LA RESOLUTION DE PROBLEMES EN QUESTIONS QUELS SAVOIRS OU SAVOIR-FAIRE ? QUELLE INSTITUTIONNALISATION ?

Le groupe Mathaqui'
Caroline Bulf, Valentina Celi, Lalina Coulange,
Carine Reydy, Grégory Train, Patrick Urruty
IUFM d'Aquitaine, Université de Bordeaux 4
Pour le groupe : lalina.coulange@aquitaine.iufm.fr

Résumé
Au travers d'expériences diverses conduites dans le cadre de la formation des professeurs des écoles ou de la recherche, nous nous interrogeons sur la résolution de problèmes dits « pour apprendre à chercher ».
Au fil de notre réflexion, une double question est devenue centrale : celle des savoirs ou savoir-faire en jeu, de leur institutionnalisation et de leur devenir. *Quels savoirs ou savoir-faire sont en jeu dans la résolution de problèmes « pour apprendre à chercher » ?*[1] *Quelle institutionnalisation peut être conduite autour de ces savoirs ou savoir faire ?*
Nous mettrons à l'étude deux types de matériaux de façon à illustrer ce questionnement :
- un compte rendu d'expérience de défi mathématique « les quadrillages » avec correspondance entre une classe de CP et de GS conduit par P. Urruty.
- des extraits de vidéo dans une classe de CM2 « le problème des 1 », issus d'une recherche menée dans le cadre du réseau RESEIDA par L. Coulange.

Depuis plusieurs années, la résolution de problèmes a fait l'objet de nombreux travaux de recherche, entre recherche et formation ou enseignement des mathématiques à l'école.

Ce thème s'est constitué en objet d'étude principal lors de deux récents colloques de la COPIRELEM (Bombannes 2008 et Troyes 2007) dont l'intitulé était : « L'enseignement des mathématiques, où est le problème ? »

Les membres de notre groupe de travail se sont investis dans diverses expériences autour de cette thématique de la résolution de problème : dans l'organisation et la mise en œuvre du rallye mathématique de la Gironde, d'animations type Maths en Jean's à l'école (Maths en 3 B) ou à travers l'observation de pratiques enseignantes autour de la résolution de problèmes en mathématiques.

A l'occasion de ces expériences pour une part communes a émergé un questionnement relatif aux problèmes dits « pour apprendre à chercher » en situation de classe.

Précisons que nous entendons par problème « pour apprendre à chercher » ce qu'il était dit dans les documents d'application des programmes de 2000 (extraits des document d'application des programmes Mathématiques de 2000). C'est avant tout le fait que les élèves ne puissent disposer d'une solution rapide, « déjà éprouvée » pour résoudre ces problèmes, et que « plusieurs démarches de résolution sont possibles » qui caractérise donc un « problème de recherche » : le champ des problèmes

[1] Ce qui ne sera pas sans nous renvoyer à des distinctions à opérer entre connaissances et savoirs, ou sans nous conduire à retravailler le concept d'institutionnalisation...

potentiellement concernés est dès lors très vaste et les problèmes que nous utiliserons comme exemple par la suite, peuvent d'ailleurs apparaître assez contrastés.

Le fait de parler de problèmes pour apprendre à chercher plus que de « problèmes de recherche » ou de « problèmes pour chercher » vient du fait que ce qui nous semble également caractériser les types de situations envisagées est la nature du projet d'enseignement à travers la résolution de ces problèmes et mis en avant dans ces textes officiels : c'est bien « l'activité même de résolution de problème qui est privilégiée » et que l'on vise à développer.

Des questions sur le thème de la résolution de problème « pour apprendre à chercher » en situation dite ordinaire d'enseignement ont déjà été soulevées à plusieurs reprises, notamment par Hersant et Thomas (2008) et Hersant (2008 et 2009), et orientées vers les pratiques des enseignants et des élèves à ce sujet. Elles se sont jusqu'alors beaucoup centrées sur le processus de dévolution, sa prise en charge par des professeurs des écoles, ainsi que sur ses conséquences éventuelles de ce processus au regard des enjeux des problèmes « pour apprendre à chercher ».

Les questions de Mathaqui' s'orientent quant à elles sur le processus d'institutionnalisation.

Ce n'est pas sans réinterroger la nature des savoirs ou savoir-faire en jeu dans la résolution de problèmes dits classiquement « pour apprendre à chercher » : quels savoirs ou savoir-faire sont en jeu dans la résolution de problèmes « pour apprendre à chercher » ? Quelle institutionnalisation peut être conduite autour de ces savoirs ou de ces savoir-faire ?

Nous ne sommes d'ailleurs pas les seuls, ni les premiers à faire émerger un tel questionnement. Avant nous, des chercheurs en didactique comme Mercier (2008) ou Margolinas et Laparra (2008) ont soulevé la question du processus d'institutionnalisation dans le cadre de situations d'enseignement relatives à des problèmes « pour apprendre à chercher » au sein de leurs travaux respectifs sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Houdement (2009) s'interroge également sur la nature et l'organisation des savoirs ou des savoir-faire potentiellement mis en jeu dans la résolution de ces problèmes.

Dans le cadre de cet atelier, nous avons souhaité étayer nos interrogations, les faire partager aux participants à travers l'étude de deux exemples, sur la base des matériaux suivants :

- le compte rendu d'une expérience de défi mathématique « les quatre cases » avec correspondance entre une classe de CP et de GS, conduit par Patrick Urruty.

- des extraits de vidéo autour de la résolution d'un problème « le problème des 1 » au sein d'une classe de CM2 socialement hétérogène, issus d'une recherche conduite par Lalina Coulange, dans le cadre du réseau d'équipes de recherche RESEIDA[2] (Coulange 2009).

I - LE PROBLEME DES QUATRE CASES

La première consigne donnée aux participants répartis en petits groupes était de résoudre le problème des 4 cases, dont nous leur avions préalablement donné l'énoncé (tiré de l'ouvrage de D. Valentin (2005)), avec le matériel suivant :

Matériel : un stock de supports quadrillés de type 3 cases × 3 cases, regroupés sur une feuille A4.

[2] Réseau d'équipes de recherche : REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages, co-piloté par E. Bautier et J-Y. Rochex

Trouver le plus possible de façons différentes de colorier 4 cases du quadrillage.

Précision : deux figures sont considérées identiques si elles sont superposables (en faisant tourner l'un des supports on retrouve l'autre).

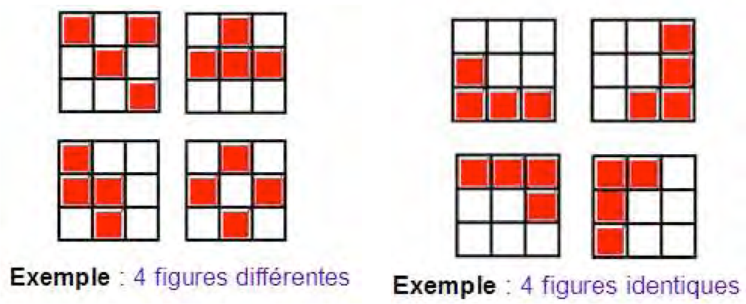


Figure 1 : figures différentes et identiques, problème des 4 cases.

Les participants avaient également à répondre à cette deuxième consigne :

Pensez-vous que ce problème est intéressant à poser en classe à des élèves de GS/CP ? Proposez des arguments pour/contre.

Les participants se sont aisément emparés du problème, même si peu d'entre eux ont effectivement trouvé toutes les solutions , 34 au total, dans le temps imparti.

L'argumentaire « pour ou contre » au sujet de la mise en œuvre autour de ce problème dans une classe de GS/CP, développé lors de la mise en commun est assez proche de celui mis en avant *a priori* par les animateurs de l'atelier.

On peut en synthétiser les principaux éléments ainsi :

+ Les arguments en faveur d'une mise œuvre sont les suivants :

Le problème est facilement communicable (tant auprès des enseignants que des enfants) et semble pouvoir engager les élèves dans une activité de recherche et ce sur la durée, de façon autonome. La recherche pour être menée à terme doit être organisée : notamment afin de repérer les figures identiques en vue d'éliminer d'éventuels doublons.

- Les arguments contre sont :

Les élèves ne peuvent disposer d'arguments mathématiques pour savoir si le problème est clos ou pas. Les notions mathématiques convoquées par la résolution du problème sont assez implicites et en dehors des connaissances visées par les programmes en vigueur (transformations dans le plan) ou d'un niveau très élémentaire (repérage sur quadrillage, reconnaissance de figures identiques sur un quadrillage) : on perçoit donc difficilement à quels savoirs explicitables, et « institutionnalisables », voire même à quelles connaissances visées, ces notions peuvent renvoyer. La recherche exhaustive des solutions ne débouche pas sur l'identification d'une méthode, d'une technique mathématique qui serait susceptible d'être réinvestie, du moins de manière directe dans la résolution d'un champ de problèmes clairement identifiable.

P. Urruty a ensuite exposé le compte rendu de l'expérience menée autour de ce problème : le déroulement d'un défi entre classes de GS et de CP (dans des classes de Maîtres Formateurs de l'école J. Cocteau, D. Lafforgue et A.-M. Denau), suivant différentes étapes :

Etape 1 : Présentation du problème (GS)

Le problème est présenté en grand groupe. Plusieurs exemples de supports préparés par l'enseignant permettent de définir deux figures identiques / deux figures différentes. Les élèves sont informés que les élèves de CP travaillent sur le même problème en parallèle.

Etape 2 : recherche et bilans successifs (GS)

En ateliers, les élèves accrochent au fur et à mesure leurs propositions, sur une affiche collective (visible depuis leur place) qu'ils tentent de compléter à l'aide de figures nouvelles.

Lors de phases de regroupement, avec l'aide de l'enseignant si nécessaire, les doublons sont repérés et éliminés, pour ne conserver qu'un exemplaire de chaque figure sur l'affiche collective.

Etape 3 : nécessité d'une aide extérieure (GS/CP)

Au fur et à mesure que l'affiche se remplit, il devient plus difficile au sein de la classe de GS de contrôler si une figure a déjà été trouvée ou pas. A l'issue de bilans collectifs, on constate que le nombre de cas différents de figures n'a que peu augmenté, voire plus du tout.

Les élèves sont orientés par le maître vers une demande d'aide aux CP. Les élèves de GS écrivent une lettre aux CP pour leur indiquer l'état de leur recherche et demander une aide pour trouver toutes les solutions (s'il leur en manque effectivement).

Etape 4 : résolution du problème

Les élèves de CP indiquent qu'ils ont eux-mêmes obtenu 34 solutions et suggèrent aux élèves de GS d'organiser la collection en différentes familles, puis de chercher à compléter chacune de ces familles :

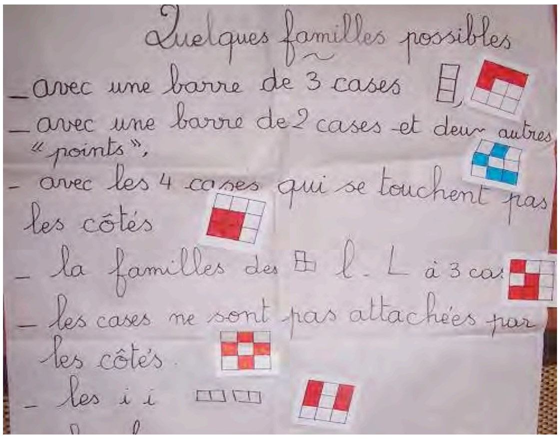


Figure 2 : Affiche résumant les suggestions des CP, problème des 4 cases.

Une fois que toutes ces « familles » ont été identifiées à partir des propositions des CP, il devient plus facile de compléter chacune d'entre elles pour obtenir le nombre total de figures différentes possibles.

L'analyse de ce déroulement permet de pointer l'ensemble des connaissances effectivement mises en fonctionnement à travers la situation d'enseignement relative à la résolution de ce problème en GS de maternelle. Les connaissances mathématiques convoquées sont pour une part des savoirs liés au repérage dans l'espace (repérer des cases dans un quadrillage) ou de façon implicite aux transformations géométriques (faire fonctionner implicitement les transformations : translation, rotation ; distinguer des figures identiques et des figures symétriques). Des savoir-faire relatifs à la résolution de problème peuvent également être cités : accepter de ne pas trouver immédiatement ou rapidement une solution à un problème, essayer et organiser ses essais, etc. On peut aussi songer à des compétences transversales relatives à la maîtrise de la langue (à l'oral : justifier la validité d'une solution ; à l'écrit : rédiger une lettre adaptée aux interlocuteurs, communiquer par écrit les résultats d'une recherche).

Au final, cette lecture de déroulement nous invite à penser que l'intérêt de la situation liée au « problème des 4 cases » (du moins ici dans le cadre d'échanges entre GS/CP) serait ici davantage dans la mise en œuvre du défi que dans la résolution du problème mathématique lui-même. En effet les savoirs mathématiques en jeu dans cette résolution paraissent soit « minimaux » (repérage sur un quadrillage 3x3) soit difficilement explicitables (les transformations géométriques) et donc peu donnés à voir aux élèves. Quand aux savoir-faire relatifs à la résolution de problèmes en mathématiques, ils restent extrêmement flous et très éloignés d'une technique ou d'une méthode mathématique transférable sur un corpus de problèmes de nature proche. Ces savoirs ou savoir faire à caractère mathématique semblent ici s'effacer derrière les compétences d'ordre plus transverse, liées à la situation de communication.

II - LE PROBLEME DES 1

La situation d'enseignement en contexte « ordinaire » mise à l'étude dans la deuxième partie de l'atelier a été filmée à l'occasion d'une recherche sur les pratiques d'enseignants dans des classes de CM2 socialement hétérogènes, conduite dans le cadre du réseau d'équipe de recherche RESEIDA.

Cette séance est la troisième d'une séquence élaborée par une maîtresse sur le thème de la résolution de problème. Les problèmes retenus par l'enseignante sont extraits de rallyes de mathématiques (sans que pour autant un véritable rallye ne soit mis en place).

Ils présentent pour une part les caractéristiques de « problèmes de recherche », décrites dans les documents d'application des cycles 2 et 3 de 2002.

L'énoncé proposé aux élèves lors de la séance observée est le suivant :

> *On forme la suite des nombres qui ne peuvent s'écrire en n'utilisant que des 1 :*
>
> *1 11 111 1111 11111 111111 etc.*
>
> *Si on additionne les 20 premiers nombres de cette suite, quel sera le chiffre des dizaines du résultat ?*

Nous avons demandé aux participants de résoudre le problème et de faire une analyse préalable de la situation relative à ce problème posé à des élèves de CM2 :

Résolvez ce problème et imaginez le déroulement d'une séance en classe de CM2, centrée sur la résolution de ce problème.

Nous livrons ci-dessous l'analyse *a priori* de la situation faite par le chercheur qui recoupe en de nombreux points celle faite par les participants de l'atelier. Nous nous sommes notamment accordés pour trouver la consigne du problème complexe pour des élèves de ce niveau. La dévolution de cette situation nécessite *a priori* une forte intervention enseignante afin d'assurer la compréhension de cette consigne et une première entrée satisfaisante dans la résolution du problème, par une majorité d'élèves. Les connaissances à mettre en jeu sont nombreuses et diverses : relevant à la fois de la numération (distinction chiffre/nombre), de la compréhension d'un algorithme récursif (ajouter un 1 pour former le nombre suivant de la suite) et de la notion de suite (former une suite, les 20 premiers nombres de la suite). Pour résoudre ce problème, les élèves peuvent mettre en œuvre une procédure de base qui consiste à poser l'addition des 20 premiers nombres de la suite, et à l'effectuer.[3] Cette procédure coûteuse est susceptible d'engendrer des erreurs liées au fait d'avoir conjointement à poser l'opération et à écrire les 20 nombres concernés (opération « posée à l'envers » du sens d'écriture). De nombreuses procédures exactes ou erronées peuvent correspondre à une recherche d'économie par rapport à cette procédure de base comme par exemple : effectuer des additions intermédiaires « par paquets » en effectuant une partie de ces additions avec la calculatrice (tant que l'affichage le permet).

La procédure que l'on peut considérer comme la plus aboutie sous-entend une posture réflexive sur l'addition des 20 premiers nombres de la suite. Il s'agit de tenir un raisonnement sur la retenue correspondant aux 2 nouvelles dizaines obtenues en additionnant les 20 unités, à ajouter aux 19 dizaines obtenues en additionnant les dizaines des 20 nombres (qui en contiennent tous une, sauf le premier nombre 1), pour en conclure que le chiffre des dizaines du résultat sera 1 (car 19+2 = 2**1**). Ce raisonnement n'est pas élémentaire car il convoque des connaissances déjà rencontrées auparavant par les élèves sur le fonctionnement de la technique opératoire de l'addition : notamment la mise en relation du principe de retenue avec des propriétés sur les nombres relevant de la numération dans une situation complexe.

A la suite d'une mise en commun qui a fait ressortir une partie des difficultés potentielles d'appropriation de la situation, des procédures de résolution du problème posé (identifiées par l'analyse préalable des participants à l'atelier) notre deuxième consigne de travail était :

Analysez les extraits filmiques de la séance.

Nous évoquons ci-dessous des éléments de l'analyse *a posteriori* de la situation observée par le chercheur. Cette analyse a été livrée et discutée avec les participants de l'atelier.

Pendant la première phase de la séance, l'enseignante évoque publiquement les difficultés envisageables dans la compréhension de l'énoncé, susceptibles de gêner une première entrée satisfaisante dans la résolution du problème posé.

Elle revient sur le principe de construction de la suite de nombres : *D'accord, on rajoute un chiffre à chaque fois, d'accord ? Et toujours le même chiffre : le chiffre un*. Elle insiste sur la distinction chiffre/nombre en demandant combien de nombres comprend la suite de cinq nombres, qu'elle a elle-même écrite au tableau : *Il y a combien de nombres dans cette, dans cette suite là, celle que j'ai faite au tableau ? Tu lèves ton doigt ! Julie ? (…) Cinq ? Cinq ? Six ? Cinq. Alors, le premier, qu'est-ce que c'est ? (en pointant du doigt les nombres correspondant au tableau) Un, voilà le premier nombre, le deuxième, le troisième, le quatrième…* Puis elle demande quel est le chiffre des dizaines du quatrième nombre de la suite. L'élève sollicitée à plusieurs reprises (pour lire l'énoncé, pour aller montrer le chiffre des dizaines du quatrième nombre de la suite) lors de ce début de séance n'est pas n'importe quelle élève. Il s'agit d'une élève qui a d'ores et déjà montré un rapport problématique, voire conflictuel à la discipline enseignée, lors des séances précédentes (la semaine d'avant, envoyée au tableau pour la correction d'un problème, elle est en

---

[3] Cette procédure est apparue clairement lors des échanges avec les participants, tout comme les suivantes. L'analyse *a priori* du chercheur ne complète donc que légèrement les propositions des participants de l'atelier en catégorisant les procédures et en s'attardant davantage sur l'origine potentielle des erreurs observées dans la classe.

pleurs). L'attitude de l'enseignante semble donc adaptée pour permettre la dévolution de la situation aux élèves. Les aides collectives puis individuelles dans la deuxième phase de recherche individuelle sont judicieuses et répondent aux difficultés prévisibles dans l'appropriation du problème posé, sans pour autant empiéter sur la recherche d'une solution par les élèves et sur la situation d'apprentissage qui peut en résulter.

L'énoncé du problème semble d'ailleurs compris par une majorité des enfants qui peuvent dès lors s'investir dans la recherche d'une solution.

Lors de la phase de recherche, la majorité des binômes d'élèves observés s'investit dans des stratégies relevant de la procédure de base : l'addition effective des 20 premiers nombres de la suite. Avoir à écrire les termes de la suite et à poser l'opération de façon simultanée[4] va d'ailleurs provoquer des erreurs chez certains d'entre eux : les nombres étant écrits de gauche à droite, l'opération est en quelque sorte « posée à l'envers » (l'alignement se fait suivant le chiffre le plus à gauche des nombres écrits et non suivant le chiffre le plus à droite de leur écriture). Certains élèves mettent également en œuvre des stratégies erronées pour économiser les calculs : comme additionner les 10 premiers nombres de la suite, puis multiplier le résultat par 2, pour obtenir le résultat de l'addition des 20 premiers nombres.

Une seule élève, Julie (qui travaille seule) a résolu le problème par la stratégie la plus aboutie : en raisonnant sur le principe de retenue dans l'addition des 20 premiers nombres de la suite, suivant la procédure évoquée plus haut.

Lors de la phase de mise en commun, à la demande de la maîtresse qui envoie des élèves « choisis » au tableau, tous les types de solutions apparemment envisagés dans la classe sont représentés au tableau[5] : l'enseignante a su analyser les différentes procédures mises en œuvre par ses élèves.

Le tableau ci-dessous (présenté et discuté avec les participants de l'atelier, après un extrait de film où les élèves exposent la solution 1) résume les différents types de productions rendues publiques :

Solution 1 : Procédure erronée	Solution 2 : Procédure erronée	Solution 3 : Procédure correcte Erreur dans le calcul au tableau	Solution 4 : Procédure correcte de base	Solution 5 (Julie) dévoilée après les autres : Procédure correcte
Addition des 20 premiers nombres de la suite, posée à l'envers, Etc. + 11111 + 111 + 11 + 1	Addition posée des 10 premiers nombres de la suite Multiplication du résultat par 2	Additions posées intermédiaires (à 3 ou 4 termes) puis addition des résultats de ces additions pour trouver la somme des 20 premiers nombres	Addition posée des 20 premiers nombres de la suite. Le résultat de l'opération est indiqué « dans son intégralité ».	Raisonnement sur l'addition posée : le principe de retenue dans l'addition des 20 premiers nombres de la suite.

La maîtresse gère un débat collectif sur la base de ces productions : les procédures à l'œuvre derrière les solutions proposées font l'objet de formulations, ainsi que les connaissances mises en jeu par ces procédures ; la maîtresse interroge ensuite l'ensemble des élèves de la classe sur la validité de telle ou

[4] De plus le fait que les nombres soient tous des suites de « 1 » prive sans doute les élèves de moyens de contrôle sur l'interprétation de leur écriture chiffrée : les élèves semblent avoir des difficultés à interpréter ces « 1 identiques » en tant que chiffres de rangs et donc d'ordres (des unités, des dizaines, des centaines, etc.) différents.

[5] Notons que l'écriture des solutions apparentées à la procédure de base au tableau ralentit fortement le déroulement : elle s'avère très coûteuse puisque elle sous-entend l'écriture des 20 premiers nombres de la suite.

telle solution, en apportant éventuellement des éléments qui peuvent contribuer à la preuve correspondante.

La formulation de la proposition de Julie, rendue publique à la suite de toutes les autres pose problème : les écritures mathématiques produites par cette élève au tableau pour exprimer son raisonnement ne correspondent pas à ce qui est attendu par la maîtresse et sont peu acceptables au regard des conventions d'écriture en mathématiques. Julie pose en effet les deux opérations :

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times \quad 1 \\ \hline 20 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \overset{2}{19} \\ \times \quad 1 \\ \hline 21 \end{array}$$

La première multiplication ne lui sert qu'à exprimer le fait qu'elle additionne les vingt « 1 » unités des vingt premiers nombres de la suite. Elle utilise la deuxième pour expliquer qu'elle obtient alors deux dizaines supplémentaires (correspondant à la retenue posée) qu'elle ajoute aux dix-neuf « 1 » correspondant aux dizaines des vingt premiers nombres de la suite.

Devant l'agitation qui règne dès lors au sein de la classe (les autres élèves n'acceptant pas les traces écrites de la solution de Julie), la maîtresse intervient pour formuler le raisonnement en jeu, en rajoutant de nouveaux écrits pour accompagner ses explications orales :

> *Imaginez que vous avez un, onze, onze, onze vingt fois d'accord ? Sur le vingtième nombre, on est d'accord ? Oui ? Tu me diras que tu n'as pas compris Nicolas, tu es retourné. Combien y a-t-il de un, Nicolas, chiffre des unités (Nicolas : vingt). Il y en a vingt, donc il y en a vingt. Qu'est-ce qu'il va y avoir là au résultat de l'addition (Elèves : vingt). Si tu comptes vingt, qu'est-ce que tu mets ? C'est une addition là (Elève : zéro). Qu'est-ce que je mets là ? Je mets un zéro. Je mets un zéro, c'est ce qu'elle te dit… Zéro, elle met deux dizaines en retenue, d'accord… Ensuite, elle compte les dizaines, il y en a combien de dizaines (Elèves : dix-neuf). Il y en a ? Dix neuf dizaines donc. Dix-neuf fois un, ça fait combien ? (…) Dix-neuf dizaines, ça fait quoi ? Dix-neuf fois un (Elèves : dix-neuf !). Dix-neuf. Plus deux ? (Elèves : vingt-et-un) Vingt-et-un. Comment j'écris vingt-et-un ? J'écris un… Et j'écris le deux là mais on s'en fiche… Donc quel est le chiffre des dizaines du résultat ? (Elèves : un) Un. Alors* [en montrant les autres solutions encore apparentes au tableau], *est-ce qu'on avait besoin de s'embarquer dans des trucs comme ça ?*

$$\begin{array}{r} ② \\ 1 \\ 11 \\ 11 \\ 11 \\ \vdots\ \vdots \\ 20^{e}\text{ nombre} \\ \hline 10 \end{array}$$

En résumé, la situation observée relative à la résolution de ce problème peut paraître « réussie » à bien des égards : la maîtresse permet à la majorité des élèves de comprendre la consigne, de s'engager effectivement dans la recherche d'une solution en réponse au problème posé, et gère le débat de façon relativement exemplaire en s'assurant des formulations permettant de saisir l'ensemble des procédures qui sous-tendent les solutions présentées au tableau, et le cas échéant de les invalider.

Et pourtant *quid du processus d'institutionnalisation* ? Peut-on penser que la phase de mise en commun observée tient lieu d'institutionnalisation des savoirs ou des savoir-faire relatifs aux connaissances convoquées par les élèves dans la résolution de ce problème ? Et l'institutionnalisation a-t-elle d'ailleurs lieu d'être dans la résolution d'un tel « problème pour apprendre à chercher » ?

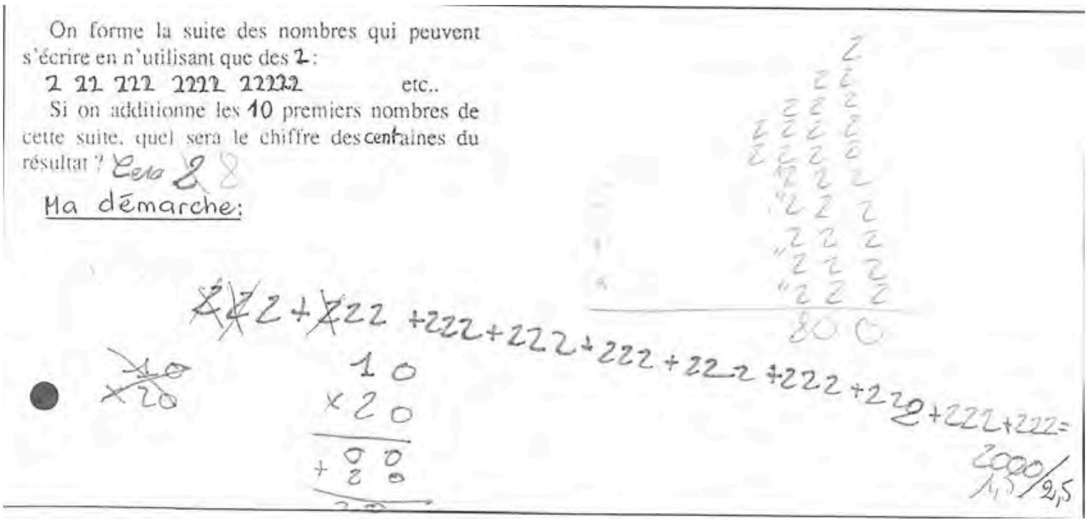
Pour répondre à cette question, il faut se reposer la question de quels savoirs mathématiques ou de quels savoir-faire éventuellement plus transversaux, pourraient faire l'objet cette institutionnalisation.

S'il s'agit de savoirs mathématiques ceux-ci seraient liés à la procédure « experte » de résolution du problème donné (correspondant à la solution de Julie) : c'est-à-dire en lien avec une prise de recul sur la technique opératoire de l'addition et sur le lien entre la numération et le principe de retenue dans une addition. Or si l'enseignante tente de reformuler le raisonnement de l'élève, ce qui n'est d'ailleurs pas chose aisée (le schéma de l'addition posée est-il clair pour les élèves ?), elle ne met pas vraiment les savoirs impliqués sur le devant de la scène didactique. Elle ne décontextualise, ni ne dépersonnalise les connaissances mises en jeu, qui restent à l'état de modèles implicites d'action et ne sont pas récupérées dans un système organisé de savoirs à enseigner. Dans ce sens on peut penser que la solution de l'élève reste au final la « manière de faire de Julie ».[6]

On peut envisager que ce qui est visé ici par la maîtresse relèverait davantage de savoir-faire plus transversaux, ou spécifiques de la résolution de problèmes, du type de ceux cités dans les directives officielles de l'époque au sujet des problèmes pour apprendre à chercher. Il n'en demeure pas moins que ces savoir-faire ne sont pas explicitement mis en avant ici : peuvent-ils d'ailleurs faire l'objet d'une explicitation qui ne verserait pas dans une « méthodologie type de résolution de problèmes » ?

Dès lors, on peut se demander quelle est la finalité didactique de la situation d'enseignement observée : sur quels savoirs mathématiques se porte l'intention d'enseigner ? Et quel peut être le futur des connaissances impliquées dans la situation d'enseignement ? En l'absence d'un processus d'institutionnalisation de ces savoirs, ces connaissances demeurant pour une part implicites peuvent paraître de fait destinées à être perdues, sans lendemain pour la plupart des élèves.

En écho à ces questions, il est intéressant de considérer un énoncé donné en évaluation par la maîtresse « calqué » sur le « problème des 1 » et la production de Julie en réponse à ce problème.


On forme la suite des nombres qui peuvent s'écrire en n'utilisant que des 2 :
2 22 222 2222 22222 etc..
Si on additionne les 10 premiers nombres de cette suite, quel sera le chiffre des centaines du résultat ?
Ma démarche:

Le problème posé en évaluation n'est pas tout à fait de même nature que le problème des 1. La maîtresse a fait varier des éléments de l'énoncé correspondant à des variables didactiques, et qui affectent donc la hiérarchie des procédures mises en œuvre : le fait de n'avoir que 10 nombres à additionner rend la procédure de base (l'addition posée des 10 nombres) beaucoup moins coûteuse et *a contrario* la recherche du chiffre des centaines, et les suite des « 2 » du nouvel énoncé impliquent un saut de complexité non

[6] C'est d'ailleurs comme cela qu'elle est désignée par l'enseignante, lorsque celle-ci demande aux autres enfants d'essayer de résoudre le problème « à la manière de Julie ».

négligeable pour qui voudrait tenir un raisonnement relativement analogue à celui de Julie pour le « problème des 1 ». D'ailleurs il est intéressant de constater que Julie elle-même n'a pas réussi à tenir ce raisonnement, alors qu'elle a visiblement tenté de le faire. En deçà de la nature quelque peu différente de ce nouvel énoncé, ce n'est sans doute pas sans lien avec l'absence d'institutionnalisation et donc de visibilité des savoirs mathématiques concernés, signalée plus haut.[7]

III - EN GUISE DE CONCLUSION

L'ensemble des questions qui émergent à travers l'étude de ces deux exemples nous semblent faire écho au contenu d'un échange par courrier électronique entre G. Brousseau et M. Hersant sur la liste de l'ARDM (Association de Recherche en Didactique des Mathématiques) au sujet de la résolution de problèmes et de ses enjeux. Nous nous permettons de citer quelques extraits des propos de G. Brousseau tenus à cette occasion :

> **Les savoirs mathématiques en jeu en arrière-plan de la résolution de problèmes ?**
>
> Dans quel but faire chercher ? (…)
>
> La question est de savoir si et quand cette pratique est légitime.
>
> On doit distinguer deux cas extrêmes
>
> a) celui où l'élève résout un problème qui n'a aucun rapport avec ce qu'il doit apprendre maintenant ou plus tard comme un logigramme, une grille de Sudoku ou un problème d'échecs.
>
> b) celui où la solution quelle que soit la façon dont il la conçoit, la trouve, la formule et la justifie est une connaissance ou un savoir qui correspond à un objet d'enseignement.
>
> Le premier cas est intéressant mais malgré toutes les promesses de vertus éducatives et les illusions sur le transfert de motivation, sa légitimité est assez faible. C'est ce qu'il y a lieu d'enseigner qui est légitime et les appréciations doivent se rapporter à cette aune.
>
> Dans le second cas la légitimité va dépendre de la possibilité effective de récupération ultérieure de cette activité de recherche dans un processus d'apprentissage des connaissances convenues. (…)
>
> Une des principales sources de difficultés vient ce que le professeur identifie et confond les connaissances (modèles implicites d'action) mobilisées par les élèves avec les savoirs qu'il voudra leur enseigner plus tard. Tout ce que ses élèves « font » mais qui n'est pas assez rapidement reconnu, dit, récupéré dans un système de savoirs sera perdu. D'autant plus qu'en général, ils ne le referont pas très souvent s'il s'agit d'une « recherche »). Le professeur aura trouvé remarquable une démarche ingénieuse et opportune d'un enfant, et peu de temps après, cet enfant ne la reproduira pas dans des circonstances qui apparaîtront pourtant similaires, pire il ne se souviendra même pas l'avoir fait, car pour lui ce qui était évident dans l'action n'avait pas besoin d'être « noté », surtout si en plus il n'a pas de moyen culturel de le faire.
>
> Les connaissances implicites développées dans les « problèmes pour chercher » me paraissent condamnées à être perdues… sauf si les situations sont répétées dans un processus de type

[7] Cet épisode didactique lié à l'évaluation renvoie la question plus que délicate de l'évaluation en lien avec les problèmes pour apprendre à chercher, sur laquelle nous ne nous attardons pas ici, mais qui a elle seule mériterait un atelier, voire plusieurs dans le cadre d'un colloque COPIRELEM.

behavioriste, ou si elles commencent à court terme un processus didactique complet de « construction ».

Les connaissances implicites jouent un rôle, caché, mais très important ; mais elles sont très difficiles à gérer. Par définition elles sont attachées de façon spécifique aux situations et aux savoirs en jeu, et elles le sont beaucoup plus que les savoirs.

(Guy Brousseau, janvier 2006, en réponse à un mail de Magali Hersant)

Les propos tenus sont frappants, nous semblent-il par leur proximité avec les observations et les analyses que nous avons pu faire à l'occasion des deux expériences de formation et de recherche évoquées ci-dessus, et souhaité partager avec les participants à notre atelier.

Ils nous ont également donné l'orientation d'une réflexion qui nous semble encore à tenir sur les savoirs ou savoir faire en jeu en lien avec les problèmes pour apprendre à chercher : centrée sur la récupération des connaissances convoquées par les élèves dans la résolution de tels problèmes, qui conditionne l'institutionnalisation des savoirs ou des savoir faire en jeu.

Nous avons présenté aux participants, l'état actuel de cette réflexion.

Dans la résolution des problèmes qualifiés de problèmes pour apprendre à chercher, les connaissances potentiellement mises en fonctionnement ne sont pas de la même nature. Il nous apparaît possible, à ce jour, de proposer une première catégorisation en trois grandes classes de connaissances visées dans le cadre de situations d'enseignement centrées sur ce type de problèmes.

Classe 1 : des connaissances mathématiques, institutionnellement identifiées dans le curriculum officiel de la classe, mais dont la "formulation" est difficile d'accès.

C'est par exemple, le cas du problème des 1 dans lequel des connaissances sur la technique opératoire de l'addition sont convoquées pour soutenir un raisonnement lui-même complexe, difficilement formulable.

Classe 2 : des connaissances mathématiques, absentes du référentiel officiel de connaissances et de compétences de la classe.

Par exemple, les connaissances sur le dénombrement et la combinatoire mais « hors programmes » convoquée par le problème « construction de tours » de l'ouvrage Ermel CP

Classe 3 : des connaissances « méta-mathématiques », plutôt liées au fonctionnement des savoirs mathématiques, ou à la démarche mathématique, et non aux savoirs eux-mêmes.

Par exemple, les connaissances sur l'organisation d'une recherche, d'essais, mises en jeu dans le problème des 4 cases mais cela pourrait être aussi les connaissances sur l'argumentation et sur la validité d'une solution en mathématiques mises en jeu au moment de la mise en commun à l'occasion du problème des 1.

Cette typologie semble pouvoir nourrir notre réflexion initiale sur la question de l'institutionnalisation dans les problèmes dits "pour chercher"

Dans le cas des connaissances relevant de la classe 1, la difficulté à formuler la façon dont les connaissances mathématiques sont convoquées dans des procédures relativement complexes peut faire obstacle à l'institutionnalisation des savoirs en jeu. Notamment, du côté de l'élève, les écrits intermédiaires produits dans la phase de recherche ne correspondent pas forcément à une forme « conventionnelle » et sont dès lors difficilement communicables. Du côté de l'enseignant, s'il est capable de trouver une formulation « experte » satisfaisante au regard du contrat didactique et scolaire, cette formulation est-elle accessible pour une majorité d'élèves ?

Pour les connaissances relevant de la classe 2 mais aussi de la classe 1, nous entrevoyons une difficulté attenante à la décontextualisation. En l'absence de visibilité des savoirs en relation avec les connaissances mathématiques convoquées (soit parce qu'elles ne correspondent pas à des savoirs visés à ce niveau, soit parce qu'elles sont difficilement formulables), comment l'élève peut-il être en mesure d'identifier des « classes de problèmes » que ces connaissances permettent de résoudre ? Il en est d'ailleurs de même du point de vue du professeur qui en l'absence de projets d'enseignement des savoirs pourtant convoqués, peut d'ailleurs ne pas chercher à identifier ces classes de problèmes. Dès lors, à l'instar du problème des 4 cases, ces problèmes tendent à vivre de façon « isolée », sans futur assuré pour les connaissances mises en jeu localement.

Enfin pour les connaissances relevant de la classe 3, c'est leur statut qui nous paraît à interroger : s'agit-il de connaissances sur le fonctionnement, sur la démarche mathématiques ? Comment ces connaissances dont l'explicitation ne peut être dès lors sous-tendue des savoirs mathématiques de référence peuvent-elles donner lieu à une forme d'institutionnalisation ? Quelle place alors leur accorder dans la classe de mathématiques, dans le curriculum ?

Plus largement, c'est la question de la fréquentation de ces problèmes par les élèves qui est ici posée. Cette fréquentation a-t-elle pour objet un apprentissage déclarable ? Dans l'affirmatif, comment cette organisation est-elle orchestrée pour permettre aux élèves de redéployer ces connaissances dans des problèmes voisins ?

Nous espérons que cette classification des connaissances mises en jeu dans les problèmes « pour chercher » nous aidera à avancer sur cette difficile question de l'institutionnalisation des savoirs ou savoir-faire convoqués dans ce type de problèmes qui nous paraît en conditionner le projet d'enseignement.

Il nous paraît à cet effet intéressant de poursuivre notre réflexion au fil des projets de notre équipe encore en cours à ce sujet (Maths en Jean's et M3B 2010 et à venir) en les mettant en regard de ceux d'autres équipes dont le travail se centre également sur ce thème depuis plusieurs années (Hersant et Thomas 2008, Hersant 2009 et 2010, Ouvrier-Buffet 2006 et travaux de l'équipe Maths à Modeler).

IV - BIBLIOGRAPHIE

COULANGE L. (2009), Etude de pratiques enseignantes et de processus de différenciations dans les apprentissages scolaires au sein d'une classe de CM2, *Actes CD-ROM de la XVe Ecole d'été de recherche en didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand.

COULANGE L. (2009), Etude de pratiques enseignantes et de différenciations dans les apprentissages scolaires à l'école primaire, *Actes CD-ROM du II congrès international de didactiques 2010, L'activité de l'enseignant : Intervention, Innovation, Recherche,* Girona.

HERSANT M. (2009), Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants de situations, une étude de cas relative aux problèmes pour chercher, *Actes CD-ROM de la XVe Ecole d'été de recherche en didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand.

HERSANT M., THOMAS Y. (2009), Quels savoirs mathématiques dans les problèmes pour chercher à l'école élémentaire ? Le cas des problèmes d'optimisation au cycle 3, *Actes CD-ROM du XXXVème Colloque de la COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole Elémentaire), Bombannes.*

HERSANT M. (2008), Problèmes pour chercher : des conduites de classes spécifiques, *Grand N*, 81, p. 57-75, IREM de Grenoble.

HOUDEMENT C. (2009), Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 14, p. 31-59, IREM de Strasbourg.

MARGOLINAS C., LAPARRA M. (2008), Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation, Des effets de la transparence des objets de savoir, *Actes CD-ROM du colloque organisé par l'AFIRSE, l'IUFM d'Aquitaine, l'Université Bordeaux 4 et le laboratoire LACES de l'Université Bordeaux 4, Les didactiques et leurs rapports à l'enseignement et à la formation*, Bordeaux.

http://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/marg.pdf

MERCIER A. (2008), Une question curriculaire de l'enseignement élémentaire des mathématiques : la « résolution de problèmes », *L'enseignement des mathématiques à l'école primaire, Actes du séminaire national des 13 et 14 novembre 2007 à Paris,* EduSCOL.

http://media.education.gouv.fr/file/Formation_continue_enseignants/13/0/actes_maths_primaire_110130.pdf

OUVRIER-BUFFET CECILE (2006), Les Situations-Recherche pour la classe et pour la formation des enseignants, *Actes du XXXIIIème Colloque de la COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole Elémentaire)*, Dourdan.