alors son pion du nombre de cases correspondant au nombre obtenu, puis doit respecter les consignes de la case sur laquelle il arrive. Le gagnant est le premier joueur exactement arrivé à la case 63[26].

2 Analyse du jeu de l'oie

2.1 Architecture du jeu de l'oie

Le jeu de l'oie est un **jeu de parcours**, il est d'ailleurs considéré comme l'ancêtre des jeux actuels de parcours et de plateau.
Il s'agit de déplacer un (ou plusieurs) pion(s) **sur une piste orientée**, en fonction d'indications données par le jet de dés et/ou par les cases du parcours. Ces indications prennent des formes différentes :

- les constellations des dés indiquent le nombre de cases d'un déplacement en avançant ;

- le codage des cases peut indiquer un nouveau déplacement, en avançant ou en reculant, le nombre de cases étant soit défini par le jet de dés (*exemple :* si un joueur arrive sur la case 27, il avance de nouveau du même nombre de cases), soit prédéfini dans le jeu (*exemple :* si un joueur arrive sur la case 42, alors il retourne sur la case 30) ;

- le codage des cases peut également indiquer une action (*exemple :* si un joueur arrive sur le puits, case 31, alors il devra attendre qu'un autre joueur le délivre en prenant sa place).

2.2 Variables de jeux de parcours

Nombre de pions : un ou plusieurs pions par joueur.

Nature du(des) pion(s) : le joueur ; une figurine (bonhomme, cheval… soulignant l'orientation) ; un pion ou un jeton (non orienté).

Nature de la piste : piste simple ou parcours de plusieurs pistes possibles dont le choix est laissé au joueur ; la piste peut être orientée ou non.

Nombre de plans de jeu et partage de la piste de jeu : une seule piste partagée par tous les joueurs sur un unique plan de jeu ; une piste par joueur sur un support de jeu partagé ; une piste et un support de jeu par joueur.

Espace de jeu : micro ou méso espace.

Longueur de la piste : nombre de cases.

---

25 Ibid.

26 La règle traditionnelle accompagnée du plateau est présentée en annexe.

Nature des cases : avec ou sans consignes ; avec ou sans codage.[27]

Nature du déplacement : déplacement d'un nombre de cases donné ; déplacement jusqu'à une case contenant un élément déterminé par le jet de dé (exemple : forme présente sur la face supérieure du dé).

Ce qui provoque le déplacement : une consigne du maître ; un ou plusieurs dés ; une ou plusieurs cartes…

Présence ou pas d'un déplacement « blanc » : par exemple le dé tombe sur une face blanche qui oblige à attendre le tour suivant pour se déplacer.

Organisation : collectif ; petit groupe ; à deux ; individuel.

Validation : qui ? comment ? à quel moment du jeu ?

2.3 Domaines mathématiques

Quel que soit le domaine mathématique dans lequel on peut proposer ce jeu à des fins d'apprentissage, des compétences de l'ordre de la structuration de l'espace, liées au déplacement sur une piste orientée, sont mises en œuvre.

Numérique (nombres et/ou calculs) : le déplacement est indiqué par une donnée d'ordre numérique ; les nombres sont énoncés ou représentés par une constellation, une écriture chiffrée, une écriture utilisant les signes d'opérations… ou encore des représentations de collections d'objets organisées ou non sont proposées… ou enfin des signaux sonores sont donnés.

Géométrique : le déplacement est indiqué par une donnée d'ordre géométrique ; des informations d'ordre géométrique figurent sur les cases du parcours ; ce sont des formes ou des assemblages de formes ; des noms de formes ; des représentations par le dessin ou des descriptions de formes…

Logique (classements) : le déplacement est indiqué par un critère ; la case de destination doit être conforme à celui-ci (couleur, taille, ouvert/fermé…).

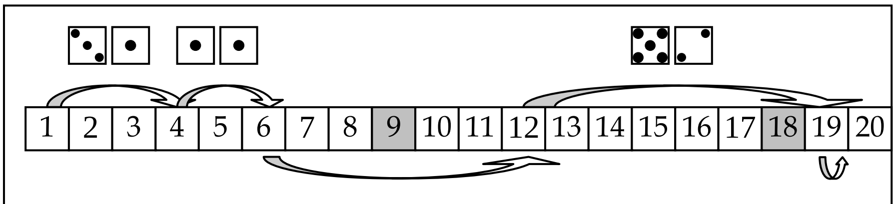
3 Mémoire de jeu et exercices de jeu

Le jeu de l'oie est un jeu de hasard. Le jeu interrompu consiste à faire parler les enfants, au cours d'une partie, sur ce qui serait favorable ou défavorable, c'est-à-dire leur faire préciser quelle face du dé ils souhaiteraient obtenir et les raisons de ce souhait. Dans le jeu interrompu, le nombre devient un outil qui permet d'anticiper les déplacements.

Un premier exercice de jeu peut être un jeu durant lequel la mémoire de jeu est constituée. En cycle 2, une mémoire de jeu peut prendre plusieurs formes :

[27] Dans le jeu de l'oie, les nombres ont deux statuts : « nombre repère » et « nombre quantité ».

- à partir de la représentation de la piste



Exemple d'un début de partie

- sous forme d'un tableau

Exemple d'un début de partie :

Jets de dés obtenus	⚂ ⚀	⚀ ⚀	⚄ ⚀	-
Cases atteintes à chaque tour	4	6 → 12	19	19

D'autres exercices de jeu peuvent s'appuyer sur l'une ou l'autre de ces mémoires de jeu. Par exemple :

- Deux données étant connues (la case sur laquelle se trouve le pion avant le déplacement ; celle sur laquelle il se trouve après ; ou le jet de dés), il faut trouver la troisième donnée. Il s'agit de problèmes du champ additif, de type transformation d'état (selon la typologie de G. Vergnaud), la transformation étant positive, avec recherche de l'état final, de l'état initial ou de la transformation elle-même.

- On connaît la case sur laquelle se trouve le pion, il s'agit de proposer un jet de dés le plus (ou le moins) favorable possible en tenant compte des contraintes de la piste. Il s'agit ici de mettre en œuvre un raisonnement logique consistant à examiner tous les possibles.

Un troisième type d'exercices de jeu peut consister en une variante du jeu de l'oie, par exemple en introduisant un deuxième pion par joueur, le déplacement de l'un ou de l'autre (ou des deux) en fonction des dés étant laissé à la charge du joueur. Ici on introduit un choix.

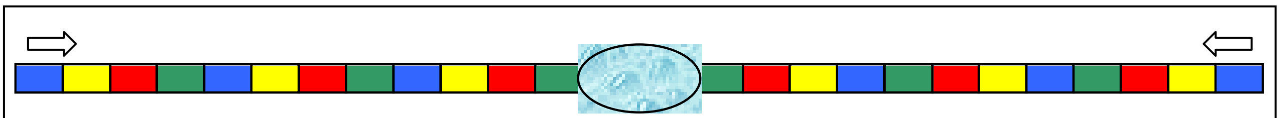
4 Variantes et jeux dont l'architecture est proche de celle du jeu de l'oie

Il existe une grande variété de jeux de parcours, certains traditionnels, d'autres plus modernes. Nous en citons quelques-uns.

4.1 Des variantes du jeu de l'oie

La mare aux canards[28]

La piste, formée de cases de couleur, mène à une mare dans laquelle s'ébattent trois canards.



Piste de la mare aux canards

À tour de rôle, les joueurs déplacent leur bonhomme jusqu'à la prochaine case de la couleur indiquée par le dé. Lorsque le bonhomme se trouve sur la dernière case avant la mare, le joueur prend un canard et replace son bonhomme au départ.

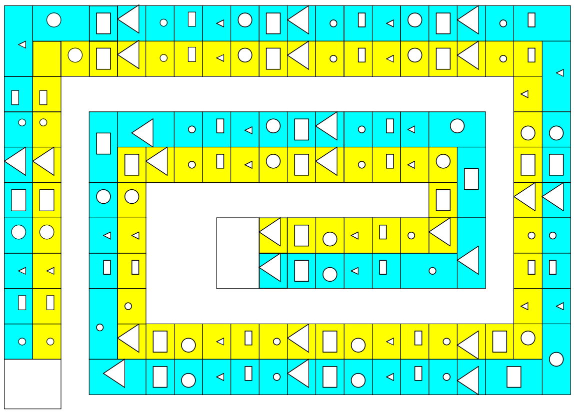
Domaine mathématique : logique

Règle de déplacement : critère de conformité à la couleur.

Ce jeu de hasard est adapté à la petite section.

[28] In *Les mathématiques par les jeux - PS* ; L. CHAMPDAVOINE ; Nathan ; 1992 ; p.20

Le chemin des formes [29]



Piste du chemin des formes

La piste est formée de cases dans lesquelles des formes de différentes tailles sont représentées. Les mêmes figurent sur les faces du dé.

A tour de rôle, chaque joueur lance le dé et déplace son pion jusqu'à la prochaine case correspondant à la face du dé.

Domaine mathématique : logique (taille) et géométrie (formes).

Règle de déplacement : critère de conformité à la taille et à la forme.

C'est un jeu de hasard, adapté à moyenne section.

Le jeu des petits chevaux

Ce jeu de parcours traditionnel allie hasard (jet de dés) et stratégie (choix du pion à déplacer) dans le domaine numérique (nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 12).

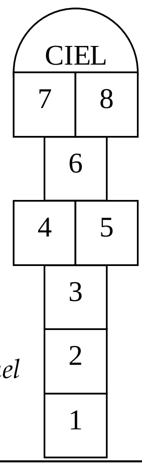
Cartagena [30]

C'est un jeu de stratégie (choix des pions à déplacer et choix du déplacement) avec une part de hasard (tirage des cartes), dans le domaine de la logique (motif).

Les cartes du jeu et un segment du plateau de Cartagena

Ce jeu est adapté à des élèves de cycle 3.

4.2 Jeux de marelle



Jeux de marelle traditionnel

C'est un jeu de cours très ancien, que l'on retrouve sur le forum de Rome.
Au Moyen Âge, ce jeu est très pratiqué et le dessin rappelle celui des églises.

Dans le jeu traditionnel, un parcours est dessiné sur le sol et va de terre (1) à ciel (9). Après avoir lancé un jeton (souvent un caillou), les joueurs progressent dans les différentes cases à cloche-pied, tout en évitant les cases où se trouvent les pierres, ainsi que d'empiéter sur les lignes du tracé.
Le gagnant est celui qui le premier arrive à placer son jeton sur le 9 (ciel) et à effectuer le parcours.

L'architecture des jeux de marelle est proche de celle du jeu de l'oie, puisqu'il fait intervenir un déplacement sur une piste.

Les domaines mathématiques cités précédemment sont tous envisageables.

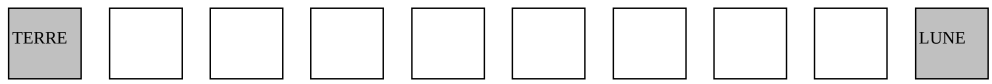
---

[29] In *Les mathématiques par les jeux - MS* ; L. CHAMPDAVOINE ; Nathan ; 1995 ; p.22

[30] L. COLOVINI ; Venice Connection, Winning Moves ; Rio Grande Games ; 2000

Les jeux de marelle, à vivre dès la petite section, sont transposables dès la moyenne section en jeux de parcours dans le micro-espace.

Exemple de jeu de marelle en PS[31] : En salle de motricité, les élèves doivent avancer d'une case à cloche-pied quand l'enseignant tape une fois dans ses mains.

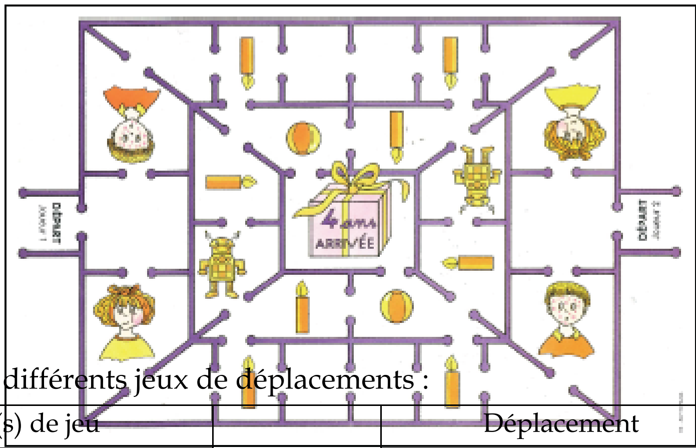


Piste d'un jeu de marelle pour la salle de motricité

4.3 Jeux de labyrinthe

Dans les jeux de labyrinthe, il s'agit de se déplacer sur un parcours non orienté. L'architecture de tels jeux est donc proche de celle du jeu de l'oie.

Exemple : Plateau du « Cadeau d'anniversaire »[32]



Le tableau ci-dessous synthétise l'analyse de ces différents jeux de déplacements :

Nom du jeu	Pion(s)		Piste(s) et plan(s) de jeu					Déplacement	
	Nombre par joueur	Nature	Espace	Partage	Nature	Longueur	Nature des cases	Provoqué par…	Nature
La mare aux canards	1	Bon-homme	Micro-espace	1 piste par joueur. Plan de jeu pour tous	Piste simple orientée	12	Codage couleur	Jet d'un dé à couleur	Jusqu'à une case de même couleur
Le chemin des formes	1	Pion	Micro-espace	1 piste par joueur. Plan de jeu pour tous	Piste simple orientée	73	Codage forme et taille	Jet d'un dé avec formes petites et grandes	Jusqu'à une case de même forme et même taille
Les petits chevaux	4	Che-vaux	Micro-espace	Une piste pour tous	Piste simple orientée	56	-	Jet de 2 dés constellation	Nombre de cases
Cartagena	6	Pions	Micro-espace	Une piste pour tous	Piste simple orientée	36	Codage motif	En avançant un pion de son choix : choix d'une carte parmi	Jusqu'à une case libre de même motif

[31] Voir *Des jeux et des mathématiques de la PS au CM2* ; P. EYSSERIC ; Bulletin APMEP ; 420 ; 1999 ; pp. 5-14

[32] In *Maths en pousse - 17 jeux mathématiques* ; J-L. BRÉGÉON, G. MÉTÉNIER ; collection Diagonale MS ; Nathan ; 1994 ; p. 17

								plusieurs déjà tirées ou En reculant un pion de son choix	Jusqu'à la première case occupée par 1 ou 2 pions
La marelle tradition-nelle	1	Joueur	Méso-espace	Une piste pour tous, chacun son tour	Piste simple orientée	9	Codage numérique	Le signal de départ	Toutes les cases sauf celle sur laquelle se trouve le caillou
Le cadeau d'anniver-saire	1	Person-nage	Micro-espace	Une piste pour tous	Laby-rinthe	26	Consignes d'actions (déplace-ments, gestion du stock de bougies)	Jet d'un dé avec choix du parcours	Nombre de cases

VI - DES EXEMPLES DE MODULES DE FORMATION

En tant que formateurs d'enseignants du premier degré, nous avons décidé de mettre en œuvre en partie et « en accéléré » dans cet atelier une stratégie de type homologie (Kuzniak 1994). Ce dispositif est caractérisé par le fait que, proposant une mise en situation sur un temps court, pour sensibiliser les participants simultanément aux apports mathématiques et didactiques qu'elle est susceptible de provoquer, nous les confrontons à une situation qu'ils pourront apprêter pour la proposer à des étudiants ou des stagiaires.

Les étudiants ou stagiaires, à qui serait proposée une telle mise en situation, s'approprient ainsi l'intégralité de la démarche d'intégration d'un jeu aux apprentissages mathématiques :

- Analyse du jeu et mise en évidence de son architecture mathématique ;
- Exploration des différentes variables pour passer du jeu de société particulier envisagé au départ aux caractéristiques génériques du jeu ;
- Inventaire des domaines mathématiques dans lesquels le jeu générique pourra être décliné ;
- Situation d'homologie autour de certains de ces jeux permettant de construire et de s'approprier mémoires de jeu et exercices de jeu ;
- Construction de nouveaux scénarios pour la classe en jouant sur les variables pour des déclinaisons par niveau de classe et des progressions dans l'utilisation d'un jeu.

Nous complétons le travail présenté en atelier par des exemples de déroulements de modules de formation pour préciser l'intérêt, d'un point de vue mathématique et didactique, de ces mises en situations.

1 Un module de formation continue d'enseignants du cycle 1 au cycle 3

Contrairement à la demande régulièrement formulée par les enseignants de « jeux nouveaux », « inédits », il nous semble particulièrement fécond, dans le cadre d'une formation initiale et/ou continue, dans un premier temps, de proposer à des groupes un jeu de société usuel et de leur demander de dégager l'architecture mathématique du jeu ainsi que les cadres d'apprentissage dans lesquels il pourra être utilisé à l'école. La confrontation des différentes analyses permet alors d'élaborer des scénarios pour la classe adaptés aux différents apprentissages visés. Cette approche leur permet ensuite de mener des analyses « pointues » des nouveaux jeux dont ils découvrent les règles en les situant par rapport à ces « références ». Ils sont également plus armés pour repérer les différentes phases (les différents moments) à gérer dans la classe.

Durée du module : 12 heures

Public : PE du cycle 1 au cycle 3

Trame du déroulement de la formation :

1. Analyse du jeu de loto : du particulier au générique
   Objectif : Découvrir l'architecture et l'intérêt de ce jeu dans les apprentissages mathématiques.
2. Déclinaison du jeu dans le domaine géométrique
   Objectif : Travail autour des variables du jeu.
3. Compléments : les lotos de la « moisson des formes » (information, documentation).
4. Conclusion : intérêt et richesse des jeux du patrimoine
   - Utilisation possible dans de nombreux contextes.
   - Pas de temps perdu dans l'appropriation de règles nouvelles.
   - Temps du jeu adaptable au temps de la classe.
   - De bons supports pour l'entraînement.
5. Expérimentation par groupes d'autres jeux
   Objectif : Vivre la situation de jeu pour repérer les pré-requis mathématiques, les utilisations possibles en classe, l'architecture et les variantes.
6. Jeux de stratégie et résolution de problèmes
   Objectif : Expliciter le traitement et le codage de l'information, le rôle de l'anticipation et de la formulation[33].

2 Un travail autour du jeu des maisons[34] en formation initiale ou continue

Dans ce jeu, chaque joueur déplace un pion à son tour, sur une piste orientée, du nombre de cases indiqué par un jet de dé. En fonction de la case sur laquelle il va poser son pion, il emporte une carte représentant un toit, un premier étage ou un rez-de-chaussée d'une maison.

Lorsqu'un des joueurs est parvenu sur la case Arrivée, chacun des joueurs essaie de reconstituer le plus grand nombre possible de maisons complètes à l'aide des cartes remportées. Pour cela, il peut éventuellement échanger certaines de ses cartes auprès d'un banquier en respectant des règles d'échange : deux étages contre un rez-de-chaussée, cinq étages contre un toit.

L'architecture de ce jeu est celle du jeu de l'oie : c'est un jeu de parcours. Cependant par rapport au jeu de l'oie traditionnel, on a renoncé à beaucoup d'éléments : le nombre n'intervient plus que pour indiquer le nombre de cases correspondant à la longueur du déplacement (les cases de la piste ne sont

---

33 *Apprentissage à la résolution de problèmes au CE* ; CRDP de Grenoble ; 1988

34 *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* ; CP ; ERMEL ; Hatier, 1991 et *Chacun, tous... différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages,* Rencontres pédagogiques n° 34, INRP, 1995 - téléchargeable à l'adresse http://lara.inist.fr/handle/2332/1260.

pas numérotées) ; les cases ne donnent pas de consignes d'action, mais indiquent seulement la carte que le joueur emporte. Ces simplifications, permettent de recentrer le jeu sur l'objet de l'apprentissage visé.

On a ici utilisé l'architecture du jeu de l'oie pour construire une situation d'apprentissage, mise en scène par le jeu : le jeu des maisons est un **jeu pour apprendre** à distinguer valeur et quantité, puisque le joueur gagnant ne sera pas celui qui atteint la case Arrivée en premier, ni celui qui a emporté le plus grand nombre de cartes, mais celui qui, en prenant en compte la valeur de chaque carte, aura réussi à construire le plus grand nombre de maisons complètes.

Contrairement à beaucoup d'autres jeux, le jeu des maisons n'est pas à utiliser seulement dans des phases d'entraînement.

En formation, la vidéo de l'INRP, un peu « ancienne », permet de présenter différents moments de la vie de ce jeu dans une classe de CP. Les stagiaires doivent repérer dans le film :

- les différents moments de l'utilisation du jeu et la forme des différentes activités de la classe autour de ce jeu : ces observations peuvent ensuite être formalisées en les identifiant comme des mémoires de jeu et des exercices de jeu ;
- les différentes modalités de différenciation utilisée par l'enseignante dans sa classe.

Le document permet aussi de revenir sur l'importance de certains éléments du matériel et de sa préparation par l'enseignant : jeu de grand format pour le travail en classe entière ; plateau de jeu de taille standard pour le jeu à trois ou quatre ; reproductions des cartes du jeu comme matériel d'aide lors des phases d'exercices d'entrainement.

Il est aussi l'occasion de s'interroger sur l'intérêt de certains travaux proposés dans des fichiers au cycle 2. On donne la règle d'un jeu auquel - nous dit-on - ont joué plusieurs enfants ; le fichier représente la situation à laquelle ils sont arrivés dans le jeu et la tâche des élèves est de déterminer le gagnant.

Ces fiches pourraient constituer d'excellents exercices de jeu si les élèves avaient au préalable effectivement pratiqué le jeu en question.

Malheureusement, ce n'est pas ce qui se passe dans beaucoup de classes dans lesquelles les fiches sont utilisées sans pratique du jeu. L'habillage de l'exercice mathématique par le jeu devient alors pour certains élèves un obstacle supplémentaire : ils doivent se représenter une situation parfois complexe qui leur est présentée à l'aide de mots et d'images, mais à laquelle ils n'ont pas réellement été confrontés.

3 Un module de formation continue en ASH

Durée du module : 6 heures

Public : PE en formation CAPASH option D

Objectifs : - Découvrir et analyser des jeux conçus pour des apprentissages mathématiques ;
- Déterminer les différentes phases d'une mise en œuvre dans une classe ;
- Mettre en place des situations d'apprentissage basées sur ces jeux.

Trame du déroulement de la formation :

1. Introduction à la journée de formation : partir des représentations des stagiaires
   Objectif : Définitions, codification, classification des jeux
2. Situation d'homologie à partir du jeu Magix 34[35]
   - Mise en situation des stagiaires
   - Analyse mathématique du jeu, émergence des changements de cadre
   - Analyse pédagogique et didactique de la mise en œuvre
   Objectif : mettre en évidence les différents moments d'une situation d'apprentissage (appropriation, action, formulation, institutionnalisation)

[35] *Quelles problématiques pour la formation des enseignants à la pratique du jeu en classe ?* in Actes du XXXII[e] colloque COPIRELEM ; D. FARADJI et C. TAVEAU ; 2005

3. Le point sur les apprentissages par le jeu
   Objectif : notion d'exercice de jeu, de mémoire de jeu
4. Jouer et faire jouer
   Les stagiaires sont mis dans une situation de jouer, puis de construire des mémoires de jeu et enfin d'être confrontés à des exercices de jeu, ce qui leur permet de percevoir compétences et connaissances concernées par ces activités. Ils sont amenés à construire des scénarios pour la classe en jouant sur les valeurs des variables pour des déclinaisons par niveau de classe, ainsi que des progressions dans l'utilisation d'un jeu.

4 Une intervention en master enseignement

Cadre de l'intervention : Unité d'Enseignement sur liste « Mathématiques : utiliser des jeux dans l'enseignement », d'une durée totale de 27 heures.

Public : étudiants de M1, semestre 2.

Objectifs : Savoir utiliser le jeu pour contribuer à développer des savoirs et des savoir-faire dans les différents domaines mathématiques des programmes de l'école primaire (maternelle et élémentaire).

Déroulement d'un TD de 3 h « Du jeu à une situation d'apprentissage en maternelle » :

Les étudiants qui ont suivi ce module ont eu au préalable l'occasion de voir fonctionner des ateliers de jeu en PS/MS. Ils ont pu ainsi prendre conscience de certaines difficultés spécifiques aux enfants de maternelle.

1. Découverte et appropriation de jeux mathématiques
2. Analyse d'un jeu à plusieurs niveaux
   - analyse mathématique ;
   - réflexion sur les modalités d'un jeu interrompu : organisation, objectifs visés, consigne, supports ;
   - proposition d'une évaluation : modalités, supports, compétences évaluées, élaboration d'une grille de critères.

VII - CONCLUSION

Pour terminer, il semble utile de revenir sur la diversité des jeux à proposer dans le cadre d'un travail de formation.

Ces jeux doivent permettre aux (futurs) professeurs de disposer d'un large panorama des structures mathématiques présentes dans le champ des apprentissages mathématiques de l'école :

Les jeux d'association comme le loto, les dominos ou le jeu des mariages qui conduisent à la constitution de couples dont les éléments sont reliés soit par une relation d'équivalence, soit par une relation fonctionnelle, soit par une relation d'opposition (négation).

Les jeux de comparaison comme le jeu de bataille qui mettent en jeu une relation d'ordre total entre les éléments d'une collection.

Les jeux de déplacement sur une piste qui permettent la mise en relation entre le nombre, mémoire d'une position sur la piste, et le nombre, mémoire d'une quantité (le nombre de cases, « longueur » du déplacement) ; ce lien, abordé ici dans un contexte discret, préfigure le rôle de la droite numérique dans la compréhension des nombres.

Les jeux qui, comme le jeu des familles ou le Rami, mettent en jeu simultanément une relation d'équivalence et une relation d'ordre total ou partiel entre les éléments.

Les jeux d'alignement de la famille du morpion[36] en lien avec la structuration spatiale.

Les jeux de « portrait» de la famille du Master Mind en lien avec les activités logiques.

D'autre part, ce choix des jeux permet une économie appréciable dans les classes en ce qui concerne le temps nécessaire à l'appropriation des règles qui sont simples et souvent connues d'une partie des élèves. Il facilite un recentrage de l'activité sur les savoirs mathématiques et évite de transformer le jeu, outil d'apprentissage, en un objet d'étude.

VIII - BIBLIOGRAPHIE

AYME Y., (2006) Dossier : le jeu en classe, *Cahiers pédagogiques*, **448**, 9-62.

BETTINELLI B., (1995) La moisson des formes : matériel et livret pédagogique. Aléas Editeur.

BOLON J., (1994) Comment analyser un jeu mathématique. *Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques tome III*, COPIRELEM, 57-60.

BOULE F., (1985) Manipuler, organiser, représenter. Armand Colin.

BOULE F., (2002) Jeux de calcul à l'école. Bordas.

BOULE F., (2005) Faites vos jeux. Éditions Didier.

BRÉGÉON J-L., MÉTÉNIER G., GÉROME E. (1994) Maths en pousse MS. Collection Diagonale. Nathan.

BRÉGÉON J-L., MÉTÉNIER G. (1994) Maths en herbe GS. Collection Diagonale. Nathan.

BROUSSEAU G., (2002) Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques, *Questions éducatives, l'école et ses marges : didactique des mathématiques*, **22/23**, 83-155.

CHAMPDAVOINE L., (1986) Les mathématiques par les jeux : grande section et CP. Nathan.

CHAMPDAVOINE L., (1992) Les mathématiques par les jeux : PS. Nathan.

CHAMPDAVOINE L., (1995) Les mathématiques par les jeux : MS. Nathan.

CHARNAY R., DOUAIRE J., GUILLAUME J.-C., VALENTIN D., (1995) Chacun, tous... différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages, *Rencontres pédagogiques n° 34*, INRP.

DE GRANDMONT N., (1999) Pédagogie du jeu : jouer pour apprendre. Editions Logiques : Québec.

DESCAVES A., (1992) Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes. Hachette.

EYSSERIC P., (1999) Des jeux et des mathématiques de la maternelle au CM2, *Bulletin de l'APMEP*, **420**, 5-14.

ERMEL (1988). Apprentissage à la résolution de problèmes au CE. CRDP Grenoble.

ERMEL (1990) Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Grande Section de maternelle. Hatier.

ERMEL (1991) Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cours Préparatoire. Hatier.

ERMEL (1993) Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cours Élémentaire 1. Hatier.

FARADJI D., TAVEAU C., (2005) Quelles problématiques pour la formation des enseignants à la pratique du jeu en classe ?, in *Actes du XXXIIe colloque COPIRELEM*. CRDP Versailles.

GREFF E., HELAYEL J., (2009) Situations-jeux pour les apprentissages mathématiques en maternelle, GS. Retz.

GROUPE JEUX APMEP (1982) Jeux 1 : les jeux et les mathématiques, *Brochure APMEP*, **44**.

GROUPE JEUX APMEP (1983) Ludofiches 83, *Brochure APMEP*, **52**.

GROUPE JEUX APMEP (1985) Jeux 2 : jeux et activités numériques, *Brochure APMEP*, **59**.

[36] Puissance 4, Quarto, dames chinoises,…

GROUPE JEUX APMEP (1988) Ludofiches 88, *Brochure APMEP*, **68**.

GROUPE JEUX APMEP (1990) Jeux 3 : jeux pour la tête et les mains, *Brochure APMEP*, **78**.

GROUPE JEUX APMEP (1998) Jeux 5 : des activités mathématiques pour la classe, *Brochure APMEP*, **119**.

GROUPE JEUX APMEP (2002) Jeux 6 : des activités mathématiques pour la classe, *Brochure APMEP*, **144**.

GROUPE JEUX APMEP (2005) Jeux 7 : des activités mathématiques pour la classe, *Brochure APMEP*, **169**.

GROUPE JEUX APMEP (2008) Jeux 8 : des activités mathématiques pour la classe, *Brochure APMEP*, **185**.

GROUPE JEUX APMEP (2009) Jeux Ecole, *Brochure APMEP*, **187**.

JULLEMIER G., (2005) Jouer pour apprendre. Hachette.

KRYZWANSKI N., (2004) Apprendre la numération avec des jeux de cartes. Retz.

KRYZWANSKI N., (2007) Jeux de dés et numération. Bordas.

MARTIN F., (2003) Apprentissages mathématiques : jeux en maternelle. CRDP Aquitaine.

NGONO B., PELTIER, M.L., DUBUT A. & AL., (2000) « *Géoloie* » *et autres jeux mathématiques à l'école Clément Maroy*. IREM Rouen.

QUINTRIC C., (1999-2000) Jeux de société et apprentissages mathématiques au cycle 1, *Grand N spécial maternelle*, 145-168.

ROBINET J., (1987) Quelques réflexions sur l'utilisation des jeux en classe de mathématiques, *Cahiers de didactique,* **34**. IREM Paris 7.

ROUCHE N. & AL., (2002) Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur, *collection "De la prime enfance à l'âge adulte"*. CREM, Belgique.

RODRIGUEZ A., (1993) Dossier Mathématiques : jouez le jeu ! *Journal des Instituteurs,* 49-63.

IX - ANNEXE : LA RÈGLE DU JEU DE L'OIE

INTÉRÊTS ET LIMITES POUR LA FORMATION D'UNE SITUATION D'HOMOLOGIE : SITUATION DE COMMUNICATION SUR UN SOLIDE. CONDITIONS POUR UN TRANSFERT DANS LA CLASSE

Annette Braconne-Michoux
Formatrice IUFM Lyon, site de Saint Etienne, Université Lyon 1
Groupe école collège IREM de Lyon
annette.braconne-michoux@iufm.univ-lyon1.fr
Hélène Zucchetta
Formatrice IUFM Lyon, site du Rhône, Université Lyon 1
Groupe école collège IREM de Lyon
helene.zucchetta@iufm.univ-lyon1.fr

Résumé

A partir de la description d'une situation vécue lors de l'atelier (tant du point de vue des « enseignants » que de celui des « élèves »), un questionnement sur la formation est proposé : quels sont les éléments de la situation qui relèvent de l'homologie (qui peuvent être repris sans distorsion aucune lors de leur implémentation en classe) et quels sont ceux qui demandent une transposition (annoncée, décrite par le formateur IUFM) ? Quelles sont les variables didactiques en jeu lors de la transposition d'une situation de formation à une situation de classe ? Quels peuvent être les éléments de synthèse pédagogique, didactique et mathématique que la situation permet d'aborder en formation ? Quels sont les apports théoriques, didactiques ou pédagogiques qui pourraient être faits à la suite de cette situation et sa transposition par les maîtres en classe, dans un contexte de formation initiale ou continue ?
En s'appuyant sur les échanges entre les participants à l'atelier, des éléments de réponses aux questions posées sont apportés.

I - INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DE L'ATELIER

Le groupe école collège de l'IREM de Lyon conçoit des formations « clés en main » adaptables à différents publics (formateurs, conseillers pédagogiques, stage REP, liaison école-collège, formation T1-T2, FC 2nd degré collège…). Ces formations sont construites généralement à partir d'une situation problème à faire vivre aux stagiaires pour questionner les modalités de sa mise en œuvre éventuelle dans une classe. Cela nous a conduit à travailler sur la gestion de classe et en particulier le rôle du maître dans la phase de recherche et la phase de mise en commun. Pour ce faire, après avoir vécu une situation en tant qu'apprenant, le stagiaire est amené à s'interroger sur :

- les aides à apporter aux élèves,
- la gestion de l'activité et les interventions du maître,
- l'utilisation des productions des élèves et donc leur rôle en vue d'en débattre et d'en tirer une synthèse…

La question de la validation est aussi un point important à aborder en formation.
Ainsi, dans des modalités similaires, pendant le temps de l'atelier, nous avions l'ambition d'apporter le questionnement suivant : à quelles conditions les démarches impliquées dans la situation proposée sont-elles transférables en classe et en formation ? Quels sont les éléments de la situation qui relèvent de l'homologie (qui peuvent être repris sans distorsion aucune lors de leur implémentation en classe) et quels sont ceux qui demandent une transposition (annoncée, décrite par le formateur IUFM) ? Quelles

sont les variables didactiques en jeu lors de la transposition d'une situation de formation à une situation de classe ? Quels peuvent être les éléments de synthèse pédagogique, didactique et mathématique que la situation permet d'aborder en formation ?
Dans cet atelier, nous nous proposons, dans un premier temps, de faire vivre une situation bien connue : « le solide caché » et de faire réfléchir les participants sur leur vécu. Dans un deuxième temps, nous posons la question aux formateurs des apports théoriques, didactiques ou pédagogiques qui pourraient être faits à la suite de cette situation et sa transposition par les maîtres en classe, dans un contexte de formation initiale ou continue.

Dans cet article nous décrirons dans un premier temps, l'activité et le déroulement de l'atelier et dans un deuxième temps, nous reviendrons sur nos choix, sur les limites de l'homologie et la transposition nécessaire dans le cadre d'une formation.

II - DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ, DE SON DÉROULEMENT ET DU VÉCU DES PARTICIPANTS

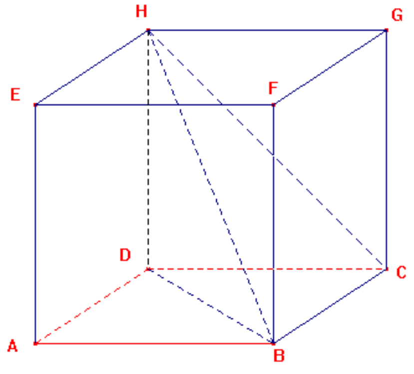
Dans cette partie, nous décrirons en détails nos objectifs pour le premier temps de l'atelier, le déroulement tel que nous l'avions prévu puis ce qui s'est effectivement passé pendant l'atelier.

1 Description de l'activité

L'activité est proposée aux participants à l'atelier dans les conditions où elle est mise en œuvre dans le contexte de la formation ou en classe de cycle 3 : deux des participants deviennent « animateurs » et ont en charge la gestion de la situation à partir d'un canevas, comme s'il s'agissait d'une situation « clé en main », les autres participants deviennent « élève » ou « stagiaire ».

La situation choisie et bien connue du « solide caché » (jeu du « qui est-ce ? ») consiste à faire deviner les caractéristiques d'un solide que les « élèves » ne voient pas et à leur demander d'en faire un patron. Les « élèves » posent des questions auxquelles un « animateur » ne répond que par « oui » ou « non ».

Le solide choisi dans l'atelier est le tétraèdre HBCD où H, B, C et D sont quatre sommets d'un cube : la base BCD est la moitié d'une face du cube et la hauteur correspondante [HD] est l'arête du cube perpendiculaire à la diagonale [BD] de la face du cube (voir dessin ci-dessous). Ce tétraèdre sera nommé « pyramide-sixième de cube[1] ».



[1] On obtient cette pyramide à partir de la « pyramide tiers-cube » (dont la base est une face d'un cube et la hauteur une arête du cube) et on sectionne suivant un plan perpendiculaire à la base suivant sa diagonale. En fait, on obtient deux « pyramides-sixième de cube » symétriques par rapport à ce plan.

2 Mise en œuvre de l'activité (Déroulement et consignes)

Deux participants « enseignants » ou « animateurs » sont désignés pour mener la séance : c'est-à-dire gérer les phases de présentation, les phases de recherche, le temps, les mises en commun qui suivent et la synthèse finale. (Ils disposent d'environ une heure pour mener à bien l'ensemble de l'activité).

Un seul « enseignant » met la situation en œuvre comme elle pourrait l'être dans une classe de cycle 3, avec un autre solide. Est fournie aux « enseignants » une fiche de préparation (voir annexe 1) qu'ils ne sont pas obligés de suivre à la lettre. La consigne suivante, présente dans la fiche de préparation, est donnée oralement par l' « enseignant »:

Consigne : « *Dans cette boîte un solide est caché. Vous allez devoir* ***construire à main levée*** *un patron de ce solide (règle et ciseaux interdits), puis le construire en vraie grandeur. Pour cela vous pourrez poser des questions auxquelles l'enseignant ne répondra que par « oui » ou par « non ».*

Une précision au déroulement est aussi apportée : dès qu'ils pensent que c'est possible parce qu'ils ont suffisamment d'informations, les stagiaires « élèves » par groupes de 2 doivent produire un patron à main levée du solide caché, sur une feuille A3.

Pendant que les meneurs de séance prennent connaissance du solide (à l'extérieur de la salle), les autres participants « élèves » commencent à préparer individuellement des questions.

Nos prévisions de déroulement :

Une première mise en commun autour des productions à main levée vise à valider les patrons : l'« enseignant » a toute liberté dans la gestion du débat autour des productions de patrons. Cette gestion sera analysée dans un deuxième temps de l'article.

Quand « l'enseignant » juge que les informations indispensables ont été données et que le débat autour de la validation des patrons à main levée peut être clos, les affiches sont décrochées et « l'enseignant » demande à chaque groupe, de produire un patron du solide en grandeur réelle, toujours sans modèle du solide réel mais en sachant que le côté [HD] mesure 6 cm. Pour la phase de construction en vraie grandeur, des aides possibles sont suggérées dans la fiche de préparation.

Elles sont de plusieurs types et l'enseignant peut les fournir, ou non, aux « élèves » :

- faces du solide préalablement découpées qu'il peut distribuer en totalité ou en partie, à la demande ou non des stagiaires ;
- patrons à main levée validés au cours de la mise en commun ;
- description des faces avec leurs dimensions (toutes ou partiellement données) ;
- dessin en perspective de la pyramide dans le cube (voir schéma ci-dessus) ;
- indication sur la forme du solide (1/6 du cube : tétraèdre inscrit dans un cube qui a pour sommet un sommet du cube et pour base la moitié d'une face du cube).

La pertinence des aides et de leur utilisation sera analysée dans le deuxième temps.

La validation des productions de patrons en vraie grandeur peut se faire par comparaison du solide construit avec la pyramide contenue dans la boîte.

La conclusion est laissée à l'initiative de l' « animateur ». La validation des productions est suivie d'une éventuelle synthèse.

Nous avions prévu que le second « animateur » observe en s'interdisant toute intervention et qu'il repère :

- La nature des interventions de son collègue ou des « élèves »,
- La nature des aides apportées par l' « enseignant » et les difficultés ou blocages auxquels ces aides sont peut-être des réponses.

Durant l'atelier nous avons préféré laisser plus de liberté au 2ème « animateur » tout en lui précisant qu'il était plutôt observateur.

3 Déroulement effectif et vécu des participants

Pour nous permettre de savoir comment les participants à l'atelier ont vécu les différentes phases de la situation, deux questionnaires différents sont distribués aux participants : un pour les « animateurs » et un pour les « élèves » (voir annexe n°2). Lors d'un débat, nous reprenons les réponses de l' « animateur » puis celles de l'observateur qui donnent leur point de vue sur les différents temps de l'activité (questions ; patron à main levée, débat autour des patrons, construction du patron en vraie grandeur ; validation des patrons), les autres participants complètent. Notre intention, en tant que responsables de l'atelier, est de faire en sorte que le groupe reste centré sur la gestion de cette séance, sur les choix faits par l'animateur (interventions orales en particulier) et leurs incidences sur la tâche et l'activité des « élèves ».

3.1 Le vécu et les réactions des « animateurs »

Le témoignage des animateurs est important et précis. En dépit du fait qu'ils aient eu dans les mains le solide en vraie grandeur, ils ont été surpris par le solide choisi et, l'identification de ses caractéristiques géométriques n'a pas été rapide ni assurée. En particulier, le fait que les quatre faces soient des triangles rectangles dont deux sont aussi des triangles isocèles a été difficile à appréhender. Ils ont eu aussi beaucoup de difficultés à repérer les quatre angles droits et à retrouver le cube dont le solide représente 1/6 du volume. La fiche de préparation qui donnait aussi une vue en perspective de la pyramide dans le cube a permis de lever certains doutes et de voir qu'une seule mesure allait pouvoir être donnée pour construire le patron en vraie grandeur. Bien que les deux volontaires « animateurs » aient déjà proposé ce genre de situation à leurs étudiants en IUFM, une inquiétude est apparue concernant le temps et la difficulté pour les « élèves » à trouver les informations nécessaires et suffisantes. Ils diront avoir été surpris de la rapide convergence dans l'identification des caractéristiques du solide et de la difficulté à noter au tableau l'ensemble des questions sans reformuler pour aller plus vite.

Nous avions prévu que le second « animateur » observe en s'interdisant toute intervention.

En fait, durant l'atelier, l'un a été plutôt « animateur » pendant que l'autre a noté au tableau les questions et la réponse correspondante. Cette répartition des rôles n'était pas prévue dans la fiche de préparation fournie mais cela devait certainement correspondre à des habitudes de la prise en charge de la gestion des informations.

La deuxième question posée[2] par un « élève » : « s'il y a N sommets, y a-t-il (N-1) sommets coplanaires ? » a déstabilisé à la fois les « animateurs » et les autres participants, car bien que correspondant à une pyramide, elle n'était pas attendue sous cette forme (elle ne fait pas partie des questions habituelles). Il s'est révélé parfois délicat de ne répondre que par « oui » ou par « non » à certaines questions ; certaines d'entre elles étant même indécidables. Des questions ont dû être précisées. Par exemple, la question « est-ce que les triangles sont superposables ? » (sous-entendu « tous ») est devenue « est-ce qu'il y a des triangles superposables ? » puis « est-ce que les 4 faces sont superposables ? ». La question « y-a-t-il des triangles rectangles ? » ayant obtenu une réponse positive, a été suivie de la question « Est-ce exactement 3 (puis 2) triangles rectangles ? » qui admet une réponse négative. La précision de la question a donc été ici déterminante. En effet, la même question posée avec « au moins » au lieu de « exactement », aurait donnée lieu à une réponse positive. La nécessité de la précision dans la formulation a surpris les « apprenants » qui ont formulé deux autres questions sur la nature des faces (triangles isocèles et existence d'une face non triangulaire) avant de reprendre la question « Est-ce qu'il y a 4 triangles rectangles ? ».

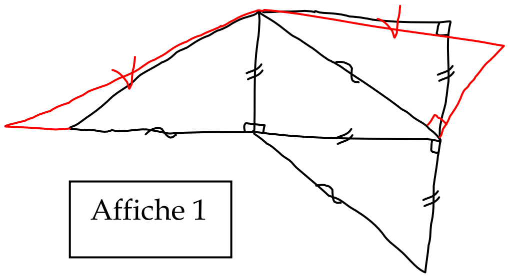
Un autre moment délicat pour les « animateurs » a été celui où ils ont pris la décision d'arrêter la période de questions : les participants avaient-ils un nombre suffisant d'informations pour élaborer un patron de solide ? En effet, chaque participant ayant préparé des questions en fonction de sa procédure d'élaboration du patron, certains n'ont pas pu utiliser avec pertinence certaines des réponses données. Pour autant, il a fallu arrêter le temps des questions, à la fois parce que les informations nécessaires

[2] La liste des questions et des réponses est en annexe 3

étaient déjà données (certaines étant redondantes) mais aussi pour ne pas déborder du temps alloué à l'atelier.

L'observation des « apprenants » en train de dessiner les patrons à main levée s'est révélée importante dans la mesure où, pour chaque groupe, il a fallu décider d'intervenir ou non. Les animateurs ont plutôt eu tendance à ne pas intervenir. Mais dans chaque groupe, des questions se sont posé~~es~~ et les animateurs y ont en général répondu. Des demandes de temps supplémentaire pour continuer à chercher ont permis aux « enseignants » de remarquer des réticences chez les « élèves » à produire une solution incomplète ou invalidée. Peut-être l'une des plus grandes difficultés des participants a consisté à trouver comment assembler les triangles et où placer les angles droits. Bien que la règle et les ciseaux aient été interdits, un binôme a découpé grossièrement des triangles rectangles pour essayer de les assembler dans l'espace. On peut conjecturer que dans un groupe d'étudiants d'IUFM ou de professeurs des écoles ou dans une classe de cycle 3, les réticences seraient moindres parce que les étudiants ou des élèves ne contrôleraient pas aussi rigoureusement leur production. L'homologie dans la formation trouve là une de ses limites : la durée de recherche dépend de cette opiniâtreté des « élèves » du jour. Le déroulement de l'activité et le choix de l'objet ne seraient pas forcément les mêmes que durant l'atelier.

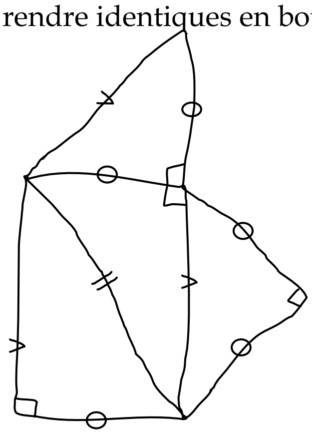
La gestion du débat sur les productions des participants n'a pas été simple non plus : certains patrons[3] justes avaient des aspects tellement différents que tous les participants (« élèves » ou « animateurs ») ont contribué à leur validation. La première affiche a été déclarée d'emblée erronée par ses auteurs.



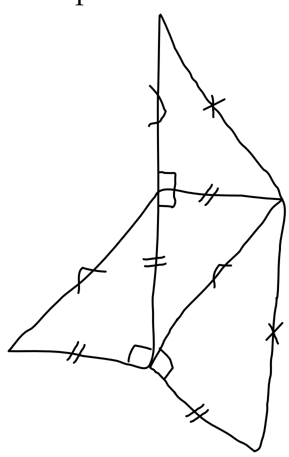
Affiche 1

A la demande de justification de l' « animateur », le binôme a donné deux raisons : ce ne sont pas les bons triangles car les triangles sont tous superposables et quand on relève les angles droits, cela ne se rejoint pas en un sommet. Cela a été aussi repris par le deuxième binôme qui dit « imaginer les cercles dans l'espace pour voir si les sommets des triangles se rejoignent dans l'espace ». Un apport important de l' « enseignant » a porté sur la trajectoire d'un point du patron, candidat à être un sommet de la pyramide dont la projection sur le plan est une droite perpendiculaire au côté opposé. Cet apport ~~a~~ certainement permis de valider ou invalider plus facilement certaines propositions de patrons. L'autre « animateur » a fait part de sa difficulté à valider ou invalider les patrons proposés par les élèves et par conséquent de la nécessité d'une analyse a priori du solide avec une préparation de tous les patrons possibles. À la 3è affiche, s'est posée la question de la comparaison des deux patrons des affiches 2 et 3 et de savoir comment les rendre identiques en bougeant une des faces.

Affiche 2



Affiche 3



[3] Les patrons produits sont en annexe 4 dans l'ordre de leur présentation. Les corrections ont été apportées en rouge.

La comparaison a été rendue difficile par la présence de codages différents sur les deux patrons. Les triangles ont été numérotés au moment de la mise en commun pour faciliter la comparaison. Un essai de retournement de la feuille a aussi été fait pour mettre un triangle isocèle rectangle dans la même position sur les deux patrons, en vue de repérer les autres faces par rapport à ce triangle. En fait, on obtient deux pyramides distinctes mais symétriques selon le sens dans lequel on plie le patron. En utilisant la transparence de la feuille, on peut repérer la pertinence d'un patron, à une symétrie près. A l'opposé les invalidations ont été faciles à gérer : chacun ayant compris où était l'erreur dans le dessin du patron. Le nombre limité de participants (et leur personnalité) n'a pas permis de mettre en évidence les difficultés de distribution de la parole au sein d'une classe.

Avant la réalisation du patron en vraie grandeur, les « animateurs » ont décroché les affiches du tableau. Un groupe a demandé à récupérer son affiche pour reprendre son patron en tenant compte des corrections apportées lors du débat. Dans la plupart des autres groupes, les « étudiants » avaient gardé des traces des ébauches de leurs dessins et ont pu aborder la construction sans difficulté. A part l'affiche avec le patron à main levée (pour ne pas refaire de mémoire la même chose), aucune des aides prévues n'a été sollicitée ni proposée. Cette phase s'est déroulée très rapidement et a plutôt été l'occasion de voir enfin le solide, les difficultés de construction du patron ayant été surmontées.

3.2 Le vécu et les réactions des « élèves »

La dévolution du problème a été très rapide ; les « élèves » se sont organisés pour préparer des questions de façon à identifier rapidement le solide à partir d'une seule information : il s'agit d'un polyèdre. Les questions ont évidemment porté sur le nombre et la nature des faces. Les précisions relatives au nombre exact de faces triangulaires, superposables ou à leur nombre minimum étaient révélatrices du fait que les connaissances mathématiques des participants sont bien supérieures à celles de la plupart des étudiants de M1 ou M2 ou des enseignants en formation continue, ou encore des élèves de l'école primaire. Les réponses aux questions ont été notées au tableau, ce qui a été déclaré avoir été très utile par les participants (malgré une certaine redondance pour trouver le nombre de chaque face). Les « élèves » ont eu des difficultés à formuler leurs questions pour obtenir une réponse exploitable et ont pris conscience de la précision à laquelle ils étaient contraints. Ce point peut être mis en avant dans une formation d'étudiants souvent peu conscients des difficultés de formulation par les élèves.

Chaque participant a pris note des réponses aux questions et des commentaires faits par les animateurs, en particulier, à propos des questions sans réponses ou pour lesquelles les animateurs n'avaient pas de réponse immédiate. Certains « élèves » se sont sentis frustrés quand l'ordre leur a été donné de dessiner le patron à main levée ; ils auraient aimé poser d'autres questions pour conforter l'idée qu'ils se faisaient du solide en question. Une synthèse s'est faite un peu en aparté entre un « élève » et un des « animateurs » sous la forme de conclusion : « c'est un solide dont les quatre faces sont des triangles rectangles et deux d'entre eux sont aussi isocèles ». L'animateur a fait le choix d'acquiescer sans reprendre pour l'ensemble du groupe, ni l'écrire au tableau et cela n'a pas été diffusé dans le groupe. Le dessin du patron s'est effectué en binôme et en collaboration étroite entre les deux membres. La préoccupation a été de faire un dessin qui soit compatible avec toutes les informations données : 4 triangles rectangles dont deux sont isocèles. Les discussions dans les groupes ont porté sur l'organisation des faces les unes par rapport aux autres avec des productions identifiées d'emblée comme fausses par leurs producteurs. Pour la plupart des « élèves », il a été difficile de sortir de la première représentation qu'ils s'étaient faite, en particulier changer la position des angles droits ou trouver comment placer les deux triangles isocèles et rectangles. Quelques-uns ont élaboré une représentation en perspective du solide et cette représentation a facilité le passage au patron.

Chaque binôme ayant produit au moins un patron, la confrontation d'affiches a été un moment important pour tous les participants. Pour ceux qui savaient que leur production était fausse, la discussion avec l'ensemble des participants a permis d'identifier et de corriger les erreurs. Pour ceux qui avaient des productions exactes, il a été intéressant de repérer en quoi ces productions d'aspects très différents étaient toutes des patrons du même solide. Les critères mathématiques nécessaires à la validation de ces productions exactes témoignent du fait que leurs analyses ne sauraient être transférées telles quelles dans une classe de cycle 3. Des gestes de «levage de sommet» ont accompagné cette discussion, en particulier pour montrer que deux points du soi-disant patron ne pouvaient correspondre à un sommet du solide. La justification s'appuyait sur la rotation dans l'espace autour de l'axe porté par le côté commun des deux triangles et sur le déplacement de chaque point dans un plan perpendiculaire à cet axe. Ces mots introduits par l'animateur, en particulier le plan perpendiculaire, ont permis de modéliser les gestes correspondants à ce passage du plan à l'espace. Certains « élèves » ont trouvé que le débat avait été un peu long. La difficulté due aux différents codages utilisés sur les dessins ou à des longueurs non respectées a été soulignée souvent comme ne facilitant pas la comparaison des patrons ; chaque participant se retrouvant en position de juger d'un patron comme un nouvel objet à valider ou invalider.

Le dessin du patron en vraie grandeur (à partir d'une arête de cube de 6 cm) n'a pas posé de problème particulier. En effet chaque groupe avait gardé son brouillon de dessin à main levée et noté les corrections à y apporter le cas échéant. Seul un groupe a demandé à récupérer son affiche corrigée pour faire le dessin du patron en vraie grandeur. La mise en commun des patrons ayant été très approfondie, les participants ont déclaré que le dessin du patron en vraie grandeur les a confortés dans leurs conceptions et leur a permis de voir à quoi ressemblait ce solide qui leur avait posé tant de problèmes à imaginer. Les validations des dessins se sont faites par pliage et construction du solide. Comme chaque participant avait construit sa pyramide, nous avons expliqué comment à partir de la « pyramide-tiers-cube » nous avions choisi de construire cette « pyramide-sixième-du-cube ». Nous avons fait remarquer qu'il faut trois pyramides identiques et trois autres symétriques obtenues en pliant le patron dans l'autre sens (ce qui revient à faire un patron symétrique du premier).[4]

En situation de classe ou en situation de formation avec un public moins particulier que celui de formateurs, la réalisation du patron est souvent difficile même après la mise en commun et ceci permet d'interroger le rôle de cette mise en commun. Souvent une aide mais pas forcément pour tous et non nécessairement la même, permet aussi d'interroger les conditions de la réussite mais aussi de justifier la nécessité d'apport d'autres aides différenciées. Ici la situation d'homologie n'a pas rendu le réel de la situation transposée en classe ou en formation. Dans la problématique de notre article, cela nous parait être important à souligner car nous nous sommes trouvés dans une situation plutôt d'homologie contrairement à d'autres situations de formation avec des professeurs de mathématiques où il est vrai que pour la mise en commun le temps accordé avait été moindre et le but assigné différent.

3.3 Discussion autour des réponses aux questionnaires

La mise en commun des patrons à main levée a été jugée très importante par tous les participants ; pour autant, tous ont convenu de la grande difficulté à valider ces patrons. Cette validation aboutie, la réalisation en vraie grandeur du patron n'avait plus autant d'enjeu mais seulement un rôle de vérification du patron et de visualisation du solide.

D'autres commentaires ont été faits :

- l'identification du solide en termes de description ne garantit pas que l'on sache répondre avec assurance à toutes les questions,
- il est délicat de décider du moment où les informations sont suffisantes pour que les élèves se lancent dans un premier dessin,
- la validation des patrons à main levée a été rendue aussi difficile car les codages choisis n'étaient pas les mêmes et cela a compliqué la comparaison.

[4] Nous avons essayé de savoir s'il y a une définition d'un patron qui indiquerait dans quel sens plier mais pour l'instant nous n'avons pas trouvé de réponse à cette question (à part les codages en origami de plis-montagne et plis-vallée mais non utilisés usuellement dans les patrons).

Selon le solide choisi, il n'est pas rare que la gestion des productions des élèves pose un problème du point de vue mathématique et que l'enseignant ait des difficultés dans les validations de certaines. La gestion des productions d'élève peut aussi poser problème d'un point de vue pédagogique quand il s'agit de distribuer la parole dans la classe et d'organiser les débats sur les productions. Un piège serait de distribuer la parole pour aller systématiquement d'une production fausse ou inaboutie vers la production la plus proche d'une production experte. Quand il reste des propositions fausses ou inabouties à étudier alors qu'une solution experte a été validée, l'enseignant peut demander à la classe ou aux auteurs des productions concernées, de préciser en quoi ces productions sont fausses ou inabouties et comment on pourrait les corriger.

3.4 Aides à la représentation

Nous avions prévu des aides qui n'ont pas du tout (ou presque) été demandées. Cette question nous intéressait particulièrement lors de la conception de l'atelier, par conséquent nous avons relancé les participants sur ce qui les avait aidés. Une intervention de l' « animateur », au moment de la fabrication du patron à main levée a été décisive pour un groupe : « c'est vous qui avez mis les angles droits, là ? ». En effet, plusieurs binômes peinaient à placer les quatre angles droits et à sortir d'une représentation en trièdre (s'appuyant sur trois arêtes d'un cube de même sommet). Avec des étudiants de niveau M1 et M2, prévoir des aides pourrait s'avérer essentiel, en particulier dans un contexte de différenciation. Le rôle des aides est aussi un élément de distinction entre transposition et homologie.

III - ANALYSE DES PRINCIPALES VARIABLES ET EXPLICITATION DE NOS CHOIX

Peix et Tisseron (2005) relatant une recherche par une formation sur le problème ouvert, mettent en garde :

> *Si la description des dispositifs et de leurs modalités de gestion fournit des techniques enrichissant l'outillage pédagogique de l'enseignant, le problème de la formation est de permettre l'intégration d'attitudes et de compétences nouvelles qu'implique une complexification des rôles à tenir par les enseignants au sein de ces nouvelles tâches.*
>
> *Cette évolution ne va pas de soi : beaucoup d'enseignants de mathématiques ont encore du mal à intégrer des problèmes de recherche dans leur pratique usuelle d'enseignement […]*
>
> *[…] l'expérimentation de problèmes ouverts est l'occasion de poser des questions génératrices de la pratique professionnelle (Chevallard) à travers son utilisation comme lieu de travail (observation, mise en œuvre et/ou construction) de gestes et savoirs professionnels génériques et occasion de retour réflexif sur la pratique.*

Ils dressent ensuite :

> *une liste de gestes et/ou connaissances professionnels travaillés dans la situation problème ouvert et décontextualisables :*
>
> *Sur la notion de situation*
>
> - *importance fondamentale de l'analyse a priori pour structurer avant, piloter pendant, analyser après ;*
> - *passer de l'observation de l'élève à l'observation des effets d'un dispositif spécifié sur les comportements et connaissances ;*
> - *notion de situation comme organisation théorique structurée, cohérente et finalisée ;*
> - *mise en cohérence entre objectifs, types de tâches, dispositif, rôles et attitudes du maître, effets produits ;*
> - *rôle du milieu, dévolution, implication et travail autonome.*
>
> *Sur le rapport au savoir*

- *travail sur des variables du rapport au savoir de l'élève, sur ses capacités suivant la situation ;*
- *travail sur les rapports aux mathématiques et à l'erreur (de l'élève et aussi du professeur).*

Sur les modalités d'intervention et les dimensions en jeu

- *aides versus médiation, respect de positions ;*
- *rôle du débat, argumentation, rapport à l'erreur versus attitudes et valeurs sociales.*

Sur des aspects techniques des modalités de conclusion

- *modalités de la validation ;*
- *gestion de phases de conclusion.*

La reconnaissance du caractère générique des gestes professionnels que le problème ouvert permet d'expérimenter doit aussi passer par une situation de formation appropriée. Il s'agit de permettre la construction de schèmes dont la signification est donnée par les transformations qu'ils permettent sur les formes d'activités et d'interactions enseignant-élève.

Bien que notre situation ne soit pas un problème de recherche, ni un problème ouvert, mais plutôt une situation complexe, nous nous sommes aidées de l'analyse de ce type de situations pour effectuer nos choix.

Ainsi, nous allons examiner les différentes variables didactiques et pédagogiques que sont la forme du solide, l'organisation de l'activité et sa synthèse, et le rôle des aides qui sont des éléments qui nous semblent a priori importants de reprendre dans une formation.

1 Choix du solide

Suivant les publics en formation, le solide choisi peut être différent : avec un public de Professeurs des Écoles ou de Conseillers Pédagogiques nous choisissons en général une « pyramide-tiers-cube » (pyramide ayant comme base une face d'un cube et le sommet étant un autre sommet du cube). Avec des enseignants de mathématiques notre choix se porte plutôt sur la « pyramide-sixième du cube » moins connue. Dans les deux cas l'assemblage des quatre triangles rectangles pour en faire un patron de la pyramide n'est pas évident si on ne connaît pas les dimensions ou si on ne se représente pas le solide dans le cube. Pour autant le solide à proposer ne doit pas être trop familier des stagiaires sinon le travail de recherche sur le nombre et la nature des faces, le nombre d'arêtes, de sommets, etc. ne serait pas un véritable défi.

Notre choix de solide pour la situation n'est généralement pas le même que celui qui sera fait par l'enseignant dans sa classe et ce point doit être discuté en particulier dans le cas de la « pyramide-tiers-cube » que des enseignants pourraient utiliser avec des élèves de cycle 3.

2 Choix de l'organisation de l'activité

Nous avons choisi de solliciter deux « animateurs » parmi les participants à l'atelier et de leur donner une fiche de préparation indiquant les différentes phases de la situation et les aides possibles. Cela nous a permis de voir l'importance et le temps donnés par les « animateurs » à la réalisation et à la confrontation des patrons à main levée. Au cours de l'atelier, le temps de familiarisation avec le solide et la fiche de préparation pour les deux « animateurs » a été le même que celui pendant lequel les « élèves » ont préparé leurs questions. Celles-ci étaient donc déjà assez abouties et leurs auteurs avaient souvent des attentes assez grandes liées à la description du solide caché. La même activité pourrait être menée de façon individuelle où l'enseignant répond aux questions de l'élève jusqu'à ce que ce dernier juge qu'il a suffisamment d'informations pour envisager le dessin du patron à main levée. Dans ce cas une gestion de classe par binôme permettrait de limiter le nombre de questions.

Le patron est d'abord demandé à main levée pour retarder la validation par découpage et pliage et donner un enjeu à la mise en commun. Celle-ci a pour but de remettre à jour les critères de réussite d'un patron pour permettre aux « élèves » d'améliorer leurs représentations du solide et, par conséquent, constitue aussi une aide à la représentation de l'image mentale du solide (la construction du patron à main levée est une tâche surajoutée au problème de base qui serait de construire le même solide que celui qui est dans la boîte). Le dessin à main levée permet aussi de contrôler le rôle de chaque information donnée au tableau. Nous avons vu dans certains groupes, des participants en difficulté avec la gestion de toutes les informations. On peut penser que celles-ci étaient en contradiction avec le solide auquel ils pensaient a priori et qu'ils se sont retrouvés en conflit avec ce qu'ils savaient et ce qu'ils avaient imaginé.

Les modalités de mise en œuvre sont aussi des éléments qui ont une influence sur les réponses proposées par les élèves : la production du patron à main levée par groupe de deux plutôt qu'en individuel a été source de discussions qui ont enrichi le débat qui a suivi sur la validation des différents patrons. Les affiches A3 sur lesquelles les « apprenants » avaient dessiné les patrons à main levée ont été étudiées, commentées et corrigées dans un ordre aléatoire. Ceci a permis entre autres de constater que deux patrons d'aspects très différents étaient exacts : le solide associé à chacun de ces patrons apparaissant dans des conditions différentes pour chacun des participants. Les six « pyramides-sixième-de-cube » ne sont pas toutes identiques, elles sont symétriques deux à deux et cela se retrouve dans le patron car il a fallu un retournement de la feuille pour mieux reconnaître deux patrons presque superposables.

Une construction directe du patron aux instruments inciterait les « élèves » à le valider directement par pliage et retirerait l'enjeu des échanges. Il est important de noter que tous les participants avaient gardé une trace écrite de leur dessin et l'ont annotée au fur et à mesure du débat.

3 Rôle des aides

La seule aide qui ait été demandée par l'un des participants a été de reprendre son affiche dans la mesure où les erreurs qu'elle contenait avaient été annotées et donc corrigées.

Nous avions imaginé diverses formes d'aides à la construction du patron en vraie grandeur :

- une description ou une représentation en perspective,
- des aides à la construction du patron : deux ou quatre faces à assembler,
- une description d'un patron.

Elles se sont révélées quasi inutiles dans le cadre de cet atelier. L'expérience montre que dans le contexte d'une autre formation, il en va tout autrement, en particulier si on réduit le temps de la mise en commun et le nombre d'affiches examinées, mais aussi si on interdit tout brouillon au moment de la production du patron à main levée. Nous n'avons donc pas pu aborder le problème de l'adéquation de l'aide à apporter à un étudiant ou un stagiaire en fonction de ses besoins. Mais, cela peut indiquer des directions de travail pour les étudiants Professeur des Ecoles : tant qu'on n'a pas fait la séance une fois, il est difficile de savoir quelles aides pourraient être utiles.

Un type d'aide qui a été plus efficace que nous le pensions : un commentaire fait à un groupe au cours de sa recherche à main levée a été entendu et pris en compte par d'autres groupes. Le commentaire portait sur l'organisation des triangles rectangles les uns par rapport aux autres : « êtes-vous certains que les angles droits sont là ? » le doute s'est installé et les « élèves » ont imaginé que les triangles rectangles n'étaient peut-être pas disposés de manière à former un trièdre droit.

4 Choix des objectifs et de la synthèse

Notre choix de ne pas donner d'objectifs à l'activité dans la fiche de préparation laissait une liberté aux « animateurs » concernant la synthèse possible de l'activité. Nous pensions que celle-ci pouvait porter sur des points plutôt notionnels comme :

- les critères de réussite d'un patron (nécessité d'égalité des longueurs des arêtes qui se correspondent par pliage, bon positionnement des faces, pas de chevauchement…). Il s'agit d'un retour sur ces critères.
- les difficultés rencontrées ;

sur des points plutôt méthodologiques comme :

- les raisons de demandes d'aide ;
- l'éventuelle insuffisance de prise de notes ou d'implication dans la mise en commun ;

sur des points plutôt métacognitifs comme :

- les éléments aidant à la résolution dans le déroulement de la situation (replacer la mise en commun comme première aide dont l'efficacité est conditionnée par la participation effective des apprenants),
- les éléments de stratégies de résolution de problème retenus.

La synthèse des « animateurs » est apparue dans la phase de mise en commun pour valider ou non un patron : elle portait plutôt sur des points notionnels.

Une activité comme celle-ci peut être exploitée avec des objectifs de formation très variables et ce sont ces objectifs qui déterminent la synthèse que l'on peut faire.

IV - IMPLICATION PROFESSIONNELLE : HOMOLOGIE OU TRANSPOSITION ?

Cette partie vise à se poser la question du point de vue de la formation : homologie ou transposition ?

A partir du vécu de chaque participant, on se propose maintenant de repérer les objets de formation dont cette activité peut être une illustration ou un exemple. La question qui se pose au formateur IUFM est de savoir jusqu'à quel point ses interventions relèvent soit de l'homologie (le formé devenu enseignant pourra reproduire la situation sans qu'aucune distorsion d'aucune sorte n'apparaisse), soit de la transposition.

Pour se projeter dans la réalisation de cette situation dans des formations diverses, un nouveau questionnement est lancé dans le deuxième temps de l'atelier :

Selon les publics auxquels la situation est proposée quels sont les objets de formation (pédagogique, didactique et mathématique) que l'on peut traiter ? Quels objectifs peuvent être visés, pour quelle évolution des pratiques des enseignants et quels éléments issus de la didactique peut-on introduire ?

À quelles conditions les démarches impliquées dans la situation proposée sont-elles transférables en classe et en formation ? Quelles sont les variables didactiques en jeu lors de la transposition d'une situation de formation à une situation de classe ?

Ce deuxième temps a été un peu court pour permettre l'organisation par groupes de discussion telle que nous l'avions prévu et par conséquent le questionnement est loin d'être abouti tant du point de vue théorique que pratique.

A priori, nous pensons que différents points associés à cette activité pourraient aider à distinguer l'homologie de la transposition, en s'appuyant sur les échanges. En particulier des apports ou discussions à la suite de l'activité pourraient porter sur :

- la mise en œuvre de la situation et en particulier la mise en commun, la gestion de classe,
- les variables didactiques,
- la différenciation, les aides,
- les différents types de problèmes de géométrie : représenter, décrire, construire …

Pour avoir des éléments de réponses, il est sans doute pertinent de rappeler les distinctions à faire entre les situations d'homologie et les situations de transpositions, telles que Houdement et Kuzniak ont pu les proposer.

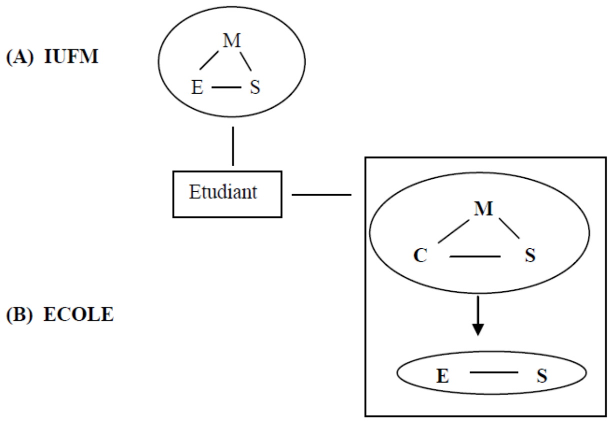
1 Définitions

Houdement-Kuzniak (1996) ont dégagé quatre stratégies de formation des enseignants :

- les *stratégies culturelles* qui privilégient l'accroissement des connaissances des étudiants dans un domaine précis sans préjuger de la mise en œuvre opérée dans les classes [par les mêmes étudiants devenus enseignants]
- les *stratégies basées sur la monstration* qui privilégient la transmission d'un modèle par l'observation de sa mise en œuvre dans les classes
- les *stratégies basées sur l'homologie* [qui sont aussi des stratégies basées] sur l'imitation mais une imitation complexe et transposée par l'étudiant. […] Les formateurs enseignent conformément à leur conception de ce que doit être l'enseignement à l'école élémentaire.
- les *stratégies basées sur la transposition* se différencient des précédentes par l'insistance qu'elles accordent à la transmission d'un savoir de référence. Elles prennent en compte la professionnalisation des étudiants à la différence des [stratégies culturelles] uniquement fixées sur les connaissances mathématiques.

Dans l'atelier nous nous sommes essentiellement centrés sur les temps d'homologie et de transposition. Quels temps dans le déroulement de l'activité relèvent de l'homologie ? Quels temps demandent à l'enseignant une part de transposition ? Comment le formateur IUFM peut-il anticiper ou annoncer la transposition que l'enseignant devra opérer devant ses élèves ?

Kuzniak (Chantilly 1994) avait déjà évoqué ce problème du double milieu : d'une part un milieu A, l'IUFM, où se situe la formation des enseignants et d'autre par un milieu B, l'école, où l'étudiant devient enseignant.

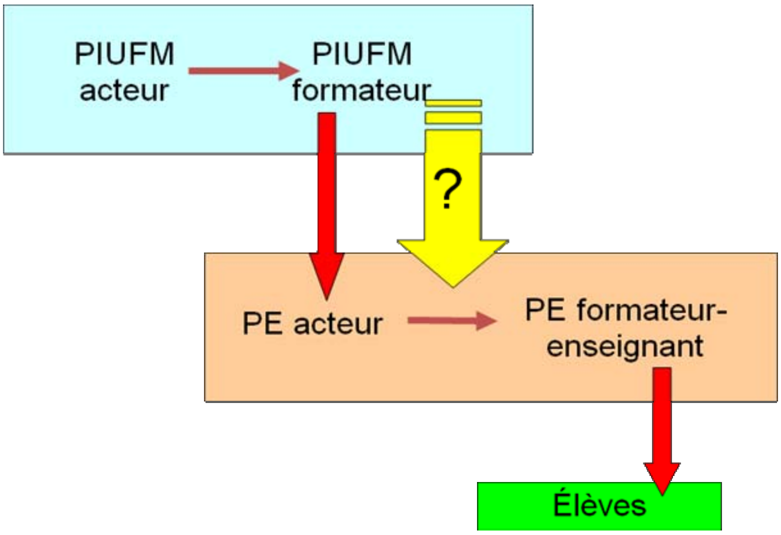


D'un système didactique à l'autre, la même personne change de rôle (l'étudiant E du milieu A devient maître du milieu B). Quels sont alors les éléments de la situation vécue en formation (en tant qu'étudiant) qu'elle peut reproduire à l'identique et sans distorsion en tant qu'enseignant ? Quels sont ceux pour lesquels il doit y avoir une part de transposition ? Qui prend en charge cette transposition ?

Le schéma ci-dessous reprend la situation vécue au cours de l'atelier où les PIUFM (professeurs d'IUFM) participants se sont dans un premier temps approprié la situation. De participants (acteurs de la situation) ils allaient devenir formateurs en proposant cette situation du solide caché à leurs étudiants.

Mais pouvaient-ils proposer la même situation ? Dans les mêmes conditions ? Leurs étudiants acteurs de la situation, vont devenir enseignants à leur tour. Comment vont-ils pouvoir proposer une telle situation à leurs élèves de cycle 3 ? Quelles précautions le PIUFM doit-il prendre en proposant une telle activité à ses étudiants ? Nous rajoutons un niveau supplémentaire au schéma précédent qui pourrait être « formateur de formateurs », en plus de « formateur d'étudiants ou stagiaires enseignants » et « enseignant à des élèves ».

Nous avons essayé de schématiser en mettant l'accent sur les interventions où le formateur doit porter son attention pour permettre au mieux au formé de changer de rôle.



2 L'homologie

La question de l'homologie dans les différents contextes de formation se pose sans doute à nouveau aujourd'hui dans la mesure où l'accès au métier d'enseignant a drastiquement changé sur certains lieux de formation. Et, pour reprendre les mots de Kuzniak (1994), il n'est pas rare de voir le formateur IUFM

> … choisir de transmettre sa forme préférée d'enseignement en la mettant lui-même en œuvre dans son enseignement à ses étudiants. Nous avons introduit le terme d'homologie pour désigner les stratégies où le professeur utilise (ou tente d'utiliser) un mode de transmission identique à celui qu'il souhaite voir utiliser par ses étudiants lorsque ceux-ci enseignent dans des classes élémentaires.

Dans les conclusions du colloque de Bombannes (1979), à propos de l'enseignement de la géométrie, en 1994, Kuzniak retenait :

> On pourra simuler un apprentissage aves les F.P. (étudiants) et le reprendre avec les élèves de l'école primaire. Il importe que la situation se transfère facilement.

Kuzniak poursuit en ces termes :

> Ainsi les stratégies d'homologie se trouvent être bien définies par deux types de ressemblance :
>
> - *La ressemblance des démarches pédagogiques qui doit permettre d'assurer la cohérence entre le discours et les actes du formateur,*
> - *La ressemblance des situations proposées aux enfants et aux étudiants.*
>
> […]

> En fait le choix des situations dépendra de l'appréciation par le formateur [IUFM] des difficultés liées à la notion abordée. On peut ici formuler deux hypothèses (…)
>
> - *H1 : une situation simple permet une prise de conscience nette de la démarche pédagogique suivie, mais en contrepartie elle risque d'infantiliser l'étudiant et/ou de provoquer son rejet.*
> - *H2 : une situation plus complexe transmet un savoir mathématique non trivial aux étudiants, mais la nouveauté de ce savoir peut occulter la démarche suivie.*
>
> Les stratégies basées sur l'homologie supposent implicitement que le transfert opéré par l'étudiant n'est pas problématique. (p. 17)

Prenant en compte le fait que le niveau de connaissances et de compétences en mathématiques des étudiants en formation professeurs des écoles est généralement plutôt fragile, les stratégies de formation basées sur l'homologie « *tentent de montrer que chaque étudiant peut avec des moyens limités mener une activité mathématique, le primat étant donné à l'approche pédagogique.* » Ainsi l'étudiant a un ressenti qu'il peut apparenter à celui de ses futurs élèves et appréhender la complexité de la situation qu'il pourrait mettre en œuvre. Mais ces stratégies semblent atteindre rapidement leurs limites si l'on ne prend pas en compte la part de transposition inhérente au phénomène selon que la même situation est vécue dans un contexte de formation ou dans un contexte de classe élémentaire. Dans le contexte des stratégies d'homologie, cette part de transposition semble aller d'elle-même voire n'est pas évoquée. Ceci est source de simplifications que Kuzniak appelle la « dénaturation simplificatrice ». En effet, Kuzniak a remarqué que :

> Les étudiants opèrent une simplification qui leur permet de préparer des séances que leur savoir mathématique suffira à dominer.
>
> Il y a dénaturation à partir du moment où la simplification transforme la nature du savoir mis en jeu ou modifie radicalement les démarches pédagogiques initiales. (p. 17)

La question se pose donc aujourd'hui comme hier de savoir pour quelles situations, jusqu'à quel point et dans quelles conditions les stratégies de formation de type homologie sont pertinentes. Nous avons pu constater au cours de l'atelier que les participants étaient d'autant plus productifs que la situation ne mettait pas en jeu d'apprentissage mathématique et que tous maîtrisaient les mathématiques nécessaires à la résolution du problème. On peut donc penser que, du point de vue des connaissances mathématiques, les PIUFM participant à l'atelier ont vécu cette situation comme relevant de l'homologie. Dans la mesure où les « animateurs » ont reconnu que certaines décisions avaient été difficiles à prendre : quand arrêter le temps de questions ? Comment décider qu'un patron est juste ou non ? etc., on peut penser qu'avant de la proposer à leurs étudiants, ils devront y réfléchir à nouveau, se l'approprier et éventuellement l'adapter. On a bien vu qu'une telle situation est riche d'éléments de formation et qu'il est indispensable que le formateur précise quels sont les objets de formation qu'il vise pour que le réinvestissement de la situation ne subisse qu'un minimum de dénaturation.

Kuzniak (1994) avait déjà des soucis qui redeviennent d'actualité dans le nouveau contexte de la formation initiale des enseignants :

> Ensuite, elles sont sensibles à toute réduction de la durée de la formation car la mise en action des étudiants suppose un temps de formation non négligeable. Et enfin, le développement de la recherche pédagogique et didactique fournit le cadre théorique nécessaire à d'autres conceptions de la formation des enseignants plus axées sur la transposition. (p. 18)

Quelle transposition reste à la charge du formateur IUFM ?

3 Les transpositions

A propos des stratégies de transposition, Houdement-Kuzniak (1996) insistent sur le fait qu'il est

> … important de préciser les savoirs retenus et les modes de transposition mis au point. De plus les stratégies de transposition, très dépendantes de savoirs non figés, sont des stratégies en évolution et d'une certaine façon, des stratégies transitoires susceptibles de se transformer si le processus de transposition s'achève.

D'une part Houdement-Kuzniak distinguent

> … deux niveaux de transposition.
>
> Le premier concerne le passage du savoir savant de référence au savoir enseigné par les formateurs. Il s'agit ici du processus standard de transposition didactique.
>
> Le second niveau concerne le passage de ce savoir enseigné au savoir appliqué par les étudiants. Il prend en compte le phénomène de transfert et d'adaptation opéré par les étudiants.
>
> Les stratégies les plus complexes envisagent les deux niveaux de transposition. » (p. 18)

Houdement-Kuzniak distinguent aussi

> … deux catégories de stratégies établies sur deux corpus de savoirs, non spécifiquement mathématiques et différents : un corpus « pédagogique » et un corpus « didactique »

L'ouvrage de référence de corpus pédagogique est la collection ERMEL, tous les savoirs présentés peuvent être mis en œuvre dans les classes de l'école élémentaire. A l'opposé,

> Le corpus didactique théorise davantage les phénomènes d'enseignement et n'a pas pour préoccupation première une application dans les classes. L'effort de transposition effectué par les formateurs est donc plus important. Ce corpus didactique donne lieu à deux grands types de transmission qui reposent sur la dialectique outil/objet.
>
> La didactique, *objet* d'enseignement ou la didactique, *outil* pour le futur enseignant

Dans le premier cas, on peut trouver le cours magistral sur la didactique ou des stratégies basées sur l'homologie, enrichies par la didactique. Une illustration étant la séquence à propos de la boîte du « pâtissier » telle que décrite par Houdement, Peltier (1991) et dans laquelle, les formateurs terminent par une institutionnalisation didactique.

Dans le second cas, le formateur peut proposer aux étudiants d'analyser des séances ou les aider à construire des séquences dans le « *projet ambitieux qui vise à fonder une pratique du métier d'enseignant de type didactique* ».

D'après Houdement-Kuzniak,

> dans les stratégies de transposition, le formateur retrouve une plus grande liberté pédagogique puisque l'enjeu essentiel est la transmission d'un savoir professionnel de référence.(p. 309)

Mais cet avantage est contrebalancé par deux difficultés non négligeables :

> Dans l'approche pédagogique …, il nous est apparu que le formateur devait avoir une expérience professionnelle de la formation des maîtres qui lui donne le savoir empirique nécessaire pour gérer les situations de discussion avec les étudiants, fréquentes dans ce modèle. L'approche didactique, si elle peut éventuellement dispenser le formateur de ce savoir empirique, nécessite en revanche un investissement en tant que chercheur dans le domaine de la didactique des mathématiques (p. 309)

Au cours de l'atelier, nous n'avons pas été confrontées au premier niveau de transposition : les participants étant eux-mêmes experts en mathématiques. En revanche la question a bien été soulevée de savoir ce que, de cette situation d'enseignement, les PIUFM allaient retenir ou mettre en avant, transposer avant de la proposer à leurs étudiants. Ceci est sans doute d'autant plus nécessaire que les étudiants PE (M1 et M2) sont rarement face aux élèves (peu de stages) avant d'être nommés stagiaires et n'ont pas la possibilité de prendre de distance ou de recul par rapport à ce qui leur a été proposé en formation.

4 Cette activité au regard de l'homologie et de la transposition :

Au cours de l'atelier et de la brève discussion qui s'en est suivie, nous avons retrouvé tous les arguments développés par Houdement-Kuzniak.

Où y a-t-il homologie ? Qu'est-ce que les étudiants peuvent reprendre à l'identique ?

Où y a-t-il transposition ? Que doivent-ils changer, modifier, supprimer, ajouter ? Peuvent-ils prendre en charge ces modifications ? Doit-on, en tant que PIUFM, les guider, suggérer certaines modifications ou adaptations ? Dans quelles conditions ? etc.

Du côté de l'homologie, nous pourrions dire que, dans sa forme, la situation proposée avec sa règle du jeu du « solide caché » et les 5 étapes de son déroulement sont directement utilisables en classe (plutôt en CM2) par l'étudiant devenu professeur des écoles :

- un groupe de deux élèves repèrent les caractéristiques du solide pendant que le reste de la classe par groupes de deux, cherche à retrouver le solide ;
- les élèves posent leurs questions jusqu'à être capables de dessiner un patron ;
- les élèves dessinent à main levée une proposition du patron du solide ;
- les élèves débattent des propositions ;
- les élèves construisent le patron et vérifient par pliage.

Du côté de la transposition on trouve les mêmes rubriques avec un contenu mathématique, pédagogique ou didactique :

- le choix du solide adapté aux connaissances des élèves de cycle 3, suffisamment complexe pour que la description des faces soit un facteur de discrimination entre les solides connus ;
- la gestion des questions posées par les élèves et les réponses données par les élèves qui connaissent le solide : faut-il les écrire au tableau ? Laisser chaque groupe d'élèves noter ses propres réponses ? Qui décide que le temps des questions est terminé ?
- la gestion du débat sur la pertinence des patrons. Les élèves de cycle 3 ont-ils les connaissances suffisantes pour apprécier deux patrons d'aspects différents d'un même solide ? Est-ce qu'un patron peut rester indécidable ?
- la construction du solide. Quelles aides apporter aux élèves en difficulté ?

Dans les différents types de formation où nous avons utilisé cette situation, les objectifs n'étaient pas les mêmes suivant le public.

L'activité du « solide caché » pratiquée dans les classes d'école primaire indique qu'il s'agit de deviner un solide mais les conditions et la consigne donnée peuvent être très variables. Par exemple, si l'objectif est de « reconnaître un solide parmi d'autres visibles », il peut s'agir de discriminer par un jeu de questions-réponses ou une description fournie, un solide parmi les solides présents. Cela nécessite un choix de solides qui ne se différencieraient pas seulement par leur nombre de faces, d'arêtes et de sommets mais aussi par la nature des faces.

Dans un contexte de formation initiale, la question se pose toujours de savoir à quel moment et sous quelle forme le PIUFM intervient pour répondre aux diverses questions qui précèdent, et comment il gère la transposition de la situation. Selon les objectifs de formation qu'il se donne, le PIUFM privilégiera d'intervenir immédiatement ou de façon différée.

Avec des étudiants qui préparent le concours, cela a été l'occasion de faire de la géométrie dans l'espace tout en gardant un temps pour évoquer le « jeu du portrait », les variables didactiques (et pédagogiques) : les choix possibles de solides à l'école primaire, les difficultés de gestion des questions, les différents déroulements de l'activité comme celui où tous les solides sont visibles, manipulables ou pas, l'organisation en groupes ou en individuel, … le choix des personnes qui doivent deviner et celles (ou celui) qui donnent les réponses est aussi important : on peut par exemple faire sortir deux élèves qui devront deviner le solide choisi parmi un lot par la classe avec l'enseignant et les réponses aux questions sont faites sur l'ardoise par les autres élèves : cela nécessite une bonne étude et connaissance du solide par l'ensemble des élèves et cela permet aussi de repérer des questions ambigües comme celles où il n'était pas précisé si c'était « exactement » ou « au moins » un nombre de faces.

Avec un public connaissant plus la pratique de classe, cela permet de discuter de la mise en commun et de son rôle qui pourrait être ici de relancer l'activité en cas de blocage et de permettre une meilleure vision des patrons et en particulier d'éliminer des patrons faux sans forcément aller jusqu'à étudier des patrons justes. Suite à cette première mise en commun, des aides peuvent être apportées de différentes natures comme un dessin en perspective (dans le cube ou pas), deux faces différentes sur les quatre.

V - CONCLUSION

Il semble que les participants à cet atelier ont apprécié cette répartition en deux temps : l'action puis la réflexion sur l'action. Les échanges au demeurant fort riches, ont permis de mettre en évidence les différents phases d'une telle situation et l'utilité de chacune d'entre elles. Le caractère homologique ou de transposition de chacune de ces phases a été lui aussi discuté. Il est indéniable que les participants à l'atelier avaient un niveau de connaissances mathématiques tel que les aides que nous avions imaginées n'ont pas été utilisées. Néanmoins en situation de formation initiale, par exemple, où les connaissances des étudiants sont plus faibles, de telles aides seront nécessaires. A cette occasion, le formateur pourra mettre en évidence à la fois l'importance dans la préparation d'une séance de mathématique, de l'anticipation des difficultés des élèves et la différenciation que l'on peut mettre en place dans la classe pour favoriser les apprentissages de tous les élèves. La comparaison de la situation « clé en main » vécue en formation, avec d'autres propositions extraites de manuels ou trouvées sur Internet permettra aussi aux étudiants de Master de se poser des questions relatives à une mise en œuvre en classe. Cependant, le caractère homologique de ce type d'activités reste limité en situation de formation initiale : il ne s'applique partiellement qu'aux étudiants qui jouent le rôle de l'enseignant ; les autres, ceux qui jouent le rôle des élèves, ont certes l'opportunité d'appréhender les difficultés que leurs futurs élèves peuvent rencontrer mais ils risquent de ne pas percevoir toute la complexité de la gestion d'une telle situation en tant qu'enseignant. Dans la formation, le débat qui suit l'action n'est pas seulement important pour l'aspect mathématique mais il doit mettre en évidence le vécu de tous les participants dans le rôle joué par chacun. Ces témoignages permettent de prendre conscience des éléments qui relèveraient de l'homologie comme le déroulement de la séance et ceux qui relèveraient de la transposition comme les choix à effectuer dans une préparation pour la classe (choix du solide, aides, différenciation, …).

Toute situation d'homologie ne permet d'avoir qu'un aperçu de ce que pourrait être le déroulement de la même situation reprise ou transposée en classe ou dans un groupe en formation. Du fait même du statut des participants, certaines réactions au milieu n'apparaissent pas. Ainsi, l'expérimentation et l'échange de témoignages sont alors les seuls moyens de pointer d'autres aspects importants de la situation que les stagiaires n'ont pas vécus.

La situation vécue par les participants à l'atelier a bien été une source de réflexion (et de formation). Aussi nous pouvons être confiantes que cette même situation pourra être reproduite sans distorsion à l'IUFM avec les étudiants parce que ces formateurs ont eux-mêmes une très bonne maîtrise théorique de l'enseignement que ce soit du point de vue mathématique, didactique ou pédagogique.
Il semble que dans la plupart des situations de formation où les stagiaires sont acteurs de leur propre formation, il y ait toujours une part d'homologie (« je ferai ça dans ma classe ») mais celle-ci doit être nuancée par l'information donnée par le formateur (transposition). Dans cet atelier, nous avons manqué un peu de temps pour discuter des conditions de transfert dans la classe. Cependant, il nous semble que le choix d'une situation d'homologie doit être pensé pour permettre d'apporter des éléments didactiques et pédagogiques et même de les provoquer : les choix du formateur dans l'organisation de sa formation sont essentiels (par exemple réduire le temps de recherche pour amener des demandes d'aides). Dans le contexte de la formation des enseignants en Master, il nous semble important que les formateurs explorent ce questionnement que nous avons esquissé dans cet atelier.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ERMEL Apprentissages géométriques et résolution de problèmes.

FÉNICHEL M., PAUVERT M., PFAFF N. (2004) *Donner du sens aux mathématiques, Tome 1 Espace et géométrie*. Bordas.

Groupe IREM Lille (2000). *Travaux géométriques* - *Apprendre à résoudre des problèmes*. SCéREN CRDP Nord Pas de Calais.

GOSSET H, TAVEAU C. (2010) Activités géométriques autour des solides Cycle 3. CRDP Paris.

HOUDEMENT & PELTIER (1992) LE SOLIDE CACHÉ. IN *LA BOITE DU PATISSIER*. IREM DE ROUEN.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1996), Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **Vol.16 (3)**, Grenoble : la Pensée Sauvage.

HOUDEMENT, C. (2003) : Autour des stratégies de formation des maîtres du premier degré en mathématiques. *Carnets de route de la COPIRELEM, T.3 ; pp. 23- 33.*

KUZNIAK A. (1994). Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Actes du XXIème COPIRELEM*, Chantilly.

KUZNIAK A. (2003). Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Carnets de route de la COPIRELEM. T. 3, p. 7-22.*

PEIX A, PLANCHETTE P, ZUCCHETTA JF (2001) Analyse d'une formation en mathématiques en licence de sciences de l'éducation. T. 1 et 2. IREM de Lyon.

PEIX A, TISSERON C (2005) Penser la formation avec des concepts issus de la didactique. *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM, Strasbourg.*

VII - ANNEXES

1 Annexe 1 Fiche de préparation fournie à l'animateur (« professeur »)

Pyramide 1/6 de cube

Avertissement : aucune information relative à cette activité et à sa fiche de préparation ne doit être communiquée aux autres participants de l'atelier

<u>Temps de la mise en œuvre de la situation 1H15 maximum</u>

<u>Consigne :</u>

« Un solide est enfermé dans cette boîte. Vous allez devoir construire à main levée (la règle est interdite, ciseau aussi) un patron de ce solide[5]. Pour cela vous pourrez poser des questions auxquelles je ne répondrai que par « oui » ou par « non ». Quand vous estimerez avoir assez d'informations, par deux, vous ferez une affiche du patron à main levée suffisamment grande pour être visible par tous.

Après une mise en commun des affiches, vous construirez un patron en vraie grandeur de ce solide. »

<u>Quelques indications pour la gestion de la situation :</u>

1° Phase de questionnement

Dans le cas d'une question où il ne serait pas possible de répondre par « Oui » ou « Non », faire préciser la question.

Les informations récoltées pourront être écrites au tableau.

2° Réalisation d'un patron à main levée

Dès qu'ils pensent que c'est possible les participants par groupe de 2 sont invités à produire un patron à main levée et au feutre sur une feuille A3 (patron suffisamment grand pour pouvoir être vu du fond de salle).

3° Première mise en commun

Les patrons produits à main levée sont affichés au tableau, mis en débat et validés. Une sélection d'affiches peut être envisagée. L'enseignant, ne fait pas référence à une éventuelle prise de notes par les élèves durant cette phase, celle-ci est laissée à leur initiative.

4° Réalisation d'un patron avec les instruments de géométrie

Les affiches sont ensuite décrochées.

Les « élèves » doivent alors construire l'objet en vraie grandeur avec les instruments de géométrie, mais sans modèle.

L'enseignant observe les élèves.

---

[5] Le patron est d'abord demandé à main levée pour retarder la validation par découpage et pliage et donner un enjeu à la mise en commun. Celle-ci a pour but de remettre à jour les critères de réussite d'un patron pour permettre aux « élèves » d'améliorer leurs représentations du solide.

Une construction directe du patron aux instruments inciterait les « élèves » à le valider directement par pliage et retirerait l'enjeu des échanges.

En fonction des difficultés ou blocages qu'il observe, l'enseignant décide d'apporter une aide au groupe, choisie parmi celles listées en page suivante ou une autre aide à son initiative.

5° Validation des solides construits

Par comparaison à la pyramide cachée

6° Conclusion

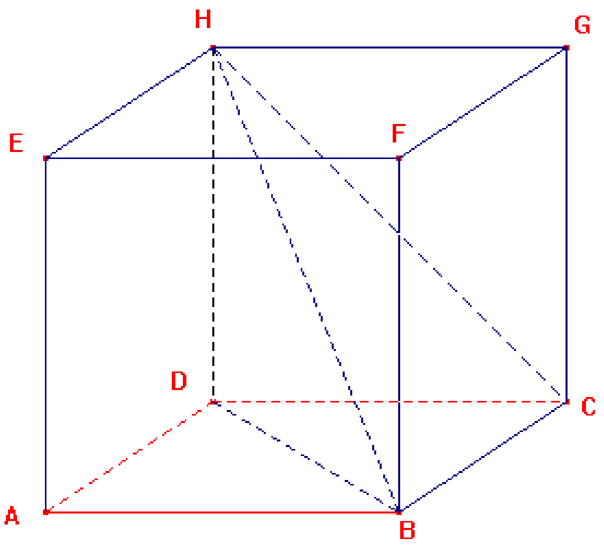
La synthèse est laissée à l'initiative de l'animateur. Elle peut pointer les obstacles, les difficultés rencontrées durant la phase de construction instrumentée….

Aides possibles :

1) Redonner une des affiches (patrons à main levée qui ont été validés).

2) Les quatre faces découpées de la pyramide ou seulement deux d'entre elles.

3) La figure en perspective :



4) Indication :

1/6 du cube : tétraèdre inscrit dans un cube qui a pour sommet un sommet du cube et pour base la moitié d'une face du cube.

5) Les triangles formant un des patrons s'assemblent sous forme d'un parallélogramme.

6) La description des faces avec leurs dimensions (toutes ou partiellement données).

Pour ceux qui ont trouvé un patron : leur en demander un autre (par exemple prenant moins de place sur la feuille) Retour texte

2 Annexe 2 : Retour sur l'activité : Consigne pour les apprenants

En tant qu'« élève » vous allez essayer de revenir sur votre vécu de la situation.

1. *Dans chacune des différentes phases :*
   Qu'est-ce qui vous été utile à la réalisation de la tâche ?
   Qu'est-ce ce qui vous a posé difficulté ?

Phase de questionnement initial :

Phase de construction du patron à main levée :

Phase de mise en commun de ces patrons :

Phase de réalisation du solide :

2. *Dans la phase de réalisation du patron.*
   Quelles aides éventuelles avez-vous reçues ?
   Vous ont-elles été utiles ? En quoi ?

Retour sur l'activité : Consigne pour les animateurs

En tant qu'animateur ou observateur vous allez essayer de revenir sur votre vécu de cette activité.

1. *Pour chacune des différentes phases :*
   - *Qu'est-ce ce qui vous a surpris ou posé difficulté ?*
   - *Si c'était à refaire, que modifieriez-vous ?*

Phase de questionnement initial :

Phase de construction du patron à main levée :

Phase de mise en commun de ces patrons :

Phase de réalisation du patron :

- *Quels ont été vos critères pour décider d'apporter une aide et décider du choix de cette aide ?*

Retour texte

3 Annexe 3 : Notes au tableau des questions et des réponses

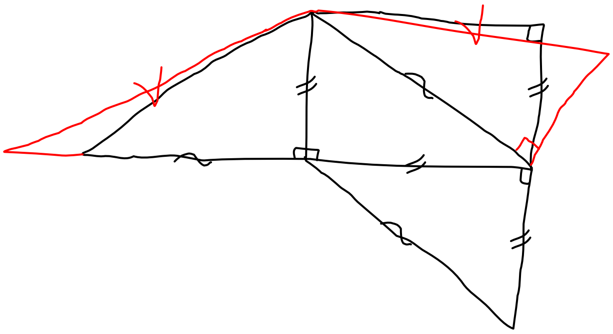
Questions	Réponses
Faces toutes des polygones	Oui
N sommets (N-1) sommets coplanaires	Oui
Compétences BO	Oui
Solide convexe	Oui
5 triangles	Non
4 triangles	Oui
Triangles superposables	Oui
4 faces superposables	Non
1 face rectangulaire	Oui
Triangles équilatéraux	Non
Triangles rectangles	Oui
3 exactement triangles rectangles	Non
2 exactement triangles rectangles	Non
Triangles isocèles	Oui
Existe une face non triangulaire	Non
4 triangles rectangles	Oui
4 triangles rectangles sont-ils isocèles ?	Non
3 triangles isocèles	Non
3 triangles superposables	Non
2 superposables	Oui
Superposables 2 à 2	Oui
2 triangles rectangles isocèles	Oui
2 triangles rectangles	Oui
Superposables 2 à 2	Oui

Le raisonnement et la conclusion donnés par un participant ne sont pas notés au tableau : 2 triangles rectangles isocèles et 2 triangles rectangles non isocèles.

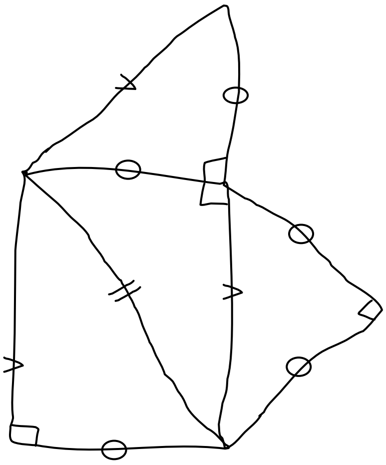
Retour texte

4 Annexe 4 : Affiches des patrons à main levée

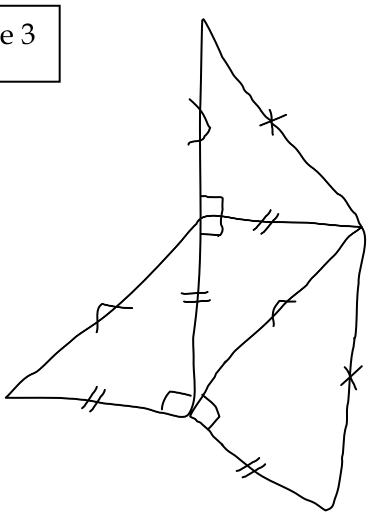
Affiche 1



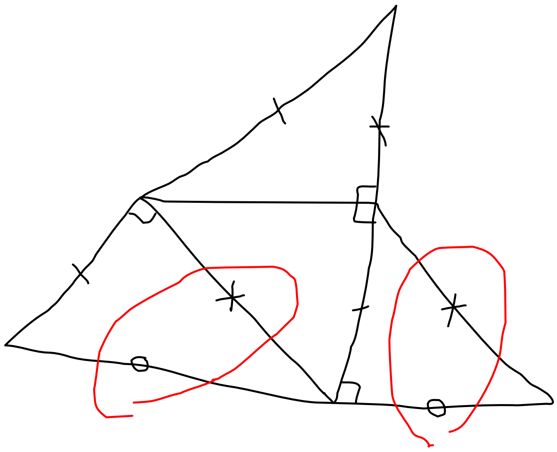
Affiche 2



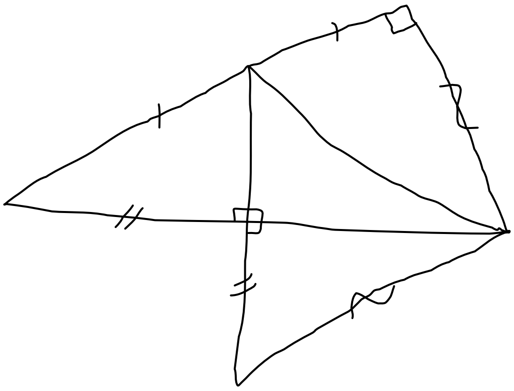
Affiche 3

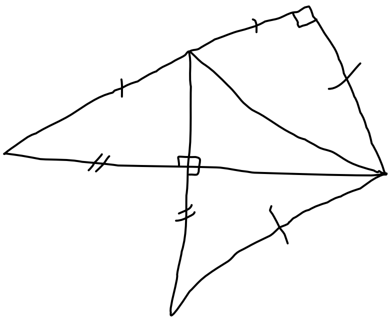


Affiche 4

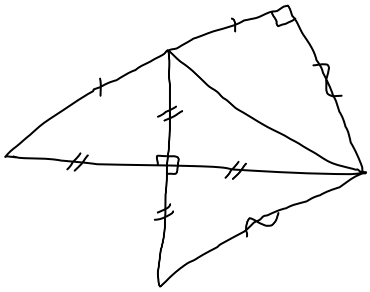


Affiche 5





NON



NON

Retour texte

EVALUATION DIAGNOSTIQUE POUR ASH ET AIDE INDIVIDUELLE

François BOULE
Maître de conférences retraité
INSHEA Suresnes
francois.boule@neuf.fr

Résumé

Les épreuves d'évaluation sont généralement établies selon des normes propices à la sommation ; elles neutralisent un grand nombre d'éléments significatifs concernant les difficultés rencontrées. Le but ici recherché est **complémentaire** : non pas un bilan de connaissances ou de savoir faire mathématiques mais un repérage des obstacles liés *aux moyens d'apprendre* : construction de l'espace, logique, mémoire, attention. Il s'agit donc d'une approche dirigée vers les fonctions cognitives du sujet, à partir de son comportement, de ses actions, de son langage en vue de construire une aide adaptée. L'atelier propose à la discussion un ensemble d'items visant à repérer et interpréter les obstacles que peut rencontrer un enfant à un moment donné.

I - LES ÉPREUVES D'ÉVALUATION

Les épreuves d'évaluation, à l'école, tendent à prendre une importance que l'on peut trouver excessive quant à leur prescription et l'usage qui en est fait. C'est pourquoi il semble opportun d'interroger d'abord leurs objectifs et leurs modalités.

1 Fonctions

Il y a trois sortes d'utilisation de l'évaluation, dont devraient découler les modalités de l'épreuve.

• L'une des exploitations possible est **longitudinale**. C'est le cas des évaluations nationales depuis 1989. Comment évolue la population scolaire ? On a pu lire dans un rapport de la DEP : "*en mathématiques, les performances globales des élèves ont augmenté d'environ 3% entre 1991 et 1992, en particulier dans les domaines de la numération, du sens des opérations, de la résolution de problèmes.*"
L'interprétation de ce résultat prête à discussion. Si la représentativité de l'échantillon n'est guère susceptible d'être mise en doute, il en est autrement de la signification du taux de réussite. Comment être assuré que l'épreuve est d'une égale difficulté, qu'elle a une égale signification par rapport au champ visé, que la population est placée dans les mêmes conditions d'une année à l'autre ? S'il s'agit de la même épreuve, les deux premières questions ne se posent pas, mais une réponse négative à la troisième s'impose : on ne peut exclure l'hypothèse d'une préparation plus ou moins explicite ; si l'épreuve est *assez différente* de la précédente pour ne pas avoir donné lieu à une préparation qui la rende insignifiante, comment être assuré qu'elle évalue *la même chose*, avec une précision telle qu'une variation de score de 3% ait un sens ?
Des conclusions "longitudinales" sont à émettre avec d'extrêmes précautions.

• Une autre exploitation est **transversale**. On le voit dans les commentaires de l'enquête PISA : comparaison d'un groupe à un autre, ou bien d'un groupe à l'*état des lieux* national, ou d'un pays à un autre. On voit sans peine les problèmes déontologiques que le premier usage ne manquerait pas de soulever. Selon un rapport 2009 de l'OCDE, le taux des élèves en *très grande difficulté de calcul* est très faible (<4%) dans 11 pays sur les 65 pays de l'étude, faible (de 4 à 7%) dans 14 pays. La France (9,5%) serait au 21° rang des pays européens (sur 25), au 36° rang des pays de l'OCDE (à égalité avec la Russie,

juste devant l'Azerbaïdjan, Dubaï, la Croatie…).
C'est pourquoi l'évaluation nationale **était** clairement tournée vers le second usage ; il s'agit d'abord de donner aux enseignants un moyen de situer leur classe, en début d'année, par rapport à la moyenne nationale, et de les inviter ainsi à adapter à cette classe leurs objectifs et leurs méthodes.

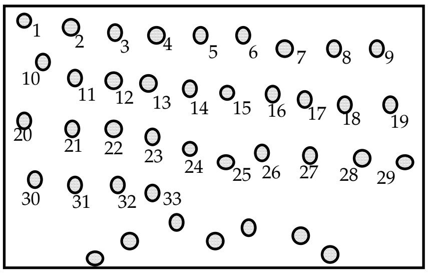
• Enfin, il peut s'agir d'une interprétation individuelle.
Il ne s'agit plus d'une exploitation **statistique** des résultats ; dans ce cas le dépouillement d'un item par VRAI/FAUX se révèle très insuffisant, et la cumulation de points obtenus dans des domaines différents est faiblement interprétable : il n'y a pas compensation d'un domaine à l'autre. Au moins doit-on imaginer un dépouillement selon plusieurs échelles, par exemple : numération, calcul, logique, problèmes, géométrie, mesure. En revanche l'analyse des **erreurs** prend toute son importance. Cette finalité implique également que soit mises au clair la fonction de chaque item et son interprétation. Mais il y a encore une distinction à faire, selon qu'il s'agit de dresser un **bilan** (en fin de cycle par exemple), relativement à un champ de compétence donné, ou bien une **évaluation diagnostique** préliminaire à la définition d'une aide. S'agissant d'une *orientation* de l'enfant, de la détermination d'une *aide*, ou d'une *prédiction* d'évolution individuelle, il est essentiel d'élucider la contribution de chaque item.
C'est ici l'objet qui va nous occuper.

2 Modalité de l'épreuve

Nous examinons ici quelques exemples d'épreuves en essayant de déterminer ce qu'elles permettent ou non d'élucider quant aux compétences mathématiques de l'enfant.

2.1. Exemples du dénombrement et du calcul

Exemple cité par J. Briand, IUFM & LADIST, Bordeaux
La question est posée à un enfant, à l'école maternelle, d'énumérer les objets qui sont représentés sur la feuille. L'enfant commence oralement l'énumération comme il est indiqué ci-dessous, puis s'interrompt.



L'analyse de cette démarche doit commencer par celle de la tâche : de quoi se compose une tâche d'énumération ? Elle comporte une composante numérique (connaissance de la suite ordonnée des *noms de nombres*) mais aussi une composante spatiale : choisir un "chemin" exhaustif parmi les objets, ainsi qu'un lien entre les deux (pour chaque objet successivement désigné, énoncer un mot de la liste numérique). Le processus peut s'interrompre pour plusieurs raisons :

- numérique : la disponibilité de la liste est insuffisante,
- spatiale : le "chemin" est interrompu ou incertain
- la correspondance mot-objet n'est pas assurée
- l'arrêt n'est pas opéré sur le "dernier" objet
- l'enfant est capable d'accomplir **chacune** des tâches précédentes, mais non de les assurer **ensemble**

(On reconnaît l'interprétation de R. Gellman).
Cet exemple montre que l'on ne peut conclure avec assurance à une difficulté d'ordre numérique, et qu'il faut probablement sonder d'autres compétences, par exemple liées à la continuité d'un chemin, la correspondance terme à terme, l'organisation du plan…
Exemple 2 : voici quelques résultats d'enfants de Sixième de SEGPA à des opérations proposées par écrit, en ligne, à calculer sans poser l'opération.

23+5	40+11	31+9	33+19
73	50	12	412

résultats de Pie

70-19	50-37	19 × 3	2×5×3
69	27	32	13

résultats de Bou

Que peuvent révéler ces résultats sur les capacités de calcul des deux enfants, et par conséquent sur les *remédiations* à entreprendre ? Il ne suffit évidemment pas d'évaluer ces résultats en terme VRAI/FAUX.
Quelques résultats se laissent aisément interpréter : « 23+5 = 73 » et « 33+19 = 412 » procèdent tous deux d'un traitement *en colonne* ; dans le premier cas, l'enfant a ajouté 5+2, en calant les deux nombres à gauche, dans le second, Pie a ajouté séparément la somme des dizaines, puis la somme des unités et juxtaposé les deux résultats. On peut imaginer que «31+9 = 12» procède de la même démarche, mais que la procédure a été interrompue ; c'est ainsi également que l'on peut interpréter « 40+11 = 50 » C'est ici la **numération** qui est en cause, c'est-à-dire la hiérarchie entre unités et dizaines, et le passage des unes aux autres.
Dans le cas de Bou les différentes erreurs sont de types variés. « 50–37 = 27 » témoigne d'un algorithme illicite assez répandu (“*0–3, on ne peut pas ; alors 3–0=3*”), qui “explique” probablement aussi « 70-19 = 69 » ; il s'agit clairement d'un algorithme de calcul écrit, transposé mentalement ; tandis que « 2×5×3 = 13 » indique clairement que l'enfant a lu « 2 × 5 + 3 » qu'il a interprété : « (2×5) +3 ». En revanche « **19**×**3** = 32 » semble plus difficile à interpréter, au seul examen de la réponse. Cet exemple montre que les niveaux de difficultés de ces deux enfants sont nettement distincts.

Mais il montre aussi qu'une épreuve *écrite collective* est surtout propre à révéler une réussite, beaucoup moins à poser un diagnostic individuel précis en cas de difficulté. En effet, une épreuve réussie, c'est à dire le résultat croisé de plusieurs items réussis laisse à penser que les démarches employées sont correctes et bien maîtrisées. En revanche, une épreuve non réussie (et en particulier une non-réponse) renseigne peu sur les causes : s'agit-il de la longueur de l'épreuve, ou de la forme de l'épreuve, ou de la compréhension de la consigne ? Quel est le niveau de difficulté qui fait obstacle ?
C'est ici que l'analyse d'erreur prend sa pleine dimension car elle renseigne sur les procédures disponibles et la localisation des obstacles rencontrés par l'enfant. Van Lehn (1983) les interprète en terme de ***bugs*** : en cas d'impasse, l'enfant *inventerait* une procédure de substitution. Ce qui, d'une part, rendrait compte de certains types d'erreurs systématiques, et d'autre part permettrait une simulation assez simple des comportements observés. Il isole par exemple quatre grands types d'erreurs systématiques à propos de la soustraction écrite en colonne :

A	B	C	D
$\begin{array}{r} 207 \\ -169 \\ \hline 162 \end{array}$	$\begin{array}{r} 207 \\ -169 \\ \hline 100 \end{array}$	$\begin{array}{r} 207 \\ -169 \\ \hline 42 \end{array}$	$\begin{array}{r} 207 \\ -169 \\ \hline 40 \end{array}$

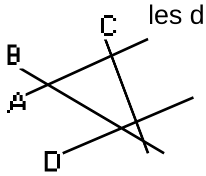
Les quatre types d'erreurs systématiques pour la soustraction (Van Lehn)

Le type A revient à dire : je ne peux enlever 9 de 7, ***alors*** j'enlève 7 de 9; id° pour dizaines.
C'est une démarche que l'on rencontre classiquement au long du cycle 3.
Type B : 7–9 pas possible ***donc c'est 0***.
Type C : on ne peut “emprunter” une dizaine (il n'y en a pas) => même réponse qu'en A ; mais on peut emprunter une centaine => retenue
Type D : on ne peut emprunter une dizaine => même réponse qu'en B ; etc.

Plus les enfants sont jeunes, moins il est satisfaisant de s'en tenir simplement à une forme papier-crayon, telle que sont les évaluations CE2/Sixième. On risque ainsi de laisser inaperçus ou de brouiller nombre de paramètres significatifs.

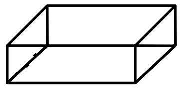
2.2. Exemples géométriques

Exemples :



les droites parallèles sont :
A et B ☐
A et C ☐
A et D ☐

T.A.S. CE2/CM1

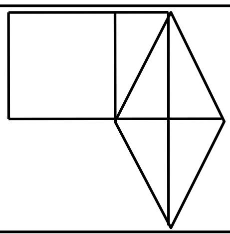


Cette brique a :
4 faces et 8 arêtes ☐
6 faces et 8 arêtes ☐
6 faces et 12 arêtes ☐

T.A.S. CE2/CM1

Que révèlent ces items ? En premier lieu la connaissance d'un vocabulaire (droite, parallèle, face, arête). Toutefois le repérage de la connaissance de ces termes risque d'être occulté par plusieurs facteurs. A l'école élémentaire, il n'est sans doute pas usuel (et certainement pas pertinent) de raisonner sur des *droites*, (représentées de surcroît par un segment), ni de les désigner par des lettres majuscules (cette notation, quand elle est employée, est plutôt réservée aux *points*). S'agit-il de vérifier que des droites sont parallèles ? Que l'on connaît cette définition ? Que l'on dispose d'une *procédure* de vérification ? D'une procédure de construction ?

Autre exemple (plus récent)



Repasse en bleu les côtés d'un carré de cette figure.
Repasse en rouge les côtés d'un rectangle de cette figure.
Repasse en vert les côtés d'un losange de cette figure.
Repasse en jaune les côtés d'un triangle isocèle de cette figure.

entrée en 6ème 2005

3 Visée de l'épreuve

L'épreuve peut viser le contrôle d'un niveau de connaissances ou de savoir-faire ; elle ressemble alors à un examen de passage. Mais s'il s'agit d'élaborer une aide, il ne convient pas de rajouter « *plus de la même chose* » (Watzlawiczk) mais de repérer non pas les éléments absents ou mal connus mais les éléments stables des connaissances de l'enfant, ses capacités propres et les difficultés particulières qui peuvent affecter, non seulement un domaine d'apprentissage, mais plusieurs.

Les difficultés ou les obstacles rencontrés dans l'apprentissage des mathématiques, de la lecture, de l'écriture peuvent provenir de l'objet de l'apprentissage lui-même mais aussi de la représentation que l'enfant s'en fait (doutes sur l'intérêt de l'objet, manque de confiance en soi, représentation inadéquate). Mais ces obstacles peuvent provenir, non seulement des objets de l'apprentissage eux-mêmes, mais des *conditions* de cet apprentissage. Dans ce champ se rencontrent les activités assez vaguement désignées par « structuration de l'espace et du temps », auxquelles on prête beaucoup d'attention à l'école maternelle et plus guère ensuite. On peut y ajouter ce qui concerne la **mémoire de travail** et **l'attention**. Il s'agit d'un déficit, non de savoirs ou de procédures, mais des **moyens** de développer ces savoirs et procédures. Par nature même, ce déficit n'est lisible qu'à travers des effets de surface, par exemple les apprentissages des mathématiques, de la lecture ou de l'écriture.

C'est pourquoi il semble nécessaire lors d'une évaluation d'explorer en premier lieu ces domaines quelles que soient les difficultés aperçues.

Les activités transversales décrites ci-dessous, qui conditionnent l'efficacité des apprentissages concernent les domaines suivants :

1. Construction de l'espace : repérage et orientation
2. Mémoire de travail : empan mnésique, organisation des actions
3. Champ attentionnel : étendue du champ, inhibition des éléments parasites.

II - ACTIVITÉS TRANSVERSALES

1 Construction de l'espace

Les apprentissages de la lecture, de l'écriture, du dénombrement, de la numération, du calcul font appel à des capacités de repérage et d'orientation dans le plan faute desquelles ces apprentissages seront ralentis ou empêchés.
Ces activités peuvent faire appel à la reconnaissance globale d'une situation, à une représentation en mémoire d'une situation, à une description verbale. Les matériaux utilisés pourront être neutres (jetons…) ou imagés, ou encore spécifiquement liés à des supports de lecture.

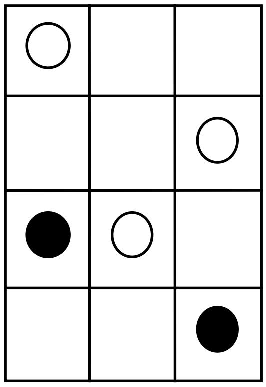
1.1. Repérage dans le plan

On utilise deux grilles 3 x 4 des jetons blancs ou de couleur. Disposer 3 jetons blancs et 2 jetons de couleur (exemple ci-contre).

Consigne : *Regarde bien ces jetons, je vais les cacher.*

Après 5 ou 6 secondes d'observation, poser un carton sur la première grille.

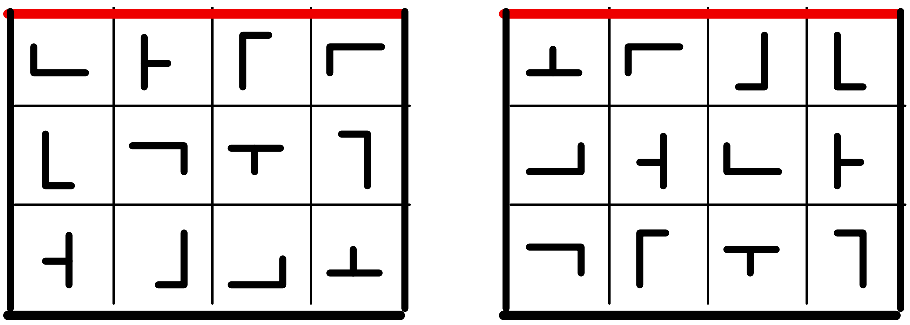
Consigne : *Place des jetons dans la deuxième grille, de la même façon que dans la première.*



Relever le nombre de jetons bien placés, éventuellement les erreurs systématiques.
Variante : pendant la phase d'observation, demander à l'enfant de décrire la disposition.
Quels sont les mots employés ? Sont-ils pertinents ? Cette description (non contrôlée) améliore-t-elle le résultat ?
L'expérience montre l'importance des gestes manuels, la reproduction éventuelle du geste de dépôt, l'utilisation (ou non) de l'organisation en tableau, le repérage (éventuel) de « bonnes formes » ou la formulation d'éléments langagiers.
De façon plus générale, on doit s'interroger sur le rôle du langage dans une « mise à distance » par l'élève, c'est-à-dire le passage d'une solution occasionnelle à une méthode. C'est l'une des fonctions de l'accompagnement de l'adulte ; cette mise à distance est-elle possible dès le cycle 2, à quelles conditions ?
Il est clair qu'une inscription dans la durée (rappel de l'activité d'une séance précédente, formulation d'une synthèse, projection vers une séance ultérieure…) est l'une des conditions nécessaires.

1.2. Symétrie/rotation

On utilise deux grilles, comportant les mêmes figures mais selon des emplacements différents.
Le maître désigne une figure de la première planche. Consigne : où se trouve cette figure sur l'autre planche ?



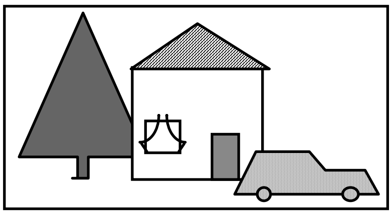
Ce qui est visé ici c'est la possible confusion de deux figures ne différant que par une symétrie ou une rotation. C'est évidemment un déficit perceptif qui retentit sur les apprentissages de l'écriture et de la lecture. C'est pourquoi on peut travailler aussi avec des tableaux de lettres ou de syllabes :

da	pa	ba
ab	ad	ap
do	po	bo
ed	eb	ep

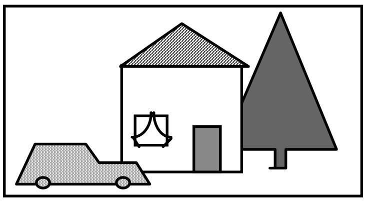
ed	da	po
do	ab	eb
pa	bo	ap
ad	ep	ba

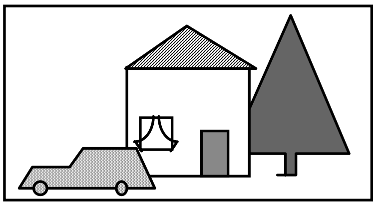
1.3. repérage/description

Le matériel est composé de 12 cartes à découper, portant chacune les trois objets : Arbre, Maison, Voiture. Le maître pose une carte devant l'enfant. Exemple :



Consigne : « *que vois-tu sur cette image ?* » Réponse possible : — *un arbre, une maison, une voiture…*
Le maître pose alors par-dessus la carte ci-dessous à gauche :





Question : — *est-ce la même image ?* Réponse possible : —*non, ici la voiture est à gauche…*
Le maître pose alors par-dessus la carte ci-dessus, à droite.
–*Ici aussi, la voiture est à gauche ; est-ce la même carte que la précédente ?* etc.
On note le degré de précision de la description : les objets pouvant être : à **gauche**, au **centre**, à **droite**, **en avant** ou **en arrière** d'un autre objet, la voiture **dirigée vers** la gauche ou vers la droite.

2 Mémoire

La psychologie cognitive, depuis une trentaine d'années, décrit les démarches de pensée et leurs limitations en termes de traitement d'information, de capacité, d'économie. Ceci concerne aussi bien la symbolisation, l'élaboration de schéma, le classement que la planification d'actions ou l'anticipation. Ce peut être l'une des causes des incompréhensions de consignes, de l'incapacité à dépasser le décodage grapho-phonologique, des interruptions de calcul.
Le concept de mémoire de travail postule trois composantes (Baddeley, 1993) :

- un **administrateur central** qui accomplit des « fonctions exécutives » : anticipation d'un but à atteindre, planification des actions, sélection des informations pertinentes et inhibition des informations parasites, application des procédures, contrôle de l'action…
- une « boucle phono-acoustique » (stockage temporaire de l'information verbale),
- un « calepin visuo-spatial » (stockage temporaire d'informations visuelles).

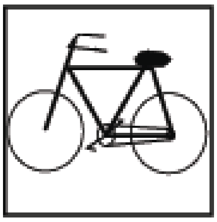
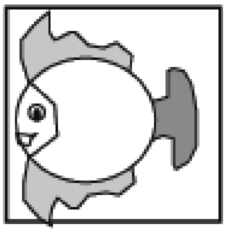
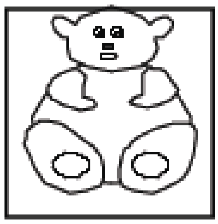
On voit par là l'intérêt pédagogique de l'évaluation de la mémoire de travail. Le repérage (sinon la mesure) d'un *empan* mnésique est un élément d'évaluation, l'amélioration de la *gestion* de la mémoire de travail une composante de la remédiation.

2.1 Empan

Matériel : un jeu de cartes, battu, sans les figures. Le maître montre une carte (p. ex 3♣), énonce « *Trois* », et la pose dos en l'air. L'enfant doit répéter « *Trois* ». Le maître montre une deuxième carte (p. ex 7♥), énonce « *Sept* » et la pose dos en l'air sur la précédente ; l'enfant doit répéter « ***Trois, Sept*** », etc.
Noter la liste des séquences émises par l'enfant, puis relever les cartes dans l'ordre :
Exemple : [3] ; [3 – 7] ; [3 – 7 – 5] ; [3 – 7 – 5 – 1] …
On note la longueur de la liste la plus longue sans erreur. Ceci donne une indication sur l'empan mnésique. Il ne s'agit probablement pas d'une *mesure*, pour plusieurs raisons. Cette longueur de séquence dépend du matériel utilisé (chiffres, lettres, syllabes, mots…), mais aussi de l'entraînement. La littérature évoque le « *nombre magique 7 (± 2)* » ; mais en fait, après quelques séances d'entraînement, des enfants de cycle 3 arrivent à reproduire une séquence de 10, 15, voire 20 chiffres. Ceci ne signifie pas une extension de l'empan, mais une meilleure gestion des « paquets » (*chunk*), faisant intervenir des repères visuels, des blocs, des rythmes. C'est pourquoi il est imprudent de parler d'une mesure. Par ailleurs cette indication s'est révélée très faiblement corrélée aux erreurs de calcul mental ; ce qui ne signifie pas que la taille de l'empan soit sans conséquence, mais que bien d'autres facteurs interviennent.
La prise de conscience des moyens d'améliorer la gestion de la mémoire de travail (qui ne sont pas sans rapport avec l'*attention*), est certainement un facteur utile dans la remédiation.

2.2 Mémorisation d'une séquence

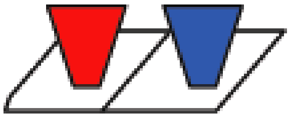
Une série de trois images est présentée à l'enfant, puis recouverte.
On donne ensuite les trois images séparées qu'il s'agit de replacer dans le même ordre.

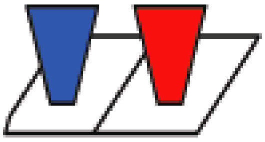
Suite : quatre images à ordonner, ou bien quatre images parmi cinq ou six, qu'il faut d'abord choisir, puis ordonner.

2.3 Mémorisation d'une suite d'actions

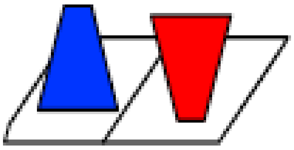
On attribue à l' « administrateur central » de la MdT la responsabilité de l'organisation dans la durée (planification, anticipation). Il semble probable que cette « fonction exécutive » a de l'importance dans l'acquisition des apprentissages ; c'est pourquoi il importe de l'évaluer. L'épreuve suivante consiste à exécuter devant l'enfant *une suite d'actions* (en les décrivant) et à lui demander ensuite de reproduire cette séquence.



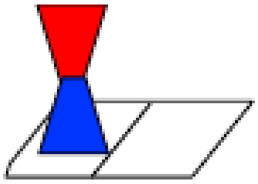
Situation de départ (deux gobelets)



Erreur !1- Echanger les gobelets



2 - Retouner le bleu



3 – Poser le rouge sur le bleu

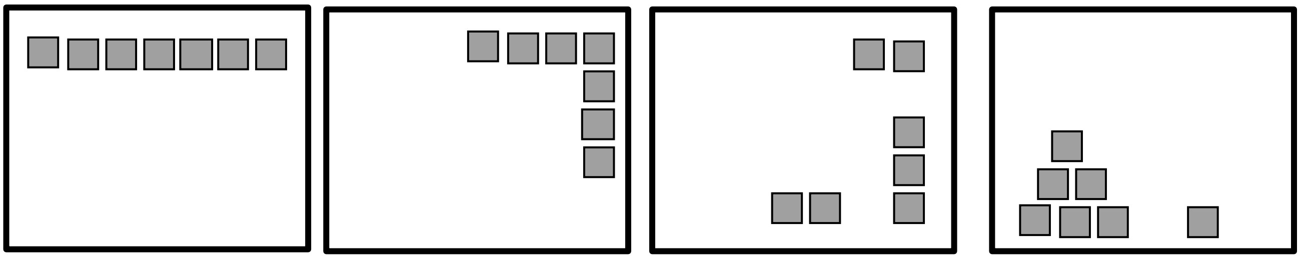
L'un des éléments significatifs est celui-ci : l'enfant s'appuie-t-il sur la séquence gestuelle, sur la séquence imagée, ou sur la mémorisation langagière (description) ? Plus généralement, on peut s'interroger sur le *type de représentation* que le sujet utilise (il a été beaucoup question naguère des « habitudes évocatives ») ; un modèle psychologique dominant semble considérer qu'un « codage propositionnel » fédère les représentations en mémoire à long terme. Il n'appartient pas au pédagogue de prendre parti sur un modèle, mais de considérer que celui-ci constitue, à un moment donné, une hypothèse destinée à diriger l'investigation vers des objets significatifs, et pas nécessairement à traduire une réalité neuropsychologique ; ainsi la « représentation sémantique » du nombre est un élément d'un modèle explicatif, mais pas nécessairement une entité « réelle ».

3 Attention

Une autre « fonction exécutive » de l'*administrateur central* consiste à centrer le champ attentionnel et à inhiber les informations périphériques ou parasites. Plusieurs épreuves sont susceptibles de repérer cette capacité, voire de l'entraîner. L'atelier propose plusieurs exemples sous forme de diaporamas (PowerPoint, disponibles sur demande) ; l'ordinateur permet en effet de prendre en compte plusieurs paramètres intéressants : durée d'exposition de chaque image, modification du sujet central, apparition de perturbations, etc.

3.1 Chenille

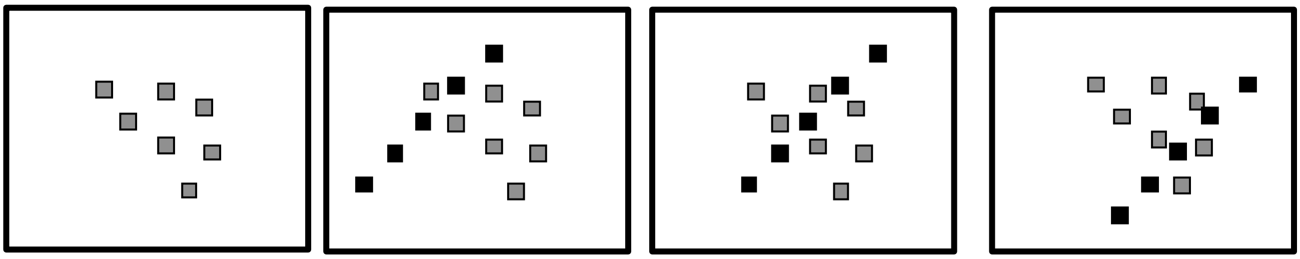
Ces images apparaissent à l'écran successivement, pendant une durée (très) courte. **Combien de carrés** ? (la question est posée au début et à la fin de la séquence).



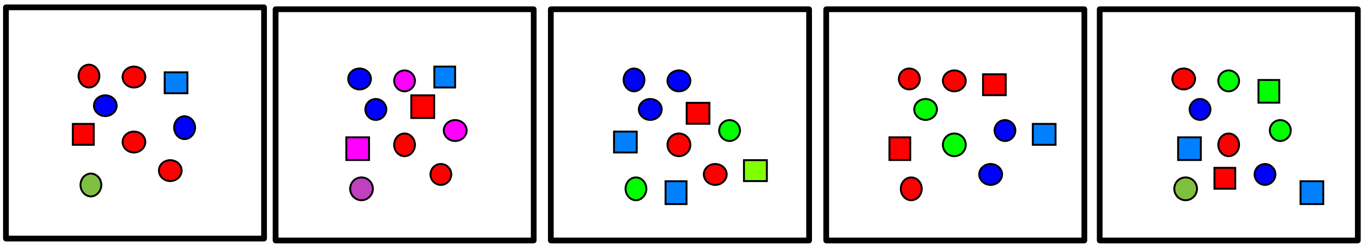
La durée d'exposition est trop courte pour permettre un dénombrement un par un ; il s'agit donc de trouver et d'exécuter une *stratégie perceptive* (repérage de blocs) permettant de répondre.

3.2 Perturbation

Même principe. Il s'agit de dénombrer les carrés gris ; mais une vague de carrés noirs traverse l'écran.



Autre exemple, même principe. Il s'agit de dénombrer les ronds ; quelques carrés perturbent l'image.



Conclusion

Ces quelques exemples n'ont pas l'ambition de recouvrir tout le champ des obstacles possibles *aux moyens d'apprendre*. L'atelier a pour objectif d'attirer l'attention sur des éléments qui ne semblent pas pris en compte par les didactiques disciplinaires (puisqu'ils ne concernent pas l'apprentissage d'un objet particulier), et de fournir aux enseignants quelques outils, ici à l'état d'ébauche. Une mise en réseau des essais et des résultats permettrait d'établir et de diffuser des outils visant le diagnostic, la construction de l'aide, et des remédiations adaptées.

III - BIBLIOGRAPHIE

BADDELEY, A. (1993) La Mémoire humaine, Théorie et pratique, Presses universitaires de Grenoble.

BOULE, F. (1999) L'évaluation en mathématiques, *Nouvelle Revue AIS n°5, mars 1999.*

HERREMAN, S. [dir], BOULE, F., BRETON, L., GRAFTO, M. *Les Aides personnalisées*, Hachette (à paraître 2011).

NOEL, M-P. dir (2005) *La dyscalculie*, Solal.

POJE, J. & SEL,ADKE, J dir. (2001) *Elèves en difficulté : les aides spécialisées à dominante pédagogique*, CNEFEI & CRDP Lille.

SIEGLER, R.S. (2001) *Enfant et raisonnement (développement cognitif de l'enfant)*, De Boeck.

MATH & MANIPS : INTRODUCTION DE MANIPULATIONS DANS LES CLASSES POUR FAVORISER LA CONSTRUCTION DES APPRENTISSAGES

Valérie HENRY
Directrice de recherche, CREM
Chargée de cours, FUNDP, ULG
V.Henry@ulg.ac.be

Pauline LAMBRECHT
Chercheur, CREM
Doctorante, FUNDP
PaulineL@crem.be

Patricia VAN GEET
Chercheur, CREM
VanGeetP@crem.be

Résumé

Cet atelier rend compte d'une recherche actuellement en cours au CREM[1]. Les *Math & Manips* sont des activités conçues pour provoquer chez les élèves des conflits entre ce qu'ils pensent et ce qu'ils découvrent lors des expérimentations. Nous proposons trois séquences d'apprentissage intégrant des manipulations, et destinées à diverses tranches d'âge de l'enseignement élémentaire voire du début du collège. Pour les enfants de 6 à 8 ans, nous travaillons les grandeurs (longueurs, masses, capacités et aires) avec pour objectif de dégager des méthodes efficaces de comparaison sans unité conventionnelle de référence. Pour les élèves de 8 à 10 ans, il s'agit de faire découvrir l'utilité d'un étalon conventionnel en travaillant les capacités. Pour ceux de 10 à 12 ans, nous proposons une séquence visant l'appropriation de la notion de volume. La discussion avec les participants s'oriente principalement sur les concepts mis en place au cours de chaque activité.

Le CREM est actuellement engagé dans une recherche visant à favoriser l'introduction de certains concepts mathématiques par des séquences d'apprentissage intégrant des manipulations effectuées par les élèves. Ces activités, appelées *Math & Manips*, sont destinées à améliorer l'apprentissage de certaines matières du cursus. Dans l'esprit des travaux précédents du CREM, la présente recherche envisage la scolarité dans son ensemble, depuis le début du primaire jusqu'à la fin du secondaire. Nous espérons provoquer chez certains élèves de la curiosité par des manipulations dont les résultats semblent en contradiction avec leurs connaissances antérieures. Une *Math & Manip* doit pousser les élèves à se poser des questions et, pour les plus âgés, les amener tout naturellement à entrer dans des démarches où le processus de modélisation prend tout son sens.

L'atelier se concentre sur trois séquences d'apprentissage destinées aux élèves de l'école élémentaire. La présentation a pour objectif non seulement de partager nos travaux, mais surtout de favoriser le dialogue avec les participants et de recueillir leurs réactions. Cet article présente un compte-rendu succinct de ces trois activités (dans la forme où elles se trouvaient en juin 2011) et des réactions que leur présentation a suscitées lors du colloque. Les activités I et III ont été encore peu testées à ce jour. Elles continueront donc à évoluer suite à de prochaines expérimentations dans des classes. L'activité II a été élaborée pour sa part suite à de nombreuses expérimentations au cours desquelles l'activité des élèves a été observée.

[1] Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques – Nivelles, Belgique.

La répartition des activités en fonction des années d'étude est prévue pour l'enseignement belge qui est constitué de trois cycles au primaire. Nous avons choisi d'indiquer les niveaux équivalents en France même si ces groupements sont parfois inadaptés pour le système français.

I - LE GOÛTER D'ANNIVERSAIRE (CP-CE1)

Avec les enfants de 6 à 8 ans, nous travaillons les grandeurs (longueurs, masses, capacités et aires) avec pour objectif de dégager des méthodes efficaces de comparaison sans unité conventionnelle de référence.

Les activités sont présentées autour d'un thème : un goûter pour le septième anniversaire de la mascotte de la classe (habituellement une peluche). Au cours de la séquence d'apprentissage, les élèves sont amenés à choisir l'objet de plus grande capacité, le plus long, le plus lourd ou celui de plus grande aire selon une méthode efficace. Ces manipulations ne nécessitent aucun recours aux mesures (Rouche, 1992).

Une activité préliminaire est proposée afin de permettre à l'enseignant de s'assurer que le principe de conservation du volume est acquis par la plupart des élèves. Pour cela, chacun d'eux apporte un verre. L'enseignant verse dans chaque verre, devant tous les élèves, le contenu d'un petit carton de jus, puis leur demande si l'un d'eux a plus à boire que les autres. Si les enfants affirment qu'ils ont tous la même quantité à boire malgré la diversité des formes de leurs verres, les manipulations du goûter d'anniversaire peuvent être commencées. Sinon, nous conseillons avant cette *Math & Manip* d'autres activités qui permettent de développer l'acquisition du principe de conservation du volume (voir par exemple CREM, 2002).

1 Comparaison de longueurs de segments : les bougies

La classe est divisée en sept groupes et chacun d'eux reçoit un lot identique de bougies coupées à différentes longueurs. Les élèves doivent présenter à l'enseignant la bougie la plus longue de leur lot. Les sept bougies rassemblées, l'enseignant demande à un élève de vérifier qu'elles ont toutes la même longueur, puisqu'il s'agit de la bougie la plus longue de chacun des lots identiques. Ces bougies les plus longues peuvent être de couleurs différentes.

Cette activité très simple, où la comparaison des longueurs se limite à une comparaison de segments, prépare la comparaison des ficelles (activité 5).

2 Comparaison de capacités : les moules à gâteau

Cette manipulation, menée par l'enseignant devant toute la classe, consiste à installer avec les élèves une méthode permettant de reconnaître le récipient de plus grande contenance.

Pour ce faire, l'enseignant présente trois moules différents. Notre choix s'est porté sur les trois moules illustrés. En les manipulant, les élèves observent leurs particularités, par exemple, un moule peut être placé à l'intérieur d'un autre. Ils doivent alors prendre conscience que ce moule ne sera pas celui qui peut contenir le plus de pâte et qu'il faut donc l'écarter. Pour comparer les deux autres moules, l'un plus haut et l'autre plus large, l'enseignant, suite à une discussion avec les élèves, remplit d'eau un premier moule puis transvase son contenu dans le second. Les élèves sont amenés à se rendre compte que, s'il n'est pas possible de verser toute la quantité d'eau du premier moule dans le second, cela signifie que le premier moule a une capacité supérieure au second. De même si, ayant versé toute l'eau du premier moule dans le second, ce dernier n'est pas rempli, cela signifie que le second moule a une capacité supérieure au premier.

L'expérience fait donc appel à deux modes de comparaison. Tout d'abord, observer qu'un moule est inclus dans un autre suffit à décider qu'on peut l'écarter. Une technique plus fine est nécessaire pour comparer les deux moules restants, le plus haut n'étant pas celui de plus grande contenance comme les élèves pourraient avoir tendance à le croire. L'enseignant propose donc une technique de transvasement. Une seule personne réalise l'expérience devant la classe afin que chacun soit attentif au déroulement. Cette technique sera travaillée individuellement par les élèves lors de la comparaison des gobelets[2] (activité 4).

3 Comparaison de masses : les boîtes à bonbons

La manipulation suivante amène les élèves à comparer des masses sans les mesurer.

Elle s'effectue avec des petits groupes d'élèves, à tour de rôle. Pendant ce temps, ceux qui ne sont pas occupés sont invités à réaliser des décorations pour garnir la table le jour de la fête.

L'enseignant présente aux élèves quatre boîtes identiques et opaques contenant les mêmes bonbons. Dans chacune, il y en a un nombre multiple de trois. Il explique qu'il a préparé ces boîtes pour différents groupes d'enfants, en comptant trois bonbons par enfant. Parmi les quatre boîtes, l'une d'elles est destinée à ses élèves qui constituent le groupe d'enfants le plus nombreux. Mais l'enseignant a oublié de noter les destinataires de chaque boîte. La tâche des élèves consiste à retrouver, sans l'ouvrir, la boîte qui leur est attribuée. La première étape est de comprendre que, comme la classe représente le groupe le plus nombreux, leur boîte est celle qui contient le plus grand nombre de bonbons, et est donc la plus lourde.

Nous faisons vivre cette manipulation aux participants. Les premières réactions d'ordre sensoriel consistent à soupeser les boîtes ou à les secouer pour « entendre » si l'une d'elles contient un nombre significativement différent de bonbons. Les boîtes sont remplies de manière à ce que l'une de ces techniques ou les deux permettent aux élèves d'exclure une boîte. Pour comparer les trois boîtes restantes, nous avons choisi d'utiliser une balance à deux plateaux (balance de Roberval). Cet instrument, utilisé fréquemment en Belgique dans les classes maternelles, ne semble pas faire partie du matériel habituel dans les classes de CP, selon les participants. Il est cependant assez facile d'en fabriquer une soi-même puisque le but est de comparer les masses et non de les mesurer.

Lorsque chaque groupe d'enfants a mis au point une technique pour trouver la boîte la plus lourde, une mise en commun permet de confronter les choix. Si tous les groupes n'ont pas sélectionné la même boîte, la balance à plateaux est utilisée devant l'ensemble des élèves pour les mettre d'accord. Il s'ensuit une vérification : l'enseignant ouvre la boîte choisie unanimement et chaque enfant prend trois bonbons. Si le choix de la boîte est correct, il doit y en avoir pour tout le monde.

La boîte la plus légère a été placée intentionnellement pour permettre d'écarter une première boîte par une expérience purement sensorielle. Cette technique a ses limites et ne permet pas de comparer les trois boîtes restantes. La balance à plateaux ne permet que des comparaisons deux à deux, c'est donc la transitivité de l'ordre sur les grandeurs qui est implicitement travaillée ici.

[2] Par le mot « gobelet », nous désignons tout récipient qui permet à l'élève de boire.

4 Comparaison de capacités : les gobelets

Les élèves comparent la capacité de quatre gobelets et ont la consigne de choisir celui qui peut contenir le plus de grenadine. Les gobelets sont choisis de sorte que le plus haut ne soit pas celui qui contient le plus, conception très prégnante dans l'esprit des élèves de cet âge. Comme lors de comparaisons précédentes, une première analyse purement visuelle permet de mettre sur le côté un gobelet de contenance visiblement plus petite que les autres. Ensuite, comme pour les moules à gâteaux, la comparaison s'effectue par transvasements d'eau. Les élèves comparent les récipients deux par deux et conservent, après chaque transvasement, le gobelet ayant la plus grande capacité. Ils devraient encore ici appliquer spontanément le principe de transitivité. Cette activité permet donc le réinvestissement des apprentissages réalisés précédemment.

5 Comparaison de longueurs : les ficelles d'emballage

L'enseignant explique aux élèves qu'il souhaite emballer le gâteau d'anniversaire dans une boîte fermée à l'aide d'une ficelle d'emballage. Il présente un ensemble de ficelles : les unes sont enroulées, les autres torsadées et les dernières déroulées. Les longueurs à comparer ne se présentent plus d'emblée comme des segments rectilignes. Les ficelles proposées ont une longueur de plus d'un mètre cinquante afin d'éviter au maximum la tentation d'utiliser la règle pour les mesurer. La classe est partagée en plusieurs groupes pour travailler. L'enseignant remet à chacun d'eux un lot de ficelles différentes et leur demande de sélectionner la ficelle la plus longue après avoir donné une estimation.

Les ficelles ont été choisies de façon à ce que la plus longue soit celle qui prend le moins de place. Ainsi, nous prévoyons l'apparition de trois types de réponse :
- une estimation au hasard ;
- une estimation (erronée) basée sur l'espace occupé par les ficelles, avant étirement ;
- une réponse (correcte) de type : « Je ne peux pas le dire dans l'état actuel ».

La deuxième devrait mener au conflit cognitif visé. La troisième témoignerait d'une maîtrise importante des apprentissages ciblés puisqu'elle requiert, en plus des connaissances proprement dites, d'entrer en rupture avec le contrat didactique.

6 Comparaison d'aires : set de table ou serviette?

Les participants ont été mis en activité sur cette comparaison, dont la situation est la suivante.

L'enseignant souhaite protéger les bureaux des élèves pour le goûter et donne le choix entre des sets de table ou différentes sortes de serviettes. Il présente aux élèves des lots identiques d'éléments et leur demande de déterminer celui qui recouvre la plus grande surface de leur table.

Comme prévu pour les manipulations précédentes, l'impression visuelle permet d'écarter un élément. Il s'agit d'une petite serviette. Pour comparer les trois éléments restants, la première idée est de les superposer pour « voir » si l'un d'eux dépasse des autres. En superposant la grande serviette et le set de table, certains constatent que la serviette est légèrement plus large que le set et que ce dernier est bien plus long que la serviette. Pour d'autres, qui jouent le jeu des élèves, le découpage du surplus et la superposition des morceaux sont nécessaires. Le matériel apporté était légèrement différent du matériel prévu pour les élèves, les participants ont donc parfois reçu des pièces dont il était difficile de distinguer celle de plus grande aire.

Une question s'est posée : la majorité des enfants de 6 et 7 ans ont-ils acquis le principe de conservation des aires ? Les découpages sont alors remis en question et certains participants pensent qu'il serait souhaitable de proposer des éléments qui se comparent uniquement par superposition.

Au moment où nous rédigeons cet article, l'activité a été repensée pour éviter le recours à des découpages et sera testée prochainement.

7 La synthèse… et le goûter !

Après ces manipulations, une institutionnalisation est organisée sous forme de synthèse, comprenant à la fois l'ensemble des démarches effectuées par les élèves et des éléments plus théoriques. Elle se fait en deux temps : oralement lorsque les élèves expliquent ce qu'ils ont découvert au fil de la *Math & Manip* et ensuite par écrit. Cette dernière partie est laissée à l'initiative des enseignants étant donné que le matériel utilisé et les réflexions proposées par les élèves peuvent varier d'une classe à l'autre. Toutefois, des pistes seront données dans les fiches qui accompagneront cette activité lors de la publication.

L'ensemble des activités se termine par le goûter d'anniversaire.

II - DES ÉTALONS (CE2-CM1)

Cette activité consiste à proposer aux élèves de 8 à 10 ans une situation où le choix d'un étalon apparaît comme une nécessité.

1 Comparaison directe de deux capacités

Pour commencer, on demande aux élèves de comparer les capacités de deux récipients de formes telles qu'on ne puisse préjuger de celui dont le volume est le plus grand. Avant toute manipulation, il est demandé aux élèves d'avancer une estimation. Lors de cette phase, certains élèves pourraient avancer des justifications basées sur des conceptions erronées telles que « le récipient le plus haut a la plus grande capacité ». Afin de créer un conflit, les deux récipients sont choisis de sorte que le plus haut ne soit pas celui qui peut contenir le plus. Les élèves peuvent alors procéder à la comparaison par transvasement. Le but de cette première phase est également de vérifier leurs méthodes de comparaison et de les corriger si nécessaire.

2 Étalons non conventionnels

Dans la deuxième partie de cette *Math & Manip*, l'enseignant raconte une histoire qui place les élèves dans un contexte où la comparaison directe n'est plus possible, mais où ils ont la possibilité de choisir un étalon non conventionnel commun. Nous avons pris le temps de faire vivre cette partie d'activité aux participants.

Vous êtes deux équipes d'archéologues. Avant de partir en expédition, vous faites vos malles ensemble et vous emportez exactement le même matériel de travail. Une équipe part sur un site de fouilles en Grèce, une autre en Égypte. Au cours des fouilles, les équipes se donnent des nouvelles. Il se fait qu'elles ont trouvé toutes les deux une amphore. Chaque équipe estime avoir découvert l'amphore de plus grande capacité. Malheureusement, ces amphores sont trop fragiles pour être transportées de sorte qu'il n'est pas possible de les comparer directement. Afin de déterminer l'amphore de plus grande capacité, vous pouvez utiliser le matériel de votre malle et échanger des informations écrites. Vous êtes également en contact avec un expert belge auquel vous devez envoyer un rapport mentionnant les capacités de vos amphores et les résultats de la comparaison.

Après s'être répartis en deux équipes et s'être assuré, comme les élèves, que leurs valisettes comportaient le même matériel, les participants se rendent sur leurs « sites de fouilles ». Ces derniers sont situés en des endroits suffisamment distants pour simuler l'éloignement géographique et empêcher toute comparaison directe. Ils sont signalés au moyen d'une représentation d'un monument du pays en question. Les équipes trouvent sur leur site un récipient représentant une amphore ainsi qu'une réserve d'eau.

Face à la diversité du contenu de leur valisette, les « archéologues » sont confrontés au choix d'un étalon approprié à la mesure de la capacité de leur amphore. Certains objets sont très petits (bouchon, cuillère, etc.), ce qui rend fastidieux le remplissage du récipient. D'autres sont plus grands (gobelet, tasse, etc.), ce qui manque de précision mais permet néanmoins de mesurer par encadrement. De plus, des objets inadaptés à la mesure de la capacité ont été placés, avec pour possible effet de focaliser l'attention des élèves sur la hauteur, la largeur, la longueur, … de l'amphore.

Certains élèves pourraient se servir d'étalons variés, plus grands et plus petits (bol et louche, etc.), ce qui pourrait introduire la notion de sous-étalon et amener une plus grande précision. Les équipes doivent, dans tous les cas, prendre conscience de la nécessité de s'accorder sur un récipient commun. L'enseignant, qui joue le rôle de l'expert et ne valide le rapport que si la méthode est correcte, peut alors parler d'étalon. Il reste aux élèves à procéder, une nouvelle fois si nécessaire, à la mesure de la capacité de leur amphore avec cet étalon. Les mesures ainsi obtenues sont finalement comparées et permettent la détermination de l'amphore de plus grande capacité.

3 Étalons conventionnels : le litre et ses sous-multiples

Ensuite, l'enseignant annonce qu'une troisième amphore a été découverte sur un site en Turquie. Sa capacité est donnée à l'aide d'un étalon qui ne se trouve pas dans les valisettes. Les élèves se rendent compte qu'il est difficile de trouver exactement les mêmes étalons d'un pays à l'autre. Une discussion s'engage autour des étalons utilisés et de ce qu'ils représentent. Un étalon commun universel apparaît, dès lors, comme une nécessité.

Une fois le litre ou un de ses sous-étalons mentionnés, l'enseignant donne la capacité de l'amphore turque en litre et demande aux élèves de classer les trois amphores selon leur capacité. Il reste alors aux élèves de chaque groupe à recommencer leurs mesures à l'aide d'un récipient gradué.

Au travers de cette activité, les élèves ont l'occasion de vivre la nécessité du choix d'un étalon commun dans un premier temps et de comprendre la nécessité d'un étalon commun universel dans un deuxième temps.

Le travail se poursuit par la sériation de plus de trois récipients, la découverte des équivalences entre les sous-unités de mesure et l'étude des relations entre sous-étalons. Cette dernière partie s'effectue à partir d'une série de récipients sur lesquels la capacité est mentionnée.

Des participants ont souligné que ce genre d'activité était intéressante également pour que les élèves découvrent que, par exemple, un récipient de 500 ml a une capacité plus petite qu'un autre de 2 litres, bien que 500 soit un nombre plus grand que 2.

III - VOLUMES (CM2-6^{e})

L'ensemble des manipulations destinées aux élèves de 10 à 12 ans a pour objectif l'appropriation de la notion de volume, plus particulièrement dans le cas des parallélépipèdes rectangles, ainsi que la construction de liens entre quelques unités de volume.

Cette activité, encore en construction, a été présentée lors de l'atelier sous une forme provisoire que nous décrivons en annexe. Nous remercions les participants pour leurs réflexions qui seront prises en compte dans l'évolution de notre travail.

IV - CONCLUSION

Cet article a été l'occasion de présenter principalement deux activités que nous avons développées au CREM. Dans ces activités, l'accent est mis sur l'introduction de manipulations dans la classe afin de favoriser l'apparition de conflits cognitifs relativement au savoir visé.

Dans la première *Math & Manip*, les enfants découvrent diverses méthodes de comparaison en fonction des grandeurs avec lesquelles ils travaillent et se forgent des intuitions relativement aux domaines de validité des techniques qu'ils possèdent déjà, ce qui crée l'espace nécessaire à la mise en place de nouvelles techniques, plus efficaces.

La deuxième *Math & Manip*, quant à elle, place les élèves dans une situation dans laquelle ils vivent la nécessité de la détermination d'un étalon commun. Ce sont les rétroactions du milieu au fil de l'activité qui les guident vers le besoin de s'accorder sur un étalon commun universel.

Les différents conflits rencontrés au cours de ces séquences d'apprentissage (généralement : le récipient le plus haut n'est pas nécessairement celui qui peut contenir le plus) incitent les élèves à remettre en question les impressions visuelles, à se convaincre de la nécessité de la vérification et à mettre en œuvre des méthodes efficaces de comparaison.

L'investissement personnel des élèves dans les activités nous semble de nature à favoriser l'acquisition des concepts liés aux grandeurs. Toutefois, une analyse portant sur la mesure des effets d'une telle ingénierie n'a pas encore été réalisée.

Pour terminer, soulignons que, en ce qui concerne le primaire, l'objectif n'est pas tant l'introduction de manipulations dans les classes car celles-ci y ont généralement déjà leur place mais bien la mise en évidence, pour l'enseignant, des savoirs mathématiques impliqués et des conditions nécessaires à leur mobilisation.

V - POUR EN SAVOIR PLUS

Pour tout renseignement complémentaire concernant la recherche ou l'une des *Math & Manips* présentées, nous sommes à votre disposition. Vous pouvez prendre contact avec nous via l'adresse suivante :

info@crem.be

Pour plus d'information concernant les activités du CREM, consultez le site :

www.crem.be

VI - BIBLIOGRAPHIE

APMEP (2002-2003) Projet de création d'un laboratoire de mathématiques. *Lycée Mas de Tesse*, *Montpellier*. http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Asm19_2002-2003_Projet_labo_de_Math_de_Tesse_Annexe_Asm19.pdf

Bkouche R. (2008) Du caractère expérimental des mathématiques. À propos des laboratoires de mathématiques. *Repères IREM*, **70**, 33-76.

Borel É. (1904) *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*. Conférence prononcée le 3 mars 1904, Musée Pédagogique, Paris. http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

Caron-Pargue J. (1981) Quelques aspects de la manipulation. *Recherches en didactique des mathématiques*, **2/1**, 5-35.

Castelnuovo E., Barra M. (1980) *La mathématique dans la réalité*. IREM Univ. Paris 7, CEDIC, Bruxelles.

Commission scientifique d'Étude de l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences (1990) *Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté française de Belgique*. Ministère de l'éducation, de la recherche et de la formation, Belgique.

CREM (2002). *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur*. Rouche N. coordinateur, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM*, **60**, 61-78.

ERMEL (1997) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*. Hatier Pédagogie, Paris.

Gattegno C., Servais W., Castelnuovo E., Nicolet J.L., Fletcher T.J., Motard L., Campedelli L., Biguenet A., Peskett J.W., Puig Adam P. (1958) *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*. Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

GEM (2007) *Des laboratoires pour construire des mathématiques*. Louvain-la-Neuve.

Guissard M.-F., Henry V., Agie S., Lambrecht P. (2010) Math & Manips, *Losanges*, **7**, 39-46.

Jaquet F. (2007) *Ateliers de résolution de problèmes avec matériel*. ARMT, Italie.

MINISTÈRE DE LA COMMUNAUTÉ FRANÇAISE (1999) *Socles de compétences* (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire). Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Direction de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux, Bruxelles.

ROUCHE N. (1992) *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels*. Didier Hatier.

VII - ANNEXE

Avant même de présenter cette *Math & Manip* aux participants, la notion de volume a été discutée. Le mot « volume » est utilisé pour indiquer tant la grandeur que la mesure.

1 Découverte du calcul du volume d'un parallélépipède rectangle

Chaque groupe reçoit 4 boîtes et 38 cubes de 2 cm d'arête. La consigne donnée est la suivante : combien de cubes sont nécessaires pour remplir chaque boîte ?

Les boîtes ont été pensées pour que le nombre de cubes donnés permette de remplir entièrement la première boîte et de remplir une base ainsi qu'une partie d'un second « étage » de la deuxième. Pour la troisième boîte, il est possible de remplir une base et de construire une hauteur. Quand à la quatrième boîte, il y a assez de cubes pour construire une longueur, une largeur et une hauteur. Cette progression dans la difficulté nous paraît justifiée mais tous les participants à l'atelier ne sont pas d'avis d'imposer que le remplissage se fasse dans cet ordre.

Connaissant l'aire d'un rectangle, les élèves trouvent assez vite que le nombre de cubes nécessaires à remplir la base correspond au nombre de cubes mis dans la longueur multiplié par le nombre de cubes mis dans la largeur. Ce nombre trouvé, ils le multiplient par le nombre d'étages qu'ils peuvent construire. Il est très important que les élèves notent, pour chaque boîte, la démarche qu'ils ont utilisée. Celle-ci sera expliquée lors de la mise en commun et, par la suite, lors de la synthèse construite avec eux.

Cette activité met en exergue deux manières de calculer le volume d'un parallélépipède, soit en multipliant la base par la hauteur, soit en multipliant les trois dimensions entre elles. Suite à une discussion avec les participants, il nous paraît important de privilégier la première façon car elle restera valable pour calculer le volume de n'importe quel prisme, contrairement à la multiplication des trois dimensions.

Certains élèves (et participants) ont remarqué qu'une boîte dont le volume était déjà connu pouvait se placer dans une autre plus grande. Ceci débouche sur une autre façon de calculer le volume en ajoutant le nombre de cubes manquants.

Les participants ont également souligné que cette activité est proche d'une activité de la série ERMEL dans laquelle il s'agit de trouver combien il y a de morceaux de sucre dans une boîte. Certains objectifs sont communs aux deux activités qui amènent cependant des apprentissages différents.

2 Calcul du volume d'un parallélépipède rectangle en cm³

Il s'agit à présent de suivre la même consigne que précédemment mais les élèves reçoivent 50 cubes de 1 cm d'arête. Ils ne remplissent plus systématiquement les boîtes mais comptent le nombre de cubes qu'ils peuvent aligner sur chaque dimension. Si le volume – en tant que mesure – d'une boîte correspond au nombre de cubes que l'on peut y ranger, nous obtenons deux volumes différents par boîte en fonction des cubes utilisés. Une discussion est engagée avec les élèves afin de se mettre d'accord sur le choix du cube à utiliser et les raisons de ce choix (arbitraire). L'introduction de la nécessité d'un cube étalon universel, le cm^3, trouve ici tout son sens.

L'enseignant fait chercher le lien existant entre le cube de 2 cm d'arête et celui de 1 cm d'arête. Les élèves sont évidemment tentés de dire qu'il est de volume double puisque l'arête est multipliée par deux mais la manipulation permet de trouver et de comprendre que le rapport est 8.

3 Une boîte particulière

Une nouvelle boîte est proposée aux élèves, il s'agit d'un décimètre cube. L'enseignant demande aux élèves de calculer son volume. Vu le choix de l'étalon, la plupart des élèves trouvent 1000 cm^3. C'est le moment d'établir l'égalité 1 dm^3 = 1000 cm^3. Certains élèves choisissent le cube de 2 cm d'arête et trouvent que 125 cubes sont équivalents au volume de la boîte particulière. Il est alors opportun de remarquer avec eux qu'un unique cube de 1 dm d'arête contient 125 cubes de 2 cm d'arête (qui contiennent chacun 8 cubes de 1 cm d'arête) et prend autant de place que 1000 cubes de 1 cm d'arête.

4 Lien entre deux unités de mesure de volume

L'enseignant propose aux élèves de chercher le volume d'une boîte dont une dimension est donnée en décimètres et deux en centimètres (ces deux dernières étant représentées par des nombres multiples de 10). Diverses réponses peuvent surgir dont deux solutions nécessitent une conversion des mesures de longueur en une même unité. C'est la situation idéale pour réfléchir ensuite à l'équivalence des réponses exprimées en cm^3 et en dm^3.

5 Remarque

Contrairement à l'approche de la notion de volume proposée par de nombreux livres scolaires, nous avons choisi de commencer par des boîtes de forme parallélépipédique et non cubique. Le parallélépipède rectangle met davantage en exergue l'existence des trois dimensions.

CONSTRUIRE UN OUTIL DE FORMATION À PARTIR DE L'ANALYSE D'UNE SÉANCE AUTOUR D'UN *PROBLÈME OUVERT* AU CYCLE 3.

Christine CHOQUET
PIUFM, IUFM des Pays de La Loire, site Le Mans
Doctorante CREN, Université de Nantes
christine.choquet@univ-nantes.fr

Résumé

L'atelier s'est appuyé sur des résultats issus de notre travail de thèse en cours qui traite de l'activité d'enseignants du cycle 3, en mathématiques, lorsqu'ils proposent à leur classe des *problèmes ouverts* (Arsac & Mante, 2007). L'objectif était, à partir de quelques éléments de notre corpus -vidéogramme d'une séance, transcriptions de travaux d'élèves- d'amener les participants à réfléchir à l'utilisation de l'analyse de ces données dans la formation initiale et/ou continue des professeurs des écoles. Pour cela, après avoir brièvement présenté notre étude, nous avons proposé aux participants de résoudre le problème et d'en faire une analyse *a priori* afin de déterminer les savoirs en jeu. Le travail a ensuite consisté à analyser les productions des élèves puis le scénario proposé par l'enseignant. L'atelier a permis de réfléchir à l'élaboration d'un outil de formation à la gestion de situations *problème ouvert* en identifiant leurs spécificités mais également à la gestion des séances de mathématiques en général.

Cet atelier est en lien avec notre travail de recherche dans le cadre de la rédaction d'une thèse. Cette recherche vise à comprendre et définir la place que des professeurs des écoles français accordent, dans leur enseignement des mathématiques, à l'étude de *problèmes ouverts* (Arsac & Mante, 2007). Pour mémoire la caractérisation de ces problèmes, proposée par les auteurs, est la suivante :

- *L'énoncé est court.*
- *L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.*
- *Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre exemples.*

Nous avons observé puis analysé, lors d'une année scolaire complète, dans les classes de six enseignants, des séances portant sur des *problèmes ouverts* afin d'étudier les choix que font ces enseignants. Les analyses des pratiques enseignantes sont complétées par des analyses de l'activité des élèves et par une réflexion sur les savoirs en jeu avec ce type de problèmes. L'ensemble de cette étude nous permet également de questionner la formation des professeurs des écoles.

Pour l'atelier, une séance intitulée « les balances » a été isolée parmi toutes celles que nous avons observées et l'objectif de cet atelier concerne la construction d'un outil de formation initiale et/ou continue à partir de l'analyse de cette séance - formation à la gestion de situations *problème ouvert* et formation à la gestion de séances de mathématiques en général -. Plus généralement, nous avons, comme de nombreux formateurs-chercheurs, observé puis analysé des séances ordinaires et nous nous sommes interrogés sur l'utilisation possible de ces analyses en formation des professeurs des écoles.

I - PRÉSENTATION DU CORPUS UTILISÉ DANS L'ATELIER

Dans ce premier chapitre, nous présentons d'abord brièvement notre recherche, entreprise dans le cadre de la préparation de notre thèse ainsi que la méthodologie choisie pour répondre à nos questions. Nous présentons ensuite le corpus qui est plus particulièrement étudié dans l'atelier.

1 Présentation de notre recherche

1.1 Problématique et cadre théorique

Par notre étude, nous cherchons à comprendre pourquoi et comment des enseignants du cycle 3 proposent à leurs élèves des *problèmes ouverts* pendant les séances de mathématiques. Nous analysons également ces pratiques afin de déterminer l'impact de telles séances sur les apprentissages des élèves, afin de préciser les savoirs en jeu dans ce type de problèmes.

Afin de répondre aux questions concernant la pratique des enseignants, nous utilisons le cadre théorique de la « double approche didactique et ergonomique » (Robert & Rogalski, 2002).

1.2 Méthodologie

Nous avons choisi d'observer le travail de six professeurs des écoles pendant une ou deux années scolaires. Ces observations se font dans des classes de cycle 3, avec des élèves de 8 à 10 ans. Ce niveau a été choisi car les *problèmes ouverts* proposés aux élèves nous semblent plus intéressants (par rapport au cycle 1 et au cycle 2) du point de vue des connaissances qui peuvent être abordées et nous permettent d'approfondir des réflexions déjà engagées en didactique des mathématiques sur les savoirs en jeu avec ce type de problèmes (Douaire, Hubert, 1999, Hersant & Thomas, 2008, Hersant, 2010, Houdement, 2009).

Afin de pouvoir observer des séances les plus ordinaires possibles, nous ne sommes intervenus ni dans le choix du problème, ni dans la préparation de la séance. L'ensemble des choix a été laissé à l'initiative des enseignants.

Les séances portant sur des *problèmes ouverts* ont été observées, filmées puis transcrites. Certains travaux de groupes d'élèves ont également été enregistrés et transcrits. Les travaux des élèves ont été récoltés (brouillons, feuilles de recherche ou affiches). Des entretiens avec les enseignants, avant et après les séances ont été transcrits.

Chaque séance fait l'objet d'une analyse *a priori* puis *a posteriori*. Nous avons cherché à déterminer en particulier pour chaque séance, si les problèmes étaient réellement *ouverts* pour la classe concernée et quels savoirs pouvaient être objet d'institutionnalisation.

Nous utilisons dans notre étude, la répartition de l'activité de l'enseignant, établie par Robert et Rogalski (2008), en cinq composantes -cognitive, médiative, institutionnelle, sociale et personnelle-. Nos analyses permettent de renseigner chacune des composantes afin d'obtenir des réponses de plus en plus précises sur la pratique des enseignants observés, afin d'expliquer les choix qu'ils font pour leur classe.

1.3 Présentation de la séance proposée dans le cadre de l'atelier

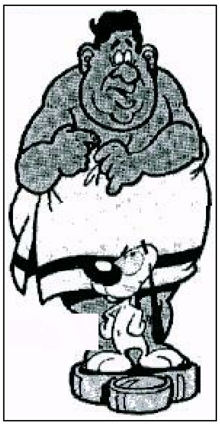
Pour le travail de l'atelier, nous avons choisi une séance parmi toutes celles que nous avons analysées. L'enseignant qui a préparé cette séance, est âgé d'une quarantaine d'années et travaille avec des élèves de CM2 depuis plus de cinq ans dans la même école. Nous l'avons choisi car il ne débute pas dans le métier et a une bonne expérience du cycle 3.

La séance qui sert de support à cet atelier, est la première de ce type, dans l'année pour cette classe de vingt élèves. Avec cet enseignant, les élèves sont habitués à travailler en groupes mais jamais pendant les cours de mathématiques.

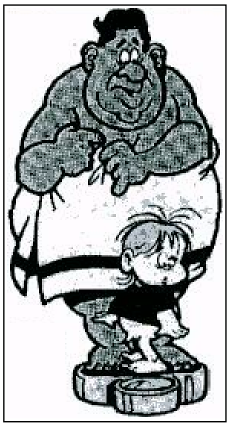
Nous précisons que cette séance n'a pas la vocation d'être une séance type, ce n'est en aucun cas un modèle. Nous l'avons choisi car, d'après nous, son analyse permet d'aborder un nombre important de questions ayant trait à l'étude de *problèmes ouverts* dans des classes de cycle 3 ainsi qu'à l'enseignement des mathématiques en général à l'école primaire. Cette séance nous semble riche de par son caractère ordinaire, parce qu'elle montre des aspects positifs dans la façon dont l'enseignant gère cette séance et également parce qu'elle fait apparaître à d'autres moments des difficultés, même des manques qu'il faut interroger en formation.

2 Le problème « les balances »

Le problème[1] est choisi par l'enseignant, son but est de déterminer la masse de chacun des personnages.



140 kg



145 kg

En utilisant les informations données par ces trois dessins, détermine combien pèsent le gros Dédé, le petit Francis et le chien Boudin.

3 Le corpus utilisé dans l'atelier

Dans le cadre de l'atelier, plusieurs éléments du corpus sont étudiés. Des éléments concernent la pratique de l'enseignant et d'autres concernent plus particulièrement l'activité des élèves. Cependant, même si pour des facilités de présentation des analyses pendant l'atelier, nous sommes amenés à séparer les deux, nous avons conscience que lorsque nous étudions l'activité des élèves, nous apportons en même temps des éléments de réponse sur la pratique de l'enseignant ; les deux études, de la pratique de l'enseignant et de l'activité des élèves étant liées et indissociables.

3.1 Concernant l'enseignant

La séance est filmée puis le film est transcrit. Nous avons choisi de présenter aux participants deux extraits du vidéogramme avec leur transcription, les deux extraits sont bruts, aucun montage n'a été réalisé afin de suivre le déroulement en temps réel de la séance. Le premier extrait, de 4 minutes, montre le début de la séance. Il permet de visualiser la classe, les élèves et leur enseignant. Il rend compte des consignes qui sont données aux élèves et de la mise en route d'un temps de recherche individuelle. Le deuxième extrait, de 12 minutes, correspond à la mise en commun des résultats. Il permet de voir comment l'enseignant organise cette mise en commun, comment les responsabilités vis à vis de l'avancement de cette mise en commun sont réparties entre lui et les élèves. L'extrait montre également comment l'enseignant conclut cette séance.

[1] Deledicq A., Missenard C. (1996), *Encyclopédie Kangourou des mathématiques au collège*, ACL éditions, p.46.

Un plan de la classe (disponible en annexe 1) sur lequel sont notés les déplacements de l'enseignant pendant la phase de recherche en groupe est également présenté. Il permet d'obtenir des renseignements sur la position et l'attitude qu'a choisi d'adopter l'enseignant pendant cette phase de recherche.

3.2 Concernant les élèves

Nous proposons aux participants la transcription des cinq affiches (disponible en annexe 2) rédigées par les cinq groupes et présentées à la classe lors de la mise en commun.

II - ETAPE 1 : TRAVAIL CONCERNANT L'ANALYSE *A PRIORI*

Lors de ce premier temps de travail, les participants résolvent individuellement le problème « les balances » et résument par une phrase leur démarche. Ils sont invités ensuite à en faire une analyse *a priori* afin de répondre toujours individuellement à deux questions :

- Comment les élèves de cycle 3 peuvent-ils résoudre ce problème ?
- Quels savoirs sont alors en jeu ?

Un temps de travail en binôme est ensuite proposé afin de permettre une première comparaison des résultats. Les échanges entre les participants ont permis de lister des procédures possibles pour résoudre le problème ainsi que certains savoirs en jeu. Nous avons complété ce premier bilan avec nos propres résultats.

1 Les procédures de résolution envisageables

Dédé pèse 125 kilogrammes, le chien Boudin pèse 15 kilogrammes et Francis pèse 20 kilogrammes.

Une première procédure (notée P1) pour atteindre ces résultats, consiste à mettre en équation le problème puis à résoudre le système de trois équations à trois inconnues ainsi obtenu.

Une autre procédure (P2) revient à ajouter les masses inscrites sur deux balances et à soustraire la masse indiquée sur la troisième balance pour obtenir ensuite, en divisant par deux, la masse de l'un des personnages. Les masses des deux autres personnages sont finalement obtenues par soustraction.

Il est possible également d'ajouter les trois masses, de diviser par deux puis de soustraire une des masses indiquées sur l'une des trois balances pour obtenir la masse d'un des personnages (P3). Les masses des deux autres personnages sont ensuite obtenues par soustraction.

Une quatrième procédure (P4) s'appuie sur des essais et ajustements. Ces essais tiennent compte de la différence de cinq kilogrammes entre Francis et le chien (une décomposition additive de 35 est envisagée) mais également d'hypothèses issues de la « vie courante » (par exemple : « Gros Dédé » doit peser dans les cent kilogrammes ou un chien est moins lourd qu'un enfant comme Francis).

Les essais peuvent être essentiellement inspirés par la « vie courante », la différence de cinq kilogrammes entre le garçon et le chien n'est pas utilisée. Cela constitue dans notre étude et pour l'atelier, une cinquième procédure (P5).

2 Les savoirs en jeu

2.1 Des savoirs curriculaires revisités

La procédure P1 n'est pas envisageable avec des élèves de cycle 3. Ce problème permet donc dans tous les cas, à des élèves de ce niveau, de remobiliser l'addition et la soustraction. Certaines procédures (P4, P5) font appel également à la décomposition additive de 35 (avec des entiers mais aussi des décimaux puisque rien ne dit au départ, que les masses sont des nombres entiers). D'autres procédures (P2, P3) incitent à partager en deux des entiers (par division, par addition).

Ce problème est bien l'occasion de retravailler le calcul avec des nombres entiers.

2.2 Est-ce réellement un problème ouvert ?

Le texte est court, l'énoncé est accompagné d'un dessin expliquant clairement la situation des trois pesées. Aucune indication ne donne d'information sur la méthode à employer pour résoudre le problème. Il n'y a pas notamment, de questions intermédiaires qui pourraient guider les élèves vers telle ou telle procédure. Malgré cela, l'énoncé est accessible, il peut être compris par des élèves de 9-10 ans et la présentation, sous forme de dessins, leur permet de faire rapidement quelques essais.

Nous pouvons donc affirmer que ce problème est pour des élèves de cycle 3 un *problème ouvert* selon la caractérisation proposée par Arsac & Germain (2007).

2.3 Des savoir faire utiles pour faire des mathématiques

Arsac et al. (2007) pour justifier de l'intérêt de proposer des *problèmes ouverts* en classe, insistent sur le fait que ces problèmes permettent de développer *la démarche scientifique*. Ils précisent qu'il s'agit pour un élève d'apprendre à « *faire des essais pour produire une conjecture, tester sa conjecture en faisant d'autres essais, prouver la validité de sa conjecture.* ». Ils expliquent également qu'un élève, avec ce type de problèmes, apprend à faire preuve d'imagination, de créativité étant donné que les énoncés ne proposent pas de démarches à suivre.

(Douaire, Hubert 1999), (Houdement 2009) montrent que certains de ces problèmes peuvent être choisis pour enseigner différentes formes de raisonnements et pour développer chez un élève des capacités à prouver des résultats mathématiques.

Hersant & Thomas (2008) puis Hersant (2010) prouvent que l'étude de certains problèmes de type *ouvert* sont l'occasion de développer des savoir faire utiles ensuite aux élèves pour résoudre des problèmes mathématiques. Il s'agit par exemple que « *les élèves ressentent l'intérêt et les limites de leurs expériences empiriques* » ou encore d'apprendre aux élèves à « *bien distinguer ce dont on est sûr (le possible, l'impossible qu'on a réussi à prouver) et ce dont on doute (la part indéterminé du problème)* » afin de les rendre capables d'organiser au mieux leurs recherches.

Dans le cas du problème « les balances » étudié dans l'atelier, les élèves apprennent que, même si un seul résultat existe, plusieurs procédures pour l'atteindre sont envisageables. Les participants pensent que les élèves vont ainsi prendre conscience que pour résoudre un problème mathématique, un raisonnement par essais et ajustements peut convenir. Les élèves vont également découvrir qu'il est indispensable de vérifier la validité d'un résultat. La question s'est ensuite posée sur la gestion efficace des essais : il semble utile, afin de ne pas multiplier les essais, de mettre en relation les données de l'énoncé, de faire appel à des connaissances extérieures aux mathématiques, telles que la masse d'un enfant, d'un chien. L'atelier a conclu que tous les élèves ne vont pas, à partir de l'étude d'un seul problème de ce type, apprendre à organiser les données. Pour cela, d'autres problèmes devront être proposés à la classe.

3 Et pour la formation ?

Après avoir réfléchi aux savoirs en jeu dans le problème, les participants se sont demandés ce qu'il était possible de proposer en formation. Le premier point soulevé concerne la question de l'analyse *a priori* du problème. Notre expérience de formateur, notre recherche en cours ainsi que les expériences de chacun des participants montrent que cette étape n'est pas toujours envisagée par les enseignants ou seulement très rapidement. De la discussion dans l'atelier, il ressort comme indispensable dans un premier temps de formation, de réfléchir à une analyse *a priori* afin de définir, tout au moins, des objectifs d'apprentissage précis.

Dans le but d'apprendre à mener à bien une analyse *a priori*, les participants ont évoqué l'idée d'aider les enseignants en formation à mieux caractériser les problèmes qu'ils rencontrent. Il semble possible d'établir avec eux des classifications selon, par exemple, les objectifs d'apprentissage visés ou selon le type de problèmes afin de comprendre ce qu'est un problème *ouvert* par rapport à un problème d'application, de prendre conscience également qu'un problème est *ouvert* pour un élève à un certain moment de sa scolarité mais ne l'est plus à un autre moment.

Le travail présenté ici, se basant sur l'analyse de la séance « les balances », permet de répondre à certaines questions et de préciser quelques réponses sur les savoirs en jeu et les raisons qui peuvent pousser un enseignant à proposer un problème ouvert à sa classe. Cependant pour une étude plus complète des choix que sont amenés à faire des enseignants de cycle 3 et des raisons menant à ces choix, nous invitons le lecteur à consulter (Choquet, 2010).

III - ETAPE 2 : QUE FAIRE DES RECHERCHES ET DES RÉSULTATS DES ÉLÈVES ?

Dans le deuxième temps de l'atelier, les participants prennent connaissance de la transcription des affiches rédigées par la classe et d'un plan de la salle résumant les déplacements effectués par l'enseignant pendant la phase de recherche (annexes 1 et 2). Il s'agit pour eux, à la lumière de ces différents documents de penser à une mise en commun possible pour cette classe, avant de découvrir le scénario élaboré par l'enseignant observé.

1 Déroulement de la séance observée

Les élèves sont installés par groupes de quatre, chaque groupe dispose d'une affiche qui servira à présenter à la classe les résultats du groupe. Après avoir distribué à chaque élève un énoncé du problème « les balances », l'enseignant demande aux élèves d'y réfléchir seuls pendant quelques minutes. Au bout de 2 minutes, il leur annonce qu'ils peuvent commencer à travailler en groupe, se mettre d'accord pour, quand ils auront trouvé un résultat, compléter leur affiche. Ce travail de groupe dure 40 minutes, pendant lesquelles l'enseignant n'intervient pas auprès des élèves. Il reste alors 15 minutes pour la mise en commun des résultats.

2 L'activité de l'enseignant pendant la phase de recherche

En visionnant le début de la séance, nous observons que le processus de dévolution de la recherche aux élèves est réussi. Chaque élève individuellement puis chaque élève dans chaque groupe se met au travail et tient à déterminer les masses des personnages. Par la suite (nous le constatons en particulier avec le plan), l'enseignant choisit de ne pas circuler entre les groupes, de se mettre à l'écart, de presque disparaître de la vue des élèves en restant derrière son bureau. Cette attitude a surpris et interrogé les participants à l'atelier et deux questions sont apparues : pourquoi l'enseignant ne va-t-il pas voir ce que font ses élèves pendant la phase de recherche en groupes ? Et pourquoi décide-t-il de ne pas les aider ?

Brousseau (1998) souligne que l'enseignant « *doit, par son attitude, convaincre les enfants de sa neutralité […] afin qu'ils renoncent à tirer de lui les informations et les aides qu'ils ne doivent tirer que d'eux-mêmes.* ». Cet enseignant (que nous avons interrogé juste après la séance) nous confie qu'il a du mal à ne pas répondre à certaines sollicitations des élèves, il considère que régulièrement, il les « aide trop ». En restant loin d'eux, il veut ainsi leur montrer qu'ils doivent chercher entre eux, qu'ils ne doivent pas attendre une aide de sa part. Son objectif prioritaire est « *d'apprendre aux élèves à chercher* », la recherche doit donc se faire sans lui.

Cependant, même si l'enseignant justifie ce retrait, les participants sont d'accord pour penser que cette attitude pose réellement problème. L'enseignant voit les élèves chercher, discuter dans les différents groupes mais ne peut pas prétendre suivre de près ces recherches. Il ne peut pas se faire une idée, en temps réel, des raisonnements mobilisés dans chacun des groupes. Il ne voit peut-être même pas qui a trouvé des solutions correctes et, au contraire, qui a fait des erreurs. Il est clair que ce défaut de repérage du travail accompli par les élèves, constitue un manque pour la suite de la séance. Nous le constatons d'ailleurs plus loin dans la séance, lorsque les élèves viennent exposer leurs résultats à toute la classe.

3 Les procédures des élèves

Comme Orange (2005), nous pensons qu' « *une analyse didactique des pratiques enseignantes est une analyse qui porte sur les relations entre ces pratiques et les apprentissages réalisés par les élèves.* ». Cette « *analyse didactique des pratiques enseignantes se doit donc d'interroger ces pratiques selon l'activité intellectuelle des élèves* ». Dans notre étude, nous analysons donc le travail accompli par les élèves afin d'obtenir des renseignements concernant la pratique de l'enseignant.

Orange confirme que l'« *activité intellectuelle n'est bien sûr pas directement observable* ». Cependant, « *les productions sont considérées comme des traces de l'activité intellectuelle des élèves* ». L'activité intellectuelle des élèves va donc devoir être reconstruite lors des analyses, grâce aux productions des élèves ; ces productions, écrites, orales ou matérielles, étant intermédiaires tout au long de la séance ou finales. C'est pourquoi nous analysons des brouillons d'élèves, les discussions entre les élèves lors de travaux de groupes ainsi que les affiches que chaque groupe produit. A partir de toutes les données concernant les élèves pour la séance « les balances », nous retraçons l'historique de chaque affiche en retrouvant les démarches, les raisonnements de chaque groupe. L'intérêt de l'analyse réside ensuite dans le repérage des diversités de procédures et dans leur comparaison.

Les participants ont travaillé à partir du document présent en annexe 2, afin d'identifier les différentes procédures des élèves puis nous les avons regroupées donc selon deux types :

Des procédures plutôt de caractère mathématique (que nous notons PMv) : la différence de cinq kilogrammes est remarquée et, après avoir compris avec l'énoncé, qui du chien ou de l'enfant est le plus lourd, les élèves trouvent la masse de Dédé par soustraction.

Des procédures plutôt liées à la vie courante (que nous notons PVm) : la masse des personnages sont estimées (autour de 100 kilogrammes pour une personne comme Dédé, autour de 30 kilogrammes pour un enfant comme Francis, …), des essais et ajustements permettent de trouver les masses de chaque personnage.

Une certaine hétérogénéité des procédures apparaît dans cette classe, avec une majorité du type PVm.

Le groupe 2 utilise une procédure de type PMv, ces élèves n'ont pas de difficultés en mathématiques, ils justifient la différence de cinq kilogrammes entre le chien et l'enfant mais ensuite, pour expliquer que Francis est le plus lourd, ils font appel à leurs connaissances de la vie courante, ils font des hypothèses hors du champ des mathématiques. Ils trouvent la masse des trois personnages.

Le groupe 5 mobilise aussi une procédure du type PMv, différente cependant de la précédente. Les élèves ne voient pas la différence de cinq kilogrammes mais décomposent 35 en plusieurs sommes de deux entiers et vérifient la cohérence des résultats avec les autres masses indiquées sur les balances. Avec quelques essais et ajustements, ils trouvent la masse des trois personnages.

Le groupe 3 utilise une procédure du type PVm. Même si les élèves voient la différence de cinq kilogrammes, ils ne parviennent pas à l'expliquer clairement et font des suppositions issues de la vie courante (« *une personne comme Dédé doit peser dans les 100 kilogrammes* »), qui dirigent alors leurs essais et ajustements. Ils trouvent la masse des trois personnages.

Les groupes 1 et 4 utilisent une procédure PVm, sans remarquer la différence de cinq kilogrammes entre le chien et l'enfant. Les élèves font des essais avec plusieurs masses pour le chien, l'enfant et Dédé qu'ils ajustent puis vérifient en tenant compte des autres masses indiquées sur les balances. Le groupe 1 trouve la masse des trois personnages mais le groupe 4, n'allant pas au bout de toutes les vérifications nécessaires, fait une erreur de calcul et ne trouve pas les bons résultats.

4 Quelle mise en commun est-elle possible ?

Avec les participants, nous avons évoqué plusieurs façons d'organiser la mise en commun des résultats, avant de regarder ce que propose l'enseignant dans sa classe.

De notre étude, nous retirons deux résultats : les marges de manœuvre pour organiser une mise en commun ne sont pas très importantes et, une mise en commun ne semble pertinente que si l'enseignant a une idée des savoirs en jeu et une bonne représentation, avant celle-ci, des procédures utilisées par les élèves. Nous considérons que les marges de manœuvre ne sont pas très vastes dans le sens où un temps doit forcément être consacré à la prise de connaissance de toutes les procédures des élèves, de tous leurs résultats avant de se consacrer à une réelle réflexion sur les travaux de chacun.

Les échanges entre les participants ont permis d'envisager plusieurs façons de gérer la mise en commun des résultats :

Chaque groupe passe exposer son affiche et le résultat est discuté par la classe et l'enseignant (Pr1).

Les affiches sont regroupées par l'enseignant, par procédures identiques, un groupe seulement présente alors les résultats. Cette façon de faire permet de montrer les travaux de tous, en gagnant un peu de temps sur la présentation vu que tous les groupes ne viennent pas au tableau (Pr2).

Les résultats qui semblent faux à l'enseignant, sont présentés en premier par les élèves puis viennent ensuite les résultats corrects sur lesquels l'enseignant peut choisir de passer moins de temps (Pr3).

Cette liste ne se veut pas exhaustive mais permet de montrer qu'en fait la question se pose plus en terme d'objectifs que l'enseignant vise pour cette mise en commun qu'en terme de simple présentation aux autres élèves de différentes procédures et de résultats. Les participants sont d'accord sur le fait que la mise en commun des résultats est importante pour les élèves cependant les modalités de présentations (Pr1, Pr2 et Pr3) ont été un sujet de discussion afin de répondre aux questions suivantes : comment faire pour que les élèves s'interrogent sur les procédures de leurs voisins ? Et est-ce utile pour eux de s'approprier les procédures des autres élèves ?

Lors de la présentation Pr1, un temps important est consacré au « passage » de tous les groupes au tableau. C'est l'attitude de l'enseignant qui va faire que les élèves vont décider de valider ou pas telle ou telle procédure. S'il ferme trop les questions, la mise en commun se résumera à une présentation des résultats et à une correction habituelle en terme de c'est bon ou c'est faux.

La présentation Pr2 en regroupant les procédures identiques permet de gagner du temps. Cependant là encore, c'est le questionnement de l'enseignant qui permettra de transformer cette présentation en réelle discussion entre les élèves : pourquoi ces affiches semblent-elles identiques à l'enseignant, en quoi les autres sont-elles différentes ? Les élèves sont alors amenés à distinguer les différents raisonnements et à mieux les comprendre, à y relever éventuellement des erreurs. Si ce questionnement n'a pas lieu, car l'idée était seulement de faire une mise en commun plus rapide, là encore, cette mise en commun est une correction bien orchestrée par l'enseignant, avec même visuellement au tableau, d'un côté les affiches qui sont incomplètes et d'un autre, les affiches qui donnent un résultat correct.

Des enseignants après un travail de recherche dans leur classe, proposent de discuter d'abord à propos de procédures incorrectes ou incomplètes pour passer ensuite à des procédures qui fonctionnent, c'est la présentation Pr3. Le questionnement permet aux élèves de réfléchir aux erreurs commises, aux éléments qui ont manqués pour conclure. Cependant, nous avons observé dans plusieurs classes que les élèves s'habituent vite à cette façon de faire et les commentaires des participants l'ont confirmé. Quand un tel enseignant demande à un groupe de passer en premier, toute la classe en déduit tout de suite que la procédure est incorrecte, même avant de prendre connaissance du travail du groupe, l'attention des élèves et la réflexion sur les erreurs commises ne sont plus aussi satisfaisantes et même si l'enseignant questionne la classe, seulement les élèves ayant réalisé l'affiche essaient de comprendre pourquoi ils n'ont pas correctement abouti.

Finalement, même si les réflexions précédentes apportent quelques réponses, il a été noté dans l'atelier qu'aucune présentation n'est complètement satisfaisante et que la question de la dévolution aux élèves de cette mise en commun reste un sujet d'étude.

5 Et pour la formation ?

5.1 Concernant l'analyse des productions des élèves

L'analyse des productions des élèves est source d'apprentissage pour des professeurs des écoles en formation initiale et/ou continue. Les éléments détaillés dans le paragraphe 3 sont à reconstruire avec eux. Cependant afin d'être pertinente en formation, cette analyse doit être guidée, accompagnée par le formateur. En effet, plusieurs participants ont remarqué dans leur expérience personnelle qu'étudier les procédures des élèves revient souvent pour des enseignants en formation, à seulement se demander si elles sont correctes ou pas. Les procédures sont seulement évaluées et les enseignants ne cherchent pas forcément à approfondir la question de l'activité intellectuelle des élèves au delà de leur écart à la bonne réponse. C'est pourquoi l'ensemble des participants conclut sur un accompagnement nécessaire de cette analyse par un questionnement, concernant la diversité des procédures. A la manière de Orange (2005), nous proposons par exemple de faire repérer, par les professeurs en formation, « *l'existence ou non d'une diversité dans ce que produisent les élèves […]* » et de leur demander en quoi ces procédures sont réellement diverses. Dans le cas où il n'y aurait pas de réelle diversité, il peut être demandé en formation, d'expliquer si c'était attendu ou pas par l'enseignant qui propose le problème ; si c'était prévisible ou pas (ce qui implique un retour sur l'intérêt de l'analyse *a priori* déjà abordé dans la partie II).

5.2 Concernant la gestion de la mise en commun

Les questions soulevées dans le paragraphe 4 et les éléments de réponses que les participants ont apportés constituent de réels sujets d'étude en formation d'enseignants. Afin de les compléter, nous avons évoqué quelques documents abordant des situations *problème ouvert*. Un document d'accompagnement[2] de 2005, propose l'exemple de la gestion d'une séance autour d'un *problème pour chercher* qui s'apparente au *problème ouvert*. Ce document accompagnait les instructions officielles de 2002, il peut faire l'objet d'une relecture et d'une analyse en formation continue avec des professeurs des écoles qui, comme l'enseignant qui propose la séance « les balances », le connaissent plus ou moins.

Les ouvrages Ermel (Hatier) insistent également beaucoup sur la mise en œuvre des séances et proposent aux enseignants des façons de faire très détaillées. En reprenant les éléments proposés dans ces ouvrages et que nous ne détaillerons pas ici, des réponses peuvent être apportées en formation.

Certaines épreuves de rallye mathématique (le rallye mathématique de La Sarthe[3], le rallye mathématique transalpin[4] –RMT- par exemple) sont accompagnées de propositions, à destination des enseignants, pour gérer les séances dédiées à la recherche des problèmes qu'ils proposent et qui

[2] MEN, Les problèmes pour chercher, 2005, disponible à l'adresse http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/92785336/0/fiche___pagelibre/&RH=1160078984984, consulté le 15 août 2011.

[3] http://sarthe.cijm.org/index.php?option=com_content&task=view&id=2&Itemid=5, consulté le 15 août 2011.

[4] http://www.math-armt.org/index.php, consulté le 15 août 2011.

s'apparentent également le plus souvent à des *problèmes ouverts*. Il est demandé par exemple aux élèves de chercher ensemble, de se répartir les tâches dans la classe et surtout de ne fournir qu'un seul document-réponse pour toute la classe. Cette façon de travailler ne peut-elle pas être reprise dans le cadre d'une séance autour d'un *problème ouvert*, afin de favoriser un débat entre les élèves, autour des procédures possibles sans forcément passer par la rédaction d'affiches ?

IV - ETAPE 3 : ANALYSE *A POSTERIORI* DE LA MISE EN COMMUN OBSERVÉE

Lors du troisième et dernier temps de travail, les participants visionnent l'extrait du vidéogramme de la séance, correspondant au temps de mise en commun des résultats dans la classe. Il s'agit de s'interroger sur ce que propose l'enseignant, sur les choix qu'il fait lors de cette mise en commun afin de penser à des alternatives possibles. Les participants réfléchissent également à l'utilité ainsi qu'à la pertinence d'un tel extrait vidéo dans une formation.

1 La mise en commun proposée par l'enseignant

Au bout d'une quarantaine de minutes après le début de la séance, l'enseignant annonce qu'il est temps de mettre en commun les résultats.

1.1 Une présentation non organisée à l'avance

Les élèves vont se succéder au tableau, installer leur affiche et commenter leurs résultats. La présentation des résultats n'est pas hiérarchisée par l'enseignant, ce sont les groupes qui au fur et à mesure se manifestent en levant la main et viennent au tableau présenter leur travail, les uns après les autres.

Cette façon de faire peut être gênante puisque, lors de la séance « les balances », la plupart des groupes qui ont un résultat correct, vont exposer avant le groupe 4 qui, lui, a fait une erreur. Il est clair que dès la première affiche, toute la classe connaît la masse des personnages, la question du bon résultat ne se pose plus. Cependant, nous le voyons lors de cette séance, ce n'est pas si simple dans l'esprit de tous les élèves et cette façon de faire n'est pas forcément négative pour cette séance-là en particulier : le groupe 4 va venir proposer un résultat différent en pensant qu'il est quand même juste, la question va alors être posée : peut-il y avoir ici deux réponses différentes possibles ? Certains élèves répondent que oui, c'est une élève qui décèle une erreur de calcul dans l'affiche du groupe 4, qui va convaincre la classe que le résultat proposé par ce groupe est faux. Le vidéogramme permet de voir ensuite que le groupe 4 a compris son erreur de calcul mais n'a pas compris comment trouver les trois masses. En effet, juste après leur exposé et jusqu'à la fin de la séance, ils se remettent en groupe et reprennent leur recherche.

Le fait de ne pas organiser la présentation n'est pas forcément gênant non plus, dans le cas du problème des balances, parce que ce qui intéresse l'enseignant, ce sont les différentes procédures employées par les élèves et non le résultat chiffré. Le bon résultat est donc donné en début de mise en commun, l'intérêt est de découvrir et de partager différentes procédures, de voir et d'apprendre que pour résoudre un tel problème, plusieurs méthodes sont envisageables et peuvent être correctes même si elles n'aboutissent pas complètement au résultat.

1.2 Un questionnement trop fermé

Cet extrait de séance montre la façon de faire de l'enseignant pour interroger les élèves, pour gérer les réactions face aux affiches et aux résultats des élèves. L'enseignant souhaite que les élèves présentent leurs résultats et les expliquent clairement à leurs camarades. Il questionne plusieurs fois dans ce sens, le groupe qui est tableau, afin d'aller plus loin que la simple lecture de l'affiche. Ce qui paraît intéressant.

Cependant, c'est ce même questionnement qui appauvrit la mise en commun. En effet, les questions ne s'adressent pas à chaque fois à la classe entière mais à des groupes d'élèves en particulier :

-lorsque le résultat présenté est correct, l'enseignant ne s'adresse qu'au groupe qui est au tableau et ne fait pas participer le reste de la classe. Il demande aux quatre élèves, par exemple, de comparer leur procédure avec celles déjà affichées, sans le demander aux autres élèves, en leur tournant presque le dos.

-lorsque le résultat semble faux, il se tourne vers la classe et demande : « *Commentaires, est-ce que c'est bon ?* ». La discussion ensuite pour savoir où se trouve l'erreur ne se fait pas avec le groupe qui expose -il est presque ignoré- mais avec le reste de la classe.

La mise en commun, d'après les réflexions des participants à l'atelier, est appauvrie puisque les élèves ne se demandent jamais si une procédure est correcte ou pas, il leur suffit de regarder à qui s'adresse l'enseignant. De plus, les élèves qui ont obtenu un résultat faux, ne sont pas assez intégrés dans la correction et, même s'ils affirment que oui, ils n'ont pas toujours été convaincus par les procédures de leurs camarades, ils n'ont pas forcément tout compris. Nous le constatons quand nous voyons dans l'extrait vidéo, le groupe 4, essayer de finir la résolution du problème, alors que la séance se termine et que toutes les procédures ont déjà été présentées.

2 Des alternatives possibles

Dans la séance « les balances », la recherche d'une solution est bien l'affaire des élèves et d'eux seuls, le processus de dévolution pendant cette première phase est réussi. Par contre, même si ces élèves écoutent leurs camarades pendant la mise en commun des résultats, il semble que les élèves ne soient pas tous investis dans la discussion concernant les différentes procédures exposées. C'est pourquoi, lors de la discussion dans l'atelier, les participants ont évoqué quelques alternatives envisageables pour organiser une séance autour d'un *problème ouvert* que nous avons complétées avec nos résultats.

Une première idée est de proposer à la classe un même type de problème mais avec des énoncés différents suivant les groupes. Il peut s'agir du problème « les balances » pour quelques groupes et du problème suivant pour les autres groupes :

La scène se passe dans un magasin qui vend des CD, des livres et des DVD. Vincent achète un CD et un livre pour 29,80 € ; Richard achète le même CD et un DVD. Il dépense 45,20 €. Michel achète le même DVD que Richard et le même livre que Vincent pour 35 €. Trouver le prix de chaque article séparément. (problème adapté du manuel de 6ème, Hatier, 2005)

Les élèves du primaire ayant un rapport particulier avec les problèmes liés à des prix et à des nombres décimaux, nous pouvons penser que les représentations du problème, les procédures envisagées ne seront sans doute pas les mêmes que celles utilisées pour calculer la masse de Francis, de Dédé et celle du chien. Cet énoncé fera sans doute encore plus appel à la vie quotidienne des enfants que l'énoncé avec des balances, il est possible par exemple que des élèves aient en tête le prix approximatif d'un CD ou d'un DVD et s'en servent pour orienter leurs recherches.

Les deux énoncés étant différents, il nous semble que la mise en commun pourra gagner en intérêt pour les différents groupes et permettre également à l'enseignant de plus facilement engager une discussion concernant la comparaison des procédures.

Une deuxième idée consiste à faire écrire les élèves sur leurs procédures de recherche :

- rédiger rapidement une phrase résumant leur procédure ou leurs difficultés juste après la recherche individuelle ; le but étant de garder en mémoire ces premières idées qui souvent n'apparaissent plus toutes dans les travaux de groupes.
- rédiger une phrase ou deux à la fin de la recherche en groupe (cela revient à préciser ce qui doit être écrit sur les affiches à savoir pas seulement des résultats mais des éléments sur la ou les procédures utilisées). L'objectif est d'apprendre à rédiger une affiche pertinente pour les autres lors de la mise en commun et pas seulement une affiche pour soi.

Il est possible également de réserver du temps pour étudier individuellement chaque affiche : au fur et à mesure de leur présentation au tableau ou à la fin de la présentation de tous les résultats, l'enseignant peut demander aux élèves d'écrire une phrase à propos de l'affiche qui lui semble la plus pertinente, sur des améliorations possibles ou alors au contraire sur l'affiche qui ne permet pas de bien comprendre la procédure afin là aussi de prévoir des améliorations possibles.

L'enseignant peut décider de demander à sa classe de ne fournir qu'une seule feuille-réponse pour toute la classe afin d'obliger les élèves à discuter entre eux des différentes procédures et à se mettre d'accord pour en choisir une qui leur semble pertinente.

Ces quelques exemples ne constituent bien sûr pas une liste exhaustive des façons de faire pour conclure au mieux une séance de type *problème ouvert*. Le but est, en formation, de permettre à chaque participant à partir des exemples fournis, de réfléchir sur sa propre pratique et de partager des points précis de leur expérience (même si cette expérience est relativement pauvre en formation initiale) afin d'entrevoir des possibilités d'évolution, de changements.

V - CONCLUSION

Nous avons, dans le cadre de notre recherche, pu observer, en cycle 3, la séance intitulée « les balances », séance dédiée à l'étude d'un *problème ouvert* (Arsac & Mante, 2007). De l'analyse de cette séance, nous avons isolé des éléments qui nous permettent d'envisager la construction d'un outil de formation à destination des professeurs des écoles : il s'agit de deux extraits du vidéogramme de la séance, des transcriptions des productions finales écrites des élèves ainsi que d'un plan résumant les déplacements de l'enseignant pendant la recherche.

Nous avons explicité tout au long de l'atelier et de ce texte, les étapes qui nous semblent importantes à développer dans le cadre d'une formation initiale et/ou continue, à partir des différents éléments fournis : un travail sur l'analyse *a priori*, une analyse de la diversité des procédures des élèves, une réflexion sur les mises en commun envisageables à partir des résultats d'élèves et une analyse *a posteriori* de la mise en commun observée dans la classe.

Nous pensons que ces différentes étapes de travail, lors d'une formation, peuvent également s'organiser autour de l'analyse d'une autre séance.

Il doit être précisé aux enseignants en formation qu'il ne s'agit pas de montrer et d'étudier des séances qui deviendraient pour eux des modèles. Ce point a été évoqué dans l'atelier. Le plus important est, d'après les participants, de montrer qu'en formation initiale et/ou continue, une discussion doit, à partir de ces quelques propositions, s'engager entre les enseignants et le formateur (mais aussi entre les enseignants sans le formateur) afin de faire le point sur leurs propres pratiques et sur des pratiques possibles. Tout cela afin de permettre à chaque enseignant, après avoir identifier individuellement sa propre manière de faire, d'envisager des changements et d'accepter de faire évoluer sa pratique. Nous avons conscience que cette dernière étape qui concerne une remise en question et un changement éventuel, est difficile pour des enseignants et c'est pourquoi nous poursuivons notre étude afin de répondre au mieux aux besoins en formation initiale et/ou continue.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G. & MANTE M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques,* La pensée sauvage, Grenoble.

CHOQUET C. (2010) « Problèmes ouverts » au cycle 3 : quelques résultats sur les choix de professeurs des écoles, in *Actes du XXXVII[e] colloque COPIRELEM,* Arpeme.

DOUAIRE J., HUBERT C. (1999) *Vrai ? Faux ? … On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*, Ermel, INRP.

HERSANT M. & THOMAS Y. (2008) Quels savoirs dans les problèmes pour chercher à l'école élémentaire ? Le cas des problèmes d'optimisation au cycle 3, in *Actes du XXXV[e] colloque COPIRELEM,* Arpeme.

HERSANT M. (2010) *Empirisme et rationnalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques*, mémoire complémentaire pour l'Habilitation à diriger des recherches, https://sites.google.com/site/magalihersant/publications/habilitation-a-diriger-des-recherches, consulté le 11 novembre 2011.

HOUDEMENT C. (2009) Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol.14, p.31-59, IREM de Strasbourg.

ORANGE C. (2005) Une forme d'analyse des pratiques didactiques : l'analyse centrée sur les productions des élèves dans leur diversité, in *L'analyse de pratiques en questions*, Collection ressources, n°8, p.43-49, IUFM des Pays de la Loire.

ROBERT A. & ROGALSKY J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, in *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol 2, n°4, p.505-528.

ROBERT A. (2003) Analyses de vidéo de séances de classe : des tâches prescrites aux activités des élèves, en passant par des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré), IREM de Paris 7.

ROBERT A. & al. (2003) Scénarios de formation des enseignants de mathématiques de second degré, un zoom sur l'utilisation de vidéo en formation ; un exemple de formation, IREM de Paris 7.

ROBERT A. (2004) Des analyses d'une séance en classe (à partir d'une vidéo) aux analyses des pratiques des enseignants de mathématiques : perspectives en formation d'enseignants, IREM Paris 7.

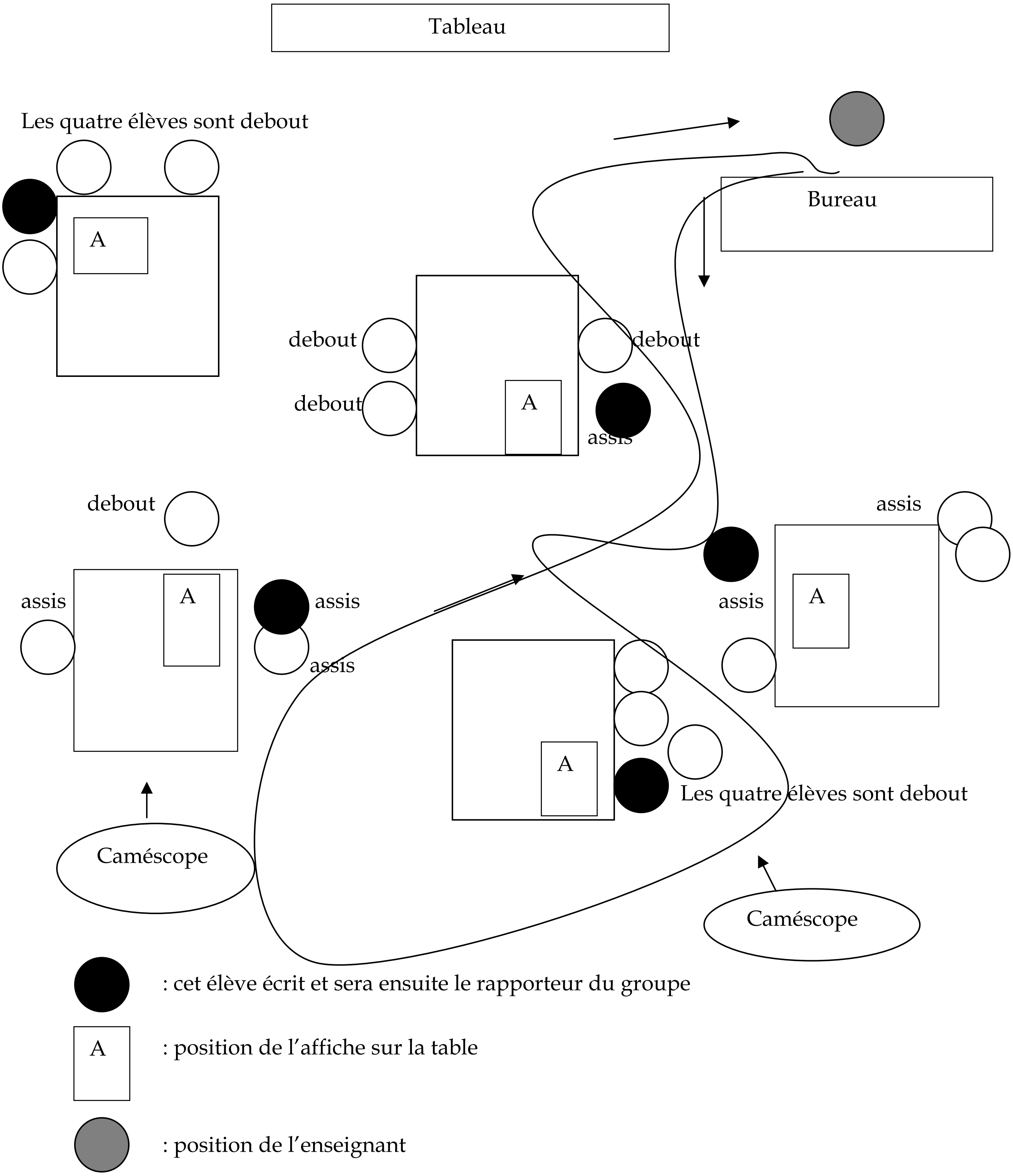
ROBERT A. (2008), Le cadre général de nos recherches en didactiques des mathématiques, in *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants*, Octares éditions, p.11-22.

ROGALSKY J. (2008), Le cadre général de la théorie de l'activité : une perspective de psychologie ergonomique, in *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants*, Octares éditions, p.23-30.

VII - ANNEXE

1 Le plan de la classe

Le plan de la classe est reproduit. La position de chaque élève pendant la phase de recherche est reportée ainsi que le déplacement de l'enseignant (symbolisé par la courbe) :



2 Les affiches de chaque groupe

Groupe 1 :

On a imaginées que Gros Dédé pesait 125 kg. De 125 kg à 145 kg il y a 20 kg, donc on a mis 20 kg au petit Francis.
De 125 kg à 140 kg il y a 15 kg, donc on a mis 15 kg au chien Boudin.

Conclusion :

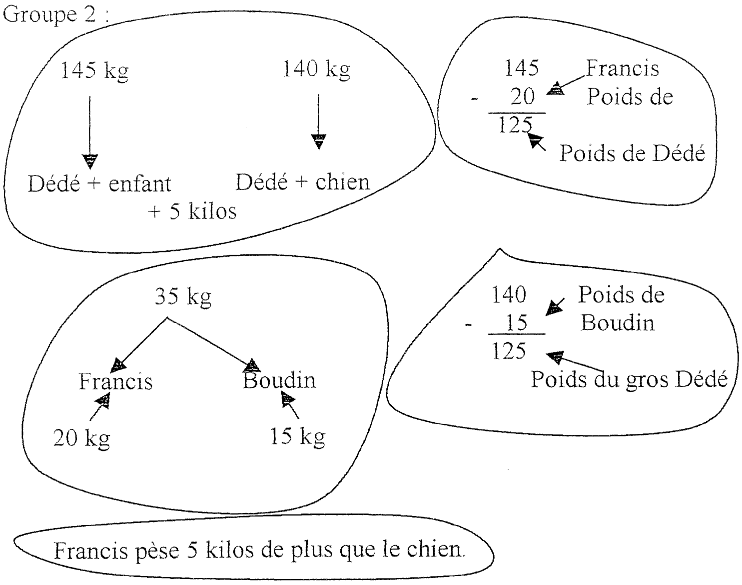
- le gros Dédé pèse : 125 kg
- le petit Francis pèse : 20 kg
- le chien Boudin pèse : 15 kg

Les calculs :

$$\begin{array}{r} 145 \\ -\ 125 \\ \hline 020 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 140 \\ -\ 125 \\ \hline 015 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20 \\ +\ 15 \\ \hline 35 \end{array}$$

35 kg = le poids du petit Francis et de Boudin.

Groupe 2 :



Poids du gros Dédé : 125 kg
Poids de Boudin : 15 kg
Poids de Francis : 20 kg

Groupe 3 :

Gros dédé = 125
Françis = 20
Boudin = 15

Nous savons que Francis pesait 5 kg de plus que Boudin.
Et que gros dédé pèserait dans les 100 kg.
Nous avons essayer 130 + 15 = 145
Après on a refais la même opération mais nous avons trouver que sa faisait 145 au lieu de 140, donc nous avons essayer 125 pour dédé 20 pour Francis et 15 pour Boudin
Et c'était bon.

$$\begin{array}{rl} 125 & /\ \text{dédé} \\ +\ 20 & /\ \text{Francis} \\ \hline 145 & \text{kg} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 125 & /\ \text{dédé} \\ 15 & /\ \text{Boudin} \\ \hline 140 & \text{kg} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 20 & /\ \text{Francis} \\ 15 & /\ \text{Boudin} \\ \hline 35 & \text{kg} \end{array}$$

Groupe 4 :

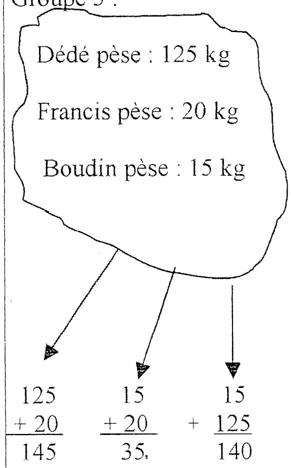
On a fait plusieurs essais.

Sur la première balance de Francis et Boudin nous avons trouvé que Boudin pesait 10 kg et donc le reste c'est le poids de Francis, c'est à dire 25 kg.

La 2ème balance de Francis et ~~Boudin~~ Dédé était 25 kg pour Francis comme la première, et donc le reste est le poids de Dédé qui est 130 kg.
Ensuite on a vérifié que les 2 poids étaient possibles pour la 3ème balance et ils étaient possibles.

Francis : pèse 25 kg
Boudin : pèse 10 kg
Dédé : pèse 130 kg

Groupe 5 :



QUOI DE NEUF DANS LA NUMÉRATION AU CP ?

Eric MOUNIER
Formateur IUFM, IUFM CRÉTEIL, UPEC (PARIS 12)
Laboratoire de Didactique André Revuz, LDAR
eric.mounier@u-pec.fr

Nathalie PFAFF
Formateur IUFM, IUFM CRÉTEIL, UPEC (PARIS 12)
Laboratoire de Didactique André Revuz, LDAR
nathalie.pfaff@u-pec.fr

Résumé

Les élèves doivent résoudre au CP des problèmes qui mettent en jeu les nombres. Certaines procédures sont susceptibles de faire écho à des propriétés relatives à la numération écrite chiffrée, d'autres à la numération orale. On pourrait penser qu'il y a une certaine perméabilité entre ces deux numérations, mais la thèse d'Eric Mounier (2010) indique que les mathématiques sous-jacentes diffèrent plus sensiblement que des travaux antérieurs pouvaient le laisser penser. Cette analyse a été faite en considérant les signes des numérations et a permis d'établir des interprétations théoriques. Elle constitue un outil pour comprendre les procédures des élèves. C'est cet outil qui a été testé dans l'atelier. Grâce à des vidéos d'élèves, il a été possible de relier les procédures à des propriétés de telle ou telle interprétation théorique des numérations. Ceci conduit à poser un nouveau regard sur les questions afférentes à la place de la numération parlée dans l'apprentissage des aspects positionnels de la numération écrite chiffrée.

L'atelier s'est déroulé en trois temps : une présentation d'une problématique concernant la numération au CP et menant à deux questions (à l'initiative des auteurs de l'atelier), une analyse de vidéos d'élèves (effectuée par les participants de l'atelier) afin de fournir des éléments de réponse à ces deux questions et enfin une nouvelle orientation du questionnement (proposée par les auteurs de l'atelier) qui a été support à des débats.

Dans ce compte rendu, nous reprenons ce déroulement de manière chronologique.

I - DES QUESTIONS SUR LA NUMERATIONS AU CP

L'ensemble de cette première partie reprend la présentation faite dans l'atelier par ses auteurs, y compris les questions qui y sont étudiées. Des précisions sont consultables dans la thèse d'Eric Mounier (2010).

1 Des questions initiales

Les élèves utilisent différentes procédures pour résoudre des problèmes mettant en jeu l'écriture chiffrée du nombre. Les aspects positionnels de cette écriture sont objet d'enseignement au CP. Prenons en exemple la tâche consistant à indiquer le cardinal d'une collection d'objets figurés sur une feuille par son écriture chiffrée. Plusieurs procédures peuvent être utilisées par les élèves. En voici deux qui mènent à une réponse exacte (on prend l'exemple de 42) :

- un comptage de paquets de dix formés au fur et à mesure puis d'unités restantes : « dix, vingt, trente, quarante, quarante-et-un, quarante-deux » suivi de la transcription de la désignation orale obtenue en l'écriture chiffrée « 42 ».

- l'organisation complète de la collection en paquets de dix (de manière maximale) et ensuite l'écriture du nombre de dizaines par le chiffre « 4 » puis du nombre d'unités par le chiffre « 2 » qui est écrit à la droite de « 4 ».

Au-delà des procédures d'énumération, Briand (1999), une première analyse permet d'inférer des liens entre les deux numérations. La première procédure utilise une « double » structuration de la comptine numérique, celle des dizaines (les mots, « dix », « vingt », « trente », « quarante ».), celle des unités (les mots, « un », « deux »). Le dénombrement y est effectué au fur et à mesure. Ensuite est utilisée une traduction de la désignation parlée « quarante-deux » en l'écriture chiffrée « 42 ». La deuxième procédure utilise la comptine numérique jusqu'à dix pour organiser la collection en différents paquets de dix. Une fois l'organisation faite, il s'agit alors de la coder par écrit : le nombre de dizaines ainsi que celui d'unités étant indiqués par un chiffre de graphie conventionnelle (les chiffres de « 0 » à « 9 »), la disposition spatiale de ces chiffres étant aussi conventionnelle (ici en ligne avec un ordre).

La question est alors de savoir reconnaître dans les procédures observées en quoi les mathématiques à l'œuvre sont liées à la numération écrite dans son aspect positionnel.

2 Une analyse des numérations en jeu au CP

L'analyse qui suit est une manière de répondre à la question concernant le lien entre les mathématiques et chacune des numérations. Celle-ci est extraite de la thèse d'Eric Mounier (2010). Elle a été présentée au début de l'atelier.

Tableau 1: les interprétations

	Principes mathématiques	Mise en signes
Ecriture chiffrée	4x10+2	42
Arithmétique multiplicative	Quatre fois dix plus deux	Quatre dix deux
Arithmétique additive	Quarante plus deux	Quarante deux
Ordinale avec repérants	Deux après quarante	Quarante deux
Ordinale sans repérant	Quarante-deux ième	Quarantedeux

Ce premier tableau donne, à partir de l'exemple du nombre désigné par quarante-deux/42, les différentes interprétations issues d'une analyse à partir des signes. La première ligne concerne l'écriture chiffrée, les quatre suivantes la numération parlée de type indo-européen (français, allemand, italien, espagnol, anglais, latin …). Ce sont des modèles théoriques qui distinguent les principes mathématiques et leur mise en signes. Si on considère l'ensemble des modèles mathématiques que permettent les décompositions $\sum a_i d_i$ selon les échelles de numération d_i , seul le modèle indiqué dans la première ligne convient pour l'écriture chiffrée. Ainsi, la décomposition dite polynomiale d'un nombre constitue les fondements mathématiques de cette dernière. Les autres modèles (indiqués dans les quatre lignes suivantes) peuvent servir à modéliser la numération parlée en France. Ils ont été obtenus à l'aide d'une analyse linguistique. Le modèle arithmétique multiplicatif (de la numération parlée) emprunte des principes mathématiques identiques à la numération écrite chiffrée, mais obtenus par une méthodologie d'analyse différente (une analyse linguistique). Le modèle arithmétique additif se distingue du modèle multiplicatif du fait par exemple de voir dans « trente » non pas « dix plus dix plus dix » (trois fois dix) mais « vingt plus dix » (on rajoute dix au dernier appui additif obtenu, ici « vingt »). Il se distingue du modèle ordinal avec repérants du fait que dans ce dernier « trente » est atteint après avoir énoncé les mots de la comptine numérique « un, deux, …, huit, neuf » après le dernier repérant prononcé « vingt ».

Tableau 2 : les comparaisons

	Principes mathématiques			Mise en signes
Ecriture chiffrée	dix	arithmétique	polynômiale	Coefficients
Arithmétique multiplicative	dix	arithmétique	polynômiale	Ordre et coefficients
Arithmétique additive	dix+dix vingt+dix trente …	arithmétique		Appuis et appuyants additifs
Ordinale avec repérants	Dix, vingt, trente …			Repérants et comptants
Ordinale sans repérant				Succession de noms

Ce tableau permet de comparer chacun des quatre modèles possibles pour la numération parlée en France avec l'interprétation de l'écriture chiffrée (qualifiée de référence et indiquée dans la première ligne), suivant les principes mathématiques puis leur mise en signes.

La graphie des chiffres et la disposition linéaire pour l'écriture chiffrée, le choix des phonèmes et de l'ordre d'énonciation des différents mots composant le nom des nombres pour la numération parlée en France (par exemple quarante/deux, au lieu de deux/quarante) sont des éléments conventionnels du point de vue des mathématiques. Ces derniers peuvent être compris comme des choix culturels ou pragmatiques qui peuvent être reliés à des contraintes dues à la forme orale (contraintes linguistiques) ou écrite de la numération. Cependant certains éléments de la mise en signes sont directement reliés aux principes mathématiques. C'est le cas de l'utilisation des coefficients de la décomposition dite polynomiale pour l'écriture chiffrée ou de la composition des noms de certains nombres pour la numération parlée. Le modèle arithmétique multiplicatif (de la numération parlée en France) est le modèle le plus proche de l'interprétation de référence (modèle adopté pour l'écriture chiffrée) puisque les principes mathématiques sont les mêmes. Seule la mise en signes diffère, puisqu'en particulier l'une n'utilise que les coefficients de la décomposition dite polynomiale tandis que l'autre utilise les coefficients et les ordres. Le nombre « dix » a un statut à part : son emploi est attesté dans la majorité des modèles sans qu'il soit mathématiquement nécessaire (ni comme choix de base, ni comme appui arithmétique ou repérant).

Tableau 3 : pertinence suivant les nombres

	Principes mathématiques			Mise en signes
Ecriture chiffrée	dix	arithmétique	polynômiale	Pour les entiers naturels
Arithmétique multiplicative	dix	arithmétique	polynômiale	Pour n>cent (mille)
Arithmétique additive	dix+dix vingt+dix trente …	arithmétique		Pour seize<n<cent
Ordinale avec repérants	Dix, vingt, trente …			Pour seize<n<cent
Ordinale sans repérant				Pour n<dix-sept

Ce tableau présente finalement la « pertinence » de l'interprétation (ie : le choix d'un modèle) suivant le champ numérique. Il permet en particulier de comparer chacune des interprétations de la numération parlée en France avec l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée.

En ce qui concerne la numération parlée en France, cette pertinence est évaluée selon le degré d'analyse qui permet de retrouver le modèle. Ainsi elle prend en compte la distance entre « quarante-deux » et « quatre dix deux » et celle entre « deussan » et « deux cents » (« deussan » indiquant qu'il est analysé comme un repérant ou appuis additif, « deux cents » soulignant l'appui multiplicatif – l'ordre/puissance de dix - « cent »). Pour les nombres inférieurs à cent, on n'entend pas l'appui multiplicatif (« dix ») alors qu'il est présent (« cent ») pour les nombres entre cent et mille. Pour les nombres inférieurs à cent (et strictement supérieurs à seize), on entend les appuis additifs vingt, trente, etc., qui sont aussi les repérants si on utilise l'interprétation ordinale avec repérants. Ces remarques sont traduites dans la colonne de droite du tableau ci-dessus. Cette présentation met l'accent sur les différences entre les modèles, au-delà des « irrégularités » propres au français de France, en particulier pour les nombres entre soixante et cent (l'utilisation d'une comptine numérique jusqu'à « dix-neuf » ou, dans une perspective arithmétique, d'un ajout de vingt). Pour les nombres inférieurs à cent (ceux du CP), ce n'est donc pas l'interprétation multiplicative qui est la plus pertinente pour la numération parlée en France, alors que cette interprétation est la plus proche de l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée.

3 Les questions que les auteurs de l'atelier proposent d'étudier

3.1 De l'analyse des mathématiques en jeu à l'analyse des procédures des élèves

L'étude précédente est une réponse à la question concernant les liens entre les mathématiques et les numérations, et par voie de conséquence entre les deux numérations en jeu au CP, écrite chiffrée et orale. Mais comment relier les mathématiques et les procédures des élèves ? Dans l'atelier on fait l'hypothèse, couramment admise en didactique, que les mathématiques à l'œuvre peuvent être relevées en analysant l'activité des élèves. De manière plus précise, on peut se référer à la théorie des champs conceptuels, Vergnaud (1991). Pour résoudre un problème, les élèves utilisent des schèmes dans lesquels les théorèmes et concepts peuvent être validés grâce à des propriétés mathématiques. Certains emplois sont « -en-acte » dans la mesure où la propriété utilisée n'est pas explicite pour l'élève. Par exemple lorsqu'un comptage de un en un est considéré comme menant à la même réponse qu'un comptage de dix en dix, un comptage des dizaines ou encore un calcul mental. En CP ce sont surtout des théorèmes-en-acte qui sont à l'œuvre car le niveau de connaissance des élèves permet difficilement de formuler des propriétés.

3.2 Des questions spécifiques à la numération au CP

Il s'agit d'aborder les liens entre les propriétés des différentes interprétations et les procédures des élèves. Ces derniers abordent au CP une certaine variété de problèmes. Fénichel et Pfaff (2004, 2005) proposent un classement de ces problèmes dans le cadre de la théorie des champs conceptuels (voir aussi la thèse de Nathalie Pfaff). Ce classement se base sur les relations entre les signifiants, par exemple dire une écriture chiffrée ou transcrire une désignation parlée à l'aide de chiffres, et les liens entre le signifié (le nombre) et un signifiant, par exemple indiquer la désignation parlée du cardinal d'une collection d'objets. Ainsi l'exemple précédent, indiquer le cardinal d'une collection (d'objets figurés sur une feuille) par son écriture chiffrée, est à situer dans les problèmes consistant à donner un signifiant (ici l'écriture chiffrée) du nombre (signifié).

A la maternelle, l'écriture des nombres avec des chiffres a été introduite en tant que version écrite des désignations de la numération parlée en France : l'écriture (chiffrée) « 23 » est synonyme de l'écriture (littérale) « vingt-trois ». L'apprentissage nouveau au CP concerne les propriétés liées à l'aspect positionnel des écritures chiffrées. Dans l'exemple donné au début, la deuxième procédure consiste en l'organisation complète de la collection en paquets de dix (de manière maximale) puis de l'écriture du nombre de dizaines par le chiffre « 4 » et du nombre d'unités par le chiffre « 2 » à la droite de « 4 ». Au regard de l'étude des signes des numérations indiquée précédemment, cette procédure peut être analysée comme mettant en jeu des propriétés relatives à l'interprétation de référence de la numération écrite chiffrée. Ce n'est pas le cas de la première procédure. Pourtant l'une et l'autre mènent à une réponse exacte. L'atelier s'est proposé d'aborder deux questions :

- Quelle est l'influence des tâches sur la nature des mathématiques en jeu, selon qu'elles relèvent de telle ou telle interprétation ?

- Y a-t-il des élèves qui usent systématiquement de procédures analysables comme relevant de telle ou telle interprétation ?

Dans l'atelier les élèves concernés sont ceux de fin de CP, c'est-à-dire ayant reçu un enseignement sur les aspects positionnels de la numération écrite chiffrée.

II - LE DISPOSITIF DE L'ATELIER

Le but de l'atelier est de donner dans le cadre d'analyse proposé un aperçu qualitatif des réponses que l'on peut donner aux questions précédentes. <u>Il se centre sur des tâches ne requérant pas nécessairement l'emploi de la numération parlée</u> (si ce n'est pour un comptage jusqu'à dix) <u>afin de comprendre son rôle dans les procédures d'élèves qui utilisent les écritures chiffrées</u>.

Sa faisabilité repose sur l'hypothèse (à tester) qu'il est possible d'inférer des procédures des élèves les éléments qui ont caractérisé les différentes interprétations des numérations.

1 Le choix des observations

Comme il s'agit essentiellement d'une étude prospective, qui pourrait permettre d'entreprendre une étude descriptive plus complète, seule l'activité de trois élèves sur quatre tâches a été étudiée.

Limiter les paramètres influant sur l'usage de telle ou telle procédure

Afin de répondre aux deux questions posées, un certain nombre d'éléments doivent être pris en compte concernant la nature des tâches proposées aux élèves et les contextes dans lesquels elles ont été proposées. Voici les éléments retenus par les auteurs de l'atelier :

- Des tâches comprises par les élèves (habillage et contexte familier).

- Des tâches « simples et isolées », au sens d'Aline Robert (2008), afin de pouvoir repérer les propriétés en jeu sans que des étapes intermédiaires empêchent les élèves de s'y être confrontés.

- Des tâches impliquant la numération « en unités », Chambris (2008), c'est-à-dire qui requièrent un emploi du concept d'unité et de dizaine (comme unité d'un ordre supérieur), mais aussi un choix de tâches pour lesquelles il n'est pas nécessaire d'avoir recours à la numération parlée usuelle. Les deux premières tâches consistent à donner un signifiant du nombre (quantité) : une écriture chiffrée pour la première, une désignation en unités et dizaines pour la seconde. Les deux autres tâches concernent le lien entre ces deux signifiants (des précisions sont données dans la suite de l'article).

- Des vidéos d'élèves de fin de CP (mois de juin) issus de la même classe et ayant suivi un manuel scolaire afin de limiter des effets dus à un enseignement différent. Tous les élèves savent dire les écritures chiffrées des nombres jusqu'à cent et retranscrire les désignations orales par une écriture chiffrée. Une erreur est cependant à relever pour la première élève, Nadjma, concernant la correspondance entre la désignation écrite chiffrée et la désignation orale des nombres de la dizaine des soixante-dix (associée à une écriture chiffrée commençant par un « 6 » au lieu d'un « 7 »).

Dans les extraits proposés à l'analyse, le champ numérique est constitué des nombres de treize à quatre-vingt-onze, mais il n'est pas le même pour toutes les tâches, ni même parfois pour tous les élèves (cf. la tâche 4). Ce choix est contraint par les observations effectivement recueillies mais aussi par la durée de l'atelier.

Les éléments recueillis, les tâches des élèves et le contexte de passation

Les participants de l'atelier disposaient de vidéos de trois élèves et des photocopies de leur production. Ces vidéos ont été réalisées la même matinée. Dans chaque cas l'élève était seul à une table au fond de la classe (qui continuait à fonctionner comme d'habitude). Le chercheur leur proposait différentes tâches. Les quatre tâches étudiées sont extraites d'une série plus importante. Le contexte est celui des séances « Grand Ziglotron » de la collection « Cap Maths » (édition Hatier 2005), séances que les élèves ont suivies pendant l'année. La séquence du manuel comporte quatre séances qui ont toutes le même contexte. Il s'agit de faire une commande d'une certaine quantité de « boutons » figurés par des carrés sur une fiche « Ziglotron », ce dernier étant un robot d'une histoire racontée aux élèves. Cette commande permet de réparer des Ziglotrons. La commande se fait via un bon à remplir : il s'agit d'inscrire un nombre de dizaines de boutons et un nombre de boutons isolés (« tout seuls ») limité à neuf par commande. Ce contexte est repris dans les tâches 2, 3, 4 analysées dans l'atelier. Le bon de commande est constitué d'une première ligne dans laquelle est demandé le nombre de boutons « tout seuls » et d'une deuxième dans laquelle est demandé un nombre d'enveloppes de dix. Ces enveloppes ont été constituées auparavant avec les élèves. Ils ont pu vérifier que toutes contenaient dix boutons (qu'ils ont pu compter) : « une dizaine » a été écrit sur chaque enveloppe avec l'accord et l'aide des élèves.

<u>Tâche 1</u> : Indiquer par une écriture chiffrée le cardinal d'une collection non manipulable.

Quarante-trois petits ronds sont dessinés sur une feuille A4, sans organisation particulière. Les élèves ont un crayon à papier et une gomme. On leur demande d'inscrire au bas de la feuille l'écriture chiffrée du nombre de petits ronds.

<u>Tâche 2</u> : Indiquer par une dénomination en dizaines et unités le cardinal d'une collection non manipulable.

Les élèves ont devant eux, dessiné sur une feuille A4, un « Ziglotron » qui comporte treize boutons à réparer (c'est donc une collection non manipulable de treize petits carrés figurés). Ils ont un crayon à papier et une gomme. Ils doivent remplir le bon de commande, c'est-à-dire indiquer le nombre d'enveloppes et le nombre de boutons « tout seuls », sachant qu'il n'est pas possible de demander plus de neuf boutons « tout seuls ».

<u>Tâche 3</u> : Indiquer par une écriture chiffrée le cardinal d'une collection donnée sous la forme de dizaines et d'unités.

Les élèves ont huit enveloppes « une dizaine » et six boutons isolés (boutons « tout seuls »). Sur un petit morceau de papier il leur est demandé d'inscrire l'écriture chiffrée du nombre total de boutons.

<u>Tâche 4</u> : Donner une quantité sous forme de dizaines et d'unités, quantité indiquée sous la forme d'une écriture chiffrée.

Il est présenté aux élèves successivement les écritures chiffrées suivantes : 13, 27, 42, 58, 91. On leur demande à chaque fois de donner le nombre d'enveloppes et de boutons « tout seuls » pour honorer la commande.

2 Bilan des procédures relevées selon les élèves et les tâches

La grille qui suit permet une double lecture :

- horizontale, pour donner des éléments de réponse à la première question « Quelle est l'influence des tâches sur la nature des mathématiques en jeu, selon qu'elles relèvent de telle ou telle interprétation ? »

- verticale, pour la seconde question « Y a-t-il des élèves qui usent systématiquement de procédures analysables comme relevant de telle ou telle interprétation ? ».

	Nadjma	Sofiane	Thomas
Tâche 1 Indiquer par une écriture chiffrée le cardinal d'une collection non manipulable.	L'élève compte un à un les éléments de la collection en les numérotant successivement avec des écritures chiffrées. Le dernier nombre est dit et écrit (écriture chiffrée « 43 ») en même temps sur le dernier élément énuméré. Il est reporté en bas de la feuille. La procédure est réussie via une double erreur d'énumération : oubli d'un objet et oubli d'un numéro dans la comptine des écritures chiffrées (= la comptine parlée qui est notée à l'écrit)	Trois groupes de dix sont entourés, puis l'élève écrit « 43 ». Quand on lui demande comment il le sait, il dit qu'il a entouré des dizaines, il y en a trois. Ensuite il a compté un par un les éléments restants « j'ai pu compter plutôt qu'entourer ». Puis il dit « j'ai mis treize avec trente pour faire quarante, treize c'est trois unités, donc j'ai mis le trois (en montrant le « 3 » de « 43 ») ».	La collection est organisée en groupements (tous de dix) et de manière maximale (les objets sont numérotés de « 1 » à « 10 »). Ensuite l'élève inscrit « 42 ». Quand on lui demande comment il le sait, il indique : « dix plus dix ça fait vingt, trente, quarante, et là deux ça fait quarante-deux». L'oral « quarante-deux » est transcrit directement par l'écriture chiffrée « 42 » au bas de la feuille. La procédure a échoué car un des trois éléments restant n'a pas été pris en compte.
Tâche 2 Indiquer par une dénomination en dizaines et unités (bon de commande) le cardinal d'une collection non	L'élève compte un à un les éléments de la collection puis inscrit 13 (et dit « treize ») sur le bon sur la ligne réservée aux boutons « tout seuls ». Quand on lui rappelle qu'on ne peut pas donner plus de neuf boutons, il inscrit « dix » (puis « 10 » quand on lui demande d'écrire avec des	L'élève numérote les éléments de la collection de 1 à 13 puis inscrit 13 sur le bon (devant un bouton). Quand on lui rappelle qu'il n'a a pas plus de 9 boutons, il regarde l'écriture « 13 » et à partir de cette écriture dit « une dizaine et trois unités ». Il écrit alors la bonne réponse 3 « tout seuls » et 1 enveloppe « une dizaine »	L'élève numérote les éléments de la collection de 1 à 13 puis inscrit « 3 » sur le bon (devant un bouton) et « 10 » pour le nombre d'enveloppes. Il dit ensuite que cela ne convient pas mais ne sait pas comment faire

manipulable.	chiffres) pour le nombre d'enveloppes, sans effacer le « 13 ».		pour répondre correctement.

	Nadjma	Sofiane	Thomas
Tâche 3 Indiquer par une écriture chiffrée le cardinal d'une collection donnée sous la forme de dizaines et d'unités.	L'élève compte les enveloppes une par une, inscrit « 8 », puis compte les boutons « tout seuls » un par un et inscrit « 6 » à côté du « 8 » pour obtenir la réponse exacte « 86 ».	L'élève énonce « dix, vingt, trente, …, quatre-vingts » puis compte les boutons «tout seuls ». Et dit « quatre-vingt-six ». Il écrit alors la réponse exacte « 86 ».	L'élève compte huit enveloppes (il dit « huit ») et six boutons « tout seuls ». Il dit alors la bonne réponse « quatre-vingt-six » puis l'écrit « 86 ». Quand on lui demande des explications, il indique avoir transformé huit enveloppes en « huit dizaines » puis en « quatre-vingts ». Il dit ensuite : « avec ces six boutons, ça fait « quatre-vingt-six ».
Tâche 4 Exprimer une quantité sous forme de dizaine(s) et d'unité(s), cette quantité étant indiquée par une écriture chiffrée.	Pour 13, l'élève donne les éléments exacts : trois boutons « tout seuls » et une enveloppe, mais indique donner quatre enveloppes. Pour 27, l'élève inverse les éléments à donner : deux boutons « tout seuls » et sept enveloppes. Les autres nombres n'ont pas été testés.	Pour tous les nombres proposés, 13, 27, 42, 58, 91, les réponses sont exactes. L'élève va très vite et ne parle pas. Quand on lui demande des explications, pour « 58 », il indique relier « cinquante » à « cinq dizaines » et pour « 91 » il dit (directement) « neuf dizaines et un bouton » en pointant les deux chiffres.	Pour tous les nombres proposés, 13, 27, 42, 58, 91, les réponses sont exactes. L'élève va très vite et ne parle pas.

III - LES APPORTS DE L'ATELIER

1 Analyse interprétative des résultats constatés

L'analyse présentée ici est une synthèse de celle entreprise par les participants de l'atelier. Elle a fait consensus ou tout au moins été largement partagée. Les points qui ont été source de discussion sont relatés dans les paragraphes III. 3 et IV. Elle utilise l'étude de la numération qui a été présentée dans le paragraphe I. On a relevé dans des tâches qui ne la nécessitent pas *a priori* la mise en jeu de propriétés relatives à la numération parlée. On a relevé aussi les propriétés afférentes à la numération écrite chiffrée.

1.1 Par tâche

Les nombres en jeu sont susceptibles d'influencer les procédures au moins autant que la nature de la tâche elle-même. Cependant, dans ce qui a été observé, pour chacune des tâches on peut inférer des procédures des propriétés de différentes interprétations.

Dans la tâche 1, les procédures font échos aux propriétés d'une interprétation ordinale sans repérant (Nadjma) ou d'une interprétation ordinale avec repérants ou arithmétique additive (Thomas et Sofiane). Il n'est pas aisé de distinguer ces deux dernières. Cependant, bien qu'ils ne soient pas encore très familiers de tous les problèmes de la structure additive, il semble que Thomas et Sofiane conçoivent des réunions de collections et utilisent les appuis additifs dix, vingt, trente, quarante.

Dans la tâche 2, c'est l'interprétation ordinale qui est toujours est en jeu, ce qui peut être relié au champ numérique spécifique dont fait partie le nombre « 13 ». Comme tous les élèves ont compté le nombre d'objets, la tâche a donc finalement consisté à relier deux signifiants, la désignation parlée et celle « en unités et dizaines ». Un des élèves (Sofiane) a réussi à donner la bonne réponse en utilisant alors l'écriture chiffrée comme relais, sans que l'on puisse affirmer qu'il ait utilisé l'aspect positionnel. Les autres ont échoué.

Dans la tâche 3, deux élèves sollicitent la numération parlée en France : Sofiane utilise des propriétés d'une interprétation ordinale avec repérants (ou additive ?), Thomas celles d'une interprétation multiplicative. Nadjma fait directement le lien entre l'écriture chiffrée et une désignation « en unités et dizaines ».

Dans la tâche 4, réciproque de la précédente, ce dernier lien semble utilisé préférentiellement par les trois élèves et ceci de manière plus probante pour les grands nombres, si on considère leur rapidité d'exécution et la fiabilité de leur réponse. Cette tâche semble donc moins solliciter des propriétés des interprétations de la numération parlée puisque les élèves utilisent un lien direct, des chiffres de l'écriture chiffrée vers la désignation « en unités et dizaines ». Cependant, contrairement à la précédente, l'écriture chiffrée est donnée. Sa lecture permet à la quantité d'être immédiatement désignée par un nom de la numération parlée. Est-ce que cela pourrait contribuer à comprendre les différences remarquées entre les procédures de ces deux dernières tâches, réciproques l'une de l'autre ?

Ce n'est que dans la tâche 1, un dénombrement « classique », que l'écriture chiffrée est pour tous les élèves la version écrite de la désignation parlée. On observe que l'interprétation multiplicative n'y est cependant pas en jeu. Ainsi, dans les procédures observées, relativement peu d'éléments de l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée interviennent (cf. le tableau 2 sur la comparaison des interprétations). Dans les autres tâches, l'écriture chiffrée garde aussi (souvent) ce statut de version écrite de la désignation parlée, avec parfois l'utilisation (en-acte) de certaines autres propriétés de l'interprétation de référence. On note ici cependant des échecs au niveau de la mise en signes (inversion des chiffres). En outre, lorsque l'interprétation multiplicative est apparue elle est le fait du même élève, ce qui relativise l'influence que l'on pourrait donner à la nature de la tâche.

1.2 Par élève

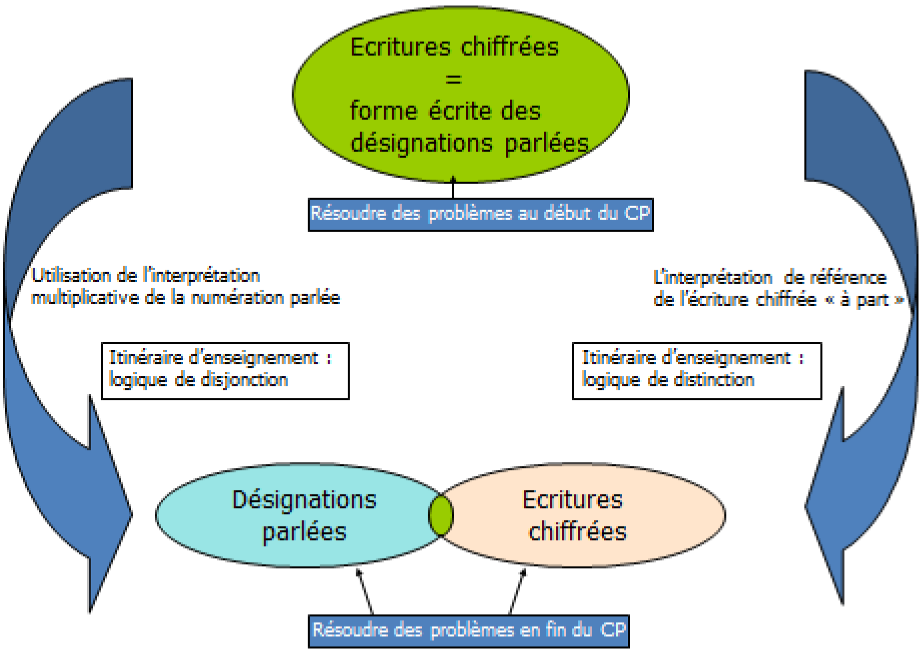
Les élèves utilisent des procédures qui peuvent être analysées comme mettant en jeu des propriétés des interprétations des numérations faites au paragraphe I. Chaque élève utilise préférentiellement des propriétés relative à une interprétation, et ceci quelle que soit la tâche. Nadjma utilise des éléments d'une interprétation de référence et d'une interprétation ordinale tandis que Sofiane et Thomas privilégient l'interprétation ordinale avec repérants ou/et additive, Thomas mettant en outre en jeu des propriétés d'une interprétation multiplicative dans la tâche 3 (mais pas dans la 2). Des évolutions sont cependant à signaler selon les nombres proposés aux élèves ou selon les tâches (voir la tâche 4 et le traitement différent de Thomas pour les tâches 2 et 3). Des hypothèses peuvent être formulées sur les rapports qu'entretiennent les élèves avec l'écriture chiffrée.

Aucun élève ne conçoit l'écriture chiffrée, tout au moins directement, comme indiquant le cardinal d'une collection dans l'intégralité des tâches proposées. Dans la tâche 1, l'écriture chiffrée semble la version écrite de la désignation parlée. Dans les autres, qui ne sont pas des dénombrements « classiques », les élèves évoluent différemment. Thomas et Sofiane ne semblent pas changer de conception, mais cela ne va pas les mener à utiliser des procédures identiques. En conséquence on peut y voir des traces d'une évolution des interprétations utilisées. Thomas va ainsi utiliser des éléments d'une interprétation multiplicative pour relier l'écriture chiffrée et la désignation parlée. Ce n'est pas toujours le cas pour Sofiane. En effet, lorsque ce dernier a été confronté à la tâche 2, indiquer par une dénomination en dizaines et unités (bon de commande) le cardinal d'une collection non manipulable, mais cette fois-ci pour une collection de 45 objets, il a échoué. Il les a numérotés de 1 à 45 puis a transcrit « 45 » en l'oral « quarante-cinq ». Il a alors trouvé quatre dizaines (et écrit « 4 enveloppes une dizaine »), mais n'a pas utilisé la désignation orale pour obtenir le nombre de boutons « tout seuls ». Il est reparti de l'écriture chiffrée mais en considérant toutes les écritures chiffrées qui lui ont servies à numéroter les objets. Il a alors tenté de faire la somme des chiffres des unités de tous les nombres à deux chiffres. La désignation parlée n'est donc pas associée à 4 dizaines plus (et encore) 5 : l'interprétation multiplicative n'est pas mobilisée. Pour Nadjma, chaque chiffre indique le nombre d'objets d'un certain type. Les deux chiffres ensemble ne semblent pas indiquer le cardinal (l'exception étant la tâche 1) et quand ils sont considérés simultanément, ils sont ajoutés. Certains contextes, comme celui du dénombrement « classique », lui semblent nécessaires pour concevoir une écriture chiffrée comme un signifiant du nombre. En outre, Nadjma se trompe dans la mise en signes (ordre des chiffres). Ce n'est pas le cas de Thomas et Sofiane.

Ainsi, en relevant les propriétés des interprétations mises en jeu, on peut inférer trois rapports à l'écriture chiffrée différents, mais ce rapport semble encore peu stable et influencé par la tâche et les nombres.

2 Les apports des auteurs de l'atelier : les itinéraires cognitifs d'enseignement

Les auteurs de l'atelier ont fait valoir que l'analyse ci-dessus peut amener à formuler des hypothèses sur la relation entre le nombre et les deux numérations. Les élèves ont des difficultés à concevoir l'écriture chiffrée comme autre que la version écrite de la numération parlée. Lorsqu'ils distinguent cependant les deux chiffres d'une écriture chiffrée sans référence à la numération parlée, non seulement ils prennent en compte difficilement le caractère conventionnel de la position des chiffres, mais plus encore ils n'accordent plus nécessairement à l'écriture le statut de signifiant du nombre (ici de la quantité). Ces hypothèses vont dans le sens de nombreuses recherches en didactique, De Blois (1995), Mounier (2010). Les auteurs de l'atelier ont proposé de regarder le problème précédent en questionnant la place de la numération parlée dans l'apprentissage de la numération écrite de position. Ils ont présenté un bilan de la situation au CP telle qu'elle a été analysée par Mounier (2010). En utilisant la notion d'itinéraire cognitif d'enseignement, deux logiques pour l'enseignement initial de la numération y sont définies : celle de distinction et celle de disjonction.



Mounier (2010) considère l'objectif d'apprentissage suivant : faire en sorte que les élèves puissent mobiliser des connaissances afférentes aux deux numérations selon les problèmes qu'ils résolvent, voire de disposer de ces connaissances (au sens d'Aline Robert 2008). Il envisage alors deux grandes catégories d'itinéraires cognitifs d'enseignement. A leur entrée en CP, l'écriture chiffrée est pour les élèves la forme écrite du nom du nombre exprimé dans la numération parlée en France. Il s'agit alors soit de disjoindre les deux numérations en faisant apparaître ce qu'il y a de commun aux deux via une interprétation multiplicative (logique de disjonction), soit de « construire » la numération écrite chiffrée sans recourir initialement à ces points communs, puis ensuite de les faire apparaître (logique de distinction).

3 Le débat dans l'atelier sur les itinéraires

Dans la logique de disjonction, la difficulté est tout d'abord de faire émerger l'interprétation multiplicative (ou certaines de ses caractéristiques). Ensuite, l'écriture chiffrée étant donnée *a priori*, certains aspects de la mise en signes (comme le choix de dix, la régularité des types de groupements et leur maximalité) semblent plus difficilement questionnables en tant que choix d'une mise en signes de principes mathématiques. Ceci peut se cristalliser en particulier au moment de la justification du « 0 », par exemple dans « 10 ». Il semble ainsi plus difficile de faire apparaître le système décimal chiffré comme une numération à part entière, c'est-à-dire autre qu'un moyen astucieux d'écrire les nombres « dits ». Dans la logique de distinction, le nombre a été conceptualisé via les désignations de la numération parlée. En conséquence, pour construire la numération écrite chiffrée « à part », comment concevoir des situations d'apprentissage sur le nombre qui ne vont pas la parasiter ? En outre, si cette numération est élaborée, est-ce que l'itinéraire ne va pas permettre (encore) plus difficilement aux élèves de percevoir l'écriture chiffrée comme un signifiant du nombre ?

Par ailleurs, les avantages et les inconvénients des itinéraires d'enseignement peuvent être regardés à d'autres niveaux. Des pistes didactiques ont déjà été ouvertes quant à des possibilités de séquences en classe, y compris pour un itinéraire qui suit une logique de distinction, Chevalier (2008). La question est de savoir comment jouer des connaissances qui sont véhiculées en dehors de la classe (le nombre via la comptine numérique), mais aussi prendre en compte des contraintes institutionnelles (programmes, curricula), des ressources existantes (manuels, fichiers, exercices en ligne) et des habitudes du métier (la prégnance de la comptine numérique, que ce soit sa version orale ou chiffrée dans la « frise » des nombres au-dessus du tableau). En outre, la question se pose d'anticiper dès la maternelle les difficultés conceptuelles des élèves qui ont été signalées. La scolarité obligatoire étant actuellement au niveau du CP, les auteurs de l'atelier font valoir qu'en l'état actuel des choses, il est difficile de ne pas tenir compte d'un contexte culturel qui rend prégnant l'abord du nombre via des tâches de dénombrement à l'aide de la comptine numérique, l'écriture chiffrée restant une version écrite de la désignation orale des nombres. La tâche de dénombrement pouvant être alors source de difficultés pour amorcer en classe un itinéraire d'enseignement qui suit une logique de distinction, une alternative pour l'enseignement est alors le recours à des tâches de comparaison de collections, Mounier (2010).

IV - CONCLUSION

Des apports et des limites.

L'analyse des procédures peut se faire en fonction des interprétations issues de l'analyse des signes des numérations. Ceci constitue un résultat important, en particulier pour la méthodologie de recherches futures. Les participants ont en effet pu retrouver dans les procédures des élèves des propriétés (en-acte) faisant écho à celles des interprétations théoriques des numérations de la thèse d'Eric Mounier. Cependant certains cas étaient plus discutés. Deux raisons peuvent être invoquées.

La première est un manque d'informations. L'analyse des procédures de chaque élève pour une plus grande variété de tâches permettrait d'infirmer ou de confirmer certaines hypothèses sur les élèves. En ce qui concerne chaque tâche, il semble nécessaire de recueillir un plus grand nombre de procédures d'élèves (y compris en proposant différentes variables didactiques, en particulier concernant les nombres). Par ailleurs, les explications données par les élèves *a posteriori* à la demande du chercheur sont à prendre en compte avec des réserves. L'élève peut en effet indiquer une autre procédure que celle qu'il a utilisée ou encore ne pas avoir les connaissances nécessaires pour pouvoir s'exprimer avec précision.

La deuxième raison vient de la nature des interprétations faites dans la thèse d'Eric Mounier. La proximité entre certaines interprétations est source de difficulté quand on essaye de les repérer dans les procédures des élèves de CP. Comment distinguer dans l'emploi de la comptine numérique un, deux, trois, etc. l'interprétation ordinale de celle ordinale avec repérants ? Comment distinguer dans l'emploi de la suite (dix), vingt, trente, l'interprétation additive de celle ordinale avec repérants ? En effet, les élèves de CP ne sont pas encore familiers des problèmes de la structure additive, ni du vocabulaire afférent. Ainsi, en quoi le fait de dire « vingt plus dix » ou d'agir sur les collections (réunions, groupements, organisation) est-il un indice qu'une opération arithmétique est en jeu (en-acte) ? Il en est de même pour l'interprétation arithmétique multiplicative. Qu'y a-t-il d'arithmétique dans « huit dizaines, ça fait quatre-vingts » concernant la procédure de Thomas pour la tâche 3 ? Les problèmes de la structure multiplicative n'étant pas au programme de CP peut-on y reconnaître « huit fois dix » ? La théorie des champs conceptuels permet d'appréhender chez un élève particulier la nature de ce lien, mais ceci nécessite d'avoir la connaissance des classes de problème qu'il rencontre, de ses procédures et des signifiants qu'il met en jeu. Néanmoins, il semble possible d'inférer de l'observation des procédures d'un élève le fait que ce dernier n'utilise pas (en-acte) des propriétés relatives à l'interprétation de référence de l'écriture chiffrée. Par exemple, dans la tâche 3 Thomas compte huit enveloppes « une dizaine », et six boutons « tout seuls » mais n'utilise pas la transcription de ces deux désignations en chiffre puisqu'il repasse par la désignation orale « quatre-vingt-six ».

De nouvelles questions et des perspectives

« Quelle est l'influence des tâches sur la nature des mathématiques en jeu, selon qu'elles relèvent de telle ou telle interprétation ? Y a-t-il des élèves qui usent systématiquement de procédures analysables comme relevant de telle ou telle interprétation ? ». Les réponses apportées à ces deux questions sont qualitatives et demandent une étude complémentaire portant sur un nombre plus important d'élèves. Il est difficile de faire une « cartographie » des élèves d'un côté et des tâches d'un autre, mais les critères retenus semblent prometteurs pour dégager des profils ou une typologie qui croisent des conceptions personnelles et des catégories de tâches, en particulier selon le champ numérique abordé. Il semble aussi nécessaire de tenir compte de l'influence de certains paramètres comme la nature et l'agencement des tâches proposées aux élèves sur l'année. Ceci peut mener à une étude plus « macro » concernant le rôle joué par des caractéristiques d'itinéraires d'enseignement (distinction, disjonction). Ces deux types d'itinéraires apparaissent comme étant paradigmatiques pour l'enseignement de « la » numération au CP. Il reste que la réalisation en classe d'un itinéraire d'enseignement de type « distinction » pose des problèmes pratiques : sa transposition est une perspective à étudier. Une étude des propositions existantes est un moyen d'aborder certaines de ces questions.

Nathalie Pfaff et Eric Mounier tiennent à remercier tous les participants de l'atelier pour leurs contributions avisées et dynamiques, Nadine Grappin qui a en outre pris des notes, et Hélène Buisson pour ses relectures.

BIBLIOGRAPHIE

BRIAND J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19/1**, 41-75.

CHAMBRIS C. (2008) Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris.Diderot (Paris 7).

CHEVALIER C. (2008) Entrer dans le code écrit : le système de numération au cycle 2, in *Actes XXXVème colloque COPIRELEM*, Bombannes.

DE BLOIS L. (1995) Le développement de l'écriture des nombres chez Christine, *Revue des sciences de l'éducation*, **XXI-2**, 331-351.

FÉNICHEL M. & PFAFF N. (2004, 2005) Donner du sens aux Mathématiques, 2 tomes, Paris : Bordas.

MOUNIER E. (2010) Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Diderot (Paris 7). Disponible en ligne sur : http://tel.archives-ouvertes.fr/ (version 2)

PFAFF N. (1995) Processus de conceptualisation autour du théorème de Thalès. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Descartes (Paris 5).

ROBERT A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe, in *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, F Vandebrouck, Chapitre 2.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10.2/3**, 133-169.

Actes

22 - 23 - 24 JUIN 2011

XXXVIIIème Colloque COPIRELEM

colloque international francophone des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques

IUFM de Bourgogne - site de Dijon

Faire des mathématiques à l'école :

de l'activité de l'élève à la formation des enseignants

Point d'actualité Communications

C1 - C. ALLARD-BAYNAUD : Apprends ta leçon ! oui mais, quelle leçon ? Les cahiers des leçons : étude des institutionnalisations écrites en primaire

C2 - C. DEL NOTATO : Le jeu de tâches, une interaction de connaissances entre expérimentateur et élèves permettant de cerner les connaissances spécifiques engagées par des élèves de 11-12 ans, autour des relations de divisibilité.

C3 - M. FÉNICHEL et M. S. MAZOLLIER : Présentation de l outil multimédia « Enseigner les mathématiques en maternelle quantités et nombres e images ».

C4 - Y. MATHERON : L exemple du raisonnement par analyse et synthèse en tant que connaissance mathématique nécessaire pour enseigner la gé à l école élémentaire.

C6 - N. SAYAC : Un outil pour analyser les résultats aux évaluations mathématiques de fin d école : conception et utilisation en formation.

C7 - Groupe ERMEL >J. DOUAIRE & F. EMPRIN : Apprentissages géométriques au cycle 2 et formation des enseignants.

D1 - V. BAGOU : Calcul et numération décimale de position : retour sur une action de formation continue de PE en cours, dans le cadre des animatior pédagogiques de circonscription.

D3 - J. P. LEVAIN : Parcours de formation et niveaux de conceptualisation de la proportionnalité chez les étudiants PE1 vs M1.

D4 - O. MARTINELLI : Sémiotique peircienne et apprentissages numériques à l école.

D6 - J. F. GRELIER : Le livre du robot peut-il être réellement écrit par des élèves de CP ?

Point d'actualité - Catherine HOUDEMENT : Une année de mastérisation : et après ?

APPRENDS TA LEÇON ! OUI MAIS, QUELLE LEÇON ?

LES CAHIERS DE LEÇONS : ÉTUDE DES INSTITUTIONNALISATIONS ÉCRITES EN PRIMAIRE.

Cécile ALLARD-BAYNAUD
PEMF, école de Richebourg
LDAR, Paris VII
cecile.allardb@free.fr

Résumé

Les formateurs, les guides du maitre invitent les professeurs des écoles à formuler des synthèses ou des mises en commun du savoir en jeu. Certains manuels sont accompagnés d'un support dans lequel est retranscrit l'essentiel de ce qu'il y a à savoir dans le niveau de classe concerné. Écrire des leçons à la suite d'un ou de plusieurs apprentissages semble aller de soi. Il nous semble cependant que le fait d'écrire des leçons à la suite d'un travail mathématique est une pratique pédagogique encore peu questionnée. Il n'existe pas de référence institutionnelle du moins récente, ni sur la forme, ni sur le contenu que pourraient avoir ces leçons. Les maitres proposent-ils des leçons après chaque séance de classe ? Comment écrire ces leçons, quel contenu proposer aux élèves ? Écrire des leçons est-ce une activité de la seule responsabilité du maitre ? Existe-t-il un lien entre les situations vécues en classe et les institutionnalisations écrites ? (Brousseau et Centeno, 1991)
Pour répondre à ces questions, nous comparerons trois cahiers de leçons issues de trois classes de CM1. Pour réaliser cette étude nous utiliserons des éléments de la théorie anthropologique. Nous donnerons des éléments de réponses sur les organisations mathématiques de ces leçons (Chevallard, 1985). Nous en étudierons les niveaux de décontextualisation (Butlen et Pézard, 2003), nous conclurons en montrant en quoi les choix des éléments mathématiques mis en avant et les niveaux de décontextualisation dépendent des composantes personnelles et cognitives du maitre (Robert, 2001).

« Apprendre sa leçon », ce verbe et son complément sont souvent déclinés par des élèves, des parents, des enseignants. Qu'apprend-on à l'école primaire, quels savoirs mathématiques propose-t-on aux élèves ? Les maitres proposent-ils des leçons après chaque séance de classe ? Comment écrire ces leçons ? Écrire des leçons est-ce une activité de la seule responsabilité du maitre ? Existe-t-il un lien entre les situations vécues en classe et les institutionnalisations écrites ? (Brousseau et Centeno, 1991)

L'étude réalisée dans le cadre d'un mémoire de recherche en didactiques des mathématiques nous a conduit à étudier les traces écrites destinées à être apprises par les élèves, les traces écrites représentant la « *mémoire officielle de la classe, ce que l'élève est obligé de savoir* » (Brousseau et Centeno, 1991). Les supports sur lesquels sont inscrites ces traces sont divers (petits cahiers, grands cahiers, classeur, lutin ...) et distincts de ceux contenant les exercices, c'est pourquoi nous appellerons ces supports des « recueils de leçons ». Notons que ces recueils de leçons montrent une partie du savoir en jeu dans la classe. Nous supposons qu'ils ne nous donneront pas à voir la totalité des mathématiques faites en classe.

I - PROBLÉMATIQUE ET CADRE THÉORIQUE

Le recueil de leçons a bien une existence dans les classes du premier degré bien que celle-ci ne soit pas clairement affirmée. Nous ne détaillerons pas ici les raisons de cette existence mais nous pouvons supposer qu'elles sont à la fois culturelles (les élèves apprennent des leçons), institutionnelles (les devoirs écrits sont interdits, seul l'apprentissage des leçons est autorisé), didactiques (pour institutionnaliser le savoir, un recueil de leçons peut être un des moyens de garder des traces de ce qu'il y a à savoir).

Nous souhaitons étudier le contenu mathématique de ces écrits à travers le double regard de la Théorie Anthropologique du Didactique, initialisée par Chevallard et celui de la théorie des situations didactiques créée par Brousseau.

1 Théorie anthropologique du didactique (TAD).

Pour Chevallard le savoir ou le savoir-faire font partie d'une organisation mathématique (OM) qui se décline en type de tâches, technique, technologie et savoir. Chevallard (1998)[1] utilise ces quatre notions qu'il définit ainsi :

T : un type de tâches est souvent exprimé par un verbe et son complément. Par exemple « calculer l'aire d'un rectangle » est un type de tâche alors que « calculer » est un genre de tâche. On peut calculer une aire, un périmètre, la valeur d'une fonction en un point. « Calculer » s'enrichit tout au long de la scolarité de nouveaux types de tâches.

τ : la technique qui correspond à une manière de réaliser le type de tâches.

θ : la technologie qui propose un discours pour justifier la technique ou donne le mode d'emploi de la technique – discours rationnel.

Θ : la théorie qui justifie à son tour les assertions plus ou moins explicites du discours technologique.

Les 4 T définissent une organisation mathématique qui peut s'organiser autour d'un type de tâches (organisation ponctuelle), d'une technologie (organisation locale). Le bloc $[T,\tau]$ correspond alors aux savoir-faire et le bloc $[\theta,\Theta]$ aux savoirs.

Les leçons mettent-elles en avant certaines organisations mathématiques aux dépens d'autres ? Quel est le bloc le plus communément rencontré dans ces recueils, celui des savoirs ou des savoir-faire ?

Dans cette théorie, l'organisation didactique est conçue comme six moments qui ne se succèdent pas dans un ordre chronologique (c'est-à-dire qu'on peut découper le temps didactique dans un autre ordre que celui donné ci-dessous). Ces six moments sont regroupés en cinq groupes :

- le Groupe I (activités d'étude et de recherche) comporte les moments de la première rencontre, les moments exploratoires du type de tâches T et l'émergence d'une technique, les moments d'élaboration de l'environnement technologico-théorique … ;
- le Groupe II (synthèses) correspond au moment de l'institutionnalisation ;
- le Groupe III (exercices et problèmes) comporte les moments du travail de l'organisation mathématique ;
- le Groupe IV (contrôles) est le moment de l'évaluation ;
- enfin le Groupe V correspond aux moments d'institutionnalisation.

Pour Chevallard il faut distinguer les moments où l'on élabore l'environnement technologico- théorique et celui où l'on donne un statut aux savoirs.

Nous nous inscrivons dans l'étude des moments qui correspondent à **l'institutionnalisation**.

Ce terme *institutionnalisation* est en commun avec la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau que nous allons définir ci-dessous. Nous aurons besoin de ce double regard lorsque nous analyserons des leçons extraites du recueil de leçons.

[1] http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf, p2, 1998 juillet.

2 Théorie des situations

Le maitre a un rôle fondamental lors de la dévolution et de l'institutionnalisation. Lors de la dévolution, le maitre va s'assurer que chaque élève a compris la tâche demandée, qu'il l'accepte et qu'il s'engage dans la recherche. La dévolution est réussie quand l'élève accepte de prendre part au processus en développant une certaine autonomie.

Lors de l'institutionnalisation[2] , la reconnaissance du nouveau savoir n'est pas forcement apparente pour l'élève, c'est donc là que le rôle du maitre devient incontournable. Nous n'étudierons pas ici le processus d'institutionnalisation défini par Perrin-Glorian (1993) dans lequel sont repérables, lors des phases orales, des phases de rappels. Ces phases de rappels qui apparaissent en filigrane dans plusieurs séances de classes permettent des institutionnalisations locales prises en charge par les élèves, plus ou moins décontextualisées.

Nous émettons alors l'hypothèse que le scénario de la classe peut marquer ces institutionnalisations et que des informations et renseignements personnalisés, contextualisés, temporalisés et non universels peuvent se manifester dans ces écrits. Brousseau et Centeno (1991) qualifieront ces interventions comme des manifestations de la mémoire du système didactique.

3 Analyse du degré de décontextualisation

Les travaux de Butlen et Pézard (2003) décrivent le niveau de décontextualisation appelé degré par ces auteurs. Dans leurs études, ils ont dégagé trois degrés de décontextualisation pour les énoncés mathématiques et quatre degrés, nommés « méta », pour les énoncés de méthode. Puis ils affinent encore leur classement. Nous présentons le classement le plus général.

Pour les énoncés mathématiques les trois degrés sont :

- Degré 1 : énoncé formel (théorème, définition, propriétés …)
- Degré 2 : règle formulée à partir d'un exemple
- Degré 3 : exemple et contre-exemple.

Cette classification s'applique à des énoncés produits par des élèves de CM2 (dernière année de l'école élémentaire) et par des élèves de collège (première et deuxième année du collège), alors que, dans notre étude, nous nous penchons sur les énoncés élaborés en classe par le professeur de primaire. Enfin, Butlen et Pezard illustrent leurs recherches par des exemples pris dans le cadre numérique et plus précisément en calcul mental.

Notre étude ne se place pas exactement dans ce cadre. Nous avons étudié à part le rappel de la situation introductive dans la mesure où celle-ci joue un rôle essentiel dans nos comparaisons entre les enseignants. Nous essaierons cependant de préciser, autant que faire se peut, quel est le degré de décontextualisation.

Conclusion : que ce soit en TAD ou en TSD, l'institutionnalisation semble être incontournable. Ces deux théories ont en commun de présenter l'institutionnalisation comme le moyen de partager le savoir entre les différents partenaires (élèves, professeurs, institutions, parents ...) et de faire la synthèse de ce qui est à connaitre, de donner un statut au savoir, de le montrer. Nous regarderons si les leçons proposent un jeu de va et vient entre la situation vécue (contextualisé) et le savoir présenté hors du contexte … Nous pourrons alors étudier quelle organisation mathématique propose le maître à travers son recueil de leçons. Et nous aurons sans doute aussi des éléments sur le regard des enseignants sur les mathématiques ...

[2] L'institutionnalisation est le processus par lequel s'opère un changement de statut de certaines connaissances pour en faire des savoirs, en leur conférant un statut officiel.

4 Méthodologie.

Notre étude porte sur les pratiques enseignantes. Pour cela nous voulions que les contraintes d'ordre institutionnelles, sociales, soient le plus proches possibles d'une enseignante à une autre. Nous faisons en effet l'hypothèse que les variations de leçons résultent du déroulement en classe de la situation prétexte à l'institutionnalisation et de la relation aux mathématiques de l'enseignante (ce que Robert (2008) appelle la composante personnelle).

Nous sommes conscientes que ce qui se passe en classe, malgré l'utilisation de documents communs, diffère de façon très singulière entre deux professeurs. Aline Robert (2001) reprend les conclusions d'un rapport de recherche[3] « *on a pu constater par exemple qu'un même exercice, proposé dans les mêmes conditions de temps à quatre classes de seconde peu différentes entre elles (scolairement et socialement) d'un même établissement avec des objectifs généraux analogues, a donné lieu à des déroulements très différents, en partie du fait de la gestion singulière de chaque enseignant.* » (Robert, 2001).

Il est évident qu'il est plus commode d'étudier la transposition d'un document commun. Cependant le travail de comparaison n'est pas toujours facilité en raison de nombreuses contraintes matérielles que nous n'avions pas pointées suffisamment minutieusement. Pour une même situation, cela déclenchera dans une classe la rédaction ou non d'une trace écrite. Les enseignantes avaient bien déclaré la même programmation d'activités mais ces activités n'ont pas permis au savoir d'avoir la même visibilité (écrit et visible ou ne provoquant pas d'écrits). Nous n'avions pas bien mesuré les distances possibles et différentes d'un professeur par rapport à sa ressource.

Nous avons contacté trois enseignantes d'un même niveau CM1. Toutes les trois ont en charge une classe de CM1 dans une zone rurale, ce qui devrait nous permettre des comparaisons à niveau comparable. Elles sont toutes les trois expérimentées (entre 8 et 10 ans d'exercice).

Solange et Solenn enseignent à temps plein, alors que Danièle travaille à mi temps. Elles ont toutes trois essentiellement enseigné en cycle 3 (8-11ans)

Ces trois enseignantes utilisent des ouvrages ou des manuels dont un des auteurs communs est Roland Charnay : ERMEL CM1 (2005) et Cap math CM1 (2004).

Pour notre étude, nous avons demandé en fin d'année scolaire (2009) à récupérer l'intégralité d'un cahier de leçons. Nous avons également souhaité obtenir le maximum d'informations sur tous les documents en lien avec ces traces écrites (énoncé des situations, leçons, évaluations, voire enregistrements de certaines leçons). C'est ainsi que nous avons recueilli, pour chaque enseignante, le recueil de leçons d'un de ses élèves et sa programmation : « l'ensemble des séquences de classe qui vont être programmées sur l'année ».

Les trois recueils obtenus ne comportaient pas de sommaire. Nous les avons reconstruits afin de faire apparaitre la répartition des leçons choisie par le professeur selon les différents domaines mathématiques, par exemple quelles leçons en géométrie ou en mesures et grandeurs. Cette étude des sommaires reconstitués devrait nous permettre d'avoir des éléments de réponses sur les *itinéraires cognitifs* (contenu, tâches, organisation, quantité ordre et progression proposés par le professeur aux élèves.) (Robert 2008).

Nous avons analysé les écrits de trois recueils de professeures ainsi que le recueil proposé pour compléter le manuel et le guide du maitre de Cap Math : le dico math.

[3] Beziaud N. et al (1999), Les pratiques des enseignants de mathématiques en classe de seconde. *Cahier de Didirem*, 33, 1-36, IREM Université Paris 7 Denis Diderot

II - ÉTUDE DES SOMMAIRES RECONSTITUÉS DES RECUEILS DE LEÇONS

Les sommaires reconstitués vont nous permettre d'étudier le nombre de leçons selon le découpage proposé par le professeur. Une unité de ce découpage sera appelée « domaine » (géométrie, numération..) ; cela nous donnera à voir les domaines qui justifient une leçon. Nous pourrons ainsi avoir des éléments sur le regard des professeurs sur les mathématiques mais également sur ce qu'il est important de retenir pour que la classe fonctionne. Nous faisons l'hypothèse que Dico math recense systématiquement toutes les mathématiques possibles d'après le manuel mais rien ne dit que Dico math dégage ce qui est important pour la mémoire de la classe.

En premier lieu, nous rappelons que les programmes en vigueur proposent les domaines mathématiques suivants : nombres et calculs, géométrie, grandeurs et mesures, organisation de données.

1 Recueil de leçons du manuel Cap math : « le dico math ». Présentation générale du Dico math

Dico math est le petit fascicule qui accompagne le manuel Cap math. Ce fascicule de 32 pages doit tenir deux rôles au moins pour ses auteurs :

- il permet de comparer lors des mises en commun les formulations orales et écrites des élèves avec celles proposées par le dico math,
- il permet de comparer les écrits de synthèse proposés par la classe avec ceux du dico math de manière à construire des écrits dont la forme et la syntaxe sont de plus en plus élaborés[4].

Le fascicule est séparé en quatre grands domaines, - Nombres, Géométrie, Calcul, Mesures -, eux-mêmes divisés en sous - domaines.

Pour chaque domaine ou sous - domaine, nous avons repéré les titres des paragraphes. Ce sont ces titres que nous considérerons comme « unité de leçon ».

Analyse de la répartition des leçons en fonction du découpage proposé et des titres des leçons.

Il y a alors 50 leçons regroupées dans des sous - domaines eux-mêmes dépendant d'un domaine plus général.

Le domaine « Nombres » comptabilise 20 leçons, le domaine « Calcul » 6 leçons, le domaine « Géométrie », 13 leçons et le domaine « Mesure » en comptabilise 9.

Le domaine « Nombres » est le plus investi alors que le domaine « Calcul » l'est peu. Ce qui semble indiquer que ce domaine lié à des techniques opératoires nécessite moins de leçons écrites pour les auteurs.

Dico math semble proposer un grand nombre de leçons. Les titres des leçons ne font aucune référence aux situations introductives alors que les situations du manuel ont toutes un nom.

Par exemple il existe une situation appelée le « jeu de la puce »[5]. Cette situation permet d'aborder la notion de multiple. Dico math ne propose pas de définition de ce mot, ni un quelconque paragraphe sur la divisibilité. Les auteurs du manuel ont donc effectué des choix sur ce qu'il y a d'exigible ou non en classe de CM1[6].

L'entrée dans le livret peut se faire grâce à un index des notions à acquérir qui renvoie au paragraphe correspondant. Aucun des autres recueils que nous allons étudier ne propose cette entrée. L'entrée de ce

[4] D'après Cap math cm1, guide du maître, pp25 et 26

[5] Cap math cm1, manuel p67

[6] La définition du mot « multiple » est renvoyée dans le Dico math cm2 p24. Pour les auteurs c'est un savoir exigible en cm2.

fascicule se fait par le savoir et non par la chronologie (succession des situations de recherche dans le temps).

Les titres du Dico math sont structurés de la même manière pour les domaines « Nombres » et « Calcul » : ils commencent tous par « pour ». Dans le domaine numérique, tous les paragraphes commencent comme « pour comparer des fractions » ou « pour calculer un quotient tu peux utiliser le calcul réfléchi ». Les titres commençant par « pour » indiquent un type de tâche suivi d'une technique possible pour la résoudre. Pour la géométrie et les mesures, les entrées des titres sont différentes. Elles se font par les notions mathématiques (les durées, le cercle) et quelquefois par les types de tâches.

2 Les recueils des trois enseignantes.

2.1 Recueil de leçons de Solange.

Nous avons réorganisé le recueil de Solange afin de faire apparaitre le nombre de leçons dans chaque domaine. Nous obtenons les résultats suivants : développer des stratégies de recherche (3 leçons), géométrie (1 leçon), proportionnalité (2 leçons), mesures, fractions et décimaux (2 leçons sur les fractions), technique opératoire (2 leçons), multiplicatif (2 leçons), multiplication (1 leçon). Très peu de leçons (13) semblent figurer dans le cahier. Des domaines comme la géométrie ne font quasiment pas l'objet d'institutionnalisation écrite.

Ce qui semble guider en priorité les découpages de Solange est son support de travail : l'ouvrage ERMEL qui propose exclusivement des apprentissages numériques. Le faible nombre de leçons donne plus d'importance à celles qui sont présentes : on peut supposer que figurent les leçons incontournables d'après cette enseignante.

Pour cette professeure, les savoirs ne sont pas de même nature et la géométrie serait du « savoir faire » (tourné vers des techniques) ne nécessitant pas d'écrits.

L'apparent manque d'investissement en géométrie et en mesure montre en fait une conception très personnelle et utilitaire de ce domaine mathématique. Ces remarques montrent l'importance du rapport personnel aux mathématiques lors du choix ou non de la rédaction d'une leçon. Ce rapport semble différent selon les mathématiques en jeu, comme le souligne Bernard Blochs (2009b p.85), « *le cahier de leçons donne à voir des éléments des conceptions des maîtres sur les apprentissages* ».

2.2 Recueil de leçons de Solenn.

Quinze leçons ont été écrites dans cette classe de CM1. Les leçons de Solenn sont écrites sur des grandes feuilles de classeur. Nous avons réorganisé le recueil afin de faire apparaitre le nombre de leçons dans chaque domaine, nous obtenons les résultats suivants : 5 en numération, 4 en géométrie, 5 en mesures et 1 en technique opératoire.

Nous notons que, tout comme Solange, une partie des mathématiques à enseigner n'a aucune visibilité dans le recueil de leçons. Solenn nous confiera qu'elle ne sait pas du tout quoi écrire dans la partie gestion de données. Pour la partie technique opératoire, elle pense que « *c'est à force d'en faire qu'on acquiert la technique. De plus en CE2, les élèves ont été particulièrement bien entrainés.* ». Elle rajoute « *qu'ils maîtrisent suffisamment pour gagner du temps là dessus* ». Elle proposera pourtant une courte trace écrite sur la division car cette nouvelle opération est enseignée dans sa classe. Cette nouvelle technique propre à la classe a donc un statut différent des autres techniques. Solenn semble aussi porteuse d'une partie de la mémoire des classes antérieures.

Dans cette déclaration nous pouvons constater que l'écriture d'une leçon est pilotée par les conceptions de l'enseignante sur les techniques opératoires (algorithme à acquérir par l'entrainement) et par ce qu'elle sait des compétences antérieures de ses élèves (et des habitudes de la collègue).

Elle semble aussi dire par là que, pour elle, l'institutionnalisation ne passe pas toujours par un écrit de référence, mais par des exercices répétés.

2.3 Recueil de leçons de Danièle.

Danièle utilise les ouvrages ERMEL et Cap math. Elle travaille à mi-temps et a produit 20 leçons. 6 leçons supplémentaires apparaissent dans son recueil mais elles ont été rédigées par l'enseignante complétant son mi-temps. Danièle n'a pas pris en charge la géométrie et la mesure. Il y a 7 leçons qui ont été écrites à partir de situations proposées par ERMEL, les 13 autres leçons[7] sont écrites après des activités du Cap math ou une synthèse des activités[8]. Danièle nous a expliqué avoir utilisé exclusivement ERMEL dans ses années antérieures d'enseignement, elle a donc continué de proposer des situations qui ont bien fonctionné les années passées (avant l'apparition du manuel Cap math). Danièle souhaite donc continuer de proposer des séances qu'elle a déjà éprouvées. Les expériences réussies de la professeure la guident pour organiser son travail.

2.4 Constats sur les choix des leçons des quatre recueils

Le nombre de leçons est différent :

- 13 leçons pour Solange,
- 14 pour Solenn,
- 20 pour Danièle (elle travaille à mi temps),
- 50 pour Dico Math.

Nous pouvons alors penser que pour Danièle et Dico Math les traces écrites ont un rôle plus important à jouer dans le processus d'institutionnalisation que pour les deux autres enseignantes.

De plus, pour certains domaines nous ne trouvons pas de traces écrites, Solange et Solenn mettent en avant que ce sont des parties des mathématiques où il s'agit de manipuler (manipulation d'instruments ou réalisation d'algorithmes opératoires). Pour Solange, ces manipulations s'appliquent à la géométrie et à la mesure, pour Solenn cela s'applique aux techniques opératoires et à la gestion des données. Solenn avoue n'avoir aucune idée de ce qu'elle pourrait faire comme leçon dans le domaine « gestion de données ». Les quatre recueils proposent moins de traces écrites correspondant à des techniques et cela pour des raisons différentes (les techniques s'apprennent par la répétition ou pour des conceptions personnelles sur un domaine –en géométrie, il y a peu de savoirs et beaucoup de savoir faire).

Certains domaines sont privilégiés par rapport à d'autres en fonction du rapport à ce domaine qu'entretient le professeur d'école.

Alors que les enseignants s'appuient sur les mêmes ressources, l'étude des recueils de leçons, en particulier déjà des sommaires reconstitués et des titres des leçons, nous semble montrer que les itinéraires cognitifs proposés aux élèves seront différents d'une classe à une autre. Nous émettons l'hypothèse qu'en particulier les composantes personnelles[9] et cognitives du maître (rapport aux mathématiques) ont un rôle essentiel dans le processus d'institutionnalisation. Nous émettons aussi l'hypothèse que certaines traces doivent être écrites en fonction des interventions ou non des élèves en classe mais nous n'en n'avons pas fait la preuve.

---

[7] Voir annexe 12 pour faire les liens entre la situation et l'ouvrage de référence, p 117

[8] Pour chacun des titres de ses leçons nous avons lui avons demandé quel avait été son support principal.

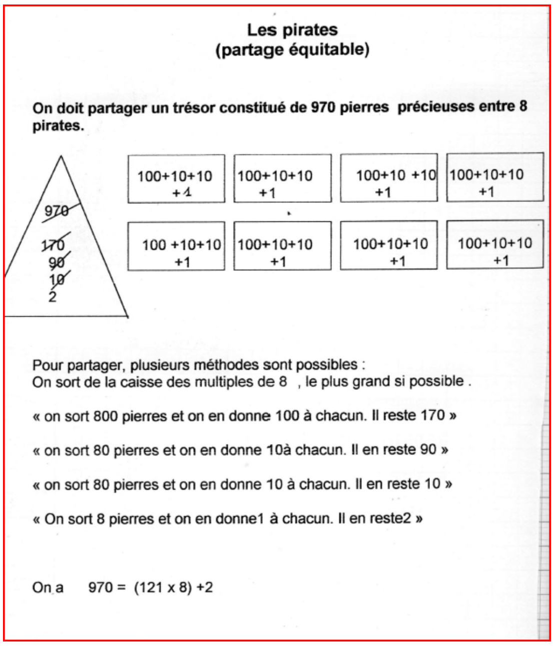
[9] Cf. Aline Robert (2008)

III - ÉTUDE DES LEÇONS VISANT UNE TECHNIQUE OPÉRATOIRE DE CALCUL DU QUOTIENT DANS UN PARTAGE ÉQUITABLE

1 Les leçons du recueil de Danièle

Danièle a consacré une séance à la première phase de la situation du partage des pirates extraite de ERMEL CM1, puis elle fera une autre situation de partage s'appuyant sur un autre ostensif de résolution « la feuille de partage ». Enfin, la technique usuelle de la division sera montrée.

1.1 Leçon visant une technique provisoire du calcul du quotient dans un partage équitable (Danièle)[10]



Les pirates
(partage équitable)

On doit partager un trésor constitué de 970 pierres précieuses entre 8 pirates.

~~970~~
~~170~~
~~90~~
~~10~~
2

100+10+10 +1	100+10+10 +1	100+10 +10 +1	100+10+10 +1
100 +10+10 +1	100+10+10 +1	100+10+10 +1	100+10+10 +1

Pour partager, plusieurs méthodes sont possibles :
On sort de la caisse des multiples de 8 , le plus grand si possible .

« on sort 800 pierres et on en donne 100 à chacun. Il reste 170 »

« on sort 80 pierres et on en donne 10à chacun. Il en reste 90 »

« on sort 80 pierres et on en donne 10 à chacun. Il en reste 10 »

« On sort 8 pierres et on en donne1 à chacun. Il en reste2 »

On a 970 = (121 x 8) +2

Dans le texte de la leçon, Danièle annonce qu'il existe plusieurs méthodes possibles pour partager. Mais elle institutionnalise une seule technique : soustraire autant de fois que possible 100 fois le diviseur (ici une seule fois), puis soustraire du reste autant de fois que possible dix fois le diviseur (ici deux fois), puis soustraire du reste autant de fois que possible le diviseur (ici une fois), mais le détail des étapes n'est pas explicité. Les liens entre le texte qui présente les multiples de B à retirer et le résultat : $970 = (121 \times 8) + 2$ ne sont pas expliqués.

Enfin, l'écriture arithmétique proposée par ERMEL est présentée sans dire qu'il s'agit d'une façon de vérifier le résultat. Tout comme dans l'ouvrage les mots quotient, diviseur, dividende, et reste ne sont pas donnés.

Cette leçon consacrée à une seule tâche ne propose que des éléments partiels de techniques, bien qu'elle donne quelques éléments de technologie (les multiples). Cette leçon est contextualisée (rappel de l'énoncé de la situation, utilisation des ostensifs de résolution). L'énoncé est construit autour d'un exemple dont la règle générale n'est pas formulée (degré 2). C'est une leçon donnant un statut particulier à une technique provisoire.

1.2 Leçon visant la technique usuelle de la division

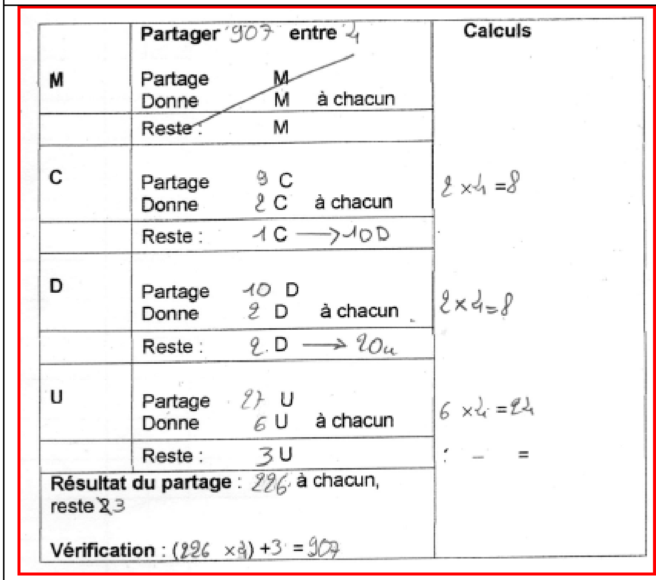
Danièle, à la suite d'une situation avec un matériel qui incite à partager successivement les groupes de 1000, puis les groupes de 100 poursuit les apprentissages liés à la division

[10] La description de cette situation est détaillée en annexe 1.

Le titre « calcul posé pour diviser » met en relation un type de tâche (diviser) et une technique (le calcul posé). Nous voyons d'abord à gauche la feuille de partage complétée par un exemple, suivie d'une photocopie du Dico math CM1 (p 15). Le titre du paragraphe du Dico math est : « le calcul posé pour diviser, un chiffre au dividende », ce titre contient une erreur corrigée par Danièle (un chiffre au diviseur).

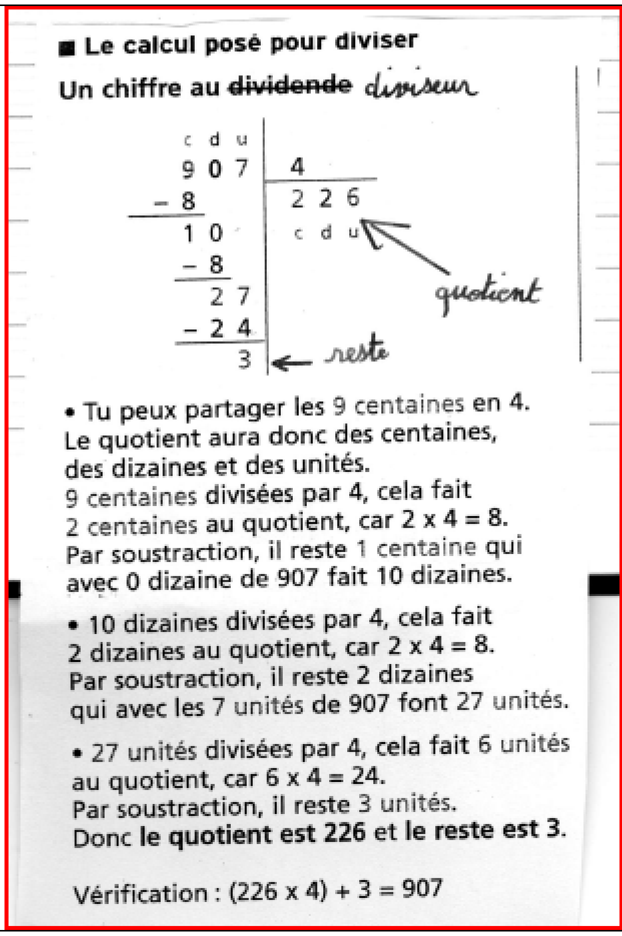
Elle rajoutera aussi le discours associé du Dico math pour expliquer les phases de l'algorithme et également le vocabulaire lié : quotient, diviseur, dividende, reste.

<table>
<tr><td>Feuilles de Partage</td><td>Photocopie du Dico math collée en face de la feuille de partage.</td></tr>
<tr><td>



	Partager 907 entre 4	Calculs
M	Partage M Donne M à chacun	
	Reste : M	
C	Partage 9 C Donne 2 C à chacun	2 × 4 = 8
	Reste : 1 C → 10 D	
D	Partage 10 D Donne 2 D à chacun	2 × 4 = 8
	Reste : 2 D → 20 u	
U	Partage 27 U Donne 6 U à chacun	6 × 4 = 24
	Reste : 3 U	× =
Résultat du partage : 226 à chacun, reste 3		
Vérification : (226 × 4) + 3 = 907		

</td><td>



Le calcul posé pour diviser

Un chiffre au ~~dividende~~ diviseur

$$\begin{array}{r|l} \overset{c\,d\,u}{9\,0\,7} & 4 \\ -\,8 & \overline{2\,2\,6} \\ 1\,0 & c\,d\,u \\ -\,8 & \\ 2\,7 & \\ -\,2\,4 & \\ 3 & \end{array}$$

quotient

reste

- Tu peux partager les 9 centaines en 4. Le quotient aura donc des centaines, des dizaines et des unités. 9 centaines divisées par 4, cela fait 2 centaines au quotient, car 2 x 4 = 8. Par soustraction, il reste 1 centaine qui avec 0 dizaine de 907 fait 10 dizaines.
- 10 dizaines divisées par 4, cela fait 2 dizaines au quotient, car 2 x 4 = 8. Par soustraction, il reste 2 dizaines qui avec les 7 unités de 907 font 27 unités.
- 27 unités divisées par 4, cela fait 6 unités au quotient, car 6 x 4 = 24. Par soustraction, il reste 3 unités. Donc **le quotient est 226** et **le reste est 3.**

Vérification : (226 x 4) + 3 = 907

</td></tr>
</table>

Cette leçon qui amène à la technique opératoire de la division, propose :

- pour le type de tâche « diviser un nombre à trois chiffres par un nombre à un chiffre » : une technique, des éléments de technologie et de savoirs,
- les étapes des partages successifs s'appuyant sur les unités de numération (milliers, des centaines…) telles qu'utilisées dans la résolution de 907 par 4,
- une disposition en algorithme traditionnel avec soustraction intermédiaire des dividendes partiels de 907 par 4 avec trace écrite d'un possible commentaire oral.

Ces leçons proposent une leçon contextualisée (le partage des trésors), une leçon utilisant une technique provisoire de la division (contextualisée par le titre « feuille de partage ») et la technique usuelle. Nous supposons que cet accompagnement écrit des liens entre les situations et les savoirs en jeu est un travail du professeur pour aider les élèves dans le processus d'institutionnalisation.

2 La leçon du Dico math[11] .

Dans la partie Calcul p 15, nous pouvons lire une leçon intitulée : « pour calculer un quotient ». Le type de tâche est donc annoncé suivi d'une annonce de techniques : « tu peux utiliser le calcul réfléchi ou le calcul posé ».

Nous ne détaillerons que la partie de la division à un chiffre, la division à deux chiffres est traitée de manière équivalente.

D'entrée de jeu, une division est posée de façon traditionnelle. Chaque chiffre possède une couleur correspondant à son rang (les centaines sont oranges, les dizaines mauves et les unités vertes). Les unités de numération apparaissent au-dessus des nombres dans la partie dividende et quotient.

La technique est expliquée en trois points et est décrite en langue naturelle « tu peux partager les 9 centaines en 4. Le quotient aura donc des centaines, des dizaines et des unités…. » .

Les trois points reprennent les différentes étapes de l'algorithme :

- établir le nombre de chiffres du quotient,
- établir puis convertir le reste partiel dans l'unité d'ordre inférieur,
- établir la valeur du quotient et du reste.

La leçon se termine par l'écriture arithmétique de la division : vérifier son calcul grâce à l'égalité $A = B \times Q + R$ avec $R < B$.

Cette leçon est fortement décontextualisée, elle s'accompagne d'un discours écrit que nous supposons être une retranscription orale donnée pour expliquer cette technique.

La valeur des chiffres dans un nombre joue un rôle incontestable dans cette technique.

Les types de tâches, techniques et des éléments de technologies sont donnés. L'OM proposée est centrée sur le bloc praxis avec des éléments de technologie.

3 La leçon du recueil de Solange

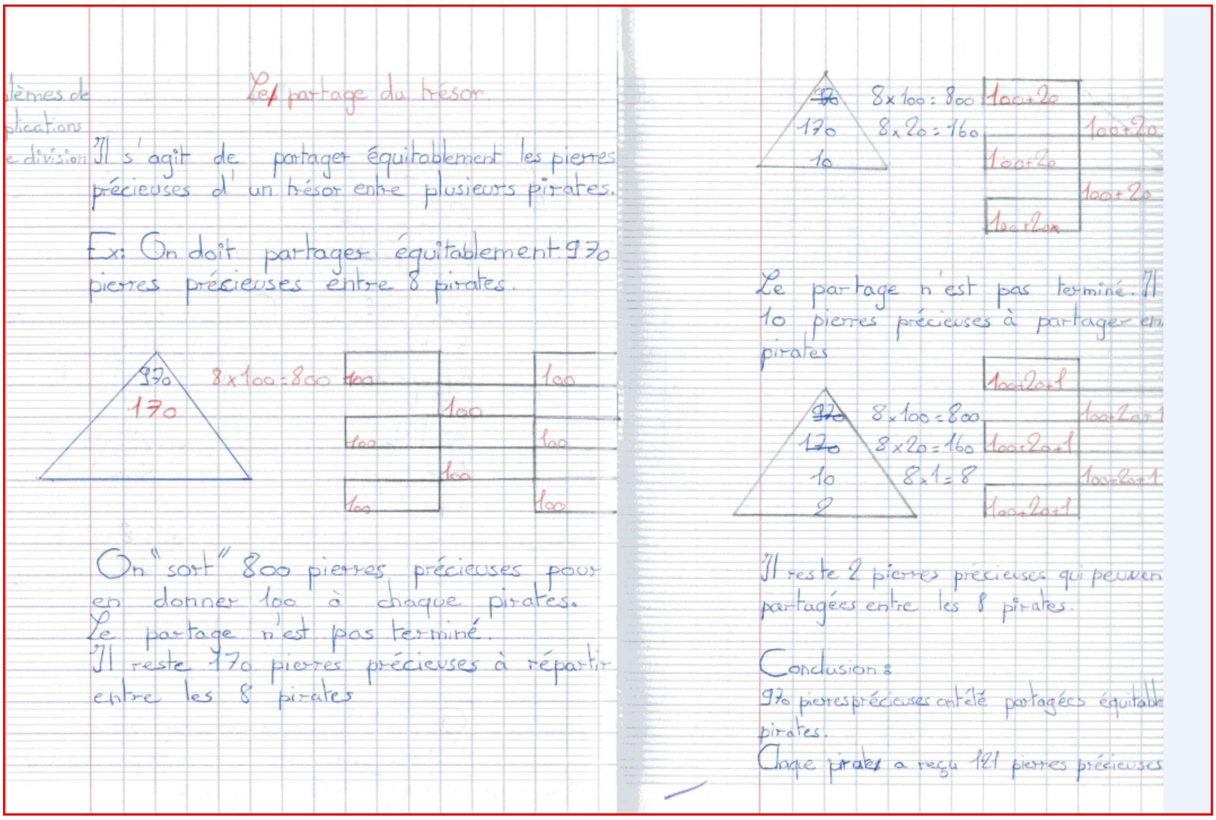
Solange a consacré une séance à la première phase de la situation du partage des pirates. Elle en tire la 1ère leçon ci-dessous. Puis, elle consacrera une autre séance à montrer les liens entre la technique provisoire et la technique usuelle.

3.1 La leçon visant une technique provisoire du calcul du quotient dans un partage équitable

Cette leçon est fortement contextualisée (rappel de la situation, l'exemple induit une méthode de résolution sans montrer de règle plus générale).

Cette leçon consacrée à une seule tâche propose des éléments partiels de techniques, elle cherche à montrer la chronologie de la technique, davantage explicitée (uniquement chez Danièle).

[11] Photocopiée dans les leçons de Danièle (voir paragraphe 1.2)


Le partage du trésor

Il s'agit de partager équitablement les pierres précieuses d'un trésor entre plusieurs pirates.

Ex: On doit partager équitablement 970 pierres précieuses entre 8 pirates.

970
170
8 x 100 = 800
100 100 100 100 100 100 100 100

On "sort" 800 pierres précieuses pour en donner 100 à chaque pirates.
Le partage n'est pas terminé.
Il reste 170 pierres précieuses à répartir entre les 8 pirates

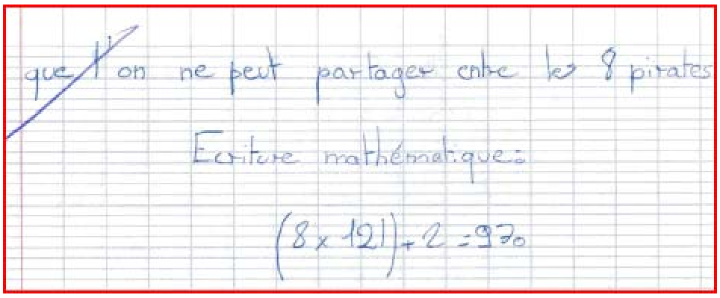
970
170
10
8 x 100 = 800
8 x 20 = 160
100+20 100+20 100+20 100+20 100+20

Le partage n'est pas terminé. Il reste 10 pierres précieuses à partager en pirates

970
170
10
2
8 x 100 = 800
8 x 20 = 160
8 x 1 = 8
100+20+1 100+20+1 100+20+1 100+20+1 100+20+1 100+20+1

Il reste 2 pierres précieuses qui peuvent partagées entre les 8 pirates.

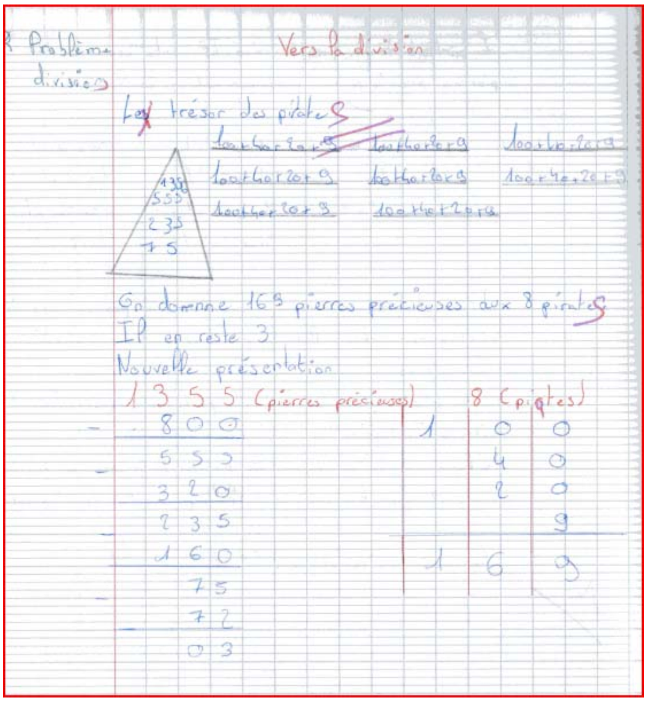
Conclusion :
970 pierres précieuses ont été partagées équitable pirates.
Chaque pirates a reçu 121 pierres précieuses


que l'on ne peut partager entre les 8 pirates

Ecriture mathématique :

(8 x 121) + 2 = 970

3.2 Leçon du recueil de Solange visant la technique usuelle de la division


Vers la division

Le trésor des pirates

On donne 169 pierres précieuses aux 8 pirates
Il en reste 3
Nouvelle présentation

1 3 5 5 (pierres précieuses)	8 (pirates)
− 8 0 0	1 0 0
5 5 5	4 0
− 3 2 0	2 0
2 3 5	9
− 1 6 0	1 6 9
7 5	
− 7 2	
0 3	

Solange reprend la résolution du problème des pirates, ainsi elle présente le changement de représentation du calcul de la réponse. Elle montre une représentation plus conventionnelle : soustractions partielles à gauche et quotients partiels à droite.

Nous remarquons que Solange reprend la proposition de trace d'ERMEL.

L'OM est centrée sur le bloc praxis. La technique est présentée sans aucun commentaire la justifiant ou l'expliquant. Solange essaie de négocier le passage de la technique provisoire et contextualisée (pyramide et rectangles) avec une technique plus usuelle. Cette négociation se fait par ostension dans le cahier.

4 Leçon du recueil de Solenn[12] :

La leçon de Solenn est fortement contextualisée. Elle montre une feuille de partage complétée par un exemple. L'OM de cette leçon est centrée sur le bloc praxis. L'énoncé de la leçon est un exemple. L'ostension de cette technique est l'unique moyen de formulation, aucun autre discours n'accompagne cette « feuille de partage ».

Le lien entre feuille de partage et division posée n'est pas réalisé. Ce lien est renvoyé à l'année suivante, en CM2.

Partager

Pour partager 4 754 entre 3, on peut utiliser **une feuille de partage**

M C D U
4 7 5 4

Partager : 4 754 entre 3	Calculs
M Partage **4** M Donne 1 M à chacun	1 x 3 = 3
Reste : 1 M (1 M = 10 C)	
C Partage 17 C (10 C + **7** C) Donne 5 C à chacun	5 x 3 = 15
Reste : 2 C (2 C = 20 D)	
D Partage 25 D (20 + **5** D) Donne 8 D à chacun	8 x 3 = 24
Reste : 1 D (1 D = 10 U)	
U Partage 14 U (10 U + **4** U) Donne 4 U à chacun	4 x 3 = 12
Reste : 2 U	
Résultat du partage : 1 584, reste 2 Vérification : 4 754 = (1 584 x 3) + 2	

Vérifier le résultat du partage en effectuant la multiplication et en ajoutant ensuite le reste.

12 Cf. Annexe 2 p17-18

IV - CONSTATS SUR LES QUATRE LEÇONS VISANT LA CONSTRUCTION D'UNE TECHNIQUE OPÉRATOIRE

Pour mettre en place une nouvelle technique opératoire, les enseignantes ne font pas les mêmes choix. Danièle, Solange et Dico Math présentent la technique usuelle après avoir travaillé sur une technique provisoire alors que Solenn s'arrête sur une technique provisoire (très proche de la technique usuelle dans son algorithme, mais pas dans sa présentation). Nous avons interrogé Solenn pour lui demander des précisions sur son choix (présentation d'une technique provisoire). Elle nous explique qu'elle a présenté très tardivement la situation des feuilles de partages (période avril-mai), elle pense que ses élèves doivent d'abord s'appuyer et s'entraîner sur cette technique provisoire avant d'institutionnaliser une nouvelle technique. Cela nous laisse entendre que Solenn installe ces notions dans de longs moments de réinvestissement (entrainement) avant de passer à une nouvelle notion (ici technique). Ce qui correspond à ses déclarations sur l'apprentissage des techniques (pour elle, les apprentissages d'une technique opératoire se font grâce à la répétition).

Puis, nous noterons la reprise systématique des ostensifs graphiques proposés par l'ouvrage de référence pour installer une technique provisoire de la division pour Solange et Danièle. Ces deux techniques provisoires (partager dans des supports géométriques –triangles et rectangles- ou partager en utilisant une feuille dite de partage) font l'objet d'une leçon. Ces leçons donnent un statut officiel à un enseignement provisoire, ce qui laisse supposer que ces écrits provisoires ont un enjeu dans l'apprentissage de la technique usuelle. Cependant nous ne pouvons pas déterminer avec précision lequel.

Les leçons de Danièle et Solange s'inscrivent souvent dans un contexte. Danièle propose des énoncés contextualisés vers des énoncés décontextualisés. Cela peut témoigner de la volonté de créer du lien entre le savoir « officiel » et les situations vécues dans la classe. Ces situations ne sont pas des objets d'enseignement mais importent pour l'apprentissage. Danièle semble s'appuyer sur cette mémoire didactique pour « illustrer » les savoirs qui en sont issus.

Les recueils de Solenn et Dico math ne portent pas cette mémoire didactique (sauf pour la leçon sur les feuilles de partage), cela montre une autre conception du rôle des leçons. Les leçons du Dico math montrent le savoir en jeu à l'issue de plusieurs séances sur une ou plusieurs situations. Les écrits intermédiaires (à l'issue de chaque situation) n'existent pas. Le guide du maître du Cap math propose de faire des écrits intermédiaires mais il ne donne que peu d'indications sur leur contenu puisqu'il s'agit souvent de recueillir les savoirs temporaires des élèves.

Sur des leçons traitant d'une technique, l'ostension est un moyen de formulation pour Solenn et Solange. Danièle utilise ce moyen d'expression pour une technique provisoire alors qu'elle choisit de formuler un énoncé plus général pour la technique usuelle de la division (texte photocopié du Dico math).

On notera les réticences de Solange pour utiliser du vocabulaire mathématique. Cette enseignante ne souhaite pas trop s'éloigner des savoirs intermédiaires des élèves, un énoncé plus formel produirait pour elle une institutionnalisation trop éloignée du savoir de ses élèves.

Bien que ces trois enseignantes utilisent les mêmes supports, les itinéraires cognitifs sont différents. Les degrés de décontextualisation et de dépersonnalisation ne sont pas les mêmes alors que les ressources utilisées sont les mêmes. Les OM sont toutes organisées autour du bloc praxis avec ou sans éléments de technologies. C'est bien la présence de ces éléments de technologies qui semblent produire un énoncé plus ou moins formel.

V - CONCLUSION

L'utilisation des deux cadres théoriques, TAD et TSD et des degrés de conceptualisation de Butlen et Pézard nous ont permis d'établir certains résultats que nous allons rappeler. Notre étude portait sur les recueils de leçons de trois professeures et d'un recueil proposé par les auteurs de Cap Math. Les trois recueils provenaient de classes comportant de nombreux points communs : ressource identique, même niveau de classe, même ancienneté des professeurs, même environnement socio-culturel. Le Dico math, ressource éditoriale, correspondait au même niveau de classe (CM1)

Sur l'étude des sommaires reconstitués et des titres :

Les recueils des professeures donnent à voir *a priori* les savoirs exigibles en classe. Les leçons étudiées faisaient une ou deux pages du recueil. Dico math propose plus de leçons (de quelques lignes par paragraphe à une page), chacun de ses paragraphes a un titre et correspond à ce que nous avons appelé une leçon. Pour deux professeures au moins, le nombre de leçons dans une année parait assez faible. Nous comptons de 13 leçons pour une professeure à 50 pour Dico math. Bien que nous sachions que les leçons écrites ne représentent pas la totalité des mathématiques effectuées en classe (pas de regard sur les exercices, les évaluations), nous nous interrogeons sur ce qui est exigible d'une classe à une autre. Compte tenu du peu de leçons de certains recueils, nous pensons qu'ils ne montrent qu'une partie du savoir exigible. Le recueil de leçons n'est pas le seul « média » qui participe au processus d'institutionnalisation. Cependant, une classe ne peut fonctionner sans mémoire. Nous supposons alors que la mémoire de la classe est détenue par les professeurs. Cette hypothèse devient plus présente lorsqu'on étudie le recueil du manuel Capmath : le Dico math. Le Dico math montre l'ensemble du savoir exigible en classe de CM1 conformément à l'utilisation de Cap math. Bien qu'il y ait des auteurs pour écrire ce recueil, ils ne sont pas présents en classe, cette contrainte pousse à produire des écrits totalement dépersonnalisés et plus nombreux. Les auteurs n'ont pas la mémoire de la classe, et ne peuvent pas effectuer des choix entre ce qui apparait exigible ou non, contrairement aux professeures.

Les titres proposés par les professeurs évoquent parfois le titre de la situation en jeu. Les titres des leçons montrent un degré de décontextualisation très différent : complètement décontextualisé quand il annonce un savoir ou un type de tâche, contextualisé lorsqu'il évoque une situation. L'existence de ces titres de « situations-leçons » montrent que ces situations pour les professeurs sont fondamentales dans le parcours qu'ils vont proposer à leurs élèves. Ces « situations-leçons » importent pour la suite des apprentissages et doivent être retrouvées facilement.

Sur l'étude des praxéologies des leçons :

Nous avons étudié pour chaque professeur quelques leçons : une à deux leçons visant la technique opératoire de la division (mêmes situations introductives). Les leçons des recueils des professeurs proposent des praxéologies (OM) organisées autour du bloc praxis (savoir faire). Ces praxéologies seraient qualifiées d'incomplètes par Chevallard (1997) qui déclare « *la présomption du savoir suppose davantage : elle implique que la technique utilisée ne soit pas une pure recette, mais apparaisse comme découlant d'une certaine technologie c'est-à-dire un discours raisonné, d'un logos qui rende intelligible et justifie la technique mise en jeu* ». Des éléments de technologies apparaissent parfois (plus souvent pour le Dico Math et Danièle) mais pas de manière systématique. Des formulations par ostension apparaissent souvent (voir « feuilles de partage » pour Solenn, « nouvelle disposition de la division » pour Solange)

Dico math propose plus de leçons et est plus structuré mais les contraintes éditoriales ne sont pas de même nature que les contraintes de la classe. Les énoncés du Dico math sont totalement dépersonnalisés, les énoncés sont décontextualisés, ses institutionnalisations ne peuvent se faire qu'à l'écrit. Brousseau (1991) remarque : « *l'absence de possibilités de recours à la mémoire oblige l'enseignant à articuler explicitement les apprentissages (surtout ceux qui portent sur des objectifs à moyen terme), et à le faire sur le mode de la raison.* » Dico math correspond à un recueil de leçons d'une classe sans mémoire.

En revanche, un professeur peut évoquer en classe des situations, faire des phases de rappel. Deux au moins de nos professeurs (Solange et Danièle) s'appuient sur la mémoire didactique de la classe.

Sur les énoncés des leçons.

Les énoncés des leçons sont complètement décontextualisés et dépersonnalisés pour « Dico Math » et dans une moindre mesure pour Solenn. Danièle et Solange proposent des énoncés contextualisés. Danièle, seule, propose aussi des énoncés décontextualisés à côté d'énoncés contextualisés. Bien que ceux-ci soient écrits par les professeurs et non par les élèves, nous pouvons utiliser une partie des travaux de Butlen et Pézard (2003) qui décrit les différents types d'énoncés. Les énoncés produits par les professeurs se rapprochent de ceux produits par les élèves de sixième. Il serait intéressant de les étudier en reprenant les instruments décrits dans leur recherche. Les leçons que nous avons étudiées ne proposent pas d'énoncé formel (degré 1 de décontextualisation) mais plutôt de degré 2 (énoncé formulé à partir d'un exemple) et de degré 3 (exemple seul sans énoncé de règle généralisant). Cela nous interroge ; nous ne pensons pas que ce soit le résultat d'une mauvaise connaissance des mathématiques qui est en jeu. Nous pensons aussi que la nature des mathématiques enseignées en primaire (mathématiques ancrées dans une réalité) rend la production d'énoncés formels plus difficile pour les professeurs d'école. L'utilisation de la langue naturelle est le seul moyen de formulation, quelquefois ces formulations sont coûteuses (voir la technique de la division Dico math et Danièle), et c'est alors plus simple de proposer un exemple.

Ce qui a attiré également notre attention, c'est l'existence d'énoncés très contextualisés, ces énoncés prennent en compte la difficulté de la gestion de la mémoire (Brousseau et Centeno, 1991) : les élèves se souviendront peut être plus facilement du jeu des pirates que d'un énoncé parlant de situation de partage. De plus, les professeurs qui s'appuient sur la mémoire de la classe semblent avoir le désir inconscient ou non d'aider les élèves dans la construction du savoir grâce à l'écriture de savoir intermédiaire (technique provisoire de la division).

VI - BIBLIOGRAPHIE

BLOCHS B. (2009a). *La place du cahier de cours dans les apprentissages mathématiques en classe de 4ème. Pratiques et conceptions des professeurs et des élèves.* Thèse, université Diderot 7.

BLOCHS B. (2009b). Le cahier de leçons de mathématiques au cycle 3 : une approche instrumentale. *Grand N*, 84, 77-87, IREM de Grenoble.

BROUSSEAU G. et CENTENO J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 11/2.3, 167-210, Grenoble : La pensée sauvage.

BUTLEN D. et PÉZARD M (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 23/1, 41-78, Grenoble : La pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1997) Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission : un point de vue didactique. *Skholê*, 7, 45-64, IUFM d'Aix-Marseille.

PERRIN-GLORIAN MJ. (1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles, *Recherches en didactique des mathématiques*, 13/1.2, 5-118, Grenoble : La pensée sauvage.

ROBERT A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en didactiques des mathématiques*, 21/1.2, 57-80, Grenoble : La pensée sauvage.

ROBERT A. (2008) Problématique et méthodologie commune aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques, in Vandebrouck F. Ed (2008) *La classe de mathématiques : activités d'élèves, pratiques des enseignants,* 31-59, Toulouse : Octarès

VII - ANNEXE 1

Présentation de la situation « le partage des pirates » dans ERMEL.

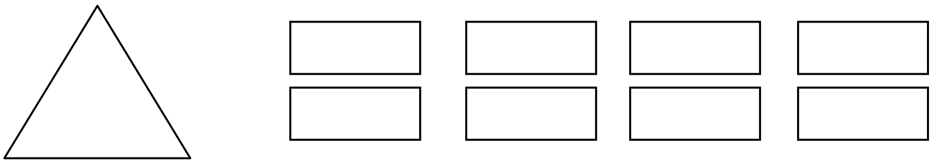
Première phase :

Le problème en jeu est : partager équitablement 970 (A) pierres précieuses entre 8 (B) pirates.

La tâche consiste à la détermination du quotient de A par B.

Pour cette tâche T : déterminer le quotient dans un partage équitable, l'ouvrage ERMEL propose trois techniques : E1 (déterminer le quotient par soustractions successives), E2 (utiliser dans une division par B, le rôle des multiples 10×B, 100×B pour structurer le quotient), E3 (obtenir le dividende comme somme de multiples de B, moyennant un reste).

Pour représenter la situation, l'ouvrage propose ce schéma :



Présentation de la séance sur l'algorithme de la division ERMEL CM1

Lors de la première phase : ERMEL propose de reprendre la situation en s'appuyant sur les ostensifs dessinés (triangle et les rectangles) puis de proposer la situation standard : la potence. Aucun discours ne vient étayer cette disposition dite standard. Dans la case quotient, nous pouvons voir une somme de quotients résultats des différents partages effectués, dans la partie du dividende nous voyons plusieurs différences. Le dernier nombre de cette colonne « 3 » correspond au reste, la somme des quotients partiels « 169 » correspond au quotient.

La seule indication que nous ayons est une recommandation : on ne dessine plus le trésor, la part de chacun. Cela semble suffire pour comprendre le passage d'un ostensif à un autre.

La deuxième et la troisième phase sont axées sur l'optimisation des résultats.

Lors de la deuxième phase : ERMEL propose une disposition ressemblant à la disposition standard (potence).

VIII - ANNEXE 2

Présentation de la séance sur l'algorithme de la division euclidienne : « Les feuilles de partage » (ERMEL CM2 p162) :

Éléments du déroulement

La première phase de cette situation consiste à partager équitablement une somme d'argent représentée sous forme structurée (4122 sous la forme 4M, 1C, 2D, 2U) entre 3 personnes. Lors de cette phase manipulatoire, les élèves travaillent en groupe, les échanges (transformer un billet de 100 en 10 billets de 10) ne sont pas autorisés, et il s'agit d'effectuer le moins de manipulations possibles. Cette contrainte vise à limiter les échanges aux unités d'ordre immédiatement inférieur : 1M c'est 10C (et non 1M=100D ou 1M=1000u). Lors du bilan, le scénario le plus économique est mis en évidence : il faut traiter dans l'ordre décroissant les unités de numération (M, C, D, U) et faire de la monnaie dans l'ordre d'unité qui suit (convertir les centaines restantes en dizaines). Cette technique provisoire suit le même algorithme que celui de la technique usuelle, c'est l'ostensif de résolution qui est différent (potence pour la technique usuel et feuille de partage pour cette technique)

Pour le type de tâche : partager un nombre entier par un nombre entier, apparaît les techniques suivantes :

- Partager en 3 le « chiffre » du rang le plus grand dans le nombre (« *Trouver combien de fois 3 dans 4 unités de mille* »)
- Conserver le reste
- Transformer ce reste dans le rang inférieur.
- Recommencer jusqu'à ce que le reste soit plus petit que le diviseur.(choisir toujours le multiple le plus proche possible de l'unité à partager)

Une fois le bilan effectué, une nouvelle phase de jeu est proposée sans le matériel.

La deuxième phase reprend la phase 1 en contraignant les partages à partir du rang supérieur. Pour noter les calculs et échanges intermédiaires, le professeur fait noter sur la feuille ci-dessous les résultats partiels. La feuille est proposée pour un nombre à partager de 4 chiffres par un nombre à un chiffre dans un premier temps.

Cette feuille est appelée feuille de partage. Elle permet d'organiser les résultats partiels. Elle est construite autour de deux grandes colonnes principales. La colonne de gauche permet d'organiser les résultats et celle de droite d'effectuer les calculs intermédiaires.

La colonne de gauche est divisée en lignes. Chaque ligne est construite de manière équivalente autour des trois mots « partage, donne, reste ». Dans la case partage, l'élève inscrit le chiffre de rang supérieur à partager. Dans donne, il inscrit le multiplicande et dans reste le résultat d'un calcul du type Reste M = Partage M - (Donne M × diviseur) : calcul effectué pour le chiffre des milliers. On continuera cet algorithme en convertissant le Reste des milliers en unité d'ordre inférieur « centaine » qu'on rajoutera au partage des centaines.

Partager : __________ entre _____	
Partage ___ M	**Calculs**
Donne ___ M à chacun	
Reste : ___ M	
Partage ___ C	
Donne ___ C à chacun	
Reste : ___ C	
Partage ___ D	
Donne ___ D à chacun	
Reste : ___ D	
Partage ___ U	
Donne ___ U à chacun	
Reste : ___ U	
Résultat du partage :	
Vérification :	

« Partage____ M » on écrit le chiffre des milliers du dividende.

« Donne…..M à chacun » correspond au chiffre des milliers du quotient obtenu en cherchant le multiple le plus proche du dividende (inférieur ou égal à ce dernier)

Reste…M correspond au reste des milliers

Reste M = partage M - (donne M × diviseur).

Le reste des milliers devra ensuite être converti dans l'unité d'ordre inférieur : « en centaine ». Puis on additionne le reste converti en centaine avec le chiffre du Partage en centaines.

Nous pouvons détailler l'OM de cette situation ainsi :

Tâche T1 : partager un nombre à 4 chiffres par un nombre à un chiffre.

Technique associée D :

D1 : approcher le chiffre de rang supérieur par un multiple du diviseur. (Inférieur ou égal à ce dernier).

D2 : soustraire le chiffre de rang supérieur et le multiple du dividende.

D3 : multiplier le reste par 10 et ajouter le chiffre du dividende du rang inférieur.

D4 : recommencer l'algorithme jusqu'au chiffre des unités.

Il est conseillé ensuite de vérifier l'opération par le calcul de $A = B \times Q + R$ avec $R < B$.

Enfin, **lors de la troisième phase**, le maître va construire le parallèle entre la feuille de partage et la disposition usuelle de la division. Le lien se construit en s'appuyant sur la valeur des chiffres dans un nombre.

LE *JEU DE TÂCHES*, UNE INTERACTION DE CONNAISSANCES PARTICULIÈRE ENTRE EXPÉRIMENTATEUR ET ÉLÈVES

Christine DEL NOTARO
Chargée d'enseignement, Université de Genève
Christine.DelNotaro@unige.ch

Résumé

Notre communication a mis en évidence quelques résultats de recherche visant à montrer une manière particulière d'interagir avec l'élève : le jeu de tâches. Il s'agit d'un ensemble de tâches qui découlent en principe les unes des autres, sans être hiérarchisées pour autant. L'expérimentateur est un élément du milieu (au sens de Bloch, 2002) qui va mettre en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et avec le milieu de l'élève. Cet ensemble de tâches procède d'un savoir mathématique et met en évidence les connaissances que les élèves ont accumulées et qui constituent leur expérience. En effet, au fil des tâches, l'élève se constitue peu à peu une expérience, par exemple, à propos des nombres, et plus particulièrement, en ce qui nous concerne, des relations de divisibilité. Nous avons tenté d'en montrer quelques manifestations d'une part et d'autre part, d'exposer comment on peut convoquer cette expérience dans l'interaction et de quelle manière elle se donne à voir.
Nous avons expérimenté des jeux de tâches dans le domaine des critères de divisibilité en 5e et 6e primaire (11-12 ans), alors que cela avait été effectué essentiellement en géométrie auprès d'élèves de l'enseignement spécialisé (DDMES).
Il est encore trop tôt pour envisager un dispositif de formation, mais on peut toutefois entrevoir l'avantage de mettre des étudiants en situation d'engager leurs propres connaissances dans l'interaction avec les élèves, plus habitués à être observateurs des procédures des élèves.
Nous avons dirigé un travail de maîtrise intitulé : Un exemple de jeux de tâches pour explorer le milieu des puissances en 6P (Thévenaz, 2010) qui se révèle être une tentative intéressante de reprise de cette notion par une étudiante.

I - CONTEXTUALISATION DE LA NOTION DE JEU DE TÂCHES

Le jeu de tâches est une interaction particulière entre expérimentateur et élèves. Ce concept a été élaboré par le groupe DDMES[1] et a fait notamment l'objet d'une présentation en 2003 au séminaire National de Paris[2]. Nos recherches ne se situent pas dans le secteur de l'enseignement spécialisé mais nous avons repris ce concept (Del Notaro, 2010), pour tenter de le faire fonctionner avec des élèves de l'enseignement ordinaire et afin de mener des observations à propos du nombre. Ainsi, là où DDMES investit essentiellement des notions de géométrie dans le milieu de l'enseignement spécialisé, nous nous démarquons quelque peu en proposant des jeux de tâches autour de notions numériques (les relations de divisibilité), dans le cadre de l'enseignement ordinaire.

---

[1] Didactique des Mathématiques pour l'Enseignement Spécialisé. Groupe animé par F. Conne (Université de Genève et de Lausanne) et J.-M. Favre (CFPS, Château du Seedorf, Noréaz). Membres : C. Cange (Institut Pré-de-Vert, Rolle), L. Del Notaro (École du Mail, Genève), P. Depommier (Collège Arnold Reymond, Pully), D. Jean Richard (CPHV, Lausanne), C. Maréchal (Université de Genève), A. Meyer (ECES, Lausanne), J.-D.Monod (Gymnase cantonal, Nyon), C.-L. Saudan (Fondation de Vernand, Cheseaux-sur-Lausanne), A. Scheibler (enseignement secondaire, Aigle).

[2] DDMES (2003). L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. *Actes du Séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris, 28-29 mars.

Dans son texte de 2003, le groupe DDMES a exposé une idée qui a constitué pour nous un tournant décisif dans nos recherches : l'idée d'étirement du milieu. Sans trop nous arrêter sur cette question, il convient néanmoins d'en dire quelques mots. Cette notion consiste à explorer, investiguer le milieu de manière approfondie. Dans la notion d'étirement, il y a l'idée de repousser les limites de la tâche qui va s'enrichir, s'amplifier, se prolonger tout en résultant évidemment du savoir mathématique ; le milieu n'est pas une entité statique mais au contraire, dynamique : nous y associons une certaine liberté dans le questionnement des élèves. Ainsi, nous nous autorisons à interagir avec l'élève selon notre propre représentation de la tâche et en dehors, parfois, de notre analyse préalable. Nous cultivons l'idée qu'il y a un enjeu à saisir, un étonnement (de notre part ou de celle des élèves) à l'exploiter sur le vif. Cela signifie que nous ne cherchons pas ici à faire réussir l'élève, mais que nous sommes bien dans la perspective épistémologique de comprendre comment les connaissances des élèves s'agencent. De ce fait, il se peut que nous abandonnions abruptement une tâche, que nous laissions flotter des erreurs sans les discuter ou encore, que nous intervenions en donnant des contre-exemples, que nous empêchions l'élève de réfléchir par nos questions, ou que nous le déstabilisions pour tenter de saisir le fil de sa pensée. Cela peut paraître particulier, mais il n'en demeure pas moins que les élèves adorent ce type d'interaction sans que nous ne nous l'expliquions véritablement.

Pour déterminer le type de milieu dans lequel nous questionnons les élèves, nous précisons qu'il s'agit d'un milieu de type expérimental, au sens de Bloch (2002) [3] qui définit différents modèles de milieux, selon s'ils se trouvent du côté de la théorie, de l'expérimentation ou de la contingence. Ainsi, le modèle de milieu expérimental nous permet-il non seulement de prévoir et d'analyser un phénomène d'enseignement, les rapports à la connaissance et au savoir des élèves et du professeur ainsi que leur articulation, mais encore, de construire des situations expérimentales, de les étudier et de les analyser dans la contingence. Le milieu théorique *a priori* sera constitué non pas d'une situation fondamentale, au sens de la *Théorie des situations didactiques*, mais d'un *jeu de tâches*. Le milieu théorico-épistémologique de notre objet mathématique (les critères de divisibilité par 4) réfère à l'étude de l'anneau des nombres entiers relatifs. L'expérimentateur est un élément du milieu qui va mettre en jeu ses propres connaissances dans son interaction avec les milieux de la tâche et de l'élève, pour tenter de cerner les connaissances engagées par ce dernier. Il ne dispose pas à proprement parler d'une liste de tâches au sens de Favre (2008), mais il en a défini quelques-unes, *a priori*, qui sont à l'image de sa propre exploration du contenu, en lien avec ce qu'il a compris au préalable du jeu de l'élève. Il reste que certaines tâches n'ont pas été prévues et ont été proposées dans le feu de l'interaction : il arrive que l'expérimentateur mette en jeu une tâche spontanément ou qu'il se laisse emporter par une proposition d'élève. Cela étant, cet ensemble de tâches doit pouvoir mettre en exergue les connaissances que les élèves ont accumulées par leur expérience du nombre, ce qui nous permettra de spécifier celles qui se manifestent en rapport avec une tâche précise. La distinction de Favre (2008) en ce qui concerne un *jeu de tâches effectif*[4] et les *cartes du jeu*[5] nous semble d'importance, car elle fait état de l'écart toujours présent entre une prévision et ce qui se passe réellement avec les élèves. Nous nous sommes saisie de cette liberté pour suivre les élèves dans leur pensée et nous sommes autorisée à suivre ce cheminement, qui nous a mené parfois assez loin dans les mathématiques abordées.

Le jeu de tâches se joue donc dans une interaction de connaissances : celles de l'expérimentateur sont engagées dans le milieu et sont parties prenantes de l'interaction, ce qui nous a permis de libérer l'espace de l'expérimentation avec les élèves, nous menant bien plus loin dans notre échange que si les interventions de l'expérimentateur avaient été figées et celles de l'élève prises comme telles, sans que l'on ne puisse considérer de transformation de la pensée de l'élève en interaction avec celle de l'expérimentateur, et vice-versa. L'enjeu est donc de partir des réponses des élèves pour poser d'autres

[3] Cf. figure en annexe

[4] Les jeux de tâches (échanges) ayant effectivement eu lieu.

[5] Les différents jeux prévus par l'expérimentateur.

questions, à l'aune de ce que nous comprenons que les mathématiques mises en jeu produisent sur les connaissances des élèves.

Notre milieu expérimental nous permet de vérifier dans un premier temps les observations faites dans le milieu de la contingence ordinaire de départ, de les analyser dans le milieu théorique et d'en avérer certaines ; le but étant de les confronter ensuite à une contingence, cette fois-ci de nature expérimentale, et de dépasser ainsi les simples observations empiriques. Les expérimentations nourrissent de ce fait le milieu théorique, qui a son tour contrôle le milieu expérimental. La confrontation à la contingence expérimentale des tâches sera réalisée par le chercheur. De la sorte, ce dernier se fait expérimentateur et *pilote*[6] de la situation après avoir mis au point une série de tâches procédant du savoir mathématique visé. Nous interrogeons ces différents milieux par le biais du jeu de tâches et nous centrons essentiellement sur le milieu expérimental a priori.

Le jeu de tâches laisse une place importante à l'investigation du milieu en partant d'une tâche qui va s'enrichir, s'amplifier, se prolonger tout en résultant du savoir mathématique. Il procède donc d'une démarche de recherche axée sur l'investigation du milieu. Nous définissons le jeu de tâches comme un ensemble de tâches qui découlent en principe les unes des autres, mais pas toujours, dans le sens que nous ne les avons pas hiérarchisées. Il s'agit ici en particulier d'une interaction particulière, permettant de cerner les connaissances spécifiques engagées par des élèves de 11-12 ans, au sujet de diverses relations de divisibilité et de l'expérience que ces derniers peuvent en faire.

Dans notre milieu théorique *a priori*, nous avons défini une ou plusieurs tâches préalablement et nous sommes laissé la possibilité de bifurquer une fois sur le terrain, selon les apports des élèves sur le moment, ce qui présuppose entre autres, de connaître les entours de la tâche. Les tâches sont en conséquence déterminées pour une part, a priori, et pour une autre part, dans l'action même de l'expérimentation. Le type d'entretien mené n'est pas neutre de la part du chercheur qui, rappelons-le, s'autorise toute intrusion dans la réflexion, les propos ou le travail papier-crayon de l'élève et satisfait ainsi un souci de précision immédiate dans un but d'investigation du milieu et dans l'interaction de connaissances entre chercheur et élève-s.

Pour sonder le milieu, cet *interventionnisme* est nécessaire car on ne peut se contenter de l'observer de manière naturaliste. Nous pensons que pour trouver des réponses, il faut d'une certaine manière, les provoquer. Ce terme à double sens comporte à la fois l'idée de les inciter – par mise en place du milieu – et celle de les défier, par des déstabilisations, pour tester la résistance des connaissances.

En d'autres termes, nous interrogeons les connaissances mathématiques des élèves à travers leur expérience de la structure du nombre dans un jeu qui nous permettra de repousser toujours plus loin les limites de la tâche. Il s'agira dans un premier temps d'élargir le milieu ; on aura donc recours à des expérimentations diverses et variées.

Avant d'exposer la manière dont nous enchaînons les tâches, il convient de donner un exemple de jeux de tâches, que nous commentons minimalement afin d'en assurer la compréhension.

1 Un exemple de jeux de tâches

L'exemple ci-après est représentatif des différents cas de figure décrits : deux tâches ont été prévues et effectuées, enrichies de propositions d'élèves (tâches 3 et 4), puis d'une suggestion de l'expérimentateur en dernier lieu (tâche 5). La séance est consacrée à l'étude des multiples de 4 et de 3, par l'intermédiaire de jeux exploratoires :

1. Pyramide de nombres : deux élèves sont chacun « chef » de multiples (l'un des multiples de 3 et l'autre des multiples de 4) ; des nombres sont agencés en pyramide l'un sous l'autre (1, 12, 123, 1234,…), chaque élève possède sa propre pyramide. Il est demandé aux élèves, à tour de rôle, de rendre le nombre multiple de sa catégorie en y adjoignant un chiffre au besoin. L'autre élève vérifie

[6] Terme emprunté à Favre, 2008.

si le nombre de son adversaire n'est pas multiple de sa catégorie, auquel cas il marque un point. Par exemple 12 doit être « transformé » pour n'être que multiple de 3 (ex. en accolant un 6: 126) ou uniquement multiple de 4 (124), selon quel joueur commence. Un exemple : le joueur chef des multiples de 3 a laissé le 12 sans rien accoler, ce qui a eu pour conséquence que l'autre a marqué un point, puisque 12 est également multiple de 4.

2. Multiples de 3 contre multiples de 4 : le jeu « chefs de multiples » se poursuit. Un élève par groupe joue contre un élève de l'autre groupe pour rendre le nombre de départ (11) multiple de 3 ou multiple de 4, etc. (11 – 111 – 1112 – 11121 – 111216 – 1112160 – 11121604 – etc.)
3. Knox (1) : (proposition des élèves). Les élèves récitent la suite des nombres ; le jeu consiste à dire ce mot (knox) lorsque l'on tombe sur un multiple de 3 ou un nombre contenant le chiffre 3. L'expérimentatrice accepte cette règle de jeu, pour voir… Il en a résulté la découverte de la règle de réduction d'un nombre dans la règle de divisibilité par 3. Arrivé à 57, un élève a repéré que l'on pouvait faire 5+7 = 12 et 12 est multiple de 3 ou continuer jusqu'à n'obtenir qu'un seul nombre, 1 + 2 = 3.
4. Knox (2) : … avec les multiples de 4 ou un nombre contenant le chiffre 4.
5. Knox (3) : (l'expérimentateur complexifie) … avec les multiples de 3 et les multiples de 4, (sans tenir compte des chiffres 3 et 4, comme dans leur proposition de jeu). Il nous a semblé pertinent de donner suite à la proposition 3), dans la mesure où il s'agit de reconnaître un multiple de 3 dans une suite de nombres récitée, avec la contrainte « parasite » du chiffre 3 qui permet de faire des liens. Ainsi, la comparaison par exemple de 13, 33, 133, devient-elle intéressante, en relation avec ces deux contraintes. Les élèves sont allés assez loin sans se tromper. Le jeu s'est terminé à deux élèves, les deux autres ayant été éliminés à la première erreur ; il demande toutefois une grande mobilisation cognitive.

La conception de notre jeu de tâches est véritablement de suivre l'élève dans son raisonnement, de le comprendre, de le contredire en lui opposant des suggestions éventuellement déstabilisantes, afin de saisir de quelle manière il va soutenir le fil de sa pensée et peut-être, la modifier. Dans ce cas, il nous importe de pouvoir saisir quel indice l'a fait changer d'avis. Ainsi, juste après l'échange entre l'élève et l'expérimentateur commence pour ce dernier, un travail minutieux consistant à pointer les éléments susceptibles de lui faire élaborer une nouvelle tâche directement reliée à ce qui s'est passé lors de la séance avec l'élève. Ses propres connaissances sont engagées non seulement pendant l'interaction, mais aussi à ce moment précis du différé.

2 L'enchaînement des tâches *(jeux)* à partir d'une tâche de départ

En ce qui concerne l'enchaînement des tâches, il faut préciser ici que nous effectuons *des sauts par les tâches* pour *rester dans les tâches*. Il s'agit d'une manière de relancer a-didactiquement, pourrait-on dire. Cela signifie que nous avons un réservoir substantiel de tâches, qui fonctionnent comme autant de variables didactiques, en relation avec ce que les élèves vont faire ou dire.

Avant de poursuivre avec un exemple d'interaction, il convient ici de s'arrêter sur le nombre considérable de connaissances que les élèves ont injectées dans le milieu et qui ont enrichi les cartes du jeu proposé par l'expérimentateur. On constatera là encore, qu'il s'agit d'une interaction dans laquelle l'expérimentateur est partie prenante du milieu ; ce dernier va répondre en fonction de ce que les élèves disent.

Il y a une correspondance entre notre propre investigation du milieu et celle des élèves : nous récupérons celle des élèves pour procéder à notre tour à une exploration et proposer en retour, une nouvelle expérience aux élèves. C'est un phénomène bouclé, dans lequel les explorations sont liées et s'alimentent entre elles. Il y a quelque chose de communicatif dans ce va et vient. Plus les élèves s'investissent et plus nous investiguons le milieu à notre tour pour fournir à la séance suivante, une tâche susceptible d'alimenter leur curiosité. Nous supposons que si cela n'existe pas à l'école, c'est parce que les professeurs n'explorent pas eux-mêmes le milieu, cela nous semble lié.

Cette idée d'exploration pure et déliée de toute contrainte est vivace chez les mathématiciens et le fait de l'importer en classe nous permet d'observer un fait particulier : les élèves ont un intérêt, certes différent du nôtre, mais un intérêt très fort et très grand pour l'exploration mathématique, au point que cela nous a profondément questionnée. Très surprise dans un premier temps, nous avons cultivé cela par la suite et décidé de persévérer dans ce questionnement. C'est même cet intérêt porté par les élèves qui a nourri le nôtre et nous a entraînée dans cet élan.

Nous n'avons pas l'illusion de faire des mathématiques comme les mathématiciens, mais gardons vifs à l'esprit, les propos de Delahaye (2004) concernant les liponombres de Graner : « *Ces résultats de lipomathématiques sont d'une utilité incertaine, mais le plaisir de mener des dénombrement et de faire travailler les ordinateurs pour qu'ils résolvent des énigmes originales justifient le temps et l'argent dépensés. J'espère que des passionnés poursuivront le travail de Nicolas Graner* ». En ce qui concerne notre travail avec les élèves, l'utilité de ce type de jeux mathématiques ainsi que leur plaisir sont indubitables, mais il faut du temps. Il faut pouvoir investir sur le plus long terme car nous avons observé que les liens établis par les élèves viennent souvent plus tard, même beaucoup plus tard (trop, sans doute, pour des programmes scolaires impatients) et souvent, lorsque l'on ne s'y attend pas.

A partir de notre tâche de départ[7] que nous n'analyserons pas dans cet article, nous avons mené un grand nombre de jeux de tâches ; nous nous proposons d'en présenter quelques-uns dans la partie suivante.

II - EXEMPLES D'INTERACTIONS

Nous allons montrer dans cette partie, ce que ces tâches ont à voir les unes avec les autres, comment elles s'agencent entre elles et quelle est la part éventuelle d'improvisation de la part de l'expérimentatrice. A priori, il n'est pas aisé de voir cet agencement, justement du fait qu'il résulte d'un jeu de tâches effectif, ce que nous allons essayer de faire ressortir.

1 Les tâches de la séance S1

Les tâches proposées ci-dessous sont le résultat d'un jeu de tâches effectif. Nous distinguons « *cartes du jeu de tâches* », qui se rapporte à ce qui a été prévu par l'expérimentatrice et « *jeu de tâches effectif* », qui caractérise ce qui a véritablement été effectué. Le jeu de tâches effectif peut être ressemblant aux cartes du jeu de tâches, ou alors enrichi, voire même différent du premier, comme on l'aura compris.

Il n'y a qu'une carte dans ce jeu indiquée en gras (tâche 1), les autres s'étant greffées dans l'interaction.

1. **Dire un nombre qui se divise par 3. Un autre, plus grand, plus petit, de trois chiffres, quatre chiffres, etc.**
2. Chercher tous les livrets[8] dont 108 fait partie.
3. 1532 se divise-t-il par 3 ?
4. Transformer ce nombre pour qu'il devienne multiple de 3. Changer un seul chiffre.
5. Contre-exemple avec les multiples de 4.

Ces jeux de tâches ont mis en valeur un nombre impressionnant de connaissances manifestées par les élèves. Nous les avons toutes recensées, ce qui a fait partie du travail minutieux décrit plus haut, qui intervient après la séance avec les élèves, et nous a permis d'alimenter notre jeu.

---

[7] Charrière, 1991 : « *2.7. ÷ 4. Trouve toutes les façons de compléter ce nombre pour que la division par 4 ne donne pas de reste. Remplace le 7 des dizaines par un autre chiffre : combien y aura-t-il, dans chaque cas, de nombres divisibles par 4 ?* »

[8] Le mot « livret » est une désignation suisse romande pour dire « table ».

1.1 Les connaissances manifestées par les élèves

Les connaissances manifestées par les élèves enrichissent et alimentent le jeu de tâches. Nous proposons un extrait des connaissances exprimées par les élèves ; nous les avons recensées, qu'elles soient justes ou fausses, puisque chacune représente ce que pense l'élève et nous permet potentiellement de repartir de ses affirmations. Reprenons le point 1 pour commencer : « Dire un nombre qui se divise par 3. Un autre, plus grand, plus petit, de trois chiffres, quatre chiffres, etc. » ; à ce propos, les élèves disent ceci :

Pour donner un nombre qui se divise par 3

- Il faut compter de 3 en 3 depuis 90, ce sont les multiples de 3, jusqu'à 108
- 108 n'est pas dans table de 3 mais dans table de 9 car 108 = 9x12 mais comme 3x3=9, alors ça marche : 108 est dans la table de 3
- 12 est aussi dans la table de 3, car ils sont multiples l'un de l'autre (9x12=108)
- Si on peut dire : 3x3=9 et 108 est dans la table de 9 alors 108 est dans la table de 3, on peut dire aussi pour 36, puisque 36 est le triple de 12.
- Il y a 4 tables, car on a 12, 9, 3, 36 (9x12 et 3x36). 108 est dans les tables de 12, 9, 3, 36
- Il y a 6 aussi, 6 x 18 ; c'est pas étonnant puisque 6 et 18 sont dans le livret de 3.
- 108 se trouve dans 12 livrets. 1 x 108, 2 x 54, 3 x 36, 4 x 27, 6 x 18 et 9 x 12

Pour savoir si un nombre se divise par 3, 6

- Pour 1532, il faut additionner les chiffres. 1532 est dans la table de 11 car RN[9] = 11 (1+5+3+2 = 11)
- Ça marche aussi pour les multiples de 4 ; 435 est un multiple de 4 puisque 4+3+5= 12 et que 12 est un M4
- Logiquement, ça devrait marcher avec 3, 6 et 9
- 435÷6 = ? on peut le diviser car 4+3+5 = 12; 12 est multiple de 6
- Ça ne marche pas avec 2 (435 est un nombre impair et pas pair) ; si c'est pas possible avec 2, alors ce n'est pas possible avec 6 non plus.
- Pour 378, 3+7+8 = 18, et puis 18 est un multiple de 3, de 6 et de 9

De même que pour la première séance, nous proposons ci-après, un extrait de la liste des connaissances manifestées par les élèves lors de la deuxième séance (S2). Nous la présentons à la suite car elle illustre le cheminement des élèves, même si elle se présente pêle-mêle et de manière non hiérarchisée. On constatera néanmoins que les connaissances se font et se défont, qu'elles ne sont pas stables et se transforment au gré des éléments qui arrivent dans le milieu.

Les multiples de 6

- Ça marche si ça finit par 6, ou s'il n'y a que des 6
- 185 et 145 : marche pas avec 6 car 6 > 5
- Ça ne doit pas finir par un impair

Des nombres « embêtants » et/ou « étonnants »

- 585, multiple de 3 et de 9
- 435, multiple de 3 seulement, pourquoi pas de 9
- 603 : pourquoi pas multiple de 6, puisque six centaines
- 156 : multiple de 3 et de 6 pourquoi pas de 9
- 1728 ça marche pour les multiples de 3, de 6 et de 9.
- Mais pourquoi 9 puisque 3x9 = 27 ???

Nombres qui marchent pour les multiples de 3, de 6 et de 9

---

[9] RN = racine numérique = somme des chiffres du nombre

- 108, 216, 432, 864

1.2 Les cartes des jeux des séances S2, S3, S4

A partir de ces affirmations, il nous est possible d'affiner notre jeu en différé, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut. Il y a donc plusieurs façons d'alimenter un jeu de tâches : d'une part dans l'interaction et d'autre part, dans le travail après-coup de la relecture des notes prises et/ ou de la narration effectuée, le cas échéant.

Séance S2

1. Prendre un nombre de trois chiffres et dire s'il est divisible par 3, 6, 9.
   a. Faire l'essai avec plusieurs nombres.
   b. Pourquoi ça ne marche pas avec 6 ?
   c. Avec 435, si ce n'est pas possible avec 2 alors ce n'est pas possible avec 6 ; qu'est-ce que ça veut dire ?
2. Diviseurs de 108 (reprise de la dernière fois). Est-ce que ce seront les mêmes diviseurs pour la moitié de 108 ? Le double de 108 ? Le tiers de 108 ?

Cette séance illustre le travail après-coup que nous évoquions plus haut. Nous avons saisi les hésitations, les surprises (*Logiquement, ça devrait marcher avec 3, 6 et 9),* les connaissances induites par le milieu *(435÷6 = ? on peut le diviser car 4+3+5 = 12; 12 est M6)* etc. pour explorer ce milieu. Les séances S3 et S4 sont des jeux effectifs et permettent au lecteur de tenter d'imaginer le fil de pensée suivi pour alimenter les jeux de tâches.

Séance S3

1. Dire un nombre qui se divise par 4. Un autre, plus grand, plus petit ; un nombre de 3 chiffres, de 4 chiffres, …
2. 2376 se divise-t-il par 4 ?
3. Y a-t-il plus de nombres divisibles par 4 ou multiples de 4 ?
4. Y a-t-il des nombres à la fois divisibles par 4 et multiples de 4 ?

Séance S4

1. Faire des liens entre les multiples de 4 et de 8 et leurs critères de divisibilité
2. Ecrire des nombres de 4 chiffres dont vous pensez qu'ils se divisent par 8.
3. Tableau partiel des multiples de 8, à observer et faire des commentaires, remplir, dire quel nombre il y aura dans telle ou telle case.
4. Quelles règles de divisibilité pourrait-on trouver ?
5. Ecrire quatre nombres de 4 chiffres et dire s'ils sont multiples de 8

1.3 Les interactions de connaissances ayant permis l'agencement des tâches

Afin de montrer de quelle manière l'agencement des tâches est soumis à l'interaction des connaissances de l'expérimentatrice et des élèves et comment ces dernières se manifestent, nous en revenons à notre première séance S1 et à son jeu effectif, pour tenter de rendre plus lisible cet enchaînement de tâches.

Dans la colonne de gauche, on reconnaîtra le jeu de tâches, et dans celle de droite, son commentaire.

1. Dire un nombre qui se divise par 3. Un autre, plus grand, plus petit, de trois chiffres, quatre chiffres, etc.	• Une élève trouve 108 et hésite quant à son appartenance à la table de 3, 6 ou 9 ; • Nous décidons de creuser l'idée et proposons en 2) :
2. Chercher tous les livrets dont 108 fait partie.	• Un élève déclare : « On a écrit tous les livrets où on trouve 108, mais y en a peut-être d'autres, 2 et 4 ? ».

	• Ils ne reconnaissent pas les tables de 2 et de 4 dans ce qu'ils ont écrit : 1 x 108, 2 x 54, 3 x 36, 4 x 27, 6 x 18 et 9 x 12. • Nous posons la question suivante en 3) :
3. Est-ce que les nombres qui divisent 108, ce sont les mêmes que les livrets où on trouve 108 ?	• Il répondent : « non pas du tout, c'est pas la même chose ». • Nous proposons en 4) :
4. Dire si 1532 se divise par 3.	• Confusion entre les deux critères de 3 et 4 ; • Nous tentons l'idée gardée en réserve, de demander de « transformer » quelque chose au nombre pour qu'il devienne multiple de 3. (Il ne s'agit pas d'une opération que l'on effectuerait sur 1532, mais d'un jeu sur les chiffres). • En 5):
5. Transformer ce nombre pour qu'il devienne multiple de 3. Changer un seul chiffre.	• À partir de là, nous supposons que le fait que l'addition des chiffres du nombre n'est pas adéquate pour les multiples de 4 va leur « apparaître ». • Nous proposons un contre-exemple en 6):
6. Contre-exemple avec les multiples de 4.	• Ils disent que oui (ex.: 4+3+5 = 12 et c'est M4). Après essais, ils en concluent que 1532 ne marche pas avec 11 ni 4 mais que ça devrait marcher avec 3, 6 et 9 (car 12 est M6). Mais si c'est impossible avec 2 alors c'est impossible avec 6. 435 est un nombre impair et pas pair.

Ce que nous retirons du jeu de tâches est le fait que cette façon d'interagir avec le milieu de l'élève apporte une ouverture dans les échanges ; le jeu de tâches joue un rôle dans l'élaboration d'une logique dans la mesure où il laisse toute la place à l'expérience, voire la préconise.

L'aménagement du milieu en jeux de tâches permet à l'élève à la fois d'explorer ce milieu et de se constituer des expériences autour des critères de divisibilité en question, de faire ressortir des connaissances plus anciennes et de le confronter au milieu et ainsi, d'élaborer de nouvelles connaissances. Si nous reprenons l'exemple de la divisibilité par 6, on peut évidemment rapidement expliquer la règle à l'élève mais dans ce cas, on le prive de sa propre réflexion, de son propre cheminement intellectuel. Au contraire, si on le laisse faire l'expérience des critères particuliers ou encore, s'il se trouve confronté à un questionnement qui peut piquer sa curiosité (Pourquoi ça ne marche pas avec 6 ?) on permet à l'élève de se constituer ses propres connaissances.

III - UN CAS PARTICULIER, LE CAS DE SARA

1 Le jeu de tâches donne à voir les connaissances des élèves

Le cas que nous présentons nous semble intéressant dans le sens où l'analyse du jeu de tâches donne des informations quant à l'activité mathématique particulière d'une élève qui se révèle, à première vue, un peu en marge du groupe que nous interrogions. Il est à préciser que c'est au travers de la narration de ce jeu de tâches que nous avons pu mettre à jour les éléments d'analyse qui suivent et les conclusions que nous en avons tiré. Nous ne développerons toutefois pas cette question dans cet article.

1.1 Les cartes du jeu de tâches

1. Nicolas a dit : 4444 est un M4 car 4+4+4+4 = 16 et 16 est un M4. Qu'en pensez-vous ?
2. Comparer ces affirmations, qu'en pensez-vous ?
   a. dictionnaire 6P[10] : « un nombre naturel est divisible par 6 ou est multiple de 6 s'il est un multiple de 2 et de 3, donc divisible par 2 et 3 »
   b. ce que nous disons depuis quelques séances : « un M6 est un nombre pair, multiple de 3. Donc, un nombre pair, dont la somme des chiffres est un multiple de 3 ».
3. Comment on reconnaît-on un multiple de 6 ? Écrire une phrase qui l'explique (dans l'interaction)

1.2 Le jeu de tâches de Sara[11]

1. Diviser de grands nombres par 4 à la calculette
2. Écrire la table de 4 jusqu'à 100
3. Écrire les tables de 3, 6, 9
4. Reprendre les divisions par 4 sur la calculette *(« ça donne des nombres à virgule parfois ou des nombres entiers »)*
5. Multiplier un nombre décimal par une puissance de 10 :
   1. 1754,8 x 10^2 = 175 480
   2. 1754,8 x 10^3 = 1 754 800
   3. 1754,8 x 10^4 = 17 548 000, etc. *(ce qui provoque une grande surprise)*
6. Refaire les opérations des autres avec sa calculette : 3+2+4+5+6=20
7. Reprendre 3136 et dire que ce n'est pas un multiple de 6 car 3+1+3+6 = 13 et 13 n'est pas multiple de 6

Ce qui fait sens pour cette élève est d'explorer le nombre à l'aide de la calculette et l'on observera de quelle manière son jeu rejoint celui de ses camarades, grâce au détour personnel effectué durant ces quelques séances.

1.3 Confrontation des différents jeux de tâches

Nous avons confronté les différents jeux de tâches afin de comprendre le jeu particulier de *Sara* et de pouvoir saisir les liens qui les unissent. Nous avons mis en tableau ces différents jeux pour en faciliter la lecture. Les cartes du jeu de tâches comportent une tâche (2) qui a été abandonnée car elle ne revêtait aucun sens pour les élèves. Manifestement ici, en tant qu'expérimentatrice nous n'avons pas saisi l'enjeu des connaissances des élèves qui n'en n'étaient pas à comparer des définitions.

Ceci illustre le fait que certains jeux sont à abandonner et que c'est dans l'interaction que cela se comprend.

---

[10] Feuillet figurant dans le manuel de 6ème primaire, qui recense des définitions mathématiques

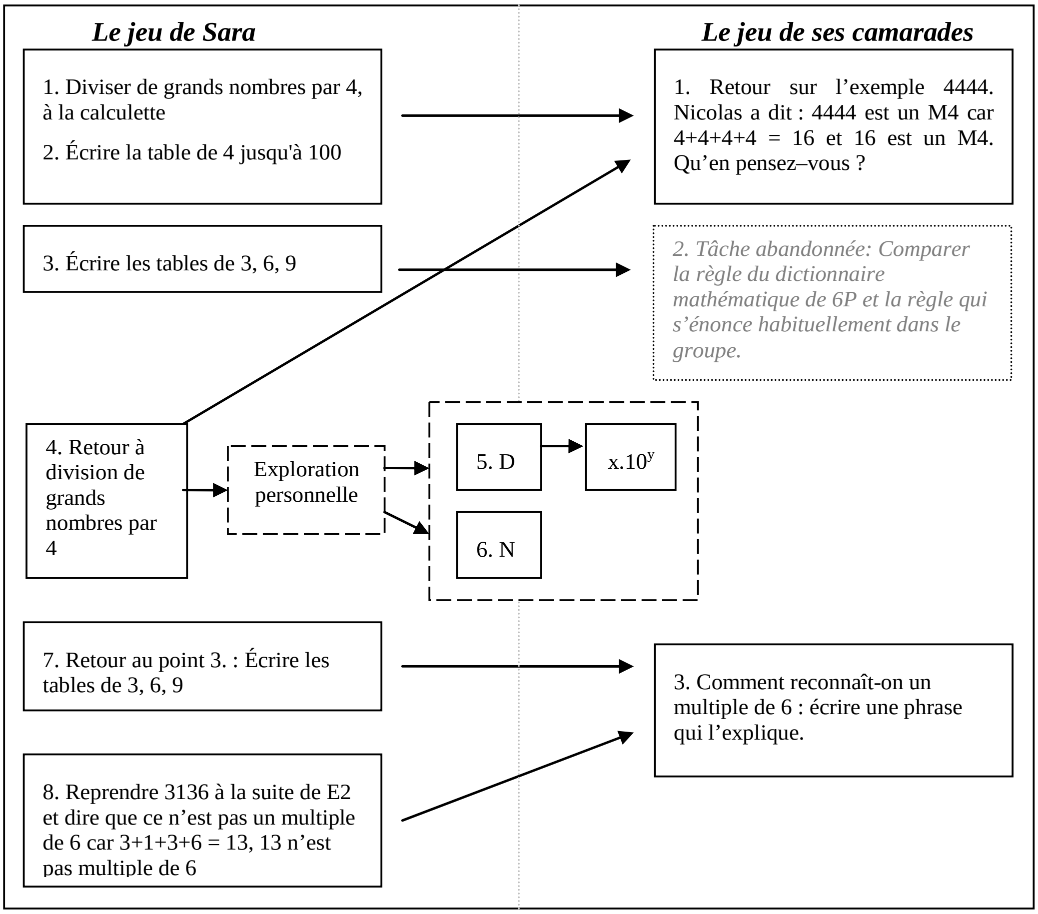
[11] Il convient ici de préciser que la dénomination *Jeu de tâches de Sara* définit la succession des tâches réellement effectuées par l'élève (« jeu effectif »), en interaction avec le jeu prévu par l'expérimentateur, défini par C*artes du jeu de tâches*.

Le jeu effectif de Sara	*Le jeu effectif de ses camarades*	*Les cartes du jeu de tâches*
1. Diviser de grands nombres par 4 à la calculette 2. Écrire la table de 4 jusqu'à 100 3. Écrire les tables de 3, 6, 9 4. Reprendre les divisions par 4 sur la calculette *(ça donne des nombres à virgule parfois ou des nombres entiers)* 5. Multiplier un nombre décimal par une puissance de 10 : 1754,8 x 10^2 = 175480, 1754,8 x 10^3 = 1754800, 1754,8 x 10^4 = 17548000, etc. *(ce qui provoque une grande surprise)* 6. Refaire les opérations des autres avec sa calculette : 3+2+4+5+6=20 7. Reprendre 3136 à la suite de E2 et dire que ce n'est pas un multiple de 6 car 3+1+3+6 = 13 et 13 n'est pas multiple de 6[12]	1. Retour sur l'exemple 4444. Nicolas a dit : 4444 est un M4 car 4+4+4+4 = 16 et 16 est un M4. Qu'en pensez–vous ? 2. Comment reconnaît-on un multiple de 6 ? Écrire une phrase qui l'explique	1. Retour sur l'exemple 4444. Nicolas a dit : 4444 est un M4 car 4+4+4+4 = 16 et 16 est un M4. Qu'en pensez–vous ? 2. Comparer dictionnaire 6P : « un nombre naturel est divisible par 6 ou est multiple de 6 s'il est un multiple de 2 et de 3, donc divisible par 2 et 3 » et ce que nous disons depuis quelques séances : « un M6 est un nombre pair, multiple de 3. Donc, un nombre pair, dont la somme des chiffres est un multiple de 3 ». 3. Comment on reconnaît-on un multiple de 6 ? Écrire une phrase qui l'explique (dans l'interaction)

1.1 Le jeu de Sara est lié à celui de ses camarades

La carte du jeu prévue (2.) n'a donc pas été retenue dans l'analyse car elle s'est avérée sans consistance pour les élèves, ainsi que nous l'avons déjà précisé. Nous constatons sans peine les liens entre les tâches auxquelles Sara s'est astreinte d'elle-même, en jouant avec sa calculatrice et celles menées par les autres élèves. Le jeu de Sara est complètement lié à celui de ses camarades. En mettant ainsi en regard le jeu de Sara et celui des autres élèves, sa logique nous devient accessible à travers les mathématiques qu'elle fait : on voit clairement comment Sara suit de loin ce qui se passe et comment elle répond aux sollicitations du milieu, bien qu'elle se soit apparemment extraite du processus.

[12] On aura toutefois remarqué que bien que la réponse soit exacte, la justification fait partie de ces éléments de saturation très souvent constatés : le critère de 6 est « pair et M3 », et non pas M6. Cette confusion est très courante.



Ainsi, lorsque de son côté, elle effectue les tâches 1 et 2, on peut remarquer que ces tâches sont en lien avec la première carte « jouée » de l'expérimentatrice ; les autres élèves entrent, quant à eux, dans ce jeu, contrairement à Sara qui se met à diviser des grands nombres par 4, à l'aide de sa calculette d'une part, puis à écrire la table de 4 sur sa feuille. Ensuite, bien que la deuxième carte ait été abandonnée par l'expérimentatrice et les autres élèves, nous observons que Sara se met à écrire les nombres des tables de 3, 6 et 9 de son propre chef. Il est peut être utile de préciser ici que cette élève se met en retrait à chaque fois que nous travaillons avec ce groupe d'élèves, demandant de *faire des maths avec la calculette*. Nous avons accédé à cette requête car cette élève ne parvenait pas à s'insérer dans le groupe de travail mais souhaitait néanmoins pouvoir s'y joindre. En ce qui concerne sa quatrième tâche, Sara revient à la première carte – ou alors, à sa première tâche – ainsi que l'indique la flèche, tout en poursuivant une exploration personnelle. Pour terminer, on observera que les tâches 7 et 8 sont également reliées au jeu des autres élèves.

L'exploration du milieu par le jeu de tâches a pour fonction de permettre aux élèves, de se constituer une expérience du nombre qui fait souvent défaut à l'école. Elle permet tout à la fois à l'expérimentatrice, et par extension, au professeur qui déciderait de procéder de la sorte, de se confronter à ses propres représentations du nombre (en l'occurrence, des relations de divisibilité), de les confronter à celles des élèves et de faire interagir ces différentes expériences, de les rendre publiques, en quelque sorte, et accessibles aux autres. Le jeu de tâches est donc tout autant alimenté par cette exploration, qui, elle-même, enrichit l'expérience.

Si l'on repense au cas de Sara, la dimension exploratoire de ses expérimentations à la calculette lui fournit des éléments d'expérience qu'elle va pouvoir ensuite réinjecter dans la séance, en tant qu'éléments de réponse à une sollicitation du milieu.

IV - LE *JEU DE TÂCHES* DANS LA FORMATION ?

Avant de se saisir de cette notion dans le cadre de la formation des enseignants, il faut en poursuivre la théorisation ; le défi réside notamment dans le fait de réussir à éviter l'écueil de considérer le jeu de tâches comme une nouvelle technique potentielle. Nous entrevoyons en effet les glissements possibles d'une sorte de naturalisation de cette façon d'interagir, vers une technique confirmée, ce qui ferait courir le risque de la réduire à une simple méthode : le jeu de tâches est avant tout une interaction de connaissances qui suppose l'investissement des deux parties.

1 Le jeu de tâches exploité dans un mémoire de maitrise

Thévenaz (2010) montre dans son mémoire mention enseignement, comment elle a créé des jeux de tâches autour de la notion de puissances et ce que ces jeux lui ont apporté, ainsi qu'aux élèves interrogés. Elle s'est autorisé à improviser à partir de ce que l'élève a dit ou fait et s'est laissée emmener assez loin dans les relations qu'elle a pu établir entre ce savoir, les connaissances des élèves et les siennes.

Elle montre habilement deux choses : premièrement, bien que l'ossature soit construite au préalable par l'étudiante-chercheuse (liste de jeux de tâches, comme autant de cartes possibles à abattre dans le jeu entre ses élèves et elle), ce sont toutefois les interactions entre élève-s et chercheuse qui en constituent la chair. Distinction entre *cartes du jeu de tâches* et *jeu de tâches effectif*.

Du point de vue de la formation, ce qui nous semble intéressant pour la suite de nos travaux est de constater à la fois la manière dont un objet peut enthousiasmer une étudiante-chercheuse et comment, par le biais du jeu de tâches, cette dernière s'est laissée aller à sa propre exploration.

Nous proposons quelques tâches issues de son travail afin d'en illustrer l'enchaînement, miroir du fil de sa pensée, des connaissances invoquées dans l'interaction et des représentations exprimées à travers ses choix.

La tâche de départ, un exercice du manuel officiel : « *Cette semaine, j'écris à quatre copains. La semaine prochaine, chacun d'eux écrira une carte à quatre autres de ses amis, lesquels feront de même la semaine suivante, et ainsi de suite. Combien de personnes au maximum recevront une carte, la quatrième semaine ? Et à la fin de la dixième semaine ?* ».

Le jeu de tâches effectif qui s'en est suivi :

1. Lancement de la tâche de départ. Les élèves font des multiplications et non des puissances → Faire représenter la situation de départ à l'aide de dessins, de schémas ou d'arbres.
2. Les élèves dessinent le résultat et non la situation → Faire construire et explorer le triangle de Pascal.
3. Les élèves font diverses découvertes, dont celle des puissances de 2 → Se servir de cette découverte pour revenir à la tâche de départ.
4. Comparer la-les découverte-s dans le triangle avec les résultats de la tâche de départ → Cela ne suffit pas pour que les élèves fassent le lien entre les puissances et la tâche de départ → La construction d'un arbre peut les aider à faire ce lien.
5. Construire un arbre qui représente la tâche de départ → L'arbre nous permet de faire le lien entre les puissances et la tâche de départ → Continuer les recherches dans le triangle de Pascal.

Nous relevons que la liberté que cette étudiante s'est permise concernant une tâche du manuel lui est donnée par sa propre utilisation du jeu de tâches. Il y a une interaction de connaissances entre les siennes et celles des élèves que l'on l'observe, par exemple, dans le passage au triangle de Pascal : ce que font les élèves la renvoie à ses propres connaissances, qui se traduisent par la proposition de travailler avec le triangle de Pascal. Nous pouvons nous demander dans quelle mesure l'étudiante se serait autorisée ce détour, par ailleurs fort intéressant, si elle avait mené une leçon de façon plus habituelle.

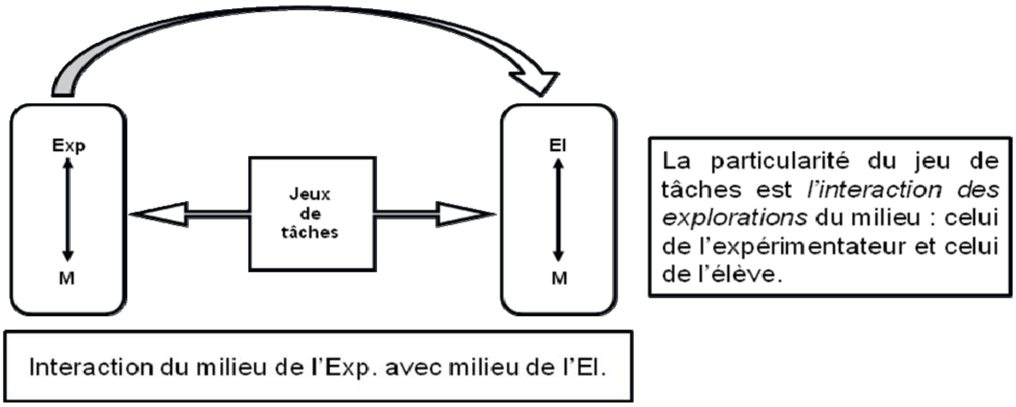
V - CONCLUSION

A la suite des travaux de DDMES (2003) et Favre (2008), nous souhaitons continuer à développer la notion de jeu tâches, que nous considérons comme une idée forte, sans qu'il soit dans notre intention d'en faire un outil ou une technique parmi d'autres. Pour nous, il s'agit bien de l'envisager comme un élément de l'interaction mathématique entre des élèves, un savoir et un chercheur et/ou professeur. Pour l'instant, il est un instrument de recherche qui nous permet d'investiguer le milieu.

Nos observations montrent que l'intérêt des élèves *s'auto-alimente* ; tant que la situation se présente à eux comme problématique, la dimension de recherche est maintenue, il n'en faut pas plus.

Il y a un jeu difficile pour le chercheur et/ou le professeur pour maintenir cet état. Avant tout, il s'agit de se mettre en position de suivre la pensée de l'élève, et de ne se permettre de la diriger qu'en la poussant, par l'arrière, et non en la tirant vers le but que l'on s'est préalablement fixé. Les apprentissages ne manqueront pas, et il sera toujours possible de référer l'expérience ainsi acquise à des savoirs que l'on enseignera ultérieurement, plus directement, voire même frontalement.

Pour terminer, nous insistons une dernière fois sur ce qui nous semble le plus important : le jeu de tâches comme une interaction de connaissances entre l'expérimentateur et l'élève et par conséquent, comme une interaction des explorations du milieu respectives.



VI - BIBLIOGRAPHIE

BLOCH I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherche en didactique des mathématiques* ***19/2****, 135-193*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieux dans la théorie des situations, in *Actes de la XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHARRIÈRE G. & al. (1991). Sur les pistes de la mathématique en division moyenne, *cahier n° 40 du Service de la Recherche Pédagogique*, Département de l'instruction publique, Genève.

CONNE F. (1992). *Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique*. *Didactique des mathématiques*, Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 1996.

DDMES (2003). L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence, in *Actes du Séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris, 28-29 mars.

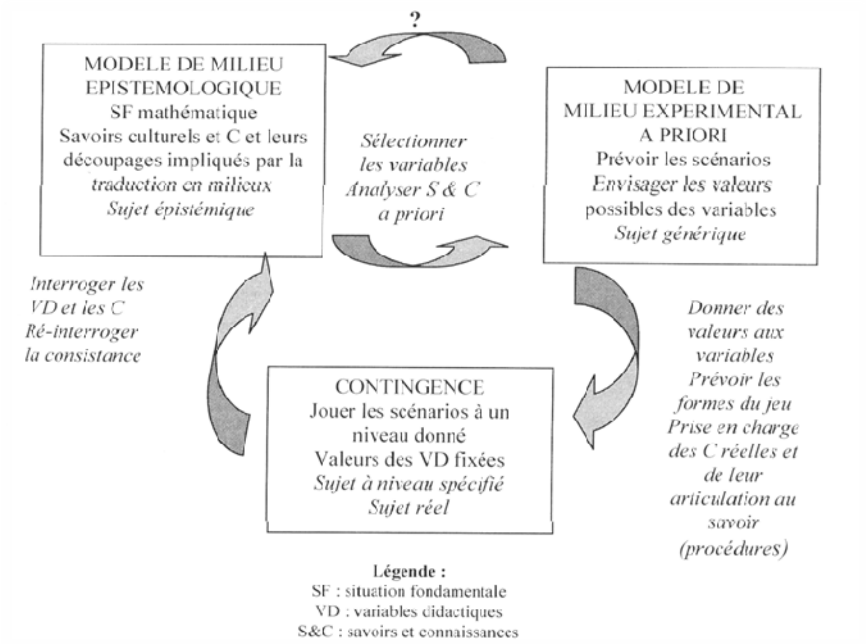
DEL NOTARO C. (2010). Chiffres mode d'emploi. Exploration du milieu mathématique et expérience à l'école primaire autour de quelques critères de divisibilité. Thèse de doctorat, Genève. http://archive-ouverte.unige.ch/unige:11825

FAVRE J.-M. (2008). Jeux de tâches. Un mode d'interactions dynamique pour aménager des expériences mathématiques aux acteurs de la relation didactique dans l'enseignement spécialisé, *Grand N*, ***82***, 9-30, IREM de Grenoble.

THÉVENAZ K. (2010). Un exemple de jeu de tâches pour explorer le milieu des puissances en 6P. Mémoire de licence en sciences de l'éducation, Université de Genève.

VII - ANNEXES

Annexe 1. Schéma de Bloch, 2002.



PRÉSENTATION DE L'OUTIL MULTIMEDIA « ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES EN MATERNELLE – QUANTITÉS ET NOMBRES EN IMAGES »

Muriel FENICHEL
PIUFM, IUFM de Créteil, Université Paris Est Créteil
muriel.fenichel@orange.fr

Marie-Sophie MAZOLLIER
PIUFM, IUFM de Créteil, Université Paris Est Créteil
marie-sophie.mazollier@u-pec.fr

Résumé

Dans cette communication nous avons présenté le coffret multimédia « Enseigner les mathématiques en maternelle – quantités et nombres en images » troisième volet d'un ouvrage concernant l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et destiné à la formation des enseignants.
Nous avons exposé les principaux points permettant l'appropriation de cet outil constitué d'un DVD et d'un DVDROM.
À l'aide d'exemples détaillés mettant en évidence les liens entre le DVD et le DVDROM, et de notre expérience acquise tant lors de la conception des séances que de leurs tournages, nous avons proposé des pistes d'exploitation pour la formation initiale et continue concernant l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle, dans le cadre de la construction du nombre, mesure de quantités discrètes.

I - INTRODUCTION

Cet outil multimédia est consacré à l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle. Il concrétise le troisième volet de la finalisation de notre projet. Il s'inscrit dans la poursuite de ce dernier dont les deux premiers volets ont été publiés par le Scéren CRDP de Créteil dans la collection « Professeur aujourd'hui » sous la forme de deux coffrets :

Enseigner les mathématiques au cycle 2
Deux situations d'apprentissage en images
« Combien de bûchettes ? »
« Le petit moulin »

Enseigner les mathématiques au cycle 3
Deux situations d'apprentissage en images
« L'enveloppe des nombres »
« Le cercle sans tourner en rond »

Dans les précédents coffrets concernant ces cycles, nous avions abordé un autre aspect concernant ce domaine : la numération. L'ensemble des trois coffrets permet ainsi de donner un aperçu sur la construction du concept de nombre à l'école primaire.

Cet ouvrage contient une réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle avec la prise en compte de deux axes complémentaires :

- Un axe didactique s'appuyant sur des résultats de recherches concernant l'approche du concept de nombre dont l'objectif est d'apporter des éléments pour construire une progression aux futurs enseignants et à ceux déjà en poste.
- Un axe plus pédagogique concernant le rôle du choix de l'organisation de la classe et celui du langage dans la construction des apprentissages à l'école maternelle.

II - LES SUPPORTS QUI CONSTITUENT L'OUTIL MULTIMÉDIA

Il est constitué d'un DVD et d'un DVD-ROM d'accompagnement.

Le DVD et le DVD-ROM sont deux outils complémentaires, ils ne peuvent être utilisés l'un sans l'autre. Lorsque des passages du DVD ne permettent pas d'illustrer suffisamment certains aspects didactiques ou pédagogiques, ils sont signalés par un logo qui engage l'utilisateur à aller consulter le DVD-ROM afin d'approfondir sa réflexion. Les parties d'analyse se rapportant à ces passages sont indiquées par le même logo. Réciproquement, certains passages du DVD-ROM sont illustrés par des extraits de vidéos.

1 Le DVD-ROM

Il contient les outils nécessaires à l'analyse didactique et pédagogique des séances filmées (éléments théoriques, place dans la progression, description détaillée, analyse a posteriori, pistes d'utilisation pour la formation), une présentation des conditions qui permettent de faire de la maternelle un lieu d'apprentissage ainsi qu'une bibliographie.

Sur la page d'accueil apparaissent cinq rubriques, les trois décrites ci-dessous, la bibliographie et les crédits.

1.1 La rubrique « Présentation »

Elle contient :

- une description rapide des classes avec lesquelles nous avons travaillé,
- l'architecture du DVD ainsi qu'un résumé de chacune de ses parties avec les durées des vidéos qui le composent,
- l'architecture du DVD-ROM ainsi qu'un résumé de chacune de ses parties,
- des informations concernant les liens entre les deux supports.

1.2 La rubrique « Le nombre, mesure de quantités »

À l'école maternelle, le nombre peut être utilisé pour mesurer des quantités discrètes (une quantité discrète est une quantité dont la mesure s'exprime avec des nombres entiers naturels) ou pour repérer la position d'un objet dans une liste ordonnée d'objets.

Pour des raisons matérielles de conception, nous n'avons développé que le premier aspect et nous avons donné quelques pistes pour aborder le deuxième.

Cette rubrique contient trois entrées : « les difficultés », « pour construire une progression » et « les situations ».

Les difficultés

Dans cette partie, nous exposons les difficultés rencontrées par les élèves dans la construction du concept de nombre. C'est l'analyse de ces dernières qui a justifié nos choix dans la construction, d'une part, de la progression et d'autre part, des situations.

Elles sont illustrées soit par de courts extraits de vidéos, soit par des situations que nous n'avons pas pu filmer. En formation, il est possible de montrer les différents extraits en demandant d'analyser les erreurs et de faire des hypothèses sur leur origine.

Voici les difficultés que nous avons illustrées.

Lors de la construction des premières quantités, certains élèves récitent la comptine sans la relier à la quantité : ils n'associent pas aux mots-nombres énoncés la quantité qu'ils désignent. Cette procédure trop tôt introduite bloque chez certains élèves la perception des quantités (Brissiaud). Le recours systématique au comptage pour dénombrer une collection de quatre éléments ou moins est souvent prédictif de difficultés à venir en arithmétique.

Lors de l'introduction et l'utilisation de la procédure de comptage, pour que cette dernière puisse permettre la mesure de la taille d'une collection, il est nécessaire de faire abstraction :

- des qualités des éléments qui la constituent. Certains élèves ont du mal à se détacher des propriétés des éléments de la collection : pour constituer une collection de trois perles, ils ne prennent que des perles de la même couleur et/ou de la même forme.
- de l'ordre dans lequel les éléments sont comptés. Certains élèves ne sont pas persuadés que lorsqu'on change l'ordre dans lequel on a compté les éléments d'une collection, la taille de cette dernière reste inchangée.

La procédure de comptage nécessite la coordination de deux tâches :

- La connaissance de la comptine numérique
- Le pointage par le doigt ou le regard de chaque élément pris tour à tour jusqu'à ce que tous aient été considérés exactement une fois (énumération).

Il s'agit de mettre en relation à la fois une dimension verbale et une dimension motrice, et de les coordonner (Fayol).

Certains élèves ne maîtrisent pas la connaissance d'une partie stable de la comptine numérique et donc ne peuvent pas l'utiliser pour trouver la taille d'une collection.

Des élèves ont du mal à coordonner la récitation de la comptine numérique avec l'énumération des éléments de la collection.

D'autres ont du mal à énumérer les éléments d'une collection, en particulier lorsque cette dernière est nombreuse et/ou constituée d'objets non manipulables.

Lors de la construction de quantités à partir d'autres, le recours systématique à la procédure de comptage bloque chez certains élèves la prise en compte des relations entre les quantités. Par exemple, pour représenter 7 avec ses doigts, une élève utilise le comptage en levant un doigt à chaque mot nombre énoncé jusqu'à obtenir 7 doigts levés : 5 sur une main et 2 sur l'autre. Elle ne peut concevoir qu'une collection de 7 puisse être représentée par 4 doigts sur une main et 3 sur l'autre, le nombre 7 correspondant nécessairement, pour elle, à l'index de la deuxième main.

Pour construire une progression

Dans cette partie, nous exposons les références théoriques sur lesquelles nous nous sommes appuyées, les différents éléments à prendre en compte dans la construction de l'apprentissage du concept de nombre comme mesure de la quantité ainsi que quelques repères pour construire une progression.

Nous proposons des situations construites en référence à la théorie des situations de Guy Brousseau[1], à la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud[2] et aux apports de Rémi Brissiaud.[3]

La construction du nombre s'élabore à travers des situations pour la résolution desquelles ses différents aspects sont convoqués. Dans les situations que nous avons choisies, différents types de tâches sont demandées aux élèves :

---

[1] Brousseau G. (1986), *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherche en didactique des mathématiques, vol. 7.2, La Pensée sauvage

[2] Vergnaud G. (1991), *La théorie des champs conceptuels*, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 10, nos 2-3, La Pensée sauvage

[3] Brissiaud Rémi (2007), *Premiers pas vers les maths*, Retz

- ❖ Construire une collection dont le nombre d'éléments est le même que celui d'une collection de référence,
- ❖ Comparer deux collections du point de vue de leur taille,
- ❖ Répartir les éléments d'une collection en deux sous collections,
- ❖ Réunir deux collections pour en obtenir une troisième,
- ❖ Compléter une collection.

Nous évoquons les procédures que peuvent utiliser les élèves dans la résolution de ces tâches. Nous en avons distingué deux : les procédures non numériques (la procédure perceptive, la correspondance terme à terme) et les procédures numériques (le « subitizing », l'usage de collections-témoins, la procédure de comptage, les procédures s'appuyant sur les relations entre les nombres)

Nous proposons des repères pour construire une progression :

- ❖ Commencer à approcher le concept de nombre comme mesure de quantités discrètes sans avoir recours à la procédure de comptage (PS et MS),
- ❖ Introduire et étendre la procédure de comptage (MS),
- ❖ Donner du sens à la procédure de comptage (MS et GS),
- ❖ Construire des quantités à partir d'autres : commencer à résoudre des problèmes portant sur des quantités (MS et GS).

Les situations

Nous avons classé ces situations en tenant compte de la progression que nous avons choisie (cf. paragraphe précédent) :

- ❖ Construire les premières quantités,
- ❖ Introduire la procédure de comptage,
- ❖ Donner du sens à la procédure de comptage,
- ❖ Construire des quantités à partir d'autres.

Dans cette partie, nous exposons les différentes situations que nous avons filmées avec tous les éléments nécessaires à leur mise en œuvre (objectifs, matériel, organisation de la classe, déroulement), leur analyse a posteriori, des pistes d'utilisation des extraits filmés à des fins pédagogiques et didactiques en formation initiale ou continue.

Vous trouverez en annexe un exemple issu de l'étape « Construire les premières quantités ».

1.3 La rubrique « La construction des apprentissages »

Dans cette rubrique, nous avons essayé de mettre en évidence ce qui permet aux enseignants de construire un environnement favorable pour que l'école maternelle soit un lieu d'apprentissage pour tous les élèves.

Comme nous n'avons pas pu matériellement placer de vidéos concernant cette rubrique dans le DVD, nous avons choisi d'illustrer cette rubrique en insérant de courts extraits de vidéos indiqués par une caméra dans le contenu.

Nous évoquons :

- Les éléments théoriques sur lesquels nous nous sommes appuyés.
- Les différents points à prendre en compte par les enseignants à savoir :
  - ❖ Le fait que les apprentissages se construisent dans la durée,
  - ❖ Le choix des variables qu'elles soient pédagogiques ou didactiques,
  - ❖ Le choix de différentes formes d'organisation de la classe,

    Travailler en présence de l'enseignant avec toute la classe,

    Travailler en présence de l'enseignant en petits groupes,

    Travailler en présence de l'enseignant avec un seul élève,

    Travailler en autonomie.

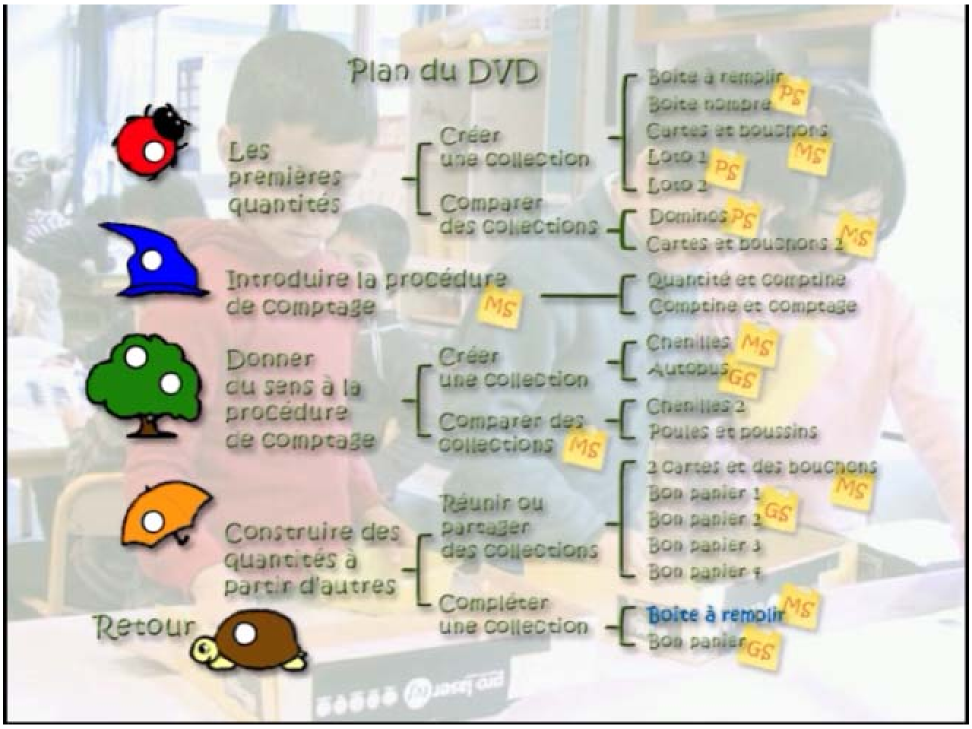
- Le rôle du langage
  - *Du côté de l'enseignant*

    Son rôle est alors essentiel dans la construction de ces connaissances. C'est lui qui va apprendre aux élèves à désigner les objets mathématiques, à donner du sens à certaines expressions, qui va organiser des moments collectifs de synthèse ou en petits groupes lors desquels certains apprentissages en jeu seront explicités, qui va mettre en lien des situations dont l'habillage est différent mais dont l'objectif est le même afin d'en extraire les connaissances en jeu.
  - *Du côté des élèves*

    « Dans la classe, l'élève n'est pas seul, il est membre d'un groupe confronté très souvent aux mêmes tâches que lui. Au-delà des enjeux essentiels de la socialisation et de la formation de l'identité, cette appartenance à un même groupe de pairs, impliqués dans la même tâche, est un élément essentiel de la construction de compétences cognitives. Ces interactions sont multiples. » [4]. Par exemple, aide ou tutelle lorsqu'un élève indique à un autre comment il pourrait faire, ce qu'il aurait pu faire, ce qu'il n'arrive pas à faire, conflit socio-cognitif lorsque les élèves confrontent leurs représentations ou lorsqu'ils ne sont pas d'accord sur un résultat obtenu.

2 Le DVD

Le contenu du DVD comporte à la fois des extraits de séances filmées et des morceaux d'entretiens que nous avons eu à chaud avec les enseignantes à l'issue de chaque séance. Ces extraits sont issus de moments filmés dans cinq classes du Val de Marne (une classe de PS, une classe de PS-MS, deux classes de MS et une classe de GS). Ces derniers illustrent les étapes de la progression que nous avons choisie pour construire le concept de nombre comme mesure des quantités discrètes.



[4] Ibid

La page d'accueil du DVD comporte six entrées :

- Les premières quantités,
- Introduire la procédure de comptage,
- Donner du sens à la procédure de comptage,
- Construire des quantités à partir d'autres
- Plan du DVD,
- Crédits.

Le plan du DVD permet d'avoir accès directement aux extraits filmés des situations. Il permet d'accéder à chacune des entrées du DVD choisie par l'utilisateur. Il lui suffit de cliquer sur le titre choisi à l'aide de la souris. A l'issue de chaque vidéo, la rubrique « retour » permet de revenir au plan du DVD.

2.1 Les premières quantités

Il s'agit de construire les premières quantités (jusqu'à 3 ou 4) indépendamment de la procédure de comptage. Certaines des situations ont été proposées aux élèves de petite section et d'autres à des élèves en difficulté de moyenne section.

Deux types de tâches sont convoqués dans ces situations. Ces dernières correspondent à deux rubriques et chacune d'entre elle est illustrée par des passages filmés de situations désignées par leur nom :

- ***Créer une collection ayant autant d'éléments qu'une collection de référence***
  Boîte à remplir (PS)

  Boîte nombres (PS)

  Cartes et bouchons (MS)

  Loto 1 (PS)

  Loto 2 (PS)

- ***Comparer des collections du point de vue de leur taille***
  Dominos (PS)

  Cartes et bouchons (MS)

2.2 Introduire la procédure de comptage

Il s'agit d'illustrer l'introduction de la procédure de comptage aux élèves de MS en l'utilisant d'abord pour vérifier le nombre d'éléments d'une collection comportant un petit nombre éléments (3 ou 4) que les élèves peuvent percevoir sans avoir recours à cette procédure. Puis ensuite, il s'agit d'étendre cette procédure en faisant prendre conscience aux élèves que la comptine (suite des mots nombres) est un instrument de mesure de la taille des collections.

Deux rubriques illustrent cette entrée :

- ***Quantité et comptine***
  Cette rubrique est illustrée par des passages filmés de deux situations proposées à des élèves de moyenne section : sacs opaques et plumier.
- ***Comptine et comptage***
  Cette rubrique est illustrée par des passages filmés de deux situations proposées à des élèves d'une même classe de moyenne section : boîte opaque et plumier et d'une autre situation proposée à des élèves d'une autre classe de moyenne section : boîtes à remplir.

2.3 Donner du sens à la procédure de comptage

Une fois la procédure de comptage introduite, il s'agit de proposer aux élèves des situations dont l'objectif est de lui donner un sens en l'utilisant.

Certaines des situations ont été proposées aux élèves de moyenne section et d'autres à ceux de grande section. Deux types de tâches sont convoqués et correspondent à deux rubriques, chacune d'entre elle étant illustrée par des passages filmés de situations désignées par leur nom.

- **Créer une collection**
  Chenilles (MS)
  Autobus (GS)
- **Comparer des collections**
  Chenilles (MS)
  Poules et poussins (MS)

2.4 Construire des collections à partir d'autres

Il s'agit de commencer à mettre en évidence les relations entre les nombres et d'approcher la résolution de problèmes du champ conceptuel additif/soustractif. Nous avons choisi de proposer aux élèves de MS ou de GS des situations de composition de mesures dans lesquelles trois collections sont en jeu, l'une étant la réunion de deux autres.

Deux types de tâches sont convoqués et correspondent à deux rubriques chacune d'entre elle étant illustrée par des passages filmés de situations désignées par leur nom.

- ***Réunir ou partager des collections***
  Deux cartes et des bouchons (MS)
  Bon panier 1 (GS)
  Bon panier 2 (GS)
  Bon panier 3 (GS)
  Bon panier 4 (GS)
- ***Compléter une collection***
  Boîtes à remplir (MS)
  Bon panier (GS)

Nous aurions souhaité illustrer par des extraits filmés inclus dans le DVD les conditions qui permettent de faire de l'école maternelle un lieu d'apprentissage (rôle de l'organisation de la classe, prise en compte de la durée dans la mise en place des connaissances, rôle du langage, choix des variables) mais la taille du support étant limitée, cela s'est avéré impossible. Nous avons alors choisi d'évoquer cet aspect dans le DVD-ROM en l'illustrant pas quelques extrais vidéo.

III - L'ILLUSTRATION DES LIENS ENTRE LE DVD ET LE DVD-ROM

À partir d'un exemple détaillé, nous avons proposé des pistes d'exploitation pour la formation initiale et continue en mettant en évidence les liens entre le DVD et le DVD-ROM.

Nous avons montré des extraits du DVD-ROM illustrant les difficultés des élèves à accéder aux premières quantités lorsqu'ils ont recours à la procédure de comptage. L'analyse de ces dernières nous ont permis de construire des situations qui, proposées suffisamment tôt, doivent permettre aux élèves de ne plus les rencontrer. Nous avons donc donné l'exemple de la situation « boîtes à remplir » (cf. annexe) proposée à des élèves de PS en montrant :

- La partie du DVD-ROM exposant tous les éléments nécessaires à sa mise en œuvre (objectifs, matériel, organisation de la classe, déroulement),
- L'extrait vidéo du DVD,
- La partie du DVD-ROM proposant des pistes d'utilisation des extraits filmés à des fins pédagogiques et didactiques en formation initiale ou continue,
- La partie du DVD-ROM exposant l'analyse a posteriori de la situation dans laquelle on trouve les éléments de réponses concernant les différents points évoqués lors d'une séance de formation.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BIDEAUD J., MELJAC C., FISCHER J.P (1991) *Les chemins du nombre*, Presses universitaires de Lille.

BIDEAUD J., MELJAC C., FISCHER J.P (2004) *La conquête du nombre et ses chemins chez l'enfant*, Presse universitaire du Septentrion.

BRIAND J., LOUBET M., SALIN M.-H. (2004) *CD ROM Apprentissages mathématiques en maternelle*, Hatier.

BRISSIAUD R. (2007), *Premiers pas vers les maths*, Retz.

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, in *Recherches en didactiques des mathématiques*, 7.2, La Pensée sauvage.

ERMEL (1990) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. GS*, Hatier.

ESCOL sous la direction de BAUTIER E. (2006) *Apprendre à l'école, apprendre l'école*, Chronique sociale.

FAYOL M. (1990) *L'enfant et le nombre*, Delachaux et Niestlé.

FAYOL M. (Octobre 2004) Compter sur ses doigts, une étape nécessaire in *La Recherche*,°379

NEY L. RAJIN C., VASLOT E. (2006) *Des situations pour apprendre le nombre, cycle 1 et GS*, Scéren CRDP Champagne-Ardenne.

PIERRARD (2002) *Faire des mathématiques à l'école maternelle*, Scéren CRDP Grenoble.

VALENTIN D. (2004) *Découvrir le monde avec les mathématiques ; situations pour la petite et la moyenne section*, Hatier

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels in *Recherches en didactique des mathématiques*, 10,2-3, La Pensée sauvage ;

V - ANNEXE (EXEMPLE DE SITUATION)

Boîtes à remplir (PS)[5]

Objectifs **:** construire les premières quantités indépendamment du comptage et apprendre à les désigner.

Matériel : des boîtes composées d'alvéoles vides (boîte de chocolats, boîtes à œufs…) et des objets pour remplir les boîtes.

Variables :

- Le nombre d'alvéoles, ici entre un et trois.
- La disposition des alvéoles dans la boîte.
- Les objets destinés à remplir les alvéoles : ils peuvent être identiques ou différents, remplir ou non une alvéole.
- La disposition spatiale des objets par rapport à celle des boîtes : ils peuvent être ou non à proximité des boîtes.

Organisation de la classe : en petits groupes.

Déroulement

Séance 1 : *appropriation du matériel en autonomie*

Tâche : remplir les boîtes avec la contrainte de ne mettre qu'un seul objet dans chaque alvéole.

Une boîte est dite « remplie » lorsqu'il y a un objet et un seul dans chacune de ses alvéoles. Il en sera ainsi pour toutes les séances avec ce matériel.

[5] D'après la situation « Les boîtes d'œufs » de l'ouvrage « Découvrir le monde avec les mathématiques ; situations pour la petite et la moyenne section » D. Valentin 2004 (Hatier)

Séance 2 : appropriation de la tâche en présence de l'enseignant

Les objets sont à proximité des boîtes.

Tâche : Remplir une boîte donnée par l'enseignant en mettant juste ce qu'il faut d'objets pour que la boîte soit remplie.

L'enseignant nomme les quantités.

Phase 1

Consigne : « Remplissez ces boîtes. Il ne doit pas rester d'alvéole vide. »

Une fois les boîtes remplies, l'enseignant demande de montrer les boîtes contenant 1, 2 ou 3 objets.

On constate qu'une quantité ne dépend pas de la disposition spatiale des alvéoles et des objets utilisés pour les remplir.

Phase 2

Consigne : « Remplissez les boîtes qui contiennent 1 (ou 2, ou 3) objets. Il ne doit pas rester d'alvéole vide. »

Séance 3 Situation problème en présence de l'enseignant

Cette fois les objets sont éloignés et non visibles.

Tâche : Aller chercher en une seule fois juste ce qu'il faut d'objets pour remplir la boîte sans l'emporter. Les élèves disposent d'une barquette pour transporter les objets.

Consigne : « Vous devez aller chercher juste ce qu'il faut d'objets (marrons, perles…) pour que votre boîte soit remplie. Il ne doit pas rester d'alvéole vide. Il ne doit pas rester d'objets (marrons, perles,…) dans la barquette. »

Pour résoudre le problème, les élèves peuvent mémoriser la disposition spatiale des alvéoles, la quantité en utilisant ou non les doigts de la main comme collection témoin.

Si les élèves réussissent, on peut faire l'hypothèse qu'ils ont accès aux quantités des collections ayant jusqu'à trois éléments.

Pour être sûr de leurs acquis, cette phase sera reprise plusieurs fois avec des boîtes et des objets différents.

Certains élèves réussissent sans savoir nommer la quantité.

Analyse didactique

Cette situation a été proposée au mois de janvier : c'est la première situation construite dont l'objectif est la construction des premières quantités. Lors des rituels, les deux enseignantes ont travaillé uniquement sur le nombre d'absents sans jamais utiliser le comptage de un en un. Elle pourrait aussi être mise en œuvre en MS, en début d'année ou plus tard avec certains élèves en difficulté.

Dans les deux classes, celle de Mélanie et celle de Pascale, les objets utilisés pour remplir les alvéoles sont de natures différentes : des marrons dans la classe de Mélanie et des jetons dans celle de Pascale. Un seul marron remplit une alvéole alors qu'il est possible de mettre plusieurs jetons pour la remplir. Dans ce cas, les élèves peuvent mettre plus de temps pour tenir compte de la contrainte : « un seul objet dans chaque alvéole » mais s'ils réussissent, on peut aussi faire l'hypothèse qu'ils font le lien entre la quantité d'alvéoles et la quantité d'objets.

La formulation de la consigne par les deux enseignantes n'est pas la même. Mélanie demande d'abord aux élèves « d'aller chercher juste ce qu'il faut de marrons pour remplir la boîte » puis, lorsqu'elle distribue la boîte avec trois alvéoles, donne la consigne suivante : « Vous regardez bien combien on peut mettre de marrons dans la boîte et vous prenez vos barquettes et vous allez chercher juste ce qu'il faut ». Pascale demande aux élèves « de mettre dans le panier (barquette) exactement les jetons qu'il faut pour en mettre un dans chaque trou (alvéole) ».

Pascale ne fait pas référence au nombre (à la quantité) dans sa consigne alors que Mélanie le fait par l'utilisation du mot « combien ». Cette référence implicite est tout à fait en adéquation avec l'objectif des séances puisqu'il s'agit de construire les premières quantités, c'est-à-dire d'amener les élèves à distinguer les collections selon le critère quantité et à donner un nom à ces quantités (comme on le ferait pour les couleurs ou les formes).

Lors de cette séance, la troisième de la séquence, la réserve d'objets est éloignée de la table de travail et les élèves doivent se déplacer sans emporter leur boîte à remplir pour aller chercher les quantités nécessaires. Cet éloignement oblige les élèves à mémoriser d'une façon ou d'une autre les quantités d'alvéoles et donc d'objets à rapporter. Ils doivent donc s'en forger une image mentale. Ils ne sont pas obligés d'utiliser la procédure de comptage pour répondre à la question puisque les quantités d'objets sont inférieures à trois (il est même souhaitable, c'est l'enjeu de la situation, qu'ils n'aient pas recours à cette procédure).

Lorsque les élèves ont ramené les marrons et rempli leur boîte, Mélanie leur demande combien ils ont de marrons dans leur boîte. Pour répondre à la question, seule Shérina utilise la procédure de comptage mais elle n'a pas ramené la bonne quantité de marrons. Cette procédure qui n'est pas encore opérationnelle est une réponse formatée à la question « Combien ? », apprise à l'extérieur de la classe.

Dans la classe de Pascale, lorsqu'elle demande aux élèves comment ils ont fait pour réussir, Cécilia et Zeyd, utilisent les doigts de leur main comme collection témoin. Ce dernier place un doigt dans chaque alvéole. Johan semble utiliser correctement la procédure de comptage.

Dans les deux classes, lors du premier essai, les élèves échouent : ils ramènent plus d'objets que d'alvéoles. Il s'agit d'abord pour eux, de remplir la boîte, peu importe s'il reste des objets dans la barquette. Ce n'est qu'après analyse avec l'enseignante, qu'ils vont pouvoir donner du sens à la consigne : la boîte doit être remplie avec un seul objet dans chaque alvéole et la barquette doit être vide. Cette erreur peut donc venir de la complexité de la consigne mais également du rôle joué par la barquette. Les élèves ont la tentation de la remplir complètement, en particulier avec les marrons. Cependant, il nous semble que cette barquette est importante : elle permet un retour sur les contraintes, elle laisse une place à l'erreur et elle permet de différer le remplissage des boîtes au retour des élèves. De plus, elle évite que les objets des uns se mélangent avec les objets des autres sur la table de travail.

Dans les deux classes, certains élèves réussissent sans connaître la désignation orale du nombre. Marie-Carole montre les quantités avec ses doigts. Cécilia confond les mots « deux » et « trois » bien qu'elle réussisse.

Le rôle du langage dans la construction des apprentissages est important. On en a vu un exemple dans le choix de la formulation de la consigne. C'est à l'enseignant d'utiliser les mots justes pour désigner les quantités de façon à ce que les élèves les apprennent, c'est un des objectifs de la situation. Il est à noter que les élèves peuvent réussir sans connaître les noms des nombres. Cette séance peut être prolongée par une séance lors de laquelle les élèves devront commander verbalement les objets.

Mélanie choisit de donner aux élèves du groupe des boîtes dont le nombre d'alvéoles est le même en respectant l'ordre croissant de ce nombre (d'abord les boîtes « un », puis les boîtes « deux », etc.) afin de permettre, pour débuter, une confrontation plus aisée des réponses. Elle leur donne ensuite des boîtes différentes et dans le désordre.

Lors de cette séance, les erreurs ont été plus nombreuses lorsqu'il a fallu remplir les boîtes à trois alvéoles.

D'autre part, Mélanie favorise les interactions entre les élèves en leur demandant de valider le travail des uns et des autres. Nous faisons l'hypothèse que l'on apprend mieux à plusieurs et, de plus, apprendre aux élèves à argumenter dès leur plus jeune fait partie des objectifs de l'enseignement des mathématiques.

Pistes pour la formation

Il est possible de :

- Demander aux stagiaires de lister et d'analyser tous les paramètres de cette situation en comparant les extraits filmés dans les deux classes : consigne, matériel (barquette, taille des objets à placer dans les alvéoles), rôle du langage, ordre de proposition des boîtes, situation de communication ou non (les élèves prennent les objets eux-mêmes ou les demandent à autrui, non filmé), rôle de l'éloignement des objets, etc.

- Faire comparer cette situation avec celle qui consisterait à demander aux élèves de rapporter un nombre déterminé d'objets : « Va chercher trois marrons. ». Situation qui nécessite la connaissance du nom des nombres.

L'EXEMPLE DU RAISONNEMENT PAR ANALYSE ET SYNTHÈSE EN TANT QUE CONNAISSANCE MATHÉMATIQUE NÉCESSAIRE POUR ENSEIGNER LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Yves MATHERON
Maître de conférences, IFÉ-ÉNS de Lyon
IREM d'Aix-Marseille & UMRP3-ADEF
yves.matheron@free.fr

Annie NOIRFALISE
Maître de conférences honoraire, IREM de Clermont-Ferrand
annie.noirfalise@free.fr

Résumé

Notre propos porte sur les techniques et technologies (discours rationnels justificatifs et producteurs des techniques) relatives à la construction et la reproduction de figures géométriques, à travers l'analyse de propositions contenues dans des manuels de l'école élémentaire (fiches de travaux collectifs, exercices individuels). Ces techniques dépendent de la situation dans laquelle est placé celui dont on attend la réalisation de la tâche. Elles peuvent ne s'appuyer que sur les seuls niveaux perceptifs et moteurs (suivre les contours de la figure, décalquer ; la vérification à l'œil nu de la superposition des deux objets sert alors de justification). Mais les techniques ostensives rencontrent rapidement les limites de leur validité mathématique et devraient, pour la retrouver, relever d'un raisonnement plus théorique, par analyse et synthèse par exemple. Bien évidemment, s'il ne s'agit jamais, à ce niveau, d'utiliser un tel type de raisonnement, la technique utilisée se situe souvent à mi-chemin entre les deux techniques évoquées ci-dessus. Le professeur doit néanmoins être capable de choisir de manière raisonnée les variables des situations proposées, afin de voir mobilisées les propriétés dont l'étude est visée. Il devrait ainsi être amené, au moins dans ses activités de préparation, à conduire de manière plus ou moins implicite un travail d'analyse et synthèse.

I - INTRODUCTION

Une certaine lecture des instructions officielles concernant la géométrie pourrait laisser penser que les élèves de l'école primaire travaillent exclusivement dans un ***monde sensible***, c'est-à-dire dans un espace contenant des objets qui sont accessibles à la fois par le moyen des sens (vue, toucher, etc.) et de la motricité ; monde où l'accomplissement des tâches ne requiert que des techniques visuelles, tactiles, motrices. Ces pratiques peuvent paraître étrangères à un ***monde géométrique*** au sens où l'entendent les mathématiciens, dans lequel les objets ne peuvent être exclusivement perçus par les sens, mais où les tâches relèvent de la manipulation d'énoncés suivant les techniques de la démonstration à l'intérieur d'une théorie mathématique. Toutefois la lecture attentive des instructions montre que, très tôt, les techniques entrainées pour l'appréhension du monde sensible sont intimement liées aux objets du monde géométrique. Depuis sa création, la géométrie a toujours joué un rôle de technologie[1] de la

[1] Rappelons que le terme *technologie* ne renvoie pas, dans ce texte et plus généralement en didactique, au sens qui lui est donné dans le langage courant et qui l'associe à une discipline qui porte ce nom. Le sens premier à lui attribuer relève de son étymologie (*τεχνη* « art manuel » et *λόγος* « parole », « raison ») ; autrement dit, il désigne un discours tenu sur des pratiques, c'est-à-dire sur des types de tâches accomplies grâce à des techniques.

maîtrise pratique de l'espace et lorsqu'il est question, dès l'école maternelle, d'apprendre à se repérer dans différents espaces, à s'y déplacer, à reconnaître et représenter les objets qui s'y trouvent, à coder un déplacement, le vocabulaire et les techniques attendues peuvent se justifier, pour un lecteur ayant une culture mathématique, par un savoir technologico-théorique[2] relevant de la géométrie élémentaire[3] ; ce qui ne veut pas dire qu'en situation, ce même lecteur utiliserait la géométrie pour accomplir les tâches correspondantes. Toutefois il y a de multiples façons de penser une pratique car les praxéologies impliquant un type de tâches dépendent de l'institution où elles sont accomplies, et il est évident qu'elles ne seront pas les mêmes pour un élève de l'école primaire et un mathématicien. Il est donc nécessaire de préciser quels types de rapports au savoir géométrique les instructions officielles engagent à entraîner. Dans un premier temps nous préciserons, à la lecture des textes officiels, les hypothèses que nous faisons à ce sujet. Nous reviendrons ensuite sur certaines études conduites dans ce domaine pour situer nos préoccupations par rapport à leur objet. Enfin nous présenterons les pistes de travail que nous envisageons. Dans ce qui suit, nous centrerons essentiellement notre propos sur l'« étude des formes ».

II - LA GÉOMÉTRIE, TECHNOLOGIE DE LA MAÎTRISE DE L'ESPACE

1 Premiers éléments d'analyse à partir de la lecture des textes officiels

Dans un paragraphe du programme de l'école maternelle de 2008 intitulé « *Découvrir le monde* », et sous le titre « *Découvrir les formes et les grandeurs* », il est indiqué qu'« *en manipulant des objets variés, les enfants repèrent d'abord des propriétés simples (petit / grand ; lourd / léger). Progressivement, ils parviennent à distinguer plusieurs critères, à comparer et à classer selon la forme, la taille, la masse, la contenance* » (p. 15). L'expression « *en manipulant* » évoque des pratiques relevant de techniques sensorielles, essentiellement du touché et de la vue, et mettant en jeu la motricité, mais rien n'est dit des critères à prendre en compte pour les comparaisons et les classifications. Seul est mentionné qu'« *à la fin de l'école maternelle l'enfant est capable de... dessiner un rond, un carré, un triangle* ». Quant à la fonction de ce vocabulaire pour lequel à ce niveau aucune référence n'est faite à la géométrie, et aux conditions de son émergence, le texte est sur ce point encore, muet.

Prenons un exemple. Imaginons un jeu de dominos dont les cases comportent des « ronds, des carrés et des triangles » de différentes tailles et des blancs. Pour jouer, il faut accomplir des tâches du type « reconnaitre un rond, un carré, un triangle » de façon à positionner en contiguïté les cases sur lesquelles la même forme est représentée. La technique est certainement visuelle, mais quelles informations la vue donne-t-elle à un élève de maternelle pour lui permettre de conclure que c'est « un rond, un carré ou un triangle » ? On pourrait dire « c'est un rond parce que ça se voit », mais cette réponse est une description fort sommaire de la technique et ne délivre aucun élément technologique. On peut imaginer puisqu'il est question de manipulations, que le mot rond ait été associé à des objets dont le bord ou la surface roule sous la main, en attirant l'attention sur l'analogie entre les sons « ron » et « rou » (la même consonne et des sons sourds), donc à des objets qui ne sont pas pointus, dont la représentation se fait par un trait continu, fermé et sans à-coups, associant ainsi ce qui est entendu et perçu au touché et à la vue. Ces éléments, verbalisés, peuvent constituer des éléments technologiques pour guider l'élaboration d'une

[2] Au sein d'un groupe social légitimé, quelle que soit sa taille (une *institution* au sens qui lui est donné en anthropologie ; *cf.* Douglas (1999, p. 66)), la technologie remplit trois fonctions : justifier, rendre compréhensible et produire des techniques. Quant à la théorie (de *θεωρεῖν* « observer, contempler »), elle remplit ces trois mêmes fonctions relativement à la technologie ; le terme « théorie » a donc un sens plus large que celui qui lui est ordinairement donné dans, par exemple, l'expression *la théorie des groupes*.
Voir à ce sujet : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf

[3] On trouvera ci-dessous des extraits commentés des instructions officielles concernant l'étude des formes, thème auquel on se limite ici et illustrant notre propos.

technique où l'œil cherche les « bosses » du tracé. Il aura été nécessaire qu'un discours ait été élaboré et accepté pour permettre la production de la technique imaginée de reconnaissance du « rond ». Ce discours aura sans doute été produit au cours d'activités successives rencontrées en dehors de l'école ou choisies par le professeur à cette fin[4]. À leur issue, celui-ci devra organiser le passage d'expériences sensorielles (tactiles, auditives ou visuelles) à leur verbalisation et à leur trace graphique ; ces deux modes de représentation servant en quelque sorte de *compte rendu* commun à ces expériences et constituant des *invariants liés à la forme*. Ces invariants, institutionnalisés, participent alors à l'équipement technologique des élèves qui se voient ainsi accordé le droit de l'utiliser pour accomplir d'autres tâches.

Des scénarios analogues peuvent être envisagés pour le triangle « trois fois pointu », le carré « quatre fois pointu ». Tout ceci pourrait paraître relever de la fiction ; néanmoins, celle-ci n'est pas bien éloignée de ce que l'on rencontre dans les classes. Cet exemple veut attirer l'attention sur l'existence d'un bloc technologico-théorique dans toute praxéologie[5], bloc souvent implicite, sur lequel l'institution ne dit rien ou bien peu et qui, de ce fait, demeure souvent invisible à ses propres sujets (professeurs et élèves). Il est sans doute très éloigné de ce que la communauté des mathématiciens pourrait reconnaître comme appartenant à un bloc technologico-théorique fait d'axiomes explicites ou implicites, de théorèmes et de définitions : dans cette institution, un cercle n'est pas « un rond » et « être pointu » n'a pas de sens. Les exemples qui viennent d'être évoqués montrent aussi la fonction de certains moments didactiques qui, bien que réalisés en acte, sont parfois, eux aussi, passés sous silence : moments de l'élaboration de techniques de reconnaissance des formes, de la constitution de l'environnement technologico-théorique, de l'institutionnalisation.

Les documents d'application des programmes publiés en 2002 postulaient « *certaines figures planes sont reconnues globalement de façon perceptive par les élèves* » en début de cycle 2 (p. 27). Si la reconnaissance est décrite comme relevant d'une activité perceptive, l'expression « *reconnues globalement* » ne permet pas de décrire une quelconque technique et d'inférer des éléments technologiques ; ceci rend impossible la constitution d'invariants évoquée précédemment. La constitution des invariants permettant de reconnaître une forme – invariants qui évolueront au cours de la scolarité – ne devrait pas relever de contingences propres à chaque élève ; pour ne pas être discriminatoire, elle devrait être sous la responsabilité du maître qui la guide en fonction de son développement ultérieur.

Si en maternelle il n'est pas question de géométrie à propos de l'étude des formes, en CP et CE1, un paragraphe du programme de 2008 intitulé « *Géométrie* » fournit quelques directives générales sur ce thème : « *Ils* [les élèves] *apprennent à reconnaître et à décrire des figures planes... Ils utilisent des instruments et des techniques pour tracer des figures planes. Ils utilisent un vocabulaire spécifique* » (p. 18). Suivant cette perspective, dans le tableau donnant « *des repères pour organiser la progressivité des apprentissages…* », une initiation au « *vocabulaire géométrique* » (p. 33) prévoit, dès le CP, la perception et la reconnaissance de « *quelques relations et propriétés géométriques : alignement, angle droit, axe de symétrie, égalité de longueurs* » qui seront entraînées au cours du CE1. Utiliser « *un vocabulaire géométrique élémentaire* » correspondant est

---

[4] Pour une étude beaucoup plus précise on pourra se référer aux travaux de L. Pinet et E. Gentaz (2007) et E. Gentaz (2010). Ces travaux confortent notre thèse ; leur étude montre en effet l'intérêt des éléments technologiques : « l'introduction de la modalité "haptique", (traitement analytique et/ou double codage, visuel et moteur), dans les exercices de reconnaissance des figures et l'utilisation du vocabulaire approprié, aideraient les enfants à mieux se représenter les figures planes ».

[5] « *En toute praxéologie, il y a de la théorie, du théorique, comme il y a du technologique, de la technologie. Dire qu'il existerait, chez une personne ou dans une institution, de la technologie sans théorie, de la technique sans technologie est a priori exclu, ce qui entraîne notamment ceci : derrière ce que fait un enfant de trois ans, la TAD postule qu'on peut apercevoir le jeu de ficelles technologiques et/ou théoriques : même cet enfant qui parle à peine " a de la théorie "* ». CHEVALLARD Y. La diffusion déformante de la TAD, in *Journal du séminaire TAD/IDD*, séance 5 du 15 avril 2011, texte disponible sur Internet aux adresses :

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=176 (où l'on trouve un ensemble d'autres textes) ou http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fdf/2010-2011/tad_idd_11.html suggéré à ce niveau. Il doit permettre de décrire quelques formes : « *un carré, un rectangle, un triangle rectangle ...* » (p. 33). Les propriétés attendues pour chacune des formes ne sont pas précisées. Le programme prévoit l'utilisation de « *règle, quadrillage, papier calque* » en CP, d'« *équerre ou gabarit d'angle droit* » en CE1. En fin de CE1, les élèves doivent être capables d' « *utiliser la règle et l'équerre pour tracer avec soin et précision un carré, un rectangle, un triangle rectangle* » (p. 20).

En cycle terminal, c'est aussi dans un paragraphe intitulé « *Géométrie* » (p. 23) que l'on trouve les directives générales sur ce thème. Par rapport au cycle précédent, quelques ajouts apparaissent :

- concernant des propriétés géométriques : on ne parle plus « *d'angle droit* », mais de « *perpendicularité* » et on ajoute le « *parallélisme* », il s'agit donc de propriétés d'incidence entre droites ; à l'« *égalité de longueurs* » s'adjoint le « *milieu d'un segment » ;*
- concernant les instruments : l'usage du compas est introduit dès le CE2 ;
- concernant les formes étudiées : aux carré, rectangle et triangle rectangle s'ajoutent « *le losange, le parallélogramme, le triangle et ses cas particuliers, le cercle* » (p. 23) ;
- concernant le vocabulaire : au cycle des apprentissages fondamentaux les attentes restaient vagues « *S'initier au vocabulaire géométrique* » ou « *Connaître et utiliser un vocabulaire géométrique élémentaire approprié* » (p. 33), mais dès le CE2 le vocabulaire est précisé « *côté, sommet, angle, milieu* », puis en CM1 « *points alignés, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, segments, milieu, angle,...* » (p. 39) ;
- concernant les techniques attendues. Les formulations condensées, relatives aux techniques, diffèrent peu d'un cycle à l'autre : « *l'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure* » (p. 23), et durant le cycle des apprentissages fondamentaux, « *ils apprennent à reconnaître et à décrire des figures planes et des solides. Ils utilisent des instruments et des techniques pour reproduire ou tracer des figures planes* » (p. 18). Néanmoins on peut faire l'hypothèse que, compte tenu des différences précédemment relevées, les savoir-faire attendus ne sont pas les mêmes en fin de CE1 et en fin de CM2. Précisons ce point.
-

2 Techniques et technologies pour le type de tâches « vérifier la nature d'une figure »

Il n'est pas bien difficile de décrire quelques techniques – et les éléments technologiques correspondants – qui permettent de « *vérifier la nature d'une figure en utilisant la règle graduée, l'équerre, le compas* » ou de « *vérifier la nature d'une figure en ayant recours aux instruments* »[6]. La situation est la suivante : les élèves étant face à un tracé, sur une feuille de papier ou au tableau, ils pensent reconnaître de manière perceptive un objet géométrique, ou encore il se peut que le maître l'ait nommé, et ils doivent « *en ayant recours aux instruments… vérifier la nature [de la] figure* ». Contractuellement, la lecture globale de la figure n'est pas attendue, mais plutôt sa lecture analytique à partir de l'utilisation implicite ou explicite d'un énoncé – celui des propriétés géométriques reconnues caractérisant la forme –, afin de guider les gestes matériels et de justifier la réponse. Derrière l'action de « vérification » demandée aux élèves est émise l'hypothèse implicite qu'il leur est possible de conduire le raisonnement suivant : « pour que l'objet concret – constitué de l'ensemble des tracés à identifier – soit réputé représenter tel objet géométrique, il suffit que telles propriétés géométriques soient vérifiées et que les éléments de la figure les respectent ».

Les propriétés invoquées ne sont pas les mêmes en cycle 2 et en cycle 3. En CE1 par exemple, il s'agit de vérifier que des angles sont droits, mais en CM2 il s'agit plutôt de vérifier que des côtés sont perpendiculaires ; ces vérifications devant être effectuées grâce aux instruments. Dans la figure à étudier, les élèves sont donc appelés à être attentifs aux positions relatives, aux mesures de longueurs, d'angles, etc. Par exemple, pour conclure qu'« un angle est droit » la technique attendue consiste à faire coïncider

[6] BO. hors série n° 3 du 19 juin 2008, page 39.

le sommet de l'équerre avec le sommet de l'angle et à vérifier visuellement la superposition de ses bords avec les côtés de l'angle après avoir fait tourner l'équerre. Tandis que pour conclure que « deux demi-droites sont perpendiculaires », la technique attendue consiste à amener un bord de l'équerre en coïncidence avec une des demi-droites, le sommet de l'équerre étant placé en son origine, l'autre côté de l'équerre coïncidant avec la seconde demi-droite. La mise en œuvre de ces techniques implique des gestes moteurs, visuels, tactiles. Les instruments dont les élèves se servent pour évaluer et qualifier ces positions et mesures (règles, équerre…) sont des objets matériels qui peuvent, au moins contractuellement dans l'institution-classe, être modélisés par des objets géométriques possédant des propriétés connues (égalité de longueur de segments, angle droit, orthogonalité de droites…), et qu'ils modélisent à leur tour. En ce sens, les instruments jouent aussi, en acte, une fonction technologique. Par exemple, pour l'équerre, celle d'une définition : « on appelle angle droit tout angle tel que l'équerre coïncide avec chacun de ses côtés ». Les énoncés des propriétés utilisées ont acquis un « *statut de lois* » dans la classe. Par exemple, une ou plusieurs expériences ont permis de constater un résultat, ou celui-ci a été admis : qu'il s'agisse du lien entre les instruments et les objets géométriques représentés, ou des énoncés des propriétés utilisées. Il a été nécessaire que le résultat qui correspond à la propriété émerge des conditions particulières de son apparition empirique pour qu'il puisse prendre le « statut de loi », et entrer dans le dispositif grâce auquel les élèves peuvent travailler. Ce qui est visible pour un observateur extérieur relève essentiellement du monde sensible, mais les gestes accomplis sont légitimés par les connaissances du monde géométrique jusqu'alors élaborées : en ce sens, la géométrie joue une fonction technologique pour les tâches institutionnellement vues comme relevant de la maîtrise de l'espace. La question qui se pose est alors celle des conditions que le professeur doit mettre en œuvre afin que le travail des élèves permette qu'ils construisent ce type de rapports aux savoirs géométriques.

3 Notre position relativement à des études connexes

De nombreuses recherches s'appuient sur le travail de thèse de M.-H. Salin et R. Berthelot (1992). Il est fondamental dans le développement de notre réflexion, mais les outils théoriques propres à la Théorie des Situations Didactiques (TSD) et à la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) diffèrent ; aussi est-il nécessaire de préciser l'incidence de ces choix.

Le cadre théorique utilisé par R. Berthelot et M.-H. Salin est celui de la TSD. Leur préoccupation est la description précise, dans les situations de géométrie évoquées, de la structuration des milieux avec lesquels l'élève interagit afin de démêler les fonctionnements didactiques et adidactiques. Dans le cadre de la TAD, les activités humaines sont analysées en termes de praxéologies – types de tâches, techniques ou manière de faire, technologie ou discours raisonné sur la technique, théorie –, et les rapports qu'un sujet peut entretenir à un objet du monde sensible ou du monde géométrique relèvent de praxéologies distinctes, caractérisées à grands traits dans les paragraphes précédents.

Dans leur thèse R. Berthelot et M.-H. Salin évoquent la distinction, classiquement faite, entre « *espace sensible* » et « *espace géométrique* » (Chapitre B-2, p. 28 et suivantes), et conviennent que : « *En terme de la théorie des situations, chacun des espaces constitue un milieu pour l'élève, et l'interaction avec chacun de ces milieux se contrôle avec des moyens spécifiques* » (p. 32). Toutefois, dès le début de leurs travaux, M.-H. Salin et R. Berthelot précisent que « *l'invitation qui est faite aux élèves de sortir d'un espace " sensible " pour rentrer dans un espace " géométrique " intellectuel, par un espèce de saut, ne peut que se heurter à des difficultés profondes* », et « *que pour progresser dans la compréhension des difficultés de la géométrie, enseignement qui fait nécessairement intervenir à la fois le modèle géométrique et la réalité physique qu'il modélise, il faut aller au-delà de la simple prise en compte du type d'espace dans lequel on veut placer l'élève, et étudier les rapports établis entre l'élève d'une part et chacun de ces espaces d'autre part* » (p. 32). Ils proposent « *une autre alternative qui consiste à envisager la géométrie comme une théorie physique de l'espace* ». « *Il ne s'agit plus de faire effectuer* [à l'élève] *un saut d'un monde dans un autre mais de passer de rapport effectifs et contingents avec un certain espace à la modélisation de rapports avec cet espace. En quelque sorte, passer du fait à la loi ...* » (p. 32). Ce point de vue est cohérent avec l'analyse des textes officiels exposée dans les paragraphes précédents. Cette nouvelle alternative les conduit à définir des « *types de situations correspondant à des pratiques différentes* », qu'ils distinguent en trois groupes repérés en termes de « *problématiques* »[7] : « *problématique de la géométrie* », « *problématique de modélisation* » *et* « *problématique pratique* » (p. 46).

Au sein du cadre théorique de référence, la TSD, et face à un problème donné, les auteurs décrivent dans chacun des trois cas ce que signifie « *se placer dans telle problématique* », en précisant pour chaque type de problématiques, la nature des espaces de référence, de résolution et de validation des situations relevant de ce type. Au sein du cadre de la TAD, « *les rapports établis entre l'élève d'une part et chacun de ces espaces d'autre part* [espace sensible / espace géométrique] » sont, comme il a été dit, analysés en terme de praxéologies. On peut alors caractériser les praxéologies correspondant aux trois « problématiques » évoquées, de la façon suivante :

- **se situer dans une problématique pratique**, c'est accomplir une tâche impliquant des objets matériels accessibles par le moyen des sens (vue, toucher, etc.) et en recourant à la motricité ; tâche pour l'accomplissement de laquelle on recourt à des techniques visuelles, tactiles, motrices, dont la seule justification explicite relève de la confiance que l'on a en sa propre perception (parce que « ça se voit », parce que « je le sens »...). Néanmoins, comme cela a été montré plus haut, le recours à ces outils pour ces techniques n'exclut pas l'existence d'un équipement technologique permettant de les élaborer et de les justifier pour accomplir les types de tâches dont on attend la maîtrise.
- **se situer dans une problématique géométrique**, c'est accomplir une tâche impliquant des objets abstraits, éventuellement représentés par des écritures ou graphiques, dont l'existence est postulée comme objets primitifs d'une théorie axiomatique du domaine géométrique, ou démontrée déductivement dans le cadre de cette théorie, grâce à des techniques relevant de la manipulation d'énoncés suivant les règles du raisonnement hypothético-déductif ; ces éléments technologiques relèvent des énoncés déjà établis dans la théorie, celle-ci pouvant correspondre à la logique formelle.
- **se situer dans une problématique de modélisation** c'est, comme dans une problématique pratique, accomplir une tâche impliquant des objets matériels accessibles par le moyen des sens et grâce à la motricité. Mais, dans ce cas, la technique engage une modélisation géométrique des objets concernés de l'espace sensible : « *la solution d'un problème par modélisation est construite complètement dans le système symbolique du modèle selon la dynamique de ce système* » écrivent M.-H. Salin et R. Berthelot (p. 50). Plus précisément, un va-et-vient entre le monde sensible et le monde géométrique est opéré : les objets matériels sur lesquels porte la tâche sont modélisés par des objets géométriques, mais les connaissances relatives à ces objets, qui en général relèvent d'énoncés pouvant être élaborés dans le monde géométrique – celui des mathématiciens − ont été admis ou constatés comme compte rendu d'expérience dans le monde sensible. Ces énoncés, en tant qu'assertions considérées contractuellement vraies (M.-H. Salin et R. Berthelot parlent de « *loi de type loi physique* », p. 72), guident le choix des gestes à accomplir dans le monde sensible pour réaliser un ensemble de types de tâches. Ils fournissent alors les éléments technologiques qui permettent d'élaborer une technique relevant de gestes perceptifs et moteurs et assurent son intelligibilité.

La description de deux techniques et d'éléments technologiques associés pour accomplir la tâche suivante permet d'illustrer notre propos : « *Ayant tracé un triangle dont les longueurs des côtés mesurent en cm 3, 5 et 7, dire si ce triangle est rectangle* » [8] :

[7] M. H. Salin et R. Berthelot précisent ultérieurement, dans l'ouvrage *Sur la théorie des situations didactiques* (2005) : « Le terme de problématique indique que nous nous situons ici du point de vue d'un ensemble de problèmes que l'institution (système familial, enseignant) propose et dont elle attend la maîtrise » (p. 126).

[8] Exemple tiré de HOUDEMENT C., (2007).

- « *si un triangle T est un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit au triangle ; on essaie de prendre le milieu de tous les côtés et d'y faire des cercles : aucun cercle n'est le cercle circonscrit au triangle donc T n'est pas un triangle rectangle.* »
- « *je sais qu'une équerre représente un angle droit, pour savoir si ce triangle est rectangle je regarde si les deux côtés de mon équerre coïncident avec deux côtés du triangle.* »

Il semble que l'institution scolaire, à travers les indications fournies par le programme, attende des élèves du primaire qu'ils développent ce dernier type de rapports au monde sensible. C'est-à-dire qu'ils utilisent progressivement des énoncés comme des « invariants », non pour conduire des démonstrations – cela relèvera des attentes du Collège, voire au-delà[9] –, mais comme éléments technologiques pour agir dans le monde sensible. Ces énoncés, en général constatés empiriquement, sont amenés à prendre le « *statut de lois* » grâce auxquelles l'institution attend des élèves qu'ils reconnaissent et construisent formes et solides, décrivent un déplacement ou la position d'objets dans l'environnement, quelle que soit la situation.

***Si l'enjeu de l'enseignement de la géométrie dans l'enseignement primaire est de faire entrer les élèves dans ce type de rapports aux problèmes spatiaux, il s'agit alors d'étudier ce qui, dans les pratiques de classe, peut permettre d'établir un contrat didactique conduisant l'élève à accomplir les gestes correspondants*.**

Avant de proposer des pistes de travail, il est encore nécessaire de revenir sur un dernier domaine de recherche. En général, le bloc technologico-théorique intervenant dans les praxéologies évoquées précédemment se réfère[10] à la géométrie euclidienne dont les objets primitifs sont des points et des droites pour la géométrie plane, et des points, droites et plans pour l'espace. Cela suppose la perception et l'interprétation des éléments matériels à propos desquels sont posées des questions : que cette « perception-interprétation » soit celle des formes (par exemple pour identifier des angles droits) ou que ce soit celle de réseaux de droites, de points et éventuellement de plans (par exemple pour identifier des droites perpendiculaires). Ceci constitue une difficulté relevée dans plusieurs articles publiés par les membres de l'équipe de recherche de l'IUFM du Nord-Pas de Calais autour de R. Duval et M.-J. Perrin. Les démarches proposées pour entraîner une mobilité du regard constituent des aides à la modélisation du monde sensible. Néanmoins l'élaboration et l'utilisation d'énoncés théoriques ayant statut de lois restent nécessaires ; y compris quand la géométrie de référence est une géométrie topologique dont les énoncés portent sur les propriétés des formes : ouvert / fermé, juxtaposition / superposition, etc. Si la mobilité de regard conduisant à envisager une figure comme un « *assemblage de parties ou de surfaces* » ou comme un « *assemblage de lignes et de points* » suivant les cas, est indispensable, elle ne suffit pas à permettre une utilisation des énoncés pertinents comme lois.

III - PISTES DE TRAVAIL

Nous avons vu précédemment qu'un des objectifs des débuts de l'enseignement de la géométrie consiste à faire entrer les élèves dans un type de rapports au monde sensible pour lequel elle joue le rôle de technologie de la maîtrise de l'espace, alors que le monde géométrique leur est à ce stade inaccessible. La difficulté de l'entreprise nécessite que les enseignants choisissent des activités et organisent leur gestion afin que les élèves s'approprient des invariants – c'est-à-dire, dans ce cas, des éléments technologiques – produits à cette occasion. Cela nécessite que les enseignants aient reçu une formation géométrique et

[9] NOIRFALISE R., (1993). L'auteur décrit, en classe de 6e, des rapports aux figures géométriques et à leurs propriétés très différents d'un élève à l'autre, allant de la lecture des propriétés sur la figure à des gestes préparant une pratique démonstrative ; position dans laquelle des énoncés de résultats ont été produits dans la classe et entrent dans le dispositif avec lequel l'élève va pouvoir travailler.

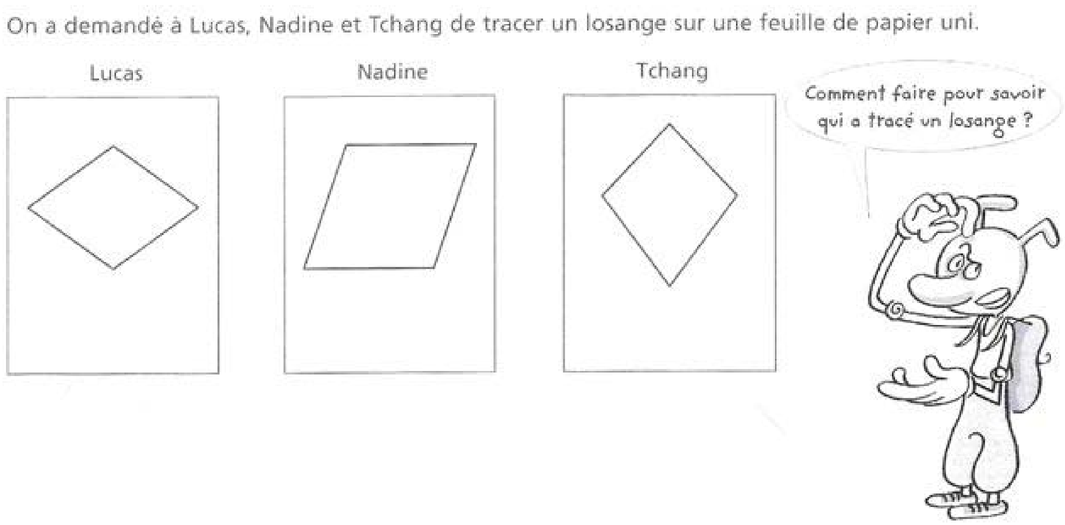
[10] La théorie mathématique de référence rend intelligible les choix des concepteurs de programmes ainsi que les gestes de l'enseignant qui guident l'activité de l'élève.

didactique suffisante pour pouvoir contrôler la pertinence et la cohérence des éléments technologiques à mobiliser.

Nous faisons l'hypothèse que pour qu'un résultat acquière un statut de loi, son énoncé et son écriture sont indispensables afin de pouvoir s'y référer, mais aussi et surtout, pour l'utiliser dans des situations variées où il s'avèrera fonctionnel, voire incontournable. Dans ce qui suit, nous ne faisons qu'envisager deux pistes pouvant permettre d'engager cette étude, pistes pour lesquelles nous présentons des exemples de travail possible portant sur des propriétés des quadrilatères étudiés en cycle 3. Il s'agit d'une part d'analyser, dans quelques ouvrages scolaires, les conditions d'émergence des résultats concernant les instruments de travail et les énoncés géométriques. Ce travail permet, d'autre part, de repérer les activités qui peuvent faire évoluer le rapport des élèves aux éléments de géométrie utilisés et d'enrichir leur équipement technologique. Il permet aussi d'imaginer des activités poursuivant ce but ainsi que leur mise en œuvre.

1 Une première analyse des activités proposées dans les manuels

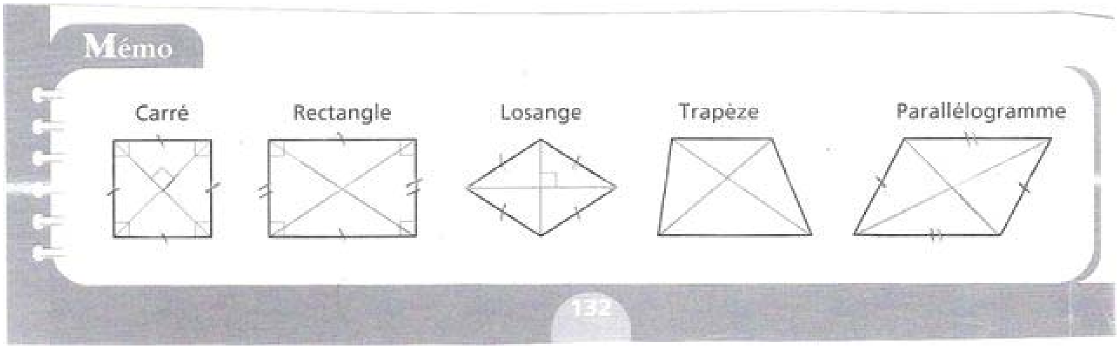
Dans les limites de caractères accordées à ce texte nous ne donnons qu'un exemple d'analyse d'une leçon portant sur les quadrilatères, extraite de l'ouvrage de CM2 de la collection « *Pour comprendre les mathématiques* »[11], et dont on trouve une reproduction dans les lignes qui suivent. En fait, seule l'étude des régularités trouvées dans l'ensemble des activités proposées par une collection d'ouvrages scolaires devrait permettre de préciser le type de gestes requis contractuellement de la part des élèves pour l'étude des formes, et de mieux cerner le statut des résultats qui se construisent ainsi. Ce travail nécessite des analyses du type de celle proposée dans ces lignes. Dans l'exemple traité, comme pour toutes les leçons de la collection, celle-ci débute par une « *activité collective, de courte durée, conduite par l'enseignant, et permettant d'introduire la leçon* » :



D'après les auteurs, le débat qui s'en suit est l'occasion de faire le point sur les acquis des élèves en matière de vocabulaire relatif aux quadrilatères et à leurs propriétés, et de vérifier qu'ils sont capables de les mettre en œuvre pour construire des figures. Le guide pédagogique indique, p. 165, que lors de la mise en commun, l'enseignant doit « *retenir quelques éléments qui orientent la réponse : il faut vérifier quelle figure possède les propriétés du losange ; pour y parvenir, on doit utiliser les instruments de géométrie : la règle graduée ou le compas pour comparer les longueurs de côtés ; l'équerre afin de vérifier que les diagonales sont perpendiculaires ; on peut aussi décalquer les figures, les découper et chercher par pliage les axes de symétrie* ».

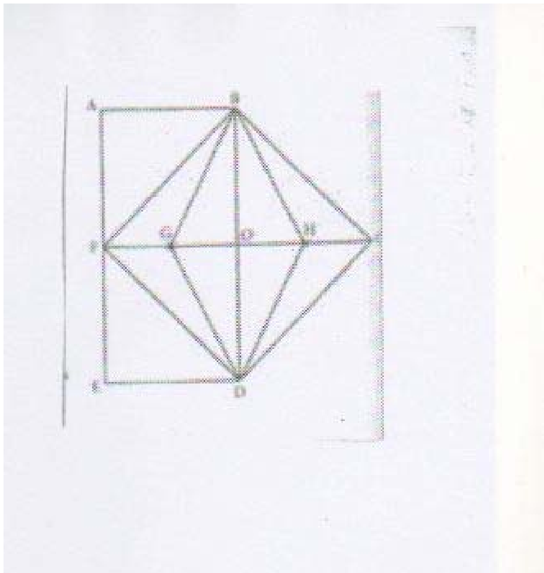
11 « *Pour comprendre les mathématiques* », C.M.2, livre élève pages 132 et 133, édition 2008 et guide pédagogique pages 165 et 166, édition 2009, édition Hachette.

Remarquons que les auteurs parlent au singulier de figure possédant les propriétés du losange : avec la précision des instruments de mesure à la disposition des élèves, les deux figures de gauche sont pourtant des losanges. L'objectif didactique de l'activité étant de vérifier (toutes) « *les propriétés du losange* », quelle gestion l'enseignant fera-t-il d'une réponse d'élève du type : « La première figure est un losange parce que les quatre côtés sont égaux, la dernière n'est pas un losange parce que les quatre côtés ne sont pas égaux » ? Peut-on imaginer qu'à l'aide des figures décalquées et découpées, l'enseignant fasse retrouver, par pliage, et comme le suggère le guide pédagogique, les propriétés non évoquées ? Le statut logique des propriétés géométriques des quelques formes étudiées n'est pas précisé à ce niveau : le programme de 2008 parle de « *description* » de figures planes (p. 23). Dans les rares cas où les manuels scolaires de ce niveau fournissent des énoncés dont les élèves pourraient disposer, ce sont les listes de certaines des propriétés de chaque forme, sans préciser s'il s'agit de conditions nécessaires ou conditions suffisantes pour cette forme. Dans le manuel étudié, les propriétés des quadrilatères sont consignées sous la forme suivante, sans recourir à un énoncé écrit (on peut aussi remarquer que la propriété du point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme n'est pas codée) :



Des énoncés oraux travaillés sous la direction de l'enseignant pourraient au mieux devenir : « Si cette figure représente telle forme, alors nécessairement elle possède telle propriété ». Ils peuvent permettre de justifier que telle figure n'est pas un losange, comme c'est par exemple le cas du dernier des trois quadrilatères de l'activité. Mais alors, comment gérer le débat pour les deux premiers qui sont des losanges ?

Cette première activité fixe clairement le contrat : il s'agit d'utiliser « les » propriétés des quadrilatères qui doivent être exposées par les élèves au cours du débat. Dans ce type de travail, la mobilisation d'un énoncé, explicitement ou même implicitement, n'est pourtant pas toujours indispensable à ce niveau pour répondre à une question de reconnaissance. Les élèves de CM2 possèdent en effet une familiarité suffisamment grande avec les formes étudiées pour les reconnaître globalement, donner leur nom, vérifier avec des instruments des propriétés géométriques repérées visuellement avant même l'usage des instruments, sans que ces propriétés viennent justifier le nom donné à la forme. La nécessité d'une condition suffisante exprimée explicitement ou non, en tant que loi à laquelle se référer en classe, n'apparaît pas. La contrainte d'énonciation de propriétés, dont le statut « nécessaire » ou « suffisant » n'est même pas rencontré « en acte », est donc imposée par l'enseignant sans que cela apparaisse comme cause nécessaire ; c'est-à-dire produite par des raisons émergeant du travail d'une situation adidactique.



Au cours de la seconde activité, des groupes de deux ou trois élèves ont à reconnaître des quadrilatères dans une figure complexe, puis à répondre à la question « *quelles propriétés de chaque quadrilatère a-t-on utilisées pour le construire ?* » (livre de l'élève, p. 132). La seconde consigne peut surprendre : comment savoir quelle technique ont utilisée les auteurs de l'ouvrage pour produire cette figure ? Elle trouve sans doute sa justification dans la remarque précédente : pour reconnaître le rectangle, les carrés et les losanges de la figure, le recours explicite aux propriétés géométriques n'est certainement pas nécessaire à ce niveau. Le guide pédagogique précise que la correction collective est de nouveau l'occasion de récapituler « *les propriétés des quadrilatères les plus connus : rectangle, losange et carré* », sous forme de description de trois quadrilatères particuliers de la figure : propriétés des côtés, des angles, des diagonales et existence d'axe de symétrie. Ils ne précisent pas quelle est la fonction assignée à ces énoncés relativement à la consigne. Parmi toutes les propriétés rencontrées, le problème de savoir quelles sont celles permettant de construire effectivement tel quadrilatère de la figure n'est pas donc posé. ***Au cours de ces deux premières activités, il n'a donc été fait aucun usage fonctionnel des propriétés énoncées pour construire des quadrilatères respectant certaines contraintes.***

Dans la troisième activité, les élèves doivent, par groupe de deux, reproduire la figure sur laquelle ils viennent de travailler en respectant les dimensions et « *écrire chacune des étapes du travail* » (p. 132). Pour les auteurs du manuel, il s'agit de « *décrire la construction en justifiant chaque tracé* » (guide pédagogique, p. 165). Les auteurs donnent un exemple : « *Je trace le rectangle ABDE. Pour cela j'utilise l'équerre pour tracer quatre angles droits et la règle graduée ou le compas pour tracer les côtés. Je prends soin de dessiner les côtés opposés de la même longueur. Je trace ensuite le carré BCDF. J'utilise...* » (p. 165). La correction suggère de reproduire la figure au tableau – la consigne de respect des dimensions doit-elle être supprimée ? –, l'important étant de « *justifier chacune d'elles* [les constructions] *en s'appuyant sur les propriétés qui permettent de tracer ces quadrilatères.* » (p. 165).

L'exemple donné dans le guide pédagogique montre que, pour chacune des figures, sont attendues la liste des instruments à utiliser et la propriété du quadrilatère justifiant cette utilisation. Les propriétés lues directement sur la figure semblent suffire pour effectuer la construction : les angles en A et E sont visiblement droits, le report sur les demi-droites [AB) et [ED) des mesures AB et ED, relevées à la règle graduée ou au compas sur la figure-modèle, donne les positions de B et D, et il en est de même des positions des autres points. Dans ce cas encore, la tâche peut être accomplie sans que les propriétés des différentes formes en jeu aient été utilisées comme éléments technologiques pour produire, justifier ou expliquer la technique mise œuvre.

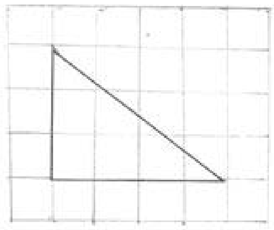
2 Où devrait apparaître le raisonnement « par analyse et synthèse »

Après une quatrième activité dont l'analyse montre que la production d'énoncés généraux tels que « tout carré est un losange » ou « un rectangle n'est pas un losange » ne correspond à aucune fonctionnalité, si ce n'est à une « visite de savoirs » qui pourrait satisfaire des mathématiciens et donc se garantir d'une certaine légitimité épistémologique, les élèves passent aux activités pour « *S'exercer et résoudre* ». Celles-ci doivent permettre de « *mettre en pratique individuelle et progressive les apprentissages abordés dans l'activité de recherche* » (livre de l'élève, p. 2). L'organisation didactique est peu développée, et seule la lecture du guide pédagogique permet d'émettre des hypothèses sur ce qui a dû être institutionnalisé à la suite des trois activités de recherche.

Le premier exercice demande le tracé à main levée d'un parallélogramme, tandis que dans le second, le recours à un gabarit permettra de tracer un rectangle, un parallélogramme et un losange.

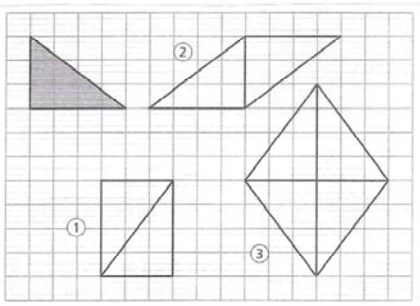
1) Sur une feuille de papier quadrillée, trace à main levée un parallélogramme ABCD.
Le côté AB mesure 5 carreaux.

2) Reproduis ce gabarit et utilise-le pour construire :
– un rectangle ;
– un parallélogramme ;
– un losange.



Les propriétés du parallélogramme énoncées lors de la quatrième activité, et que l'on retrouve pour la plupart codées dans la représentation graphique du paragraphe « *Mémo* » (*cf.* pages précédentes), doivent servir d'éléments technologiques. Les auteurs du guide pédagogique préconisent, pour le premier exercice, de tracer deux segments de 5 carreaux horizontaux, de joindre leurs extrémités deux à deux, et de vérifier que les côtés opposés sont égaux et parallèles. Pour les deux premiers segments, le quadrillage assure l'égalité et le parallélisme, pour les deux derniers l'égalité peut se vérifier à la règle graduée ou au compas mais rien n'est dit quant à la vérification du parallélisme. Ce type d'exercices devrait engager vers un travail du type « analyse et synthèse » pour lequel les propriétés du parallélogramme servent d'éléments technologiques :

- Partie analyse : si le quadrilatère est un parallélogramme, alors deux côtés opposés sont égaux et parallèles, le côté [*AB*] doit mesurer 5 carreaux, donc le côté [*CD*] doit aussi mesurer 5 carreaux ; si [*AB*] est horizontal, alors [*CD*] doit être horizontal (conditions nécessaires pour la construction), donc je trace deux segments de 5 carreaux horizontaux, et je termine le tracé du quadrilatère *ABCD*,
- Partie synthèse : je dois vérifier que le quadrilatère ainsi tracé répond à la question, c'est-à-dire que ses côtés deux à deux opposés sont égaux et parallèles (condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, excluant le quadrilatère croisé).



Pour le second exercice, les auteurs demandent aux élèves de recourir à un « *gabarit* » pour désigner le triangle rectangle à reproduire. Le terme évoque un objet que l'on peut déplacer et reproduire. Dans les réponses proposées par le guide pédagogique, le triangle n'est pas dans la position initiale, mais a été déplacé et reproduit deux ou quatre fois. On peut penser que les auteurs attendent des élèves qu'ils traitent cet exercice comme une construction de puzzle dont l'état final leur est suffisamment familier pour anticiper et guider leurs gestes. Les auteurs évoquent les propriétés des diagonales du losange sans qu'on sache pourquoi puisque, dans ce cas, l'égalité des quatre hypoténuses suffit.

On aurait pu, en modifiant la consigne, proposer un travail analogue au précédent : « Reproduis sur ton cahier ce triangle rectangle :

- construis un rectangle et un parallélogramme en juxtaposant à ce premier rectangle des triangles identiques ; chacun de ces quadrilatères doit avoir deux côtés confondus avec deux côtés du triangle rectangle,
- construis, en juxtaposant à ce premier triangle rectangle des triangles identiques, un losange dont un côté est un côté du triangle et les deux autres côtés du triangle portent ses diagonales. »

Une telle consigne attire l'attention sur le fait que l'on travaille sur des figures qui sont des assemblages de traits ayant des propriétés d'incidence précises. Pour la première consigne, le maître peut tout d'abord engager les élèves dans la recherche des différentes possibilités pour choisir deux côtés parmi trois. Deux côtés étant choisis, on peut alors faire une hypothèse sur le type de quadrilatère que l'on peut construire sur ceux-ci : avec les deux côtés de l'angle droit on peut construire un rectangle, avec un côté de l'angle droit et l'hypoténuse ce sera nécessairement un parallélogramme. Pour le rectangle, on peut penser qu'il sera complété sans autre recours aux propriétés géométriques de cette forme familière.

Pour le parallélogramme ***une phase d'analyse*** est nécessaire : si deux côtés du triangle sont les côtés d'un parallélogramme, alors nécessairement les côtés opposés seront parallèles et égaux. A l'aide du quadrillage, la construction de ces deux autres côtés est simple. Celle-ci ayant été réalisée, il reste à s'engager dans ***une phase de synthèse*** : vérifier que le quadrilatère obtenu et le triangle ainsi juxtaposé répondent à la question.

Pour la seconde consigne portant sur le losange, ***une phase d'analyse*** est de nouveau nécessaire : si deux côtés du triangle portent les diagonales du losange, alors ces côtés doivent être perpendiculaires, donc ce sont nécessairement les côtés de l'angle droit du triangle, et un côté du losange sera l'hypoténuse du triangle. En utilisant la description du losange donnée dans la deuxième activité, le losange doit avoir deux axes de symétrie, donc nécessairement les deux autres sommets du losange sont les symétriques des extrémités de l'hypoténuse, obtenues par exemple en pliant suivant chacun des deux côtés de l'angle droit. On peut alors construire un quadrilatère en joignant les quatre sommets et vérifier, lors d'une ***phase de synthèse***, qu'il répond à la question : les pliages effectués assurent que les quatre côtés sont égaux et que les quatre triangles rectangles constitués respectivement par les quatre demi diagonales et les quatre côtés sont superposables donc identiques.

Sans poursuivre au-delà l'analyse des exercices, un certain nombre d'enseignements peuvent d'ores et déjà être tirés :

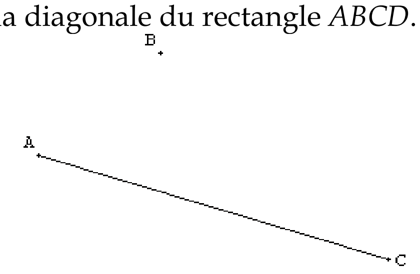
- sur six activités analysées, deux pourraient donner lieu à un usage fonctionnel des propriétés géométriques des quadrilatères, mais il est certainement nécessaire pour cela que l'étude des questions posées aux élèves soit dirigée par des enseignants très au fait du statut logique des énoncés utilisés, et pour lesquels la technique utilisée et la technologie la justifiant sont à mettre au premier plan, bien davantage que la construction attendue,
- il est difficile de s'assurer de la mobilisation effective des propriétés géométriques dans les activités de reconnaissance de figures, tant la familiarité avec les formes à reconnaître est grande,
- l'énoncé, dans les rares cas où il existe, et le plus souvent l'ostension des propriétés à travers le codage des figures, ne permettent pas de distinguer entre conditions nécessaires et conditions suffisantes ; ce qui conduit vers des obstacles didactiques,
- les activités de construction nous semblent beaucoup plus appropriées pour l'usage des énoncés de géométrie comme éléments technologiques, à condition que l'étude en soit guidée par un enseignant ayant de solides connaissances de la géométrie élémentaire, et donc qu'il connaisse et identifie afin d'en tenir compte, et non pas de les masquer ou de les ignorer, des points saillants et des difficultés propres à l'enseignement de ce domaine des mathématiques,
- les activités de construction proposées en fin de cycle 3 sont propices à la rencontre, par les élèves, de raisonnements du type « analyse – synthèse », mais leur transposition didactique n'est actuellement pas assurée par les auteurs des manuels.

Un travail transpositif pourrait suivre un schéma en trois étapes. Une partie « analyse » constituée de l'élaboration d'une figure d'étude à main levée et de l'énoncé des propriétés nécessairement vérifiées par les éléments de la figure ; cet énoncé aboutissant au codage correspondant sur la figure à main levée. Une partie « constructibilité », basée sur l'étude de la possibilité de la construction des éléments manquants grâce aux propriétés énoncées et en utilisant les instruments à disposition. Puis une partie « synthèse » qui réunit la construction effective des éléments manquants et la vérification que le tracé répond à la demande.

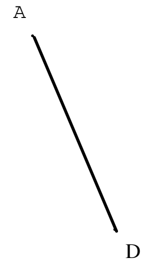
3 Exemples d'activités et ce qu'elles permettent d'analyser et d'observer

Les remarques précédentes permettent de penser des activités que nous avons mises en œuvre dans deux classes de CM2. Les trois tâches suivantes ont été proposées successivement aux élèves, chacune sur une feuille blanche [12] :

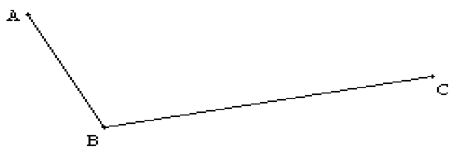
- **Première tâche :** [*AC*] est la diagonale du rectangle *ABCD*. Construis ce rectangle.[13]



- **Deuxième tâche** : *ABCD* est un carré. Construis ce carré.



- **Troisième tâche** : *ABCD* est un parallélogramme. Construis ce parallélogramme.



Le travail d'analyse mathématique *a priori* à mener renvoie à la formation des futurs professeurs des écoles relativement à la conduite des activités que l'on souhaiterait proposer aux élèves. Pour les activités géométriques exposées, et dont on trouve des propositions dans les manuels actuels du cycle 3, cette formation devrait sans doute inclure des éléments relatifs au raisonnement par analyse – synthèse. Par exemple, pour la deuxième tâche consistant à construire un carré à partir de la donnée d'un côté, on pourrait imaginer que la formation initiale d'un professeur lui permette de mener à bien une analyse *a priori* intégrant les seules connaissances des élèves disponibles au CM2 (travail qui n'est évidemment pas attendu des élèves de ce niveau !). Travail *a priori* qui pourrait prendre la forme suivante :

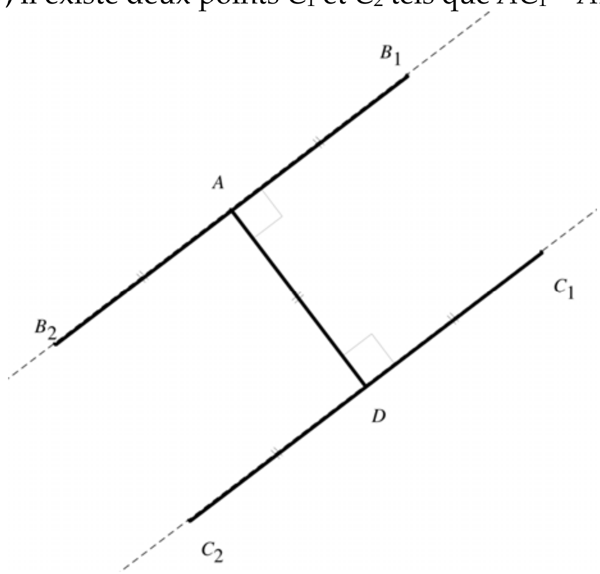
« *Analyse à partir des connaissances d'élèves de CM2 supposées disponibles*
Si le carré *ABCD* existe, alors il a un angle droit en *A*, un angle droit en *D* et $AB = AD = DC$. Donc *B* est un point de la perpendiculaire à (*AD*) passant par *A* tel que $AB = AD$, et *C* est un point de la perpendiculaire à (*AD*) passant par *D* tel que $AC = AD$.

---

[12] Exercices inspirés des exercices n° 2 et 3 page 141, et n° 21 page 147, du manuel « Pour comprendre les mathématiques », CM2, édition Hachette, 2005. Dans l'ouvrage de référence, la technique préconisée pour construire des perpendiculaires et des parallèles à une droite donnée, passant par un point donné, utilise le quadrillage du cahier. Nous n'avons pas voulu utiliser cette technique, qui ne peut s'appuyer à ce niveau que sur des éléments technologiques perceptifs. Nous avons donc choisi de demander ces constructions sur du papier blanc avec une règle graduée et une équerre.

[13] L'angle en *B* sur le document donné aux élèves était droit, ce qui n'est peut-être pas le cas dans cette reproduction.

Constructibilité à l'aide des instruments à disposition des élèves de CM2
Soit (Δ_1) la perpendiculaire à (AD) passant par A et (Δ_2) la perpendiculaire à (AD) passant par D, construites à l'aide d'une équerre. Sur (Δ_1) on reporte, avec la règle graduée ou au compas, la distance AD, il existe deux points B_1 et B_2 tels que $AB_1 = AD$ et $AB_2 = AD$. Sur (Δ_2) on reporte, avec la règle graduée ou au compas, la distance AD, il existe deux points C_1 et C_2 tels que $AC_1 = AD$ et $AC_2 = AD$.

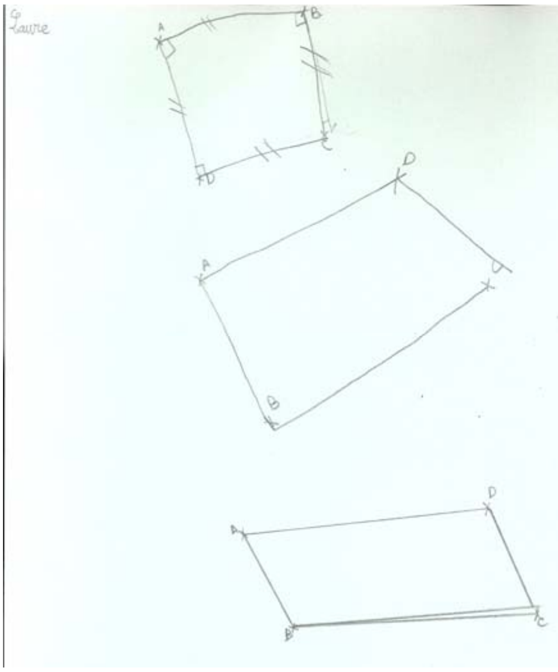


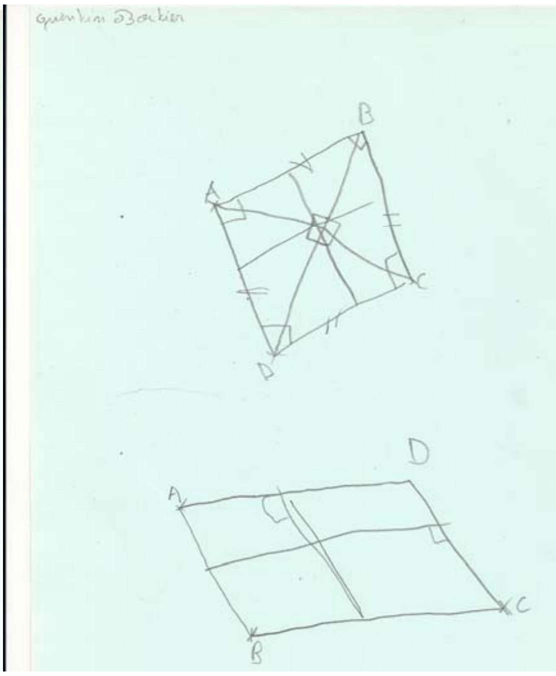
On voit déjà que les conditions nécessaires précédentes ne sont pas suffisantes pour construire un carré, qui est un quadrilatère convexe. Il faudra rajouter la condition : B et C sont nécessairement dans le même demi-plan limité par (AD). On obtient donc deux quadrilatères convexes.

Synthèse à partir des connaissances d'élèves de CM2 supposées disponibles
Dans l'état des connaissances des élèves de CM2, il sera nécessaire de vérifier que chaque quadrilatère obtenu a quatre angles droits et quatre côtés égaux. »

On verra, dans les deux productions d'élèves données ci-dessous, que la possibilité d'un carré « vers le bas à gauche » n'apparaît pas. La question du choix du demi-plan avait été abordée collectivement lors de l'élaboration de la figure à main levée (voir ci-dessous la description du protocole didactique). Pour conduire chaque activité, nous avons utilisé le protocole didactique suivant :

- sur une feuille de brouillon (verte), les élèves ont été invités à reproduire les éléments qui figuraient sur la feuille blanche et à élaborer une figure d'étude à main levée répondant à la question ; ce travail a été accompli individuellement par les élèves et simultanément au tableau,
- nous les avons invités à chercher les propriétés nécessairement vérifiées par les éléments de la figure si elle répond à la question, et à noter le codage correspondant sur la figure à main levée (***travail d'analyse***), voir ci-dessous :





- nous les avons invités à chercher quelles propriétés énoncées permettent de construire les éléments manquants avec les instruments à leur disposition qui sont la règle graduée et l'équerre ***(travail de constructibilité)***,
- nous leur avons demandé de construire effectivement sur la feuille blanche les éléments manquants (***travail de construction et de synthèse***).

Pour les première et troisième tâches, les différentes étapes ont donné lieu à des échanges collectifs avant le travail individuel. Pour la seconde tâche, faute de temps, seule la figure d'étude à été élaborée collectivement. La mise en œuvre de ce travail nous a montré que :

- les figures d'étude sont tracées entièrement à la règle dans plus d'un tiers des productions, et partiellement dans 17 %,
- la verbalisation des propriétés est relativement facile, mais la description verbale de leur repérage sur la figure d'étude, ainsi parfois que son codage, sont très difficiles,
- la question de la possibilité de construire les éléments manquants, avec les propriétés énoncées et avec les instruments à disposition, n'est pas prise en compte, les élèves débutent immédiatement la construction,
- les gestes à faire avec les instruments sont très difficilement décrits.

Les maîtresses présentes ont été surprises de tant de difficultés verbales et instrumentales. Elles ont été intéressées par l'investissement important des élèves dans ces activités et la structuration de la conduite utilisée.

Cette expérience a, bien évidemment, un intérêt limité. En particulier, le travail ayant été collectif, il est difficile d'observer les techniques utilisées individuellement, de savoir si elles s'appuient ou non sur des propriétés avancées sur la figure d'étude, propriétés qui ne sont pas toujours codées. Néanmoins la structuration introduisant le passage par une figure d'étude à main levée, que l'on code en fonction des propriétés attendues, permet d'assurer leur visibilité. Le travail à partir de la question « quelles propriétés permettent de construire les éléments manquants avec les instruments à disposition ? » permet l'explicitation de leur fonctionnalité. Enfin l'expérience nous a montré que la distinction entre une étude de constructibilité et une étude de construction effective est difficile à assumer à ce niveau, mais cela relève sans doute d'une préoccupation d'un autre niveau.

IV - CONCLUSION

Dans cette communication, nous souhaitions attirer l'attention :

- sur « l'existence d'un bloc technologico-théorique dans toute praxéologie, bloc souvent implicite, sur lequel l'institution ne dit rien ou bien peu et qui, de ce fait, demeure souvent invisible à ses propres sujets (professeurs et élèves) », privant les élèves d'outils pour travailler,
- sur le fait qu'une lecture attentive des instructions officielles éclairée par une formation en géométrie théorique permet de faire évoluer ce bloc, comme nous le montrons très sommairement – trop sommairement, mais la place est limitée – dans le second paragraphe de notre communication,
- sur la possibilité de faire passer les élèves, à travers des activités comme les constructions de figures, d'une position de lecteur de propriétés sur la figure, à une position où ils travaillent avec des énoncés produits dans la classe – position préparant la pratique démonstrative –, cette possibilité étant tributaire de l'analyse que le maître fera de ces activités, et en particulier de sa culture géométrique.

V - BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R. & SALIN M. H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de l'Université de Bordeaux I.

BERTHELOT R. & SALIN M. H. (2005) Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement élémentaire de la géométrie, in Salin, Clanché, Sarrazy, éds. *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures... Hommage à Guy Brousseau.* Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **19(2)**, 221-266.

CHEVALLARD Y. (2011) La diffusion déformante de la TAD, in *Journal du séminaire TAD/IDD*, séance 5 du 15 avril 2011 : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=176

DOUGLAS M. (1999) *Comment pensent les institutions.* Paris : Editions La découverte et Syros.

DUVAL R. & GODIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76**, 7-27.

GENTAZ E. (2010) Toucher pour connaître et apprendre, site de l'auteur : http://webu2.upmf-grenoble.fr/LPNC/LpncPerso/Permanents/EGentaz/web/?

HOUDEMENT C. (2007) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, *Repères IREM*, **67**, 69-84.

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M. J. & DELPLACE J. R. (2007) Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, **79**, 33-60.

NOIRFALISE A. & MATHERON Y. (2009) *Enseigner les mathématiques à l'école primaire. Géométrie, grandeurs et mesures*. Paris : Vuibert.

NOIRFALISE R. (1993) Contribution à l'étude didactique de la démonstration. Etude de régularités dans les modalités de fonctionnement du savoir mathématique dans les divers chapitres de géométrie d'un manuel de sixième. *Recherches en didactique des mathématiques*, **13(3)**, 229-256.

PINET L. & GENTAZ E. (2007) La reconnaissance des figures géométriques planes par les enfants de 5 ans, *Grand N*, **80**, 17-28.

UN OUTIL POUR ANALYSER LES RÉSULTATS AUX ÉVALUATIONS MATHÉMATIQUES DE FIN D'ÉCOLE : CONCEPTION ET UTILISATION EN FORMATION

Nadine GRAPIN
PIUFM, IUFM de Créteil, Université Paris Est Créteil
Laboratoire de didactique André Revuz
nadine.grapin@u-pec.fr

Nathalie SAYAC
MCF, IUFM de Créteil, Université Paris Est Créteil
Laboratoire de didactique André Revuz
nathalie.sayac@u-pec.fr

Résumé
A partir des items proposés lors des évaluations bilans menée par la DEPP[1] en 2008 en mathématiques et dont les résultats ont été présentés en 2010, nous avons construit un outil, basé sur trois facteurs de complexité, visant à déterminer la difficulté d'un item en tenant compte de l'activité de l'élève dans sa globalité. Ces facteurs de complexité s'appuient en partie sur les travaux de Bodin et Robert.
Nous affinons actuellement ces facteurs, notamment sur les thèmes des décimaux et des grandeurs, à partir des travaux réalisés en didactique des mathématiques, mais aussi par une analyse plus fine et complémentaire de productions d'élèves.
Nous présentons, sous forme d'échanges avec les participants, l'avancée de nos travaux et la façon dont nous avons utilisé cet outil en formation pour exploiter les résultats aux évaluations nationales en mathématiques de 2011.

L'objectif de notre communication au colloque Copirelem 2011 était de rendre compte de l'avancée d'une recherche menée à partir des évaluations bilans menées en 2008 par la Direction de l'Evaluation de Prospective et de la Performance (DEPP) en mathématiques, déjà présentée l'année précédente sous forme d'atelier (Grapin & Sayac, 2010).

Cette communication nous a permis de préciser notre démarche ainsi que le cadre dans lequel elle s'inscrit et d'exposer plus clairement la notion de « facteur de complexité » que nous utilisons pour évaluer la difficulté des items proposés.

I - PRÉSENTATION DU CADRE DES ÉVALUATIONS BILANS DEPP ET DE LA RECHERCHE

Avant de présenter le cadre et l'avancée de notre recherche, nous sommes revenues au point de départ de celle-ci : la construction et l'analyse des évaluations bilans fin d'école et fin de collège. Au cours de cette communication, nous avons uniquement présenté le cadre des évaluations bilans fin d'école, sur lesquelle nous avons principalement travaillé jusqu'alors. Pour connaître plus précisément la méthodologie de ces deux évaluations et les résultats de celles-ci, nous renvoyons le lecteur aux différentes notes d'information produites par la DEPP[2].

---

[1] La direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP) exerce une fonction de suivi statistique, d'expertise et d'assistance pour le ministère de l'Éducation nationale et le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche. Elle garantit la qualité de la production statistique.

[2] « Les compétences en mathématiques des élèves de fin de primaire », note d'information 10.17, MEN-DEPP, octobre 2010 ; « Les compétences des élèves en mathématiques en fin de collège », note d'information 10.18, MEN-DEPP, octobre 2010.

1 Cadre des évaluations

Les évaluations bilans de la DEPP menées en mathématiques à la fin de l'école et à la fin du collège ont pour objectif de mesurer les connaissances et compétences des élèves à ces deux moments de leur scolarité, en lien avec les programmes en cours. Elles sont menées dans le cadre d'un cycle (CEDRE[3]) débuté en 2003 qui concerne d'autres disciplines que les mathématiques et qui se reproduit tous les 6 ans : ainsi, les évaluations bilans fin d'école menées en 2008 en mathématiques s'intègrent à l'intérieur de ce cycle à des évaluations menées par exemple en maîtrise de la langue et sur des compétences générales (en 2003, reprises en 2009), en langues vivantes (en 2004)… La reproductibilité des évaluations est rendue possible tant dans leur conception que dans leur passation, notamment en ne rendant pas publics les items de ces évaluations.

Pour le primaire, les items proposés en mathématiques ont permis de mesurer des connaissances relevant des six domaines (connaissances des nombres entiers naturels, fractions et décimaux, calcul, exploitation de données numériques, espace et géométrie, grandeurs et mesures), et différentes compétences (identifier des notions, exécuter un calcul, traiter des données, produire en autonomie, contrôler-valider).

À partir des productions des élèves et grâce à des outils statistiques, la DEPP a construit une échelle de performance permettant de catégoriser 6 groupes d'élèves, hiérarchisés selon leurs connaissances mathématiques et les compétences qu'ils maîtrisent. La reproductibilité de ces évaluations et leur périodicité permettront de comparer l'évolution des compétences maîtrisées pour chacun des groupes dans le temps.

A la différence des évaluations nationales menées en CE1 et en CM2, les évaluations bilans ne sont pas réalisées sur tous les élèves concernés, mais uniquement sur un échantillon représentatif de la population des élèves français de fin d'école. Ainsi, environ 3 800 élèves de CM2 (soit un peu plus de 200 classes concernées) ont passé ces évaluations. Par conséquent, le modèle statistique utilisé pour construire les échelles de scores permet de caractériser des groupes d'élèves par les compétences qu'ils maîtrisent ; il ne s'agit pas de déterminer les compétences maîtrisées par chacun des élèves ayant participé à l'évaluation.

Il nous a semblé alors intéressant et complémentaire aux analyses institutionnelles produites par la DEPP de mettre en perspective ces deux évaluations (fin d'école et fin de collège) et certains de leurs résultats au travers d'une recherche menée dans le cadre de la didactique des mathématiques. Il ne s'agit pas dans cette recherche d'étudier les différentes fonctions de ces évaluations institutionnelles, ni même d'avoir une quelconque influence sur elles.

En nous centrant sur les domaines des « fractions - nombres décimaux » et des « grandeurs et mesures », nous souhaitons mettre en rapport les apprentissages et les connaissances mathématiques avec des compétences plus générales intervenant dans l'activité mathématique de l'élève, mais aussi les relier avec les pratiques des enseignants. En confrontant nos constats avec des travaux de recherche existants, nous pourrons alors dégager des pistes de travail et des outils pour la formation des enseignants. Dans la présentation de notre communication, nous nous contenterons de présenter l'outil que nous avons élaboré pour analyser les items proposés aux élèves et que nous utilisons également dans le cadre de la formation des professeurs des écoles.

2 Constat de départ

Les items de la DEPP proposés en fin de collège mobilisent des compétences et des connaissances mathématiques de base qui sont pour certaines travaillées dès l'école primaire et qui ont donc logiquement été évaluées dans le bilan fin de primaire. Il s'agit donc pour nous d'essayer de retrouver ces connaissances à travers différents items pour, d'une part, retrouver le fil de leur construction et d'autre part analyser leur niveau de maîtrise.

[3] CEDRE : Cycle des Evaluations Disciplinaires Réalisées sur Echantillon

Pour un thème donné, quelles sont les connaissances mathématiques disponibles en fin de primaire et en fin de collège ? Pour les connaissances de primaire ou de début de collège, quelle est leur résistance, quelles sont les difficultés qui perdurent ? Comment cela se traduit-il à travers ces deux évaluations ?

Il est à noter que les évaluations de la DEPP, comme la plupart des évaluations nationales, sont des évaluations très spécifiques qui ne peuvent être mises sur le même plan que celles que l'enseignant conçoit pour les élèves de sa classe, avec des objectifs précis. Dans de telles évaluations, les élèves et les classes sont génériques et seuls les programmes officiels et les objectifs politiques déterminent leur contenu.

Par ailleurs, nous cherchons également à appréhender les pratiques des enseignants : l'accès aux pratiques enseignantes se fera par le biais des questionnaires enseignants soumis lors des deux évaluations en étudiant des productions d'élèves et certains manuels utilisés dans les classes. Nous chercherons ensuite à mettre en rapport nos observations avec les différents travaux issus de la recherche en didactique en mathématiques sur les pratiques enseignantes.

Nous n'avons pas souhaité, dans le cadre du colloque, présenter précisément la méthodologie que nous utilisons pour notre recherche, mais nous avons mis en exergue un outil que nous avons développé et qui nous a semblé intéressant de présenter.

II - PRÉSENTATION DE NOTRE OUTIL D'ANALYSE : LES FACTEURS DE COMPLEXITÉ

Pour illustrer la difficulté que nous avons rencontrée à évaluer la complexité des items proposés, nous avons présenté deux problèmes relativement semblables du point de vue des connaissances mathématiques en jeu mais, différents du point de vue des scores de réussite obtenus :

> Problème 1: « Monsieur Paul achète 9 rosiers à 4 € et 3 sapins à 17 € pièce. Quel est le montant de sa dépense ?»
>
> Problème 2 : « Monsieur Jacques achète 8 cahiers et 5 stylos. Le prix d'un cahier est de 3 €. Le prix d'un stylo est de 2 €. Quel est le montant de sa dépense ? »

Les scores de réussite à ces items, respectivement de 62,95% et 80,73%, témoignent du fait que la seule prise en compte des connaissances mathématiques en jeu ne suffit pas à appréhender la complexité « réelle » des items proposés aux élèves. La complexité « réelle » relève pour nous d'un amalgame entre connaissances mathématiques, tâche (nature, caractère usuel ou non, environnement et contexte), éléments linguistiques et sémantiques en jeu, ainsi que d'autres paramètres qui influent sans que l'on puisse réellement les mesurer ou même les identifier.

Constatant qu'il existait souvent un décalage entre les scores obtenus et la difficulté estimée des items, nous avons jugé opportun de construire un outil spécifique qui prendrait en compte à la fois les travaux des didacticiens des mathématiques, mais aussi des éléments complémentaires et qui nous permettrait d'évaluer plus justement (sans prétendre viser l'adéquation totale avec la réalité) les items proposés dans le cadre d'évaluations institutionnelles. Cet outil serait également utile en formation et nous permettrait d'inférer sur les pratiques des enseignants.

Nous avons donc conçu un outil appelé « facteurs de complexité » qui s'inspire de divers travaux de chercheurs (taxonomie de Gras adaptée par Bodin[4], niveaux de mise en fonctionnement des connaissances de Robert, registres de représentation sémiotiques de Duval…), et qui prend également en compte les résultats des travaux en didactique des mathématiques identifiant des difficultés liées à certains domaines mathématiques[5].

---

[4] Utilisée pour classer des énoncés de mathématiques selon leur complexité cognitive, cette taxonomie a été développée pour EVAPM et PISA mathématique par Bodin.

[5] Les travaux de recherche sur lesquels nous sommes appuyées pour lister les difficultés dans les champs « fractions-décimaux » et « aires et périmètres » figurent dans la bibliographie.

[7] Voir (Robert, 2008)

Trois facteurs déterminent cet outil, auxquels nous avons attribué un nombre de points pour un total de 10 qui nous permet d'estimer la difficulté de l'item. Plus le nombre de points est élevé, plus la difficulté est grande :

FC1 : contexte de l'énoncé (3/10)

FC2 : contexte de la tâche (3/10)

FC3 : contexte mathématique (4/10)

Le « facteur de complexité 1 » (FC1) s'inscrit dans le contexte de l'énoncé et prend en compte différents éléments, notamment :

- Le niveau de langue de l'énoncé.
- La nature des informations à traiter (texte, figure, schéma…).
- La forme de l'item : question ouverte ? fermée ? QCM ? Vrai-Faux ? quelle est la place de la bonne réponse parmi les différents choix proposés, dans le cas de QCM ? les distracteurs : aide ou piège?
- Le contexte de l'énoncé : proche de la vie courante ou pas ?

Le « facteur de complexité 2 » (FC2) s'inscrit dans le contexte de la tâche à réaliser et prend en compte différents éléments, notamment :

- Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances[7] :

  Application directe : pour les tâches qui amènent à des applications immédiates des connaissances, c'est-à-dire simples (sans adaptation) et isolées (sans mélange), où seule une connaissance précise est mise en œuvre sans aucune adaptation, mis à part la contextualisation nécessaire.

  Application indirecte : pour les tâches qui nécessitent des adaptations de connaissances qui sont en partie au moins indiquées ou totalement à la charge de l'élève.
- Le côté usuel ou non des tâches proposées : nous entendons par là, si la tâche est une tâche récurrente dans les manuels et dans les pratiques des professeurs ou si elle est plutôt inédite ou peu usitée. Il s'agit ici du côté usuel de la tâche et non de la situation (celui-ci étant pris en compte dans le premier facteur de complexité).
- L'identification des tâches de reconnaissance, traitement ou conversion[8] :

  Reconnaissance : quand il s'agit de reconnaître ou d'identifier une représentation de quelque chose dans un système déterminé (ex : associer ¼ avec sa représentation « camembert »).

  Traitement : quand il s'agit d'effectuer une tâche en restant dans le même registre de représentation (ex : calculer ¼ + ½ = …).

  Conversion : quand il s'agit de convertir quelque chose proposé dans un registre de représentation dans un autre registre de représentation (ex : ¼ = 0,25).

  Ainsi une tâche pour laquelle une conversion entre différents registres de représentation est nécessaire pour la résoudre sera plus complexe qu'une tâche pouvant être résolue à l'intérieur d'un même registre. Le caractère usuel ou non des changements de registres pourra également être pris en compte.

Le « facteur de complexité 3 » (FC3) s'inscrit dans le contexte mathématique de l'item. Il est directement lié à la notion mathématique en jeu. De ce point de vue, la tâche à réaliser peut être simple ou plus complexe, nous nous référons aux divers travaux effectués en didactique des mathématiques pour évaluer ce facteur de complexité.

Nous avons ensuite présenté les éléments que nous prenons en compte dans les domaines de la résolution de problèmes et de grandeurs et mesures pour illustrer notre propos.

[8] Voir (Duval, 1991).

	FC 1 : énoncé (/ 3)	FC 2 : tâche (/ 3)	FC 3 : mathématique (/ 4)
Résolution de problèmes	☐ Contexte « vie courante » ☐ Syntaxe ☐ Niveau de langue ☐ Mots inducteurs	☐ Directe ou indirecte ☐ Usuelle ou non ☐ Reconnaissance, traitement, conversion	☐ Nombres en jeu ☐ Opérations ☐ Nombre d'étapes

	FC 1 : énoncé (/ 3)	FC 2 : tâche (/ 3)	FC 3 : mathématique (/ 4)
Grandeurs et mesures (aires et périmètres)	☐ Type de quadrillage ou papier blanc ☐ Position de(s) figure(s) ☐ Unité du résultat prise en compte ☐ Influence de la langue naturelle : surface-aire-périmètre-contour	☐ Directe ou indirecte ☐ Usuelle ou non ☐ Reconnaissance, traitement, conversion	☐ Confusion aire - périmètre ☐ Confusion de formules ☐ Variations indépendantes ☐ Conversions ☐ Unités : expression de l'unité du résultat : m, m^3, … ☐ Découpage, recollement

La construction de cet outil a été progressive et affinée au fur et à mesure de l'avancée de nos travaux, en particulier en l'utilisation de l'outil sur différents items nous a mené à reprendre certains des facteurs et à les compléter. Les indicateurs que nous prenons en compte dans les facteurs de complexité évoluent encore, notamment pour mesurer l'impact des changements de registre en terme de complexité ou pour évaluer si la tâche est usuelle ou non[9].

L'ensemble de ces trois facteurs de complexité nous paraît à même de répondre aux objectifs que nous nous sommes fixés. Nous avons poursuivi notre communication en montrant l'usage que nous en faisons en formation, notamment.

III - USAGE DE L'OUTIL EN FORMATION

Lors de l'atelier que nous avons proposé l'année dernière, une participante, en charge d'un groupe de réflexion en mathématiques sur l'académie de Versailles, nous a sollicitées pour intervenir devant différents acteurs de la formation (IEN, conseillers pédagogiques, PIUFM). Afin de montrer que l'outil que nous avons développé dans le cadre d'une recherche portant sur les évaluations de la DEPP pouvait être transposable à d'autres évaluations nationales, nous avons choisi de montrer son usage sur les items des évaluations nationales qui venaient de se dérouler en CM2. Nous avons retenu les items qui correspondaient aux domaines sur lesquels nous avions déjà travaillé : décimaux ainsi que grandeurs et mesures (voir en annexe 1).

Dans un premier temps, nous avons rappelé les résultats de différents travaux menés en didactique des mathématiques autour des décimaux (voir bibliographie et annexe 2), puis nous avons exposé les items correspondants à ce domaine en rajoutant également quelques exercices relevant de la résolution de problèmes dans le cadre du domaine « grandeurs et mesures ».

Nous avons ensuite demandé aux participants d'estimer la complexité de chacun des items en utilisant les différents facteurs que nous avons listés précédemment. En utilisant cet outil, il s'agissait d'abord de montrer son intérêt pour analyser l'activité (mathématique, mais pas seulement) que l'élève doit mettre en place pour résoudre la tâche demandée.

[9] L'évolution relative aux éléments pris en compte dans les différents facteurs de complexité est visible en se référant à l'état de l'outil en 2010 (Grapin & Sayac, 2010).

Ensuite, nous souhaitions montrer aux participants la pertinence de cet outil en formation : en effet, comme ils ont pu le constater lors de la communication, évaluer les différents facteurs permet d'engager une discussion autour des éléments intervenant dans la tâche d'une manière objective (en s'appuyant sur les facteurs de complexité, leurs pratiques…), mais aussi subjective (en ayant accès à leurs représentations sur les difficultés des élèves par exemple).

À titre d'exemple, nous proposons ci-dessous les différents éléments retenus par les participants pour les différents facteurs de complexité intervenants dans les deux problèmes présentés au début de cet article, puis dans l'exercice 2 de l'évaluation nationale (annexe 1).

Problème 1 et problème 2

Dans ces deux problèmes, pour les facteurs de complexité 1 et 3, nous n'avons repris dans le tableau que les éléments distinguant les deux items. Aussi, pour le premier facteur, la forme ainsi que le niveau de langue de l'énoncé sont semblables, et pour le troisième facteur, la nature des opérations intervenant dans la résolution du problème sont identiques.

<table>
<tr><th>items</th><th>FC1
Enoncé</th><th>FC2
Tâche</th><th>FC3
Mathématique</th><th>Total
/10</th><th>Taux de réussite</th></tr>
<tr><td>Problème 1 : rosiers et sapins</td><td>Prix unitaire non donné explicitement : 2/3
Contexte moins proche de la vie courante.</td><td rowspan="2">Tâche usuelle, application directe, reconnaissance : 1/3</td><td>Nombres entiers « plus grands » : 2/4</td><td>5</td><td>63 %</td></tr>
<tr><td>Problème 2 : cahier et stylo</td><td>Prix unitaire donné explicitement : 1/3</td><td>1/4</td><td>3</td><td>81 %</td></tr>
</table>

Exercice 2 de l'évaluation nationale

<table>
<tr><th>items</th><th>FC1
Énoncé</th><th>FC2
Tâche</th><th>FC3
Mathématique</th><th>Total
/10</th><th>Taux de réussite</th></tr>
<tr><td>2a</td><td rowspan="3">Présence d'un distracteur fort dans les deux premières questions et question ouverte pour la dernière (même si ce n'est pas forcément source de complexité) : 2/3</td><td rowspan="2">Tâche usuelle, application directe, reconnaissance : 1/3</td><td>Présence de 0 dans le nombre : 2/4</td><td>5</td><td>64 %</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>Travail sur les dixièmes (plus simple que les centièmes) : 1/4</td><td>4</td><td>57 %</td></tr>
<tr><td>2c</td><td>Tâche moins usuelle, de conversion : 2 / 3</td><td>Le passage de la fraction à l'écriture décimale est source de difficulté (confusions possibles avec 1,4 – 0,4 – 0,14 …) : 3/4</td><td>7</td><td>31 %</td></tr>
</table>

Les taux de réussite sont donnés ici à titre indicatif et proviennent d'une circonscription parisienne.

Le score obtenu en utilisant cet outil n'est pas un élément objectif permettant de prévoir les scores de réussite à chacun des items. Il permet néanmoins de déterminer *a priori* la complexité d'un exercice en comparaison à d'autres, relevant d'un même domaine, voir d'un même champ. L'analyse de l'énoncé est ainsi guidée par les indicateurs caractérisant chacun des facteurs et le score attribué à chacun des facteurs permet une comparaison relative, sur des éléments plus précis qu'une comparaison globale de la complexité d'un item ne le permettrait.

IV - ECHANGES AVEC LES PARTICIPANTS

Les échanges que nous avons eus avec les participants ont été riches et ont conforté notre sentiment d'utilité de l'outil que nous avons développé, au-delà du cadre de notre recherche. Ils ont témoigné du fait que tous les acteurs impliqués dans la formation des enseignants ont conscience que la seule prise en compte de facteurs strictement mathématiques est insuffisante pour comprendre les réponses des élèves.

Nous avons donc convenu que notre regard de didacticien(ne)s ne suffit pas toujours à appréhender la réalité d'une tâche mathématique, qu'il existe des éléments contextuels venant perturber sa réalité mathématique et qui ont des incidences sur la réussite des élèves.

L'outil « facteurs de complexité » est apparu comme un moyen utile pour repérer les écarts qui existent parfois entre la réalité didactique et la réalité effective d'une tâche, et qu'ils pouvaient également être un outil en formation pour aider les professeurs à :

- Se centrer sur le travail de l'élève ;
- Se centrer sur la tâche mathématique ;
- Réfléchir à l'évaluation des élèves.

Pour conclure, nous avons exposé les éléments sur lesquels nous travaillons actuellement pour notre recherche, dans le but de préciser notamment certains des éléments entrant dans les facteurs de complexité :

- La recherche de cohérence (ou non) entre les réponses des élèves aux différentes évaluations auxquelles ils sont soumis. Il s'agit de repérer le fil de la construction d'une connaissance et de mesurer l'impact de la forme de la question : quel est l'impact d'un distracteur fort dans la réponse de l'élève ? une question, lorsqu'elle est posée sous forme de QCM induit-elle une difficulté supplémentaire (ou non)…
- L'évaluation de l'impact des différentes représentations sémiotiques dans les réponses des élèves à partir de tests complémentaires proposés dans des classes de CM2 et de 6ème, notamment dans le domaine des fractions et des décimaux (par exemple, un exercice sur des fractions proposé avec des bandes a t-il la même complexité qu'un même exercice proposé avec des disques ?).
- L'étude de manuels pour répertorier les différentes tâches proposées et ainsi évaluer leur caractère usuel ou non (pour préciser l'indicateur correspondant dans le deuxième facteur de complexité).

Enfin, et en parallèle de ce travail, nous recherchons une différenciation contingente éventuelle des réponses aux items suivant le sexe des élèves, et poursuivons notre travail sur les items de collège.

BIBLIOGRAPHIE

BODIN A. (2003) Comment classer les questions de mathématiques ? *Communication au colloque international du Kangourou*, Paris.

BODIN A. (2005) Classification des questions d'évaluation et cadre de référence des études PISA pour les mathématiques. *Téléchargeable du site personnel de l'auteur* : http://web.me.com/antoinebodin/pro/

BROUSSEAU G. (1980) Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques*, **1/1**, 11-60.

BROUSSEAU G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques*, **2/1**, 37-127.

BROUSSEAU G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, **4/2**, 164-197.

COMITI C., MOREIRA BALTAR P. (1993) Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire/périmètre pour des rectangles, *Petit x*, **34**, 5-29.

DOUADY R., PERRIN M-J. (1986) Nombres décimaux, liaison école-collège, IREM de Paris VII.

DUVAL R. (1991), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **5**, 37-65.

GRAPIN N., SAYAC N. (2010) Évaluations bilans fin d'école et fin de collège : présentation de résultats et analyse d'items, *Actes du XXXVII^ème^ colloque COPIRELEM,* La Grande Motte.

MERCIER A. (1988) Enseigner les décimaux ? La division comme révélateur des obstacles dans l'enseignement et l'emploi des décimaux, *Actes de l'Université d'été Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire, Olivet,* IREM de Bordeaux.

MOREIRA BALTAR P. (1996) A propos de l'apprentissage du concept d'aire, *Petit x*, **43**, 43-68.

NEYRET R. (1991) Les décimaux vus par les enseignants - Leurs stratégies face aux erreurs des élèves. Deux études de cas d'enseignants de CM2, *DEA de didactique des disciplines scientifiques*, Université Grenoble 1.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1986) Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège, *Petit x,* **10**, 5-29.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1989) L'aire et la mesure, *Petit x,* **24**, 5-36.

ROBERT A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, F Vandebrouck, Chapitre 2.

RODITI E. (2007) Aider les élèves à apprendre à comparer des nombres décimaux, *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation,* **10-1**, 5-26.

Grand N regroupés dans le numéro spécial pour le cours moyen, tome 1, (1981) : NEYRET R. (n° 17, 1979), NEYRET R. et COMITI C. (n° 18, 1979), COQUAND M. (n° 20 et 21, 1980), BOLON J. (n° 52, 1992-93), TANNER M. (n° 52, 1992-93).

ANNEXE 1 ITEMS DES EVALUATIONS NATIONALES CM2 - 2011

Exercice 2

a/ Entoure la fraction égale à 6,02 :

60/2 62/10 602/100 620/100

b/ Entoure le nombre à virgule égal à 3/10 :

3,10 0,3 0,03 30,00 3,0 3,00

c/ Écris sous forme d'un nombre à virgule : ¼ =

Exercice 3

Compare les deux nombres placés sur chaque ligne en utilisant à chaque fois le symbole qui convient < (plus petit que), > (plus grand que), = (égal).

13150	1 350
180,5	185
0,6	1,2

Exercice 21

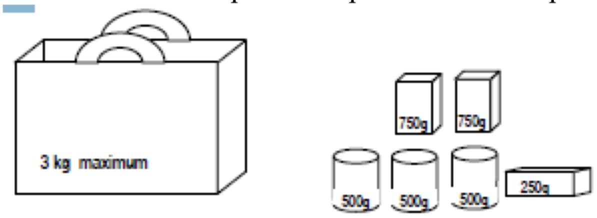
A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres.
Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Exercice 12

Une image a la forme d'un rectangle dont les dimensions sont 6 cm et 8 cm.
Quel est le périmètre de cette image ?

Exercice 17

Ce sac résistera-t-il pour transporter toutes ces provisions? Coche la bonne réponse.



OUI NON

Explique ton raisonnement.

ANNEXE 2 DIFFICULTÉS RELEVÉES AUTOUR DES DÉCIMAUX

Difficultés

- Présence de zéro(s) dans le nombre
- Correspondance entre écriture fractionnaire et écriture décimale
- Principe d'intercalation
- Placement d'un nombre décimal sur un axe gradué
- Multiplication et division de décimaux par 10, 100 ou 1000
- Relation entre un nombre décimal et mesure, conversions
- Conception du nombre décimal comme juxtaposition de 2 entiers séparés par une virgule
- Équivalence d'écritures
- Les règles de fonctionnement des entiers ne peuvent être étendues aux décimaux : l'ordre des décimaux n'est pas le même que celui des entiers par exemple
- Les décimaux sont d'abord une construction mentale et non physique (comment se représenter 1, 35 par exemple ?

Variables didactiques en jeu

- Relation entre nombre décimal et référent dans un problème (mesure de longueur, moyenne, prix…) : rôle de la pratique sociale de référence
- Taille des parties entières et décimales, égales ou non

APPRENTISSAGES GÉOMÉTRIQUES AU CYCLE 2 ET FORMATION DES ENSEIGNANTS

Jacques DOUAIRE
MCF, IUFM DE VERSAILLES, - UCP
LDAR
jacques.douaire@wanadoo.fr

Fabien EMPRIN

MCF, UNIVERSITE de REIMS CHAMPAGNE ARDENNE - IUFM
LERP
fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé

L'équipe ERMEL expérimente et rédige actuellement des situations didactiques sur les apprentissages spatiaux et géométriques au cycle 2. Cette recherche nous a conduits à une analyse des procédures et des relations dans des activités liées à différents espaces : nous les présentons dans cette communication, ainsi que des choix de progressions. Deux thèmes (3D et alignement) serviront de base pour les illustrer.

I - PRÉSENTATION DE LA RECHERCHE

1 Problématiques

L'équipe ERMEL (IFé – ENS Lyon), constituée par des formateurs (enseignants-chercheurs, PIUFM et maîtres formateurs) de quatre académies, conduit actuellement une recherche sur les apprentissages spatiaux et géométriques au cycle 2 de l'école primaire.

Cette recherche a notamment pour origine le constat que l'enseignement de la géométrie dans les classes du primaire ne prend pas suffisamment en compte les connaissances que peuvent développer les élèves lors de la résolution de problèmes. De plus, les outils liés aux technologies informatiques (notamment les logiciels de géométrie dynamique) offrent des potentialités nouvelles pour les apprentissages spatiaux et géométriques à l'école élémentaire, en particulier pour la représentation de situations spatiales, la modélisation d'objets. Mais leur utilisation dans l'enseignement au primaire, malgré les demandes institutionnelles, reste souvent problématique. L'articulation, rendue nécessaire, entre les activités conduites avec ou sans ces environnements informatiques ne peut consister à mettre simplement bout à bout des situations d'apprentissage dans l'environnement traditionnel (la feuille de papier et le stylo) et des situations d'apprentissage qui donnent une place aux TICE. Cette recherche nécessite donc d'identifier les savoirs en jeu dans ces apprentissages et de prendre en compte les connaissances initiales des élèves dans ces domaines.

2- Méthodologie

La méthodologie de la recherche comporte plusieurs composantes schématisées ci-dessous figure 1 :

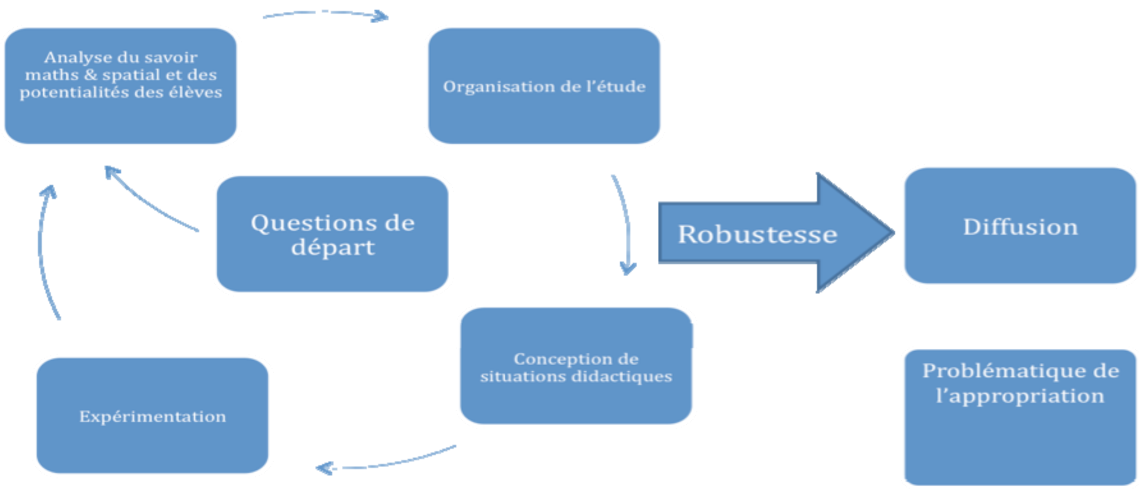


Figure 1 : étapes de la recherche ERMEL

À partir d'une question de départ, l'équipe met en place des dispositifs expérimentaux permettant :

1) Une analyse du savoir géométrique (problèmes, propriétés, représentations…), ainsi que des connaissances spatiales développées par les élèves.
2) L'organisation de l'étude des différentes notions spatiales et géométriques, sur les trois années du cycle.
3) L'élaboration de situations didactiques et leur expérimentation dans des classes de plusieurs académies.

Ces trois composantes sont en interaction, l'identification des potentialités des élèves étant aussi issue des expérimentations menées. Chacune de ces étapes associe l'ensemble des collègues de l'équipe, qu'ils soient formateurs en IUFM (PRAG ou enseignants chercheurs) ou maîtres-formateurs du premier degré. Les membres de l'équipe se réunissent pour analyser les expérimentations. Il découle de ces échanges une explicitation des potentialités des élèves, de leurs difficultés. Ce travail permet de définir les besoins relatifs à l'enseignement dans les différents domaines et débouche sur la production ou l'amélioration de dispositifs d'enseignement. Bien évidemment, les disponibilités de chacun sont variables (les maîtres formateurs n'ont pas de décharge de service pour ces travaux). D'un point de vue pratique, l'équipe est structurée en équipes locales pilotées par les formateurs IUFM qui se réunissent et travaillent ensemble. Les formateurs IUFM sont les intermédiaires entre les équipes locales et l'équipe nationale.

4) La rédaction d'un ouvrage à destination des formateurs et des enseignants du premier degré. Il comporte une première partie explicitant les enjeux des apprentissages et des problématiques de l'enseignement dans ce domaine. La seconde partie présente les situations qui ont été retenues parmi les dispositifs d'enseignement expérimentés.

Les résultats de la recherche feront l'objet d'une publication destinée aux enseignants et aux formateurs, comme pour nos précédentes recherches (cf. ERMEL Géométrie cycle 3 : « Apprentissages géométriques et la résolution de problème au cycle 3 » INRP/Hatier, 2006).

Les situations qui y sont proposées présentent une certaine « robustesse » : les résultats et procédures produits par les élèves sont présentés dans le descriptif des situations, ce qui permet au maître, en général non spécialiste des mathématiques, de pouvoir anticiper ses décisions. Cette fiabilité nous semble due d'une part à la cohérence entre les conceptions de l'apprentissage et les situations proposées et, d'autre part, à leur expérimentation dans de nombreuses classes durant plusieurs années.

En parallèle, nous essayons d'expliciter les difficultés (d'ordres pédagogique ou didactique) que peuvent rencontrer les enseignants débutants dans l'appropriation et la mise en œuvre de dispositifs d'enseignement, dont ceux produits par notre équipe, privilégiant l'activité mathématique des élèves (cf. Actes du colloque COPIRELEM d'Auch, 2009).

Certaines pratiques rencontrées en maternelle (activités associant plusieurs disciplines, thématiques sur de longues périodes, existence d'ouvrages intéressants proposant des activités dans le domaine spatial, nombreux jeux, documents permettant un partage d'expériences…) nécessitent aussi de préciser les réponses que nous pouvons apporter aux besoins repérés : il ne s'agit pas simplement de proposer de nouveaux dispositifs, mais aussi d'apporter un éclairage qui permette d'adapter les ressources existantes.

Nous allons expliciter ces enjeux : le développement de compétences spatiales et géométriques par la résolution de problèmes et l'utilisation conjointe de différents environnements en cycle 2, à partir de deux thématiques (l'apprentissage du 3D et celui de l'alignement).

II - LES OBJETS 3D À L'ÉCOLE MATERNELLE ET AU CYCLE 2

Dans les écoles maternelles, de nombreux jeux sont présents, par exemple Architek (Robert et Michel Lyons, la Chenelière), ou Quarto© (Gigamix), Katamino© (Gigamix)… mais également du matériel pédagogique d'assemblages de formes que l'on trouve dans les catalogues spécialisés. La difficulté est là d'identifier les compétences travaillées et les obstacles que les élèves peuvent rencontrer.

Au cycle 2, mais également dans le reste de la scolarité, on peut entendre que l'enseignement lié aux objets 3D nécessite la manipulation de matériel qui, quand il est présent dans l'école, complique notablement la gestion de la classe.

Pour ces raisons, il nous a semblé pertinent de proposer dans cette communication les premiers résultats concernant l'apprentissage du 3D à l'école maternelle, en commençant par une analyse du savoir mathématique en jeu. Nous présenterons ensuite les types de situations possibles, ainsi que l'analyse des potentialités des élèves issus de notre expérimentation et, pour terminer nos choix didactiques. Nous aborderons en particulier une question vive concernant le type de situations proposées en relation avec notre première remarque sur la place du matériel.

1 L'entrée par la définition de solide

Avant de développer nos propositions d'enseignement nous analysons le savoir mathématique en jeu, les représentations des élèves et les programmes actuels et passés. Cette analyse du savoir nous permet de faire des choix parmi les propriétés est les conceptions susceptibles d'être travaillées et ainsi de faire des propositions de dispositifs d'enseignement. Il ressort de notre analyse du concept mathématique de solides trois approches possibles :

- la première relevant d'une définition « physique » ou proche du sens commun pour laquelle un solide est quelque chose d'indéformable ;
- la seconde se rapproche de la définition d'Euclide (livre XI) : « est solide ce qui possède longueur et largeur et profondeur, la limite d'un solide est une surface » traduit par Peyrard (1804) c'est-à-dire une portion de l'espace délimitée par une surface ;
- une dernière correspondant à l'idée de solide engendré et à la définition de Leibniz citée par Couturat (1901) « Aussi revient-il [Leibniz] bientôt à la considération du mouvement, et il définit

la ligne, la surface et le solide comme engendrés respectivement par un point, une ligne et une surface qui se déplacent ».

C'est vers la définition « portion de l'espace » et « enveloppe de solide » (surface) que nous centrons nos choix d'enseignement en visant à amener les élèves à se détacher du sens physique et en considérant que la dernière définition est hors de porté de l'école primaire

Ces deux définitions sont à mettre en parallèle des trois façons d'appréhender les solides que peuvent avoir les élèves : par la fonction sociale du solide (toboggan, ballon), par les aspects fonctionnels (« ce que je peux faire avec, ça roule, ça ne tient pas debout sur toutes faces »), par les propriétés mathématiques (face, nombre de faces, sommets…).

Au regard de ces définitions, conceptuelles et pratiques, nous pouvons identifier les premiers enjeux du cycle 2, à savoir, amener les élèves à :

- faire abstraction des propriétés qualitatives des objets, des fonctions sociales et des aspects fonctionnels. Il s'agit donc d'amener les élèves à appréhender le solide comme un ensemble de propriétés numériques et spatiales ;
- voir un solide, comme plein, composé par de la matière et non réduit à une enveloppe ce qui correspond à faire la distinction en solide et surface (comme en boule et sphère, tout en sachant que cette distinction n'existe d'ailleurs pas dans le vocabulaire pour la plupart des solides).

2 Entrée par la tâche

Nous avons fait une recherche exhaustive des possibles en prenant comme paramètre les objets mathématiques manipulés en fonction de leur nombre de dimensions :

3D, objets de l'espace comme le cube, le pavé, le cylindre…

2D les traces, les vues, les faces, les représentations en perspectives, mais aussi les empreintes…

1D les arêtes

0D les points singuliers comme les sommets.

Les situations sont donc caractérisées par les dimensions de l'objet - donnée du problème - et par la dimension de l'objet - résultat de la tâche à effectuer.

Cette démarche d'analyse des problèmes en fonction des dimensions des objets est utilisée par le chercheur comme une typologie mais peut être étayée du point de vue des apprentissages des élèves par l'idée de décomposition dimensionnelle de Duval [2005]. En effet, pour Duval (2005) « la division méréologique [décomposition des objets en objets de même dimension comme le Puzzle par exemple] reste purement visuelle tandis que la déconstruction dimensionnelle est entièrement subordonnée à un discours axiomatique ou axiomatisable. […] La déconstruction dimensionnelle se fait pour une (re)construction déductive des objets représentés. ».

Au cycle 2, nous abandonnons l'idée de travailler spécifiquement sur le 1D et 0D dans l'approche des solides. Le paragraphe suivant sur rectitude et alignement montre les difficultés conceptuelles pour travailler sur ce type d'objet. Il nous reste donc trois types de situations : les situations de passage du 3D au 3D, du 3D au 2D et du 2D au 3D.

- 3D → 3D : Nous avons retenu deux tâches possibles

Les tâches d'identification de solide. La donnée est donc un objet 3D que les élèves doivent reconnaître ou décrire. Les situations qui sont dans cette catégorie sont notamment des situations de communication (au sens de la théorie des situations didactiques TSD (Brousseau, 1998)) : l'élève possède un solide et il doit le communiquer à d'autres qui doivent par exemple le retrouver parmi un lot de solides. Nous utilisons en formation une grille des variables didactiques des situations de communication notamment reproduite dans (Douaire et *Al.*, 2009). Une de ces variables est notamment le mode de communication autorisé, par exemple le mime ou au contraire le langage verbal seul. L'apprentissage induit par ces situations contribue à l'identification des propriétés qui permettent de discerner un solide des autres et d'y associer des mots ou des signes.

Les tâches de fabrication de solide à partir d'objet 3D. La « boule » de pâte à modeler est un objet 3D qui permet de fabriquer des solides. Nous présentons dans la suite un exemple de résultat de ce type de travail, notamment la difficulté pour les élèves de voir le solide comme une portion de l'espace et leur propension à travailler sur le modèle 2D→3D.

- 2D → 3D : il s'agit de tâches de fabrication de solide. Nous mettons (abusivement du point de vue mathématiques) dans la catégorie 2D les faces en carton, le matériel du types clixy ©, polydron© ou lokon©. Il s'agit de situations où l'élève doit construire un solide donné par assemblage de faces.
- 3D→2D : les situations sont de type production d'empreintes ou de traces. L'empreinte laissée dans le sol par un pavé ou une vue de ce solide sont des traces 2D du solide. Les enjeux de ces situations peuvent être simplement des productions de trace ou une catégorisation des solides en fonction de leurs traces ce qui revient à connaître le solide par un ensemble de propriétés. Ce travail permet également de montrer qu'une empreinte donnée peut correspondre à plusieurs solides notamment qu'un carré peut correspondre à un cube, mais également à un pavé ou encore une pyramide ou autre. Ce fait contribue à une meilleure compréhension de ce qui caractérise un solide et donc le distingue des autres. Il sera remis en valeur dans les situations de communication.

3 Les potentialités des élèves de grande section

Nous avons mis en place des situations de communication dans plusieurs classes de grande section. Dans ces classes aucune activité préparatoire spécifique n'avait été prévue pour familiariser les élèves au mime ou à l'utilisation de la pâte à modeler. Dans la première situation, l'élève doit toucher dans un sac, donc sans voir, un solide. Puis, il doit en faire un modelage de façon à ce que ses camarades puissent le retrouver parmi un lot. Le lot de solides est constitué de solides sociaux et de maquettes (ERMEL, 2006) : d'un cube, des pavés plus ou moins allongés, une pyramide à base carrée, un tétraèdre, un cylindre, une sphère (une balle) et un ballon de rugby miniature (une sorte d'ellipsoïde de révolution). Dans les deux situations suivantes, l'élève touche toujours un solide dans un sac et les autres élèves doivent retrouver le solide parmi un lot (enrichi d'objets similaires, mais de taille différente, de tores, prismes, octaèdres et plusieurs pyramides). La communication se fait soit pas mime, soit par communication verbale.

Dans les trois cas, nous pouvons remarquer une prégnance du 2D dans toutes les formes de communication. Pour le modelage, par exemple, beaucoup d'élèves font des « boudins » pour « dessiner » une figure plane ou pour réaliser le squelette du solide (figure 2, 3, 4 et 5). Il n'y a que pour la sphère (figure 6) que l'ensemble des modelages est « plein ».

Photographies des productions des élèves, situation de communication de solide par modelage (les élèves touchent un solide dans un sac, en font un modelage qui permette aux autres de retrouver le solide touché)

Figure 2 : modelage des élèves ayant touché un pavé droit.

3 rectangles en « boudins »

1 rectangle en « boudins » rempli

1 squelette de pavé en « boudins »

Figure 3 : modelage des élèves ayant touché un cube

1 rectangle en « boudins »

1 squelette en « boudins » enchevêtrés

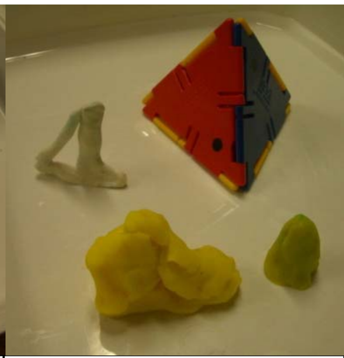


Figure 4 : modelage des élèves ayant touché une pyramide fabriquée avec le matériel clixi©

1 triangle en « boudins » rebout

1 triangle en « boudins » remplis

1 cône

Figure 5 : modelage des élèves ayant touché un cylindre (solide social)

1 cylindre

1 cylindre creux (influence de la fonction du solide social)

Figure 6 : modelage des élèves ayant touché une boule (solide social)

3 boules

Dans la communication verbale, les noms de formes planes apparaissent, ainsi que les fonctions des solides. Dans l'exemple transcrit ci-dessous, l'émetteur, élève de grande section vient de toucher un prisme à base triangulaire.

Émetteur : « heu et bien c'est … »

Récepteur 1 : « Rond, carré, triangle ? »

E : « c'est triangle »

Récepteurs en cœur : « triangle ! »

[..]

E : « c'est triangle, un peu de travers après ça descend et après c'est carré »

[…]

E : « ça monte comme une montagne, après ça descend, et c'est comme un toboggan »

Dans la communication par mime, les élèves font des gestes dans les 3 dimensions quand il s'agit de mimer un cylindre. Les figures 7 et 8 montrent que l'élève mime une face curviligne qui est « bouchée »

Deux exemples de mimes de solide. L'élève a touché un solide dans un sac puis doit le mimer.

Mime du cylindre		Mime de l'octaèdre
		
Figure 7 : mime du cylindre L'élève commence par mettre ses deux mains pour mimer la face curviligne en faisant un mouvement de rotation	Figure 8 : mime du cylindre suite. L'élève met ensuite sa main gauche successivement à plat à gauche et à droite pour indiquer que les deux côtés du cylindre sont bouchés	Figure 9 : mime de l'octaèdre L'élève met ses mains en pointe vers le haut, puis vers le bas. Nous considérons ce mime comme 2D

aux extrémités. En revanche, pour le mime d'un octaèdre, l'élève mime deux pointes, une vers le haut comme l'illustre la figure 9, et une vers le bas.

Pourtant les élèves, lors de la phase de prise d'information, manipulent bien le solide, le font tourner dans leurs mains.

Nous avons plusieurs hypothèses pour expliquer ces descriptions utilisant le 2D, la prégnance du boudin dans les jeux d'enfants avec la pâte à modeler par exemple. De plus, quand les élèves voient un cube et qu'ils le décrivent en disant carré, l'utilisation de ce mot qui leur est le plus familier ne signifie pas qu'ils ne voient pas que c'est un cube, mais peut-être simplement qu'il s'agit du mot qui le plus disponible.

Indépendamment de cette question de la perception des objets 3D (question à laquelle nous ne pouvons pas répondre), la communication d'un objet 3D par le 2D est problématique car elle n'est pas maîtrisée par les élèves. En effet les élèves disent (ou montre) « un carré », pour un cube sans se préoccuper par exemple que dans le lot de solides il y ait une pyramide à base carrée ou un pavé ayant des faces carrées.

Nous avons fait le choix de construire une situation qui oblige les élèves à fabriquer un solide plein pour les amener ensuite à communiquer les objets 3D par du 3D.

4 Un exemple de situation : « terminer le cube »

Il s'agit d'une situation d'action, toujours au sens de la Théorie des Situations Didactiques (TSD), c'est-à-dire que l'élève a une tâche à réaliser. Seule l'utilisation de la procédure optimale permet de réussir cette tâche. Réciproquement l'enseignant a donc la garantie qu'en cas de réussite l'élève a bien appris ce qui est visé. De plus, l'élève est responsable de sa tâche et c'est la situation elle-même qui renvoie à l'élève l'information sur sa réussite ou non. En cas d'échec, il doit modifier, adapter, voire abandonner sa procédure ou s'approprier celle d'un autre pour réussir.

Les productions ci-dessous sont celles d'élèves de CP.

L'élève doit, avec de la pâte à modeler, fabriquer le solide qui permet de terminer le cube ci-dessous figure 10. Le cube est placé dans un coin de la classe et les élèves ne l'ont pas sur leur table pour fabriquer le solide manquant. Ils disposent de la quantité juste nécessaire de pâte à modeler.

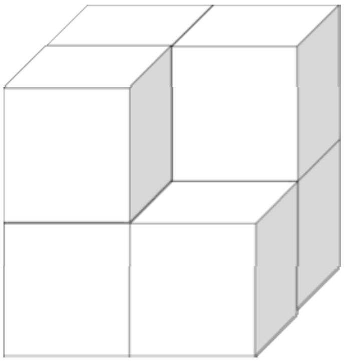


Figure 10

Type de solide	Production Figure n°	Nombre
Carré en boudins	11 à gauche	3
Carré en boudins rempli	11 à droite	1
Cylindre	14 à gauche	1
Dé	13	1
Cube imparfait	12	8
Cube très proche	14 à droite	8

Tableau 1 : les productions d'une classe de CP

Les productions sont récapitulées tableau 1 et sont illustrées par les productions ci-dessous.

Types de productions des élèves dans la situation « boucher le trou ». Il faut finir, avec juste ce qu'il faut de pâte à modeler le cube dont il manque un cube.

Figure 11 : les deux modelages roses ne permettent pas de finir le cube :

1 carré en « boudins »

1 carré en « boudins » remplis

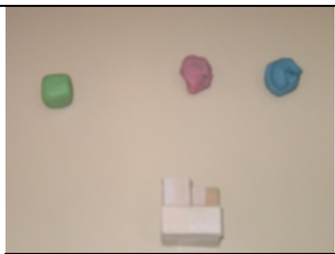


Figure 12 : trois cubes imparfaits

Figure 13 : un dé (on remarquera les points du dé dans le cube)

Figure 14 :

En vert deux cubes très proche du cube manquant

En rose un cylindre

Le nombre de productions relevant du 2D décroit par rapport à ce qui a été observé dans les situations de communication. Dans les situations de communication, l'utilisation d'un vocabulaire, de modelage ou du mime 2D, n'empêche pas la réussite ce qui fait que lors des mises en commun ces stratégies ne peuvent pas être disqualifiées. Dans la situation d'action au contraire, la mise en commun permet alors de faire émerger ce que les élèves ont appris, la question posée est : « Comment faire pour faire un solide ? ». Les formulations des élèves sont notées au tableau et reproduites ci-dessous :

- *Il faut faire une forme*
- *Il ne faut pas de boudins*

- *Les formes ne sont pas aplaties*
- *On doit pouvoir le mettre debout et le porter (si besoin)*
- *On avait été obligé d'expliquer à ceux qui n'y arrivaient pas comment faire le cube.*
- *On a fait une boule, et on l'aplatit à gauche et à droite, devant derrière (avec les gestes) et on tape le dessus sur la table pour finir et ça fait les six côtés.*

La dernière formulation est un mode d'emploi, mais reprend néanmoins une des propriétés du cube : la présence de six faces. Sans sur-interpréter les phrases des élèves, on peut néanmoins noter que la définition de solide comme portion de l'espace, c'est-à-dire comme quelque chose de plein, transparaît. Lors des reprises des situations de communication, quelques productions en « boudins » persisteront, mais seront systématiquement disqualifiées dans la mise en commun.

5 Nos choix didactiques sur le 3D

Notre choix pour le cycle 2 est d'amener les élèves à communiquer le 3D par du 3D. Les solides sont ensuite décomposés en objets 2D mais en utilisant exclusivement des objets matériels comme l'empreinte ou la face en carton.

Nos premières expérimentations nous ont amenés à concevoir une situation qui permet de clarifier ce qui est attendu lorsque l'on demande de construire un solide notamment avec de la pâte à modeler, c'est-à-dire de la matière. Pour cela une situation de production de solide a été nécessaire.

Dans les situations, nous remarquons également la place prépondérante du langage. Ce langage, nous avons choisi de lui donner du sens en le plaçant comme solution d'une situation de communication. En effet, dans la situation de communication, l'utilisation d'un langage commun partagé est nécessaire, ce qui rend indispensable l'utilisation du langage mathématique et donc lui donne du sens. Ce langage peut être déjà connu de l'élève, ou de quelques élèves, ou encore être apporté à ce moment-là par l'enseignant comme solution au problème. Nous cherchons à préciser quelles sont les interactions entre le langage 2D et le langage 3D et pourquoi les élèves utilisent le premier pour définir des objets de l'espace.

En ce qui concerne les types de situations, nous avons décrit plus haut des situations de communication et des situations d'action au sens de la TSD, mais nous avons également remarqué que des situations moins didactifiées étaient nécessaires. En effet, il semble que les élèves aient besoin de manipuler, de toucher les objets de l'espace sensible afin de se constituer une expérience suffisante pour pouvoir aller plus loin. Ces situations utilisent notamment des jeux du commerce ou du matériel pédagogique. Mettre en œuvre ces situations à l'école permet de garantir que chacun puisse acquérir une expérience minimale contrôlée par l'enseignant indépendamment de ce qu'il peut fréquenter à la maison par exemple.

III - ALIGNEMENT ET RECTITUDE AU CYCLE 2

Les questions posées par ce thème sont nombreuses et beaucoup ne lui sont pas spécifiques : quelles sont les connaissances initiales des élèves sur l'alignement ? Quelles sont les significations, liées à des expériences ou à des problèmes, qui doivent être développées et à quel niveau sont-elles rencontrées? Quelle articulation entre différents types d'espaces (méso-espace, espace de la feuille ou écran d'ordinateur) ? Quel rôle pour les activités sur logiciel ? Quel apprentissage des instruments ? Quels sont les savoirs géométriques sur l'alignement qui peuvent être acquis en prenant appui, en continuité ou en rupture, avec les connaissances spatiales ? Quels enrichissements potentiels, ces savoirs géométriques apportent-ils aux connaissances spatiales pour la résolution de problèmes spatiaux, une « connaissance du monde » et une relation aux mathématiques (ex : modélisation) ?

Les expérimentations conduites depuis quatre ans nous ont permis de mieux connaître les composantes de cet apprentissage en termes de savoir, de compétences des élèves et de faire évoluer des situations. Nos hypothèses et nos choix ont évolué.

1 Notions

Si d'un point de vue théorique, une droite peut être caractérisée de différentes façons : par l'effet (invariance) d'une transformation, par l'intersection de plans, comme solution d'un problème de distance, par un rayon de courbure infini, par sa direction (prolongement)… de nombreux constats et résultats de recherche (ERMEL 2006) ont confirmé que les propriétés attribuées par les élèves à la droite, au début du cycle 3, sont limitées à celles liées à la perception des traits droits tracés. De plus, plusieurs des propriétés de la droite, considérée comme un objet mathématique, ne sont pas opérationnelles voire accessibles au primaire (en particulier le fait que la droite est constituée par un ensemble infini de points).

L'approche de la droite et les notions associées (alignement…) peuvent être appréhendés par les élèves du cycle 2 à travers différentes significations liées à la perception ou l'expérience : un objet matériel (fil tendu, bord d'un objet rectiligne, pli d'une feuille…), un objet du monde graphique (trait rectiligne, tracé sur un écran par l'outil « droite » dans Cabri)… Ces significations sont associées à des problèmes portant sur l'identification, la production d'alignements ou de traits rectilignes, sur la reconnaissance ou l'usage d'instruments utilisés dans ces buts. Le fait, par exemple, qu'un trait puisse être prolongé pour résoudre un problème d'alignement doit faire l'objet d'un apprentissage. Un des enjeux de notre recherche sur le cycle 2 était, pour nous, de déterminer sous quelles conditions cet apprentissage pouvait être abordé à ce niveau.

Dans les programmes de l'école primaire, avant ceux de 2002, l'alignement n'est pas cité comme objet de savoir. Dans les programmes actuels, l'utilisation des instruments et des techniques est indiquée pour reproduire ou tracer des figures planes et l'alignement est cité pour le cycle 3.

2 Hypothèse initiale

Nous avons donc cherché d'une part à expliciter les significations des traits droits que peuvent rencontrer ou auxquelles peuvent accéder les élèves du cycle 2 et d'autre part à proposer des problèmes, permettant un passage à des connaissances géométriques. Le vocabulaire utilisé est lié aux contextes des situations du méso-espace, des tracés sur feuille ou des situations sur Cabri. Il ne s'agit pas pour nous d'institutionnaliser une terminologie qui n'aurait pas pris antérieurement des significations dans ces situations.

Compte tenu de ce que nous avions mis en évidence sur le cycle 3, nous avions envisagé, au début de la recherche cycle 2, une appréhension de la notion d'alignement favorisée par le passage d'expériences spatiales centrées sur l'idée de cacher un objet (au moyen de la visée) à partir d'activités vécues dans le méso-espace, reprises ensuite sur feuille dans le but de mettre en évidence l'utilité du recours à la ligne droite.

Dans la situation « Plots » qui se déroule dans la cour (ou un gymnase…), les élèves ont à trouver des emplacements où un plot en cache un autre. Dans la situation « Biglotron », un appareil photo étant situé dans un angle d'une table, les élèves ont à placer des objets dans des zones définies, de façon à ce que l'un d'eux cache les autres lorsqu'ils regarderont dans l'appareil.

Il s'agissait de poser des problèmes d'alignement dans le méso-espace (« Plots ») ou dans un grand micro-espace (« Biglotron ») puis de passer à une « modélisation » sur A3/A4 dans les deux cas, qui avait pour but de recourir au tracé de droites passant par des points représentant les objets de l'espace, la ligne droite devenant un moyen efficace de résoudre ces problèmes dans le micro-espace.

3 Premiers résultats expérimentaux au CP et au CE1

Les limites rencontrées portaient notamment sur le passage d'activités menées dans le méso-espace à des activités sur la feuille de papier. Pour la situation « Plots », la représentation sur une feuille par une vue de dessus des plots dans la cour (situation vécue précédemment par les élèves) ne garantissait pas suffisamment l'appropriation du problème par les élèves. La solution apparaissait souvent pour représenter la visée sous la forme d'une ligne brisée. Toutefois, lors de la reprise de la situation de modélisation de l'activité « Plots » sur Cabri (avec un recours à des vues en perspective simulant la 3D), les élèves produisaient une solution correcte en utilisant des droites pour placer un plot en cachant un autre.

4 Un apprentissage spécifique de la rectitude

Ces résultats expérimentaux ont aussi mis en évidence la nécessité d'un travail spécifique permettant l'appréhension en acte des significations et de certaines propriétés de la droite dès le cycle 2. Ce travail sur la « rectitude », indépendant de la représentation d'alignement de points, fait l'objet d'une expérimentation actuelle.

Dans l'étude que nous avons menée sur les apprentissages géométriques au cycle 3, nous avions explicité les significations des relations géométriques (alignement, parallélisme…) en relation avec des expériences spatiales et associées pour certaines d'entre elles à des propriétés géométriques. Le concept de droite et les notions associées (trait droit, alignement…) peuvent être appréhendés par l'élève du cycle 2 à travers différentes significations induites par la perception ou l'expérience, notamment :

- objet matériel : un fil tendu, un objet ou un bord d'objet rectiligne, un rayon lumineux, un pli de feuille… ;
- la frontière entre deux régions planes, comme les côtés d'un polygone, des demi-plans ;
- objet du monde graphique : un trait rectiligne (qui peut être prolongé au-delà des extrémités) ;
- la trace produite par un tracé avec la règle ou trace écran provoquée par l'outil « droite » dans Cabri… ;
- la trajectoire d'un objet ponctuel animé d'un mouvement rectiligne (bille, …) ;
- un ensemble de points alignés : le lieu de points alignés avec deux points.

Parmi ces significations du trait droit, celles privilégiées dans nos situations pour le CP sont celles de bord de bandes parallèles, de contour d'une figure triangle ou d'un rectangle, de trait comme réunion de segments rectilignes. Les critères de validation sont soit simplement perceptifs (régularité du tracé ou ressemblance avec un modèle), soit en relation avec une référence plus ou moins explicite au parallélisme (direction…), soit constitué par une validation pratique (coïncidence des extrémités, superposition, actions sur les objets…).

À ces significations peuvent être associés des problèmes concernant soit :

- la production de traits rectilignes ;
- l'identification de traits rectilignes (jugement) ;
- la reconnaissance et l'usage des instruments susceptibles d'être utilisés pour identifier ou produire un alignement ou une ligne droite.

Différents niveaux de maîtrise peuvent être associés à ces significations

- comprendre le but à atteindre. C'est-à-dire qu'il faut tracer un trait droit pour résoudre le problème (ou que le trait droit est solution du problème, c'est ici le rôle des formulations (validation par le langage, assez consensuelle), rôle des gestes (main levée) ;
- savoir comment il faut placer la règle. Il s'agit de la connaissance de la technique (report de la règle) et l'aspect technologique : nommer les outils, décrire l'action…
- maîtrise de la technique de tracé (validation par la production).

Ce travail sur la notion de « rectitude », bien qu'il puisse être amorcé en GS avec la production de tracés réguliers effectués dans des activités de dessin, ne prend réellement sa dimension géométrique qu'au CP où des propriétés du trait droit peuvent donc être appréhendées. Ces propriétés ne sont pas encore des objets d'étude pour elles-mêmes, mais constituent d'abord des expériences

- un trait peut représenter quelque chose qui n'a pas laissé de trace matérielle (ex : visée, geste …) ;

- un trait peut être associé à des instruments ;
- un trait peut être prolongé, par exemple pour représenter un objet caché.

Pour ce thème de l'alignement, cette recherche nous a conduits à prendre en compte de façon spécifique un ensemble de significations du trait droit (la notion de « rectitude ») relativement indépendantes des problèmes d'alignement de points. Nous nous orientons vers un apprentissage plus spécifique de ces connaissances au niveau du CP, réservant celui de l'alignement au CE1.

IV - CONCLUSIONS

Après avoir présenté, sur deux thèmes, les résultats de nos expérimentations, nous souhaitons conclure en mettant en évidence des questions communes à l'ensemble de notre recherche en vue de la rédaction d'un ouvrage pour les enseignants et les formateurs.

Tout d'abord, en travaillant sur le cycle 2, la question de la grande section est inévitable. Cette classe a des spécificités tant au niveau de l'organisation pédagogique que de la nature même des situations. Dans les classes où nous expérimentons, les situations didactiques côtoient des « jeux » ou des projets pluridisciplinaires. Ces enseignants transforment, modifient les situations de façon à les adapter à leur projet en cours ou au matériel usuel… Il nous semble donc important de réfléchir à la place qu'il est possible de laisser à ces adaptations dans la conception de nos situations et en particulier dans l'articulation entre les situations didactiques et les situations de construction d'expérience.

Cela pose également la question des attentes et des besoins des enseignants en termes de rédactions des descriptifs des situations. Une description exhaustive de ce qui s'est passé dans une classe détaillant pas à pas les actions pédagogiques de l'enseignant et les réactions des élèves, permet aux lecteurs d'avoir un guide rassurant. Cette narration, héritant de la robustesse des situations acquises par de nombreuses expérimentations, permet à l'enseignant de se concentrer sur les réactions des élèves, mais lui rend difficile toute adaptation. Au contraire, un descriptif des variables didactiques de la situation et l'exposé des choix opérables permettent à l'enseignant de faire ses propres choix, mais cela suppose une expérience de l'enseignement dans ce domaine. Cette différence entre novice et expert s'est d'ailleurs exprimée lors de la communication dans les réponses des enseignants, les maîtres formateurs penchant pour une description alors que les enseignants débutants semblent préférer une narration.

V - BIBLIOGRAPHIE

ARGAUD H.-C., DOUAIRE J., DUSSUC M.-P. (2010) Alternance et formation en mathématiques – Des exemples en PE2 et en T1 *in Actes du XXXVI^{e} colloque COPIRELEM* (Auch).

BROUSSEAU G. (1998) *THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES*, LA PENSÉE SAUVAGE.

COUTURAT (1901) *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Félix Alcan éditeur, pp. 416-417.

DOUAIRE J., EMPRIN F., RAJAIN C., (2009) L'apprentissage du 3D à l'école, des situations d'apprentissage à la formation des enseignants. *Repères IREM* n° 77.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et sciences cognitives*, volume 10, p. 5 - 53. IREM de STRASBOURG.

ÉQUIPE ERMEL (2006) Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3 (Hatier).

PAYRARD F. (1804) *Les éléments de géométrie d'Euclide traduits littéralement*, F. Louis éditeur.

CALCUL ET NUMÉRATION DÉCIMALE DE POSITION : PREMIER BILAN SUR UNE ACTION DE FORMATION CONTINUE

Valérie BAGOU
Professeur des Ecoles Maître Formateur
Ecole Bellevue 71150 CHAGNY
valerie.bagou@ac-dijon.fr

Résumé

A partir de quelques exemples issus d'une action de formation continue menée en 2010-2011, je présente des situations visant à mettre les enseignants en situation d'analyser leurs pratiques, à la recherche d'un enseignement cohérent et complémentaire de la numération et du calcul.

Percevoir la valeur des chiffres d'un nombre, s'affranchir de la difficulté de la langue française pour « dire » les nombres et s'appuyer sur la compréhension de la numération écrite chiffrée pour construire des techniques opératoires efficientes, d'abord mentales puis posées : une piste tant pour enseigner aux élèves que pour la formation des enseignants.

C'est à la demande de mon I.E.N. et de la Conseillère Pédagogique de ma circonscription que j'ai été amenée à intervenir dans la formation continue des Professeurs des Écoles en mathématiques, dans le cadre du projet de circonscription.

Cette action de formation ou « animation pédagogique » a été proposée aux collègues de ma circonscription, dans le temps des 18h de formation de leur service, 3x3h le mercredi matin.

Je devais amener mes collègues à interroger leurs choix pédagogiques et didactiques, leur proposer des pistes théoriques et des outils et sans doute aussi revenir sur des concepts ou des compétences à enseigner.

J'ai choisi de proposer des situations déclenchant des échanges entre collègues et l'analyse des pratiques, tout en proposant des thèmes, outils, situations d'apprentissage et documents, en lien direct avec les connaissances et compétences à acquérir par les élèves définies par les programmes.

Dans cet article, je développe certains contenus de cette formation abordés lors de ma communication pour illustrer l'intérêt qu'il semble y avoir à enseigner en complémentarité, la compréhension de notre numération écrite et le Calcul, afin de favoriser l'acquisition par les élèves des compétences attendues :

- L'étude de la numération décimale de position servant d'appui au calcul mental,
- Les compétences développées en calcul mental étant réinvesties dans la construction par les élèves des techniques opératoires posées,
- La construction et l'automatisation des techniques opératoires posées et le traitement des erreurs renforçant la compréhension de notre système de numération.

I - DES REPRÉSENTATIONS INITIALES À L'ÉMERGENCE DE BESOINS DE FORMATION

1 Mise en situation d'évaluation-diagnostic pour déclencher les échanges entre collègues et entrer en questionnement

Après une courte phase de présentation, les collègues ont bien accueilli cette mise au travail dans l'esprit d'une évaluation-diagnostic dont on partirait pour échanger sur nos pratiques. Il s'agissait de faire quelques exercices dont je reprendrai certaines productions au cours de l'article.

Je m'arrête ici sur l'exercice de calcul. J'ai donné une feuille photocopiée à chacun et expliqué la consigne oralement. Il s'agissait de calculer le plus rapidement possible puis on observerait comment chacun calcule.

__Calculer__

318 + 4783 *	823 + 145 *	754 – 241*	4703 – 1585*
205 x 78	670 x 609*	390 x 80,3	47,8 x 3,5
451 / 5 *	8934 / 24*	37,7 + 4,89	181,23 + 202 + 4,046

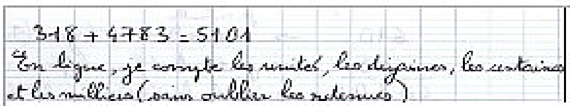
Cet exercice a déclenché beaucoup de réactions.

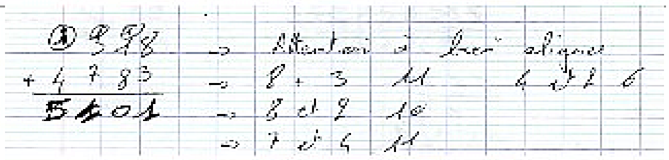
La première a été collective car les collègues n'avaient pas de feuille autre que l'exercice photocopié. « On pose ? » Ma réponse a été : «Vous faites comme vous voulez, moi je vous ai demandé de calculer le plus rapidement possible. »

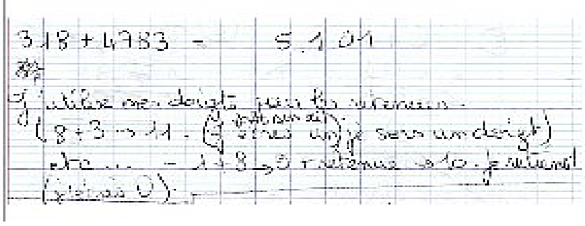
Ils ont tous souhaité avoir une feuille de classeur et ont commencé à poser. J'ai laissé faire un petit moment puis j'ai demandé s'ils avaient choisi de poser parce que c'était le moyen de calculer le plus rapide pour eux, en rappelant ma consigne. Un collègue a expliqué qu'il ne posait pas forcément « en colonnes » mais plutôt « en ligne ». Les autres ont expliqué qu'ils préfèrent « poser » (en colonnes) pour éviter tout « risque d'erreur ».

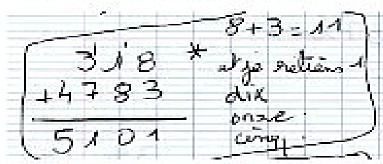
Par contre, ils se sont alors posé une deuxième question : « On fait comme avec les élèves ? ». J'avoue que cette question m'a surprise. Je leur demandais de calculer, à leur niveau adulte, le plus rapidement possible.

Du coup, une discussion s'est engagée : « Pourquoi ? Quelle différence entre votre façon de calculer rapidement et le calcul en classe ? ». Soit il n'y en avait pas du tout soit, les collègues calculent sans marquer les retenues, en parlant moins qu'avec les élèves.









Pour l'addition et la soustraction, ils ont décrit une technique unique, posée en colonnes en parlant chiffre par chiffre en commençant par les unités et « parlée » quelque peu différemment selon l'enseignant.

Puis ils se sont remis au travail, studieusement et non sans plaisir, jusqu'aux nombres à virgule et aux divisions.

- Là, une collègue s'est sentie en difficulté ou en tout cas, a verbalisé qu'elle n'aimait pas les divisions et que rien que de voir 8934 / 24 et d'imaginer tout le travail de calcul, elle stressait.
- Une autre a alors dit : « Jusque-là, ça allait bien mais là, je sature. Je prendrais bien une calculatrice pour aller plus vite ! »

J'ai bien sûr profité de la première prise de parole et encouragé la collègue à développer l'expression de son ressenti car bon nombre de nos élèves en difficulté ressentent ce malaise devant un exercice de calcul.

J'ai répondu à la deuxième : « Oui, pourquoi pas ? Ma consigne était de calculer le plus rapidement possible... » J'ai eu l'impression de les avoir choqués. Tous se sont arrêtés et encore une fois, un échange a démarré. En fait, je leur ai fait remarquer que des calculatrices étaient à leur disposition, comme des feuilles ou crayons ou divers matériels. Mais ils ne pensaient pas qu'ils avaient « le droit de prendre la calculatrice » et puis, il fallait que les enfants apprennent à calculer sans calculatrice !

Notre groupe s'est donc interrogé sur la place à donner à des outils d'aide au calcul et sur le degré de liberté avec lequel les élèves y ont recours ou non. Nous étions tous d'accord sur le fait que les élèves doivent mémoriser les tables et apprendre à calculer sans calculatrice.

Puis s'est engagée la phase de comparaison des techniques de calcul. Comme ils semblaient avoir tous eu besoin d'écrire, je leur ai demandé si dans l'exercice proposé certains calculs ne pouvaient pas se passer d'être écrits.

- Après réflexion et la démonstration par le collègue qui avait « posé en ligne », la réponse a été « oui pour 823 + 145 et 754 – 241 » puisque « sans retenue ». Mais ils préfèrent toutefois poser en colonnes 181,23 + 202 + 4,046. Par contre, ils se réfèrent tous à la technique posée traditionnelle, en parlant chiffre par chiffre, en commençant par les unités
- Pour la multiplication, ils posent tous de la même façon en parlant la technique « traditionnellement », chiffre par chiffre en commençant à multiplier par le chiffre des unités. Une différence existe entre ceux qui « décalent » avec des points et ceux qui écrivent les zéros. Pour une collègue le choix n'est pas stable et parfois elle décale, parfois elle écrit les zéros.
- Quant à la division, aucun n'a cherché l'ordre de grandeur du quotient ni utilisé la relation $D = d \times q + r$. Pour 451/5, seule une collègue « voit sans parler » alors que tous les autres commencent à parler la technique « traditionnellement » : « En 4... en 45 combien de fois 5... etc. »

J'ai alors posé la question des différentes formes de calcul à enseigner. Ils ont nommé le « calcul mental » et le « calcul posé » et ont défini le calcul mental :

- soit comme du calcul « dans la tête » sans support écrit : les tables, ajouter 10, 100 ou 1000, retrancher 9, ajouter 9, donner le double,
- soit comme une séance de travail pendant laquelle chacun choisit sa procédure et échange avec ses pairs pour voir laquelle est la plus rapide ou pour simplement comprendre comment l'autre fait
- sauf un collègue – qui avait tout posé en colonnes dans l'exercice de calcul - qui travaille avec ses élèves en s'appuyant sur le nom des nombres : [deux mille trois cent trente + mille cent cinq = trois mille quatre cent trente cinq]

Quant au « calcul posé », il consiste pour tous, en l'enseignement d'une technique « en colonnes », parlée chiffre par chiffre, en commençant par les unités, que les élèves doivent exercer pour faire comme montre l'enseignant.

De mon point de vue, en ce début de formation, aucun des stagiaires, ne s'appuie sur le caractère positionnel de notre numération pour calculer. J'ai proposé de poursuivre en nous référant aux textes pour préciser les termes et y trouver des pistes.

2 Les programmes

Les Programmes définissent les contenus d'enseignement que les enseignants traduisent en séquences d'apprentissage et donc en activités de l'élève : ils sont de toute évidence des supports privilégiés à étudier en formation, y compris en formation continue.

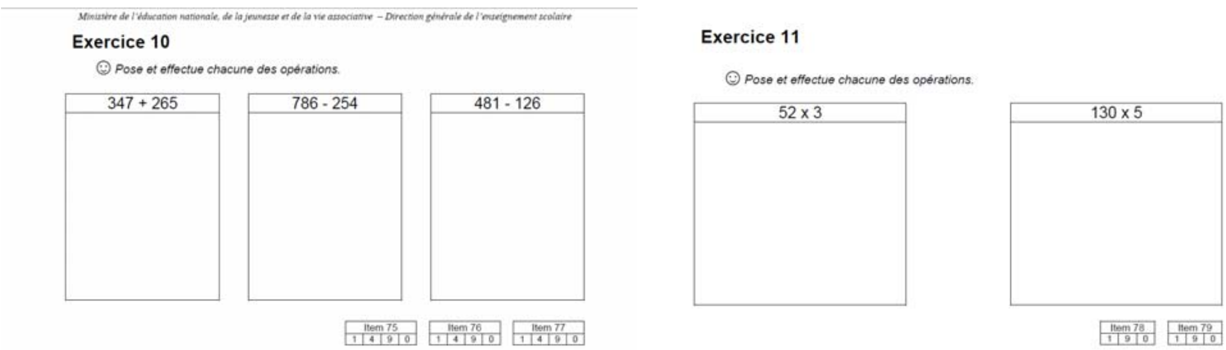
Pour cette action de formation, j'avais préparé un support (annexe A) dont l'intérêt par rapport aux programmes tels qu'ils sont édités ou publiés en ligne, est l'alignement des sujets d'étude sur les cinq colonnes du CP au CM2.

Chacun a reçu le document au format A4 et j'ai affiché un agrandissement du document au tableau pour situer le passage dont l'un parlerait à l'ensemble du groupe. Les réactions ont été immédiates et de deux ordres :

- Ils ont été sidérés de lire « Effectuer un calcul posé » dans les trois colonnes du cycle 3.
- Ils ont été renforcés dans leur ressenti par rapport aux difficultés persistantes de certains élèves qui n'acquièrent pas les compétences qu'ils devraient à un moment donné. Comme *« Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels jusqu'à 100 »* au programme du CP, et *« Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication »* au programme du CE2.

Un échange s'est engagé ; le groupe est entré dans un questionnement. Certains ont comparé les contenus des programmes avec les exercices des évaluations nationales de CE1 par rapport au calcul posé et ont relevé fort pertinemment ce qu'ils ont nommé « une incohérence ».

En effet, il est demandé de « poser » dans l'évaluation CE1 (extraits du cahier de l'élève 2011) alors que


Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative – Direction générale de l'enseignement scolaire

Exercice 10

Pose et effectue chacune des opérations.

347 + 265	786 - 254	481 - 126
Item 75	Item 76	Item 77

Exercice 11

Pose et effectue chacune des opérations.

52 x 3	130 x 5
Item 78	Item 79

cette compétence est attendue en CE2 d'après les programmes.

En tant que formateur, j'ai proposé un autre document rassemblant des extraits de texte sur le calcul (Rapport Durpaire, le Calcul à l'école élémentaire, Calcul mental) dont la lecture invite au questionnement sur les pratiques et conforte chacun dans ce difficile mais nécessaire travail de prise de recul et de remise en question. Elle leur a permis de prendre conscience qu'eux-mêmes calculent mentalement en « posant » dans leur tête et en parlant chiffre par chiffre en commençant par les unités.

Nous avons convenu que les textes donnent des directives, énoncent des préconisations et qu'une bonne connaissance de ceux-ci n'empêche pas de garder un regard critique. Dans un souci de cohérence du point de vue de l'élève, la mise en œuvre des textes suppose un travail de cycle et de liaison inter-cycles.

Finalement, des besoins de formation ont émergé : « Comment faire pour qu'ils (les élèves) apprennent » tel point du programme ? En particulier :

- la mémorisation des tables d'addition et de multiplication (que je n'aborderai pas dans cet article)
- la numération entre 60 et 100
- le calcul mental et posé.

II - DES SITUATIONS POUR COMPRENDRE LES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES

Les programmes nationaux définissent que c'est à l'école primaire que les élèves s'approprient le système de numération décimale de position, qu'ils élaborent et automatisent des procédures mentales et écrites de calcul. Mais les résultats aux évaluations nationales montrent que nombre d'élèves ne maîtrisent pas les connaissances et compétences attendues. Et les collègues ayant choisi de participer à cette formation constatent au quotidien les difficultés de leurs élèves.

Au départ, celles-ci sont verbalisées ainsi par les collègues listant les non-réussites des élèves.

« Ils ne mémorisent pas les tables.»,

« Ils ont du mal à lire et à écrire les nombres entre 60 et 99 en CE2 et même certains en CM ».

Véronique Parouty a montré que « *partir des erreurs des élèves en formation et agir sur ce que peuvent en faire les enseignants permet une augmentation significative des acquisitions des élèves* ».

Au cours de cette action de formation, j'ai donc proposé deux types de situations permettant aux collègues de prendre conscience de difficultés qui peuvent expliquer un certains nombre d'erreurs des élèves :

- certaines intrinsèques à la discipline ;
- d'autres provenant des choix de l'enseignant qu'il est alors amené à questionner dans la perspective d'une recherche de cohérence.
-

1 Un exemple de situation de formation permettant aux collègues de percevoir les difficultés liées à la Numération et à son enseignement

Proposer en formation d'essayer de comprendre les difficultés des élèves m'a semblé pertinent. J'ai proposé aux collègues de découvrir un nouveau système de numération en leur demandant la progression à suivre depuis la maternelle.

1.1 « Apprendre » la comptine orale

[rond, triangle, rondo, rondo-rond, rond-tri, trio, tiro-rond...]

Comme la tâche, exclusivement orale, a paru d'emblée difficile aux collègues, j'ai associé un nombre de doigts levés l'un après l'autre à la chaîne sonore.

Les élèves de maternelle ne lisant pas, il est impossible d'écrire les « mots-nombres » au tableau pour servir de point d'appui et d'aide à la mémorisation. Pour travailler la mémorisation des cinq premiers nombres, j'ai proposé rapidement quelques activités pratiquées en maternelle, avec un gros dé, les flash-cards de constellations organisées ou non, avec les doigts ou leur représentation dessinée.

Les collègues ont demandé pourquoi [rondo-rond/rond-tri plutôt que rond-rond/rond-triangle ou rondo-rond/rondo-triangle] ? Ils auraient préféré une régularité de cette numération orale. Leur ayant renvoyé la question, ils ont compris que nous pointions ainsi l'irrégularité de la numération orale française : onze, douze, seize, vingt, trente ...

1.2 « Apprendre à compter » des objets

Sur de petites collections, les collègues ont procédé par un « comptage expert » grâce :

- à la mémorisation précédente des premiers mots-nombres récités dans l'ordre,
- en les associant un à un aux objets sans erreur d'énumération telle que la définit Joël Briand,
- et au savoir acquis que le dernier mot prononcé correspondait à la quantité d'objets.

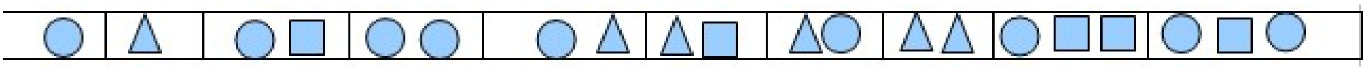
Au passage, ils ont pu constater que s'ils ne pouvaient dénombrer de plus grandes collections par l'utilisation de la comptine orale dont ils ne connaissaient pas la suite, ni en s'aidant du système de numération écrit pas encore introduit, ils pouvaient toutefois comparer des collections d'objets, par appariement terme à terme en rapprochant les objets des deux collections, et en commençant aussi à les organiser.

C'est une piste que propose Eric Mounier :

- « *mettre en œuvre des situations de comparaison de collections d'objets visant à amener les élèves à organiser les collections en utilisant des groupements a maxima, qui restent visibles pour s'y référer* ».
- puis dans un deuxième temps, « *des situations mettant en jeu le codage des organisations, leur mise en signes (et non de comprendre un code ou de le déchiffrer) en se passant de la numération parlée française.* » [1]

1.3 Apprendre à lire, dire et écrire les premiers nombres en chiffres

Dans la plupart des classes, on trouve une frise numérique horizontale. J'ai donc proposé d'aider à la découverte du nouveau système de numération en écrivant la suite suivante au tableau :



Les collègues ont récité la comptine orale en suivant la suite écrite et nous avons pu continuer de « dire » les nombres en les regardant, écrits en signes.

Au passage, je leur ai fait remarquer, qu'ici c'était plus facile, que pour nos élèves avec notre système de numération : j'ai choisi volontairement des mots ou signes oraux en lien avec les signes écrits – en tout cas pour des adultes connaissant le nom de ces formes géométriques.

Mais il leur a fallu un certain temps pour comprendre le système... l' « apparition » du <carré> posant problème.

Comme la lecture restait difficile, une collègue a proposé d'utiliser des couleurs pour aider, comme en classe ou dans les fichiers :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

[1] Je ne développe pas dans cet article le travail, essentiel à mon avis en GS/CP, visant la compréhension du caractère décimal de notre système numération : manipulations sur des collections d'objets visant à communiquer sur les quantités et nécessitant de représenter puis de coder/décoder les nombres en découvrant l'intérêt de « grouper » par 10 et 5 et la nécessité de mettre en place des conventions pour écrire /dire les nombres.

Je pense que coder la valeur d'un chiffre par la couleur détourne, et ce dès l'étude des premiers nombres à 2 chiffres, retarde voire empêche la compréhension que c'est l'ordre des chiffres et leur position relative qui permet de coder la valeur des chiffres dans un nombre.

L'étape codage par la couleur pourrait être une piste...rendant inutile d'ordonner les chiffres, voire de les présenter en ligne.

Ajouter des couleurs, peut par contre aider au calcul ou permettre de représenter des procédures de calcul mental.

J'ai plutôt proposé que l'un d'entre eux vienne récrire la suite verticalement et que nous employions une langue régulière.

Après réflexion, nous avons choisi celle notée ci-contre, marquant le passage à l'ordre supérieur tout en gardant une régularité dans les mots favorisant la compréhension et la mémorisation.

□	
○	rond
△	triangle
○□	rondo
○○	rondo-rond
○△	rondo-triangle
△□	trianglo
△○	trianglo-rond
△△	trianglo-triangle
○□□	rondi
○□○	rondi-rond
○□△	rondi-triangle
○○□	rondi-rondo
○○○	rondi-rondo-rond
○○△	rondi-rondo-triangle
○△□	rondi-trianglo

C'est lorsque les collègues ont compris que le signe <carré> équivalait au chiffre zéro que les collègues ont ajouté le nombre [zéro].

Après discussion, nous avons gardé ce mot dont nous avons pu constater qu'il ne sert ni en français ni dans une langue intermédiaire régulière pour dire les nombres. Nous avons ainsi pointé le rôle particulier du zéro dans notre système de numération (annexe F).

Ce travail a permis la compréhension du nouveau système de numération : « On groupe par < 3 doigts montrés> et le signe <carré>, c'est le chiffre zéro. »

Il devenait relativement facile pour des adultes de réussir des exercices sur les nombres, en s'appuyant sur une compréhension du système de numération, compétence en construction chez les élèves lorsqu'on leur présente ce type d'activités.

Sans parler, uniquement par écrit, nous avons :

- donné le nombre suivant, le précédent,
- ajouté, enlevé <rond>, <rondo>, ou <rondi>,
- décomposé/recomposé canoniquement,
- comparer deux nombres, ordonné plusieurs nombres.

2 Des pistes pour travailler la numération écrite chiffrée

Finalement, les collègues étaient prêts à recevoir de la théorie en (re)découvrant les travaux de Karen Fuson aux USA et de Rémi Brissiaud en France qui ont proposé le passage par une langue intermédiaire régulière.

Des extraits de textes de Rémi Brissiaud et de la méthode Tchou ou du texte de Condorcet « Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité » ci-contre, ont été proposés à l'analyse.

(6)

On a senti également la nécessité de pouvoir les exprimer tous par un petit nombre de signes, pour n'être pas obligé d'en avoir beaucoup à retenir, et d'introduire un signe nouveau, quand on auroit besoin d'écrire un nombre plus grand que ceux pour lesquels on auroit des signes : ces signes s'appèlent des *chiffres.*

Cette manière d'exprimer tous les nombres par un petit nombre de mots, ou de *chiffres*, s'appèle *numération ;* et comme il étoit possible d'en trouver plusieurs, chacune d'elles s'appèle *un système de numération.*

SECONDE LEÇON.

Voici quel est le systême de numération actuellement usité en France.

Un ajouté à *dix*, *dix* et *un* s'appèlent...... *Dix-Un.*

Un ajouté à *dix-un*, ou *deux* ajoutés à *dix*, *dix* et *deux*, s'appèlent..... *Dix-Deux.*

Un aouté à *dix-deux*, ou *trois* ajoutés à *dix*, *dix* et *trois*, s'appèlent... *Dix-Trois.*

Un ajouté à *dix-trois*, ou *quatre* ajouté à *dix*, *dix* et *quatre*, s'appèlent... *Dix-Quatre.*

(7)

Un ajouté à *dix-quatre*, ou *cinq* ajouté à *dix*, *dix* et *cinq*, s'appèlent..... *Dix-Cinq.*

Un ajouté à *dix-cinq*, ou *six* ajouté à *dix*, *dix* et *six*, s'appèlent...... *Dix-Six.*

Un ajouté à *dix-six*, ou *sept* ajouté à *dix*, *dix* et *sept*, s'appèlent.... *Dix-Sept.*

Un ajouté à *dix-sept*, ou *huit* ajouté à *dix*, *dix* et *huit*, s'appèlent.... *Dix-Huit.*

Un ajouté à *dix-huit*, ou *neuf* ajouté à *dix*, *dix* et *neuf*, s'appèlent.... *Dix-Neuf.*

Arrivés à ce terme, nous ne disons pas dix-dix, pour exprimer *un* ajouté à *dix-neuf*, ou *dix* et *dix ;* il est aisé de voir que ce moyen, si on le continuoit long-tems, conduiroit à former des noms trop longs, trop difficiles à reconnoître et à prononcer ; (e) on l'appèle donc *duante :* ainsi ;

Un et *dix-neuf*, *dix* et *dix*, s'appèlent...... *Duante.*

Un et *duante* s'appèlent.... *Duante-Un.*

Un et *duante-un*, *duante* et *deux*, s'appèlent..... *Duante-Deux.*

Un et *duante-deux*, *duante* et *trois*, s'appèlent...... *Duante-Trois, etc.*

. . . .

Le travail d'Eric Mounier peut éclairer la réflexion, concernant les choix liés au caractère positionnel de notre numération écrite chiffrée :

- *« En effet à partir des representamens graphiques 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 désignant les premiers nombres entiers, la théorie des langages permet de fournir un processus de mise en signes de tous les nombres entiers ».*
- *« l'écriture de position est liée au fait de n'utiliser que les coefficients dans un développement obtenu dans une échelle de numération. Les possibilités graphiques (disposition ordonnée des chiffres désignant les coefficients) permettent de fournir les informations pour retrouver le développement complet d'un nombre, c'est-à-dire la relation entre coefficients et ordres. »*
- *« Finalement, la lecture de gauche à droite des chiffres est couplée à l'ordre décroissant des ordres »*

Dans l'esprit d'un échange de pratiques, les collègues étaient curieux de connaître ma « façon d'enseigner » c'est-à-dire la mise en œuvre de mes choix didactiques.

2.1 Une langue annexe régulière pour « coller » à la numération écrite chiffrée

Par exemple en CE2 afin de remédier aux difficultés persistantes en numération mais aussi dès la MS où on commence à fréquenter les nombres écrits en chiffres, j'introduis une langue intermédiaire régulière que je nomme « langue des maths », pour amener les élèves à observer la régularité de la numération écrite et s'appuyer ensuite sur sa compréhension selon la comptine suivante.

[zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, un-dix, un-dix un, un-dix deux, …, deux-dix, …, un-cent, ...un-mille...]

Afin de rechercher un maximum de cohérence, j'indique à l'oral le coefficient correspondant au chiffre écrit de notre numération écrite, pour chaque ordre, alors qu'en français ou que dans la proposition de Rémi Brissiaud dans la langue de Tchou, on ne dit pas le coefficient « un » pour aucun des ordres.

1209 Tchou → [mille deux cent et neuf] langue des maths → [un-mille deux-cent neuf]

J'introduis également le mot [et] comme dans [deux-dix et (encore) trois] ou [quatorze, c'est dix et encore quatre]. En parlant, on peut écrire ------>

$\underbrace{20 + 3}_{23}$ $\qquad 14 = 10 + 4$

$\begin{array}{r} 20 \\ 3 \\ \hline 23 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \underline{14} \\ 10 \\ 4 \end{array}$

Il est vrai qu'on présente alors ici la numération écrite en corrélation avec une numération parlée mais ainsi, l'attention des élèves est attirée, dès les premiers apprentissages, sur le fait que le chiffre <2> de 23 ne vaut pas 2 mais 20.

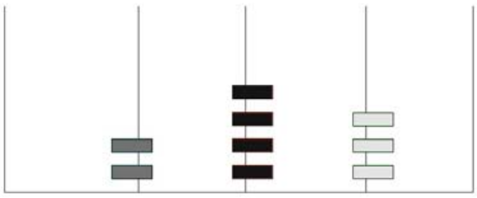
Ceci évidemment en lien avec du matériel qui se remplit de dix objets et se ferme comme les boîtes de dix œufs ou les boîtes Picbille ainsi qu'avec l'utilisation réfléchie d'autres matériels pour écrire/représenter les nombres.

2.2 Distinguer des utilisations de matériels et des pratiques bénéfiques aux apprentissages, d'autres potentiellement « risquées » ou insuffisamment élaborées pour servir les apprentissages liés à la valeur positionnelle des chiffres

Voici quelques entrées pour déclencher les échanges et la réflexion des collègues en formation continue.

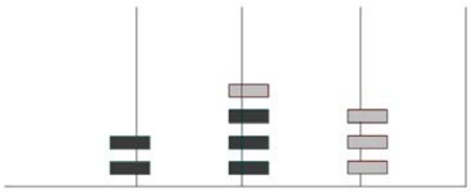
Les couleurs : une entrée en formation pour parler numération de position

Lorsqu'on achète des abaques pour sa classe, bien souvent les perles sont multicolores. Mis en situation d'expliquer leur pratique ou de rechercher comment l'enseignant peut utiliser ce matériel, les collègues proposent d'écrire des nombres avec l'abaque.



Comme on peut souvent l'observer dans les classes, les couleurs sont attribuées à une tige puis à un chiffre.

Or la couleur ne code pas pour la valeur dans notre système de numération. L'abaque pourrait pourtant servir à comprendre ou à renforcer la compréhension de celui-ci.



Premièrement en ne mettant pas toutes les tiges obligeant à orienter l'abaque, les unités à droite.

Deuxièmement en fournissant des boîtes contenant des perles d'une seule couleur, en particulier au cycle 2 ou bien, en CM, proposer les boîtes multicolores mais mettre les élèves en situation de réfléchir à l'utilisation des couleurs.

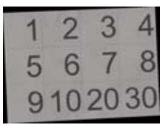
Celles-ci pouvant par contre servir lorsqu'on utilise l'abaque pour calculer : **2300 + 130**

Ecrire la date : une opportunité pour découvrir la mise en signes écrits des nombres

Le « rituel de la date » en maternelle et en cycle 2 doit permettre de vivre et découvrir les nombres. Cependant, dans la majorité des classes et sur les sites proposant des documents à imprimer pour préparer le matériel de la date, on observe :

- 31 cartons pour le quantième, pratiquement toujours monochromes
- parfois 31 cartons avec une deuxième couleur pour le chiffre des dizaines
- très rarement, la série monochrome suivante : 0 1 1 2 2 3 3 4 5 6 7 8 9

Si la troisième proposition démontre une réflexion de l'enseignant pour travailler la numération avec le « rituel de la date », les enfants verbalisent [quinze], [C'est un et cinq] ou [C'est cinq et un]...



J'ai personnellement essayé une autre solution dès la Moyenne Section, pour la date (ordinal) et le nombre de présents (cardinal), utilisant les cartons Montessori (monochromes évidemment) présentés ci-contre, en parallèle à tout un travail sur le groupement par 10 pour le nombre de présents. Celle-ci semble favoriser la découverte de notre système de numération **sans faire l'impasse sur son caractère positionnel**.

15 [quinze], [un-dix cinq] ou [un-dix et encore cinq] *24 [deux-dix quatre] ou [deux-dix et encore quatre]*

Pour écrire [douze ou un-dix et encore deux], le matériel impose un ordre dans la manipulation : on prend l'étiquette de 2 chiffres <10> sur laquelle on fixe à la gomme-fixe l'étiquette de un chiffre <2> sur le zéro. S'ils se trompent dans la manipulation au départ, des élèves de MS sont capables de corriger lorsqu'ils voient <20> au lieu de <12> inscrit sur l'éphéméride par exemple.

Dès le début des apprentissages et jusqu'au CM, ce matériel peut favoriser :

- l'appropriation visuelle de la valeur des chiffres (tous nos élèves ne sont pas auditifs)
- le travail du lire/dire/écrire les nombres, qu'on fait à partir de la gauche, où se trouve le chiffre d'ordre supérieur (« le plus fort » ou « qui vaut le plus »)
- la compréhension de la décomposition/recomposition décimale canonique par la manipulation
- l'observation de convergences ou de divergences avec la numération orale

Ce matériel sous forme de cartons opaques ou transparents autrefois commercialisé est facilement fabricable par les enseignants sous deux formes : avec les zéros ou avec les points.

2 0 0 0	**2 . . .**
1 0 0	**1 . .**
4 0	**4 .**
7	**7**

On peut imaginer l'intérêt de celui-ci si on l'utilise en lien avec la numération parlée pour les nombres comprenant des coefficients nuls comme 3020. L'élève dit/prend/écrit 3000 et 20.

Les erreurs de décomposition du type 2000 + 100 + 00 + 40 + 7 n'apparaissent plus.

C'est en apprenant à écrire les nombres manuellement, sur le clavier de l'ordinateur ou de la calculatrice dès le cycle 2, qu'on apprend à écrire le chiffre 1 en premier suivi du chiffre 5 pour quinze.

2.3 Enseigner la particularité du zéro

Je trouve particulièrement risqué pour la construction conceptuelle de dire et d'écrire au tableau des choses différentes. J'ai voulu attirer l'attention des collègues sur ce point. J'ai demandé à un volontaire d'écrire le nombre [deux-cent trois] au tableau.

Nous avons constaté que si le maître écrit les chiffres 2, 0 puis 3 en disant [deux-cent trois] il y a un temps de confusion entre ce que l'élève entend et ce qu'il voit, à savoir :

<2> puis <20> alors qu'il entend [deux-cent]... puis il voit <203> pendant [trois]

On peut penser que si l'enseignant a pour habitude d'écrire en parlant comme ci-dessus, puisque lui a intégré le système de numération et sa mise en signes oraux et écrits, les élèves peuvent éprouver des difficultés. Ceux-ci peuvent penser écrire juste en écrivant <21003>. Ce type d'erreur fréquente montre que l'élève tente de reproduire la façon de faire de l'enseignant et qu'il tient compte - à sa manière d'apprenant - de tous les mots qu'il entend.

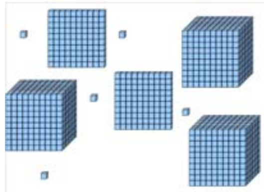
Et qu'en est-il d'écrire <1> pour 10 puis <5> en disant [quinze] dès la maternelle ?

Je propose donc dès le début des apprentissages :

- Le marquage systématique de points (<2 . . > dans l'exemple précédent) sur lesquels viennent s'ajouter les chiffres-coefficients prononcés sur le point correspondant à l'ordre et d'ajouter le(s) zéro(s) après. Cette procédure aide à l'acquisition des grands nombres en CM.
- L'utilisation de l'abaque pour aider à l'écriture chiffrée comme ci-contre. L'élève est amené à réfléchir pour positionner les perles sur les tiges. On prend le nombre de perles donné par le mot-chiffre-coefficient (2) et on les place sur la tige correspondant à l'ordre (cent). Puis pour [trois].

- L'absence du chiffre zéro dans le tableau de numération. Il suffit de placer le mot-chiffre-coefficient dans la bonne colonne-ordre, comme sur l'abaque ou de tenir compte de la position dans telle colonne pour lire, en particulier avec la langue des maths. Comme sur l'abaque, c'est en « sortant» les nombres du tableau, pour les écrire au tableau, sur le cahier ou sur un clavier numérique, dans des situations de communication, que la présence de zéros devient nécessaire. Les élèves en prennent ainsi conscience.

m	c	d	u
3	2		5



- L'utilisation de lettres pour marquer l'ordre, en écriture intermédiaire, qui par expérience est plus facilement et rapidement maîtrisée par les élèves que l'écriture avec les zéros en ligne. 3m 2c 5u 3000 + 200 + 5 3x1000 + 2x100 + 5x1 D'autres écritures sont possibles comme 3M 2C 5I en lien avec la numération romaine qu'on rend ainsi multiplicative à partir de l'écriture dite ancienne MMMCCIIIII.

3000
200
5

Travailler le passage d'une représentation à l'autre, dans les deux sens à chaque fois, ou s'y référer lorsqu'il y a eu une erreur, en numération ou en calcul, aide les élèves à mieux maîtriser la numération écrite chiffrée (annexe B).

Si ces exercices peuvent se faire sans parler les nombres ou en utilisant la langue régulière intermédiaire, il reste à apprendre à maîtriser la numération orale française. En plus d'étudier les mots comme quatre-vingts = 20 x 4 par exemple, on peut aider les élèves en difficultés en proposant de traduire la langue des maths en français.

Le dictionnaire des nombres de 0 à 99

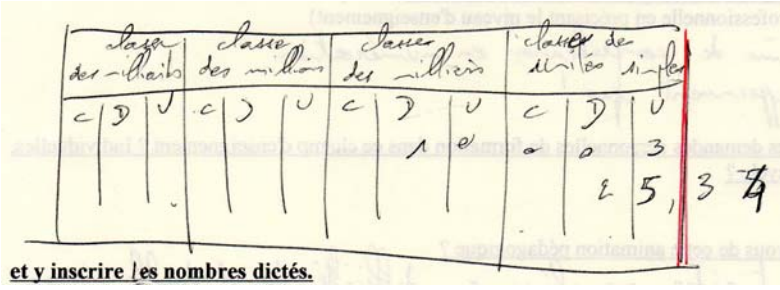
	0 zéro	1 un	2 deux	3 trois	4 quatre	5 cinq	6 six	7 sept	8 huit	9 neuf
	10 dix	11 onze	12 douze	13 treize	14 quatorze	15 quinze	16 seize	17 dix-sept	18 dix-huit	19 dix-neuf
vingt	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
trente	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
quarante	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
cinquante	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
soixante	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
soixante	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
quatre-vingt(s)	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
quatre-vingt(s)	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Voici le dictionnaire que l'on peut élaborer avec ses élèves. (source du document original inconnue)

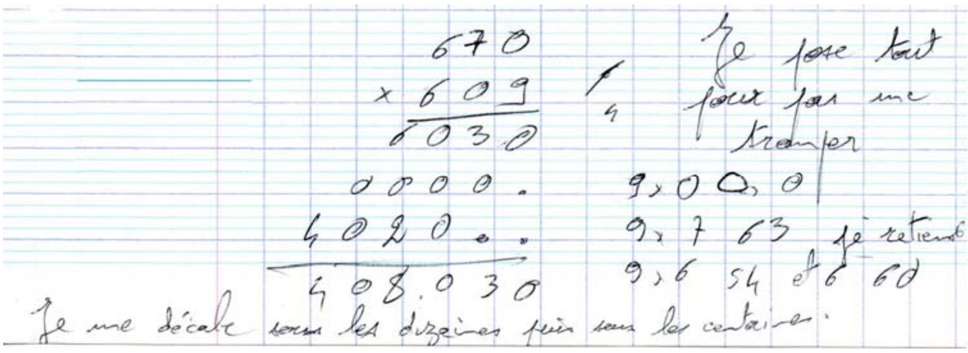
Enfin, en s'appuyant sur la compréhension de la numération écrite chiffrée, en particulier la valeur de chacun des chiffres d'un nombre, les élèves peuvent élaborer des procédures de calcul efficaces.

III - RÉFLEXION SUR LA CONSTRUCTION DE LA TECHNIQUE POSÉE DE LA MULTIPLICATION POUR PRÉSENTER L'INTÉRÊT D'ENSEIGNER NUMÉRATION, CALCUL MENTAL ET TECHNIQUES OPÉRATOIRES EN COMPLÉMENTARITÉ.

Mis en situation d'exposer et de comparer comment ils utilisent un matériel comme le tableau de numération (noté TN par la suite) et comment ils calculent eux-mêmes ou enseignent les techniques opératoires posées (TOP), les collègues ont pris conscience des difficultés potentielles pour leurs élèves, impliquées par certains de leurs choix. J'expose ici un exemple.



Tous les enseignants présents écrivent les zéros dans le TN. Dans la TOP de la multiplication, la plupart n'écrivent pas les zéros pour multiplier par 10, 100, etc. (décalage simple ou avec pointage) et aucun n'écrit les produits partiels alors qu'il est préconisé de le faire.



Si on écrit au tableau 78 x 205 , certains se sentent obligés de poser en suivant l'ordre, 78 en haut et 205 en bas en alignant les groupements, mais sont dérangés par l'aspect visuel. D'autres, expliquent qu'on doit poser le nombre qui a le plus de chiffres en haut et l'autre en bas...pour « aligner plus facilement es unités avec les unités »

Le cas de la technique de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres intervient plus tard. Sa compréhension nécessite d'avoir assimilé l'utilisation de la « règle des 0 » et de la distributivité de la multiplication sur l'addition (multiplier 523 par 205 revient à multiplier 523 par 200 et par 5 et à additionner les deux résultats obtenus). Il est donc prudent d'attendre la fin de la première année ou la deuxième année du cycle 3.
Dans tous les cas, les élèves sont aidés par l'écriture explicite des « 0 » (qui doit être préférée au traditionnel principe de décalage), ainsi que par celle des produits partiels en marge du calcul à effectuer, comme dans l'exemple ci-dessous :

```
        5  2  3
     ×  2  0  5
     2  6  1  5   ← 523 × 5
1 0  4  6  0  0   ← 523 × 200
1 0  7  2  1  5
```

Le calcul posé à l'école élémentaire 53

La confrontation avec d'autres pratiques, comme la technique allemande de la TOP de la multiplication renforce le sentiment que nous imposons des modèles, souvent sur le mode transmissif. Les collègues ont parlé d'un « conditionnement » remontant à leur propre scolarité.

```
205 x 78
15600
  390
15990
```

De plus, dans la technique allemande, on choisit le multiplicateur dans l'intention de se simplifier les calculs.

Ils ont également pris conscience qu'ils parlent la technique posée à la française, en commençant à multiplier par le chiffre des unités, en nommant les chiffres sans tenir compte de leur valeur positionnelle et qu'ils [décalent] ou [mettent/écrivent tant de zéros]. Donc ils montrent le chiffre valant 200 en disant [deux].

Or en calcul mental, on amène à utiliser la distributivité de la multiplication : 26 x 7 = (20 x 7) + (6 x 7) . Puis on apprend à multiplier par 11, 21, 12, etc...

En s'appuyant sur ce travail, on peut proposer en calcul mental, de multiplier par des nombres de deux ou trois chiffres. Tous les élèves continuent à décomposer le multiplicateur pour commencer à multiplier par le chiffre des dizaines ou des centaines selon le cas, et non par celui des unités.

34 x 12 = (34 x 10) + (34 x 2) 26 x 105 = (26 x 100) + (26 x 5)

Si la TOP n'est que la transcription de la procédure mentale, on continue de parler juste, ce qui a pour effet de ne perdre aucun élève dans l'écriture des produits intermédiaires et dans les calculs. Plus de lignes de zéros ! Cette erreur n'apparait plus.

Si on reprend l'exemple du ***Calcul posé à l'école***, il suffirait d'accepter d'inverser l'ordre des produits partiels (d'ailleurs opposé au chemin mental décrit neuf lignes au-dessus dans le document) et de parler comme suit, pour rester proche de la technique traditionnelle en France :

- [Je multiplie par deux cent cinq]
- [Je multiplie d'abord par 200 : je multiplie par 100 (en écrivant deux zéros de droite à gauche), et je multiplie par 2, 2x3 6, 2x2 4, 2x5 10]
- [Ensuite, je multiplie par 5 : je multiplie par 5, 5x3 15, 5x2 10 + 1 11, 5x5 25 + 1 26]

Au passage, on peut remarquer que la majorité des enseignants demandent d'*aligner* dans des colonnes, en lien avec le tableau de numération probablement. Non seulement, le vocabulaire employé ne correspond pas à l'action attendue et l'alignement des chiffres n'est pas facilement réussi par tous dans une colonne. On peut demander d'aligner sur les *lignes*, en se référant à l'abaque et à sa représentation. Mais l'alignement n'est nécessaire, car facilitateur, que pour additionner la somme intermédiaire mais inutile pour le produit (voir technique allemande).

Ce travail de réflexion renvoie l'enseignant à ses choix, qu'il pourrait modifier au sein d'une équipe de cycle ou d'école afin de travailler en continuité et avec cohérence d'une classe à l'autre, du point de vue de l'élève, tout en restant dans le cadre des programmes.

Pour finir, un petit texte de 1850 (ci-contre) pour nous inviter à continuer à réfléchir et à œuvrer à la modification des pratiques.

" Qui a zéro et veut payer trois ne peut pas; j'emprunte une dizaine ou dix au chiffre cinq et je dis alors: qui de dix en paie trois, reste sept. Comme j'ai emprunté une dizaine à cinq, ce cinq ne vaut plus que quatre; par conséquent: qui de quatre paie six ne peut; j'emprunte une centaine ou dix dizaines au chiffre quatre, et je dis: dix et quatre valent quatorze; qui de quatorze en paie six reste huit; les quatre centaines n'en valent plus que trois, à cause de l'emprunt de une centaine; donc, qui de trois paie deux, reste un".

Les temps ont bien changé et le Professeur des écoles d'aujourd'hui s'adresse à l'intelligence des élèves. Il vise la compréhension. Même si une phase d'entraînement pour apprendre à lire/dire/écrire les nombres et pour automatiser les techniques demeure indispensable à l'acquisition des compétences jusqu'à leur maîtrise en autonomie par l'ensemble des élèves, elle permet au fil des erreurs qui apparaissent de travailler la compréhension de notre numération écrite chiffrée, des liens qu'elle entretient avec les mots d'une numération annexe régulière et avec la numération orale française

CONCLUSION

Cette formation de circonscription, où l'inscription se voulait volontaire, n'a touché qu'un petit nombre de collègues. La difficulté relevée dans les rapports IGEN est bien réelle : les enseignants ne s'inscrivent pas facilement à une formation continue en mathématiques.

Je retiens de cette action de formation, qu'en abordant des sujets en lien direct avec l'activité des élèves et leurs difficultés, on peut proposer en formation continue des situations d'échanges et d'analyse semblant agir comme élément moteur dans la réflexion sur la pratique propice probablement à une évolution de celle-ci.

Si les situations de formation et les pistes didactiques présentées dans cet article semblent avoir interpellé les enseignants et les avoir amenés à interroger leur pratique, qu'en sera-t-il d'une évolution effective de leur pratique ?

J'espère que la réflexion qu'ils ont engagée leur permettra, au moment de concevoir puis de conduire leur enseignement, de prendre le temps de travailler le caractère positionnel de notre numération écrite chiffrée afin d'amener leurs élèves à utiliser leur connaissance du système de numération dans l'élaboration de procédures de calcul mental puis posé, les erreurs des élèves devenant des indicateurs d'une compétence à continuer de travailler.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BRIAND J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique, *in Recherches en Didactique des Mathématiques n°19.*

BRISSIAUD R. (2003) *Comment les enfants apprennent à calculer*, Retz

BRISSIAUD R. (2001) Enseigner une comptine numérique "à l'asiatique" au CP : Pourquoi et comment ?, Communication C6, *in Actes du XXVIIIe Colloque COPIRELEM*, IREM de Tours

MOUNIER E. (2010) Une analyse de l'enseignement de la numération au CP, vers de nouvelles pistes, *thèse de Doctorat es Didactique de mathématiques.*

PAROUTY V. *(2004)* Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3, Communication D6, *in Actes du XXXIe colloque COPIRELEM*, IREM de Toulouse.

V - ANNEXE

Annexe A

PROGRESSION DANS LES PROGRAMMES 2008 concernant les nombres

CP	CE1	CE2	CM1	CM2
		NOMBRES ET CALCUL		
Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100.	Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000.	**Les nombres entiers jusqu'au million** Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million.	**Les nombres entiers jusqu'au milliard** Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard.	
			Fractions - Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. - Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.	**Fractions** - Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. - Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.
			Nombres décimaux - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème). - Savoir passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.	**Nombres décimaux** - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000ème). - Savoir donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.
- Comparer, ranger, encadrer ces nombres.	- Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer.	- Comparer, ranger, encadrer ces nombres.	-Comparer, ranger, encadrer ces nombres.	- Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs.
- Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.	- Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc.		- Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée, . les comparer, les ranger, . les encadrer par deux nombres entiers consécutifs.	Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, . les comparer, les ranger, . produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant10 :
- Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20.	- Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant.	- Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier. - Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30 et 60.	- La notion de multiple : reconnaître les multiples des nombres d'usage courant : 5, 10, 15, 20, 25, 50.	
- Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 ("table d'addition").		**CALCUL SUR NOMBRES ENTIERS** **Calculer mentalement**	**CALCUL** **Calculer mentalement**	**CALCUL** **Calculer mentalement**
- Connaître la table de multiplication par 2.	- Mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5.	- Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication.		
- Calculer mentalement des sommes et des différences.	- Connaître et utiliser des procédures de calcul mental pour calculer des sommes, des différences et des produits.	- Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits.	- Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat.	- Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. - Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.
- Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous.	- Calculer en ligne des suites d'opérations.	**Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction et multiplication. - Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre. - Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental, posé, où à l'aide de la calculatrice.	**Effectuer un calcul posé** - Addition et soustraction de deux nombres décimaux. - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. - Division euclidienne de deux entiers. - Division décimale de deux entiers.	**Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. - Division d'un nombre décimal par un nombre entier.
- Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100).	- Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1 000).			
	- Connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre.			
	- Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier).			

2010- PEMF Valérie Bagou

Annexe B

Tableau de numération

V. Bagou
PEMF
2010/2011

① Traçage au tableau

⚠ Toujours commencer par les unités à DROITE

c	d	u

DIRE : "Les unités sont toujours à droite" EN Y ASSOCIANT GESTE et TRACER LE TRAIT puis « unités / dizaines / centaines / ... »

MILLION(S) u	c	d	u (mille)	c	d	u	D	C	M

($10^9 = 1000 \cdot 10^6$)

② Utiliser le tableau pour dire/lire/écrire/dé- ou re-composer les nombres

⚠ Pas de zéro dans le tableau

d	u
1	9
2	

→ 19 [un dix neuf]

→ ~~X~~ 2d ou 2. ou 20 [deux dix]

La lecture est directe en « langue des maths »

mille c	d	u (MILLION(S))	c	d	u (mille)	c	d	u
	4		1		2	1		4
			8	5		3		7

⇒ Entrer / sortir les nombres dans le tableau

- avec les ~~lettres~~ / mots 40 MILLIONS 102 MILLE 104
- méthode des points 40 ... ...
- avec mots en "langue maths" → "dico français"

⇒ Décomposer / recomposer les nombres

$2047 + \frac{4}{100} = 2047,04$

850370
800000
50000
300
70

③ Additionner - Soustraire - Multiplier

	m	d	c	u
			1	
		.	2	4
		1		
+		3	4	5
+			8	1
		4	5	0

Au tableau, écrire en ligne

24 + 345 + 81

351 − 16

47 x 10 47 x 100

×10 :10

m	c	d	u
		4	7
	4	7	.
4	7	.	.

⇒ Ceci amène à poser en "colonnes".

	m	c	d	u
				①
		3	5	1
-			1	6
		3	~~4~~ 3	5

ou

	m	c	d	u
			4	⑩
		3	~~5~~	1
-			1	6
		3	3	5

ou

	m	c	d	u
		3	5	1
-			1 ①	6
		3	3	5

PARCOURS DE FORMATION ET NIVEAUX DE CONCEPTUALISATION DE LA PROPORTIONNALITÉ CHEZ LES ÉTUDIANTS PE1 VERSUS M1

Jean-Pierre LEVAIN
MCF, IUFM de l'Université de Franche-Comté
Laboratoire de Psychologie EA 3188
Jean-pierre.levain@univ-fcomte.fr

Philippe LE BORGNE
MCF, IUFM de l'Université de Franche-Comté
Laboratoire de Didactique des Mathématiques EA 1547
Philippe.leborgne@univ-fcomte.fr

Arnaud SIMARD
MCF, IUFM de l'Université de Franche-Comté
arnaud.simard@univ-fcomte.fr

Nicole BONNET
Professeur, IUFM de l'Université de Bourgogne
nicole.bonnet@dijon.iufm.fr

Pascal GRISONI
Directeur adjoint, IUFM de l'Université de Bourgogne
pascal.grisoni@dijon.iufm.fr

Résumé

Faisant suite au réaménagement des dispositifs de formation des enseignants lié à l'introduction de nouveaux masters, cette recherche ambitionne d'analyser, de manière comparative, les différents niveaux de conceptualisation de la proportionnalité développés par des étudiants en première année d'IUFM. Pour ce faire, nous avons soumis, à deux ans d'écart, un questionnaire comprenant dix-neuf problèmes d'agrandissement et d'échelle à quatre groupes distincts d'étudiants. Deux passations ont eu lieu en début et fin d'année, un an avant l'introduction des nouveaux masters. Deux autres se sont déroulés, toujours en début et fin d'année, un an après. Un premier traitement statistique nous permet de réaliser des regroupements entre des ensembles de sujets et les problèmes qu'ils réussissent électivement (Girardot, 1982). Dans un deuxième temps, une analyse de ces réussites et échecs aux principales catégories de problèmes nous permet d'interpréter ces regroupements en termes de niveaux de conceptualisation spécifiques. L'originalité de cette approche réside en grande partie dans le fait de considérer la distribution des niveaux de conceptualisation inférés comme variable dépendante (au moins pour une part) des parcours de formation analysés (apport de chaque année de formation PE1 vs M1, licence obtenue etc.).

I - INTRODUCTION

La recherche que nous présentons correspond à la première partie d'une réponse à un appel à propositions du Pôle Nord-Est des IUFM. Elle s'intéresse à la formation des futurs enseignants du premier degré à un moment où les dispositifs de formation ont été profondément réaménagés par la mise en place des nouveaux masters : « Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation ». Cette recherche s'inscrit dans une problématique psychologique et didactique située à un des carrefours possibles entre professionnalisation, maîtrise de la proportionnalité et développement du sujet (Vergnaud, 1988, 1991 ; Levain, 1997 ; Bastien et Bastien-Toniazzo, 2004).

Dans un contexte de transition entre deux systèmes de formation, nous nous proposons d'analyser, de manière comparative, les différents niveaux de conceptualisation de la proportionnalité développés par les étudiants et les professeurs stagiaires à plusieurs moments clés de leur parcours de formation. L'analyse de ces différents niveaux de conceptualisation de la proportionnalité prend appui sur un questionnaire, comprenant dix-neuf problèmes, que nous soumettons à quatre moments clés du cursus de formation : début de la première année de formation, fin de cette même année (PE1 vs M1), début de la deuxième année de formation et fin de cette dernière année (PE2 vs M2). Nous souhaitons pouvoir analyser, et ce pour chacun des deux modèles envisagés, l'apport respectif de chaque année de formation, l'impact du concours, la spécificité de la licence obtenue et du cursus antérieur sur notre variable dépendante inférée (niveaux de conceptualisation). Le recueil des données de cette recherche, n'est à ce jour pas terminé ; nous nous limiterons ici à la comparaison de résultats obtenus en début et fin d'année concernant exclusivement les étudiants de première année d'IUFM (PE1 vs M1).

L'apprentissage et la compréhension de la proportionnalité constituent un des apports essentiels des mathématiques au traitement de situations relevant aussi bien des champs professionnels que de l'exercice de la vie quotidienne. Il est aujourd'hui bien validé que le raisonnement proportionnel et la maîtrise des structures multiplicatives se développent sur une longue période de temps (Inhelder et Piaget, 1955 ; Vergnaud, 1991 ; Levain, 1997 ; Levain, Le Borgne et Simard, 2009) et dépendent à la fois du développement psychogénétique, mais aussi, des cursus scolaires, des expériences, des situations et des tâches analysés et traités par le sujet. Nous abordons cette thématique dans le cadre d'une perspective cognitive qui insiste tout particulièrement sur l'aspect fonctionnel de l'organisation en mémoire et de l'utilisation des connaissances (Bastien, 1997 ; Bastien et Bastien-Toniazzo, 2004), et aussi sur l'importance du rôle des situations et des tâches proposées aux sujets dans la construction de savoirs et de savoir-faire (Vergnaud, 1988, 1991). C'est en ce sens que nous situons notre étude dans le cadre de la résolution de problèmes d'agrandissement et d'échelle (Levain, 1997 ; Levain, Le Borgne et Simard, 2009) à l'intérieur du champ conceptuel de la proportionnalité. Par problèmes d'agrandissement, nous entendons des problèmes nécessitant le calcul d'une quatrième proportionnelle sans changement d'unité de mesure. La notion d'échelle renvoie plus directement au calcul ou au traitement d'un rapport de type 1/n dans lequel n est grand. L'échelle apparaît en ce sens à la fois comme un outil permettant de résoudre des problèmes et comme un objet de savoir socialement organisé et culturellement reconnu Douady (1986) ; les problèmes proposés pouvant mobiliser chez les étudiants des cadres géométrique, arithmétique, numérique et algébrique.

Le travail de conceptualisation n'est cependant pas toujours facile à mener. Dans les situations d'agrandissement, les deux objets mis en rapport sont souvent de taille comparable et interprétés d'emblée dans un registre de similitude. Par contre dans le calcul d'une échelle la différence de taille entre eux est telle que le rapport se construit davantage entre un signifiant et un signifié. Ce qui peut entrainer chez beaucoup de sujets des difficultés d'utilisation ou d'appréhension du rapport, des erreurs récurrentes dans l'harmonisation des unités, des abandons et des non réponses qui peuvent être assez fréquentes. Ce projet, soutenu par le pôle nord-est des IUFM implique une équipe composée de cinq personnes et la collaboration des deux IUFM des universités de Bourgogne et de Franche-Comté.

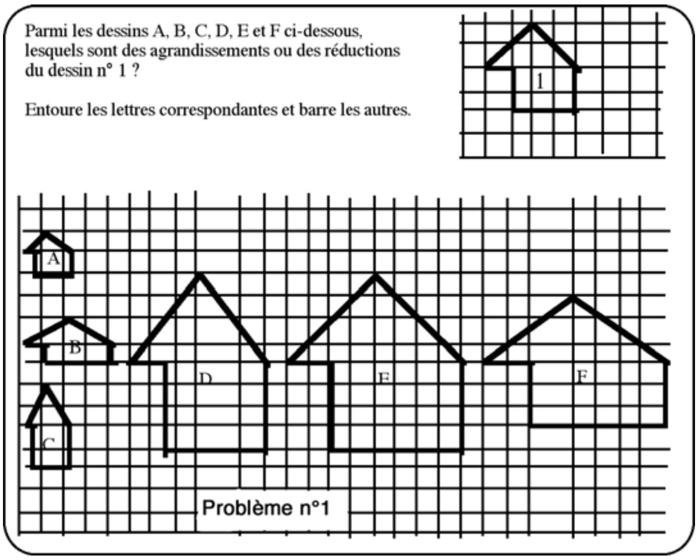
II - PRÉSENTATION DU QUESTIONNAIRE

Notre questionnaire se présente sous la forme d'un livret au format A4 incluant un problème par page. Il comporte dix-neuf problèmes partitionnés en deux grandes catégories.

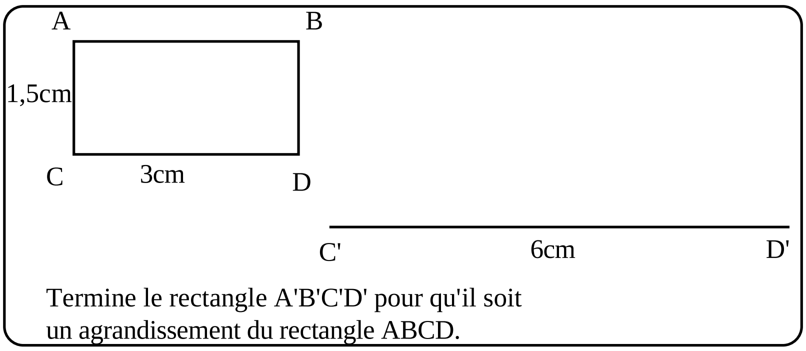
Les huit premiers problèmes traitent des notions d'agrandissement ou de réduction d'objets ou de figures. Les onze suivants abordent directement le concept d'échelle.

1 Les problèmes d'agrandissement ou de réduction.

Le premier problème nécessite de reconnaître un agrandissement et une réduction d'une figure géométrique. Les rapports en jeu sont ici très simples. Les trois premiers problèmes, de réussite aisée, constituent une introduction à l'épreuve visant à maximiser la réussite en entrée de manière à ce qu'aucun sujet ne soit d'emblée en situation d'échec.



À l'instar du problème n°1, les problèmes 2 à 5 traduisent une situation d'agrandissement de figure. Il s'agit à chaque fois de déterminer la largeur du rectangle agrandi connaissant sa longueur ainsi que les deux dimensions du rectangle d'origine :



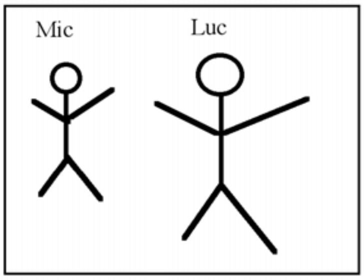
Énoncé du problème n°2.

Comme précisé dans le tableau n°1, ces problèmes nous permettent de combiner le type de rapport utilisé interne (entre la largeur et la longueur d'un même rectangle) ou externe (rapport d'agrandissement) avec le degré de difficulté de ce rapport (simple ou complexe) de la manière suivante :

Problèmes :	**Rapport interne**	**Rapport externe**
n° 2	simple : 1/2	simple : 2/1
n° 3	complexe : 3/5	simple : 2/1
n°4	simple : 1/2	complexe : 5/3
n°5	complexe : 3/5	complexe : 9/3

Tableau n°1 : type et difficulté des rapports.

Le problème n°6 s'inspire de la fameuse épreuve de Karplus « Mr Short and Mr Tall » (Karplus, Karplus, Formisano & Paulson, 1979) testée dans de nombreux pays (Hart, 1981, 1988). La petite taille et la symétrie des valeurs numériques impliquées invitent fréquemment à l'utilisation d'une procédure additive erronée formulée en termes de différences constantes :



Sur une photo, Mic mesure 4 cm et Luc 6 cm.
Après agrandissement de la photo, Mic mesure 6 cm.
Combien Luc mesure-t-il sur la photo agrandie ?

Problème n°6.

Les problèmes n°7 et 8 traduisent respectivement une situation d'agrandissement et une de réduction :

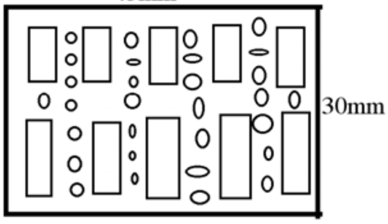
Une photographie d'identité mesure 3,6 cm de longueur et 2,4 cm de largeur.
Une fois agrandie, sous forme de poster, cette photo a pour longueur 90 cm.
Quelle est sa largeur ?

Écris ta réponse dans le cadre

Problème n°7.

Les rapports externes et internes sont identiques d'un problème à l'autre et respectivement égaux à 25 et 1,5.

Ce dessin est un agrandissement d'un petit circuit électrique :



Sur le dessin, ce circuit de forme rectangulaire mesure 45 millimètres de longueur et 30 millimètres de largeur. La longueur réelle du circuit est de 1,8 millimètre.
Quelle est sa largeur ?

Problème n°8

2 Les problèmes d'échelle

Dans la deuxième partie de notre questionnaire, nous distinguons les problèmes n°9, 10, 11 et 12 qui portent sur le calcul de l'échelle. Les n°15 et 16 qui renvoient au calcul d'une dimension du représentant, c'est-à-dire du plan ou de la carte connaissant la transformation ainsi que la dimension correspondante du représenté (c'est-à-dire sur le terrain). Enfin, les problèmes n°17, 18 et 19 qui nécessitent de calculer une dimension du représenté (calcul de l'image réciproque par la transformation). Nous avons retenu pour élaborer ces différenciations quatre principaux types de présentation d'une échelle (Bodin, 1989) :

- l'échelle de type 1 qui correspond, dans notre épreuve, à l'utilisation explicite du terme « échelle » traduit l'écriture fractionnaire de type 1/n. C'est ce qu'il convient par exemple de calculer aux problèmes n°9, 10 et 11 :

Un mur de 50 m de long est représenté sur un plan par un segment de 10 cm.
quel est l'échelle de ce plan ?

Quels calculs fais-tu ?

Ecris ta réponse dans le cadre :

Problème n°9

- l'échelle de type 2 prend la forme d'une indication du type « 2cm pour 1 km » (problème n°10) :

Sur une carte on peut lire : “2 centimètres pour 1 kilomètre”.
Quelle est l'échelle de cette carte ?

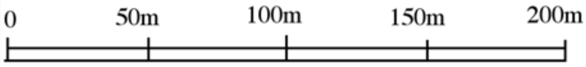
Quels calculs fais-tu ?

Ecris ta réponse dans le cadre :

Problème n°10

- l'échelle de type 3 qui, comme pour le problème 11, renvoie à une représentation du type :

Sur une carte, on a relevé les indications suivantes :
Ecris l'échelle correspondante :



Ecris tes calculs : Echelle :

Problème n°11

- l'échelle de type 4, dans laquelle l'énoncé comprend explicitement une formulation du type : "par quel nombre faut-il multiplier cette hauteur pour…" ; c'est ici l'aspect « outil » du concept qui est privilégié (comme au problème n°12) :

Un architecte a réalisé la maquette d'un nouveau quartier.
Sur cette maquette, un immeuble de 25 m de haut est représenté par une petite boîte d'allumettes de 5 cm de hauteur.

Par quel nombre faut-il multiplier la hauteur de cette petite boîte pour obtenir la hauteur de l'immeuble ?

Ecris ta réponse dans le cadre :

(tu peux faire les changements d'unités que tu désires).

Problème n°12

Les deux problèmes n°13 et 14 sont particulièrement complexes. Ils nécessitent de mettre en œuvre des connaissances et de contrôler un nombre important d'informations qui relèvent pratiquement d'un niveau d'expertise du domaine. Il s'agit en effet de calculer une échelle, de type 1 pour le n° 13 et de type 4 pour le n° 14, qui maximise la représentation (taille du plan) dans les limites d'une feuille de format 21 par 29,7 cm :

Tu veux faire le plan d'une salle des fêtes qui mesure 58 mètres de long et 28 mètres de large.
Calcule une échelle pour que ton plan tienne tout entier dans une feuille comme celle-ci (format 21 X 29,7 cm), et qu'il soit le plus grand possible :

Échelle de cette salle :

Problème n°13

Tu veux faire le plan d'une classe de chimie qui mesure
14 mètres de long et 9 mètres de large.
Par combien dois-tu diviser les dimensions de cette classe pour la représenter sur une feuille comme celle-ci (format 21 X 29,7 cm) ?
(Le plan doit être le plus grand possible).

Écris ta réponse dans le cadre : $\boxed{}$

Énoncé du problème n°14.

Les problèmes n° 15 et 16 renvoient tous deux au calcul d'une dimension sur le plan ou la carte :

Un jardin rectangulaire mesure 50 mètres de long et 30 mètres de large.

On représente ce jardin par un dessin à l'échelle $\frac{1}{100}$.

Quelle est la longueur du jardin sur ce dessin ?

Écris ta réponse dans le cadre : $\boxed{}$

Problème n°15

Le problème n°15 fait appel à de petites valeurs numériques (il n'est pas forcément utile de convertir 50 m en centimètres), le n°16 à des valeurs plus grandes (la conversion en centimètres peut sembler ici plus fonctionnelle) :

A vol d'oiseau, 76 kilomètres séparent Besançon de Montbéliard.

La carte Michelin de Franche Comté est à l'échelle : $\frac{1}{200\,000}$.

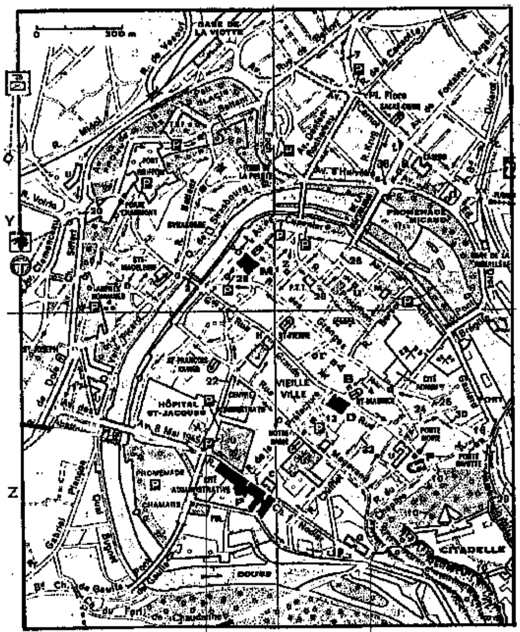
Combien de centimètres séparent, sur cette carte, Besançon de Montbéliard ?

Écris ta réponse dans le cadre : $\boxed{}$

Problème n°16

Les trois problèmes n°17, 18 et 19 impliquent le calcul d'une dimension du représenté (calcul de l'image par la transformation). Dans le n°17, l'échelle est de type 3 :

Voici un plan de la ville de Besançon



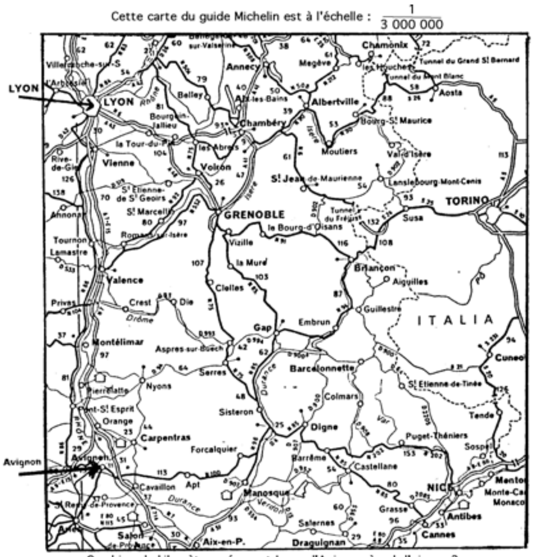
Problème 17

Début de la rue C. Nodier Fin de la rue C. Nodier

Quelle est sur le terrain la longueur en mètresde la rue C. Nodier ?

Dans le problème n°18, elle est de type 1 :

Cette carte du guide Michelin est à l'échelle : $\frac{1}{3\ 000\ 000}$



Combien de kilomètres séparent Lyon d'Avignon à vol d'oiseau ?

Pour le problème n° 19, les deux données (échelle de type 1 et dimension sur la carte) sont fournies directement dans l'énoncé :

Pierre regarde une carte Michelin à l'échelle : $\frac{1}{200\ 000}$.

Sur cette carte, il mesure 38 centimètres de Chaumont à Saint-Dizier.

Combien de kilomètres séparent Chaumont de Saint-Dizier à vol d'oiseau ?

Écris ta réponse dans le cadre :

Problème n°19

III - PREMIERS RÉSULTATS

1 Traitement des données

Les résultats que nous proposons restent à ce jour partiels et lacunaires. Ils seront complétés au cours de l'an prochain par de nouvelles passations en direction des étudiants en deuxième année de master. Nous compléterons également la population d'étudiants en fin de première année de master de manière à disposer au minimum d'une centaine de sujets par groupe. Notre démarche d'orientation quantitative s'effectue en plusieurs étapes successives.

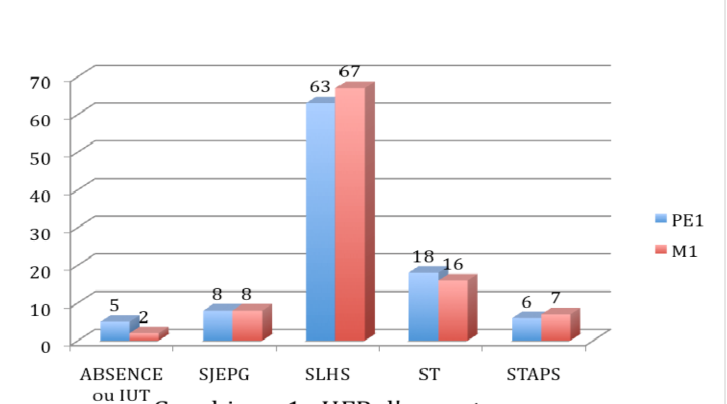
Un premier traitement statistique nous permet de réaliser des regroupements entre nos 424 sujets[1] (actuellement : 161 pe1, 126 PE1, 95 m1 et 42 M1) et les problèmes qu'ils réussissent électivement (Girardot, 1982). Les 8056 problèmes obtenus sont corrigés et codés de manière binaire dans un tableau booléen. Le traitement des données s'effectue avec le logiciel « Anaconda » développé par le laboratoire MTI@SHS de l'université de Franche-Comté (Girardot, 1982). Ce logiciel produit, à partir de deux approches complémentaires : une analyse factorielle des correspondances (AFC) croisée avec une classification ascendante hiérarchique (Benzecri, 1973), des classes qui permettent de grouper et ranger les objets à décrire. Ce traitement nous permet de mettre en évidence des regroupements dans la structure des réussites et des échecs entre des sous-groupes de sujets et les sous-ensembles de problèmes qu'ils réussissent ou échouent électivement.

La spécificité de notre recherche consiste, d'une part, à interpréter ces regroupements en termes de niveaux de conceptualisation et, d'autre part, à analyser la répartition des étudiants à l'intérieur de chacun de ces groupes considérée comme variable dépendante des parcours de formation étudiés (apport de chaque année de formation PE1 vs M1, licence obtenue etc.).

2 Analyse descriptive

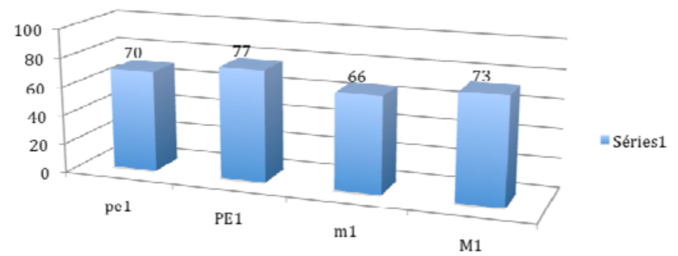
Concernant la nature des licences obtenues par les étudiants de l'étude, nous avons effectué un regroupement en cinq UFR (Unité de Formation et de Recherche) : SJEPG (Sciences Juridiques, Économiques, Politiques et de Gestion), SLHS (Sciences du Langage de l'Homme et de la Société), ST (Sciences et Techniques), STAPS (Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives), IUT (Institut Universitaire de Technologie). Comme nous pouvons le constater à la lecture du graphique 1, environ les deux tiers des étudiants de l'étude viennent de la filière lettres et sciences humaines (67 % du total en ce qui concerne les étudiants en première année de master), moins d'un cinquième provient de la faculté des sciences. Cette répartition très inégalitaire peut sembler insuffisamment prise en compte dans l'élaboration des curriculums de formation. Elle marquera également les résultats de notre enquête.

[1] Par convention, une notation en minuscule de type « pe1 » ou « m1 » désigne une passation du questionnaire effectuée en début d'année universitaire (octobre ou novembre) par contre un écriture en majuscule de type « PE1 » ou « M1 » renvoie à une mesure effectuée en fin d'année universitaire (mai).



Graphique 1 : UFR d'appartenance

Le graphique 2 illustre la distribution exprimée en pourcentages de réussite à l'ensemble des problèmes du questionnaire. En début d'année de master 1 par exemple la réussite moyenne à l'ensemble des problèmes du questionnaire est de 66 %, en fin d'année de master 1 elle est de 73 %.



Graphique 2 : distribution des réussites à l'ensemble du questionnaire

Les situations d'agrandissement ou de réduction apparaissent massivement réussies (versant « outil » du concept), par contre la maîtrise des problèmes d'échelle (versant « objet ») reste bien plus délicate. Si l'on exclut les trois premiers problèmes extrêmement faciles et qui ont pour principale fonction de ne mettre aucun étudiant en échec dès le début du questionnaire, la réussite aux autres problèmes d'agrandissement est de 92 %. Par contre, les problèmes d'échelle ne sont réussis que par 56 % des sujets de notre population ce qui peut apparaître comme une performance globalement faible pour des étudiants se destinant à enseigner des mathématiques.

3 Niveaux de conceptualisation

Le traitement statistique des données recueillies nous permet de distinguer six groupes spécifiques qui traduisent chacun une proximité relative entre des ensembles de sujets et certains sous-ensembles de problèmes. Dit autrement, les groupes obtenus agrègent en termes de distance des sous-ensembles d'étudiants avec des catégories de problèmes qu'ils ont globalement réussis ou non. Au-delà des réussites et des échecs électifs de la population étudiée, ces six groupes renvoient probablement à différents profils cognitifs qu'il conviendrait maintenant de spécifier davantage. C'est en ce sens que nous avons calculé dans le tableau n°2 les pourcentages de réussite pour chaque groupe d'élèves aux différents sous-ensembles de problèmes qui contribuent à les différencier.

	Réussite totale	Problèmes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12	Problèmes 9, 10, 11, 15, 16	Problèmes 17, 18, 19	Problèmes 13, 14
Groupe 1 (N=43)	42 %	80 %	14 %	0	0
Groupe 2 (N=63)	56 %	91 %	26 %	41 %	0
Groupe 3 (N=17)	64 %	90 %	48 %	16 %	59 %
Groupe 4 (N=87)	72 %	93 %	51 %	93 %	0
Groupe 5 (N=139)	79 %	94 %	87 %	76 %	0
Groupe 6 (N=75)	88 %	94 %	84 %	92 %	65 %

Tableau 2 : réussite des six groupes aux différentes classes de problèmes

3.1 Groupe 1

Le premier groupe représente 10 % de notre population et comprend 43 sujets qui apparaissent en grande difficulté (seulement 42 % de réussite à l'ensemble des problèmes). Ces étudiants réussissent largement les problèmes d'agrandissement les plus complexes (83% de réussite aux problèmes d'agrandissement) et échouent tout aussi largement à l'ensemble des problèmes d'échelle (11 % de réussite). Ce constat peut sembler surprenant dans la mesure où ces sujets privilégient très largement le calcul d'un rapport externe dans les problèmes d'agrandissement. Nos données (non réponses massives, erreurs ou absence de conversion, difficulté d'écriture sous forme fractionnaire) suggèrent tout un éventail de difficultés qu'éprouvent ces étudiants dans le traitement et la compréhension des situations d'échelle que seule une approche d'orientation qualitative permettrait de repérer et décrire plus finement. Concernant les étudiants de ce groupe, il n'y a donc pas continuité, mais bien plutôt rupture entre les situations d'agrandissement et celles d'échelle.

3.2 Groupe 2

Le deuxième groupe se compose de 63 sujets soit 15 % de notre population. Ces étudiants réussissent un peu mieux que ceux du groupe 1 (56 % de l'ensemble des problèmes). Les problèmes d'agrandissement sont massivement réussis (94 % de réussite à l'ensemble de ces problèmes). Ceux d'échelle restent par contre largement échoués (29 % de réussite à l'ensemble de ces derniers). Concernant ces problèmes d'échelle, ceux nécessitant le calcul d'une dimension sur le terrain connaissant l'échelle et la dimension correspondante du plan ou de la carte restent globalement mieux réussis que les autres (41 % vs 24 %). Calculer l'échelle sous la forme d'un rapport de type 1/n dans lequel n est grand ne va pas de soi pour les étudiants de ce groupe.

3.3 Groupe 3

Le groupe 3 réussit 64 % de l'ensemble des problèmes. Il s'agit d'un groupe atypique constitué de seulement 17 étudiants soit 4 % du total de notre population. Il conviendra de vérifier dans la suite de nos passations l'évolution de l'effectif de ce groupe qui, pour le moment, reste trop faible pour contribuer à l'étayage d'hypothèses de recherche réellement valides. Néanmoins les sujets de ce groupe apparaissent intéressants pour la recherche dans la mesure où ils ont tendance à mieux réussir les problèmes d'échelle les plus complexes n°13 et 14 (59 % de réussite) tout en échouant davantage les plus simples n°9, 10 et 11 par exemple (47 % de réussite). Deux hypothèses explicatives peuvent être avancées. Une première interprétation pourrait se formuler soit en termes de manque de temps (les sujets de ce groupe ayant passé trop de temps à résoudre ces deux problèmes en auraient peut-être manqué pour les autres), soit en termes de charge cognitive trop lourde (ou de ressources attentionnelles trop importantes) consacré à ces deux problèmes. En l'état cette hypothèse explicative ne tient pas pour les problèmes les plus simples (9, 10 et 11) précédant les plus complexes (13 et 14) dans l'ordre de passation. Une autre interprétation, cohérente avec des observations déjà menées au collège (Levain, Le Borgne et Simard, 2009), pourrait renvoyer au constat que les savoirs et savoir-faire développés ne correspondent pas nécessairement à l'ordre logique des acquisitions (Weil-Barais, 2004). Le raisonnement du sujet s'effectuerait en contexte. Il pourrait alors s'apparenter à un cheminement dans l'espace de ses propres schèmes déjà constitués avec trois conséquences observables : l'importance des connaissances antérieures, la coexistence de conduites de différents niveaux, le fait que seule une partie des connaissances soit accessible à un moment donné (Bastien et Toniazzo, 2004).

3.4 Groupe 4

Le groupe 4 est composé de 87 sujets et représente 21 % de la population de l'étude. Les étudiants de ce groupe réussissent 72 % de l'ensemble des problèmes proposés. Ils réussissent particulièrement bien les problèmes d'agrandissement (93 % de réussite) ainsi que les problèmes 17, 18 et 19 nécessitant le calcul d'une dimension du terrain connaissant sa correspondance sur la carte et l'échelle (93 % également). Par contre les problèmes 15 et 16, nécessitant le calcul d'une dimension du plan ou de la carte, ne sont réussis qu'à 69 %, les numéros 9, 10 et 11, nécessitant le calcul de l'échelle, restent, quant à eux, assez largement échoués (40 % de réussite). Les problèmes 13 et 14 les plus complexes sont systématiquement échoués par l'ensemble des sujets. Au-delà d'un ensemble de difficultés instrumentales liées à l'harmonisation des unités, au calcul d'un rapport externe et à la maîtrise de l'écriture fractionnaire dans un problème d'échelle, le rapport se construit d'emblée comme un rapport entre un signifiant et un signifié. La question de la restauration d'une analyse géométrique en termes de rapport de similitude entre les deux objets considérés semble ici pouvoir se poser pour certains étudiants.

3.5 Groupe 5

Le groupe 5 est numériquement le plus important puisqu'il est composé de 139 étudiants représentant le tiers de la population totale. Les sujets de ce groupe ont développé un haut niveau de réussite à l'ensemble des problèmes hormis aux deux les plus complexes (n°13 et 14) qui sont ici encore systématiquement échoués. À la lecture du tableau 2, et de manière un peu surprenante, les trois problèmes n°17, 18 et 19 nécessitant le calcul d'une dimension sur le terrain sont un peu moins bien réussis (76 %) que les autres problèmes nécessitant le calcul de l'échelle (n°9, 10 et 11) ou le calcul d'une dimension du plan ou de la carte connaissant sa correspondance sur le terrain et l'échelle (n°15 et 16) qui le sont à 87 %. Là encore une analyse qualitative des procédures nous permettra de confirmer une interprétation possible renvoyant à la position de ces problèmes en fin de questionnaire. Nous posons d'emblée, et à titre hypothétique pour le moment, l'importance d'une multiplicité de trajectoires possibles dans l'acquisition des notions en jeu relevant d'une organisation fonctionnelle des connaissances en termes de réseaux de schèmes activés en contexte.

3.6 Groupe 6

Le groupe 6 est constitué de 75 étudiants qui représentent 18 % du total de la population et réussissent à près de 88 % l'ensemble des problèmes proposés. Ces étudiants ont, de manière générale, développé un niveau élevé d'expertise du domaine. Toutes les catégories de problèmes sont massivement réussies (tableau 2). Les deux problèmes les plus complexes n°13 et 14 le sont à près de 65 %. Les étudiants de ce groupe sont capables de mobiliser, coordonner et accommoder un ensemble de schèmes aux caractéristiques de la tâche qui nécessite de : déterminer si le rapport d'agrandissement doit se calculer respectivement à partir des deux longueurs ou des deux largeurs, harmoniser les unités, calculer un rapport d'agrandissement non entier, l'arrondir systématiquement par excès, objectiver ce rapport sous forme d'une fraction dont le numérateur est égal à un. Tous ces éléments nécessitent que le sujet prenne en compte un ensemble important de paramètres contribuant grandement à alourdir la charge cognitive liée à l'exécution du problème.

4 Distribution dans les différents groupes

Le tableau 3 illustre la répartition des étudiants dans les différents groupes que nous avons interprétés en termes de niveaux de conceptualisation. Notre ambition consiste à analyser cette répartition pour chacune des passations effectuées : en début et fin d'année avec les étudiants professeurs des écoles de l'année précédente (pe1 et PE1) ; en début et fin d'année avec les étudiants de première année de master des promotions actuelles (m1 et M1).

	pe1	PE1	m1	M1
Groupe 1 (N=43)	8 %	6 %	18 %	12 %
Groupe 2 (N=63)	22 %	5 %	21 %	7 %
Groupe 3 (N=17)	6 %	2 %	3 %	4 %
Groupe 4 (N=87)	25 %	21 %	13 %	19 %
Groupe 5 (N=139)	21 %	46 %	34 %	36 %
Groupe 6 (N=75)	18 %	20 %	13 %	21 %

Tableau 3 : répartition des étudiants dans les différents groupes

L'hypothèse d'un lien entre la répartition des quatre populations d'étudiants correspondant aux quatre passations à l'intérieur de nos six groupes interprétés comme autant de niveaux de conceptualisation semble validée. Au test du khi carré, la valeur calculée est de 44,7 pour un nombre de degrés de liberté égal à 15 ; ce qui nous amène à rejeter l'hypothèse nulle d'indépendance entre nos deux modalités croisées (populations d'étudiants et niveaux de conceptualisation) à tous les seuils usuels ($p < .0001$). En l'état actuel de nos données, deux principaux constats s'imposent à la lecture du tableau 3. Près de 18 % des étudiants de master en début d'année universitaire appartiennent au groupe 1 caractérisant les étudiants en grande difficulté par rapport au domaine alors qu'ils ne sont que 8 % pour les anciens étudiants pe1. Un tel écart de 10 points peut sembler considérable et peut être attribué, pour une part difficile à déterminer, à la suppression de l'épreuve de sélection en entrée à l'IUFM. En fin d'année universitaire le pourcentage d'appartenance au groupe 5 est de 46 % pour les étudiants anciennement professeurs des écoles (PE1) et de seulement 36 % pour les étudiants de master (M1). Là encore ces 10 points d'écart peuvent apparaître comme un écart assez considérable qui, s'il se confirmait l'an prochain avec une population en fin de master 1 plus nombreuse permettrait d'étayer l'hypothèse d'une moindre efficacité de la formation en master. Il conviendra également de vérifier le fait qu'en fin d'année universitaire le pourcentage d'étudiants faisant preuve d'une véritable expertise du domaine proposé reste bien de l'ordre d'un cinquième de la population totale.

IV - CONCLUSION

Le travail de recherche que nous proposons s'intéresse à la formation des futurs enseignants du premier degré suite à la mise en place de la masterisation des formations. Dans ce contexte, la première partie de notre étude que nous présentons ici visait à analyser les différents niveaux de conceptualisation de la proportionnalité développés d'une part par les étudiants de l'année précédente (PE1) et ceux des promotions actuelles (M1). Quatre passations ont déjà été réalisées à différents moments clés de leur parcours de formation : début et fin de la première année de formation (PE1 puis M1). Pour ce faire, nous avons soumis à l'ensemble des étudiants un questionnaire de dix-neuf problèmes construit autour de situations d'agrandissement et d'échelle judicieusement choisies.

Méthodologiquement, nous avons, d'une part, mis en évidence des regroupements dans la structure des réussites et des échecs entre certains problèmes et des sous-groupes d'étudiants traduisant autant de niveaux distincts dans la maîtrise et la conceptualisation du domaine. Nous avons d'autre part analysé la répartition des étudiants pour chacune des passations effectuées en début et fin d'année (pe1, PE1, m1, M1) à l'intérieur des six niveaux de conceptualisation inférés à partir de notre traitement statistique. Nos premiers résultats nous permettent de pointer, sur l'ensemble du questionnaire, une légère supériorité des étudiants de la promotion antérieure (PE) sur la promotion actuelle (Master) tant en début qu'en fin de première année de formation (graphique 2) alors même que les parcours de licence sont globalement identiques, les deux tiers des étudiants étant issus d'un cursus lettres et sciences humaines (graphique 1), moins d'un cinquième provenant de la faculté des sciences et techniques. L'hypothèse d'un lien entre la répartition de nos quatre populations d'étudiants à l'intérieur de six niveaux de conceptualisation inférés semblent validés par un test de khi carré. Ce lien découlerait pour une bonne part d'un plus grand pourcentage d'étudiants appartenant au groupe 1 (étudiants en grande difficulté) en début de master ainsi qu'une proportion plus importante d'appartenance au groupe 5 en fin de PE1 plutôt qu'en fin de première année de master ; ces deux éléments semblent étayer la nécessité d'un renforcement des mathématiques à l'intérieur des nouvelles maquettes de master.

V - BIBLIOGRAPHIE

BASTIEN C. (1997) *Les connaissances de l'enfant à l'adulte*. Paris : Armand Colin.

BASTIEN C. & BASTIEN -TONIAZZO M. (2004) *Apprendre à l'école*. Paris : Armand Colin.

BENZECRI J. P. (1973) *L'Analyse des correspondances.* Paris : Dunod.

DOUADY R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherche en didactique des mathématiques*, vol7.2, 5-31.

GIRARDOT J.J. (1982) ANACONDA, système conversationnel d'analyse des données. *Cahier du SURF, 1,* nouvelle série, 137-174.

INHELDER B & PIAGET J. (1955) *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, Paris : Presses universitaires de France.

KARPLUS R., KARPLUS E.F., FORMIISANO M & PAULSON, A.C. (1979) Proportional reasoning and control of variables in seven countries. In J. Lochhead & J. Clement (éd.), *Cognitive process instruction.* Philadelphia : The Franklin Institute Press.

HART K.M. (1981) *Children Understanding of Mathematics.* London : J. Murray.

HART K.M. (1988) Ratio and Proportion. In J. Hiebert & M. Behr (éd.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades Grades* (pp. 198-219). VA: National Concil of Teachers of Mathematics. Hillsdale, N. J : Erlbaum/Reston.

LEVAIN J.P. (1997) *Faire des maths autrement*. Paris : l'Harmattan.

LEVAIN J.P., LE BORGNE P. & SIMARD, A. (2009) Territoires et conceptualisation de la proportionnalité. *L'orientation scolaire et professionnelle*, vol 38 n°1, 69-95.

VERGNAUD G. (1988) Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (ed.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). VA: National Concil of Teachers of Mathematics. Hillsdale, N.J : Erlbaum/Reston.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10 / 2.3, 135-169.

NOMBRES ET SEMIOTIQUE PEIRCIENNE

Olivia MARTINELLI
Doctorante
Laboratoire (CERES)
Université de Limoges
Professeur de mathématiques à l'U-PEC

Résumé

Dans un premier temps, notre communication se propose d'exposer et de définir les expressions « processus sémiotique peircien » et « phanéroscopie peircienne ». L'emploi du verbe définir est à nuancer compte tenu de la très grande complexité de la théorie peircienne du signe. En conséquence les définitions que nous dresserons des deux notions seront incomplètes, néanmoins elles en dessineront les contours essentiels et surtout strictement nécessaires à la bonne compréhension de l'article. Pour se faire nous aurons systématiquement recours à des exemples génériques simples.
Dans un second temps nous montrerons comment le couple « processus et phanéroscopie » autorise une saisie, une ''photographie instantanée'' du niveau d'interprétation d'un sujet par rapport à un objet de connaissance. Plus précisément, nous montrerons que ce « couple » comme outil d'analyse permet de repérer certaines évolutions, certains invariants, et certaines propriétés des representamina et des interprétants de l'objet nombre. Pour ce faire, nous avons fait le choix d'analyser avec cet outil des systèmes de numération anciens (préhistoriques, babylonien, égyptiens et grecs). Dans notre communication nous exposerons le système babylonien.
Dans un troisième temps, nous indiquerons et nous commenterons les conjectures que ces analyses nous autorisent à faire à savoir :
1) La création d'un symbole mathématique est la résultante d'un processus sémiotique long qui commence par l'iconisation.
2) Le processus sémiotique choisit toujours ''le chemin le plus court'', il est économe en termes d'espace et de temps.
3) La contrainte physiologique du ''subitizing'' joue un rôle dans la formation des representamina.
4) Plus le niveau d'interprétation est élevé plus le processus résiste à son évolution.
5) Le processus interne de conversion semble jouer un rôle central dans l'évolution de l'interprétant.

I - PROCESSUS SEMIOTIQUE ET PHANÉROSCOPIE

1 Processus sémiotique peircien

Commençons par mettre en avant le point de vue essentiel à partir duquel la théorie des signes de Peirce se construit. Ce point de vue central c'est le pragmatisme. Cette théorie est d'abord et avant tout une théorie qui se veut pragmatique. L'action du signe y est centrale.

Citons Edward C.Moore :

« *The founder of the philosophical movement well-known as pragmatism (which he later called pragmaticism to distinguish it from popularized versions such as that of William James), Peirce argued that the truth of any assertion is to be evaluated from its practical consequences and its bearing on human interests. In other words, concepts are to be understood in terms of their practical implications* »[1].

---

[1] Page d'introduction à: « The essential writings. CS.Peirce». de EC. Moore

Traduction : « Peirce, le fondateur du mouvement philosophique bien connu sous le nom de pragmatisme (qu'il baptise plus tard le pragmaticisme afin de le distinguer des versions popularisées du pragmatisme comme celle de William James), soutient que la vérité de n'importe quelle affirmation doit être évaluée à partir de ses conséquences pratiques et son action sur les intérêts humains. Autrement dit, ce sont les implications pratiques des concepts qui permettent de les saisir»

Citons également Claudine Tiercelin :

« Le concept central de la sémiotique peircienne n'est donc ni celui de la représentation, ni celui de representamen, ni même celui de signe, c'est celui du signe en acte. Il s'agit moins d'une théorie générale de la représentation que d'une théorie de la production et de la reproduction de signes en d'autres signes : « Le sens d'un signe est le signe dans lequel il doit être traduit (4132) ».» [2]

Ce qui est donc fondamental en sémiotique peircienne ce n'est pas le signe mais le processus d'évolution du signe et ses conséquences pratiques. Ce qui prime c'est le mouvement, le changement. Clarifions cette notion de processus sémiotique. Entendons nous d'abord sur l'usage du mot signe. Précisons que Peirce utilise le mot signe tantôt pour désigner un processus sémiotique dans sa globalité tantôt pour en désigner une partie qu'il nomme par ailleurs representamen. Ce qui peut être source de confusion, c'est pourquoi nous utiliserons exclusivement et systématiquement les expressions « processus sémiotique » et « representamen » pour désigner le signe. Toutes ces précautions de langage étant prises. Qu'est-ce donc que ce processus sémiotique ?

Le processus sémiotique de Peirce est un rapport triadique entre un representamen, un objet et un interprétant.

Pour entrer en matière, le plus simple c'est encore de citer l'original, citons donc C.S.Pierce :

« *Un signe ou **representamen** est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose sous quelque rapport ou à quelque titre. Il s'adresse à quelqu'un, c'est-à-dire crée dans l'esprit de cette personne un signe équivalent ou peut-être un signe plus développé. Ce signe qu'il crée, je l'appelle **interprétant** du premier signe. Ce signe tient lieu de quelque chose : de son **objet**. Il tient lieu de cet objet, non sous tous rapports, mais par référence à une sorte d'idée que j'ai appelée quelquefois le fondement du representamen.* » [3]

Bien que cette définition peircienne du processus sémiotique nous laisse déjà entrevoir qu'un tel processus ne peut être réduit à la simple triade representamen, interprétant, objet, nous considérons qu'elle constitue un bon point de départ pour en comprendre les principaux rouages.

Le representamen, la partie matérielle du processus :

Le representamen est une chose qui représente une autre chose : son objet. Prenons quelques exemples qui illustrent notre propos. Une photographie de la planète Vénus peut être un representamen de la planète Vénus. Comme les expressions « l'étoile du matin » ou « l'étoile du soir » peuvent être des representamina de l'objet la planète Vénus. Le representamen est donc une chose incarnée dans le monde sensible, c'est une chose matérielle, il peut-être un son, une image, une écriture, une odeur, une personne, un animal, ou toute autre chose accessible à nos sens. Il est un vecteur de communication externe. Il s'adresse à quelqu'un.

L'objet, ses contours plus ou moins flous :

L'objet n'est pas le representamen. L'objet est ce dont on parle. L'objet est ce que le representamen veut présenter à l'énonciataire. Précisons clairement que le representamen ne peut que représenter l'objet, il

[2] Cl. Tiercelin « CS.Peirce et le pragmatisme », Paris, PUF, 1993.

[3] CSP. 1ière lettre à L.Welby 1904.Extrait de « Ecrits sur le signe » de Gérard Deledalle, p121.

ne peut pas le faire connaître ; il ne peut qu'exprimer quelque chose à propos de l'objet. Le representamen montre certains aspects de l'objet, il ne permet pas de connaître tout l'objet. L'objet peircien a donc des contours volontairement flous, changeants et en constante évolution. **Les contours de l'objet sont dépendants de l'évolution de ses representamina et inversement.** Reprenons l'exemple de la planète Vénus, la photographie de la planète Vénus est un representamen de Vénus, elle m'indique que la planète semble être de couleur jaune, mais elle ne me dit rien a priori de sa masse ou de sa période de révolution autour du soleil. L'objet Vénus reste pour moi et pour l'astrophysicien très pointu un objet en perpétuel construction. Prenons maintenant un objet qui peut nous sembler extrêmement familier, choisissons comme objet le nombre 5.

$\sqrt{25}$, 2+3, 1+ 4 sont des representamina du nombre 5, chacun de ces representamina me dit des choses différentes sur cet objet qu'est le nombre 5, mais aucun ne fait tout connaitre du nombre 5. Aussi, bien que l'objet nombre soit actuellement aux yeux d'un mathématicien stabilisé par une axiomatique qui fait consensus, il n'empêche que cet objet n'a pas fini d'évoluer. Le sujet, fut-il mathématicien, n'a pas fini d'être harcelé par cet objet que l'on nomme nombre, il en découvrira ou en créera, selon le point de vue, de nouvelles propriétés.

<u>L'interprétant, son rôle prépondérant :</u>

L'interprétant est « l'image mentale » que crée dans l'esprit de l'énonciataire le representamen d'un objet. Il correspond à une interprétation possible d'un certain aspect de l'objet que le representamen crée dans l'esprit de l'énonciataire. Cet interprétant premier n'est pas directement accessible à l'énonciateur. Cet interprétant premier a naturellement vocation à évoluer, à se modifier, à s'associer avec d'autres interprétants issus d'autres representamina. Il peut également évoluer à la faveur d'un processus interne, l'énonciataire créant un nouvel interprétant du premier interprétant considérant ce dernier comme un « representamen non-matériel »de l'objet. L'interprétant n'est jamais figé définitivement, il est en perpétuelle évolution, il dépend du sujet. Prenons un exemple, supposons qu'une personne dise à une autre personne « 3 », ce representamen sonore crée chez l'énonciataire un interprétant qui dépend de l'énonciataire. Ainsi cet interprétant peut être l'image de la ville de Troyes, l'image de 3 billes, l'image de l'écriture chiffrée 3, la sensation tactile « intérieur » de toucher 3 billes pour un aveugle, le son « intérieur » three pour un Anglais qui saisirait le son trois, etc. Un representamen avant qu'il crée un interprétant chez son énonciataire est donc une pure possibilité. Nous verrons ultérieurement dans la partie qui concerne la phanéroscopie peircienne[4] que tous les interprétants et tous les representamina ne se valent pas. Il existe une hiérarchie des interprétants et representamina. Prenons à nouveau l'exemple du nombre 5, supposons qu'un representamen du nombre 5 crée pour un énonciataire A un interprétant où 5 apparaît comme la limite d'une suite de Cauchy, supposons que ce même representamen crée pour un énonciataire B un interprétant où 5 apparait comme le cardinal d'une collection de 5 billes, il va de soi que ces deux interprétants ne peuvent pas être placé sur un même plan.

<u>Les chaines de conversion dans le processus sémiotique :</u>

Dans le cadre de nos recherches, il a fallu nous intéresser à la façon de repérer les évolutions du processus sémiotique. Les interprétants n'étant accessibles qu'à l'énonciataire, nous nous sommes naturellement intéressés aux representamina. Afin d'observer les évolutions des representamina et par ricochet celles des interprétants, il nous a fallu créer une sorte de marqueur, ce marqueur nous l'avons baptisé chaine de conversion. Nous appelons « chaine de conversion » le processus qui consiste à saisir le representamen d'un objet pour en produire un autre du même objet. Le schéma ci-après représente une chaine de conversion.

Representamen A → interprétant 1 → interprétant 2 → representamen B

---

[4] Terme utilisé par Pierce pour désigner sa classification des signes (nous détaillons les critères de classification au paragraphe 2 de l'article).

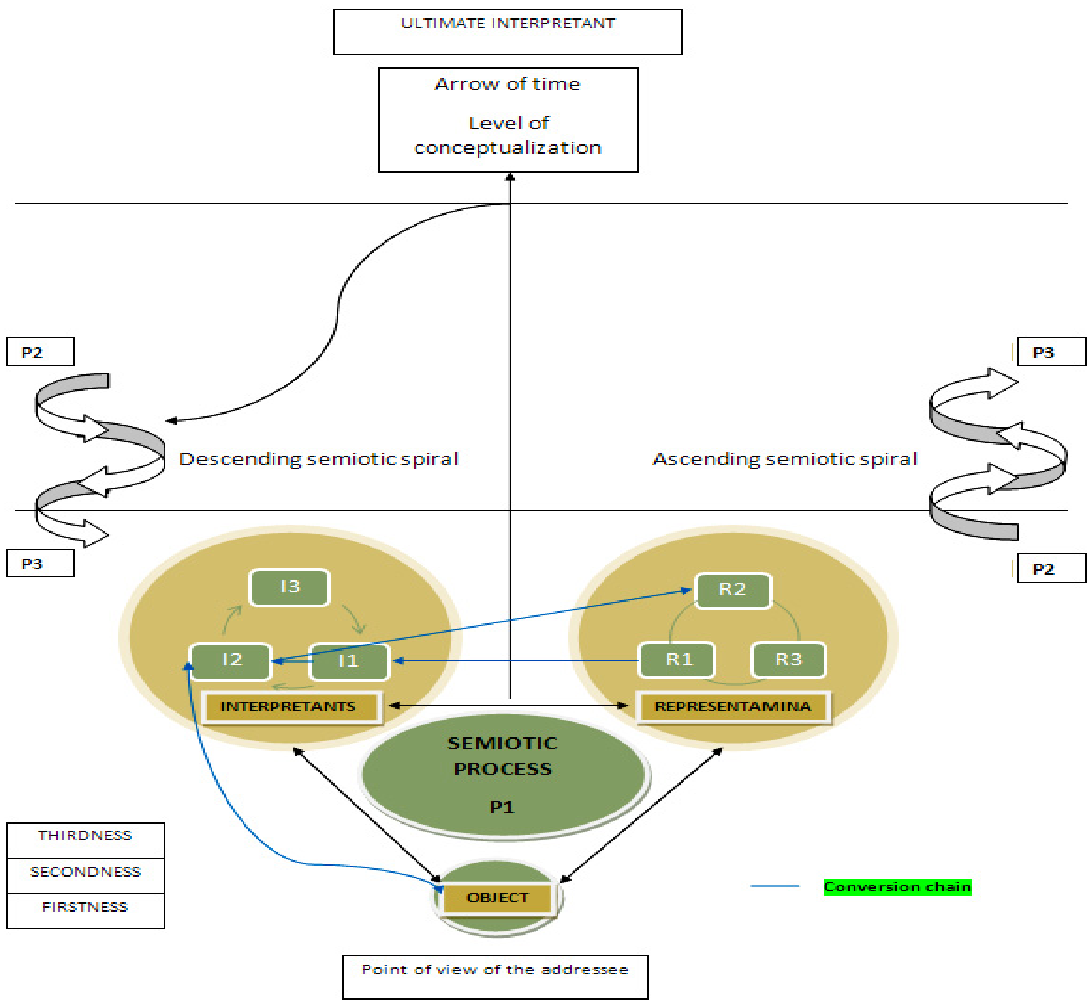
Le representamen A d'un objet crée un interprétant 1 dans l'esprit d'un énonciataire qui pour produire le representamen B de l'objet doit produire au moins un deuxième interprétant.

Prenons un exemple qui illustre notre propos. Un professeur des écoles demande à son élève âgé de 6 ans : combien font une dizaine et 3 unités ? L'expression sonore « une dizaine et 3 unités » est un representamen (A) du nombre 13 (objet), « une dizaine et 3 unités » crée dans l'esprit de l'enfant un premier interprétant (1), supposons que ce premier interprétant soit l'image d'une boite Picbille[5] contenant 10 billes et de 3 billes, cet interprétant (1) peut possiblement créer un second interprétant (2) qui pourrait être la suite numérique (10,11,12,13), qui à son tour crée un troisième interprétant (3) qui serait le son « intérieur » 13 pour enfin produire le representamen (B) sonore « 13 ». Ceci est un exemple fictif mais plausible de chaine de conversion contenant 3 interprétants. Par définition, une chaine de conversion contient a minima deux interprétants.

<u>L'interprétant ultime :</u>

Pour Peirce les interprétants ultimes, ce sont les interprétants que créent dans l'esprit d'un énonciataire des representamina directement issus des savoirs savants les plus avancés.

Ci-dessous un schéma représentant le processus sémiotique dans sa globalité.



[5] Il s'agit de boites pouvant contenir 10 billes utilisées dans certaines écoles primaires pour apprendre à compter.

2 Phanéroscopie peircienne

La phanéroscopie peircienne ou théorie des catégories de Peirce propose une classification des signes, plus qu'une simple classification, elle en propose une hiérarchisation.

Commençons par citer Peirce:

«(8.333) Me voilà maintenant prêt à donner ma division des signes, aussitôt que j'aurai fait remarquer qu'un signe a deux objets, son objet comme il est représenté et son objet en lui-même. Il a aussi trois interprétants, son interprétant en tant que représenté ou destiné à être compris, son interprétant en tant que produit et son interprétant en lui-même. Or les signes peuvent être divisés, selon leur propre nature matérielle, selon les relations qu'ils entretiennent avec leurs objets et selon leurs relations avec leurs interprétants.

(8.334) En soi, un signe est soit une apparence, ce que j'appelle un qualisigne, soit un objet ou événement individuel, ce que j'appelle un sinsigne (la syllabe sin étant la première syllabe de semel, simul, singulier, etc.),soit un type général, ce que j'appelle un légisigne. Comme nous employons le terme ''mot'' dans la plupart des cas, quand nous disons que ''le'' est un '' mot '', que ''un'' est un autre ''mot'', un ''mot'' est un légisigne. Mais quand nous disons d'une page d'un livre qu'elle a deux cent cinquante ''mots'' dont vingt sont des ''le'', le ''mot'' est sinsigne. Un sinsigne qui renferme ainsi un légisigne je l'appelle une ''réplique'' du légisigne. La différence entre un légisigne et un qualisigne, qui ne sont ni l'un ni l'autre des choses individuelles, est qu'un légisigne a une identité bien déterminée, bien qu'il admette d'ordinaire une grande diversité d'apparences. Ainsi, ''&'' et ''et'' et le son ''é'' ne forment tous qu'un seul mot. Le qualisigne par contre n'a aucune identité. C'est la pure qualité d'une apparence et il n'est pas exactement le même lorsqu'il réapparait une seconde fois. Au lieu de l'identité, il a une grande similitude et ne peut différer beaucoup sans qu'on le considère comme un tout autre qualisigne. Par rapport aux relations qu'ils entretiennent avec leurs objets dynamiques, je divise les signes en Icônes, Indices, et Symbole. Je définis une icône comme étant un signe qui est déterminé par son objet dynamique en vertu de sa nature interne. Tel est tout qualisigne comme une vision ou le sentiment produit par un morceau de musique considéré comme reproduisant exactement les intentions du compositeur. Tel peut être un sinsigne comme un diagramme individuel, par exemple une courbe de distribution d'erreurs. Je définis un indice comme étant un signe déterminé par son objet dynamique en vertu de la relation réelle qu'il entretient avec lui. Tel est un Nom Propre (un légisigne) ; telle est l'apparition d'un symptôme d'une maladie (le symptôme lui-même est un légisigne, un type général d'un caractère déterminé. L'apparition dans un cas particulier est un sinsigne). Je définis un symbole comme étant un signe qui est déterminé par son objet dynamique dans le sens seulement dans lequel il sera interprété. Il dépend donc soit d'une convention, d'une habitude ou d'une disposition naturelle de son interprétant ou du champ de son interprétant (celui dont l'interprétant est une détermination). Tout symbole est nécessairement un légisigne, car il est inexact d'appeler symbole la réplique d'un légisigne. Eu égard à son objet immédiat un signe peut être le signe d'une qualité, d'un existant ou d'une loi.

Par rapport à la relation qu'il entretient avec son interprétant signifié un signe est un rhème, un dicisigne ou un argument. Ceci correspond à la vieille trinité terme, proposition, et argument modifiée pour s'appliquer aux signes en général. Un terme est simplement un nom de classe ou un nom propre. Je ne considère pas le nom commun comme une partie essentiellement nécessaire du discours. En réalité son développement en partie distincte du discours n'a été complet que dans les langues aryennes et le basque- et peut-être aussi dans quelques autres langues peu connues. Dans les langues sémitiques, il est formellement une affaire verbale en général et d'ordinaire il l'est aussi substantiellement. Autant que je sache, il en va ainsi dans la plupart des langues. Dans mon algèbre logique universelle, il n'y a pas de nom commun. Un rhème est tout signe qui n'est ni vrai ni faux, comme presque tous les mots pris isolément, excepté oui et non qui sont presque propres aux langues modernes. Une proposition, suivant la manière dont j'utilise ce terme, est un symbole dicent. Un dicisigne n'est pas une assertion, mais un signe capable d'être asserté. Mais une assertion est un dicisigne. Comme je vois présentement la chose (il se peut que j'y voie plus clair plus tard), l'acte assertion n'est pas un pur acte de signification. C'est l'expression du fait qu'on se soumet aux sanctions qu'encourt un menteur si la proposition assertée n'est pas vraie. Un acte de jugement est l'auto-reconnaissance d'une croyance ; et consiste dans l'acceptation délibérée d'une proposition comme base de conduite. Mais je crois que cette position est discutable. Il s'agit simplement de savoir quelle conception donne le point de vue le plus simple sur la nature de la proposition. Soutenant donc qu'un dicisigne n'asserte pas, je soutiens naturellement qu'un argument n'a pas réellement à être soumis ou proposé. Je définis donc un argument *comme un signe qui est représenté dans son interprétant (la conclusion)[car se serait le soumettre ou le proposer],mais, comme s'il était un signe de l'interprétant ou peut-être comme s'il était un signe de l'état de l'univers auquel il se réfère, dans lequel les prémisses sont considérés comme évidentes. Je définis un dicisigne comme un signe représenté dans son interprétant signifié comme s'il entretenait une relation réelle avec son objet (ou comme l'entretenant s'il est asserté). Un rhème est défini comme un signe qui est représenté dans son interprétant signifié comme s'il était un caractère ou une marque (ou comme l'étant). »*[6]

Ce texte est d'une grande intensité, et il faut bien l'avouer, Peirce est plutôt difficile à lire. Cependant, il apparait clairement que Peirce propose de classer les representamina en utilisant trois critères :

- La nature matérielle du representamen
- Les relations qu'il entretient avec son objet
- Les relations qu'il entretient avec ses interprétants

Commençons par le premier critère, celui relatif à la nature du representamen.

Un representamen peut être un **qualisigne**, un qualisigne n'a aucune identité, il n'a pas de réplique. C'est un sentiment premier, une pure sensation au contour indéfini.

Un representamen peut être **un sinsigne**, un sinsigne est un objet ou un événement réel unique, il n'a pas de réplique. Donnons quelques exemples, une figure géométrique particulière dans un livre de mathématiques, la photographie d'une personne.

Un representamen peut être un légisigne, un **légisigne** est un signe de loi, il est conventionnel et il a des répliques. Citons quelques exemples : un billet de train, un billet de banque, le representamen « + » en mathématique. Remarquons qu'en mathématiques nombreux sont les representamina qui sont des légisignes.

Abordons maintenant la question des relations qu'entretiennent les representamina avec leurs objets.

La relation est dite **iconique** si le representamen **ressemble** à son objet. *« Une icône possède le caractère qui le rend signifiant, même si son objet n'existe pas. »*[7] Prenons deux exemples : la photographie d'une personne est un representamen iconique de la personne (l'objet). En tenant compte du paragraphe précédent on peut affiner notre classement et dire qu'il s'agit d'un sinsigne iconique de la personne (objet). En mathématiques, le dessin d'une flèche reliant deux points A et B est un representamen iconique du vecteur $\overrightarrow{AB}$

La relation est dite **indicielle** si le representamen est **directement affecté** par son objet, ainsi si l'objet n'existe pas l'indice non plus. Une fumée est le representamen indiciel du feu (l'objet). En mathématiques, le representamen « u.v = 0 » est un representamen indiciel de la normalité entre eux des vecteurs u et v.

La relation est dite **symbolique** si le representamen renvoie à son objet en vertu d'une **loi générale**. Le choix du representamen est **arbitraire,** sa forme ne dépend pas de l'objet qu'il représente. Le feu rouge est un representamen symbolique de l'ordre de stopper son véhicule (objet). Le representamen « + » est un representamen symbolique de l'addition (objet).

Enfin traitons la question des relations qu'entretiennent les representamina avec leurs interprétants.

---

[6] C.S.P « Première lettre à Lady Welby », P.O Milford, Pa. 12 octobre 1904. Extrait de « Ecrits sur le signe » G.Deledalle, p31-33.

[7] C.S.P (2.304) Extrait de « Ecrits sur le signe » G.Deledalle, p139.

La relation est dite **rhématique** si le representamen **n'est pas interprété comme fournissant quelque information sur son objet,** il n'offre que des possibilités d'interprétation. Par exemple la photographie d'un inconnu sans autre indication est un representamen rhématique de l'inconnu. Pour aller plus loin, en tenant compte des deux paragraphes précédents, cette photographie est un sinsigne iconique rhématique. En mathématique l'expression « a + … = c » est un representamen rhématique.

La relation est dite **dicente** si le representamen est **interprété comme indiquant quelque chose de son objet. L'information donnée sur l'objet peut être vraie ou fausse**, aucune preuve ne permettant de corroborer l'information. Par exemple la photographie d'une personne sur laquelle il écrit « Nom : Dupont, Prénom : Paul), ce representamen est un representamen dicent de la personne (objet). Il semble indiquer que la personne sur la photographie soit Monsieur Dupont Paul, rien ne permettant de dire si cette interprétation est vraie ou fausse. En tenant compte des paragraphes précédents, on peut dire que ce representamen est un sinsigne indiciel dicent, mais il peut être aussi compris comme étant un sinsigne iconique dicent. En mathématiques, sur la page d'un cahier d'écolier, deux droites (D) et (D') sont dessinées et semblent être parallèles, il n'y a aucune autre indication sur la page. Ce dessin de deux droites parallèles est un representamen dicent du parallélisme entre les droites (D) et (D').

La relation est dite **argumentale** si l'interprétant survient comme **résultant de la loi générale** qui relie le representamen à son objet. Prenons un exemple, « un feu rouge » est un representamen argumental de l'objet « ordre de s'arrêter » si il est interprété comme un signe de loi, c'est-à-dire si l'énonciataire pense « je vais m'arrêter car la loi dit : chaque fois qu'il y a un feu rouge, il y a ordre de s'arrêter. » Dans ce cas le feu rouge est un légisigne symbolique argumental.

En résumé de cette seconde partie, dans le cadre scolaire où l'interprétant ultime est défini par l'institution, cette classification nous permet de photographier un état du processus sémiotique chez un élève à un moment de son parcours en direction de cet interprétant ultime.

En effet si « l'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$ » peut être regardée par un mathématicien comme un légisigne symbolique argumental du cercle de centre l'origine du repère et de rayon 1, il est aussi possible qu'un élève le regarde comme un qualisigne iconique rhématique. Nous voulons par cet exemple mettre en avant le fait qu'un état du processus sémiotique peut révéler le niveau d'interprétation de l'énonciataire. Non seulement cette photographie peut être révélatrice d'un niveau d'interprétation, mais elle peut aussi rendre compte, en « zoomant » sur les chaines de conversion du processus, de la manière dont ce processus évolue.

II - UN POINT DE VUE PEIRCIEN SUR LES NOMBRES«BABYLONIENS»

1 Avant propos

Quelques mises en garde sont nécessaires à l'entrer dans notre sujet. Commençons par situer le travail qui va être exposé dans son contexte général. Tout d'abord, cet exposé « historique » n'est pas central dans nos recherches. Nos recherches concernent essentiellement les apprentissages numériques à l'école en France, et notre point de vue est un point de vue de sémioticienne à visée didactique. Notre travail sur les nombres « babyloniens » n'est ni un travail d'historien, ni même un travail d'épistémologue des mathématiques. Nos sources historiques sont les sources de chercheurs en épistémologie des sciences[8] qui font autorité dans le domaine. Nous n'avons choisi ce système de numération ni pour ses origines géographiques, ni pour les origines ou les propriétés de cette langue. Notre sélection s'est effectuée en fonction de critères mathématiques, nous l'avons choisi parce qu'elle une **numération de position**, ce qui en soit est déjà exceptionnel, et surtout qu'elle permet des comparaisons pertinentes avec notre

[8] Docteur en épistémologie et histoire des sciences (thèse soutenue en 2004), Membre de l'UMI Transition (CNRS & NYU) et de l'Unité SPHERE (UMR 7219, CNRS & Université Diderot Paris 7)

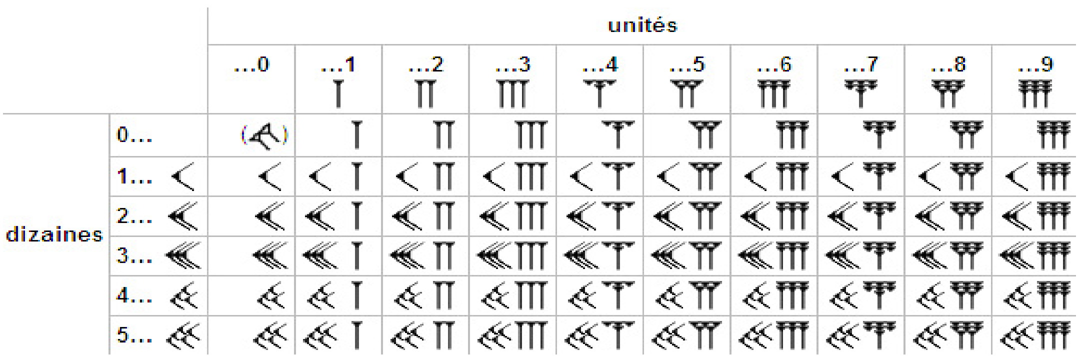
système de numération décimal. Le terme « babylonien » est un terme générique largement utilisé par les épistémologues des mathématiques. Pour ce qui nous concerne ce terme désigne des tablettes d'écoliers de la ville de Nippur datant du 2ième millénaire avant notre ère. La ville de Nippur se situe à la frontière entre le « Pays de Sumer » et le «Pays d'Akkad »[9]. Enfin, précisons également que nous n'avons eu accès qu'à un certain type de representamina visuels des nombres « babyloniens ». Les representamina sonores, tactiles nous sont naturellement inaccessibles. Ce qui réduit considérablement notre champ d'investigation.

2 Un point de vue de sémioticienne sur les nombres babyloniens

Les Babyloniens ont utilisé une grande variété de systèmes de numération : sexagésimal strict avec les clous et chevrons, décimal mélangeant du sexagésimal ou décimal. Les tablettes concernant la numération sexagésimale stricte sont relativement nombreuses, connues et disponibles. C'est aussi une des raisons qui ont orienté notre choix sur cette numération mais ce n'est pas la seule. En effet la tablette YBC7289 (abréviation de *Yale Babylonian Collection, nº 7289)* possède des caractéristiques très intéressantes tant d'un point de vue sémiotique que d'un point de vue strictement mathématique, nous détaillerons ces caractéristiques ultérieurement. Or cette tablette convoque la numération sexagésimale babylonienne. YBC7289 est datée du premier tiers du IIe millénaire av. JC. (-1700 ± 100). On ne connaît pas son origine exacte ; elle provient sans doute du sud de l'Irak actuel. Elle est actuellement conservée à l'Université de Yale.

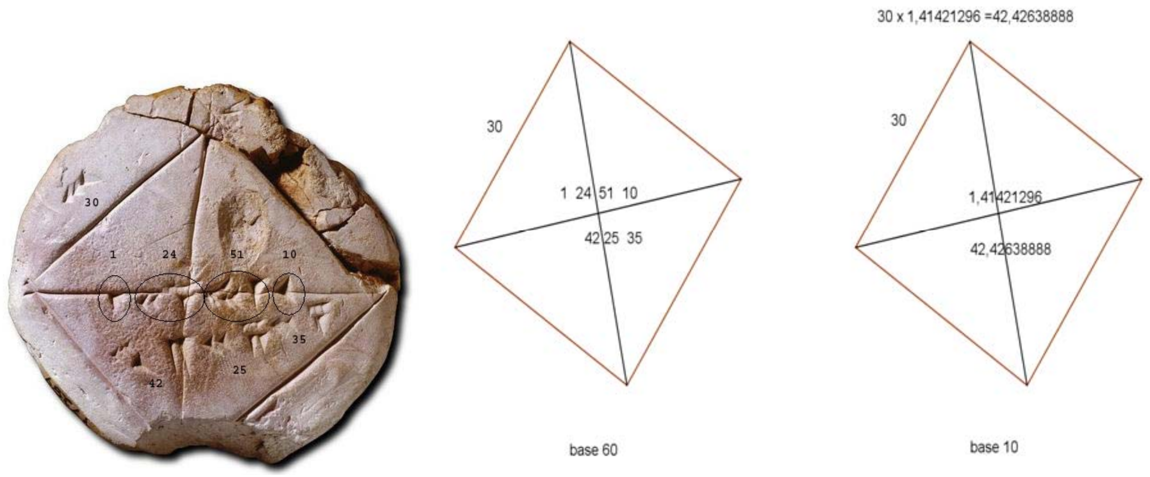
Remarquons que de nos jours, la base 60 (système sexagésimal) est encore utilisée pour mesurer le temps, elle est un héritage de la civilisation babylonienne. Ainsi, une heure est égale à 60 minutes et une minute est égale à 60 secondes.

Commençons maintenant une première analyse du système de numération sexagésimal « babylonien ». Intéressons nous aux soixante chiffres du système sexagésimal babylonien. Ces chiffres étaient notés à l'aide d'un système additif décimal : un clou pour l'unité et un chevron pour la dizaine. Ainsi, tout chiffre de leur système sexagésimal pouvait s'écrire avec au plus cinq chevrons et neufs clous. Le tableau ci-dessous contient les 60 representamina des 60 chiffres babyloniens. Chez lez babyloniens le zéro existe. Dans les tablettes mésopotamiennes, on retrouve trois representamina différents du nombre zéro : ou ou un espace vide entre deux chiffres. L'espace vide est de loin de plus utilisé, les deux autres symboles apparaissent plus tardivement.



9 à une centaine de km au sud de la Bagdad actuelle.

Contrairement à notre si familière et ‘‘traditionnelle’’[10] base 10, il n’y a pas 60 symboles différents pour désigner chacun des chiffres du système numéral babylonien. Il n’y a que deux symboles le clou 𒁹 et le chevron 𒌋 qui génèrent tous les autres. Pour le scribe d’antan ces deux symboles sont des légisignes symboliques dicents puis argumentaux, en effet si on l’on veut tenir compte du temps[11], il est évident que pour certains nombres, compte tenu du système additif sous-jacent, **le processus sémiotique peut-être très lent** à produire un interprétant qui soit un argument. C’est déjà une première différence avec notre système de numération décimale. En effet, les dix symboles représentant les chiffres de notre système sont pour un lecteur lambda des légisignes symboliques argumentaux et surtout ils sont extrêmement rapides à interpréter comme des signes de loi. Ce n’est donc pas le cas des chiffres babyloniens, le clou 𒁹 par exemple peut indifféremment signifier 1 ou 60 ou 3600 ou 1/60 et il en va de même pour tous les representamina des chiffres babyloniens et par extension pour ceux de tous les nombres. En effet, la perception est immédiate mais l’interprétation bien qu’elle puisse être rapide ne l’est pas, elle est séquentielle et cela même pour un scribe expérimenté. Illustrons notre propos en étudiant la tablette d'argile YBC 7289 (abréviation de *Yale Babylonian Collection, nº 7289*)[12]. C’est une pièce archéologique babylonienne écrite en cunéiforme et traitant de mathématiques. Pour les historiens des mathématiques, son intérêt réside dans le fait qu'elle est la plus ancienne représentation connue d'une valeur approchée de la racine carrée de deux, notée aujourd'hui √2. Nous nous y intéresserons plus tard. Réalisons une première transcription.



A gauche se trouve la tablette originale, à droite nous avons réalisé deux transcriptions actualisées une en base 60 et l’autre en base 10. Pour rendre tout à fait simple notre propos, nous allons développer notre raisonnement en base 10 et par analogie en le transposera en base 60. Sur la diagonale du carré est écrit 141421296 sans virgule, le scribe sait qu’il s’agit d’un nombre, mais ce nombre peut être 1, 41421296 comme il peut être 141,421296 ou 1414,21296 etc. Cependant ce scribe est membre de la société savante, en conséquence il connait les relations qui existent entre les longueurs des 3 côtés d’un triangle rectangle, comme nous le montre la tablette Plimpton 322[13]. Ce qui ne signifie pas qu’il connait le théorème de Pythagore. On peut savoir que les pommes tombent sans pour autant connaitre tous les

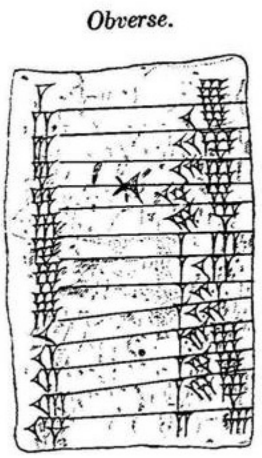
[10] En usage actuellement dans la plupart des pays du monde et qui est en réalité un héritage direct du système numéral de la brahmi (Inde), 3ième siècle avant JC.

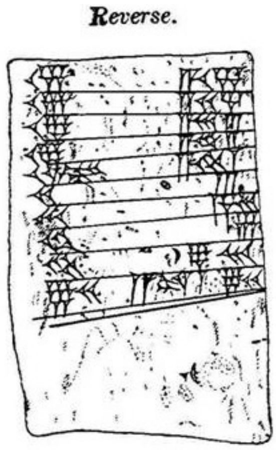
[11] Par temps nous entendons le temps défini à partir d’un phénomène physique (rayon lumineux servant à définir la seconde est celui dont la fréquence provoque une excitation bien déterminée d’un atome de césium-133).

[12] Depuis 1912, elle est en possession de l'Université Yale.

[13] Cette tablette, dont on fixe la rédaction au XVIIIe siècle av. J.-C., comporte un tableau de nombres cunéiformes rangés sur 15 lignes par quatre colonnes. Ce tableau contient une liste de triplets pythagoriciens.

détails de la théorie gravitationnelle. Ce scribe maitrise également parfaitement les techniques de multiplications, comme l'attestent de nombreuses tablettes d'écoliers mais également le travail de chercheur comme Christine Proust. Ci-dessous une tablette datant de la période paléo-babylonienne. Il s'agit du recto et du verso d'une tablette représentant la table de multiplication par 9.





[14]

1	9	
2	18	
3	27	
4	36	
5	45	
6	54	
7	63	1x60 + 3
8	72	1x60 + 12
9	81	1x60 + 21
10	90	1x60 + 30
11	99	1x60 + 39
12	108	1x60 + 48
13	117	1x60 + 57
14	126	2x60 + 6

[15]

Ce sont ses deux connaissances, celle de la loi qui lie la diagonale au côté du carré et celle des tables de multiplication qui font que le scribe peut attribuer un ordre de grandeur aux nombres sur la tablette (en base 10, il placerait la virgule au bon endroit). L'interprétation n'est donc pas immédiate dans ce cas. Revenons sur la graphie des nombres babyloniens. Notons que pour écrire des chiffres comme 59 la graphie est assez complexe et qu'elle requière pour être exécutée des procédures de comptage puisque qu'on réplique deux symboles respectivement 5 fois puis 9 fois. Elle requière également une procédure additive. La cardinalité n'apparait qu'après qu'on ait fait les additions 10+10+10+10+10, puis 50+9. La multiplication des procédures pour accéder à la cardinalité ne peut que ralentir le processus sémiotique.

<u>Régularités et similitudes</u>

Si on définit le nombre comme cardinal d'une collection on retrouve la dimension iconique[16] des representamina pour les chiffres strictement inférieurs à 10, y compris pour le zéro dont le representamen est un espace vide. Ils ressemblent à l'objet qu'ils représentent. On notera que la graphie jusqu'à 3 est semblable à celle des encoches préhistoriques[17] et celle d'autres systèmes de numération. Il est également très intéressant de noter que les symboles clou  et chevron  sont toujours rangés par groupe contenant au maximum 3 symboles et, qui plus est le nombre de groupes par chiffre n'excède pas 3. Ainsi, dans le chiffre  (49) on compte un groupe de 3 chevrons et 3 groupes de 3 clous. Nous constatons que cela correspond très exactement à la limite du subitizing[18]. Cette organisation peut certainement compenser les effets des **ralentisseurs du processus sémiotique** que peuvent être la virgule flottante, le comptage et les procédures additives.

---

[14] Tablette provenant de Nippur et conservée à l'Université de Iéna (HS 0217a), Copie de H. Hilprecht, 1906, *Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur*, n°15, pl. 14. Début de Période paléo-babylonienne (pour les mathématiques 2000-1720 avant JC)

[15] Traduction du recto de la tablette dans notre système de numération.

[16] Au sens de la théorie des signes de C.S.Peirce

[17] Nous faisons allusion au churinga de Lalinde

[18] Phénomène physiologique voire article de Dehaene Stanislas et Cohen Laurent. Journal of Experimental Psychology : la perception humaine et la performance, Vol 20 (5), oct. 1994, 958975.

Comme la nôtre, la numération sexagésimale est une numération de position. La place des symboles sur le support d'écriture joue un rôle fondamental, le nombre 𒁹 𒌋 n'a pas la même signification que le nombre 𒌋 𒁹 . On remarquera que si l'on restreint l'ensemble des nombres aux entiers strictement inférieur à 60 alors le système sexagésimal babylonien fonctionne comme un système décimal. Le nombre 10 joue donc aussi un rôle central dans le système de numération en base 60 des babyloniens.

<u>L'existence d'autres representamina</u>

F. Thureau-Dangin, un des pionniers des mathématiques cunéiformes distingue deux types de nombres babyloniens, les uns qu'il nomme nombres ''abstraits'', les autres qu'il nomme nombres ''concrets''.

"Ce système très abstrait, qui ne distinguait pas entre les entiers et les fractions, qui ignorait l'ordre de grandeur des nombres, servait aux opérations arithmétiques, notamment aux « igi-arê », c'est-à-dire aux « divisions et multiplications » qu'il facilitait grandement. La tablette dite de l'Esagil [Ziggourat de Babylone ou "Tour de Babel"] illustre parfaitement la méthode employée par les Babyloniens et montre comment, dans leurs calculs, ils passaient du concret à l'abstrait, puis revenaient de l'abstrait au concret."[19]

Les scribes babyloniens dissocient deux fonctions : il existe d'une part des nombres pour quantifier, en général de principe additif, utilisés en métrologie et dans les dénombrements, et d'autre part des nombres (sexagésimaux, positionnels, sans ordre de grandeur spécifié) pour calculer, plus précisément pour effectuer les multiplications et les divisions.

Les babyloniens utilisent des nombres pour mesurer des grandeurs. Ils mesurent des longueurs, des aires, des masses et des volumes. Chaque grandeur a son propre système d'unités. Par exemple, les longueurs se mesurent en Ninda (6m), en Canne (3m) et en Us (60 Ninda).

Par contre pour effectuer des calculs de périmètre, d'aire, de volume ou de masse, les babyloniens n'utilisent pas directement ces nombres, ils utilisent des tables métrologiques qui convertissent ces ''nombres-mesure'' en nombre ''sans unité''[20], ils font les calculs avec les nombres ''sans unité'', puis toujours en faisant usage des tables métrologiques ils convertissent les nombres ''sans unité'' en ''nombres-mesure''. C'est cette dernière opération qui est la plus délicate, car comme l'indique les tables métrologiques le nombre ''sans unité '' peut être le representamen de plusieurs nombres ''mesure''. Ci-après une description synthétique des tables métrologiques, associant unités de mesures et nombre positionnel.

Unités de longueur	Danna (30 Us)	Us (60 Ninda)	Ninda (12 Kus)	Kus (30 su-si)	Su-si
Nombre sexagésimal	30	1	1	5	10

Unité d'aire	Gan (100 Sar)	Sar (60 Gin)	Gin (180 Se)	Se
Nombre sexagésimal	40	1	1	20

Unité de masse	Gu (60 ma-na)	Ma-na (60 gin)	Gin (180 Se)	Se
Nombre sexagésimal	1	1	1	20

[19] Thureau-Dangin, ''Nombres concrets et nombres abstraits dans la numération babylonienne.'' *RA* 29, p. 116-119, p. 117.

[20] Ce sont simplement les nombres sexagésimaux que l'on vient d'étudier.

Unité de volume	Gur (5 Bariga)	Bariga (6 Ban)	Ban (10 Sila)	Sila (60 Gin)	Gin
Nombre sexagésimal	5	1	10	1	1

L'existence de ces tables nous indique clairement qu'il existe des representamina des nombres qui sont autres que ceux construit avec les clous 𒁹 et les chevrons 𒌋. Les nombres peuvent être représentés par des objets réels et mesurables. Les tables métrologiques sont l'outil qui autorise l'existence de ce nous avons appelé les **chaines de conversion,** dans lesquelles les interprétants et representamina sonores ne sont pas nécessairement invoqués.
Revenons sur l'analyse de la tablette YBC 7289. La tablette comprend le dessin d'un carré et de ses diagonales. Les nombres 1,41421296 et 42,42638888 sont écrits sous la diagonale et le nombre 30 sur le côté du carré. Cette disposition des nombres sur la tablette est tout à fait appropriée et explicite. Il est clair pour l'auteur que le nombre 30 est identifié au côté du carré et que les nombres 1,41421296 et 42,42638888 sont associés à la diagonale, puisque l'auteur sait a minima que la longueur de la diagonale du carré est égale à 1,41421296 multiplié par la longueur du côté et a maxima il connaitrait le théorème de Pythagore. En effet, en base 10 on remarque que le produit 30 x 1,41421296 est égal à 42,42638888, en base 60 en utilisant nos chiffres pour représenter ceux des babyloniens on obtient $30 \times (1+24/60+51/60^2 +10/60^3) = 42+ 25/60+35/60^2$.
En conclusion les nombres de la tablette sont représentés par des objets géométriques et en particulier le nombre 1,41421296 est représenté par la diagonale du carré avec certitude, la probabilité obtenir par hasard la relation $30 \times (1+24/60+51/60^2 +10/60^3)=42+ 25/60+35/60^2$ étant quasi nulle.

III - QUELQUES CONJECTURES

1 Mise en forme du representamen : imitation économique, principe iconique

Il nous semble après avoir étudié différents systèmes de numération et en particulier le système babylonien que les premiers representamina sont des sortes d' « **imitation économique** » de collections d'objets réels. Par exemple, ||| possède en lui le caractère qui le rend signifiant, il y a bien une « ressemblance » avec une collection de trois pommes. Chez les babyloniens de zéro à neuf, c'est un **principe iconique** qui régit la prise de forme des representamina. En effet, le principe additif connu des mathématiciens est une sorte d'imitation de la réunion de plusieurs collections d'objets réels. Le terme économique est utilisé pour indiquer que le representamen occupe moins d'espace physique et nécessite moins de temps à être réalisé qu'un representamen iconique plus réaliste. Dessiner trois pommes prend plus temps de temps et occupe plus de place sur le papier que dessiner trois traits verticaux.

Les premiers representamina des nombres sont donc iconiques et viscéralement liés à la notion de cardinal d'une collection.

2 Mise en forme du representamen : les contraintes physiologiques

2.1 La formation du representamen premier obéit à la loi du subitizing

La mise en forme des premiers representamina d'un objet semble obéir à la **« loi du subitizing ».** En effet, un faisceau de présomption semble nous indiquer que l'organisation interne du representamen respecte la limite physiologique imposée par la « loi du subitizing ». Cette caractéristique que nous avons pu observer en étudiant la numération babylonienne, nous l'avons également observé dans d'autres systèmes de numération dont la nôtre. La formation du representamen semble répondre à une exigence de vitesse de création de l'interprétant. En d'autres termes, il est fabriqué en tenant compte de la physiologie humaine et de manière à être rapidement interprété. Il y a là une idée que nous continuons actuellement de creuser dans nos recherches. Cette idée c'est l'idée qu'il existe une loi de la sémiotique, de la même manière qu'il existe des lois de la physique, qui formulerait la proposition suivante : tout processus sémiotique tend à évoluer vers un processus sémiotique plus performant en termes de **vitesse d'exécution du processus**. Pour ce faire nous avons construit une partie expérimentale relativement conséquente. Une partie des expérimentations est déjà réalisée, l'autre partie est en cours de réalisation, les premières analyses de résultats sont en cours. En conséquence, nous ne sommes pas actuellement en mesure de valider cette proposition.

2.2 Les doigts de la main : une collection disponible et permanente.

Tout d'abord, un constat simple s'impose, la très grande majorité des systèmes de numérations reconnus comme tels par la communauté scientifique ont tous une relation particulière avec des collections de 5 ou 10 objets. Cette relation particulière existe y compris dans les systèmes de numération dont la base n'est pas la base 10. Les nombres babyloniens en sont un parfait exemple. En effet, bien que la numération babylonienne soit une numération positionnelle de base 60, si on considère uniquement le bloc des 60 chiffres babyloniens, il fonctionne comme un micro système dont la base est 10. Ce micro système présente la particularité d'être à la fois positionnel et additif. On ne peut que constater que la persistance des savants de toute époque à organiser les collections par paquets de 10, parfois de 5.
Les premiers representamina étant solidement liés à la notion de cardinal d'une collection, on peut raisonnablement supposer que des collections d'objets manipulables furent parmi les premiers representamina des nombres, les calculi[21] (voire annexe 1) en sont un exemple parmi d'autres. La question que nous posons est : **notre propre corps détermine-t-il en partie la forme les premiers representamina** ? En particulier, le fait que nous ayons une collection de dix doigts toujours disponible contribue-t-il à la mise en forme des premiers representamina ? Nous ne répondrons pas exactement à cette question, mais nos recherches en cours tentent de répondre à une question connexe, quelles sortes d'interprétants créent les representamina utilisant les doigts à l'école maternelle (2-5ans) ?

3 Les chaines de conversion : cœur du processus d'apprentissage ?

3.1 Les chaines de conversion : la question du sens.

On retrouve dans les programmes officiels[22] la question du sens. Dès la maternelle, les injonctions à donner du sens aux nombres sont présentes. « *Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont du sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but..* »[23] , il s'agit là d'un extrait du programme de la classe de maternelle. Ce genre d'injonction ne se retrouve pas uniquement dans les programmes de maternelle, elle se trouve dans tous les programmes de mathématiques de la maternelle (2-5ans) au CM2 (9-10 ans). Donner du sens aux mathématiques est donc une préoccupation majeure de l'institution[23]. La question est : mais qu'est-ce donc que le sens ? Rappelons quelques points de vue sur la question, commençons par celui de Frege parce qu'il est proche de celui développé par l'institution[24]. Pour Frege le sens (sinn) correspond au mode de donation du référent (Bedeutung). Il correspond à une variation dans le mode de donation du référent[25]. Ce qui est un point de vue assez proche de celui qui est présent dans les programmes officiels de l'école (2-10ans). L'idée générale est de résoudre des problèmes en utilisant le nombre, le nombre apparaissant comme étant l'outil le plus efficace à résoudre le problème (Le nombre étant le référent frégéen, le problème étant le mode donation du référent). Ce

[21] Epoque de Suse II ou époque d'Uruk (3800-3100 avant JC).

[22] B.O n°3 du 19 juin 2008.

[23] B.O n°3 du 19 juin 2008 p15.

[24] Par institution nous entendons toutes les instances qui font autorité sur ce qui se passe dans l'enseignement public français en termes de programmes et de pratiques préférentielles.

[25] cf l'exemple frégéen très connu de la planète Vénus (référent).

point de vue réduit considérablement la place accordée aux representamina des nombres, ce qui pour l'enseignant rend l'activité de l'élève difficile d'accès[26].

Comme nous l'avons précédemment exposé, le point de vue peircien se veut pragmatique et il l'est. Le sens est produit par une évolution du processus sémiotique dans la direction d'un interprétant choisi par l'institution (la plus part du temps il s'agit de l'interprétant ultime). Ce point de vue sur la question du sens est donc différent du point de vue frégéen, il présente l'avantage de nous faire connaitre le niveau d'interprétation de l'élève puisque qu'on peut avoir accès à sa capacité à produire des chaines de conversion (si on simplifie légèrement, on peut parler de sa capacité à passer d'un representamen à un autre).

3.2 Les chaines de conversion : le moteur des apprentissages numériques.

La phase expérimentale de nos recherches n'est pas encore terminée, cependant les premiers résultats semblent indiquer que les chaines de conversion jouent un rôle **nécessaire et essentiel** dans tout apprentissage numérique. Il semble que l'existence de nombreuses chaines soit une condition plus favorable aux apprentissages que l'existence de chaines en faible quantité. Cependant à ce stade de nos recherches, et dans le souci de faire preuve de rigueur scientifique, nous n'avons pas encore d'éléments de preuves vraiment significatifs qui nous permettent de valider cette hypothèse.

IV - BIBLIOGRAPHIE

DELEDALLE G. (1978) Ecrit sur le signe de C.S.Peirce. *Ets Du Seuil* p121.p240

MULLER A. (2004) Approche sémiotique pour l'analyse a priori d'une tâche mathématique. *Raisons éducatives* p247-270

PROUST C. (2005) Le calcul sexagésimal en Mésopotamie .*ENS*. *http://www.math.ens.fr/culturemath/index.html*

O'CONNOR JJ et ROBERTSON EF. (2000) Egyptian numerals. *Saint Andrew University*. *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_numerals.html*

BLOCH I. (2008) Enseignement des mathématiques à des élèves "en difficulté" : quelques outils pour la formation, à partir de situations et d'une étude des signes mathématiques. *XXXV° colloque COPIRELEM Bombannes.*

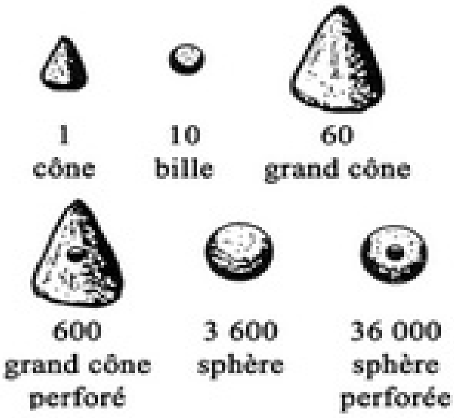
DEHAENE S. et COHEN L. (1994): La perception humaine et la performance, *Journal of Experimental Psychology* Vol 20 (5),

THUREAU-DANGIN F. (1932) Nombres concrets et nombres abstraits dans la numération babylonienne. *RA* 29, p. 116-119.

TIERCELIN Cl. (1993) CS.Peirce et le pragmatisme, *Paris, PUF*.

[26] Muller A. (2004) Approche sémiotique pour l'analyse a priori d'une tâche mathématique. *Raisons éducatives* p249

V - ANNEXE (1) LES CALCULI



LE LIVRE DU ROBOT PEUT-IL ÊTRE RÉELLEMENT ÉCRIT PAR LES ÉLÈVES DE CP ?

Penser l'articulation entre géométrie et maîtrise de la langue

Jean-François GRELIER
Retraité, ex-formateur à l'IUFM Midi-Pyrénées
jean-francois.grelier@wanadoo.fr

Résumé

Une critique était régulièrement faite par des maîtres-formateurs au « livre des robots ». Dans cette situation de CP d' « Apprentissages géométriques aux cycles 2 et 3 », les élèves apprennent à produire des robots avec des formes géométriques, à les décrire pour les faire reproduire, et enfin à produire individuellement leur « livre du robot ». Dans cet album une phrase répétitive – *la tête du robot est un rond rouge-* justifiait page après page la construction cumulative.

La critique principale était que dans la réalité des classes, c'était le maître qui proposait/imposait cette phrase répétitive, quelles que soient les intentions des descriptifs proposés. Et donc que cette activité était finalement très normative.

Pour sortir de cette impasse, il a fallu penser l'activité **aussi** du point de vue de la langue, notamment par la lecture des ouvrages cités en bibliographie, puis réécrire les séquences avec la volonté de croiser les apprentissages en géométrie et en maîtrise de la langue. Ainsi des modifications – qui seront présentées- en ont été déduites pour que le texte du « livre du robot » soit le résultat d'un vrai travail d'élève où la phrase se transforme progressivement d'un écrit intermédiaire de travail à un écrit définitif obéissant à des normes de communication.

Plus généralement quelques pistes de travail seront proposées pour enrichir explicitement les activités mathématiques d'un travail sur la langue, sans les alourdir, mais en les organisant différemment.

I - PRÉSENTATION DE LA SITUATION

Les robots sont de petits êtres composés de ronds, de carrés, de rectangles et de triangles, les formes du plan qu'on apprend à identifier globalement au cycle I, et qu'on appelle parfois les blocs logiques. Les robots ont une structure imposée : tête, corps (ou tronc), bras, mains, jambes et pieds. Au CP, par analogie avec l'image du corps, les élèves apprennent à produire des robots. Divers procédés de fabrication sont utilisés : collage de gommettes, traçage à l'aide de pochoirs, ou dessins à main levée.

Voici des exemples de robots réalisés par traçage sur pochoirs.

Puis les élèves apprennent à les décrire pour les faire reproduire par un pair, et enfin à produire individuellement leur « livre du robot ». Dans cet album une phrase répétitive justifie page après page la construction cumulative.

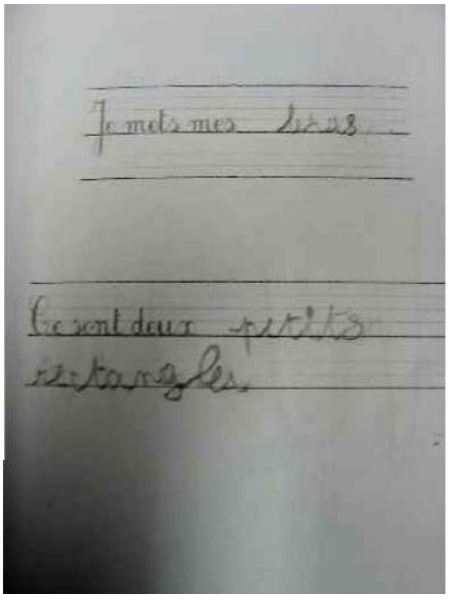
Cette phrase pouvait être :

- la tête du robot est un rond rouge
- pour la tête, je prends (*ou je trace, ou je colle*) un rond rouge
- le robot a une tête ronde et rouge
- etc.

La critique principale était que dans la réalité des classes, c'était le maître qui proposait/imposait cette phrase répétitive, quelles que soient les intentions des descriptifs proposés. Et donc que cette activité était finalement très normative.

Et ceci d'autant plus que les phrases se modifiaient pour obéir aux règles de grammaire. Ainsi dans la phrase répétitive, « *la tête* » devient « *le corps* », puis « *les bras* ». Comment (comprenez « par quel miracle ? ») les accords masculin/féminin et singulier/pluriel étaient-ils trouvés et réussis par les élèves ?

Voici en exemple une double page du « livre d'un robot » :



II - QUELLE PROBLÉMATIQUE ?

Un constat :

C'est effectivement une activité très normative du point de vue de la langue. C'est le maître qui propose/impose la phrase répétitive. Cela-dit, produire cet album, même de façon normative, n'est pas une activité sans intérêt, ne serait-ce que parce que c'est un projet global qui se finalise par un objet réalisé par l'élève, et qui reste sa propriété.

Une question : Pourquoi cet écart entre le prévu et le réalisé ?

Il y a toujours un écart entre le projet d'un auteur de séquences et le travail réellement mis en œuvre sur ces séquences par les enseignants. Ceci parce que la réception par les enseignants dépend de leur culture et/ou de leur subjectivité. Et parce qu'une fois introduite dans la culture de l'école, les situations vivent leur vie, La très mauvaise réponse à cette question serait d'incriminer les enseignants qui n'auraient pas bien lu les descriptifs.

Une réponse en forme de piste de travail :

La vraie réponse est que cette activité est une activité de maîtrise de la langue dans un contexte géométrique, et pas une activité seulement géométrique. Et donc qu'il faut la penser et la construire aussi comme une activité de maîtrise de la langue. Et cela appartient à un chantier bien plus vaste, et bien plus complexe qui est celui de l'articulation des disciplines, avec comme objectif à moyen terme de construire une organisation croisée des différents apprentissages.

Pour espérer proposer des pistes de solution, il faut réfléchir dans deux directions : réfléchir sur les rapports de la géométrie et de la langue, et ensuite réfléchir sur l'interdisciplinarité.

III - RÉFLÉCHIR SUR LES RAPPORTS DE LA GÉOMÉTRIE ET DE LA LANGUE

1 Langue géométrique et langue naturelle en géométrie

Le travail sur la langue naturelle en géométrie est à double sens. Maîtriser cette langue naturelle est nécessaire pour construire les compétences géométriques, dans le « décrire ». Mais réciproquement la géométrie est un lieu qui permet de produire des textes fonctionnels en français, où la pertinence disciplinaire s'évalue de façon pragmatique, si le résultat escompté se réalise. C'est le cas notamment dans les activités de figures téléphonées, où la pertinence des messages oraux, puis écrits s'évalue en comparant le modèle et l'image, les figures de départ et d'arrivée.

Il faut donc distinguer plusieurs niveaux de langue quand on travaille en géométrie.

La géométrie est une langue qui appréhende l'espace avec un code spécifique, et la géométrie favorise un travail de maîtrise de la langue naturelle commun à toutes les disciplines.

Du point de vue de la spatialité, les robots sont déjà un texte écrit en langue géométrique où les formes sont le lexique, et la façon de les agencer la syntaxe. Et l'activité des robots est aussi un travail implicite de cette langue mathématique particulière qu'est la géométrie. Les élèves vont apprendre à utiliser ce langage en produisant des robots, mais aussi en dessinant à main levée avec les formes géométriques divers objets, des paysages, des maisons, des tracteurs, etc.

L'apprentissage du vocabulaire géométrique appartient à ce domaine. C'est un travail sur la langue de type disciplinaire, un moment de la construction du savoir, celui où on pose l'étiquette-mot sur le concept une fois qu'il a été identifié.

Dans la suite « reproduire, décrire, représenter, construire » qui est le programme d'action de la géométrie depuis les années 1980, le « décrire » et le « représenter » sont les phases spécifiques de travail sur la langue. Le « décrire » est la phase orale de découverte et de formulation, et le « représenter » est la phase de passage à l'écrit. La figure est l'écrit de la langue géométrique, que l'on parle de compétences de tracé comme dans les programmes 2008 de l'école primaire ou de représentations comme dans les programmes antérieurs. Et la construction des savoirs en géométrie consistera à transformer progressivement des tracés fonctionnels en des tracés experts où les propriétés seront explicitées.

2 Deux croisements didactiques dans l'apprentissage de la langue et de la géométrie

2.1 La figure langue géométrique

L'apprentissage du tracé en géométrie s'apparente à l'apprentissage de l'écriture. Bien sûr parce que les deux s'appuient sur un geste psychomoteur qui est en soi un apprentissage. Mais aussi parce qu'il s'agit de deux codes qui enferment, expriment et récapitulent du sens.

L'apprentissage, c'est oser faire avant de savoir faire, pour progresser jusqu'au moment où on sait faire. Il faut donc trouver des instances intermédiaires où les élèves peuvent se tromper et essayer pour apprendre. Nous avons la chance de pouvoir bénéficier en géométrie du travail effectué en maîtrise de la langue. En maîtrise de la langue, cette instance d'apprentissage est l'écrit intermédiaire qui s'évalue par son efficience pragmatique, et qui va évoluer progressivement vers l'écrit définitif qui obéit aux normes sociales de communication. Par analogie, en géométrie la modalité intermédiaire est le dessin à main levée, et la modalité définitive est le tracé à l'aide des instruments.

Maîtrise de la langue	Géométrie
Écrits intermédiaires Écrits de travail, justifiés et validés par leur efficience	Dessin à main levée Figure de travail validée par son efficience
Écrits définitifs Écrits de communication: ils doivent obéir aux normes de grammaire	Construction Figure de communication: elle doit obéir aux règles expertes de construction

L'attention portée aux écrits intermédiaires comme espace d'apprentissage de la langue ouvre aussi des possibilités sur les modalités d'apprentissage dans les autres disciplines, ici en géométrie.

Une piste est par exemple la difficulté à gérer les mises en commun après une situation de recherche dans des travaux de groupe. Pour éviter une succession de comptes-rendus oraux, inaudibles et inefficaces, une possibilité est de faire produire des affiches, de les disposer autour de la classe, puis de demander aux élèves munis d'un bloc-notes d'en faire le tour, et de prendre des notes pour préparer la mise en commun.

Cette modalité de travail a un double intérêt. D'abord pragmatiquement elle facilite la mise en commun, et permet d'arriver plus vite au bilan. Mais elle met aussi en jeu des compétences fondamentales de traitement de l'information. Réaliser l'affiche demande de synthétiser son travail, et de formuler le plus simplement possible ses résultats. En prenant connaissance des affiches, chaque élève confronte la réponse proposée à sa propre solution, et quand quelque chose fait sens pour lui, il doit trouver un codage, « un écrit pour soi », pour alimenter la discussion lors du bilan. Et lors de ce bilan, il devra décoder son codage, et en vérifier la pertinence.

2.2 Exemple d'apprentissage du tracé géométrique

Le cadre choisi pour illustrer ce travail est une activité extraite de la progression sur les robots. Il s'agit de faire produire aux élèves les formes nécessaires pour représenter le robot choisi.

Ils ont à disposition du papier de différentes couleurs, de manière à découper les vignettes dans la couleur de l'original.

Ces vignettes seront produites selon plusieurs modalités, dans une progression :

par simple découpage

par découpage après traçage à main levée

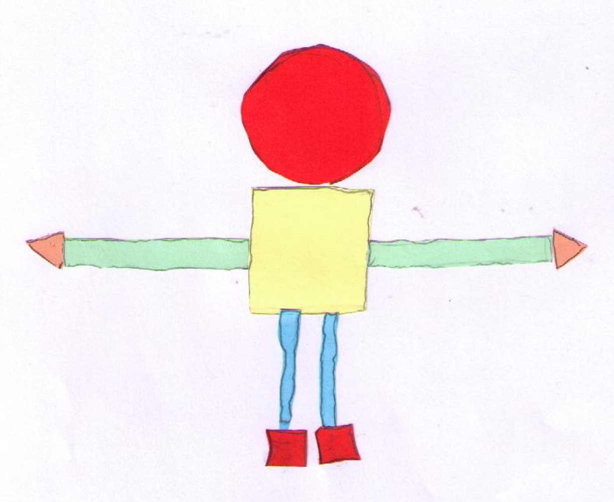
par découpage après traçage à la règle

Modèle de robot à représenter

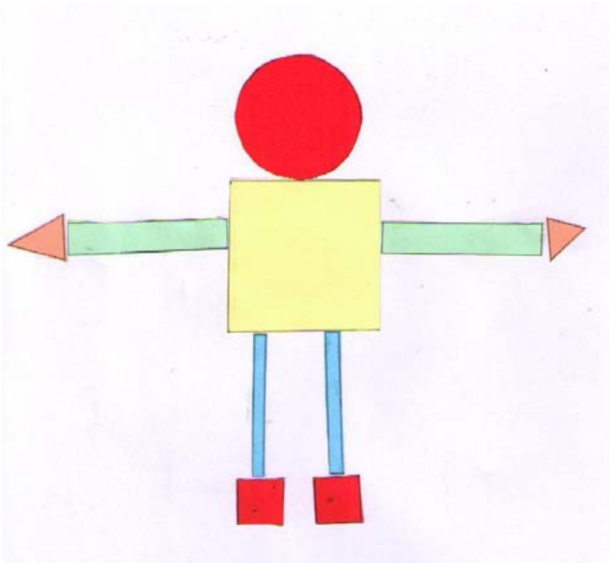
Voici trois robots construits avec les vignettes produites suivant les trois procédés de fabrication.

Les élèves peuvent évaluer les progrès et associer chaque procédé à l'effet attendu.

Vignettes produite par simple découpage



Vignettes produites par traçage à main levée



Vignettes produites par traçage avec les instruments géométriques

Ainsi on voit évoluer progressivement le dessin à main levée vers une figure de plus en plus mathématique.

2.3 Le passage à l'écrit : deux codes à apprendre

En maîtrise de la langue, lire est le décodage de ce que l'on a appris à dire, et écrire est le codage de ce que l'on a appris à dire. Lire et écrire supposent donc que l'on apprenne un code, une combinatoire de symboles, lettres et mots.

La géométrie comme la langue obéissent à des codes prédéfinis, résultats de siècles de connaissances accumulées, appartenant à « l'univers de référence » dans lequel les élèves doivent apprendre à travailler. Et apprendre un code n'est pas une science expérimentale où le juste et le faux se constatent et se différencient par la pratique.

Il n'est donc pas étonnant que les réponses didactiques pour ces apprentissages se ressemblent beaucoup. Ainsi en géométrie nous utilisons beaucoup le jeu du portrait pour identifier et structurer le langage géométrique. En maîtrise de la langue il existe des jeux de « qui est-ce ? » qui fonctionnent sur le même mode, par exemple quand les élèves doivent reconnaître un prénom parmi une collection d'étiquettes de prénoms.

Ci-dessous nous illustrons l'analogie des situations mises en place dans l'apprentissage de ces deux codes :

Maîtrise de la langue	Maîtrise de l'espace
Copie d'un texte	Reproduction d'un montage
Copie différée	Jeu de mémorisation
Copie autonome	Représentation
Décrire à l'oral	Décrire pour faire reproduire
Décrire à l'écrit (dictée à l'adulte, au pair ou auto-dictée)	Programme de construction
Ecrit intermédiaire de travail évalué par son efficience pragmatique	Figure à main levée
Ecrit définitif obéissant à des normes de communication	Tracé géométrique avec les instruments

IV - RÉFLÉCHIR SUR L'INTERDISCIPLINARITÉ

1 Comprendre, c'est « prendre ensemble »

La didactique à ses débuts pouvait apparaître comme une injonction à mettre du sens dans les activités des élèves. L'intention était louable, mais faute de modalités concrètes, elle restait un slogan stérile. Car rien n'est plus fuyant que le sens.

Si on reprend l'étymologie du mot, on trouve les racines **Cum (avec) + prehendere (saisir).**

De ce point de vue, « comprendre » serait relier des connaissances éparses pour en faire une connaissance culturelle.

Voici ce qu'affirment les programmes 2008, page 10 du BO spécial du 19 juin 2008: « *L'école primaire doit avoir des exigences élevées qui mettent en œuvre à la fois mémoire et faculté d'invention, raisonnement et imagination, attention et apprentissage de l'autonomie, respect des règles et esprit d'initiative.* »

Ces couples de compétences apparemment antinomiques doivent pourtant s'articuler et se coordonner, pour s'enrichir mutuellement. Prenons l'exemple mathématique de la distinction entre les savoirs déclaratifs et les savoirs procéduraux. Des savoirs déclaratifs sont des pré-requis pour mettre en place et rendre efficaces des procédures, et réciproquement l'application régulière des savoirs déclaratifs dans des procédures est la condition pour qu'ils soient actifs, et … mémorisés. D'ailleurs un savoir déclaratif est le plus souvent une procédure reconnue efficace que l'on fait l'effort de mémoriser. Et pour qu'un savoir procédural soit actif, il a fallu que la procédure soit mémorisée …

Il en va de même pour induction et déduction qui sont les deux versants du même savoir que l'on parcourt d'analyses en synthèses. Un enseignement qui serait purement constructiviste mettrait les élèves dans l'injonction de tout redécouvrir, ce qui nierait l'apprentissage social, que ce soit par imprégnation ou par étayage. Et symétriquement on connaît les ravages d'un enseignement purement déductif qui ferait fi des particularités des élèves en leur imposant un moule unique et abstrait. Les deux approches sont complémentaires, et ce dans toutes les disciplines.

2 Comment relier les connaissances construites séparément ?

Ce n'est pas être très original que de constater que l'enseignement est fractionné par disciplines. Et c'est vrai aussi au primaire, même si l'altérité des disciplines est modérée parce que c'est le même enseignant qui les enseigne toutes. Mais en sens contraire les auteurs de manuels et les didacticiens sont formés dans une discipline, et ont du mal à intégrer leur discipline dans la globalité des savoirs enseignés au primaire.

De plus cette question recoupe plusieurs problématiques qu'il serait bien prétentieux de vouloir traiter ici. C'est la question du réinvestissement et du transfert, laquelle est liée à la capacité des élèves à transférer le savoir scolaire en savoir social, elle-même liée à la question de l'apprentissage de l'autonomie.

3 Interdisciplinarité et/ou transversalité.

Plutôt que de prétendre traiter la redoutable question de la construction des compétences transversales, nous nous contenterons donc de travailler un objectif plus raisonnable dans le premier degré, celui du croisement des apprentissages disciplinaires.

Cette co-construction devrait permettre de travailler moins, mais mieux, en intégrant des objectifs pluridisciplinaires dans les situations de classe. Ainsi la même situation pourrait être travaillée un jour du point de vue de la spatialité, un autre jour du point de vue de la maîtrise de la langue, et un troisième jour du point de vue de la géométrie.

V - RECONSTRUCTION DE LA PROGRESSION DANS LA SITUATION DES ROBOTS

1 Progression d'origine

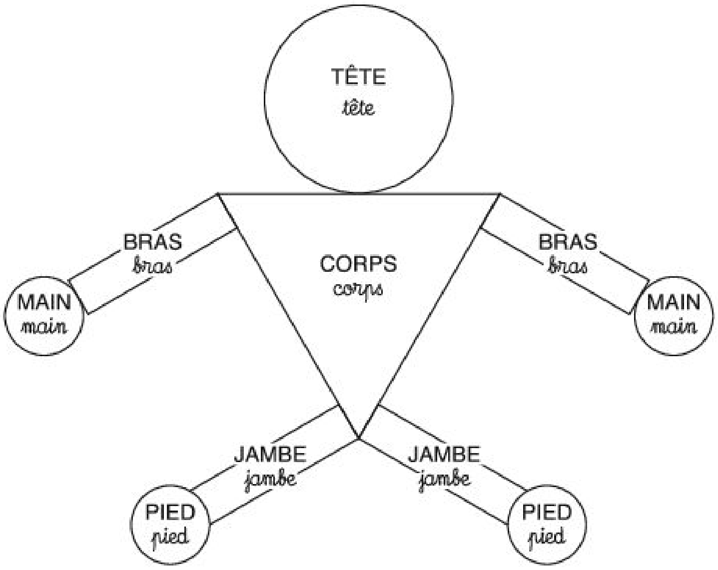
- Découverte de la situation (CP). Jeu du portrait.
- Production et reproduction de robot (CP). Choisir un robot parmi des modèles et commander les pièces nécessaires pour le reproduire. Le dessiner pour l'emmener à la maison.
- Reproduction de robots à l'oral (CP). Nono le petit robot s'est perdu. Vous allez réaliser le portrait-robot nécessaire pour le retrouver.
- Reproduction de robot à l'écrit (CP). Inventer un robot puis le décrire par des phrases. Les mots peuvent être écrits ou découpés et collés.
- Le livre du robot (CP). Chaque élève fait un livre qui décrit son robot élément par élément.

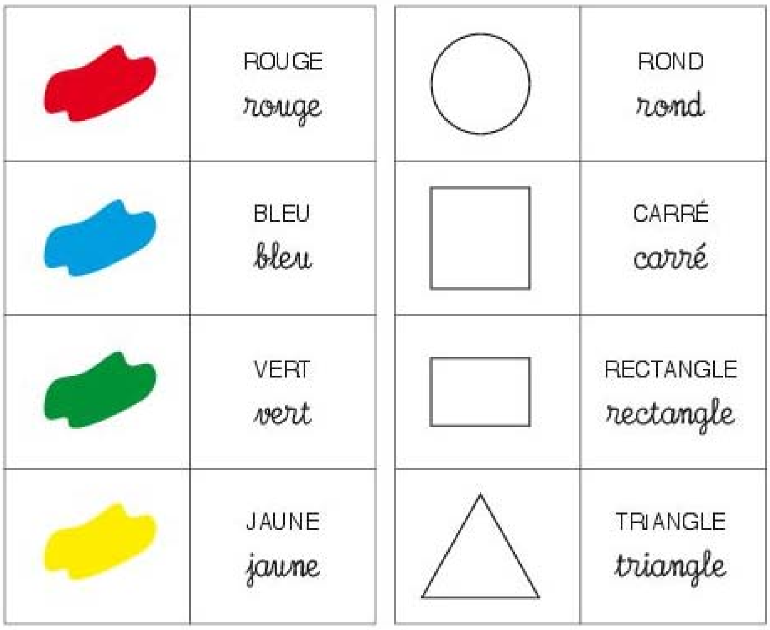
2 La réorganisation

La mise en place de la situation est inchangée.

La découverte se fait par un jeu du portrait classique. Puis les élèves apprennent à produire des robots, puis à les décrire pour les faire reproduire par un pair, dans une situation classique de figures téléphonées.

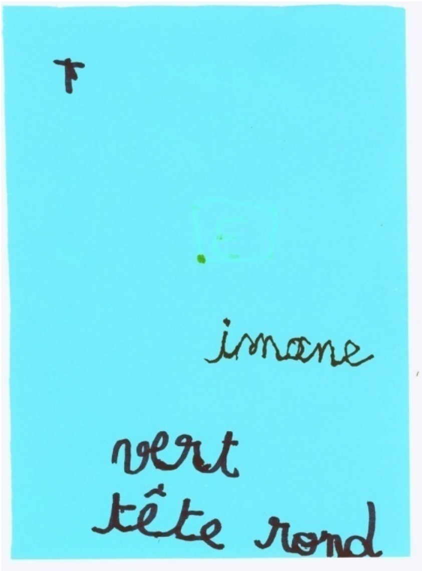
C'est pour le passage à l'écrit qu'un nouveau dispositif est mis en place. Les élèves ont à disposition les imagiers suivants :

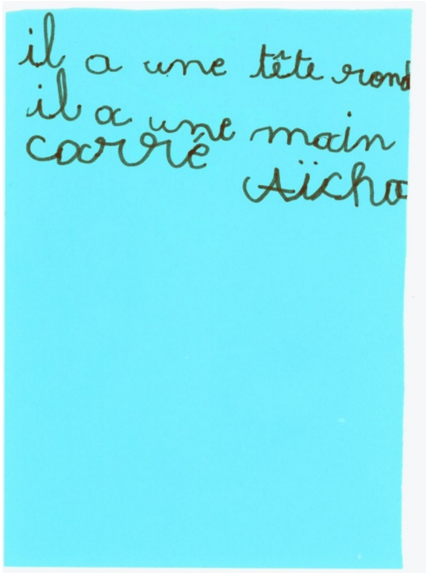




Un jeu de portrait écrit est alors mis en place. Huit robots sont affichés au tableau. Chaque élève doit choisir un robot, puis repérer un élément qui le caractérise. Il écrit le numéro du robot sur sa feuille A6, la retourne, et doit écrire à l'aide des imagiers un message caractérisant ce robot. Voici deux exemples de ces messages écrits.

Ces messages sont des écrits intermédiaires classiques.





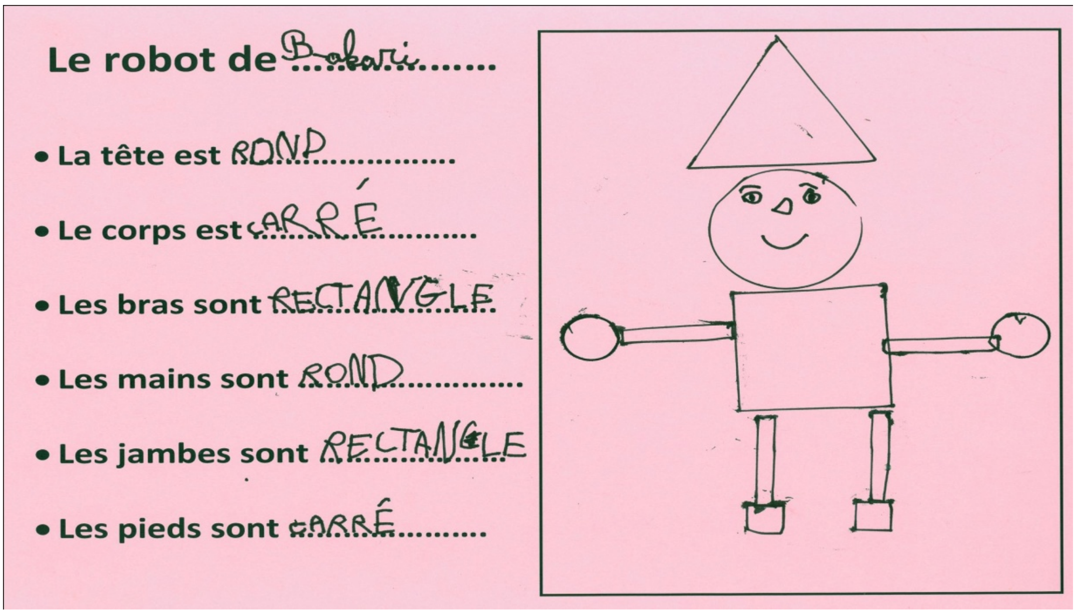
Quand les messages sont écrits, ils sont photocopiés et redistribués aux élèves. S'ils sont vraiment discriminants, les autres élèves peuvent reconnaître le robot choisi en décodant ce que le premier élève a codé. Le rôle de l'écrit est ainsi valorisé, et sa puissance éprouvée.

L'enjeu de la situation est de transformer progressivement ces écrits intermédiaires pragmatiques en écrits définitifs, par exemple pour le livre du robot.

L'affiche-robot

L'activité suivante consiste à dessiner un robot, puis à le décrire par six phrases que les élèves vont écrire de façon de plus en plus autonome.

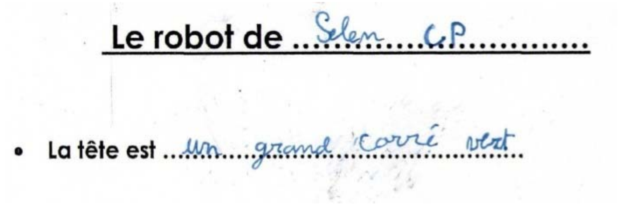
Dans un premier temps ils peuvent n'avoir à écrire que le nom de la forme, comme ci-dessous :

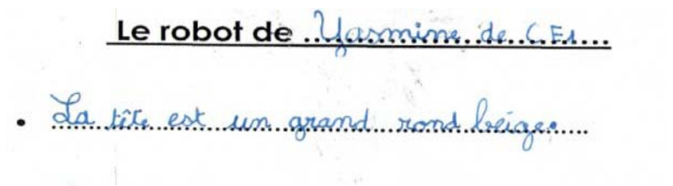


Puis le travail peut évoluer en jouant sur plusieurs variables didactiques :

- nombre de mots pré-écrits et nombre de mots à écrire
- modalités d'écriture : étiquettes à choisir et à coller, dictée à l'adulte, dictée à un pair ou autodictée.

Voici des exemples « d'affiches-robots ». Seule la première phrase en a été extraite.





Dessin et recette réécrite de fabrication

Les élèves sont alors en situation de décrire au fur et à mesure ce qu'ils produisent. C'est le cas dans la production ci-dessous. Là le maître a corrigé les erreurs, de manière à rendre un écrit définitif sans erreur, tout en laissant la bride sur le cou aux élèves dans la production.

Voici un exemple de robot décrit.

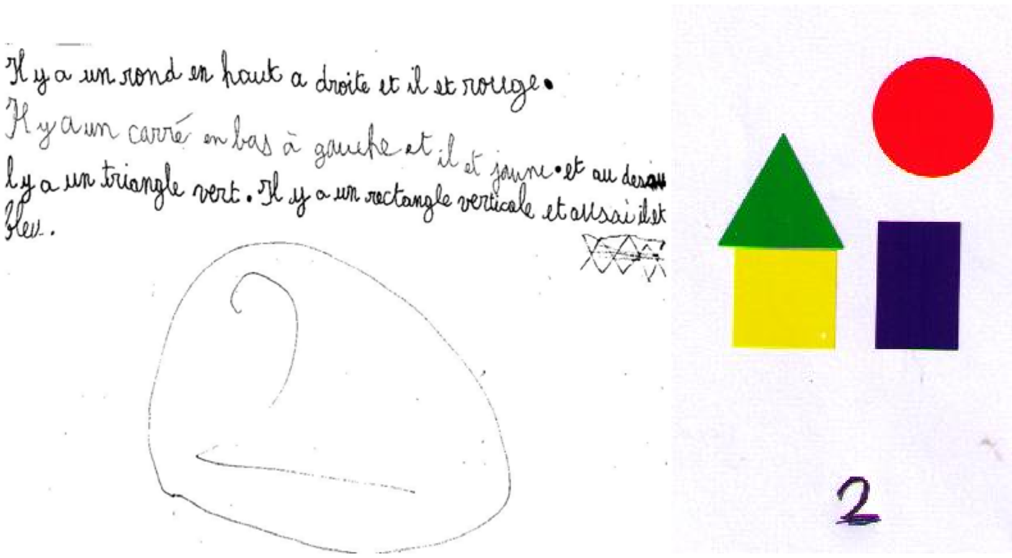
Les objets du monde des robots

L'étape suivante consiste à travailler sur des objets quelconques, toujours produits avec les quatre formes. Dans ce cas, le « décrire pour faire reproduire » des figures téléphonées change radicalement d'enjeu, de difficulté et d'objectif. Là, l'élève récepteur ignore l'objet qu'il est en train de produire. Et cela oblige l'élève émetteur à préciser le positionnement de chaque forme qu'il dicte.

Ainsi est-il nécessaire d'employer le vocabulaire suivant :

- gauche-droite
- haut-bas
- dessus-dessous
- dedans-dehors
- pointe en …

Voici un exemple d'objet complexe, ainsi que sa description :



Un des objectifs peut être là de faire accéder les élèves à une procédure experte pour la description qui pourrait être :

1 Décider d'un ordre de traçage.

2 Tracer la première forme par un repérage absolu par rapport à la page.

3 Tracer la suivante par un repérage relatif par rapport à la première forme.

3 Continuer en traçant les formes une à une dans un repérage relatif par rapport aux formes déjà tracées.

VI - CONCLUSION

Cette communication s'attaque à un vaste problème dont il n'est évidemment pas possible de faire le tour ici. Il nous semble toutefois raisonnable de penser que croiser les préoccupations disciplinaires permet de mieux travailler en travaillant moins, pour prendre le contre-pied d'un slogan malheureux.

Voici comment on pourrait résumer ces croisements, en ce qui concerne seulement deux disciplines, la géométrie et la maîtrise de la langue :

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Maîtrise de la langue orale</th><th colspan="2">Maîtrise de la langue écrite</th><th rowspan="2">Spatialité</th><th rowspan="2">Géométrie</th></tr>
<tr><th>Ecrits intermédiaires</th><th>Ecrits définitifs</th></tr>
<tr><td>Jeu du portrait</td><td>Sélection pragmatique</td><td>Message écrit discriminant pragmatique</td><td></td><td>Identification du vocabulaire spécifique</td><td>Identification du vocabulaire spécifique</td></tr>
<tr><td>Reproduction</td><td>Jeu de la marchande oral</td><td>Jeu de la marchande écrit</td><td></td><td>Agencement implicite</td><td rowspan="2">Passage de la reconnaissance globale à l'identification des éléments</td></tr>
<tr><td>Description Figures téléphonées</td><td>Sélection pragmatique</td><td>Ecrit intermédiaire discriminant
Jeu de la marchande écrit</td><td>Recette de fabrication
Livre-album</td><td>Agencement explicite</td></tr>
<tr><td>Représentation</td><td></td><td>Lecture-compréhension d'un message pragmatique</td><td>Lecture-compréhension d'une recette de fabrication</td><td>Maîtrise de l'espace-feuille</td><td>Structuration du tracé des formes</td></tr>
</table>

VII - BIBLIOGRAPHIE

La maîtrise de la langue à l'école (1992). CNDP.

FABRE-COLS C. (2002). *Les brouillons d'écriture ou l'entrée dans l'écriture.* Céditel.

GARCIA-DEBANC C. & PLANE S. (2004). *Comment enseigner l'oral à l'école primaire ?* Hatier.

GRELIER J.F. (2004). *Apprentissages géométriques aux cycles 2 et 3.* Scéren.

Documents d'accompagnement (2005) *Espace et géométrie au cycle 2*. Scéren.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2005). Lire et écrire des énoncés de problème. *Bulletin de l'APMEP*, n°456

SCHNEEBERGER P. & VERIN A. (2009). *Développer des pratiques d'oral et d'écrit en sciences.* INRP.

GRELIER J.F. (2011). *Apprentissages géométriques, spatialité et maîtrise de la langue au cycle 2.* Scéren.

UNE ANNÉE DE MASTÉRISATION : ET APRÈS ?

Catherine HOUDEMENT
MCF Didactique des Mathématiques
LDAR, Université Paris Diderot et Université de Rouen, IUFM
catherine.houdement@univ-rouen.fr

Résumé

Le texte propose une mise en perspective de cette première année de mastérisation de la formation des enseignants. Après un bilan local (IUFM de Haute-Normandie) des années passées, il invite à repenser les contenus de formations sous les contraintes 2010-11, notamment l'incitation à affiner la réflexion sur les contenus "hors sol" et leur communication à des étudiants "zappeurs".

Cette revue rapide et subjective (la nostalgie de ce qui n'est plus ?) vise à montrer que tout n'était pas rose dans la façon dont était conçue et fonctionnait la formation des professeurs des écoles avant la mastérisation. Elle essaie de montrer l'assujettissement que nous avons subi cette année et relativise, sans les nier, les difficultés scientifiques de l'entrée dans la Mastérisation. Elle lance quelques défis pour reconstruire des enseignements de mathématiques et de didactique professionnelles.

I - LA BELLE AVENTURE (1999-2004)

1 Le concours

L'existence dans le concours au professorat des écoles (épreuves académiques, puis regroupées par académies) de contenus demandant une réflexion professionnelle légitimait dans la formation des perspectives didactiques et professionnelles. A ces origines (1991-2002) l'épreuve de mathématiques, uniquement écrite, comportait trois parties: la première (2/5 de la note) testant des connaissances mathématiques, la seconde (1/5 de la note) demandant une analyse de travaux d'élèves, la troisième (2/5 de la note), affirmée comme volet professionnel, amenait à analyser des outils d'enseignant ou des extraits de séance. La dimension professionnelle du concours fut particulièrement développée dans une note de service (n°94-271 du 16-11-1994) adressée aux recteurs, destinée à contrer des dérives, qui marqua durablement les concepteurs de sujets de concours. En voici quelques extraits concernant la première partie.

"*La dimension professionnelle s'y exprime* par le choix de contenus et le type de compétences professionnelles évaluées chez les candidats à propos des contenus[1].

Il est rappelé à nouveau que l'épreuve ne vise pas le contrôle d'un savoir spécialisé, mais la capacité du candidat à utiliser des connaissances pour traiter une situation dans le cadre de l'école primaire. (...)

Les jurys auront donc à éviter les sujets qui donnent trop d'importance au contrôle de pré-requis ciblés et qui ne sont pas accessibles à des non spécialistes de la discipline ainsi que les sujets qui, à l'opposé, en resteraient au niveau des connaissances de l'école primaire.

Il est important de préciser que ces textes étaient portés par les concepteurs de sujets, choisis parmi les formateurs (en IUFM) des candidats au concours de professeurs. La culture de ces formateurs en mathématiques appliquées et interrogées dans le cadre de l'enseignement du premier degré leur donnait

[1] Ce qui figure en caractères droits dans la citation en italique était souligné dans la note ministérielle.

une interprétation ad hoc de ces textes. La COPIRELEM par la diffusion d'annales mathématiques avec corrigés (et parfois analyse critique des sujets) contribua à véhiculer cette culture et forgea ainsi, au fil des années, un curriculum praxique : des types d'exercices (Peltier 1995) qui précisent l'attendu du concours et définissent *in fine* des invariants de formation.

2 La formation professionnelle (année de PE2) à l'IUFM de Haute Normandie

Après une expérience de huit années d'IUFM, mus par la nécessité de construire une formation plus professionnelle, des équipes pluridisciplinaires de formateurs de l'IUFM de Haute Normandie (comme dans beaucoup d'autres IUFM) se sont constituées et instituées en conceptrices du plan de formation pour une partie de la cohorte de PE2. En particulier nous[2] avons été responsables de deux groupes de PE2 (50 étudiants) quant à l'emploi du temps, le choix et la durée des périodes que nous avons consacrées chacune à un cycle : chaque période comportait des cours disciplinaires dont la répartition entre disciplines et durée étaient liées à la spécificité du cycle (par exemple peu de mathématiques en cycle 1, plus d'art et d'EPS et de langage; mais un temps plus long de mathématiques au cycle 3), quelques cours interdisciplinaires (par exemple langage et sciences au cycle 2) un stage en tutelle avec consignes spécifiques graduées sur les trois cycles préparé en amont et révisé en aval. La période se terminait par un stage en responsabilité dans le cycle travaillé. L'évaluation était aussi pensée par cycle avec un choix possible des stagiaires dans des regroupements de disciplines, de telle façon que les travaux ne s'accumulent pas, mais testent des compétences a priori différentes. Sur l'année se répartissaient également quelques cours de méthodologie professionnelle (faire passer la consigne, gérer les outils du maître, faire une mise en commun, corriger.....) et des ateliers d'analyse de pratiques (pratiques vécues par les stagiaires), soit analyse didactique disciplinaire (en ce qui nous concerne dans le cadre de la didactique des mathématiques), soit analyse dans le cadre du GEASE (Groupe d'Étude et d'Analyse de Situations Professionnelles) pour lequel plusieurs membres de l'équipe étaient formés. Le mémoire trouvait sa place dans cette construction avec un moment fort, une soutenance blanche en séminaire d'une demi-journée regroupant huit étudiants et au moins deux formateurs de disciplines différentes.

Cette modalité de formation fortement ancrée dans la dynamique de l'équipe nous a semblé porter ses fruits : les retours des stagiaires en fin d'année étaient positifs, ils se sentaient prêts, cela semblait se sentir aussi en partie dans leurs classes l'année suivante, les formateurs avaient l'impression d'avoir rempli leur devoir.

II - UNE DÉTÉRIORATON PROGRESSIVE (2005-2010)

1 Le concours

Progressivement l'appréciation de la dimension professionnelle s'est amenuisé, non pas parce que les textes avaient changé, mais parce que l'interprétation d'une circulaire (n° 99-196 du 8-12-1999) faite par les recteurs a abouti, dans un grand nombre d'académies, à l'exclusion de tous les formateurs IUFM de la composition des sujets et des jurys de correction. Ceux-ci ont été alors composés de professeurs de mathématiques de collèges et de personnels du premier degré, qui, pour beaucoup d'entre eux, connaissaient mal les contenus de formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

La qualité professionnelle des sujets subit une nouvelle dégradation suite au texte de 2005 (BO n°21 du 26-5-2005, voir aussi COPIRELEM 2006) et à la note 2005-083 du 16-5-2005 qui précise les attendus, avec une formulation qui insiste surtout sur certaines qualités mathématiques du candidat.

---

[2] En particulier M.L.Peltier et C.Houdement, avec des formateurs d'autres disciplines et un PEMF par cycle.

"L'épreuve permet de mettre en évidence chez le candidat, d'une part la maîtrise des savoirs disciplinaires nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et la qualité du raisonnement logique, ainsi que l'aptitude à utiliser des outils mathématiques, à interpréter des résultats dans les domaines numérique et géométrique et à formuler avec rigueur sa pensée par différents modes d'expression et de représentation, d'autre part la connaissance des objectifs, des programmes et des principaux documents d'accompagnement de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, ainsi qu'une bonne aptitude à les mettre en relation avec la pratique de la classe."

Cette note donne pour le concours une liste de contenus mathématiques, dont la lecture peut rester très naïve, dans la mesure où ils ne sont pas reliés à des questions professionnelles d'enseignement mathématique dans le premier degré. Quant aux sujets, ils sont alors élaborés nationalement (cinq sujets suite à des regroupements académiques) par une commission mixte, mais avec une influence faible des enseignants impliqués dans la formation à (ou la recherche sur) l'enseignement des mathématiques dans le premier degré.

L'écrit mathématique du concours 2011 (en septembre 2010) est inséré dans une épreuve de sciences. En voici quelques extraits à mettre en parallèle avec les précédents (COPIRELEM 2011)

Cette épreuve écrite est complétée pour les mathématiques par un oral (juin 2011) sensée tester des compétences plus professionnelles. Il nous est difficile d'évaluer l'efficacité d'un tel dispositif pour repérer les étudiants les moins inaptes à conduire une classe en mathématiques. De plus, le manque de cadrage, ne serait-ce que sur les conditions matérielles (utilisation d'un tableau, type de documents fournis pour la préparation..) de soutenance d'une leçon[3], nous laisse perplexe.

2 La formation des stagiaires PE2

A l'échelon local de l'IUFM de Haute-Normandie, des simplifications administratives et des soucis d'équité entre stagiaires amènent à uniformiser les plans de formation : l'équipe citée ci dessus perd une partie de ses responsabilités, notamment la liberté de répartir les disciplines selon le cycle étudié sur la période, de penser leur imbrication plutôt que leur juxtaposition, de mettre en place des évaluations adaptées au projet de formation. Simultanément la cohorte de stagiaires PE2 possède moins de repères didactiques, dans la mesure où le concours s'est relâché sur ce point. Au fil des années les choses s'aggravent : l'IUFM de Haute Normandie fait le choix de supprimer le mémoire en 2008, certes contre la volonté des formateurs, mais pour récupérer des heures d'accompagnement des stagiaires en stage filé un jour par semaine dans une classe toute l'année. Cette nouvelle modalité de stage permet certes aux stagiaires de rentrer dans le métier et de finalement "gérer" la classe, mais leur donne simultanément une image du métier bien fausse de leur responsabilité dans les apprentissages des élèves : activités courtes, jour sans lendemain, séances sans mémoire, bref une parenthèse dans la semaine de l'élève. Ce qu'ils constatent d'ailleurs presque tous (et avec surprise) quand ils effectuent leurs deux autres stages en responsabilité de deux ou trois semaines continues. Globalement la recomposition de connaissances professionnelles est laissée à la charge du stagiaire.

Il est temps de repenser la formation des futurs professeurs des écoles.

[3] Qui a finalement conduit à une grande variété de conditions selon les académies.

III - UN PETIT ESPOIR"THÉORIQUE"...VITE DÉÇU : LA MASTÉRISATION ET CIE

1 L'espoir

Il est certain que les conditions matérielles (notamment suppression d'un salaire pour les étudiants ayant eu le concours) qui ont accompagné la mastérisation marquent une régression sociale.

Mais nous ne regarderons pas la transformation de la formation de ce point de vue là.

Dans un premier temps, cette transformation a représenté une façon de revisiter la formation dont nous avons montré les limites, et quelque part la saturation du modèle initié dans les années 1990. L'installation de l'IUFM comme composante universitaire devait permettre aux domaines nécessaires à l'enseignement de trouver leur place dans la formation, dans la mesure où ils outillent l'étudiant à devenir maitre, c'est-à-dire, enseigner tel ou tel savoir aux élèves. La didactique des mathématiques trouvait donc là une légitimation de sa présence, parmi d'autres didactiques. Le concours pouvait ne plus être la seule finalité de la formation, perspective d'autant plus intéressante que sa forme actuelle et ses modes de passation le rendaient peu adapté au repérage de compétences pour enseigner. La reconnaissance de l'IUFM comme école professionnelle des enseignants célébrait l'expertise de ses enseignants, ex-formateurs. L'élaboration d'une maquette de master pour professeurs des écoles promettait la reconstruction collective, par les enseignants d'IUFM, d'une formation polyvalente où les connaissances disciplinaire et didactiques seraient recomposées.

2 La déception

Le bilan d'une première année est très différent.

Tout d'abord, l'environnement des IUFM s'est aussi modifié : les textes des nouveaux programmes du primaire 2008 sont courts, leur absence d'explicitation est prétexte à toutes sortes d'interprétations, risquant d'annihiler des prémices de transformation positive des pratiques initialisées par les programmes 2002 et ne pointant pas certaines dérives de ces mêmes programmes. L'accompagnement institutionnel relève presque de l'injonction paradoxale, célébrant la liberté (l'ignorance ?) pédagogique et réduisant la résolution de problèmes à des exercices d'application. Les étudiants se trouvent face à une définition floue des contenus d'enseignement.

Concernant les institutions, l'IUFM est passée d'école professionnelle à composante de l'université ; certains affirmaient même qu'il avait disparu. A ce titre, il est assujetti, sans exception, à toutes les contraintes qui pèsent sur les masters, alors que le nombre d'étudiants qu'il apporte à l'université devrait lui permettre de poser des exigences. Il est passé, d'une formation avec validation (certes à adapter) à une liste de cours juxtaposés soumis à examen : les examens se concentrent en fin de semestre, sans que ce découpage annuel ne soit adapté ni au temps scolaire, temps des stages, ni à celui du concours. L'alternance stage-formation des IUFM a laissé la place à la consommation de cours (l'étudiant étant présent ou non) pour "avoir" ses examens. Les étudiants "captifs" avant la mastérisation (par obligation de présence) sont devenus "zappeurs", aussi parce qu'ils doivent pour beaucoup travailler pour financer leurs études.

Les droits à responsabilité usuels dans les universités[4] (pilotage d'un master, direction d'un mémoire uniquement par un enseignant chercheur), les différents niveaux de cours (CM, TD...) ont créé des clivages entre les catégories différentes d'enseignants (PE, PRAG-PLC, MCF, PU) alors que cette variété avait fait la richesse des IUFM.

Concernant les étudiants, l'année fut très difficile notamment pour ceux qui durent en M2 cumuler la préparation à l'oral et du mémoire : temps trop court, étudiants déboussolés, enseignants désabusés...

[4] auxquels les Directeurs d'IUFM n'ont pas osé déroger...

Déjà dans les IUFM des modifications du découpage du master sont en cours pour l'année 2011-12 dans la limite du possible, les parcours d'initiation à la recherche sont simplifiés, l'équilibre entre cours disciplinaires et méthodologiques est revu.

Le récent rapport sur la mastérisation de la formation initiale des enseignants (Jolion, 2011) propose un regard national plus complet sur les difficultés de cette première année et l'extrême complexité de ce nouveau type de formation des enseignants.

Mais le retour en arrière semble impossible : il faut accepter ce passage d'une logique de formation (nous délivrions des "permis d'enseigner") à une logique de certification (nous devons outiller les étudiants de connaissances pour enseigner et évaluer leur maîtrise de ces connaissances, tout en les préparant à un concours extérieur à notre institut).

IV - QUE CERTIFIER ? QUE CRÉER DE SPÉCIFIQUE ?

1 Que créer de spécifique?

Il est de notre devoir de trouver des spécificités à la composante universitaire IUFM de façon à ce qu'elle s'impose dans l'université, devienne incontournable, forts de nos expériences de formation à l'enseignement des mathématiques, mais aussi de notre potentialité à avancer sur les relations entre didactiques disciplinaires.

Il serait opportun de développer des recherches et/ou des analyses croisées sur l'enseignement de thèmes communs à plusieurs disciplines : par exemple, la preuve en sciences (dont les mathématiques), ou encore la démarche expérimentale en sciences, le langage et les sciences.

Ou encore de construire des outils didactiques qui fonctionnent indépendamment du domaine disciplinaire étudié : par exemple, une grille d'analyse de séance (analyse *a priori* / analyse *a posteriori*) Là n'est pas le lieu de recenser des thèmes fédérateurs entre didactiques ; des laboratoires se penchent déjà sur ces questions, mais cette fédération de disciples autour d'un thème peut constituer un projet pour un IUFM.

2 Que certifier ?

En tant que spécialistes d'une discipline, il nous faut avancer d'une part dans la définition des savoirs professionnels nécessaires à l'enseignement, ne serait-ce que pour communiquer avec les autres composantes de l'université et affirmer notre spécificité, d'autre part dans la construction de stratégies d'acculturation tenant compte des nouvelles contraintes de l'institution.

Le mémoire représente une entrée intéressante pour voir à l'œuvre ces savoirs : un apprentissage formateur pour les étudiants est celui de la différenciation de la valeur scientifique des sources d'information qu'ils consultent, en quelque sorte un repérage de niveaux d'objectivité, voire de scientificité, que nous allons exemplifier (du plus faible au plus fort) :

1. Les programmes ont le statut d'injonctions : dans l'exercice du métier d'enseignant, ils n'ont pas à être questionnés, les superviseurs (IEN, IGEN, Ministre) veillent même à ce qu'ils ne soient pas contestés. Ce peut aussi être le cas de documents d'accompagnement institutionnels. Ils sont soumis à des contraintes d'ordre social et politique. Par contre, dans le cadre de travaux d'objectivation, ils peuvent être remis en question.

2. Idem pour les exemples de pratique, vues in vivo dans les classes ou rencontrées sous forme de fiches sur la Toile : ils peuvent nourrir la réflexion, alimenter des questions, mais ne constituent pas un fondement solide pour la réflexion.

3. Les ressources professionnelles (guides pédagogiques, manuels scolaires) font eux aussi des propositions de mise en œuvre dans les classes ou des déclarations sur les principes d'apprentissage : ces mises en œuvre doivent être analysées en particulier dans le cadre d'un travail de mémoire, la conformité de ces déclarations aux hypothèses actuelles sur les apprentissages est à examiner.
4. Les recherches en didactique disciplinaire, en sciences de l'éducation, les revues à comité de lecture garantissent une scientificité aux articles qu'ils encadrent : ce niveau d'objectivisation est le maximum. Mais de tels travaux n'existent pas pour tous les domaines ou thèmes.

On pourrait se donner comme challenge que le mémoire comporte au moins une référence de niveau 4 et que l'étudiant soit conscient de la variété scientifique de ses lectures. Ce qui nous entraînerait à ajuster les sujets de mémoire à dominante mathématique dans ce sens. Des mémoires à la croisée de disciplines dans la mesure où des références de niveau 4 peuvent outiller les étudiants seraient aussi bienvenus.

La Mastérisation n'a pas fait disparaitre nos compétences professionnelles. Elle nous amène à les repenser, les re-former pour savoir les dispenser dans un autre cadre. Elle nous amène aussi à défendre notre spécificité dans l'Université, d'une part comme recomposition de savoirs qui ont à voir avec l'enseignement des mathématiques, mais ne se limitent pas ni à des mathématiques (ce que pourrait enseigner l'UFR de Mathématiques) ni à des considérations sur le "faire la classe" (ce que pourrait enseigner l'UFR de Sciences de l'Éducation).

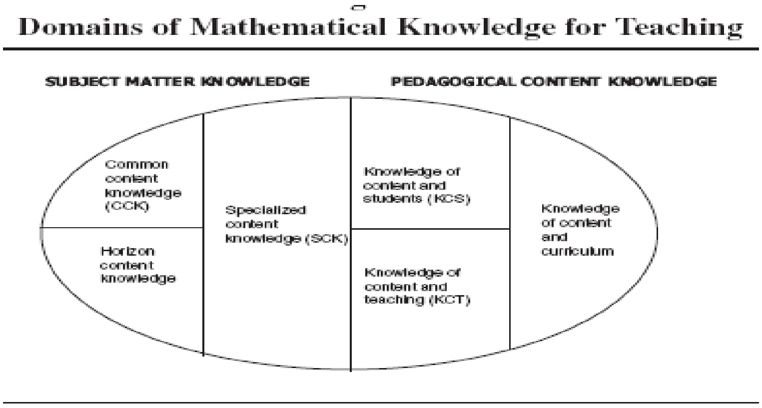
Examinons comment nous pourrions les définir, déjà dans le cadre des mathématiques.

V - DES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES POUR L'ENSEIGNANT ?

Cette réflexion n'est pas nouvelle : elle était déjà présente dans nos travaux de thèse (Houdement, 1995) initialisés par ceux de Kuzniak (1994) et poursuivis par ceux de Peltier (1995). Nous cherchions à affiner la réflexion sur la formation mathématique des professeurs des écoles dans le cadre institutionnel de l'époque, une alternance obligatoire de stages sur le terrain avec visites de formateurs (sous la tutelle d'un professeur des écoles vers la responsabilité solitaire et totale de la classe) et de cours en institut (pour préparer l'épreuve écrite de mathématiques avec une dimension professionnelle la première année, pour apprendre à faire la classe la seconde année). Nous avions pris comme objet d'étude la nature des imbrications de savoirs mathématiques, didactiques (spécifiques à l'enseignement des mathématiques) et pédagogiques (spécifiques à la gestion de la classe) dans les stratégies de formateurs expérimentés, particulièrement lors de la première année en IUFM.

La possibilité de stages en école étant devenue beaucoup plus incertaine dans le master, surtout avant le concours, il nous faut repenser l'adéquation des contenus de formation à la faible connaissance du terrain des étudiants et aux contraintes universitaires. Nous cherchons à définir des contenus "hors sol", moins dépendants des stages, de la relation personnelle au terrain, à l'image des tomates qui poussent hors de la terre, dont pourtant l'homme ordinaire a toujours pensé qu'elle était nécessaire à leur croissance. C'est l'objet de ce paragraphe. Bien entendu, loin de nous la pensée que ces seules connaissances suffisent à enseigner les mathématiques en primaire. Mais nous n'avons pas le choix. Nous faisons l'hypothèse que ces connaissances devraient au moins permettre aux étudiants de préparer leurs séances plus en adéquation avec les savoirs visés. Répertorier ces connaissances permettrait aussi de tirer des fils entre différentes disciplines. Bien entendu obtenir une liste ne résout pas la question de leur enseignement.

Le précurseur de l'étude internationale des connaissances spécifiques pour enseigner est sans doute Schulman (1986). Nous rendons compte d'une typologie qui nous aide à penser les contenus mathématiques "hors sol", en particulier pour le premier degré : celle de Ball, Thames & Phelps (2008).



Ces auteurs revisitent les connaissances pour enseigner des mathématiques, en les inférant de tâches réelles d'enseignement (Ball & *al.*, 2008, p. 398). Elles distinguent les connaissances centrées sur les savoirs (*subject matter knowledge*) de celles centrées sur les élèves et les programmes (*pedagogical content knowledge*).

Les premières se décomposent en **connaissances mathématiques communes** (CCK) qui, permettent à ceux qui savent un peu de mathématiques de reconnaitre si telle réponse à un problème est vrai, si telle définition de ce livre est correcte ou non ; mais aussi en **connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignant** (SCK) qui permettent à celui-ci de juger de l'importance d'une erreur, de distinguer différentes conceptions (par exemple pour la soustraction, enlever ou comparer).... **Connaitre les horizons mathématiques** (HCK) se rapporte à la déclinaison de tel savoir mathématique dans les autres niveaux de classes ou dans les autres disciplines pour un même niveau de classe.

Les secondes dites pédagogiques dans le modèle de Ball & *al.* regroupent :

- **des connaissances sur l'apprentissage de tel savoir par les élèves** (KCS) : prévoir ce que les élèves jugent difficile, leurs erreurs courantes, lesquelles valent la peine d'être reprises....
- **des connaissances sur l'enseignement de tel savoir** (KCT) : quels exemples et/ou situations choisir pour commencer, approfondir, évaluer ; quel matériel choisir pour accompagner les situations....
- **des connaissances sur les programmes et les moyens d'enseignement** (KCC).

Bien sûr, cette typologie ne révèle pas de nouveaux contenus (cf. CREM, 2003, p.8), mais elle a le mérite de les organiser et de dégager la spécificité des savoirs mathématiques pour enseigner, que nous avions déjà pointée dans nos travaux (Houdement, 1995) à l'instar d'autres chercheurs (Berthelot & Salin, 1992 ; Briand, 1995...) et fait figurer dans le rapport de la Commission Kahane sur la formation des maitres (CREM, 2003, p. 9 et suivantes).

Il est bien entendu que cette typologie ne résume pas les connaissances nécessaires à l'enseignant dans l'acte d'enseigner. Celles-ci dépassent l'accumulation statique de telles connaissances, passent par une recomposition dans l'action et par l'action (Schön, 1983), s'enrichissent et se régulent par les rétroactions de la pratique, comme le savent les théoriciens de l'activité (Rogalski & Vidal, 2007). Il manque dans cette description des mises en lien (des connaissances) *de l'ordre des pratiques*, selon l'expression d'Aline Robert (2011). Elles ne rendent compte de la complexité de la tâche de formation au métier d'enseignant que nous avions tenté de préciser (Houdement 2003).

Cette typologie nous semble par compte bien rendre compte de connaissances "hors sol" pour enseigner les mathématiques à l'école. Elle permet d'organiser des connaissances que nous savons distiller dans nos enseignements aux futurs enseignants (le lecteur aura repéré où peuvent s'insérer les outils de la didactique française, ceux de la didactique canadienne, cf. Proulx dans ces actes) et les rubriques encore peu explorées). C'est une piste pour notre reconstruction scientifique.

VI - BIBLIOGRAPHIE

BALL, D. L., THAMES, M.H. Y PHELPS, G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal for Teacher Education*, 59(5), 389-407.

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse. Université Bordeaux I.

BRIAND J. (1993) *L'énumération dans le mesurage des collections, un dysfonctionnement de la transposition didactique*. Thèse. Université Bordeaux I.

COMMISSION DE RÉFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES (dir. Kahane J.P. 2003) *La formation des maîtres en mathématiques*. En ligne, consulté le 25-10-11 http://smf4.emath.fr/en/Enseignement/CommissionKahane/RapportFormationMaitres/Formation-des-maitres.pdf.

COPIRELEM (2006) *Concours de recrutement des Professeurs des Écoles. Annales de Mathématiques.* ARPEME.

COPIRELEM (2011) *Mathématiques à l'écrit du Concours de recrutement des Professeurs des Écoles*. Session de septembre 2010 + Exercices complémentaires. ARPEME.

HOUDEMENT C. (1995) *Projets de formation des maitres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies*. Thèse de l'Université Paris 7.

HOUDEMENT C. (2004) Un zoom sur les stratégies de formation des professeurs des écoles en mathématiques. *Actes du 30ème Colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques*, pp. 24-32, IREM de Marseille.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, Volume 16/3, 289-322.

JOLION J.M. (2011) *Mastérisation de la formation des enseignants. Enjeux et bilan*. Rapport pour le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. En ligne, consulté le 25-10-11. http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Documents/docsjoints/rapportjolion111011.pdf

KUZNIAK A. (1994) *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*. Thèse de l'Université Paris 7.

PELTIER M.L. (1995) *La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école : entre conjoncture et éternité*. Thèse de l'Université Paris 7.

ROGALSKI J. & VIDAL C. (2007) La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences. *Activités*, 4.1, 49-82.

SCHÖN D.A. (1983) *The reflexive practitioner: how professionals think in action.* USA: Basic Books Inc. Traduction 1994 : *Le praticien réflexif. A la recherche du savoir caché dans l'agir professionnel* Québec : Éditions Logiques.

SHULMAN, LEE S. (1986) Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.