LA SYMÉTRIE ORTHOGONALE DU CE2 À LA SIXIÈME : D'UNE RÉFLEXION SUR LES ENJEUX DE SON ENSEIGNEMENT À L'ÉLABORATION D'UN DOCUMENT-RESSOURCE POUR LES ENSEIGNANTS

Christine MANGIANTE-ORSOLA
MCF, Université d'Artois, IUFM Nord Pas de Calais,
Laboratoire de Mathématiques de Lens
christine.mangiante@lille.iufm.fr

Anne-Cécile MATHE
MCF, Université d'Artois, IUFM Nord Pas de Calais,
Laboratoire de Mathématiques de Lens
acecile.mathe@lille.iufm.fr

Résumé
Cet atelier s'est présenté en deux temps. Tout d'abord, à partir d'une activité de restauration de figure symétrique proposée aux participants de l'atelier, nous avons mis en évidence les choix fondamentaux du groupe par rapport à l'enseignement de la géométrie en général et de la symétrie axiale en particulier : liens entre espaces graphiques et espace géométrique, question du rapport à la figure en géométrie, géométrie sans mesure, jeux sur les instruments … Nous avons ensuite présenté des éléments de progression élaborés au sein de la recherche puis, à travers l'analyse d'extraits de ressources produites par le groupe et de comptes-rendus de séances observées, nous avons interrogé la viabilité dans l'enseignement ordinaire des situations proposées par les chercheurs.

I - INTRODUCTION

Cet atelier a été conçu comme un lieu d'échanges autour d'éléments d'une expérimentation de situations d'enseignement et d'apprentissage de la symétrie orthogonale menée par un groupe de recherche soutenu par l'IUFM Nord-Pas-de-Calais[1].

À partir d'une activité de restauration de figure symétrique[2] nous mettrons en évidence les choix fondamentaux du groupe par rapport à l'enseignement de la géométrie en général et de la symétrie orthogonale en particulier. Nous interrogerons notamment l'enseignement de la symétrie orthogonale en

[1] Ce groupe de recherche réunit formateurs de l'IUFM Nord-Pas-de-Calais et enseignants d'école primaire et du collège. Participent à ce groupe de recherche : Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Marc Godin, Bachir Keskessa, Christine Mangiante, Anne-Cécile Mathé, Marie-Jeanne Perrin, Régis Leclercq. Cette recherche a également fait l'objet d'un atelier co-animé par Marie-Jeanne Perrin, Régis Leclerc et Anne-Cécile Mathé au colloque organisé pour les 40 ans des IREM et les 20 ans de la revue Repères IREM au CIRM, à Marseille, en mars 2010. Le texte présenté ici reprend par ailleurs en partie un certain nombre d'écrits du groupe, accessibles sur le site www.654321.fr

[2] Nous appellerons « figure symétrique » une figure admettant un axe de symétrie. Nous avons choisi dans cet atelier de restreindre notre approche de la symétrie orthogonale à un travail autour de la notion de figure symétrique.

le pensant dans une continuité du CE2 au début du collège et en essayant de mettre en lien l'évolution des modes d'appréhension des objets matériels, des modalités d'action sur ces objets et des concepts géométriques en jeu.

Nous présenterons ensuite des éléments de progression élaborés au sein de l'équipe de recherche et poserons la question de la viabilité des situations proposées par les chercheurs dans l'enseignement ordinaire à travers l'analyse d'extraits de ressources produites par le groupe et de comptes-rendus de séances observées.

Notons d'ores et déjà que l'expression « symétrie orthogonale » met l'accent sur l'angle droit entre l'axe et le segment qui joint un point et son image ; l'expression « symétrie axiale », actuellement employée par les programmes de collège, met l'accent sur le fait que la symétrie se fait par rapport à une droite. Nous emploierons indifféremment l'une ou l'autre dans cet article.

I – VERS DE PREMIERS ENJEUX DE L'ENSEIGNEMENT DE LA SYMETRIE ORTHOGONALE, DU CE2 A LA SIXIEME.

1 AUTOUR D'UN PROBLEME DE RESTAURATION DE FIGURE

Notre atelier s'ouvre sur un travail d'analyse d'une situation élaborée par notre groupe de recherche et expérimentée dans diverses classes, du CE2 à la Sixième. Nous proposons aux participants de résoudre ce problème, en dehors de toute considération du niveau des élèves supposés. Notre objectif est de dresser un tour d'horizon de stratégies de résolution possible et de mettre en lien instruments utilisés et définitions ou propriétés de la symétrie mises en œuvre. À partir de ce travail individuel, puis collectif, autour des procédures de résolution envisageables, nous espérons faire émerger ce que nous considérerons ensuite comme des éléments fondateurs de notre travail sur la symétrie axiale à l'école, pensé dans une continuité, du CE2 à la Sixième.

La notion de « problème de restauration de figure », au centre du travail du groupe de recherche de l'IUFM Nord Pas de Calais, a fait l'objet d'un atelier lors du colloque de la COPIRELEM 2008 (Godin-Perrin, 2008). La restauration de figure consiste à reproduire une figure modèle à partir d'une amorce (ou partie) de la figure, à l'aide d'instruments. Il s'agit donc de travailler non pas sur une figure mais sur la différence entre deux figures : le modèle et l'amorce (éventuellement en plusieurs morceaux). Les élèves ont à leur disposition des instruments divers : règle non graduée, équerre, compas, mais aussi des gabarits, pochoirs, calque, morceau de papier ayant ou non des bords droits, quadrillage. Nous ne mentionnons pas les instruments de mesure car les activités que nous considérons ne nécessitent que des reports de longueurs, sans passer par les nombres. En principe la règle graduée n'est pas disponible. Le report de longueur peut se faire avec une règle informable (bande de papier plastifiée sur laquelle on peut écrire, que l'on peut « informer »).

1.1 Présentation du problème

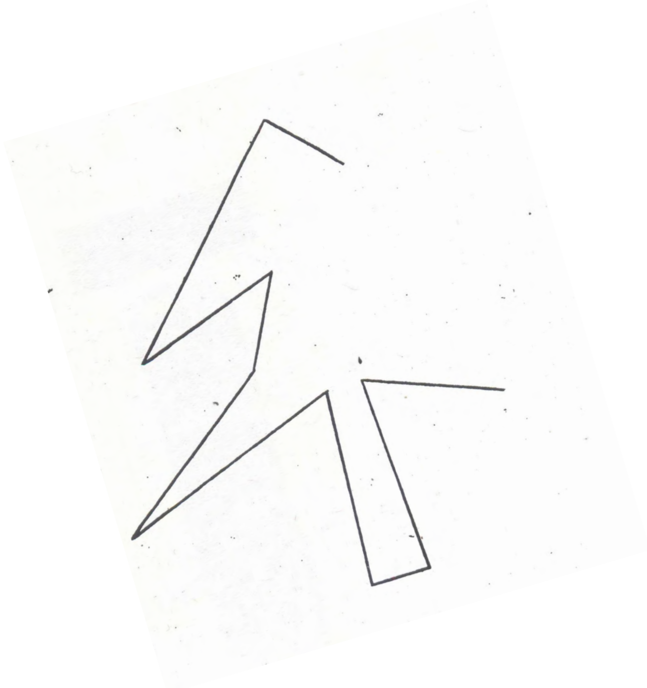
Voici le problème de restauration de figure expérimenté par des enseignants partenaires de la recherche dans leurs classes et proposé aux participants de l'atelier.

La consigne donnée aux participants est la suivante :

1. Compléter la figure pour reconstituer le sapin complet. Vous pourrez valider votre production, par exemple par superposition d'un papier calque sur lequel figure le sapin restauré.

2. Quelles différentes stratégies est-il possible de développer pour restaurer ce sapin ? Quelles sont les définitions ou propriétés de la symétrie axiale convoquées de façon sous-jacente dans chacune de ces stratégies ?

Conformément à la présentation des problèmes de restauration qui vient d'être établie, nous avons à notre disposition tous les instruments de géométrie (règle non graduée informable, équerre, compas, papier calque, papier…), excepté la règle graduée.



1.2 Des stratégies de résolution envisageables aux différentes approches de la symétrie orthogonale, du CE2 à la sixième

Après un moment de recherche individuelle puis en petits groupes, nous dégageons de façon collective différentes stratégies de résolution envisageables. Pour chacune de ces procédures, nous proposons d'interroger le lien entre les instruments utilisés, la façon dont on appréhende la figure et les propriétés géométriques implicitement mises en œuvre.

Notons que le travail des participants a été riche et les échanges nombreux. De nombreuses stratégies ont émergé. Nous retiendrons, pour ce compte-rendu, cinq de ces procédures, les autres procédures nous semblant pouvoir être interprétées comme des « procédures mixtes » conjuguant différentes stratégies exposées ici. .

1. *Restauration de l'allure générale du sapin à l'aide d'une règle ou à main levée :* Il est bien sûr envisageable de compléter la figure en se référant à l'allure générale du sapin. La figure est alors perçue comme une surface délimitée par son bord. On ferme la surface de façon à ce que le bord soit à peu près « pareil de chaque côté ». Une validation consistant à superposer la figure complétée sur un papier calque à la production de l'élève nous permettra de poser des contraintes de précision sur la figure à restaurer.

2. *Utilisation d'un gabarit :* On peut également utiliser deux feuilles portant la figure tronquée. On découpe, sur une première feuille, un gabarit de la figure tronquée, on la superpose à la figure tronquée de la seconde feuille puis on retourne le gabarit en faisant coïncider les pointes et les troncs des sapins. On peut alors tracer les bords manquants. On reste dans ce cas dans une perception globale de la figure en termes de surface ou de juxtaposition de surfaces. Les lignes sont vues comme les bords fermant cette surface. Toutefois, alors que la notion de symétrie axiale se traduisait dans la première procédure à travers la propriété « pareils de chaque côté », elle s'exprime ici dans l'action par le retournement de la surface du gabarit : « pour produire des bords qui soient pareils des deux côtés, il faut retourner la surface et tracer ses bords de l'autre côté.» Implicitement, la figure est donc

symétrique si elle se superpose avec sa retournée. Notons que la symétrie axiale est ici une transformation d'un objet plan en un objet plan nécessitant le passage par l'espace.

3. *Pliage de la feuille :* On peut superposer deux parties de la figure que l'on identifie de façon perceptive comme devant se correspondre par pliage (les deux moitiés du tronc, du sommet du sapin) puis lisser la feuille de papier. On peut ensuite découper le demi-sapin complet ou, encore une fois, exploiter la transparence du papier pour compléter le sapin. Cette procédure met en œuvre la définition suivante : une figure est symétrique si elle se décompose en deux sous-figures se superposant exactement par pliage le long d'une droite. La ligne de pliage est l'axe de symétrie de la figure. La figure est alors vue en effet comme une surface décomposable en une juxtaposition de surfaces.

4. *Utilisation d'une règle et de papier calque.* Deux types de stratégies utilisant le papier calque peuvent être envisagées :

   - Il est possible de calquer l'intégralité de la figure « grignotée » puis de la retourner, constituant ainsi une figure symétrique. La procédure est alors à rapprocher de celle utilisant un gabarit.

   - On peut aussi ne reproduire qu'une demi-figure et la retourner, décomposant alors le sapin en deux demi-figures dont l'une est l'image de l'autre par symétrie axiale.

   Se posent alors plusieurs questions intéressantes : quelle est la demi-figure à isoler ? Où s'arrêter ? (La question est en particulier inéluctable à propos du pied du sapin). Comment replacer la demi-figure après retournement ?

   Ceci suppose de voir que certains points (le sommet, le milieu du pied du sapin) appartiennent à l'axe de symétrie et sont invariants par la symétrie axiale en jeu.

   Par l'action, on différencie ici trois figures : la figure complète (figure symétrique), la demi-figure dégagée à partir de l'amorce et la retournée de cette demi-figure. Ces deux demi-figures sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un axe. Notons que cette procédure permet de faire émerger l'axe de symétrie de la figure complète : la droite délimitant la demi-figure et sa retournée.

   Ici, une figure est symétrique si elle se décompose en deux sous-figures se superposant exactement par pliage le long d'une droite (ces deux sous-figures sont symétriques par rapport à un axe)

   La figure est encore une fois traitée ici comme une surface, décomposable en une juxtaposition de surfaces et on travaille ici sur les bords de cette surface. En effet, il nous paraît important de constater que, contrairement aux deux premières procédures, l'utilisation d'un papier calque et, surtout, d'une règle amène à isoler les segments délimitant la surface du sapin et donc à décomposer la figure en un réseau de lignes, voire à isoler certains points, vus comme extrémités ou intersections de lignes (le sommet, le milieu du pied du sapin, les sommets des branches).

5. *Utilisation d'une règle, d'une règle informable et de propriétés d'alignement :* Cette procédure consiste à tracer l'image des droites supports des segments manquants puis à effectuer des reports de longueurs à l'aide la règle informable. Pour tracer l'image des droites-supports des segments manquants, il faut d'abord tracer l'axe de symétrie (en identifiant deux points de cet axe : sommet, milieu du pied ou en prolongeant un segment non parallèle à l'axe et son image). On prolonge ensuite le segment dont on veut tracer l'image. S'il n'est pas parallèle à l'axe, la droite que l'on vient de tracer coupe l'axe de symétrie en un point. L'image de cette droite passe également par ce point. Cette procédure met en œuvre les propriétés suivantes :

   - La symétrie axiale laisse invariant tout point de l'axe de symétrie.

- La symétrie axiale conserve les longueurs des segments.

- Une droite non parallèle à l'axe et son image se coupent sur l'axe de symétrie.

Cette procédure repose donc sur la mise en œuvre de propriétés de la symétrie axiale portant sur des relations entre segments, droites et points. Elle suppose donc la capacité des élèves à passer d'une vision de la figure en termes de surface(s) à sa décomposition en réseau de lignes et de points.

Notons que si toutes les procédures précédentes nécessitaient un passage par l'espace pour retourner le calque ou le gabarit ou pour plier le papier, cette procédure ne nécessite pas de sortir du plan : la symétrie axiale est ici une transformation du plan qui porte sur des droites et des segments.

6. *Utilisation d'une règle, d'une équerre et d'une règle informable :* Cette procédure repose sur l'identification de l'axe de symétrie de la figure (comme dans la procédure précédente) et la construction de l'image de points par symétrie axiale.

   Elle nécessite donc la mobilisation de la définition et propriété suivante :

- La symétrie axiale laisse invariant tout point de l'axe de symétrie.

- Deux points A et A' sont symétriques par rapport à une droite d si d est la médiatrice du segment [AA'].

Cette procédure suppose une vision ponctuelle de la figure, c'est-à-dire la déconstruction de la figure en un réseau de points, vus comme intersections de lignes. Elle ne nécessite pas de passage par l'espace : la symétrie est ici une application du plan dans lui-même qui porte sur des points.

Cette sixième procédure, reposant sur la construction de l'image de points par une symétrie axiale vue comme transformation ponctuelle, est sans doute assez proche de celle que nous, enseignants, nous mettrions en œuvre pour résoudre ce problème. Elle sera la procédure visée par les enseignants de collège. Considérer les procédures précédentes, sans aucun doute davantage spontanées pour les élèves, nous montre à quel point entrer dans la géométrie du collège constitue un saut considérable dans la façon d'appréhender la figure, d'une vision spontanée de la figure comme juxtaposition de surfaces à une vision en termes de lignes et de points. Plus encore, la notion de symétrie d'une figure s'avère riche et les savoirs abordés au cycle 3 peuvent être pluriels. En appui sur cet exemple d'activité, nous proposons de développer les principes fondateurs qui ont guidé le travail du groupe vers l'élaboration d'une ressource pour les enseignants, du CE2 à la classe de Sixième.

2 VERS DE PREMIERS FONDEMENTS POUR UN TRAVAIL SUR LA SYMETRIE AXIALE, DU CE2 A LA 6EME

Ce travail de recherche individuel puis collectif nous donne un point d'appui pour exposer de premiers principes fondateurs du travail du groupe de recherche dans les classes. Nous proposons maintenant de présenter ces éléments, nos hypothèses de recherche et de travail.

2.1 Une géométrie sans nombre

Le travail mené par le groupe de recherche de l'IUFM Nord Pas de Calais repose sur une approche de la géométrie qui vise à penser les liens entre des actions sur des objets de l'espace sensible et les objets géométriques qui permettent d'en rendre compte. Nous travaillons pour l'instant sur la géométrie plane. Les objets de l'espace sensible en question peuvent être des objets manipulables, notamment les gabarits et les pochoirs ou des dessins sur une feuille de papier ; certains ont une fonction d'instrument permettant de reproduire toute une partie d'une figure. Nous considèrerons comme instruments les instruments classiques de géométrie (règle non graduée, équerre, compas) mais aussi des supports comme du papier quadrillé ou du papier calque ou encore des instruments plus rudimentaires comme une bandelette de papier. Certains instruments, comme les gabarits et les pochoirs, portent des informations concernant la figure à reproduire, d'autres sont « universels ». La règle graduée, quant à elle, a deux fonctions : c'est un instrument de tracé mais c'est aussi un instrument de mesure. Nous distinguons la mesure du report de longueur qui peut se faire avec une bandelette de papier ou un compas. Nous distinguons aussi la comparaison des longueurs et l'égalité des longueurs de la mesure des longueurs : on peut comparer, décider de l'égalité de longueurs avec un compas ou une bande de papier ; de même on peut trouver un milieu avec une bande de papier. A l'instar de l'activité autour du sapin présentée précédemment, le travail dans les classes que nous expérimentons repose sur une approche de la géométrie sans mesure, sans intervention des nombres et du calcul. Nous pensons en effet que le recours aux nombres (et donc à la mesure de longueurs) dans les activités de géométrie au cycle 3 constitue un obstacle à la construction des premières notions de géométrie et de la grandeur « longueur » en particulier. Nous préférerons donc au mesurage avec la règle graduée la comparaison directe ou indirecte de longueurs à l'aide de la règle informable. La géométrie servira au contraire ensuite à donner du sens aux nombres et aux opérations par le travail sur les grandeurs géométriques.

Concernant maintenant les principes ayant guidé nos choix dans l'élaboration de progressions autour de la symétrie orthogonale à proprement parler, l'analyse des stratégies envisageables pour restaurer le sapin met en évidence de premiers enjeux de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et au début du collège que nous développons maintenant. Pour chacun de ces points, nous proposerons les pistes didactiques développées par le groupe, fondements des activités proposées aux enseignants à travers les documents dont il sera question dans la seconde partie de ce texte.

2.2 D'une transformation portant sur des surfaces et nécessitant un passage par l'espace à une transformation ponctuelle : une nécessaire mobilité du regard porté sur les figures

Interroger la façon dont les élèves peuvent entrer dans le problème de restauration du sapin nous permet d'abord de mettre en évidence que l'enseignement de la symétrie orthogonale, si on le pense dans une continuité du cycle 3 (et même du début de l'école primaire) au collège, repose sur le passage d'un travail sur des figures d'abord vues comme des surfaces ou assemblages de surfaces délimitées par des lignes, dont on vérifie par exemple la superposition par pliage, à la déconstruction de ces figures en réseaux de lignes puis de points liés par des propriétés géométriques telles que l'égalité de longueur, la perpendicularité ou l'équidistance à l'axe. Or les élèves du début du cycle 3 entrent spontanément dans les activités de géométrie en adoptant une vision des figures en termes de surfaces, comme nous le faisons en dehors des mathématiques. Ceci est d'autant plus vrai dans le cas de la symétrie orthogonale dont les élèves ont une connaissance intuitive et perceptive très forte : dès le début de l'école primaire, les élèves peuvent déterminer de façon perceptive et implicite qu'une figure est symétrique et localiser son axe de symétrie, qu'ils vérifient par pliage. Mais ce qui, d'emblée, est reconnu comme une forme à deux dimensions ne se décompose pas perceptivement en un réseau de formes à une dimension, voire de dimension zéro (Duval, Godin (2005)). Il est nécessaire que l'enseignement prenne en charge explicitement le développement de la capacité des élèves à modifier leur regard sur les figures, pour leur permettre d'utiliser les définitions et propriétés de la symétrie orthogonale portant sur des droites, des segments, des points. Ce saut ne peut être franchi que si l'on prend conscience qu'il existe une pluralité de modes d'appréhension de la figure, que la vision spontanée d'une figure par les élèves est une vision en termes de surface(s) et que le recours aux propriétés géométriques visées par l'enseignant à un certain niveau de la scolarité nécessite de la part des élèves une mobilité du regard porté sur les figures. Comment l'enseignant peut-il accompagner les élèves dans cette évolution du regard porté sur les figures qui, seule, permet l'accès à une vision de la symétrie comme transformation ponctuelle, objet de la géométrie du collège ?

Un retour sur les procédures envisagées et les instruments qu'elles mettent en œuvre dans le problème de restauration du sapin nous conduit à faire émerger une hypothèse fondamentale sous-tendant notre travail de recherche : la façon dont les élèves utilisent les instruments pour leurs actions sur les objets matériels de la situation est étroitement liée à leur mode de vision de la figure, vision en termes de surfaces, de lignes ou de points. Ainsi, donner aux élèves l'accès à des instruments de type « 2D » (le gabarit, le papier calque) permet de prendre en compte la perception spontanée des élèves de la figure en termes de surfaces. Toutefois, orienter les élèves vers des instruments de type « 1D » (la règle informable) ou permettant d'établir des relations entre des éléments 1D ou D (l'équerre, le compas) est nécessaire pour accompagner les élèves à la déconstruction de la figure en un réseau de lignes et de points. Nous pensons donc qu'il est possible d'accompagner les élèves dans une mobilité du regard nécessaire à l'entrée dans la géométrie et à la mise en œuvre de propriétés géométriques portant sur des lignes, des points, en jouant sur les instruments de géométrie à la disposition des élèves dans les activités de manipulation qui leur sont proposées.

Les progressions autour de la symétrie axiale que nous proposerons s'attacheront à penser à la fois la nature des objets matériels choisis mais aussi des contraintes sur les instruments à disposition des élèves (gabarit, calque, règle) de façon à les accompagner dans une déconstruction dimensionnelle des figures afin de leur donner accès à la géométrie de collège et plus particulièrement à l'appréhension de la symétrie orthogonale comme transformation ponctuelle.

2.3 Au sein d'un même mode d'appréhension de la figure, une pluralité de définitions et de propriétés de la symétrie orthogonale

Une analyse plus précise des procédures envisageables pour restaurer la figure du sapin nous montre ensuite que la symétrie orthogonale à l'école peut s'incarner dans une pluralité de définitions et propriétés, en fonction de la nature des actions matérielles que les élèves peuvent mettre en œuvre pour résoudre le problème et, plus généralement, du type de problèmes auxquels ils sont confrontés. Une figure symétrique pourra par exemple être appréhendée comme une figure se superposant avec sa retournée, si l'on utilise du papier calque, ou comme une figure se décomposant en deux sous-figures se superposant après pliage le long d'un axe. Il existe donc un lien direct entre le matériel utilisé et non seulement la manière de percevoir la figure mais aussi les propriétés géométriques mises en œuvre. Vous trouverez en annexe une présentation des différents types de problèmes qu'il nous paraît important d'articuler.

II - CONCEPTION D'UN DOCUMENT-RESSOURCE POUR LES ENSEIGNANTS

Notre atelier se poursuit par une analyse comparative de séances menées par des enseignants participant à notre projet. Ces séances ont été préparées à partir d'un document-ressource conçu par le groupe. Notre intention est d'aider les enseignants à s'engager dans un jeu sur le type d'actions matérielles convoqués, du pliage au retournement complet, afin de faire rencontrer et mettre en relation les différents aspects de la symétrie d'une figure.

Notre projet actuel s'appuie en partie sur le bilan de travaux antérieurs. En effet, depuis plusieurs années, le groupe de recherche produit des situations mais leur diffusion dans les classes demeure restreinte. En outre, même si ces situations sont considérées comme intéressantes par les enseignants, leur mise en œuvre ne suffit pas à modifier durablement leur manière d'enseigner la géométrie. Partant de ce constat, nous cherchons à favoriser l'appropriation de ces situations par des enseignants non associés à la recherche ainsi que le développement de leurs pratiques au-delà de l'utilisation ponctuelle des situations conçues et proposées par les chercheurs. Dans cette perspective, nous posons deux hypothèses que nous cherchons à éprouver à travers notre projet.

La première de ces hypothèses concerne le choix du contenu mathématique. Notre intention étant de favoriser une évolution des pratiques, le contenu choisi doit, d'une part, pouvoir donner lieu à un travail suffisamment consistant sur plusieurs séances et d'autre part, amener les enseignants à questionner plus largement les enjeux de l'enseignement de la géométrie. La symétrie axiale nous semble répondre à ces critères.

La seconde hypothèse porte sur la forme et le contenu du document. Celui-ci doit présenter les éléments essentiels des situations tout en laissant une certaine marge de manœuvre aux enseignants. Cette double exigence vise à favoriser l'appropriation par les enseignants des situations conçues par le groupe tout en garantissant les éléments nécessaires aux apprentissages visés.

1 UNE DEMARCHE D'INGENIERIE DIDACTIQUE DE DEVELOPPEMENT

De prime abord, notre démarche pourrait se concevoir comme une suite de tâches à effectuer : produire tout d'abord un document, le proposer à des enseignants afin d'étudier leur utilisation dans les classes pour ensuite repérer à travers l'analyse des séances de géométrie des indices de développement des pratiques enseignantes.

Mais notre cheminement ne correspond pas à cette suite d'étapes bien distinctes et bien définies. Au fur et à mesure de l'avancée de notre travail, nous avons mesuré combien elles étaient liées les unes aux autres. Pour élaborer nos situations d'enseignement tout en tenant compte des difficultés posées par leur mise en œuvre dans les classes, nous avions besoin d'effectuer sans cesse des allers-retours entre conception et validation sur le terrain.

C'est précisément cette démarche que Perrin-Glorian (Perrin-Glorian, à paraître, 2010) désigne comme une ingénierie didactique de développement (IDD). Elle consiste à prendre en compte de manière conjointe deux niveaux de questionnement.

Le premier niveau correspond à l'« étude des situations dans des conditions relativement protégées pour tester la validité théorique des situations et dégager les choix fondamentaux de l'ingénierie (…)»

Le deuxième niveau concerne « l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire, la négociation de la première ingénierie ; l'écart à la mise en œuvre et les transformations opérées sont prises comme objet d'étude pour des retombées sur l'ingénierie didactique elle-même, la connaissance du fonctionnement des savoirs concernés dans le système scolaire (enseignant, élèves...)».

Ces deux niveaux sont liés l'un à l'autre. Le deuxième niveau dépend du premier, puisque c'est l'étude de la situation qui éclaire l'étude de sa viabilité dans des conditions d'enseignement ordinaire. Mais le premier niveau dépend aussi du second. En effet, même si, au début de la recherche, on ne s'intéresse qu'au premier, c'est-à-dire à l'étude des situations dans des conditions relativement protégées, le seul fait d'envisager un deuxième niveau, la question de leur adaptabilité à l'enseignement ordinaire, change le premier niveau. En outre, lorsqu'on s'intéresse ensuite au deuxième niveau de questionnement, on peut remettre en question le premier. La démarche procède ainsi par un jeu d'allers retours, les deux niveaux ne correspondant pas nécessairement à des temporalités différentes.

Envisager l'élaboration d'une séquence d'enseignement dans le cadre d'une ingénierie didactique de développement conduit à poser le problème de la question de l'utilisation par les enseignants de la ressource sous un angle nouveau. Contrairement à la démarche d'une ingénierie didactique de recherche qui tend à considérer cette question de manière descendante en termes de transmission de la recherche vers l'enseignement, développer une ingénierie didactique de développement suppose de la part du chercheur de poser un autre regard sur cette question. La prise en compte des pratiques ordinaires nécessite des allers retours entre la recherche et l'enseignement et il n'est plus ici question de transmission mais d'adaptation par le chercheur de la ressource aux pratiques ordinaires à travers l'étude des conditions d'appropriation par l'enseignant de cette ressource.

2 PRESENTATION DU DOCUMENT-RESSOURCE POUR LES ENSEIGNANTS

Nous référant à la démarche décrite ci-dessus, notre but est d'élaborer (à terme) une séquence d'enseignement sur la symétrie axiale (premier niveau) tout en prévoyant de laisser une certaine marge de manœuvre aux enseignants afin de favoriser son adaptabilité (deuxième niveau). Cela nous conduit à faire des choix quant au fond et la forme du document.

Tout d'abord, nous choisissons de produire un document en hypertexte. Son architecture autorisant une lecture non linéaire avec des retours en arrière, le lecteur peut explorer la ressource en fonction de ses besoins, emprunter différentes entrées, construire son propre cheminement. La structure en arborescence nous permet en outre de prévoir plusieurs niveaux de lecture en proposant notamment au lecteur des textes "pour aller plus loin". Constitué d'une trentaine de fichiers organisés en trois blocs distincts, notre document présente les fondements théoriques de la progression puis propose des outils pour le maître et une aide à l'élaboration d'une progression accompagnée d'exemples d'activités.

Les fiches de présentation de ces activités répondent à certains critères. Nous avons notamment décidé de ne pas rédiger de texte descriptif qui pourrait donner l'impression aux enseignants de correspondre à la description d'un scénario modèle à suivre. Nous optons pour une présentation selon des rubriques afin de mettre en évidence les éléments fondamentaux de la situation et les possibilités d'adaptations.

3 ETUDE D'UNE SITUATION ET DE SA VIABILITE DANS L'ENSEIGNEMENT ORDINAIRE

Nous proposons alors aux participants d'étudier l'une des situations conçues par les chercheurs. L'exploration dialectique des deux niveaux de questionnements doit, à terme, permettre de dégager des pistes pour une optimisation de la ressource.

3.1 Éléments fondamentaux de la situation

Cette situation, intitulée « La balle de tennis » consiste à produire une figure symétrique à partir d'une figure qui ne l'est pas (cf. fig. 1) pour ensuite tracer l'axe de symétrie de la figure obtenue. Nous abordons ici le premier niveau de questionnement afin de pointer les éléments fondamentaux de cette situation. Voici le document présenté aux participants. Les procédures attendues des élèves qu'ils ont répertoriées figurent en italique.

LA BALLE DE TENNIS

Fournir aux élèves une fiche sur laquelle est reproduite une figure comprenant un cercle et une ligne courbe joignant deux points du cercle : cela ressemble à une balle de tennis. La figure ci-contre en est un exemple.

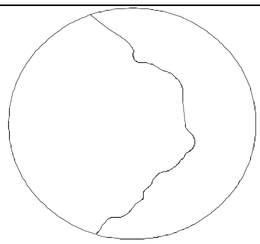


Fig. 1

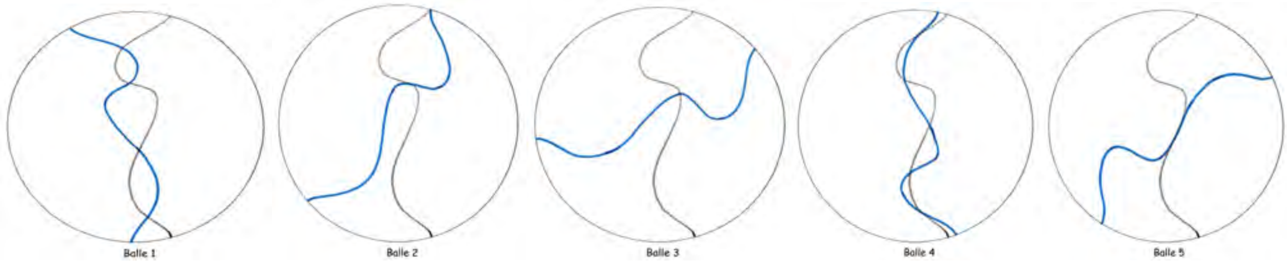
La séance se déroule selon plusieurs étapes.

1. La figure est-elle symétrique ? Comment en être sûr ?

Procédures attendues : Si on décalque la figure, d'un côté du papier calque on retrouve la figure donnée et de l'autre côté on a son retourné. La figure et son retourné ne peuvent se superposer, la figure est donc non symétrique. On peut aussi utiliser le pliage et vérifier qu'il n'est pas possible de faire coïncider deux moitiés de la figure.

2. Comment faire pour fabriquer une nouvelle figure qui complète cette figure et qui, elle, soit symétrique ?

Procédures attendues : Pour produire une figure symétrique, il suffit par exemple de retourner la figure en faisant coïncider les cercles de la figure initiale et du retourné. Quelle que soit la manière de faire coïncider les cercles, on obtient toujours une figure symétrique. De plus, on constate qu'en faisant pivoter le calque on obtient *une infinité de figures symétriques. En voici quelques exemples.*



Il est aussi possible d'envisager une procédure par pliage : il suffit de plier suivant n'importe quel diamètre. Si la feuille est suffisamment transparente, on peut faire apparaître la figure symétrique d'un côté ou de l'autre de la feuille suivant la manière dont on a plié.

3. Tracer l'axe de symétrie d'une figure symétrique sans plier

Procédures attendues : Pour tracer l'axe, les élèves vont devoir trouver au moins deux points particuliers, - deux points invariants-, et l'axe de symétrie apparaît alors comme l'ensemble des points invariants. Si des lignes de la figure se rencontrent sur l'axe, certains de ces points sont invariants et peuvent être facilement identifiés visuellement comme faisant partie de l'axe. Quand on en a deux ou plus (balle n°1), l'axe est entièrement déterminé. Si on n'en a qu'un (balle n°3), sa direction peut être fixée par considération d'un couple de points homologues dont on prend le milieu.

Cette situation pose trois types de problèmes différents à résoudre.

Vérifier la symétrie et la non symétrie (étape 1 et 2) : lorsque la tâche consiste à prouver qu'une figure est non symétrique deux procédures sont possibles mais le retournement permet de produire facilement une preuve. Contrairement au pliage qui nécessite de faire une hypothèse sur l'axe, il suffit de faire pivoter la figure retournée sur la figure initiale.

Produire du symétrique (étape 2) : la superposition de la figure et de sa retournée permet d'obtenir une autre figure qui, elle, est symétrique. Le choix d'insérer la ligne courbe dans un cercle permet de donner l'occasion aux élèves de faire l'expérience de produire des figures symétriques infiniment variées.

Tracer l'axe de symétrie d'une figure (étape 3) : cela conduit les élèves à exercer la mobilité de leur regard sur la figure en recherchant des points. Ils vont en effet constater qu'il faut rechercher des points, des points invariants et que deux points suffisent à définir une droite.

3.2 Analyse comparative de comptes-rendus de séances

Nous abordons alors avec les participants le second niveau de questionnement en étudiant l'adaptabilité de cette situation à l'enseignement ordinaire à partir de l'analyse comparative des séances menées par Mme C., Mme R. et Mr L., trois enseignants de CE2 ayant accepté de participer à notre recherche (cf. transcriptions des séances en annexe B). L'étude des modalités de mises en œuvre de la situation doit permettre de dégager les choix de chacun des enseignants et d'étudier leur influence sur les procédures des élèves. Identifier les savoirs mobilisés ou non par l'enseignant au moment de ces choix permettra d'envisager des pistes de travail pour une optimisation de la ressource.

Après une lecture individuelle des comptes rendus de séances suivie d'un temps d'échanges par petits groupes, nous listons les adaptations apportées par les enseignants. Nous présentons ci-dessous celles qui mettent en jeu des savoirs mathématiques relatifs à la symétrie axiale et à son enseignement. Quatre choix importants de mise en œuvre de la situation sont mis au jour.

1. *Autoriser ou non le pliage pour vérifier que la figure n'est pas symétrique*. Les trois séances débutent de la même façon : l'enseignant présente la figure et donne aux élèves la première consigne. Il s'agit de vérifier que la figure n'est pas symétrique. Aucun des trois enseignants n'interdit explicitement le pliage. Les élèves de Mme C. ont tous spontanément recours au papier calque mais certains élèves de Mr L. et de Mme R. utilisent le pliage. Les élèves de Mme C. prouvent très rapidement que la figure n'est pas symétrique. Dans la classe de Mme R., les procédures mises en œuvre sont très diverses mais l'enseignante saisit cette occasion pour amener les élèves à les comparer et conclut en disant : « L'inconvénient de la méthode par pliage, c'est que vous n'êtes jamais sûr d'avoir fait tous les pliages possibles et imaginables pour prouver qu'elle n'est pas symétrique. ». En effet, pour prouver l'existence d'une symétrie par pliage, il suffit d'exhiber un axe mais la formulation de la non symétrie est beaucoup plus difficile car elle cache un quantificateur universel : quel que soit l'axe choisi, il ne convient pas. Mme R conclut alors ainsi : « Une méthode qui est fiable à 100%, c'est laquelle ? Pour montrer qu'elle n'est pas symétrique ? … ». Un élève répond : « En décalquant la figure. ». Quant à Mr L., il consacre la mise en commun à l'explicitation de la procédure par retournement et ne relève pas le fait que certains élèves ont utilisé le pliage. Or, laisser les élèves avoir recours au pliage pour vérifier la non symétrie interdit le fait de demander aux élèves de faire ensuite une hypothèse sur l'axe. Si, par contre, l'enseignant fait le choix d'interdire le pliage, alors les élèves utilisent le calque et, au moment où ils posent l'envers du calque sur la figure initiale, une figure symétrique apparaît immédiatement et il leur suffit de repasser au crayon la ligne courbe de la balle de tennis en utilisant la transparence du papier pour obtenir une figure symétrique.

2. *Justifier ou non l'existence d'une infinité de productions pertinentes.* La deuxième consigne « compléter la figure pour la rendre symétrique » donne lieu à des productions diverses. L'analyse des séances révèle plusieurs niveaux de prise en charge par l'enseignant de l'existence d'une infinité de solutions possibles.

   Mr L. constate l'existence de plusieurs solutions : il fait pivoter le transparent sur le rétroprojecteur et fait apparaître différentes figures.

   Mme C. et Mme R. justifient l'existence d'une infinité de solutions. Toutes deux donnent une justification issue de l'action des élèves sur le matériel.

   Mme C : « Il y en a plein, il y en a autant qu'on peut bouger le calque »

   Mme R : « Parce qu'on peut plier de différentes façons. »

   Toutefois, les explications de Mme R. vont au-delà de la simple référence au matériel utilisé. Elle fait le lien avec les objets et propriétés géométriques en jeu : « parce que le point de départ de la figure est un cercle et dans un cercle, il y a une infinité d'axes de symétrie. »

3. *Autoriser ou non le retournement pour vérifier que la figure est symétrique.* Les élèves doivent ensuite vérifier que la figure obtenue est symétrique et, là encore, deux types de procédures sont possibles. Mme R. impose le pliage. Pour reconnaître ou vérifier que la figure est symétrique par pliage sans la découper, ses élèves doivent donc faire une hypothèse sur la position de l'axe pour savoir où plier. Cela peut se faire de deux façons : plier sur une droite (ou un segment) déjà tracée, ce qui, au niveau matériel est difficile à réaliser, ou faire coïncider des parties de la figure (surfaces, lignes ou points) situées de part et d'autre de l'axe imaginé ou supposé puis lisser le papier pour marquer le pli. Les élèves peuvent alors constater que le trait obtenu passe par des points d'intersection. Mme R. demande à ses élèves de plier la figure car, justement, elle souhaite ensuite les amener à constater que l'axe passe par certains points de la figure.

4. *Choisir ou non les figures dont on va tracer les axes de symétrie.* Choisir les figures permet de jouer sur plusieurs variables : le nombre de points d'intersection par lesquels passe l'axe, la présence ou non de points d'intersection non invariants. L'intersection des deux courbes peut être un point, plusieurs

points distincts ou une portion de courbe. Mme C. et Mr L. ont préparé eux-mêmes les figures à distribuer aux élèves mais Mme R. a utilisé les figures proposées dans le document sans les analyser au préalable. Au moment de la mise en commun, elle affiche la balle n°5 au tableau (cf. annexe) et désigne les points d'intersection comme étant des points par lesquels passe l'axe. Elle demande alors aux élèves de vérifier que l'axe « passe bien par tous les endroits où les deux traits se rencontrent ». Or, les points d'intersection ne sont pas nécessairement des points de l'axe. Certains élèves sont un peu déstabilisés car la droite qu'ils ont tracée (et qui correspond bien au pli) ne passe pas par tous les points d'intersection.

4 BILAN PROVISOIRE DE LA RECHERCHE

De l'analyse comparative des trois séances se dégagent des éléments significatifs de la viabilité des situations proposées. La manière dont chaque enseignant prend en compte les éléments fondamentaux de la situation et investit la marge de manœuvre nous renseigne sur ce qu'ils doivent connaître des mathématiques, de la symétrie axiale et ses différentes définitions, des problèmes posés et des procédures attendues des élèves pour faire des choix "pensés" de mise en œuvre. Il s'agit à présent d'utiliser ce bilan pour améliorer notre document-ressource et nous envisageons dans ce but plusieurs axes de travail.

Tout d'abord, nous souhaitons améliorer la circulation entre les blocs qui composent le document en créant davantage de liens html entre les textes théoriques et les fiches descriptives d'activités. De plus, pour garantir au mieux les éléments fondamentaux de la situation tout en laissant une certaine marge de manœuvre, nous avons l'intention de créer d'autres "fenêtres-zoom", c'est-à-dire, des fenêtres qui s'ouvrent en surimpression sur la fiche générale de présentation de la situation pour apporter des précisions, des savoirs utiles pour le maître, une explicitation du lien entre les variantes proposées et les apprentissages visés ...

L'analyse des séances ouvre également des pistes de réflexion pour aborder une nouvelle étape de notre projet : étudier les conditions du développement des pratiques d'enseignement de la géométrie ou, plus précisément, étudier en quoi notre document-ressource peut modifier les pratiques au-delà de l'utilisation ponctuelle des situations proposées.

Lorsqu'un enseignant utilise un document pédagogique (quel qu'il soit), nécessairement, il y apporte des modifications (aussi minimes soient elles) car ces modifications sont inhérentes au processus d'appropriation de la ressource par l'enseignant (Mangiante-Orsola, 2007). Ici, le document produit encourage ces modifications et propose même des variantes aux enseignants.

Une étude plus fine des séances mises en œuvre montre que les adaptations réalisées par les enseignants sont de nature différente. Nous distinguons trois types d'adaptations.

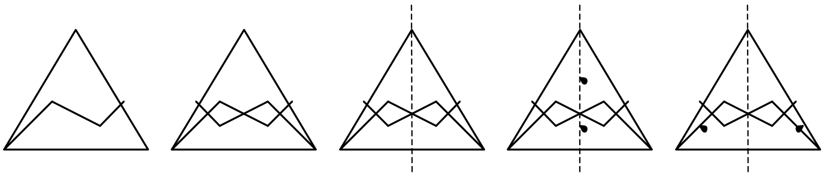
- L'enseignant fait des choix (ceux proposés par le document). C'est par exemple le cas lorsque Mme C. décide de préparer au préalable des figures à proposer aux élèves plutôt que d'utiliser leurs productions.

- L'enseignant crée des écarts avec ce qui était implicitement prescrit (des réponses étaient proposées mais il fait un autre choix). C'est par exemple le cas lorsque Mme R. autorise le pliage pour vérifier que la figure est symétrique et s'éloigne ainsi du projet initial qui consistait à donner l'occasion aux élèves de faire une hypothèse sur la position de l'axe en recherchant au préalable des points invariants.

- Mais aussi, l'enseignant fait de nouvelles propositions pour combler des "vides" (absence d'indications dans le document)

Ce dernier cas, nous intéresse davantage que les précédents et Mme C. prend des initiatives significatives de ce type d'adaptations.

Au cours de la deuxième année de suivi, Mme C. décide de modifier la figure initiale. Au lieu d'inscrire une ligne courbe dans un cercle, elle trace une ligne brisée dans un triangle équilatéral. Qu'est ce que cela change ?



Consigne 1 Consigne 2 Consigne 3

La figure est constituée de segments de droites et non de lignes courbes. Les enfants peuvent utiliser leur règle pour tracer la figure sur le papier calque. Les productions sont plus précises.

Trois productions sont possibles et non une infinité. Cela permet à Mme C. de présenter ces trois productions au moment de la mise en commun et de les valider collectivement. Cela lui permet de plus d'organiser la troisième phase de la séance (tracé de l'axe de symétrie) selon une certaine progression. Chaque enfant dispose de trois figures, les trois figures symétriques obtenues et l'enseignante donne successivement les trois consignes suivantes.

Consigne 1 : Plier la première figure pour vérifier qu'elle est bien symétrique. Le pli coïncide avec l'axe.

Consigne 2 : Placer sur la deuxième figure des points qui vont se superposer à eux-mêmes après pliage.

Consigne 3 : Placer sur la troisième figure deux points qui sont se superposer après pliage.

Lorsque Mme C. apporte ces adaptations, elle ne choisit pas entre plusieurs possibles proposés par le document mais elle a fait une nouvelle proposition qui tient compte des éléments fondamentaux de la situation. Ainsi, cette proposition apparaît comme la trace d'une "appropriation plus aboutie" par l'enseignante des fondements de notre projet, voire comme l'indice d'un développement (potentiel) de ses pratiques d'enseignement de la géométrie au-delà de la mise en œuvre de cette situation.

De manière plus générale, on peut se demander si les "vides" laissés par le document ne permettent pas véritablement à l'enseignant de s'approprier les situations et, si c'est le cas, une autre piste pour améliorer notre document est ouverte : dégager des caractéristiques du document susceptibles d'encourager les enseignants à investir la marge de manœuvre par de nouvelles propositions respectant les éléments fondamentaux.

III - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'enseignement de la symétrie orthogonale, si on le pense dans la continuité du début de l'école primaire au collège, repose sur le passage d'un travail sur des figures d'abord vues comme des assemblages de surfaces délimitées par des lignes, dont on vérifie par exemple la superposition par pliage ou retournement complet, à la déconstruction de ces figures en réseaux de lignes puis de points liés par des propriétés géométriques telles que l'égalité de longueur, la perpendicularité, l'équidistance à l'axe, etc. Comment l'enseignant peut-il accompagner les élèves dans cette déconstruction dimensionnelle des figures qui, seule, permet l'accès à une vision de la symétrie comme transformation ponctuelle, objet de la géométrie du collège ? Comment peut-il permettre aux élèves de rencontrer et mettre en relation ces différentes définitions et propriétés de la symétrie d'une figure ? L'objectif que nous nous donnons est d'engager les enseignants dans un jeu sur les instruments de géométrie et, plus largement, sur les actions matérielles mises en œuvre par les élèves pour la résolution d'activités. Pour ce faire, le travail du groupe a consisté à élaborer des textes expliquant notre démarche et des exemples d'activités pour les enseignants, du CE2 à la Sixième.

Le document proposé aux enseignants s'est construit peu à peu à travers des allers-retours entre la recherche et son expérimentation dans les classes. L'analyse de séances comme celles étudiées par les participants de cet atelier nous permet de continuer à améliorer la ressource en essayant de cerner plus finement les besoins des maîtres.

Tout au long de cette élaboration, la prise en compte conjointe de l'adaptabilité et du contrôle des situations nous conduit à interroger les modifications apportées par les enseignants. Leur étude nous permet non seulement de mieux comprendre comment les maîtres s'emparent des situations proposées par les chercheurs mais elle ouvre aussi des pistes pour mieux cerner une évolution potentielle des pratiques individuelles de l'enseignement de la géométrie. Notre intention est de poursuivre notre recherche en explorant les modalités d'appropriation par les enseignants de la ressource et les dispositifs susceptibles de favoriser cette appropriation.

IV - BIBLIOGRAPHIE

DUVAL R. & GODIN M. (2006). Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **n°76**.

GODIN, M. ET PERRIN-GLORIAN, M.J. (2009). De la restauration de figures à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. *In COPIRELEM, Enseigner les mathématiques à l'école : où est le problème ? Actes du colloque de Bombannes*, juin 2008, CD-rom, Atelier A2.

MANGIANTE-ORSOLA C.(2007), Une étude de la genèse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques : prédétermination et développement, thèse, université Denis Diderot - Paris VII

MATHE A.C (2009), Quelle articulation entre conceptualisation et confrontation aux objets sensibles en géométrie à l'école primaire ?. *In Cyprus and France, research in mathematics education*, édition Cyprus University, 51-70.

PERRIN-GLORIAN M.J. (à paraître), L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement, in *Actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques*, Clermont Ferrand, août 2009

ANNEXE A

Actions matérielles et propriétés mathématiques

(*Extrait du document ressource*)

Reconnaître, vérifier, produire une symétrie par pliage (compatible avec une vision en termes de surfaces)

Deux types d'actions matérielles peuvent permettre de résoudre ce type de problèmes. Soit il faut connaître l'axe ou faire une hypothèse sur sa position. On plie alors sur une droite déjà tracée (ce qui, au niveau de la manipulation, est difficile à réaliser par des élèves de cycle 3). Soit on fait coïncider des parties de la figure situées de part et d'autre de l'axe supposé puis on lisse le papier pour marquer le pli, matérialisation de l'axe de symétrie pour la figure. On notera que produire une figure symétrique par pliage pose des problèmes de manipulation si l'on ne peut pas découper. Il faut dans ce cas utiliser la transparence du papier ou recourir à l'utilisation d'un papier calque.

Dans ce type d'activité, on pourra mettre en évidence, avec les élèves, les définitions suivantes :

- Une figure est symétrique si on peut plier la feuille de façon à séparer la figure en deux sous-figures qui se superposent exactement lorsque l'on plie. Le pli indique une droite qu'on appelle l'axe de symétrie de la figure.

- Une figure est symétrique si elle admet un axe de symétrie (droite le long de laquelle on plie la feuille).

- Une figure n'est pas symétrique si on ne peut pas plier la feuille de façon à séparer la figure en deux sous-figures qui se superposent exactement lorsque l'on plie.

Pour montrer l'existence d'une symétrie par pliage, il suffit d'exhiber un axe. La formulation de la non symétrie est beaucoup plus difficile car elle cache un quantificateur universel : quel que soit l'axe choisi, il ne convient pas.

Le pliage favorise la conception de la symétrie comme transformation d'un demi-plan sur un autre. Il rend difficile la production de la figure symétrique d'une figure quand celle-ci traverse l'axe. En cas de figure d'un seul côté de l'axe (par exemple la moitié d'une figure symétrique), la superposition de la figure et de sa retournée s'opère dans le pliage mais sans que le retournement du papier n'apparaisse clairement et sans que ne se pose la question du positionnement du retourné.

Reconnaître, vérifier, produire une symétrie par retournement, sans plier (compatible avec une vision en termes de surfaces)

En utilisant du papier calque, il n'est pas nécessaire de plier. On peut décalquer entièrement la figure donnée et retourner le calque. Vérifier la symétrie d'une figure revient alors à montrer la superposition ou la non superposition de la figure avec sa retournée. Pour ce faire, il faut repérer des éléments caractéristiques des deux figures qui devraient coïncider. La facilité de reconnaissance de ces éléments dépend évidemment des figures choisies.

Pour produire ou compléter une figure symétrique par rapport à un axe donné ou produire la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe donné, il faut décalquer la figure, retourner le calque mais, pour le replacer, il faut avoir des repères : il faut connaître les symétriques de deux points remarquables de la figure, par exemple deux points de l'axe qu'on superposera avec eux-mêmes en utilisant l'invariance dans la symétrie des points de l'axe ; on peut aussi décalquer l'axe avec la figure et repositionner à l'envers l'axe sur l'axe. Mais cela ne suffit pas, pour éviter la symétrie glissée, il faut aussi avoir repéré un point de l'axe qu'on laissera invariant.

Ce type de procédures met en œuvre les définitions suivantes :

- Une figure est symétrique s'il est possible de la faire coïncider exactement avec sa retournée.

- Une figure n'est pas symétrique s'il n'est possible de la faire coïncider exactement avec sa retournée.

Là encore, la formulation de la symétrie d'une figure utilise un quantificateur existentiel : il faut réussir une superposition ; la formulation de la non symétrie cache un quantificateur universel : quelle que soit la position du calque, on n'a pas superposition. Le choix de la figure est déterminant pour identifier visuellement les parties qui devraient coïncider et limiter les possibilités à un nombre fini. C'est le cas si la figure est polygonale, par exemple un polygone étoilé.

Par retournement, on peut vérifier qu'une figure est symétrique par rapport à un axe ou fabriquer une figure symétrique par rapport à un axe sans exhiber l'axe de symétrie. De même, pour fabriquer une figure symétrique à partir d'une figure qui ne l'est pas, il n'est pas nécessaire d'identifier une demi-figure : à partir d'une figure donnée, on engendre une nouvelle figure symétrique qui la contient par un puzzle par superposition de la figure et de la figure retournée en faisant coïncider des parties communes (Godin, Perrin, 2009).

Cela permet plus généralement de travailler un autre regard sur les figures très utile pour la géométrie au collège : des assemblages par superposition, alors qu'à l'école élémentaire, on se contente le plus souvent d'assemblages par juxtaposition.

De plus, le retournement de la figure complète a l'avantage de ne pas favoriser la conception du déplacement d'un demi-plan sur l'autre : les figures qui traversent l'axe de symétrie se traitent comme les autres et même d'une certaine manière plus facilement puisqu'elles facilitent le repérage de la position du calque.

Le retournement permet également plus facilement de montrer qu'une figure n'a pas d'axe de symétrie, au moins pour un polygone : il faut repérer des parties qui pourraient se superposer, voir à quelle condition des parties (segment, « coin »), pourraient ou non se superposer.
Enfin, aborder avec les élèves cette approche de la symétrie d'une figure permet aisément de faire apparaître la notion de point invariant (se superpose avec lui-même) et de relier l'axe aux points invariants dans la mesure où l'axe n'est pas donné d'avance : si on a reconnu qu'une figure est symétrique sans avoir identifié l'axe, on peut le rechercher et ce sont les points invariants qui vont aider à l'identifier.

<u>Reconnaître, vérifier, produire une symétrie avec les instruments usuels</u>

Nous avons vu que, pour vérifier qu'une figure est symétrique en pliant sa feuille, on se place dans l'espace, en 3D ; en utilisant un retournement, on passe aussi par l'espace pour travailler sur une figure du plan. Pour travailler exclusivement dans le plan avec les instruments classiques de géométrie (règle, équerre compas), sur une feuille unie, il faut imaginer la transformation de l'espace et son effet sur la feuille ou utiliser (au moins implicitement) des propriétés géométriques, par exemple le fait que l'axe de symétrie est médiatrice de tout segment joignant un point et son image (même si on ne connaît pas le mot, on peut mettre en œuvre les propriétés correspondantes : milieu et orthogonalité) ou utiliser d'autres propriétés de la symétrie orthogonale, par exemple les propriétés d'incidence (alignement et intersections). La mise en œuvre des propriétés de la symétrie demande aussi de considérer qu'un point s'obtient par l'intersection de deux lignes. Cela demande donc de dépasser la vision de la figure comme une surface qu'on peut déplacer et de la concevoir aussi comme composée de segments ou de points (unités de dimension plus petite), d'être capable de considérer ceux-ci en tant que tels et aussi de considérer les droites, supports des segments. Voici quelques exemples de propriétés qu'il sera alors possible de faire émerger avec les élèves :

- Un point et son image se trouvent sur une perpendiculaire à l'axe, à égale distance du point d'intersection avec l'axe
- Deux droites symétriques l'une de l'autre se coupent sur l'axe : propriétés d'incidence ; utilisation de la règle non graduée ; cela demande de penser à prolonger les tracés et de sortir du contour de la figure fournie.
- La symétrie conserve les longueurs : report de longueurs au compas sur des droites déjà tracées (c'est-à-dire intersection d'une droite et d'un cercle) ou intersection de deux cercles.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, le passage de la procédure pliage ou retournement à une procédure « 2D » sur papier uni constitue un saut cognitif majeur qui est un des objectifs de la classe de sixième : l'utilisation de procédures permettant de rester dans le plan nécessite la mise en œuvre de propriétés qui s'expriment à partir de points et de droites, c'est-à-dire de composantes de la figure qui n'apparaissent pas dans sa perception directe, voire ne figurent pas sur le tracé ; cela demande un changement de regard sur la figure.

Reconnaître, vérifier, produire une symétrie avec du papier quadrillé

L'utilisation d'un quadrillage permet aussi de rester dans l'espace à deux dimensions de la feuille de papier en s'appuyant sur le repérage et le comptage de carreaux. Il peut permettre d'amorcer ce changement de regard et aider à la mise en œuvre des propriétés mais cela ne va pas de soi. Le quadrillage est compatible avec une vision surface mais il amène aussi à une vision de la figure comme contour (reproduire les segments du bord, les uns à la suite des autres, en tournant sur le bord) qui demande à être coordonnée avec les autres regards sur la figure. De cette façon il attire l'attention sur les lignes et certains points (les points remarquables de la figure qui sont aussi des nœuds du quadrillage). De plus, le quadrillage prend en charge l'orthogonalité dans le cas où l'axe est sur une ligne du quadrillage.

ANNEXE B

CLASSE DE MADAME C

Au cours des séances précédentes, les élèves ont été amenés à identifier des figures symétriques et des figures non symétriques en utilisant les procédures par découpage- pliage, pliage-utilisation de la transparence mais aussi les procédures par retournement de la figure initiale reproduite sur papier calque.

Episode 1 : La figure est-elle symétrique ? Comment en être sûr ?

M : Aujourd'hui, on va travailler avec une nouvelle figure.

L'enseignante distribue la figure. Elle a reproduit la même figure en format A3 et l'affiche au tableau. Les élèves prennent spontanément leur pochette de papier calque et commencent à décalquer la figure. L'enseignante leur demande d'écrire leur prénom sur le calque.

Tous les enfants reproduisent la figure puis retournent le papier calque. Certains font pivoter la figure selon un geste continu et d'autres essaient plusieurs positions possibles du calque sur la figure.

M : Est-elle symétrique ?

E : Non.

M : Comment faites-vous cela ?

E : Je trace sur le calque et je retourne pour voir si c'est symétrique.

E : Ca ne coïncide pas

M : Vous êtes sur ?

E : Si ça peut…

E : Non, ça ne peut pas.

L'enseignante invite un élève à venir au tableau. Il a, à sa disposition, la figure 1 agrandie, affichée au tableau ainsi qu'une feuille papier calque sur laquelle l'enseignante a préalablement reproduit la figure initiale. L'élève cherche à superposer la figure retournée sur la figure initiale. Pour cela, il fait pivoter le papier calque en veillant à ce que les deux cercles soient toujours superposés.

E : Ce n'est pas symétrique.

M : Alors symétrique ?

E : Non

Episode 2 : Comment faire pour fabriquer une nouvelle figure qui complète cette figure et qui, elle, soit symétrique ? Vérifier que la figure obtenue est bien symétrique.

M : Alors, on a vu que cette figure n'était pas symétrique. Alors, comment faire ? Qu'est ce qu'on ne pourrait pas rajouter quelque chose sur la figure pour s'arranger et la rendre symétrique ?

E : Oui.

M : Allez-y. Essayez ! Allez !

Voici les procédures observées :

Quatre élèves réussissent rapidement à placer leur calque pour obtenir par transparence une figure symétrique et ils repassent sur le verso du calque le serpentin. Puis, peu à peu les autres élèves réussissent à compléter la figure. Mais, tous ont des difficultés à dupliquer le serpentin sur la feuille de papier.

M : Alors comment on fait ?

E : Il faut repasser sur l'envers.

M : Oui, il faut repasser le trait de l'autre côté du calque puis retourner le calque, bien fait coïncider les deux cercles et repasser à nouveau sur la ligne.

Débute alors la mise en commun. Un élève vient au tableau, il pose le papier calque sur la figure initiale. Par transparence, on voit apparaître une figue symétrique

M : Est-ce que c'est symétrique ? Pourquoi ?

E : Oui, parce que quand on repasse ça. Ca devient symétrique.

M : Comment faire ? Pourquoi elle est symétrique ?

E : On fait avec le papier calque et si ça retourne, ça se superpose.

M : Est-ce que ça donne forcement ça ?

E : Non.

M : Qu'est ce qui est important au niveau du cercle ?

E : Il faut que ça soit pareil.

Episode 3 : Montrer la variété des figures symétriques produites.

L'enseignante montre au tableau différentes productions possibles en faisant pivoter le papier calque.

M : Alors, regardez. Si je fais pivoter comme ça qu'est ce que j'obtiens ?

E : Une autre figure

M : Est-ce qu'elle est symétrique ?

E : Oui

M : Et comme ça ?

E : Oui

M : Oui quoi ?

E : Elle est symétrique

M : Combien on peut en trouver ?

E : Plein

M : Il y en a plein, il y en a autant qu'on peut bouger le calque.

L'enseignante montre ensuite le travail d'un autre élève. Celui-ci n'a pas fait coïncider les deux cercles (celui de la figure initiale avec celui de sa reproduction sur le calque) mais il a repassé sur la ligne courbe en utilisant la transparence.

M : Tu as raison, c'est symétrique mais il faudrait à ce moment-là repasser sur le cercle. Tu vois, tu repasses toute la figure, la courbe mais aussi le cercle.

L'élève repasse sur le cercle.

M : Voilà, là, c'est symétrique.

Puis, l'enseignante affiche cinq figures au tableau.
M : Alors, j'ai préparé d'autres figures…Voilà, donc, grosso modo, on obtient ces différentes sortes.

Balle n°1 Balle n°2 Balle n°3 Balle n°4 Balle n°5

Episode 4 : Tracer l'axe de symétrie.
M : Alors, une autre question. Je vous demande maintenant de trouver où est l'axe. Avec crayon de bois et règle, trouver les axes. Alors, qu'est ce qu'on peut faire pour voir, si si c'est symétrique ?
E : En pliant.
M : Oui mais attention le pliage est interdit avant d'avoir tracé l'axe.
La plupart des enfants réussissent à situer de façon approximative la position de l'axe mais les tracés sont imprécis tout particulièrement ceux des axes de symétrie des balles 3, 4 et 5.
Un élève utilise la règle, prend des mesures afin de placer « *l'axe de symétrie au milieu du cercle* ».
Débute alors la mise en commun à propos de l'axe de symétrie de la balle n°1.
Un élève vient au tableau et l'enseignante lui tend la règle. Il place le bord de la règle de façon à ce que le tracé passe par les points d'intersection des deux serpentins.
M : Alors ?
E : Eh bien, le trait doit aller du haut jusqu'en bas.
L'enseignante trace la droite.
M : Voilà, donc, par où passe la droite ?
E : Elle passe par deux points du haut jusqu'en bas.
M : Votre axe passe par les points d'intersection.
L'enseignante demande à une autre élève de venir au tableau, celui qui a utilisé sa règle pour prendre des mesures.
M : Viens explique-nous ce que tu as fait avec ta règle.
E : J'ai tracé l'axe. Et puis après, à partir de l'axe, j'ai mesuré jusqu'à ici ? L'élève montre deux points sur le cercle. Il a donc essayé de mesurer la distance entre un point de l'axe et chacun des deux points du cercle.
M : Vas-y montre-nous.
L'élève place la règle de façon à prendre ces deux mesures mais il ne tient pas compte de la perpendicularité. Il maintient la règle à l'horizontale. De plus, la règle glisse sur le tableau, la manipulation est difficile.
M : Alors, tu vois c'est un peu difficile, alors on reverra ça plus tard dans l'année quand on aura appris à tracer des droites perpendiculaires. Tu vois, là, il faut que la droite soit orthogonale.
Alors, maintenant, la balle n°2. Viens.
Un autre élève vient au tableau pour tracer l'axe de symétrie.
M : Alors, comment tu places ta règle ?
E : Comme ça.
M : Comment tu peux expliquer ?
E : Il faut plier dans ce sens. L'axe est dans ce sens.
M : D'accord. Bon, j'ai vu que vous avez tracé les axes des autres balles mais c'est un peu difficile d'être précis alors on va mettre ça de côté et on y reviendra plus tard dans l'année. Il faut pouvoir tracer une droite perpendiculaire et prendre la moitié.
Fin de la séance

<u>CLASSE DE MADAME R</u>

Au cours des séances précédentes, les élèves ont été amenés à identifier des figures symétriques et des figures non symétriques en utilisant les procédures par découpage- pliage, pliage-utilisation de la transparence mais aussi les procédures par retournement de la figure initiale reproduite sur papier calque.

Episode 1 : La figure est-elle symétrique ? Comment en être sûr ?
L'enseignante affiche au tableau la figure initiale de la balle de tennis.
M : Que voyez-vous ?
E : Un cercle.
E : Avec une ligne au milieu.
M : Il y a un cercle avec une ligne qui coupe le cercle. Ca vous fait penser à quoi ?
E : …
M : Ca ne vous fait pas penser à une balle de tennis ?
E : Ah, si !
M : Ca ressemble un peu à une balle de tennis, sauf que la balle de tennis, elle n'est pas blanche, elle est jaune. Alors, première question, est-ce que cette figure est symétrique ?
E : Non
M : Rémi dit non. Qui pense que cette figure est symétrique ? Personne. Comment on peut faire pour être sûr que cette figure n'est pas symétrique ?
E : En pliant.
E : Avec le calque.

M : Alors, je vais vous donner le matériel que vous pouvez utiliser pour démontrer que cette figure n'est pas symétrique. Ceux qui n'ont pas besoin du calque vous pouvez commencer. Les autres, je vous donne du calque.

Voici les procédures observées :
La plupart des élèves découpe en suivant le tracé du cercle puis plie la feuille. Certains plient en laissant le serpentin à l'intérieur et essaient de voir en utilisant la transparence si les deux parties du serpentin se superposent. D'autres plient en laissant le serpentin à l'extérieur mais le papier n'est pas suffisamment fin pour pouvoir vérifier si les deux parties du serpentin se superposent ou non. Les élèves tournent et retournent la feuille pliée pour comparer l'allure générale des deux parties de serpentin. Constatant que ce n'est pas le cas, ils déplient leur feuille, essaient de plier autrement.

Un élève ne tient pas compte de la ligne, il plie en superposant deux demi-cercles et en conclut que la figure est symétrique. L'enseignante débute la mise en commun en lui demandant de venir au tableau.
M : Clément nous dit que la figure est symétrique. Quelle est la technique que tu as utilisée, Clément ?
E : J'ai découpé et j'ai plié comme ça.
M : Alors, Clément a découpé puis a plié. Il y en a d'autres qui ont découpé le cercle et qui l'ont plié ?
E : Oui
M : Et donc pourquoi tu dis qu'elle est symétrique ?
E : Parce que ça se superpose.
M : Tu as plié et tu as vu les deux demi-cercles qui se superposent. Et le trait ici alors qu'est ce que tu en fais ?
E : …
M : Tu n'en fais rien ? Tu n'en tiens pas compte. Oui mais c'est parce que tu as plié avec le trait à l'intérieur, alors on le voit plus et ça se superpose. S'il n'y avait pas de trait, on pourrait dire après pliage, j'arrive à faire coïncider les deux parties que c'est symétrique. Mais, regarde ici, si on le regarde par transparence le trait qui est à l'intérieur. Qu'est ce qu'il faudrait pour que ce soit symétrique ?
E : Qu'il soit comme ça.
M : Il faudrait qu'il se superpose. Alors peut-être qu'il faudrait plier différemment pour qu'il se chevauche ? Qui d'autre a trouvé qu'elle était symétrique cette figure ? (Personne ne lève la main) *Non, elle ne l'est pas. Alors, la méthode du pliage. Viens avec ta figure. L'inconvénient de la méthode par pliage, c'est que vous n'êtes jamais sûr d'avoir fait tous les pliages possibles et imaginables pour prouver qu'elle n'est pas symétrique. Une méthode qui est fiable à 100%, c'est laquelle ? Pour montrer qu'elle n'est pas symétrique ?*
E : Le pliage.
M : Merci d'avoir écouté, Léa !
E : En décalquant.
M : En décalquant la figure. Est-ce que tu as trouvé qu'elle était symétrique ?
E : Non
M : Une fois qu'on a décalqué qu'est ce qu'on fait ?
E : On retourne
M : On retourne la feuille de calque et là ? Est-ce que les traits se superposent ? Emma ?
E : Non
M : Aucun trait ne se superpose ?
E : Le cercle
M : Alors, le cercle, on arrive à le faire se superposer exactement par contre qu'est ce qu'on n'arrive pas à superposer ? Léa ?
Léa : La ligne
M : La ligne qui traverse le cercle.

Episode 2 : Comment faire pour fabriquer une nouvelle figure qui complète cette figure et qui, elle, soit symétrique ?
M : Alors, moi, ce que je voudrais c'est que vous trouviez un moyen de tracer exactement la même figure que celle que je vous ai donnée au départ mais en la complétant pour qu'elle devienne une figure symétrique. C'est-à-dire que ça vous le conservez (elle montre le cercle et le serpentin) *et maintenant vous me la complétez pour qu'elle devienne une figure symétrique… Vous vous regardez les uns les autres en vous disant mais qu'est ce qu'elle nous demande ? Allez-y, essayez…*

Voici les procédures observées :
La plupart des élèves plient la feuille, regardent par transparence le serpentin mais ne voient pas comment compléter la figure. Certains repassent sur chaque demi-cercle le serpentin. D'autres exécutent la même procédure mais après avoir reproduit la figure sur papier calque.
Quelques élèves retournent le papier calque, repassent sur le serpentin en utilisant la transparence puis peu à peu la procédure se diffuse au sein de la classe.
L'enseignante aide ceux qui ont des difficultés à dupliquer sur la feuille de papier le tracé du serpentin (il faut en effet crayonner au dos de la feuille de calque en suivant le tracé du serpentin puis repasser de l'autre côté)

M : Est-ce que tout le monde a réussi ?
E : Oui
M : Comparer un petit peu vos travaux avec ceux de vos voisins. Est-ce que vous avez tous obtenu la même figure ?
E : Non
M : Parce que là, vous êtes tous sûrs de votre figure. Mais est-ce que c'est normal que vous n'ayez pas tous la même ? Parce que, là, on est tous partis de la même figure. Pourquoi est ce qu'on peut faire des choses différentes ?
E : C'est parce que certains ont plié la feuille
M : Qui a utilisé par pliage ?
E : Moi
M : Il y en a qui ont utilisé le papier calque, vous avez reproduit la figure de départ et puis ensuite vous avez retourné le papier calque et vous avez obtenu une figure symétrique mais pas tous la même. Pourquoi ? Même ceux qui ont utilisé la technique du calque, vous avez des figures différentes. Pourquoi ?
E : Ceux qui ont décalqué
E : On a retourné comme ça ou comme ça. L'élève fait le geste de retourner la feuille du haut vers le bas puis de la gauche vers la droite.
M : Voilà, il y a plusieurs façons de retourner le calque.
E : Parce qu'on peut plier comme ça ou comme ça.
L'enseignante superpose à la figure agrandie affichée au tableau le papier calque sur lequel apparaît par transparence le retourné de la figure.

Elle fait pivoter le calque afin d'obtenir divers exemples de figures symétriques.

M : Parce qu'on peut plier de différentes façons. On obtient une quantité infinie de figures. Elles sont toutes ?
E : Symétriques
M : Elles ne sont pas toutes pareilles mais elles sont toutes symétriques. Regardez. Parce que le point de départ de la figure est un ?
E : Cercle
M : Est un cercle et dans un cercle, il y a une infinité d'axes de symétrie.

Episode 3 : Tracer l'axe de symétrie.

M : Est-ce que vous, vous avez trouvé votre axe de symétrie à vous ? Allez, vous le tracez en rouge sur votre figure, avec la règle.
Les enfants commencent les tracés à la règle.
M : Comment vérifier que le trait qu'on a tracé est bien l'axe de symétrie ?
E : En pliant sur le trait qu'on a tracé.
E : En pliant sur le trait que vous venez de tracer.
M : Que va-t-il se passer si vous avez bien tracé quand vous allez plier ?
E : On va voir les deux moitiés qui se séparent.
M : Comment dire ça ?
E : On va voir les deux moitiés qui se superposent.
M : On va voir les deux moitiés qui se superposent. Alors, ceux qui ont déjà plié, il faudra repasser le trait sur le pli.

Les tracés des élèves sont plus ou moins précis et cela dépend des figures obtenues.
M : Ceux qui ont des figures un peu comme la mienne où il y a plusieurs endroits où les traits se croisent, que remarquez-vous ? Vous ne voyez rien ? Il n'y a pas des endroits précis par où passe le trait ?
E : Ca sépare les deux moitiés.
M : Par où passe le trait ?
E : Ici. (L'élève vient au tableau et désigne sur la figure affichée le centre du cercle)
M : Au centre du cercle. Oui, c'est bien oui mais ça c'est pour tout le monde.
E : Parce que c'est au milieu de la figure.
M : Regardez votre trait rouge par rapport aux deux traits…
E : …
M : Regardez sur ma figure, est ce que vous pensez que l'axe va passer là ?
E : Non
L'enseignante désigne successivement des points sur le serpentin : tout d'abord des points sur l'un des serpentins mais qui ne sont pas des points d'intersection …
E : Non
Puis les points d'intersection (cf. balle n°5)
E : Oui
M : Regardez votre figure à vous, est ce qu'il passe bien par tous les endroits où les deux traits se rencontrent ? Alors, pour certains, c'est plus difficile.
Certains élèves sont un peu déstabilisés car la droite qu'ils ont tracée et qui correspond bien au pli ne passe pas par tous les points d'intersection. L'enseignante prend alors conscience de son erreur et intervient ponctuellement auprès de certains élèves.
L'enseignante distribue une fiche sur laquelle sont reproduites les balles nos 1 à 5.
M : Je vous donne une autre feuille sur laquelle se trouvent d'autres balles de tennis. Vous devez tracer l'axe de symétrie d'abord au crayon de bois puis au stylo rouge. Les points d'intersection, ça peut vous aider mais il faut surtout vérifier en pliant la figure.
La cloche sonne les élèves continueront plus tard le travail.

CLASSE DE MONSIEUR L

Au cours des séances précédentes, les élèves ont été amenés à identifier des figures symétriques et des figures non symétriques en utilisant les procédures par découpage - pliage, pliage - utilisation de la transparence mais aussi les procédures par retournement de la figure initiale reproduite sur papier calque.

Episode 1 : La figure est-elle symétrique ? Comment en être sûr ?
M : Je vais vous distribuer une figure (la figure initiale de la balle de tennis)
M : Tiens, cela ressemble à quoi?
E: Une bille. E: Un visage E: La terre.
M: La terre pourquoi pas si vous voulez ?
E: C'est une balle de tennis.
M: Effectivement, si on regarde cela ressemble à une balle de tennis. On va donc considérer que c'est une balle de tennis. Et ma première question, vous devez me dire si cette figure est symétrique.
Voici quelques unes des procédures observées :
Décalquage de la figure en entier, retourné et pivotement pour essayer différentes positions. L'élève voit que cela ne marche pas, retourne le calque, essaie à nouveau, retourne et recommence à faire pivoter. Difficulté à identifier le recto et le verso du calque: il retourne plusieurs fois car cela ne coïncide pas.
Le maître distribue les fiches. Un élève demande du papier calque. Le maître met le matériel à disposition et précise « *comme la fois dernière, du côté où vous décalquez, vous mettez votre prénom* »
Décalquage d'une pseudo moitié (l'enfant fait une hypothèse sur la position de l'axe et fait coïncider le bord de la feuille suivant cette position). L'élève dit que cela ne marche pas « *car là cela part plus en l'air que là* » (en décrivant le serpentin)
L'enseignant conclut avec les élèves que la figure n'est pas symétrique.

Episode 2 : Comment faire pour fabriquer une nouvelle figure qui complète cette figure et qui, elle, soit symétrique ?
Un élève dit que cela fait « *une double forme* ».
M : Alors, comment à partir de la balle de tennis, comment construire une figure qui soit symétrique. Toujours à partir de la feuille que je vous ai donnée.

Voici les procédures observées :
Un élève plie et déplie la feuille de papier puis il utilise le calque mais procède de la même façon : il le plie et le déplie.
Un élève a tracé une corde sur le calque sans utiliser la transparence puis il essaie de superposer le calque avec la figure initiale.
Un élève ne fait que des rotations du calque posé sur la feuille de papier.
Un élève repasse le serpentin sur le papier calque en utilisant la transparence.

Le maître utilise un rétroprojecteur et il projette l'image de la balle de tennis sur le tableau. Une élève vient expliquer ce qu'elle a fait « j'ai enlevé le zigzag au milieu et j'ai mis un trait droit. » L'enseignant explique alors : « Cela ne répond à notre consigne, car Léa a transformé notre balle de tennis en une autre balle. Or notre consigne c'est à partir de notre balle. Je n'ai pas le droit de supprimer cela. »

Une autre élève vient utiliser le rétroprojecteur : elle fait se superposer la figure initiale avec la figure retournée. L'assemblage réalisé forme un huit. (cf. balle n°2)
M: Explique-nous.
E: J'ai redessiné la balle de tennis …
L'élève effectue ensuite les manipulations sans parvenir à verbaliser.
M: Donc là tu as positionné le retourné sur la balle de tennis. Comment arriver à une figure qui soit symétrique? Comment est-ce qu'il faut faire.
E: On la retourne.
M: On l' a retourne, c'est-à-dire?
E: On la retourne.
M: Qu'est-ce que tu retournes?
E: la feuille de calque.
M: Vas-y fais le. La deuxième c'est ta feuille de calque.
M: Qu'est-ce qui passe. Tu retournes encore une fois. On retrouve la même.
M: Alors comment faire? Léa tu as une idée? Allez.
Léa vient au rétro. Elle fait le retourné et obtient le huit.
M : Regardez ce que cela fait.
E: un huit.
M: ma question n'est pas à quoi cela ressemble.
E: ce n'est pas symétrique.
M: Qu'est-ce qu'on fait apparaître?
E: L'autre côté.
M: Ah l'autre côté. Quelle partie?
Le maître refait la manipulation.
M: j'ai la balle de départ. Je positionne le retourné sur la balle de tennis. Et là qu'est-ce que je fais apparaître ? Une figure.
E: c'est symétrique!
M: je fais apparaître une figure symétrique. Est-ce que tout le monde le voit? Qu'est-ce qu'il suffit de faire sur la balle de tennis?
E: on dessine un trait.
M: lequel?
Léa montre avec son doigt.
M: qu'est-ce qu'il suffit que je rajoute à la figure? Le retourné de la ligne courbe. Et là qu'est-ce que j'obtiens? Une figure symétrique. Comment je pourrais vérifier?
E: en pliant.
M: en pliant, oui
E: en décalquant et en retournant
M: en décalquant de nouveau cette figure et en retournant.
vous essayez de voir si votre figure est symétrique.
De nouveau les élèves travaillent individuellement puis l'enseignant fait une mise en commun.
M: vous venez de vérifier, comment vous avez vérifié que la figure est symétrique? Par quelle méthode. (La balle de tennis est projetée sur le tableau vert.)
E: En redécalquant.
M: En redécalquant entièrement.
E: en pliant.
M: en utilisant la méthode du pliage. Viens
L'élève vient avec son calque devant le tableau. Le maître prend la feuille et plie.
M: Elle plie pour faire coïncider quoi? Pour superposer quoi?
E: l'autre moitié.
M: l'autre moitié de quoi?
L'enseignant fait dire à l'élève que c'est la moitié du cercle. Il reprend le pliage, superpose.
M: quand j'ouvre, regardez un peu qu'est-ce que je fais apparaître?
E: un axe.
M: un axe, que l'on appelle, l'axe de symétrie. Et regardez, par quoi passe cet axe?
E: entre les deux.
E: entre les croisements.
M: ah, à l'endroit où se coupent les lignes courbes.
L'enseignant demande à l'élève toujours au rétro de montrer avec son doigt sur le tableau vert un endroit où les lignes courbes se coupent.
L'élève hésite. Puis montre un puis deux points d'intersection. Le maître invite l'élève à tracer. Il lui donne la règle. Elle la place correctement.
Le maître l'aide, maintient la règle et explique le tracé.
M: Voilà la représentation de l'axe. Il suffirait que je trace …
E: un trait.
M: une droite.
Le maître décide de tracer avec une craie.

Episode 3 : Montrer la variété des figures symétriques produites.
M: Maintenant dernière question: est-ce qu'on ne peut pas construire une ou des autres figures, …, qui soient symétriques. Qui aurait une idée.
E: pas moi
M: je vous laisse réfléchir. On a trouvé cette figure là.
Le maître montre la figure précédente qui est restée au tableau. Il répète la consigne.
Une élève veut aller au rétro, ce qu'accorde le professeur, qui efface la droite tracée au tableau.
L'élève manipule et réalise la figure où les deux serpentins ont les mêmes extrémités, ce qui satisfait l'élève, qui refait la figure du huit. L'élève pense à retourner mais pas encore à tourner.
La manipulation s'avère difficile avec le rétro dans la mesure où elle recommence plusieurs fois. Le maître laisse faire...Elle finit par revenir à la figure initiale à un seul serpentin.
M: Les autres, essayez avec votre calque. Julie essaie au rétro.
M: Une autre figure qui soit …
Certains élèves cherchent. Le maître aide l'élève restée près du rétroprojecteur. Il construit une figure symétrique avec elle.
M: Regardez un peu. Julie propose celle-ci. Je rappelle, on a le cercle, le serpentin et l'autre (il montre avec le doigt).

Episode 4 : Vérifier que la figure obtenue est bien symétrique.
M : On a une figure symétrique. Comment on peut vérifier?
M: En la décalquant et en la faisant superposer avec son retourné.
L'enseignant a du mal à mettre en place la justification... Pour expliquer la technique du retourné de la figure totale, il repasse à la craie l'image rétroprojetée du cercle et des deux serpentins, ce qui prend un certain temps et occasionne des bavardages.
M: Donc voilà j'ai repassé la figure. Comment on vérifie?
E: En la retournant.
M: En superposant le retourné.
Le professeur prend les deux feuilles transparentes et les retourne en même temps et superpose l'image projetée sur la balle dessinée à la craie. Quelques difficultés de manipulation apparaissent au moment de la superposition. La phase se termine sur la bonne manipulation et les applaudissements des élèves.

Episode 5 : Montrer la variété des figures symétriques produites.
Le professeur efface la figure à la craie et projette la figure symétrique du huit réalisée à partir de la balle de tennis.
M: Regardez, c'est la première que nous avons trouvée. A partir de celle-là, est-ce qu'on ne peut pas faire quelque chose pour en trouver d'autres?
Une élève vient au rétroprojecteur et manipule: elle retourne le deuxième transparent. L'enseignant lui demande d'expliquer ce qu'elle fait.
E: On la fait tourner
M: Ah, je vais donc tourner..., regardez Et cette figure là, elle est aussi
E: symétrique
L'enseignant fait apparaître plusieurs figures
M: En réalité, j'en ai combien ?
E: deux
E: trois
M : Il y a un mot:
E: une infinité
M: Oui j'ai une infinité de solutions.

Episode 6 : Vérifier que la figure obtenue est symétrique. Tracer l'axe de symétrie.
Cette dernière étape a été menée au cours d'une autre séance. L'enseignant effectue un rappel, distribue trois figures et demande aux élèves de vérifier qu'elles sont symétriques. Ceux-ci décalquent chacune des figures. Deux élèves plient pour vérifier. Les autres utilisent le retourné. Les élèves viennent utiliser le rétroprojecteur pour montrer en utilisant le retourné que les trois figures sont symétriques.
M: Elles sont bien symétriques. Qu'est-ce qui nous manque ?
E: L'axe
M: L'axe de symétrie. Je vous demande de trouver l'axe de symétrie.
M: Qu'est-ce qu'on va utiliser?
E: La règle ?
E: Le pliage
M: Oui le pliage, vous allez séparer les trois figures en faisant un rectangle en évitant de suivre le cercle.
Les élèves découpent leur figure, décalquent à main levée et essaient différents pliages.
M : il faut trouver l'endroit où il faut plier pour que la forme se superpose: il n'y a pas que le cercle. Qu'est-ce qui ne va pas? Avec la méthode du pliage, on n'arrive pas précisément pour que cela coïncide.
Une élève veut rechercher le centre du cercle
M: ce que je vous propose, c'est essayer de faire cela. Vous positionnez votre retourné, vous complétez et…
E: Monsieur, je peux prendre une équerre ?
M: Si tu en as besoin...
Un élève trace de façon perceptive en justifiant: « *il faut que cela soit au milieu* ».
Il ne trouve pas le couple de points et le milieu.
Une élève au tableau place sa règle sur la première figure. Léo préconise de placer l'axe où il y a des croisements.
M: Pointe les endroits. Combien en faut-il?
E : Quatre
M: Au minimum, j'en ai besoin de combien ?
E: Deux
M: J'ai besoin de deux points. Je place ma règle sur ces deux points. Je trace mon axe de symétrie très précisément.
Une autre élève vient pour la figure 2.
M: Par où passe l'axe? Ici j'ai encore un point où les lignes se coupent. Mais je n'ai qu'un point. Combien je peux tracer de droites ?
E: Une infinité
M : Donc il me faut un autre point.
E : Mais ce n'est pas vraiment un point.

M : Oui on a du mal à le voir, c'est plat
Léo propose d'utiliser la règle ... et place sa règle de façon perceptive.
E: Ah, monsieur on prend la loupe!
M: On va essayer ensemble. Ce point va se retrouver où ?
E: De l'autre côté du miroir.
M : Hélène: viens pointer. Elle pointe au bon endroit. Au milieu des deux points
M Je vais tracer la droite qui relie les deux points Où est le milieu de ce segment ?
E: Je le mesure et je prends la moitié.
L'enseignant fait la manipulation.
M : Maintenant que j'ai un deuxième point, je n'ai plus qu'à tracer précisément l'axe