

L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMERATION DECIMALE AU CE2 : CONTRAINTES ET LIBERTES INSTITUTIONNELLES.

Frédéric TEMPIER
IUFM DE POITIERS
LDAR, Université de Paris 7

Résumé

Dans le cadre de notre mémoire de Master, nous nous sommes intéressés à l'enseignement de la numération au CE2. Nous sommes partis du fait que le concept de numération décimale se compose de deux aspects : le lien entre les différentes unités (milliers, centaines ...) et le rang dans l'écriture du nombre, que nous appellerons aspect position, et les relations entre centaines et milliers, entre dizaines et centaines, etc., que nous appellerons aspect décimal. Nous avons regardé comment ces deux aspects étaient pris en compte dans les programmes et évaluations nationales récentes ainsi que dans trois manuels. Notre étude montre que l'aspect décimal reste implicite dans les recommandations des programmes et qu'il est peu pris en compte dans deux des manuels étudiés. Il n'intervient pas dans les tâches proposées dans les évaluations nationales.

Nous concluons en essayant de voir les implications que cela peut avoir sur les pratiques des enseignants. Nous ferons part d'observations que nous avons pu faire dans deux classes de CE2. Dans les perspectives liées à ces constats, nous nous demandons comment il serait possible de faire évoluer les pratiques des enseignants vers une prise en compte des deux aspects de la numération.

I - INTRODUCTION

Notre système de numération est un objet très naturalisé chez les adultes. Son enseignement semble susciter des difficultés pour les enseignants. Cela a été rapporté par plusieurs chercheurs. Par exemple, au début des années 1980, dans une recherche québécoise de cinq années sur la numération de position au primaire, Bednarz et Janvier (1984) ont mis en évidence certaines difficultés liées à son enseignement : « toute représentation du nombre apparaît selon un alignement reprenant l'ordre de l'écriture conventionnelle du nombre ». Elles concluent alors qu'« imposer prématurément une présentation ordonnée conduit nécessairement l'enfant à une interprétation de l'écriture en termes de découpage, d'ordre, de position, et écarte toute signification véritable accordée à cette position en termes de groupements ».

On retrouve un phénomène assez proche, cette fois concernant des enseignants américains, dans le travail de Liping Ma (1999). Elle constate, lors d'entretiens, que chez beaucoup d'enseignants américains les connaissances de numération ne sont pas mobilisées par exemple pour justifier ou expliquer les techniques posées de soustraction ou de multiplication. Elle explique alors que même si ces enseignants utilisent dans leurs explications le terme « place value » (valeur des chiffres en fonction de leur position) ce n'est pas avec la même signification (nous traduisons) : ce que ces enseignants

« voulaient dire par « place value » était seulement la première moitié de cette expression, « place » - la position des nombres [...]. Quand des enseignants [...] parlaient de la « colonne des dizaines » (« tens column ») ou de la « colonne des centaines » ils ne se concentraient pas sur la valeur des chiffres dans ces colonnes. Ils utilisaient les termes « dizaines » et « centaines » comme des étiquettes pour les colonnes ».

Dans une recherche plus récente, en France, Parouty (2005) a demandé à des enseignants ce qu'ils pensaient du problème suivant pour des élèves de CE2 : « Pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ? ». En grande majorité ceux-

ci ont répondu « *qu'il s'agissait d'une situation d'apprentissage de la division* » et qu'il était « *impossible de demander cela à des CE2* ». Elle a ensuite cherché l'origine de ce phénomène dans les conceptions des enseignants concernant la numération et son enseignement. Cependant, il ne nous semble pas qu'une telle interprétation suffise à comprendre l'origine des caractéristiques de l'enseignement de la numération, mais que celles-ci doivent être analysées en prenant en compte les contraintes liées au contenu à enseigner proposé par les programmes et les manuels qui influencent de manière importante les pratiques des enseignants. Avant de nous engager dans cette étude nous allons rappeler les deux aspects de notre système de numération (décimal de position).

II - LES SAVOIRS DE LA NUMERATION DECIMALE DE POSITION

1 Aspect position de la numération

Commençons par regarder la production d'un élève de CE2 pour un exercice de composition de nombres. Il s'agit ici de passer d'une écriture en unités de numération (unités, dizaines, centaines, milliers) à l'écriture en chiffres.

3. Complète

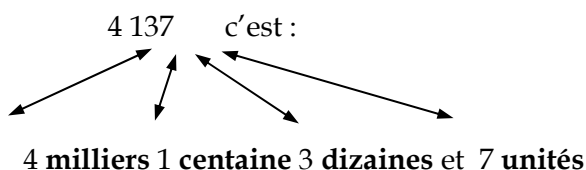
- a. 8 dizaines + 5 unités = 85.....
 b. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = 193....
 c. 6 centaines + 9 unités = 69.....
 d. 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = 724.....
 e. 3 dizaines + 6 centaines = 36.....

Théo, CE2

Cet élève juxtapose les chiffres dans l'ordre dans lequel ils sont donnés. Il a compris qu'il y avait un lien entre le nombre d'unités de chaque ordre et les chiffres composant le nombre mais ne sait pas comment associer les deux.

En fait, il s'agit d'associer chaque unité de numération (unités, dizaines, centaines) à un rang dans l'écriture du nombre. Le rang des unités est le 1^{er} rang (en partant de la droite), le rang des dizaines est le 2^{ème} rang, etc. Le savoir en jeu est donc le suivant :

Aspect position de la numération : dans l'écriture d'un nombre, la valeur des chiffres dépend de leur position.



Ce qui est souvent écrit dans un tableau de numération :

M	C	D	U
4	1	3	7

Le chiffre 0 sert à marquer la position des positions des chiffres quand une unité est absente.

2 Aspect décimal de la numération

Voici une deuxième production d'élève avec un nouvel exercice :

3. Complète a. 8 dizaines + 5 unités = <u>85</u> b. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = <u>193</u> c. 6 centaines + 9 unités = <u>609</u> d. 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = <u>427</u> e. 3 dizaines + 6 centaines = <u>630</u>	5. Complète a. 2 dizaines + 15 unités = <u>35</u> b. 4 centaines + 10 dizaines = <u>470</u> c. 5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = <u>579</u> d. 6 centaines + 21 dizaines + 14 unités = <u>635</u>
---	---

Elisa, CE2

Même si l'aspect position de la numération semble acquis par Elisa (réussite à l'exercice 3), cela ne semble pas suffire pour réussir l'exercice 5.

Si l'on considère, par exemple, la tâche suivante : « 5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = ... », pour réussir, il faut non seulement savoir associer chaque unité à son rang (aspect position de la numération) mais aussi savoir que 10 dizaines = 1 centaine, et donc que 12 dizaines = 1 centaine + 2 dizaines. Ainsi, en ajoutant cette centaine aux 5 centaines, on obtient 6 centaines + 2 dizaines + 3 unités que l'on peut écrire 623. L'autre savoir en jeu concerne donc les relations entre les unités de numération, en particulier ici 10 dizaines = 1 centaine.

Aspect décimal de la numération (ou relations entre unités) : 10 unités d'un certain rang équivalent à une unité du rang supérieur

1 dizaine = 10 unités,

1 centaine = 10 dizaines, donc 1 centaine = 100 unités

1 millier = 10 centaines, donc 1 millier = 100 dizaines et 1 millier = 1000 unités

Finalement, quand on regarde l'écriture d'un nombre (en chiffres, comme par exemple 1234) on ne voit pas apparaître la notion d'unité de numération : les différentes unités ainsi que leurs liens sont invisibles dans cette écriture. Il s'agit d'une convention d'écriture qu'il s'agit de comprendre. En particulier, pour les élèves, il s'agira d'apprendre ce que cache cette écriture en chiffres. C'est la conjonction des deux aspects de la numération qui est au cœur de cet apprentissage.

Importance pour les techniques opératoires.

Ces deux aspects de la numération sont en jeu dans toutes les techniques opératoires. En particulier, l'aspect décimal intervient dans les retenues pour les techniques usuelles de l'addition, de la soustraction et de la multiplication.

Dans le cas de l'addition posée, à titre d'exemple, quand on ajoute 345 à 592 (voir ci-contre), au rang des-dizaines, on obtient 13 dizaines qu'il faut ensuite convertir en 1 centaine et 3 dizaines. C'est donc la relation 10 dizaines = 1 centaine qui est ici en jeu (aspect décimal) mais aussi la position occupée par les centaines : le 3^{ème} rang (aspect position).

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 592 \\
 + 345 \\
 \hline
 937
 \end{array}$$

III - PROBLEMATIQUE, CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

1 La problématique

La mise en lumière de ces deux aspects de la numération nous amène à nous interroger sur la façon dont un enseignant peut les prendre en compte dans son enseignement notamment lors du travail sur les

nombre à quatre chiffres. En particulier, les recherches précédemment citées (Bednarz et Janvier, Ma) semblent montrer une difficulté de prise en compte de l'aspect décimal de la numération. Afin de mieux comprendre les choix qu'un enseignant peut effectuer dans sa classe ou lors de la préparation de séances, nous allons d'abord étudier la façon dont les programmes et manuels prennent en compte l'étude de ces savoirs. En effet, nous souhaitons repérer les contraintes institutionnelles susceptibles d'influencer les pratiques des enseignants afin de dégager les marges de manœuvre que ceux-ci pourront investir.

2 Les cadres théoriques et la méthodologie

En théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), on regarde l'activité mathématique dans le cadre d'une *Organisation Mathématique* (OM). Celle-ci s'organise autour d'un (ou plusieurs) *type(s) de tâches*. Pour effectuer un type de tâche T , on dispose d'au moins une certaine *technique* τ . Ce bloc $[T, \tau]$ constitue le *bloc des savoir-faire*. Les techniques peuvent être expliquées, justifiées et produites par l'utilisation d'un savoir (ou technologie) qui lui-même s'insère dans une théorie T . Le bloc constitué des technologies et théorie constitue le *bloc des savoirs*.

Par exemple s'il s'agit de dénombrer (type de tâche T) la collection représentée ci-contre (matériel de numération classique), une première technique τ_1 est l'utilisation d'un comptage oral de mille en mille, cent en cent, dix en dix et un en un, on obtient alors trois mille deux cent quarante-cinq, que l'on écrit ensuite 3245. Les savoirs (ou technologies) qui permettent d'expliquer et de justifier cette technique sont :

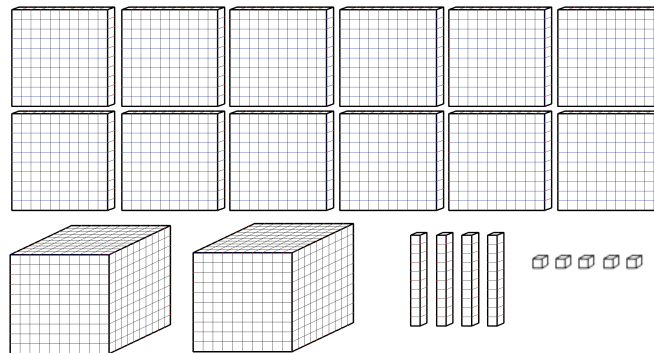


Figure 1: collection à dénombrer

- la suite orale des nombres de un en un, dix en dix, cent en cent, mille en mille.
- la relation entre la numération écrite et la numération parlée. Par exemple, « trois mille » c'est 3 milliers donc un 3 au 4^{ème} rang en partant de la droite, etc. (il y a des irrégularités). Cela met, en particulier, en jeu l'aspect position de la numération.

Une deuxième technique τ_2 est le groupement de 10 centaines en 1 millier. On obtient 3 milliers, 2 centaines, 4 dizaines et 5 unités. On associe alors directement le nombre d'unités de chaque ordre à sa position dans l'écriture en chiffres, ici 3245. Les savoirs (ou technologies) en jeu sont cette fois :

- aspect décimal de la numération (pour justifier le groupement)
- aspect position de la numération (pour justifier l'association unité/position)

Les organisations mathématiques de la numération à l'école primaire ne sont pas les mêmes que celles que l'on peut rencontrer dans un traité universitaire par exemple. Le concept de transposition didactique (Chevallard, 1991) permet d'étudier les modifications que subit un objet de savoir « savant » quand il est d'abord désigné comme étant objet « à enseigner » puis quand il devient objet « enseigné ». Ces transformations se font à l'intérieur de différentes institutions, qui jouent toutes un rôle différent dans ce processus, qui est résumé par la figure suivante (Bosch et Gascon, 2005) :

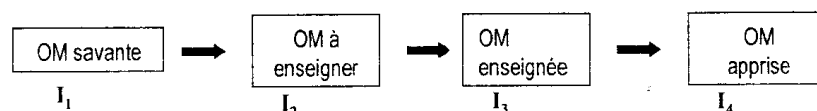


Figure 2: schéma de la transposition didactique

Bosch et Gascon précisent alors : « la TAD postule qu'il n'est pas possible d'expliquer les caractéristiques du « savoir appris » [...] sans prendre en considération toutes les étapes de la transposition ». Dans le cadre de cet article, nous nous intéresserons seulement à l'OM à enseigner (celle que l'on étudie à partir des manuels et des programmes).

Dans l'étude de cette OM à enseigner, nous allons nous centrer sur les possibilités d'apparition de l'aspect décimal de la numération. Pour cela, nous allons pointer les types de tâches qui permettent de mettre en jeu ce savoir. Par souci de concision, nous ne parlerons pas des techniques. Cependant, celles-ci interviennent dans ce lien entre type de tâche et savoir comme dans l'exemple précédent du dénombrement d'une collection.

Cette centration sur l'aspect décimal de la numération, nous amènera également à ne pas trop nous attacher aux types de tâches qui concernent :

- l'ordre sur les nombres puisqu'il s'agit plutôt d'utiliser l'aspect algorithmique de la suite écrite des nombres
- l'association entre la désignation orale et la désignation écrite (en chiffres) des nombres (qui met en jeu la position comme nous l'avons vu dans l'exemple du dénombrement ci-dessus).

IV - ETUDE DES CONTRAINTES ET DES LIBERTES INSTITUTIONNELLES

1 Etude des programmes de 2002 et des évaluations nationales correspondantes

1.1 Les programmes de 2002

Voici les compétences des programmes de 2002 qui permettraient, a priori, de mettre en jeu l'aspect décimal de la numération décimale (dans la catégorie « désignation orale et écrite des nombres naturels ») :

- « Déterminer la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier en fonction de sa position ;
- Donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1000, etc.
- Retrouver rapidement l'écriture chiffrée d'un nombre à partir d'une décomposition utilisant 10, 100, 1000, etc. »

Les commentaires du document d'application de ces programmes nous permettent de voir que derrière la première de ces compétences se cache le type de tâche que nous appellerons *nombre de* :

« Les mots *dizaines, centaines, milliers...* sont employés comme synonymes et reformulés sous la forme de « paquets » de 10, de 100, de 1000... [...] Les formulations du type « Combien y a-t-il de paquets de 10 dans 8 926 ? » accompagnent celles comme « Quel est le nombre de dizaines dans 8926 ? » » (c'est nous qui soulignons).

Ils montrent également une préférence donnée à l'utilisation des puissances de dix (10, 100, 1000) plutôt qu'aux unités de numération (dizaines, centaines, milliers).

Les deuxième et troisième compétences correspondent au type de tâche « décomposer/ recomposer ». Là encore, les commentaires nous éclairent un peu plus :

« Ces décompositions peuvent être du type suivant :

$$5324 = (5 \times 1000) + (3 \times 100) + (2 \times 10) + 4$$

$$5324 = (53 \times 100) + 24.$$

Mais aussi :

$$(3 \times 100) + (5 \times 1\,000) + (6 \times 10) = 5\,360$$

$$(3 \times 100) + (12 \times 10) + 8 + (5 \times 1000) = 5\,428.$$

De telles égalités sont produites en référence à la valeur des chiffres en fonction de leur position. »

Dans ces exemples de décomposition/recomposition, l'aspect décimal est parfois en jeu quand il y a des groupements à effectuer : c'est le cas lorsqu'il y a plusieurs chiffres devant une unité, comme par exemple, pour 12×10 (qu'il faut transformer en $1 \times 100 + 2 \times 10$ pour ajouter ensuite les 3×100). Cependant les différences entre ces types de décomposition (un ou deux chiffres devant une unité) ne sont pas explicitées : il n'apparaît pas que certaines mettent en jeu un autre savoir que la seule position. Ces exemples nous montrent également que ce type de tâche est uniquement associé aux écritures avec les puissances de 10. Des décompositions utilisant les unités de numération, du type $5324 = 5 \text{ milliers} + 3 \text{ centaines} + 2 \text{ dizaines} + 4 \text{ unités}$ n'apparaissent pas. Elles étaient pourtant largement utilisées dans l'enseignement au cours du XX^{ème} siècle (voir Chambris, 2008, qui a fait une étude de l'évolution de l'enseignement de la numération au cours de ce siècle) mais il semble qu'après la réforme des mathématiques modernes elles aient quasiment disparu. Depuis cette période, les unités de numération semblent apparaître principalement pour désigner le nom des rangs dans l'écriture en chiffres d'un nombre. Cette réforme a amené l'institution à dévaloriser le mélange du registre de la langue naturelle (les mots « unités », « dizaines », ...) et de celui des écritures arithmétiques (avec les signes + et =).

Cela n'est pas sans conséquence sur l'utilisation des savoirs de la numération. En effet, il semble qu'alors, l'aspect décimal soit principalement pris en charge par des règles de calcul (notamment la règle des zéros). Pour comprendre cela, considérons l'exemple donné dans les commentaires des programmes : « dans 8 926, il y a 89 paquets de 100 ». Voici deux techniques (et technologies) possibles :

- $8926 = 8900 + 26 = 89 \times 100 + 26$ car : « multiplier par 100 revient à ajouter deux zéros à droite » (règle de calcul)
- $8926 = 8 \text{ milliers} + 9 \text{ centaines} + 2 \text{ dizaines} + 6 \text{ unités} = 80 \text{ centaines} + 9 \text{ centaines} + 2 \text{ dizaines} + 6 \text{ unités} = 89 \text{ centaines} + 2 \text{ dizaines} + 6 \text{ unités}$ car 80 centaines = 8 millier (savoirs de la numération)

Dans ce dernier cas, seul l'aspect décimal intervient ($10 \text{ centaines} = 1 \text{ millier}$). Certes, la première technique est plus rapide mais en utilisant uniquement la règle de calcul, on passe complètement à côté des savoirs de la numération décimale. Les enfants ne peuvent alors pas comprendre l'idée de groupements successifs par dix que sous-tend notre écriture des nombres.

Enfin, on peut s'étonner de voir l'absence, dans les programmes du cycle 3 de 2002, du type de tâche *dénombrer* qui apparaît pourtant dans les programmes du cycle 2 et qui permet de mettre en jeu l'aspect décimal car le dénombrement de grandes collections amène les élèves à faire ces groupements successifs par dix. Pourtant, dans les commentaires du document d'application, on peut lire : « la valeur des chiffres doit être constamment envisagée en relation avec les activités de groupements et d'échanges qui la sous-tendent. » Même si c'est de l'aspect décimal dont il est question ici, celui-ci reste implicite : les relations entre unités ne sont jamais clairement exprimées.

1.2 Les évaluations CE2 et 6ème de 2005

Il s'agit d'un moment où les programmes de 2002 sont en application à tous les niveaux de l'école. On peut lire dans les documents d'application des programmes du cycle 3 que le niveau CE2 est un moment où il est encore nécessaire de construire et de structurer le travail sur la numération dans le champ des entiers. Cependant, tout ce travail de construction est ignoré par l'évaluation de 6^{ème} qui porte plutôt sur des compétences de fin de cycle sur les nombres décimaux et se limite pour les entiers à la désignation par écrit.

Cependant, on peut souligner, que même dans les évaluations CE2 (qui portent sur la fin du cycle 2 où le travail de construction de la numération est déjà bien commencé), les types de tâches qui relèvent plutôt de la construction de la numération (« dénombrer », « nombre de ») ne sont pas évalués. Cela semble en contradiction avec l'importance accordée à « la valeur des chiffres en fonction de leur position » que l'on a pu constater à travers les commentaires du document d'application du programme.

On peut donc en déduire une importance institutionnelle accordée aux types de tâche lire/écrire et comparer et par voie de conséquence uniquement à l'aspect position de la numération au niveau des savoirs. Quelle évolution dans les programmes et évaluations suivants ?

2 Etude des programmes de 2007 et 2008 et des évaluations nationales correspondantes

2.1 Les programmes de 2007

On y retrouve le même découpage qu'en 2002 : « Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels » et « Ordre sur les nombres entiers naturels » à l'intérieur de la même grande catégorie des programmes (domaine) : « connaissance des nombres entiers naturels ».

Dans la phrase d'introduction du domaine, on retrouve mot pour mot une phrase du texte de 2002 : « Ils doivent comprendre les principes de la numération décimale, en particulier que la valeur des chiffres dépend de leur position dans l'écriture des nombres, en relation avec les activités de groupements et d'échanges qui la sous-tendent ». C'est une référence aux deux aspects de la numération et en particulier à l'aspect décimal à travers les « activités de groupements et d'échanges ». On y retrouve également les mêmes types de tâches dont les formulations ont été elles aussi reprises mot pour mot à partir de celles de 2002.

Ces programmes servent à faire des ajustements pour mettre en cohérence et adapter les programmes au socle commun. Il y a ainsi une distinction qui est faite entre les « capacités » et les « connaissances » que l'on peut rapprocher de la distinction savoir-faire/savoir. On peut alors noter que le savoir « connaître la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier en fonction de sa position » qui apparaissait en 2002 comme un type de tâche fait ici partie des « connaissances ».

Connaissances et capacités travaillées et attendues en fin de cycle 3	
Connaissance des nombres entiers naturels	
CONNAISSANCES	CAPACITÉS
2.1 Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels - connaître la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier en fonction de sa position.	- donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1000..., et retrouver l'écriture d'un nombre à partir d'une telle décomposition ; - produire des suites orales et écrites de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100, à partir de n'importe quel nombre ; - associer la désignation orale et la désignation écrite (en chiffres) pour des nombres jusqu'à la classe des millions.

Figure 3: extrait des programmes de 2007

Cependant, on peut alors se demander ce que devient le type de tâche « nombre de » qui y était associé. Si l'on ne regarde que les capacités attendues, on peut l'interpréter comme une disparition de ce type de tâche. Cela n'est pas anodin car pour les programmes de 2002, il s'agissait du principal type de tâche pour lequel on pouvait rencontrer l'aspect décimal de la numération. Pour les décompositions/recompositions, il faudrait 2 chiffres devant une unité, comme nous l'avons vu pour les exemples du document d'application de 2002. Sans ces exemples, l'aspect décimal semble ne plus avoir de type de tâche qui permettrait de le faire émerger. On peut alors se demander comment les élèves peuvent rencontrer ces activités de « groupements et d'échanges ».

On peut également noter que seules les écritures avec les puissances de 10 apparaissent. En fait, dans les programmes précédents, les unités de numération n'apparaissaient que dans les commentaires du document d'application. Avec la disparition de ce document, on assiste donc à la disparition, dans le texte du programme, de ce type d'écriture des nombres.

2.2 Les programmes de 2008

C'est un texte qui, dans son ensemble, est nettement raccourci par rapport aux textes précédents. L'étude du système de numération se fait toujours dans le domaine intitulé « Les nombres entiers

naturels ». On n'a plus le découpage en deux sous-domaines comme dans les textes précédents, ni la dissociation connaissances/capacités des programmes de 2007.

Les compétences attendues en fin de cycle sont :

- « principes de la numération décimale de position : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres ;
- désignation orale et écriture en chiffres et en lettres ;
- comparaison et rangement de nombres, repérage sur une droite graduée, utilisation des signes > et < ; »

Ce sont des compétences présentes dans les IO précédentes avec les mêmes formulations. Cependant, on ne trouve plus trace des décompositions et recombinaisons qui ont peut-être été intégrées à cette formulation plus globale « principes de la numération décimale de position ... ». Par conséquent, n'apparaissent plus, non plus, les écritures utilisant les puissances de 10.

On peut se demander à quel type de tâche correspond désormais l'expression « valeur des chiffres en fonction de leur position ». Si on se réfère aux IO de 2002, cela pourrait faire référence au type de tâche « nombre de ». Elle pourrait également faire référence aux décompositions/ recombinaisons qui ont disparu ... Tout cela nous fait penser que l'aspect décimal est un savoir qui est minoré dans ces derniers programmes.

Voilà ce qu'on peut lire dans le tableau de progression qui est proposé à la fin des programmes, pour la classe de CE2 pour « Les nombres entiers jusqu'au million » :

	Cours élémentaire deuxième année	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
Nombres et calcul	<i>Les nombres entiers jusqu'au million</i> - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million. <i>Comparer, ranger, encadrer ces</i>	<i>Les nombres entiers jusqu'au milliard</i> - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard. <i>Comparer, ranger, encadrer ces</i>	<i>Les nombres entiers</i>

Figure 4: extrait du tableau de progression par niveaux (CE2, CM1, CM2), IO 2008

Le « principe de la numération décimale de position : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres » se résume donc ici en « connaître [...] les nombres entiers jusqu'au million ». On peut même se demander si « connaître » ce n'est pas finalement « savoir écrire et nommer ». D'ailleurs c'est le cas au CP ou au CE1 où l'on peut lire : « connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers ».

2.3 Les évaluations nationales CM2 de 2009

Concernant les nombres entiers, on trouve les types de tâches suivants : écrire un nombre entier en chiffres, comparer deux nombres entiers, placer un nombre entier sur une droite graduée. Pour ce dernier, l'intérêt nous semble plutôt du côté du placement des nombres décimaux (car pour les nombres entiers la taille des nombres est petite et, après avoir repéré le type de graduation, il suffit de compter les graduations).

Ce sont des types de tâches pour lesquels seul l'aspect position de la numération est en jeu. Cela confirme ce que nous avons relevé à la lecture des programmes mais ne nous dit pas ce que les programmes entendent par « connaître [...] les nombres entiers » car il n'y a pas de type de tâche s'y rattachant ici.

3 Conclusion : des contraintes dans les programmes et évaluations

Nous avons affaire à des programmes de moins en moins précis à propos notamment des types de tâches de la numération. En effet, l'utilisation de l'expression « valeur des chiffres en fonction de leur position » (qui réfère aux savoirs de la numération) ne laisse pas apparaître les types de tâches qui s'y rattachent. Certains prennent une place importante dans les évaluations (lire/écrire et comparer), d'autres au contraire y sont complètement absents.

Nous avons également remarqué de moins en moins de précisions sur les types d'écritures attendues, même s'il semble que l'on accorde toujours une grande importance aux écritures utilisant les puissances de 10 et une tendance à utiliser les unités de numération plutôt pour nommer les rangs dans l'écriture en chiffres. Enfin, la disparition du type de tâche « nombre de » et l'absence du dénombrement ont pour conséquence une centration sur l'aspect position de la numération.

On peut alors s'interroger à propos de l'interprétation qu'un nouvel enseignant ne connaissant pas les programmes de 2002 pourrait faire de l'expression « valeur des chiffres en fonction de leur position » ou encore de « Connaître [...] les nombres entiers jusqu'au million ». Et on peut penser que les interprétations de ces « compétences » des programmes par les auteurs de manuels pourraient influencer leurs choix.

4 Etude de trois manuels

4.1 La tribu des maths, CE2, Magnard, 2008

L'édition consultée est datée de 2008 et prend en compte ces nouveaux programmes. Trois doubles pages sont consacrées à l'étude de la numération des nombres à 4 chiffres, intitulées « les nombres jusqu'à 9 999 » :

- (1) je fais la différence entre un « chiffre » et un « nombre »
- (2) je trouve la valeur d'un chiffre grâce à sa position dans le nombre
- (3) je situe les nombres les uns par rapport aux autres

Cette dernière partie concerne l'ordre sur les nombres, nous n'en parlerons pas ici.

Dans la première partie (annexe 1), le nombre 1000 est introduit en référence à une situation de dénombrement d'abeilles dans des ruches. Le nombre 1000 correspond au nombre d'alvéoles contenues dans un cadre. Ce contexte a l'inconvénient de ne pas permettre de voir le nombre 1000 comme étant constitué de 10 centaines puisque les alvéoles des abeilles ne sont pas groupées par centaines. L'aspect décimal de la numération n'est donc pas en jeu : il s'agit ici d'associer le millier à sa position dans l'écriture en chiffres du nombre. Par exemple, pour répondre à la question « combien y a-t-il de cadres pleins si 7236 alvéoles sont remplies d'œufs ? », l'élève doit utiliser le fait que le 7 au 4^{ème} rang (en partant de la droite) correspond au nombre de milliers. Le savoir en jeu est l'aspect position de la numération. D'ailleurs dans le guide pour l'enseignant, il est proposé de faire une synthèse pour parvenir à un tableau de numération avec milliers, centaines, dizaines et unités.

Il en est de même dans les exercices qui suivent (annexe 2), ainsi que dans la deuxième partie, qui porte bien son nom (« je trouve la valeur d'un chiffre grâce à sa position dans le nombre ») puisque c'est encore uniquement la position qui est en jeu (comparaisons, placements de nombres sur droite graduée, décompositions/recompositions et associations écriture en chiffres/écriture en lettres).

Seul l'exercice 4 de la première partie pourrait permettre de mettre en jeu l'aspect décimal :

4 Recopie et complète ce tableau.

Nombre	Chiffre des milliers	Nombre de milliers	Chiffre des centaines	Nombre de centaines	Chiffre des dizaines	Nombre de dizaines
5 423	5	5	4	54	2	542
8 764						
9 070						
7 301						
6 845						

Figure 5 : extrait du manuel La tribu des maths CE2

Cependant, tel qu'il est présenté, il nous paraît être un exercice très formel où il s'agit de faire des observations à partir de l'exemple donné dans la première ligne, sans que cela ne permette réellement d'utiliser les relations entre les unités. Voilà ce qu'en disent les auteurs dans le guide du maître :

4 ** : La seule difficulté repose sur la confusion chiffre / nombre.
 Vous pouvez alors utiliser du petit matériel de manipulation (type cubes) ou faire un dessin équivalent : 23 est représenté par deux barres de dix cubes et trois cubes seuls. Il y a, en tout, 23 cubes (nombre de cubes), mais trois cubes sont « seuls » (non échangés contre une dizaine) : c'est le **chiffre**.
 Procédez de même avec les centaines et les milliers et concluez en valorisant ce moyen mnémotechnique :
 Pour lire le « nombre de... », on lit le nombre constitué par tous les chiffres à gauche du rang demandé, ce rang étant inclus :
 5 423 → 542 dizaines.

Figure 6 : extrait du guide de l'enseignant du manuel *La tribu des maths CE2*

Il est proposé ici d'utiliser du matériel pour effectuer les groupements par 10. L'exemple donné concerne un nombre à 2 chiffres. Pour un nombre à 4 chiffres comme 5423, il faudrait donc utiliser 5 gros cubes de 1000, 4 plaques de 100, 2 barres de 10 et 3 cubes seuls. Pour comprendre, par exemple, qu'il y a 54 centaines, il faut utiliser le fait qu'un gros cube de 1000 contient 10 plaques de 100, c'est à dire utiliser l'aspect décimal de la numération. Il y a donc un savoir nouveau et essentiel ici mais il semble être considéré comme allant de soi par les auteurs, qui signalent d'ailleurs pour finir une méthode « mnémotechnique » permettant de trouver la réponse. Cette méthode amène à contourner l'utilisation de ce savoir.

Il y a également un problème proposé dans le « Labo Maths », sous l'exercice précédent, pour lequel nous pouvons faire le même type de commentaire : même si l'aspect décimal pourrait être un savoir essentiel dans ce problème, il n'apparaît pas ainsi. Pour les auteurs, il semble que l'aspect décimal apparaisse comme un problème de « distinction entre chiffre et nombre ». Par conséquent, les relations entre centaines et milliers n'apparaissent jamais explicitement. Cela est confirmé par le contenu du « mémento » concernant les nombres où le seul savoir pointé est l'aspect position de la numération à travers un tableau de numération.

Concernant les types de tâches travaillées, hormis la recherche du « chiffre des ... » ou du « nombre de ... », on peut voir principalement les décompositions/recompositions, l'association entre écriture en lettres et écriture en chiffres et l'ordre sur les nombres. Ce sont les types de tâches que l'on trouvait dans les programmes de 2002.

Ce sont d'ailleurs uniquement ces types de tâches que l'on peut trouver dans les exercices proposés en bilan de période 2 et 3 (annexe 3). Aucun de ces exercices ne met en jeu l'aspect décimal de la numération. Hormis l'exercice de recomposition, on retrouve les types de tâches des évaluations nationales.

4.2 Cap Maths CE2, Hatier, 2007

L'édition consultée date de 2007, c'est à dire au moment de la mise en œuvre des programmes de 2007. La séquence sur les nombres à 4 chiffres s'étend sur une longue période de l'année (de l'unité 7 à l'unité 12). Les principaux types de tâches travaillés sont : associer l'écriture en lettres et l'écriture en chiffres (unités 7, 9, 10, 11) et comparer (unités 7, 9, 11). Les décompositions/recompositions (unités 7 et 10) et « nombre de » (unités 7 et 12) sont également travaillées mais leur poids (en termes de nombres d'activités proposées) est beaucoup plus faible que les premiers. Cela rejoint le constat fait dans l'étude des programmes et du manuel précédent.

En fait, le type de tâche « nombre de » est travaillé au début (unité 7, séance 1, voir en annexe 4) uniquement pour le nombre 1000 (combien de paquets de 10, de 100 dans mille ?). Cela permet d'amener l'aspect décimal pour le nombre 1000 mais celui-ci ne nous semble pas être utilisé par la suite. En effet, le travail est ensuite davantage centré sur la lecture/écriture et sur la comparaison (voir unité 7 séances 2 et

3 par exemple, en annexe 5) qui ne nécessite pas le recours à l'aspect décimal de la numération. Les principales traces de ce savoir que nous avons pu trouver restaient cantonnées aux relations entre les unités, dizaines et centaines.

On ne retrouve le type de tâche « nombre de » qu'en fin d'année (unité 12, séance 4, voir annexe 6) et, à ce moment-là, les élèves ayant déjà travaillé la multiplication par 10 et 100, c'est cette technique qui semble mise en avant par les auteurs, comme on le voit dans cet extrait du guide du maître pour un exercice où il s'agit de déterminer le nombre de rubans de 100 cm nécessaires pour faire une bande de 2416 cm : « $2416 = (24 \times 100) + 16$ ce qui amène à conclure qu'il y a 24 centaines dans 2416 ». Les auteurs ajoutent, tout de même, entre parenthèses : « ce qui correspond également une procédure qui a pu être utilisée ». L'utilisation de cette règle de calcul (règle des zéros) rend invisible l'aspect décimal de la numération.

Nous avons trouvé dans le « dico-maths » une expression des relations entre les unités (aspect décimal) exprimées avec les unités de la numération :

Dizaine : groupement de 10 unités	1 dizaine = 10 unités
Centaine : groupement de 100 unités	1 centaine = 100 unités
Une centaine, c'est aussi un groupement de 10 dizaines.	1 centaine = 10 dizaines
Millier : groupement de 1 000 unités	1 millier = 1 000 unités
Un millier, c'est aussi un groupement de 100 dizaines.	1 millier = 100 dizaines
Un millier, c'est aussi un groupement de 10 centaines.	1 millier = 10 centaines

Figure 7 : extrait du « Dico maths » du manuel Cap Maths CE2

Mais, nous n'avons pas vu de référence à ces équivalences (en particulier celles concernant le millier) dans le manuel ou dans le guide du maître ou d'activités qui pourraient y conduire (hormis la séance 1 de l'unité 7).

Pourtant, pour les nombres à trois chiffres, dans la première partie du manuel, l'aspect décimal est un savoir essentiel qui est travaillé à travers différents problèmes de décompositions, conversions, nombre de, etc. Mais, pour le travail sur les nombres à 4 chiffres, c'est comme si nous avions affaire à une sorte de basculement : du fait de la taille des nombres, on ne justifie plus les relations entre les unités par les activités de groupement et d'échanges sous-jacentes : cela est désormais pris en charge par une généralisation des règles de multiplication par 10, 100, ... aux nombres à quatre chiffres. Cela est d'ailleurs expliqué par les auteurs dans la partie introductive du guide de l'enseignant.

Finalement, même si l'aspect décimal est identifié comme un savoir de référence (dans le dico-maths), on trouve peu d'activités sur les nombres à quatre chiffres qui permettent de le mettre en jeu puisque les types de tâches valorisés sont la lecture/écriture des nombres et la comparaison (tout comme dans les programmes).

4.3 Etude du manuel « J'apprends les maths » CE2, 2003

L'édition étudiée est celle de 2003. La numération des nombres à 4 chiffres est travaillée sur 3 doubles pages : « séquences » 74, 77 et 78. Ce manuel se distingue des précédents par le choix des types de tâches principalement travaillés et la place des savoirs de la numération. En effet, tout se passe comme si l'aspect décimal était le savoir central de la progression. Ainsi, les types de tâche les plus travaillés mettent en jeu ce savoir. Ces types de tâches sont « nombre de » et « dénombrer » (on trouve aussi avancer/reculer dans la suite écrite des nombres mais nous n'en parlerons pas ici).

Les auteurs s'appuient sur le matériel représenté : des billes groupées par 10 dans des boîtes, elles-mêmes groupées par 10 dans des valises, elles-mêmes groupées par 10 dans des malles (ces malles n'existent matériellement pas donc les élèves n'ont jamais vu réellement ce dernier type de groupement). Ici, le millier apparaît donc comme un groupement de 10 centaines. Dans la séquence 74, par exemple, les élèves doivent coller l'étiquette d'une malle sur un dessin de 10 valises (voir en annexe 7).

Voici un exercice typique de la progression (séquence 77) où l'on retrouve les deux types de tâches travaillés principalement :

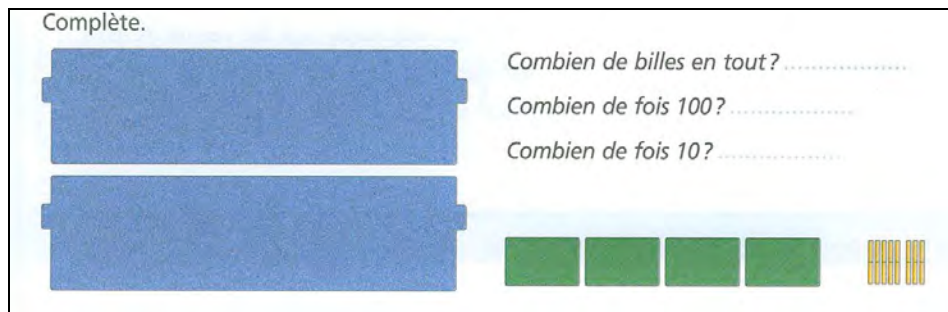


Figure 8 : extrait du manuel « J'apprends les maths » CE2, séquence 77

On peut noter l'absence des décompositions/recompositions qui est la conséquence de l'utilisation exclusive de représentations de matériel (séquences 74, 77 et 78) ou de boîtes de 100 trombones ou encore de billets de 100 euros (séquence 77). On ne part jamais d'une écriture en unités de numération ou avec des puissances de 10 pour chercher le nombre correspondant (ce qui correspondrait à une recomposition). On parle alors plutôt de dénombrement. Nous avons également constaté une quasi absence de lire/écrire (nous ne l'avons trouvé que dans des courts moments en début de séance où il s'agit d'écrire des nombres en chiffres sur l'ardoise) et une place insignifiante à comparer. Ce choix des types de tâche se distingue nettement de ce que nous avons pu voir dans les programmes de 2002.

Au niveau des écritures, les expressions « groupes de » 10, 100, 1000 sont privilégiées, comme le montre le fait par exemple que la formulation de l'aspect décimal se fasse de cette manière (« 1000 c'est 10 groupes de 100 ... »).



Figure 9 : extrait du « j'ai appris » (séquence 74) du manuel J'apprends les maths CE2

Les unités de la numération remplacent parfois les « groupes de », comme dans l'extrait ci-dessus. Elles ne sont donc pas seulement utilisées pour nommer les rangs dans le nombre en chiffres. Par contre, il est étonnant de constater une absence totale d'écritures multiplicatives avec les puissances de 10, ce qui là encore se distingue des préconisations des programmes en vigueur pour cette édition (2002).

Dans ce manuel, l'aspect décimal est donc construit à partir du groupement par 10 des unités successives. Quand il est dit par exemple que « 1000 c'est 10 groupes de 100 » cela fait référence à ces groupements avec le matériel de numération et non à une multiplication par 10. Par contre, on ne voit pas clairement comment l'aspect position est pris en charge. On peut d'ailleurs noter que le tableau de numération n'est pas utilisé alors que, dans les autres manuels étudiés, c'est justement ce tableau qui permet de faire le lien entre les unités de numération et la position des chiffres.

4.4 Conclusion

L'étude des manuels confirme tout d'abord les contraintes que nous avons relevées à propos de l'enseignement de la numération. Cependant, cette étude nous a permis également de montrer qu'il existait des marges de manœuvre possibles pour l'enseignant. En effet, dans certains manuels nous avons trouvé une formulation des relations entre unités (aspect décimal) comme un savoir de référence (« dico-math », « j'ai appris ») ainsi que des types de tâches permettant de les mettre en jeu : dénombrer et « nombre de ». A la différence des programmes, nous avons également pu voir une utilisation des unités de numération pour des décompositions recompositions ainsi que pour la formulation de l'aspect décimal de la numération.

V - LES CONSEQUENCES POSSIBLES SUR LES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS

Cette étude nous a permis de mettre en évidence des contraintes importantes pour l'enseignement de la numération des nombres à quatre chiffres. La valorisation de certains types de tâches (comparaison et lecture/écriture des nombres) montre que l'institution actuelle privilégie un seul savoir de la numération, l'aspect position. La valorisation des écritures multiplicatives avec les puissances de 10 et le peu de place accordé aux écritures utilisant les unités de la numération renforcent ce phénomène. Cependant les deux derniers manuels étudiés montrent qu'il existe des espaces de libertés pour les enseignants.

Cela pose également la question de la description des savoirs dans les guides destinés à l'enseignant. En effet, dans les deux premiers manuels que nous avons étudiés, quand nous avons vu des exercices dans lesquels l'aspect décimal pouvait être en jeu, nous avons remarqué que celui-ci restait toujours implicite dans les commentaires destinés à l'enseignant.

Précisons toutefois que notre étude, qui pourrait gagner en précision en analysant davantage de manuels, concerne des contraintes et espaces de libertés possibles dans l'institution. Mais, un enseignant donné n'a pas forcément accès, par exemple, à l'un des trois manuels étudiés, ou peut en utiliser d'autres (relevant même de programmes plus anciens). Cela signifie que son espace de liberté et les contraintes qui vont peser sur ses choix ne peuvent pas être exactement ceux qui sont présentés ici, même s'ils devraient toutefois en être assez proches.

Pour étudier des effets possibles des contraintes et libertés institutionnelles sur les pratiques des enseignants, nous sommes allés observer les séquences sur les nombres à quatre chiffres mises en œuvre par deux enseignants de CE2. Ces observations ont permis de constater le poids de ces contraintes institutionnelles. En effet, dans les deux classes les types de tâches travaillés sont : décomposer, lire/écrire, comparer, avancer/reculer (dans la suite écrite). La progression est très proche même si les enseignants n'utilisent pas le même support.

Tout d'abord, l'aspect position est un savoir central de la progression. Les deux enseignants utilisent les unités de la numération pour nommer les rangs dans l'écriture en chiffres (et aussi pour effectuer certaines décompositions). Ils écrivent m, c, d, u au-dessous ou au-dessus des chiffres, mais sans faire le tableau de numération.

Quant à l'aspect décimal, il est quasiment absent. Dans la première classe, il n'apparaît jamais dans les situations proposées. Cependant, on peut trouver dans l'évaluation finale un exercice de recomposition pour lequel les deux cas de la dernière ligne mettent en jeu cet aspect décimal :

Ecris le nombre correspondant aux écritures :	
5 000 + 600 + 3 : <u>5603</u>	(2 x 1 000) + (5 x 10) : <u>2050</u>
(4 x 1 000) + 9 : <u>4009</u>	67c 8d 9u : <u>6789</u>
9 m 8 d : <u>9080</u>	6 000 + 80 + 1 : <u>6081</u>
12 centaines, 3 milliers : <u>123 400</u>	25 dizaines, 6 centaines, 4 milliers : <u>4625 400</u>

Figure 10 : une production d'élève, évaluation finale

Quand j'interroge l'enseignante sur les difficultés rencontrées par certains élèves dans cet exercice, elle explique les choix qu'elle a effectués ici :

« On n'avait pas forcément l'ordre à chaque fois qui était imposé. J'avais inversé parfois, j'avais d'abord mis le nombre de centaines et le nombre de milliers ou alors je n'avais pas mis de centaines ou voilà + Et là c'est là où ils se sont trompés en général, enfin y'en a une partie, on va dire la moitié, se sont trompés dans ces cas-là. Ils ne font pas attention, de suite ils écrivent le nombre par rapport à ce qui est écrit dans l'ordre en fait »

Les variables indiquées par l'enseignante ne correspondent pas à celles qui permettent de mettre en jeu l'aspect décimal (ici il s'agit du fait d'avoir des nombres à deux chiffres pour certaines unités) et les erreurs sont interprétées comme des erreurs d'inattention et non en référence aux savoirs en jeu. Nous interprétons cela comme une conséquence des contraintes institutionnelles.

Dans la deuxième classe l'aspect décimal est en jeu dans une seule situation. Les élèves ont à disposition des étiquettes $\boxed{1}$, $\boxed{10}$, $\boxed{100}$, $\boxed{1000}$ et ils doivent recomposer les nombres suivants :

8c 4d 3u = ..., 32d = ..., 13c = ..., 12c 8d 1u = ..., 14c 2u = ..., 12c 11d 2u = ...
(les lettres c, d, u représentent les centaines, dizaines, unités).

Pour les 5 premiers cas, les élèves se contentent de juxtaposer les chiffres sans utiliser le fait que 10 centaines = 1 millier. Cependant pour le dernier cas, ce n'est plus possible car sinon on trouve 12112. Aucun élève ne trouve la solution et cela pose de réels problèmes de gestion de la mise en commun. L'utilisation des étiquettes aurait pu aider les élèves à échanger dix étiquettes 10 contre une étiquette 100, mais l'enseignant préfère amener les élèves à effectuer un comptage de cent en cent, dix en dix et un en un à l'oral. Il contourne ainsi l'utilisation de l'aspect décimal, qui, du coup, n'apparaîtra pas au cours de la séquence.

Nous avons alors fait l'hypothèse que l'aspect décimal de la numération n'est pas reconnu comme un savoir fondamental de la numération et il n'est pas disponible chez l'enseignant. Ainsi, même si celui-ci constate les difficultés rencontrées par ses élèves, il n'est pas à même d'en expliquer l'origine ni d'avoir une intervention adaptée. Nous interprétons aussi cela comme une conséquence des contraintes institutionnelles.

VI - DES PERSPECTIVES POUR LA FORMATION

La mise en évidence de l'influence de ces contraintes institutionnelles sur les deux enseignants observés permet de commencer à pointer quelques pistes de travail pour la formation des enseignants.

Tout d'abord, il semble nécessaire d'identifier explicitement les deux savoirs de la numération. En effet, les programmes ont une entrée principalement par les types de tâches et l'utilisation de l'expression « connaître la valeur des chiffres en fonction de leur position » ne suffit pas pour permettre aux enseignants d'identifier l'aspect décimal de la numération. Cette identification peut se faire à partir du repérage de difficultés d'élèves comme celles que nous avons pointées dans la première partie. Dans cette perspective, l'utilisation des unités de numération est importante car cela permet en particulier de formuler l'aspect décimal (10 centaines = 1 millier) sans substituer des règles de calcul (règle des zéros en particulier) aux savoirs de la numération.

En lien avec cette première piste de travail, il semble important d'amener les enseignants à chercher des traces possibles de l'aspect décimal dans les exercices proposés dans leurs manuels ainsi que de travailler à l'adaptation des situations proposées. Un jeu sur les variables peut souvent permettre de mettre en jeu ce savoir (comme par exemple, plutôt que de chercher une seule décomposition d'un nombre en unités, dizaines, centaines, milliers on peut en chercher plusieurs). Notons que nous avons trouvé, dans Cap Maths CE2, pour les nombres à trois chiffres, de nombreuses situations permettant de travailler l'aspect décimal. Il suffirait alors simplement de modifier la taille des chiffres.

Il est aussi important de montrer en quoi le travail sur les deux aspects de la numération est important pour la compréhension des techniques opératoires des quatre opérations. Le document d'accompagnement des programmes de 2002 sur le calcul posé peut alors être une ressource utile (on le trouve encore sur Internet).

Enfin, malgré la taille des nombres en jeu, il faut redonner une place aux problèmes de dénombrement de collections matérielles. En effet, ce type de problème permet de motiver l'étude de la numération et le dénombrement de grandes collections permet aux élèves de faire l'expérience des groupements

successifs par 10 (comme dans la situation des « fourmillions » d'ERMEL CE1 par exemple). De plus, cela permet, par la suite, d'avoir un matériel disponible auquel l'enseignant peut avoir recours pour poser de nouveaux problèmes ou remédier à des difficultés dans l'utilisation des relations entre unités (comme lorsque l'on doit recomposer un nombre comme $12c\ 11d\ 2u = \dots$, comme nous l'avons vu précédemment dans une classe). Dans les trois manuels étudiés, aucune collection matérielle n'est utilisée pour l'apprentissage de la numération des nombres à quatre chiffres. Il n'en est pas fait référence non plus dans les programmes. Nous terminerons par cette citation d'A. Mercier (1997) qui montre pourtant toute l'importance de l'appui sur les activités de groupements et d'échanges réalisées avec des collections : *« Grâce au système de numération en base, toutes les pratiques par déplacements d'objets matériels (bûchettes, cailloux, boules, jetons, etc.) sont remplacées par un travail ostensif qui peut légitimement se substituer aux pratiques matérielles (bûchettes, cailloux, boules, jetons, etc.) parce qu'il en rend compte complètement. Cela nous amène à dire que l'activité mathématique humaine consiste en une manipulation d'écritures qui rend compte des pratiques matérielles auxquelles elle se substitue ».*

VII - BIBLIOGRAPHIE (TITRE 1)

- BEDNARZ N., JANVIER B. (1984). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage, *Grand N* n°33, éditions IREM de Grenoble, pp.5-31
- BOSCH, M., GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble, pp.107-122.
- CHAMBRIS C. (2008). Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels. Thèse de l'université de Paris 7.
- CHEVALLARD Y. (1991) La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné, éditions La pensée sauvage.
- CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19/2, éditions La pensée sauvage, pp.221-266.
- MA L. (1999) *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*, éditions Lawrence Erlbaum Associates.
- MERCIER A. (1997), La relation didactique et ses effets. In : Blanchard-Laville C. (sous la direction de) *Variations sur une leçon de mathématiques*, éditions L'harmattan, pp.259-312
- TEMPIER F. (2009). L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants, *Cahier Didirem*, n°60, IREM Paris 7.

Manuels scolaires :

- BRISSIAUD R. J'apprends les maths CE2, livre de l'élève, Retz, 2003
- BRISSIAUD R. J'apprends les maths CE2, livre du maître, Retz, 2004
- CHARNAY R. Cap Maths CE2, manuel de l'élève, Hatier, 2007
- CHARNAY R. Cap Maths CE2, guide de l'enseignant, Hatier, 2007
- DEMAGNY C., DEMAGNY JP., DIAS T., DUPLAY JP., La tribu des maths CE2, livre de l'élève, Magnard, 2008
- DEMAGNY C., DEMAGNY JP., DIAS T., DUPLAY JP., La tribu des maths CE2, Guide du maître, Magnard, 2008

Textes des programmes, documents d'applications et évaluations nationales :

- Programmes de 2002 : BO Hors série n°1 du 14 février 2002
- Documents d'application des programmes 2002 : Mathématiques, cycle des approfondissements (cycle 3), Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Direction de l'enseignement scolaire, CNDP, 2002.
- Programmes de 2007 : BO Hors série n° 5 du 12 avril 2007
- Programmes de 2008 : BO Hors série n°3 du 19 juin 2008
- Évaluations nationales CE2 et sixième de 2005, Ministère de l'Éducation nationale de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective, sous direction de l'évaluation.
- Évaluation nationale des acquis des élèves de CM2, 2009, Ministère de l'Éducation nationale, Direction générale de l'enseignement scolaire.

VIII - ANNEXE 1 (LA TRIBU DES MATHS CE2, MAGNARD, P.34)

9

Les nombres jusqu'à 9 999 (1)

Je fais la différence entre un « chiffre »
et un « nombre »

• Avant de commencer

Combien faut-il de zéros pour écrire tous les nombres de 900 à 999 ?

Recherche

Les abeilles mathématiciennes

A Une ruche est généralement composée de cadres. Dans ces cadres, les abeilles ouvrières construisent des alvéoles en cire pour stocker le miel et le pollen, ou les œufs et les larves.

Chaque ruche de l'apiculteur M. Bourdon contient 10 cadres.

Chaque cadre contient 1 000 alvéoles.

Un cadre est plein quand toutes ses alvéoles contiennent au moins un œuf.



Alvéoles.



Cadre d'une ruche.

Un apiculteur élève des abeilles.



Combien y a-t-il de cadres pleins si 7 326 alvéoles sont remplies d'œufs ?

Un cadre, c'est 1 millier d'alvéoles (1 000 alvéoles).



B Dans une ruche de M. Bourdon, cinq cadres sont pleins et un sixième cadre ne contient que quelques alvéoles remplies.

Quel peut être le nombre d'alvéoles remplies dans cette ruche ?

4 856

6 110

5 340

578



Pouvez-vous expliquer pourquoi ?

Entraînement

1 Écris le plus petit et le plus grand nombre possibles en utilisant tous les chiffres.

4

6

1

8

IX - ANNEXE 2 (LA TRIBU DES MATHS CE2, MAGNARD, P.35)

CALCUL MENTAL :

Dire le chiffre ou le nombre de dizaines, centaines, milliers... dans un nombre

- 2 Écris six nombres avec ces mots :

cent(s)

trois

mille

quatre

Tu ne dois pas dépasser 9 999 !

- 3 Complète les suites.

737	837	937							1 637
-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	-------

502	1 502							8 502
-----	-------	------	------	------	------	------	------	-------

....				1 189	1 289				
------	------	------	------	-------	-------	------	------	------	------

....			3 041	3 031				
------	------	------	-------	-------	------	------	------	------

- 4 Recopie et complète ce tableau.

Nombre	Chiffre des milliers	Nombre de milliers	Chiffre des centaines	Nombre de centaines	Chiffre des dizaines	Nombre de dizaines
5 423	5	5	4	54	2	542
8 764						
9 070						
7 301						
6 845						

- 5 Décompose comme dans l'exemple.

2 364 = 2 milliers + 3 centaines + 6 dizaines + 4 unités

3 521

9 578

8 060

- 6 Décompose comme dans l'exemple.

3 541 = 3 000 + 500 + 40 + 1 = (3 × 1000) + (5 × 100) + (4 × 10) + 1

2 387

9 063

4 530

Labo Maths



L'équipe des chercheurs du Labo Maths a reçu un défi d'une classe de CE2 :

« Au jeu du mikoda, un bâton vert donne 1 point, un rouge 10 points, un bleu 100 points et un jaune 1 000 points.

Le nombre de bâtons de chaque couleur est illimité.

Notre classe a trouvé cinq possibilités pour faire 9 504 points. Serez-vous capables de faire mieux ? »

Relevez ce défi avec l'équipe !



X - ANNEXE 3 (LA TRIBU DES MATHS CE2, MAGNARD)

Bilan de période 2

1 Décompose les nombres. 245 = 2 centaines, 4 dizaines, 5 unités a) 687 = b) 1 099 = c) 808 = d) 1 104 = e) 1 237 =	2 Recompose les nombres. 2 centaines, 4 dizaines, 5 unités = 245 a) 9 centaines, 9 dizaines, 9 unités = b) 1 millier, 5 centaines, 3 unités = c) 1 millier, 2 centaines, 7 unités = d) 1 millier, 7 dizaines, 5 unités = e) 7 centaines, 8 dizaines =
--	--

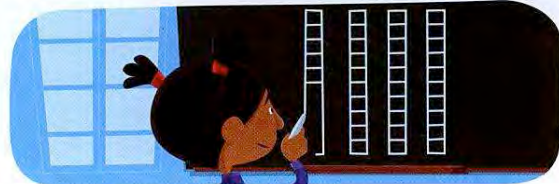
Bilan de période 3

4 Écris en chiffres. a) huit mille neuf cent quatre b) mille cent quatre-vingt-dix-neuf c) sept mille soixante et onze	5 Écris en lettres. a) 2 159 b) 5 468 c) 8 905
6 Range les nombres dans l'ordre croissant. 7 814 5 032 9 100 8 936 9 836 9 099 7 777 3 505 7 757 9 101	

XI - ANNEXE 4 (CAP MATHS CE2, HATIER, UNITE 7, SEANCE 1)

Chercher Mille

- 1 Écris mille en chiffres.
- 2 Écris en chiffres et en lettres le nombre qui vient juste avant mille.
- 3 Écris en chiffres et en lettres le nombre qui vient juste après mille.
- 4 Maïa dessine des colonnes de dix carrés. Combien doit-elle dessiner de colonnes pour obtenir mille carrés ?
- 5 Sur une grande feuille, trace avec un camarade une ligne brisée de mille millimètres.



Exercices

- 6 Dans une école, lorsque tous les enfants lèvent tous leurs doigts, cela fait mille doigts levés. Combien y a-t-il d'enfants dans l'école ?
- 7 Un siècle, c'est 100 ans. Combien faut-il de siècles pour faire un millénaire ?
- 8 Dans mille :
 - a. combien de fois y a-t-il 200 ?
 - b. combien de fois y a-t-il 50 ?
 - c. combien de fois y a-t-il 25 ?
- 9 Dans une boîte, on range deux chaussures. Combien faut-il de boîtes pour emballer mille chaussures ?
- 10 Trouve les calculs qui ont pour résultat le nombre mille. Avec les lettres de ces cases, écris un mot que tu connais.

A 50 x 4	C 100 x 6	M 500 x 2	L 4 x 250
T 250 x 2	E 100 x 10	V 300 x 3	I 5 x 200
B 25 x 20	E 200 x 4	N 10 x 10	P 100 x 0
O 20 x 30	F 25 x 4	L 25 x 40	R 40 x 20

XII - ANNEXE 5 (CAP MATHS CE2, HATIER, UNITE 7, SEANCE 2 ET 3)

Chercher Au-delà de 1 000

- 1 Fais une première partie du jeu avec 2 ou 3 de tes camarades.
Vous pourrez ensuite faire d'autres parties.

Le plus grand total

3 ou 4 joueurs

Matériel

- 1 paquet de 15 cartes de 1 point
- 1 paquet de 15 cartes de 10 points
- 1 paquet de 15 cartes de 100 points
- 1 paquet de 15 cartes de 1 000 points
- 1 paquet de 15 cartes de 10 000 points
- un dé
- une feuille de jeu par joueur

Jouer

Une partie se joue en 4 tours.

À tour de rôle, les joueurs lancent le dé et prennent dans un paquet autant de cartes qu'il y a de points sur le dé.
Attention, il faut prendre les cartes dans le même paquet.
Le joueur conserve les cartes et complète sa feuille de jeu.

Le gagnant est celui qui a le plus grand total de points.



Exercices

DICO-MATHS p. 4

Décomposer un nombre

- 2 Voici les feuilles de jeu de Tim et Maïa.
Combien chacun a-t-il marqué de points ? Qui a gagné la partie ?

Tim	dé	carte
1 ^{er} tour	2	1 000
2 ^e tour	4	10
3 ^e tour	1	10 000
4 ^e tour	6	1

Maïa	dé	carte
1 ^{er} tour	3	100
2 ^e tour	6	1 000
3 ^e tour	5	1
4 ^e tour	6	10

- 3 Anaïs a marqué 54 023 points.
Combien de cartes de chaque sorte a-t-elle gagnées ?
- 4 Léo a déjà 40 047 points.
Quelles cartes doit-il gagner pour avoir 43 047 points ?

Chercher Au-delà de 1 000

- 1 trois quatre vingt(s) trente quarante cent(s) mille -

Avec ces mots, réalise chacun de ces nombres.
Écris-les en chiffres et en lettres :

- a. 423 f. quatre dizaines de mille et trois centaines
b. 3 080 g. trois dizaines de mille, quatre mille et deux dizaines
c. 34 100 h. $(4 \times 1\,000) + (3 \times 100) + (2 \times 10)$
d. 1 334 i. $(3 \times 100\,000) + (2 \times 10\,000) + 4$
e. 324 000 j. $(8 \times 10\,000) + (3 \times 100) + (3 \times 10)$

- 2 Écris les 20 nombres qui suivent ceux-ci :

2 095 2 096 2 097 ...

- 3 Écris les 20 nombres qui sont avant ceux-ci :

... 6 905 6 906 6 907

Exercices

DICO-MATHS p. 2

Lire et écrire les nombres

- 4 Écris en chiffres :
- a. mille deux cent trente-cinq
b. six mille
c. mille six cents
d. cinq mille soixante-dix
e. soixante-dix mille
f. cent mille sept cents
- 5 Écris en lettres :
- a. 13 000 c. 1 435
b. 6 060 d. 20 002
- 6 Avec 0 7 5 4 9 écris :
- a. le plus petit nombre possible
b. le plus grand nombre possible

XIII - ANNEXE 6 (CAP MATHS CE2, HATIER, UNITE 12, SEANCE 4)**Chercher Problèmes**

Pour préparer la fête de l'école, la classe a reçu de longues bandes de tissu. Plume découpe des rubans de 2 cm de long, Maïa des rubans de 10 cm de long et Tim des rubans de 100 cm de long.

- 1** Anaïs donne :
 - une bande de 26 cm de long à Plume ;
 - une bande de 70 cm de long à Maïa ;
 - une bande de 200 cm de long à Tim.Combien chacun pourra-t-il découper de rubans dans sa bande ?
- 2** Anaïs donne ensuite à chacun une bande de 640 cm.
Combien chacun pourra-t-il découper de rubans dans sa bande ?
- 3** Si Anaïs donnait à chacun une très longue bande de 2 416 cm, combien chacun pourrait-il découper de rubans ?

Exercices

- 4** Maïa a une bande de 250 cm.
Elle veut découper le plus possible de rubans de 10 cm de long.
Combien peut-elle en découper ?
- 5** Dans une bande de 507 cm de long, combien peux-tu découper de rubans de 10 cm de long ?

XIV - ANNEXE 7 (J'APPRENDS LES MATHS, CE2, RETZ, SEQUENCE 74)

SEQUENCE 74 Numération au-delà de 1000 (1) : 1000, c'est 10 groupes de

Table de 6 puis « 6 fois 70 »
Numération

10 x = 10 x = 10 x = 10 x =

1 Prends ton compteur en carton et complète.

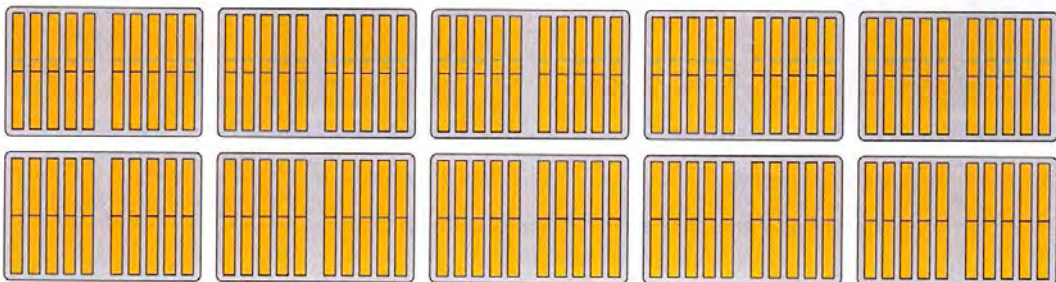


Sur le compteur :

Combien de fois 100? 9 fois 100 et 99

Combien de fois 10?

Picbille et Dédé ont 1 bille de plus.
Quand ils ont 10 valises de 100 billes, ils les mettent dans une caisse de 1000 billes et ils ferment le couvercle. Colle les couvercles des valises et de la caisse et complète.

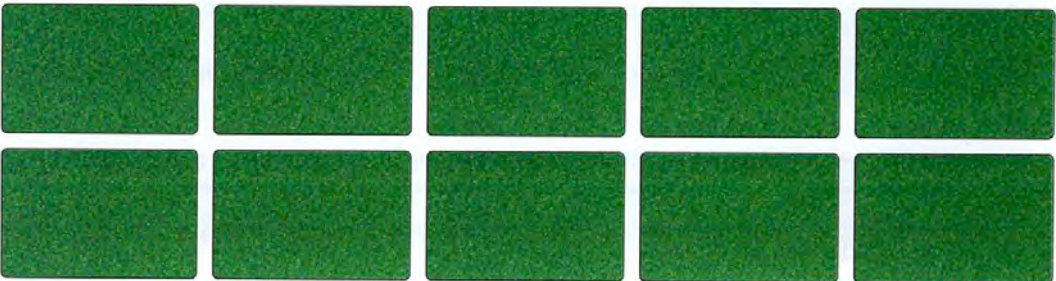


Sur le compteur :

Combien de fois 100?

Combien de fois 10?

Picbille et Dédé ont 1 bille de plus. Colle le couvercle de la caisse et complète.



Sur le compteur :

Combien de fois 100?

Combien de fois 10?

Affiche sur ton compteur les 2 nombres suivants et imagine les collections de billes correspondantes.

100 groupes de 10; 1100, c'est 11 groupes de 100 ou...

2

Imagine : Picbille et Dédé ont maintenant 1004 billes et ils ajoutent des billes une à une...
Écris la suite de nombres sur le compteur et décris les collections de billes.

1 0 0 4

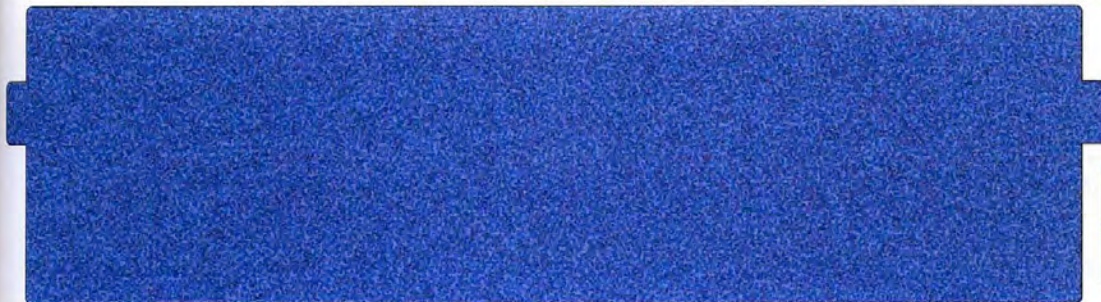
Picbille et Dédé ont 1 bille de plus... Colle le couvercle de la caisse et complète.



Sur le compteur :

Combien de fois 100?

Combien de fois 10?



Sur le compteur :

Combien de fois 100?

Combien de fois 10?

3

Imagine que Picbille et Dédé ont déjà 1097 billes... et qu'ils ajoutent des billes une à une.
Pour chaque nombre, écris-le sur le compteur, décris la collection de billes
et dis combien il y a de centaines et combien de dizaines.

1 0 9 7

Fais de même en imaginant que Picbille et Dédé ont déjà 1196 billes...

1 1 9 6

Fais de même en imaginant que Picbille et Dédé ont déjà 1998 billes...

1 9 9 8

J'ai appris:

Quand Picbille a 1285 billes,
il ne voit plus les 12 centaines,
mais, avec les chiffres,
on continue à les voir :

1 2 8 5
centaines

Il ne voit plus
les 128 dizaines,
mais... :

1 2 8 5
dizaines

1000, c'est 10 groupes de 100, c'est aussi 100 groupes de 10.