« PROBLÈMES POUR CHERCHER » AU CYCLE 3 : DES DIFFICULTÉS POUR LES ENSEIGNANTS AUX APPRENTISSAGES DES ÉLÈVES

Magali Hersant
MC, IUFM des Pays de la Loire, Université de Nantes
CREN, EA
magali.hersant@univ-nantes.fr

Résumé
Nos travaux nous ont permis d'identifier des savoirs qui peuvent être l'objet d'apprentissage à travers des problèmes pour chercher au cycle 3 de l'école élémentaire. Parmi eux figure l'apprentissage de la nécessité mathématique et le dépassement de l'empirisme. Avec des enseignants, nous avons développé des situations de classe ayant pour objectif de contribuer à cet apprentissage en permettant aux élèves d'apprendre que des arguments comme « c'est impossible car j'ai beaucoup cherché et je n'ai pas trouvé » ne sont pas recevables en mathématiques.
L'objet de cette communication est d'étudier les difficultés que pose la gestion de ces situations aux enseignants, notamment en termes de contrat didactique et de gestion des processus de dévolution et d'institutionnalisation pour ensuite envisager leur impact sur les apprentissages des élèves. L'analyse de ces difficultés est effectuée à partir de transcriptions de séances de classe.

L'injonction institutionnelle adressée aux enseignants de l'école primaire en 2002 à propos des « problèmes pour chercher » a suscité de nombreuses questions et recherches (on pourra par exemple consulter Houdement, 2009 ; Georget, 2009 et les actes des cinq derniers colloques de la Copirelem). Avec une équipe d'enseignants et des formateurs de l'IUFM des Pays de la Loire[1], nous avons mené de notre côté depuis 2006 des travaux avec les objectifs suivants : préciser les enjeux d'apprentissage possibles dans les situations de type « problèmes pour chercher » ; développer, en collaboration avec des enseignants, et dans une dialectique de production – analyse, des situations pour les classes ordinaires qui permettent ces apprentissages. Cette communication vise à préciser des difficultés spécifiques de la dévolution et de l'institutionnalisation dans ce type de problème (voir Hersant, 2010a pour les autres aspects de la recherche), ce qui nous permet ensuite d'en envisager d'autres, relatives aux apprentissages des élèves.

I - PROBLÉMATIQUE ET CADRE DE L'ÉTUDE

Les « problèmes pour chercher » tels qu'ils sont définis dans les documents d'accompagnement des programmes de 2002 correspondent à des « problèmes ouverts » au sens de Arsac, Germain et Mante (Arsac, Mante, 2007 ; Arsac, Germain et Mante, 1991). À ce titre, ils visent à développer chez les élèves des connaissances sur la résolution de problèmes, en particulier ce que Arsac, Germain et Mante nomment « la démarche scientifique » (Arsac, Mante, 2007, p. 22) qui consiste à « faire des essais pour produire une conjecture, tester sa conjecture en faisant d'autres essais, prouver la validité de sa conjecture ». Cet objectif concerne donc les pratiques des mathématiques et les pratiques de preuve. Ce type de problème a été développé, à l'origine, pour l'enseignement secondaire où exercent des

[1] Dans le cadre de la recherche INRP – IUFM des Pays de la Loire – IUFM de Basse Normandie – IUFM d'Aquitaine « Pratiques et mises en textes des savoirs » dirigée par C. Orange

professeurs spécialistes de la discipline. Son « adaptation » à l'enseignement primaire où les professeurs sont polyvalents et n'ont pas le plus souvent de formation universitaire en mathématiques ne va pas de soi et interroge d'emblée sur les difficultés que peut poser la réalisation de ces situations dans les écoles primaire.

1 La question des savoirs dans les « problèmes pour chercher »

« La démarche scientifique » qui est l'enjeu de ces problèmes nous questionne du point de vue de l'unicité affichée et de la signification que l'on peut donner à l'adjectif « scientifique » (voir Hersant 2010a ou Hersant, 2010b). Aussi, pour des raisons épistémologiques, nous associons préférentiellement les « problèmes pour chercher » à ce que D. Perrin, chercheur en mathématiques, nomme la « démarche expérimentale » (Perrin, 2007) :

« J'utilise systématiquement, pour résoudre des problèmes, une méthode que je n'hésite pas à qualifier d'expérimentale. J'appelle ici problème une question mathématique, en général ouverte, soit que je me la sois posée tout seul, soit qu'elle me l'ait été par un collègue ou un étudiant. [...] [Cette méthode expérimentale] comprend plusieurs étapes, à répéter éventuellement : expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuve, contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures, nouvelle tentative de preuve, etc. »

En référence au cadre théorique de la problématisation développé au CREN par M. Fabre et C. Orange (Fabre et Orange, 1997), nous disons que cette démarche articule essais, conjectures et preuve(s) au cours de la recherche/résolution d'un problème dans un dialogue permanent entre le registre des faits (empirique) et le registre des raisons (apodictique). Sa finalité est d'établir des nécessités et, si possible, des preuves. Travailler ce dialogue nous paraît extrêmement important au cycle 3 (ainsi qu'au début du collège) pour permettre l'entrée dans la rationalité mathématique et la preuve avant d'aborder la démonstration. Nous voyons plusieurs raisons à cela. D'abord, c'est un réel enjeu d'apprentissage dans la mesure où nous avons observé qu'à ce niveau les élèves s'émancipent difficilement de l'empirisme pour accéder aux raisons (Hersant, 2010a). Ensuite, dans le champ des mathématiques, la preuve ne se réduit à pas à des raisonnements hypothético-déductifs comme on le voit trop souvent en géométrie au collège, elle a aussi à voir avec le registre empirique.

Compte-tenu de cette analyse, nous avons choisi de faire travailler les élèves de cycle 3 sur la dialectique des registres empirique et rationnel en mathématiques avec l'objectif de développer des apprentissages sur la relation entre le vrai et le faux en mathématiques[2] et les registres empirique et rationnel. Nous souhaitons en particulier que les élèves apprennent que les arguments du type « c'est impossible car j'ai beaucoup cherché et je n'ai pas trouvé », régulièrement proposés par les élèves, ne sont pas acceptables contrairement à ceux du type « c'est vrai parce que je l'ai fait ». Le premier type d'argument qui relève de l'empirisme, où la connaissance provient de l'expérience, est contingente et assertorique, constitue en effet à nos yeux un obstacle pour accéder à la rationalité mathématique dans la mesure où il est extrêmement prégnant pour les élèves et relativement économique par rapport à la recherche de nécessités. Aussi il faut, nous semble t-il, que les élèves apprennent d'abord à l'aide de situations que cet argument n'est pas acceptable en mathématiques, puis qu'ils soient amenés, de façon pratiquement concomitante, à établir des preuves basées sur des nécessités, construites à l'aide de raisonnements, et non seulement des preuves par ostension (du type « c'est vrai car je l'ai fait »). Ces questions sont fortement liées aux problèmes de possible / impossible et aux problèmes de quantifications existentielle (du type « montrer qu'il existe ») et universelle (du type « montrer que quelque soit »).

Pour permettre ce travail nous avons développé dans un travail d'ingénierie didactique associant des enseignants et des formateurs des situations qui s'appuient sur des problèmes d'optimisation discrète

---

[2] sans oublier ce qui n'est ni vrai, ni faux à un moment donné, c'est à dire indéterminé.

(pour des exemples de tels problèmes, on peut se reporter à Hersant, Thomas, 2009). Ce domaine des mathématiques présente en effet de nombreux avantages pour travailler sur le vrai et le faux en mathématiques dans leur rapport avec les registres empirique et apodictique (Hersant, 2010a). En particulier, la délimitation de la zone où se situe la meilleure solution (l'identification de majorants et de minorants) demande d'établir des raisonnements. De plus, la preuve de l'existence d'un résultat (qui peut être amélioré ou pas) se fait par ostension, et l'ostension d'un résultat non associé à un raisonnement qui montre qu'on ne peut pas faire mieux ne permet pas de conclure le problème.

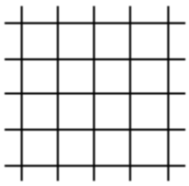
2 Le dialogue entre le registre des faits et le registre des raisons dans la recherche d'un problème d'optimisation discrète : un exemple générique

En référence aux pratiques dans le champ de l'optimisation et de la recherche opérationnelle, nous dirons que la recherche d'un problème d'optimisation discrète conduit :

- à une phase d'énumération qui correspond à la recherche de solutions sans forcément avoir idée de la solution ;
- à une phase de recherche de courts-circuits qui permet de réduire l'espace de recherche, c'est-à-dire, selon les termes utilisés dans ce domaine, l'ensemble des candidats *a priori* à la solution du problème (Hao, Galinier, Habib, 1999) ;
- à la considération de nouveaux problèmes locaux du type « est-ce que la meilleure solution est n ? » ;
- et à une nouvelle énumération pour ces problèmes qui, soit permet de conclure (on trouve à la main ou avec un algorithme une solution qui réalise la borne sup trouvée), soit ramène à la recherche de nouveaux courts-circuits.

L'énumération renvoie à l'expérience et à la formulation de conjectures, tandis que la recherche de courts-circuits renvoie plus à l'établissement de nécessités. Par ailleurs, les questions de vrai/faux et le dialogue entre les registres empirique et rationnel interviennent à différents endroits de la recherche d'un problème d'optimisation. Illustrons cela sur un exemple dont l'énoncé est le suivant :

« Placez le plus possible de points sur les intersections de cette grille sans former aucun alignement de trois points. »



La recherche du problème peut-être décrite de la façon suivante, si l'on fait référence à l'activité d'une personne qui cherche le problème.

- Expérience 1

Je place le plus possible de points sur la grille en vérifiant qu'il n'y a pas d'alignement de trois points. J'arrive à en placer 9 de plusieurs façons différentes mais pas 10.

Commentaires : Cette première expérience correspond à la phase d'énumération. Elle se situe largement dans le registre empirique. Elle génère le théorème-en-acte ou la nécessité « je ne peux pas placer plus de 2 points par ligne, sinon j'ai trois points alignés ».

- Observation de l'expérience 1

Je vérifie de nouveau que je n'ai pas trois points alignés sur mes grilles et que je ne peux pas placer un dixième point sur une de ces grilles à 9. J'acte : « on peut placer 9 points sans en aligner 3. » et je déduis que l'on peut placer 9 points ou plus sur une grille sans en aligner 3. La question qui peut se poser alors est la suivante : sur une nouvelle grille, avec une disposition différente des précédentes, est-ce que je pourrais placer plus de 9 points ?

Commentaires. La proposition « on peut placer 9 points au moins sans en aligner 3 » est prouvée par ostension (registre empirique) et constitue un résultat que nous qualifierons de faible, c'est-à-dire qu'on a bien trouvé un minorant mais on ne sait pas si c'est la meilleure solution ou pas.

- Expériences et observations 2, 3, 4. . .

Je cherche à placer le plus de points sans en aligner 3 sur d'autres grilles. Je n'y arrive pas. Ces expériences m'amènent à penser que je ne pourrai pas faire mieux que 9. D'où la formulation d'une conjecture (conjecture 1) :

« Le plus de points qu'on peut placer sans en aligner 3 sur la grille est 9. »

Commentaires. Jusqu'ici seul le registre empirique a été sollicité. Cela a permis de trouver un minorant mais il faut s'assurer que ce minorant correspond au maximum : si j'arrive à établir qu'on peut placer au plus 9 points sans en aligner 3, j'ai résolu le problème. Il s'agit donc maintenant d'abandonner la recherche empirique qui stagne pour rechercher des courts-circuits et délimiter plus précisément l'espace des candidats à la solution. Si je réussis à montrer que personne ne pourra jamais placer plus de 9 points, j'ai résolu le problème.

- Tentative de preuve

Il y a 25 points sur la grille, donc on ne peut pas placer 25 points sans en aligner 3. Par ailleurs, sur chaque ligne, je peux placer 0, 1 ou 2 points sans en aligner 3. Sans me préoccuper des autres types d'alignement, je peux donc dire que personne ne pourra jamais placer plus de 2 fois 5 c'est-à-dire 10 points sans en aligner 3. Mais je n'arrive pas à établir quelque chose de plus précis. Peut-être que, finalement, on peut faire 10.

Commentaires. Cette tentative de preuve de la conjecture 1 amène à établir deux courts-circuits à l'aide de deux raisonnements. Le premier raisonnement établit une nécessité qui permet de délimiter largement l'espace des candidats : entre 9 et 24. Le second établit une nécessité plus intéressante : la solution est comprise (au sens large) entre 9 et 10.

- Contre-expérience et preuve

Je reprends mes grilles et essaie de nouveau de placer le plus de points possibles sans en aligner 3. L'objectif est d'essayer de placer plus de 9 points. Je parviens à placer 10 points sans en aligner 3 !

Commentaires. Cette contre-expérience qui se situe dans le registre empirique permet de prouver le résultat suivant : sur la grille, on peut placer 10 points sans en aligner 3, pas plus. La preuve résulte de l'association d'un fait produit dans le registre empirique et d'une nécessité qui correspond au court-circuit établi lors de la tentative de preuve (registre des raisons).

Ainsi, la recherche / résolution d'un problème d'optimisation discrète conduit à établir trois types de preuves. Il y a d'abord des preuves de résultats faibles, c'est-à-dire des preuves que certains nombres vérifient les contraintes du problème sans que l'on sache s'ils correspondent ou pas à la solution du problème. Ces preuves sont souvent obtenues dans la phase d'énumération du problème et effectuées par ostension en référence au registre empirique. Ensuite, il y a des preuves de résultats de types courts-circuits qui permettent de réduire les possibilités dans l'autre sens et font appel à la construction de nécessités. Enfin, il y a la preuve de la solution qui mobilise à la fois l'ostension et l'apodicticité car elle constitue l'association d'un résultat faible et d'un court-circuit.

Nous souhaitons amener les élèves à produire ces trois types de preuve et, à partir de là, mettre en évidence la façon dont les registres empirique et apodictique interviennent dans la construction du vrai et du faux en mathématiques. Cela implique de réussir d'une part la dévolution de la situation, et donc le passage à un contrat didactique de preuve, et d'autre part l'institutionnalisation des savoirs, avec des formulations du type « "montrer qu'on peut placer 9 points" est une preuve que la solution du problème est au moins 9 » ou « "dire que c'est impossible de faire plus que 9 parce qu'on n'a pas réussi" n'est pas une preuve en mathématiques, rien ne dit qu'un jour il n'y aura pas une personne qui pourra placer 10 points ». Or cette réussite n'a rien d'évident.

II - CONTRAT DIDACTIQUE ET DÉVOLUTION DE LA RECHERCHE DE NÉCESSITÉS

Les situations didactiques que nous avons développées suivent toutes un scénario commun en trois phases (Hersant, Thomas, 2009) qui implique des changements de contrats didactiques.

1 Phases du scénario et contrats didactiques

Dans un premier temps, le problème est proposé aux élèves avec une consigne du type « placer le plus possible de points sur les intersections de la grille sans en aligner 3 » (consigne pour le problème « Pas trois points alignés »). Cette première consigne doit permettre à tous les élèves de s'engager dans une phase d'exploration du problème de type énumération, dans un travail individuel puis en petits groupes.

Ensuite, lorsque la recherche empirique s'épuise et que les élèves n'arrivent pas à « faire mieux », l'enseignant interrompt la recherche et demande à chaque groupe de produire une affiche qui représente une des meilleures solutions du groupe. Les élèves sont invités à vérifier scrupuleusement le respect des contraintes. Les affiches des différents groupes sont exposées, une vérification collective des propositions est effectuée et la ou les meilleures productions sont identifiées.

Il s'agit alors de faire basculer les élèves de la recherche empirique vers la recherche de courts-circuits et de preuves d'impossible. Les élèves sont invités à se positionner par rapport à ces questions et à rechercher individuellement une explication.

La phase suivante est une phase de travail et de tri (validation / invalidation) des différents arguments proposés par les élèves. Elle permet d'élaborer une conclusion au problème, compte-tenu des résultats des élèves, et donc éventuellement de conclure qu'il y a une zone d'incertitude. C'est aussi un moment privilégié d'institutionnalisation. D'une part, les différentes preuves acceptables produites au cours de la résolution (preuves de résultat faible par ostension, preuves de résultat fort) sont étiquetées comme telles : « on a prouvé avec un exemple qu'on pouvait faire... », « on a prouvé avec une preuve / avec un raisonnement qu'il est impossible de faire... ». D'autre part, les explications non valables proposées par des élèves (empirisme et autres raisonnements erronés) sont désignées. Par exemple, l'enseignant pourra préciser : « Pierre a dit que « c'est impossible, on ne peut pas faire plus car on n'a pas réussi ». Ce n'est pas une preuve mathématique. Ce n'est pas parce que personne dans la classe n'a réussi à faire mieux aujourd'hui que personne ne pourra jamais faire mieux ».

2 Difficultés associées au passage à un contrat de preuve

Le passage de la phase d'énumération à la phase de recherche de courts-circuits, même lorsque les deux temps sont clairement dissociés (par exemple, parce qu'ils se déroulent lors de deux séances différentes) est particulièrement délicat pour les enseignants. Cette évolution d'un travail dans le registre empirique à un travail dans le registre des nécessités n'est pas réductible à un changement de tâche : c'est aussi un changement de contrat didactique qui est à opérer dans la mesure où il s'agit de négocier avec les élèves la dévolution de la recherche d'une preuve.

Le discours de l'enseignant joue un rôle important pour signifier ce changement d'attentes, au-delà du changement de tâche. Or, il s'avère que ce discours peut être plus ou moins congruent avec un contrat de preuve et peut donc plus ou moins faciliter l'inscription dans un tel contrat. Voici, à titre d'exemples, deux extraits de discours d'enseignants à propos du problème « Pas trois points alignés » au moment du passage la phase d'énumération à la phase de recherche de courts-circuits :

Enseignant A : est-ce que vous pensez qu'on peut en mettre plus ? Qui pense « oui » ?

Enseignant B : est-ce qu'on est sûr que personne ne pourra faire 21, 20 ou … est-ce qu'on est sûr que personne ne pourra faire 10 ? Que personne ne pourra faire 11 ? (…) y'a des choses on est sûr que personne ne pourra les faire.

Le discours de l'enseignant A renvoie à l'opinion et ne facilite probablement pas l'inscription du travail des élèves dans le registre de la preuve. Ce n'est pas le cas du discours de l'enseignant B qui porte sur la certitude universelle dans le temps et dans l'espace (« jamais », « personne »). Il faut noter par ailleurs, que B propose lui-même une ou deux preuves simples aux élèves avant de leur en demander et démontre que le résultat est compris entre 8 et 26 (« on peut placer 8 points sur la grille, la preuve, on n'a qu'à regarder là, on a réussi » et « on ne peut pas en placer 26, forcément, il n'y a que 25 points »). De notre point de vue, ces éléments facilitent l'entrée des élèves dans un contrat de preuve dans la mesure où ils étayent cette entrée.

L'expérience mathématique des enseignants (A est un professeur des écoles qui a un baccalauréat scientifique mais n'a pas poursuivi d'études scientifiques au-delà du bac, B est un professeur de mathématique, formateur à l'IUFM) peut peut-être expliquer cette différence. Si tel est le cas, cela montre la nécessité d'une formation mathématique spécifique (dont la forme est encore à définir) pour la réalisation de ces problèmes à l'école primaire.

III - INSTITUTIONNALISATION ET MISES EN TEXTE DE CES SAVOIRS

Compte tenu des objectifs d'apprentissage visés avec ces problèmes, *a priori*, les trois types de preuve présentés dans la partie 1 devraient faire l'objet d'une « mise en texte » (Boiron et al. 2010), c'est-à-dire d'un « travail (corps à corps) d'élaboration des formes langagières jugées pertinentes pour négocier les significations » et d'une institutionnalisation en classe. Etudions à partir de l'analyse d'une séance menée par B ce qu'il en est.

La séance étudiée est réalisée en CM2 et porte sur le problème « Pas trois points alignés » précédemment présenté. Cette séance a été réalisée dans des conditions un peu particulières : une enseignante de CM2 avait en effet accepté de confier au professeur B sa classe six fois une heure entre la fin octobre et la fin janvier pour réaliser des problèmes que nous avions développés. B a donc préparé les séances à partir des échanges préalables dans le groupe, de façon relativement autonome, et a ensuite mené les six séances avec cette contrainte d'horaire.

Etant donné les objectifs d'apprentissage visés, la mise en évidence du caractère nécessaire et universel d'une proposition constitue un aspect crucial de la mise en texte des savoirs. C'est pourquoi nous y accordons une importance particulière dans l'analyse. Pour ce faire, nous identifions et classons les différents résultats intermédiaires établis au cours de la séance et étudions leur présence ou absence dans les écrits (tableaux intermédiaires, tableau final, cahiers d'élèves) de la classe.

1 Résultats établis et traces écrites

Les résultats établis dans la classe sont résumés dans la figure 1 ; ce qui est écrit au tableau au cours de la séance et à la fin, ainsi que ce qui figure dans les cahiers des élèves est repris dans la figure 2.

Résultat établis, type, par qui ?, comment ? (par ordre chronologique)
- 9 est possible, résultat faible produit par les élèves, par ostension, et reformulé par l'enseignant : « On est capable de mettre 9 points sans en aligner trois. C'est clair, la preuve, on n'a qu'à regarder là »
- 8, 7 . . .1 sont possibles, résultats faibles produits par le professeur, par déduction (si on peut faire 9, on peut faire moins que 9)
- 26 est impossible, court-circuit produit par le professeur, par déduction (il y a moins de 26 intersections)
- 25 est impossible, court-circuit produit par le professeur, par déduction (s'il y a une croix sur chaque intersection, il y a forcément 3 points alignés)
- 11 est impossible, court-circuit produit par l'élève Dimitri, par analyse (sur chaque ligne, je peux placer au plus 2 croix, donc sur cinq lignes je peux en placer au plus 10)
- 12, . . . 23 sont impossibles, résultats faibles produits par le professeur, par déduction (si on ne peut pas faire 11, *a fortiori* on ne peut pas faire 12, etc.)
- 10 est possible, résultat faible produit par les élèves, par ostension
- 10 est la meilleure solution du problème, résultat fort formulé par le professeur, preuve par une forme d'analyse-synthèse.

Fig. 1

Au début de la séance, l'enseignant écrit au tableau le titre du problème qui résume les contraintes : « Pas trois points alignés ». Les élèves travaillent d'abord individuellement sur des grilles distribuées puis se mettent en groupe pour reproduire sur une grande grille « une des meilleures réponses » du groupe. Ces grandes grilles sont toutes affichées au tableau. Deux grilles montrent qu'on peut placer 9 points, elles sont laissées au centre du tableau alors que les autres sont sur les côtés.

Au début de la phase de recherche de courts-circuits, l'enseignant écrit en haut du tableau (pratiquement sur toute la longueur) la suite des nombres de 1 à 26 puis utilise un codage : « ce qui est entouré en vert c'est ce qu'on est capable de faire et ce qui est barré en rouge c'est ce dont on est sûr que personne ne pourra le faire ».

Au fil de l'avancée de la séance et des résultats prouvés, cette file numérique est complétée. Dans ce que l'on peut considérer comme une première étape de la résolution, les nombres de 1 à 9 sont entourés et les nombres de 11 à 26 sont barrés. Seul 10 qui est problématique n'est ni entouré ni barré. À ce moment, il a en effet été montré qu'on ne pouvait pas faire plus que 10, sans que soit produit une solution à 10. Pour aider à la compréhension de cette preuve proposée par un élève, l'enseignant trace au tableau une grille vierge et note en face de la première ligne : « Sur cette ligne, je peux mettre 0, 1 ou 2 points. »

Puis un élève trouve une solution à 10 en complétant une solution à 9, l'ajout est fait sur la grille des élèves affichée au tableau.

À la fin de la séance, le tableau final comporte à droite la meilleure solution trouvée (10 croix placées sans alignement de trois points) accompagnée du texte « on peut en placer 10 », la consigne du problème notée au centre « placer le plus possible de points sur les intersections sans en aligner 3 », des productions d'élèves à gauche et la file numérique en haut.

L'enseignant avait prévu une petite affiche à coller sur le cahier. Ainsi, sur les cahiers d'élève on trouve, par exemple :

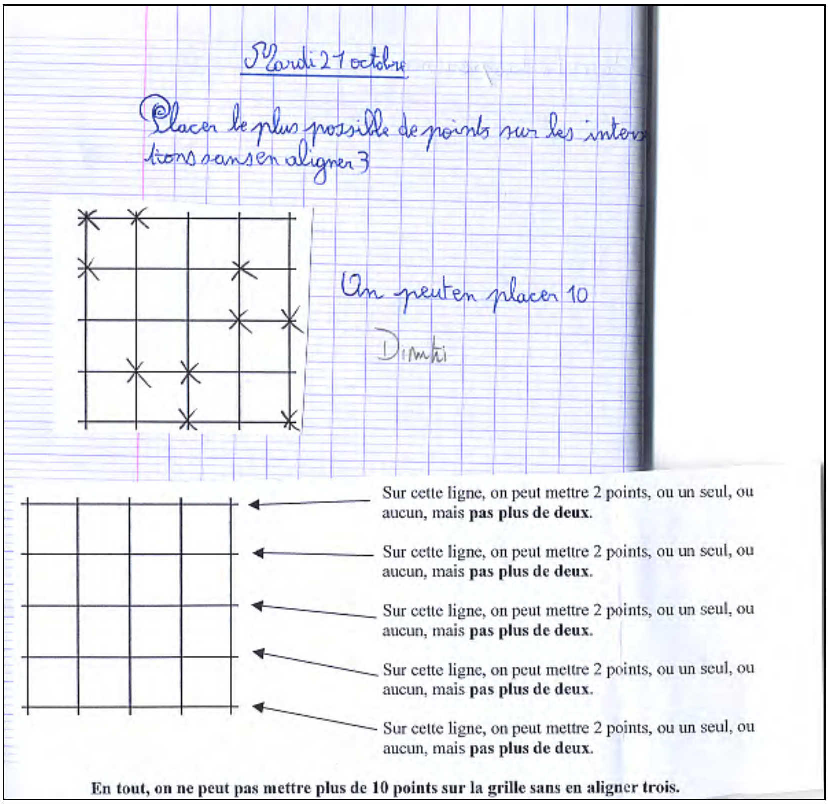


Figure 2

2 Mise en texte intermédiaire : types de résultats prouvés

La comparaison des résultats établis et des mises en textes montre que, si des petits schémas supports au raisonnement ou preuve d'existence sont utilisés tout au long de la séance, aucune preuve de résultat faible établi au cours de la séance ne fait l'objet d'une mise en texte. De même, des preuves de courts-circuits qui ne sont pas cruciaux pour la suite de la résolution du problème (26, 25) ne font pas l'objet d'une mise en texte. Certes, ces preuves ne posent pas de difficulté aux élèves au niveau de leur élaboration et les convainquent facilement. Pourtant, leur mise en texte présenterait deux intérêts. D'abord, cela permettrait de mettre en évidence à travers les différents types de preuve (preuve d'un possible par ostension où le registre des faits permet de prouver, preuve par déduction pour prouver un possible ou un impossible) comment interviennent les registres des faits et des nécessités. Ensuite, pour les preuves par ostension, cela permettrait de faire évoluer les formulations des élèves du type « on peut placer 9 points sans en aligner trois » vers des formulations du type « On est sûr qu'on peut placer 9 points sur la grille sans en aligner trois, on l'a fait » qui mettent en évidence le caractère certain de la proposition alors que le premier type évoque simplement un fait. Toutefois, dans cette séance, il y a pour ces preuves des formulations ou des reformulations proposées par l'enseignant qui montrent bien l'apodicticité, mais elles ne sont pas ni travaillées, ni écrites et on peut se demander ce que les élèves peuvent en retenir. Voici, à titre d'exemple un extrait des échanges entre l'enseignant et les élèves.

P : on est capable de mettre 9 points sans en aligner 3. C'est clair, la preuve, on n'a qu'à regarder là, on a réussi. On peut mettre aussi 8 parce que si on sait faire 9, on peut prendre un de 9 on en enlève un, on en a 8. On peut faire 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Un point sans en aligner ça c'est pas trop difficile, sans en aligner 3. Alors 2 points sans en aligner trois c'est pas trop difficile non plus. [. . .] je sais bien, je confie ça à un grand savant et je le laisse chercher pendant des années, il n'arrivera pas à en placer 26.

e : non y'a que 25 cases.

P : Forcément, il n'y a que 25 points (le professeur barre 25) et même 25, il n'y arrivera pas parce que s'il en met 25 il faut qu'il en mette sur tous les points, forcément si tous les points sont occupés, il y en aura trois alignés, bien plus que ça il y en aura 5 alignés.

Dans les cinq autres situations proposées aux élèves de cette classe, on retrouve des résultats semblables.

Tout se passe comme si l'enseignant avait décidé à l'avance de « boucler » le problème et donc d'acter les différents résultats intermédiaires pour se consacrer à la preuve de la solution optimale. Pourquoi en est-il ainsi ? Il nous semble que la file numérique joue un rôle important. Elle constitue en effet un élément de la mise en texte permanent et dynamique résumant les résultats connus sur le problème (ce dont on a la preuve que c'est possible, ce dont on a la preuve que c'est impossible) sans porter les nécessités associées à ces résultats. Cette file numérique est essentielle dans la situation car elle met en évidence, pour tous les élèves, la zone d'incertitude qui montre la nécessité de réduire l'espace des solutions. Mais nous pensons aussi qu'en facilitant le résumé des résultats connus sur le problème, elle dessert le travail sur la preuve dans la mesure où la rédaction des preuves de résultats faibles ou de courts-circuits triviaux au tableau ferait double-emploi avec cette file numérique.

3 Mise en texte finale

La mise en texte finale réalisée au tableau est assez maladroite. Elle peut laisser penser que la réponse apportée au problème est assertorique dans la mesure où, à la consigne de départ (« placer le plus possible de points. . . »), est associée une grille avec 10 points et une phrase qui décrit un fait sans les nécessités associées. Cela est dû en partie au fait que la preuve de l'impossibilité de faire 11 n'apparaît pas au tableau (elle est cependant bien présente dans les cahiers des élèves). De plus, ni sur le tableau final, ni sur le cahier des élèves n'apparaît une preuve que la meilleure solution au problème est 10, du type « On sait par un petit raisonnement qu'on ne peut pas placer 11 points sur une grille 5x5 sans en aligner trois. Par ailleurs, on sait aussi qu'on peut placer 10 points sur la grille sans en aligner trois. On peut donc conclure que le plus de points que l'on peut placer sur une grille 5x5 sans en aligner 3 est 10. » Tout se passe comme si, lorsqu'il est dans la classe, l'enseignant considère comme preuve du problème la preuve qu'on ne peut pas mettre 11 points sans en aligner 3. Il réduit donc la preuve à ce qui est, à la fois, difficile à faire émerger chez les élèves et déterminant pour réduire la zone d'incertitude.

4 Difficultés d'institutionnalisation et spécificité des savoirs

Ces résultats nous conduisent à pointer deux éléments peut-être spécifiques des mathématiques ou des problèmes proposés et importants pour les difficultés d'articulation des pratiques de construction de savoirs et de mises en texte de ces savoirs. D'abord, la résolution de ces problèmes conduit à la réalisation de nombreux petits schémas qui encapsulent nos raisonnements et les nécessités qu'ils produisent. L'écriture systématique de ces petits raisonnements prend du temps et interrompt la réflexion. Cela peut expliquer d'une part qu'au cours de la recherche, seuls les raisonnements un peu délicats sont mis en texte et d'autre part que la plupart des choses écrites au tableau au cours de la séance sont des petits schémas, sans phrase, ce qui ne garantit pas que les élèves sauront retrouver la signification de ces schémas. Ensuite, il y a un aspect cumulatif dans ces problèmes : une fois qu'un résultat est établi, il s'agit de savoir si on peut l'améliorer ou pas. De fait, les nécessités associées à certains résultats importent donc peu mais en revanche, il faut prendre acte des faits pour améliorer, autant que possible, le résultat.

IV - CONCLUSION

Les analyses précédentes mettent en évidence des éléments de tension entre ce qui devrait être, compte tenu des savoirs en jeu, et ce qui est réalisé. Ces éléments de tension correspondent à des difficultés ressenties par les enseignants au cours de la réalisation des séances et représentent aussi des sources potentielles de non apprentissage des savoirs visés par les élèves. Il nous semble en particulier que des *quiproquos* importants peuvent s'installer à propos de la preuve : manque de rupture entre preuve et opinion, risque de restriction de la conception de la preuve en mathématiques, voire développement d'une conception erronée de la preuve.

Pourtant, les enseignants considérés ici participent à l'élaboration des situations au sein du groupe de recherche et ne peuvent donc être envisagés comme des professeurs « ordinaires » du point de vue des problèmes pour chercher. Ces résultats invitent donc à poursuivre l'étude des conditions de possibilités de réalisation de « problèmes pour chercher » à l'école primaire.

V - BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G., MANTE M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert.* CRDP Lyon, Scéren édition

ARSAC G., GERMAIN G. et MANTE M. (1991) *Problèmes ouverts et situations-problèmes*. IREM de Lyon

BOIRON, V., JAUBERT, M., & REBIÈRE, M. (2010, Avril). Rapport intermédiaire de la recherche "Pratique et mise en texte des savoirs" à l'IUFM d'Aquitaine.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage

CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage

FABRE M., ORANGE C. (1997) Construction des problèmes et franchissement d'obstacles, *Aster*, **24**, 38-57

GEORGET J.P., 2009, *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*, Thèse Université de Paris 7

HAO J.K., GALINIER P., HABIB M. (1999) Métaheuristiques pour l'optimisation combinatoire et l'affectation sous contraintes, *Revue d'intelligence artificielle*, **13(2)**, 283-324

HERSANT M., 2008, Problèmes pour chercher : des conduites de classes spécifiques, *Grand N*, **81**, 57-75

HERSANT M. (2010a) *Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques*. Mémoire d'Habilitation à Diriger des recherches, Université de Nantes

HERSANT M. (2010a) *Recherche et résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques.* Actes du colloque « Les didactiques en question : état de lieux et perspective pour la recherche et la formation » www.versailles.iufm.fr/colloques/pdf/manifestations2010/Hersant.pdf

HERSANT M., THOMAS Y. (2009) Quels savoirs mathématiques dans les problèmes pour chercher à l'école élémentaire ? Le cas de problèmes d'optimisation au cycle 3, *Actes du 35è colloque de la Copirelem*, IREM DE Bordeaux

HOUDEMENT C, 2009, Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, **14**, 31-59

MEN. (2005) Les problèmes pour chercher, *Documents d'accompagnement des programmes - Mathématiques*, 7-14. Sceren - cndp edition

PERRIN D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Actes du 33è colloque de la Copirelem*, Dourdan

PERRIN-GLORIAN, M.J., HERSANT, M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires, *Recherches en didactique des mathématiques*, **23(2)**, 217-276