QUELLES MODALITÉS DE CONTRÔLE DES CONNAISSANCES DANS LA FORMATION EN MATHÉMATIQUES DES PROFESSEURS D'ÉCOLE ?

Arnaud SIMARD
COPIRELEM
IUFM de Franche Comté
arnaud.simard@fcomte.iufm.fr

Jean-Louis IMBERT
COPIRELEM

Pascale MASSELOT
COPIRELEM

Cécile OUVRIER-BUFFET
COPIRELEM

I - INTRODUCTION

L'année 2010 est une année charnière dans la formation des enseignants et en particulier dans la formation des Professeurs des Écoles. Le processus de « masterisation » implique un bouleversement dans la façon de penser la formation des maîtres. Les futurs professeurs des écoles devront suivre une formation diplômante de niveau bac + 5 (Master) tout en préparant et en passant le concours CRPE pendant la cinquième année du master. Suite à une licence universitaire (bac + 3), les étudiants s'inscrivent en première année de master (M1) préparant aux métiers de la formation et de l'enseignement. Une fois le M1 validé, ils demandent une inscription en deuxième année de master (M2) et, s'ils sont acceptés, ils peuvent alors s'inscrire au concours CRPE qui comporte deux parties (admissibilité au début de l'année du M2 et admission en fin de M2) dans chacune desquelles l'évaluation des connaissances mathématiques intervient. En cas de réussite, le résultat du concours ne sera validé que si le M2 l'est également. Le master (M1 et M2) constitue donc à la fois une formation universitaire diplômante et une préparation au concours. Dans toute la diversité des maquettes de master proposées par les universités des différentes académies, des unités d'enseignement spécifiques aux mathématiques[1] sont mentionnées sous différents intitulés[2] faisant ou non référence à la nature des épreuves du concours (les textes définissant les épreuves sont donnés en annexe). Ces unités d'enseignement auront deux objectifs bien spécifiques, d'une part former les futurs professeurs des écoles en mathématiques et, d'autre part, préparer les étudiants aux épreuves de mathématiques du concours CRPE. Les étudiants vont devoir être évalués à l'issue de ces unités d'enseignement en vue de l'obtention du diplôme de master. L'atelier proposé a pour but de réfléchir collectivement sur le contenu et les modalités des contrôles de connaissances à mettre en place. Il résulte d'une inquiétude des formateurs IUFM que nous sommes, face à la problématique suivante : la nature des sujets de concours de recrutement va avoir un effet sur les formations dispensées dans les masters et sur les contenus des évaluations à l'issue de chaque semestre du master (cf travaux de Peltier, 1995). Concernant l'élaboration des sujets de concours pour le

[1] Le terme « mathématique » recouvre ici à la fois des notions mathématiques et des éléments de didactique des mathématiques.

[2] Par exemple : « Connaissances nécessaires à l'enseignement des mathématiques, des sciences et de la technologie à l'école primaire et appropriation de ressources didactiques. (Préparation aux épreuves écrites du concours) » ; « Fondamentaux mathématiques : mathématiques pour l'enseignement »…

CRPE, le lecteur peut aussi se référer à un atelier proposé lors du XXXIIIème Colloque de la COPIRELEM (Bonnet, Eysseric, Simard, 2006).

Un rapide tour de table des participants à l'atelier montre que trois mois avant le début des enseignements, sur 18 académies représentées, seules 3 maquettes sont suffisamment abouties pour que s'engage une réflexion sur l'évaluation des unités d'enseignement.

L'atelier a été pensé en quatre parties. Dans un premier temps, une mise au point sur les finalités des unités d'enseignement spécifiques aux mathématiques dans les masters doit permettre de préciser les différents aspects des mathématiques à aborder dans le cadre d'une formation destinée à de futurs enseignants. Les participants sont sollicités pour « justifier en quatre ou cinq points la nécessité de « savoir » des mathématiques pour un futur professeur des écoles ». Une synthèse permet alors de dégager les grands objectifs d'une formation en mathématiques des futurs maîtres. Pour la deuxième et la troisième partie de l'atelier, nous nous plaçons dans le cadre de l'évaluation d'une unité d'enseignement du master. Deux modalités sont plus précisément analysées, l'une orale (avec temps de préparation limité) et l'autre écrite (en temps limité) en vue de définir les connaissances mathématiques et didactiques que l'étudiant doit mobiliser pour réussir chacune des épreuves. Dans la dernière partie, pour élargir le domaine des possibles en termes d'évaluation d'un module de formation, nous évoquons d'autres modalités d'évaluation. Pour une meilleure lisibilité, le plan de l'article suivra celui de l'atelier et les apports des participants à l'atelier seront intégrés au texte.

II - LES MATHÉMATIQUES POUR…

Les formateurs en mathématiques sont amenés à enseigner « des » mathématiques aux futurs professeurs des écoles. Une première question se pose : les formateurs sont-ils tous d'accord sur la nature des mathématiques à enseigner à un étudiant qui envisage de faire apprendre des mathématiques à des élèves de l'école primaire ? Bien entendu, la préparation au concours implique de se référer à un programme... mais les « mathématiques pour le concours » sont-elles distinctes, incluses ou disjointes des « mathématiques pour le futur enseignant » ? Il est souhaitable qu'elles soient « incluses »... et nous ferons donc l'hypothèse qu'elles le sont effectivement. Ainsi, nous supposerons qu'il suffit de suivre les enseignements de mathématiques des masters pour également préparer le concours (reste la question de l'entraînement, un peu formel, permettant de s'adapter au mieux aux contraintes spécifiques des épreuves écrites et orales). La question suivante prend ainsi tout son sens : dans la perspective d'une formation professionnelle, à quoi sert-il de faire (et de faire faire) des mathématiques au futur Professeur des Écoles ? Cette question posée aux participants permet ainsi de dégager six grands objectifs imbriqués. Il ne s'agit pas ici d'évoquer des situations de formation permettant d'atteindre ses objectifs mais d'en préciser les enjeux. En se plaçant du point de vue du futur enseignant, il s'agit de « faire des mathématiques … » tout à la fois pour :

1. dominer les notions à enseigner ;
2. comprendre les programmes et les mettre en perspective ;
3. comprendre les ressources existantes et savoir les utiliser ;
4. comprendre les productions des élèves (procédures, erreurs, etc.) en réponse à une tâche proposée ;
5. se réconcilier avec les mathématiques ;
6. se former en tant que citoyen, par exemple en matière de formation au raisonnement.

Nous développons chacun de ces axes en nous appuyant sur les arguments retenus au cours des discussions qui ont amené à les identifier.

1 Axe 1- Les mathématiques pour dominer les notions à enseigner

Il s'agit d'acquérir un bagage mathématique « suffisant » par rapport aux exigences de l'école primaire. La maîtrise des concepts mathématiques implique également une prise de recul par rapport à leur structure et à leur organisation pour envisager une cohérence globale des mathématiques. Il s'agit de dépasser la structuration « par chapitre » du collège – lycée, au profit d'une structure liée et en spirale. Citons pour exemples les relations : « numération et algorithmes opératoires », « ordinal – cardinal et nombres », « situations de proportionnalité – fonctions linéaires – représentations graphiques ». Pour comprendre, maitriser ce qu'ils vont enseigner, les étudiants doivent acquérir une certaine aisance en mathématiques pour ensuite être capable d'avoir recours aux changements de registres. Une « revisite » des mathématiques les amène à découvrir la complexité de certaines notions naturalisées. Résoudre des problèmes mathématiques à leur niveau leur permet d'apprendre à chercher pour ensuite se projeter en laissant chercher leurs élèves[3] mais aussi de développer une pensée logique, d'apprendre à raisonner et à argumenter. Il s'agit également de hiérarchiser progressivement les différents statuts de connaissances et leur articulation, de dominer les différents contenus et ainsi de prendre un certain recul par rapport à la « rigueur » mathématique, ou tout au moins l'image que les étudiants peuvent en avoir. Ce changement de regard sur les mathématiques accompagne un changement de posture qui consiste à passer de la position d'élève qui « fait » des mathématiques à celle d'enseignant qui « fait faire » des mathématiques.

2 Axe 2- Les mathématiques pour comprendre et s'approprier les programmes

Le nouveau maître doit pouvoir interpréter les programmes, voire les changements de programmes, en termes de rupture ou de continuité pour en restituer la cohérence, lecture de la cohérence qui l'aidera à concevoir son projet d'enseignement. A ce niveau, les savoirs mathématiques et les liens entre ces savoirs sont revisités dans la perspective de l'enseignement avec la nécessité d'identifier les différents niveaux de transposition : celle effectuée depuis le savoir « savant » vers le savoir enseigné, celle des savoirs à enseigner vers les programmes, mais aussi celle des programmes vers les manuels et de les analyser. Il s'agit de devenir capable de reconnaître les prémices, la découverte, l'élaboration, l'évolution et la construction progressive d'une notion. Ces distinctions doivent être mises en relation avec la prise en compte du développement cognitif de l'enfant pour envisager un découpage en paliers d'apprentissage. Il s'avère également nécessaire d'envisager comment se prolonge l'enseignement d'une notion, ce à quoi elle prépare, au cours de la scolarité ultérieure. Pour certains concepts, des éléments relatifs à l'histoire des mathématiques et l'histoire de la discipline scolaire elle-même, voire à l'histoire des programmes peuvent aider le futur enseignant à s'approprier les programmes et à les mettre en œuvre. Pour le professeur des écoles polyvalent, chargé de l'ensemble des enseignements, l'identification des liens entre les notions mathématiques elles-mêmes doit s'accompagner d'une mise en évidence des notions mathématiques intervenant dans l'enseignement des autres disciplines.

3 Axe 3- Les mathématiques pour comprendre, analyser les séquences, séances et situations d'apprentissage proposées dans les différentes ressources et les mettre en œuvre

Les connaissances mathématiques du futur maître doivent lui permettre de reconnaître la richesse de certaines ressources, de s'approprier des scénarii de classes proposés par celles-ci et de les mettre en œuvre en les adaptant au contexte de la classe. Il doit savoir faire des choix, savoir tirer parti des expériences observées ou relatées. Plus précisément, il s'agit de donner la possibilité au futur professeur des écoles de savoir étudier le statut et la place des différents types d'activités que l'on peut proposer en mathématiques (résolution de problèmes pour découvrir, construire, réinvestir une notion, tâches visant l'apprentissage de techniques, le développement d'automatismes, la mémorisation, etc.). Relativement aux progressions qu'il aura

[3] Dans le cadre de situations d'homologie par exemple

à construire, le professeur sera amené à analyser une proposition d'un ou de plusieurs manuels scolaires pour en percevoir la cohérence. En un mot, le professeur doit devenir autonome par rapport au manuel.

Ainsi, les connaissances mathématiques à acquérir doivent permettre au professeur des écoles tout à la fois de comprendre l'adéquation tâche / objectif / modalité de travail, d'adapter et de faire évoluer une situation, de l'évaluer *a posteriori*, de construire une trace écrite conforme aux mathématiques et au niveau d'apprentissage, de prévoir des aides qui ne dénaturent pas une situation.

4 Axe 4- Les mathématiques pour comprendre, analyser, voire hiérarchiser les procédures des élèves

Les connaissances mathématiques du maître lui servent d'abord au moment de l'analyse *a priori* de la situation pour envisager les procédures des élèves et choisir les valeurs des variables didactiques en fonction de ce qu'il cherche à provoquer, et ensuite à interpréter les procédures effectives élaborées par les élèves. En particulier, il doit être capable d'appréhender la pluralité des stratégies envisageables, d'agir et d'interagir avec les élèves sans interférer sur la tâche ni dénaturer la situation, d'évaluer les procédures effectivement proposées par les élèves, qu'elles correspondent ou non à celles attendues, de juger de leur pertinence, enfin de les hiérarchiser pour en faire une synthèse à la portée de tous les élèves et institutionnaliser les connaissances. De plus, il devra interpréter les erreurs produites en termes de connaissances pour réguler son action.

5 Axe 5- Les mathématiques pour réconcilier les professeurs des écoles avec cette discipline

Les étudiants qui s'orientent vers le professorat des écoles ont des trajectoires de formation très hétérogènes. Beaucoup sont issus de formation littéraire et la plupart d'entre eux ont vécu une rupture, plus ou moins importante, avec les mathématiques. L'un des enjeux primordiaux de la formation au professorat des écoles, qui, s'il est atteint, contribuera probablement à atteindre les autres (et réciproquement) est donc de réconcilier tous ces étudiants avec une discipline qu'ils seront amenés à enseigner. En prenant en compte le passé mathématique des étudiants, il s'agit donc de dépasser les expériences vécues en tant qu'élève, de « rassurer » par rapport aux mathématiques, de modifier l'image souvent négative des mathématiques, en se détachant notamment d'une rigueur souvent « mal placée » : revisiter le formalisme collège – lycée, apprendre à chercher, tâtonner…

Amener à initier un questionnement à propos de l'utilité des mathématiques contribuera à permettre aux futurs enseignants de donner à leurs futurs élèves l'envie d'apprendre.

6 Axe 6- Les mathématiques pour former le citoyen

Dans un contexte d'appartenance à une société, les mathématiques développent une façon scientifique et humaine d'appréhender le monde. Mettre en débat des idées, conjecturer, démontrer, argumenter, formuler, écouter, réfuter, prouver, convaincre…autant de thématiques que les mathématiques peuvent aider à développer.

Ce premier temps a ainsi permis d'expliciter les différents aspects des savoirs mathématiques à appréhender par le futur enseignant. Dans la suite de l'atelier, les mises en situation proposées ont pour objectif d'engager un questionnement sur la manière de s'assurer de l'acquisition de ces savoirs mathématiques, dans toute leur diversité. Nous avons fait le choix de partir de deux « épreuves » très fermées mais suffisamment « réalistes », pour ensuite élargir à un questionnement plus général, tout d'abord en conservant les mêmes modalités mais en s'éloignant de la spécificité des notions intervenant dans ces épreuves, puis en envisageant d'autres modalités d'évaluation.

III - ANALYSE, SUR UN EXEMPLE, DES CONNAISSANCES POUVANT ÊTRE ÉVALUÉES DANS LE CAS D'UNE D'ÉPREUVE ORALE

Pour la première modalité, le cadre proposé est le suivant : une épreuve orale sanctionne une unité d'enseignement mathématique d'un master « métier de l'enseignement et de la formation ». Un sujet (présenté ci-dessous) est donné à l'étudiant qui bénéficie de deux heures de préparation en salle d'étude avant de présenter son travail devant un jury (20 minutes de présentation, 20 minutes de questions). Ce choix de cadre n'est pas anodin, il peut s'apparenter à l'épreuve orale du concours CRPE 2011 (si la structure avec dossier est retenue) donc cette évaluation contribuerait à préparer le candidat à ce concours. Dans le cadre de l'atelier, les participants sont invités à analyser le sujet sous le prisme de la synthèse de la première partie en répondant à la question suivante : « Dans ce cadre, peut-on s'assurer de l'appropriation des savoirs identifiés à la première partie ? ».

Le même sujet est proposé à chaque groupe de participants et il porte sur la notion de parallélisme en géométrie plane au CM1. La modalité retenue est la suivante : un thème de leçon, un niveau de classe et un contexte sont donnés. Outre les documents institutionnels définissant les programmes de l'école, trois dossiers de documents pédagogiques sont mis à la disposition de l'étudiant : il s'agit des pages du livre de l'élève et du livre du maître consacrées à ce thème extraites de trois manuels appartenant à des collections différentes. L'étudiant doit présenter une analyse de ces différents documents et choisir l'un des dossiers comme support d'une séquence. Il argumentera son choix et précisera les modalités de mise en œuvre de cette séquence. Les références des documents pédagogiques sont indiquées ci-dessous.

Thème : **Droites parallèles**

Niveau : **CM1**

Contexte : Ensemble du travail sur ce thème

- J'apprends les maths CM1, éd. 2005, livre du maître : pages 88 - 89, livre élève : pages 38 - 39.

- Pour comprendre les maths CM1, éd 2008, livre du maître : pages 64 - 70 - 129 - 130, livre élève : pages 48 - 49 - 53 et 108 – 109, cahier d'activités : pages 7 - 8

- CAP Maths, éd 2003, livre du maître : pages 123 – 124 ; 131 – 132 ; 137, livre élève : pages 62 – 65 - 68 plus fiches photocopiables : pages 34 - 44 et 46 - 48.

Le candidat doit présenter une analyse des documents fournis et en choisir un en argumentant son choix. Il précisera les modalités de mise en œuvre de ce support.

Après s'être rapidement approprié le sujet, les participants à l'atelier ont cherché à identifier la nature des connaissances mathématiques à mobiliser pour réussir cette épreuve.

L'axe 1[4] est identifié sous plusieurs angles. En effet, l'étudiant pourra être évalué sur ses connaissances concernant les différentes définitions du parallélisme et leur équivalence (double perpendicularité, écart constant, absence de croisement…), voire au passage d'une définition « savante » à une définition « enseignée » à l'école que l'on pourrait qualifier de « procédurale » puisqu'elle devra permettre de trouver un moyen de vérifier que deux droites sont parallèles ou de s'assurer de la validité d'une construction d'une parallèle à une droite donnée. La notion de parallélisme dans l'espace peut être abordée par l'étudiant qui envisagerait une « extension » ultérieure de la notion. Pour analyser les documents, il doit être conscient de l'existence de

[4] Les mathématiques pour dominer les notions à enseigner.

différents cadres pour le travail en géométrie (géométrie perceptive et/ou instrumentée notamment). Il pourra par exemple utiliser le cadre de la géométrie I, et de la géométrie II (Houdement, Kuzniak, 2000) pour analyser l'activité des l'élève et l'articulation (et donc la progression des apprentissages) pouvant se dessiner dans les activités proposées. Au niveau des savoirs mathématiques, il doit pouvoir faire des liens avec le concept de mesure, la notion de perpendicularité dans le plan, entre autres. Il doit connaître les instruments utilisables (règle graduée ou non, règle roulante, compas, réseau…) avec leurs spécificités et aussi dans leur complémentarité. Toutes les activités à base de pliage, lorsqu'il s'agit de justifier certaines propriétés, mobilisent elles aussi un savoir mathématique qui est souvent plus difficile à appréhender par les enseignants car moins « transparent ». Ces derniers points sont également proches de l'axe 4.

Les mathématiques relevant de l'axe 2[5] sont également sollicitées car des tâches distinctes sont à identifier dans les programmes : « Reconnaître que des droites sont parallèles. » « Utiliser en situation le vocabulaire géométrique : points alignés, droites parallèles. ». Les documents choisis intègrent-ils toutes les tâches préconisées dans les programmes ? Il peut être intéressant de se questionner sur ce qui relève de la notion de parallélisme sur l'ensemble du cycle 3. La notion de parallélisme est sous jacente à certaines notions abordées en CE2 (dans le cadre des propriétés des figures géométriques) et se poursuit au CM2 (utilisation des instruments pour construire des droites parallèles).

Ce sujet d'oral est clairement positionné au niveau de l'axe 3[6]. L'étudiant doit être capable d'analyser les conceptions du parallélisme qui sous tendent les séquences décrites dans les manuels proposés. Il doit pouvoir marquer les forces et les faiblesses des séquences proposées. A partir des mises en œuvre proposées par les auteurs des ressources, il doit également réfléchir sur les adaptations à apporter ou non pour envisager la mise en œuvre effective de ces séquences dans une classe (ici « fictive ») : moyens pédagogiques, gestion de la classe, découpage de la séquence et des séances, prise en compte de l'hétérogénéité, aides à proposer…

Concernant l'axe 4[7], les difficultés, les erreurs et les procédures des élèves pourront être envisagées à partir des exercices proposés dans les différents documents extraits des livres de l'élève mis à leur disposition. Lors de la présentation orale, le jury pourrait également fournir des productions d'élèves à commenter, analyser et évaluer.

Finalement il semble difficile d'identifier l'acquisition de connaissances mathématiques relevant des axes 5[8] et 6[9] à partir de ce seul support et ce serait au jury de les reconnaître au moment de la prestation orale de l'étudiant et éventuellement d'envisager des questions spécifiques pour compléter cette évaluation. Se pose ici la question des modalités à retenir lors de la présentation du candidat pour permettre au jury de disposer de tous les éléments nécessaires pour étayer son évaluation…

IV - ANALYSE, SUR UN EXEMPLE, DES CONNAISSANCES POUVANT ÊTRE ÉVALUÉES DANS LE CAS D'UNE D'ÉPREUVE ÉCRITE.

Dans le cadre de l'atelier, la modalité retenue, par les animateurs, est une épreuve écrite en temps limité. Un sujet (qui peut s'apparenter à celui de type concours CRPE) est proposé aux participants : un sujet (sujet 1 dans la suite du texte) portant sur la numération et plus particulièrement sur le système de numération égyptien pour la moitié des groupes de participants et un sujet (sujet 2 dans la suite du texte) portant sur la

[5] Les mathématiques pour comprendre et s'approprier les programmes.

[6] Les mathématiques pour comprendre, analyser les séquences, séances et situations d'apprentissage proposées dans les différentes ressources et les mettre en œuvre.

[7] Les mathématiques pour comprendre, analyser, voire hiérarchiser les procédures des élèves.

[8] Les mathématiques pour réconcilier les professeurs des écoles avec cette discipline.

[9] Les mathématiques pour former le citoyen.

notion de proportionnalité pour les autres groupes. L'intégralité de ces sujets est fournie en annexe. Il est également proposé une critique de ces sujets, questions par questions, en référence aux axes proposés dans la première partie de ce texte. Les participants sont invités à analyser ces sujets du point de vue des connaissances à mobiliser par l'étudiant en se référant aux axes dégagés en partie 1. Un tel sujet écrit peut-il permettre de s'assurer de l'appropriation des savoirs identifiés à la première partie ?

Des connaissances relevant de l'axe 1[10] sont bien présentes dans les deux sujets proposés : compréhension fine du système numération égyptien et intérêt du système décimal pour le sujet 1, lien entre proportionnalité et linéarité pour le sujet 2.

Relativement à l'axe 2[11] peuvent être identifiées, dans le sujet 1, des connaissances dans la mise en perspective de l'algorithmique dans un cadre très contextualisé : capacité à reconnaître, comprendre et expliciter un algorithme nouveau pour les étudiants. Dans le sujet 2, l'axe 2 est moins prédominant, mais le sujet s'attache à faire sortir l'étudiant du carcan du « produit en croix » et du « tableau de proportionnalité » pour s'attacher aux propriétés fondamentales de la proportionnalité.

L'aspect des connaissances mathématiques classées dans l'axe 3[12] peut être reconnu dans le sujet 1. En effet, la numération égyptienne est présentée dans de nombreux ouvrages destinés à l'école et il s'agit de bien comprendre ce système pour pouvoir l'utiliser à bon escient lors de l'élaboration d'une progression. Dans le sujet 2, toute une partie de l'énoncé porte sur la critique d'un document pédagogique (questions 4 à 9). Il s'agit d'analyser une séquence en différentes phases et d'expliciter les fonctions de ces différentes phases.

Les connaissances relevant de l'axe 4[13] sont déclinées dans les deux sujets sous forme d'analyse de productions d'élèves. Dans le sujet 1 (question 6), une production fictive est proposée et l'analyse est à mener en comparaison avec l'analyse globale d'algorithmes de calcul. Ce sujet propose en effet une étude précise d'un algorithme de la multiplication, cette analyse doit servir de base à la compréhension de certaines procédures élèves. De la même manière, le sujet 2 traite en profondeur de la proportionnalité et de ses liens avec la linéarité. Cette étude a également pour but la compréhension fine des procédures que le maître est en droit d'attendre (ou de promouvoir) chez ses élèves. Quatre productions réelles d'élèves sont présentées et soumises à analyse par le prisme des aspects théoriques développés en début de sujet. D'autre part, la question 9 du sujet 2 demande à l'étudiant d'anticiper une procédure élève, ce qui est un moyen adéquat pour évaluer sa connaissance du niveau réel (ou attendu) des élèves.

Les axes 5 et 6 semblent faire défaut dans ces deux sujets, mais peut-on envisager de s'assurer qu'un étudiant est « réconcilié avec les mathématiques » à travers les réponses qu'il fournit dans le cadre d'un sujet d'examen ? Le pari semble difficile à relever. Pour autant ces sujets s'attachent à des problématiques (historique pour le sujet 1 et attaché à un sujet très présent dans la vie quotidienne pour le sujet 2) formatives pour l'étudiant. En effet, même si le sujet 1 peut paraître rébarbatif par son aspect algorithmique, il n'en est pas moins important pour le futur professeur des écoles qui doit connaître d'autres systèmes de numération et réfléchir à d'autres algorithmes de calcul : cela lui permet en effet de revisiter ses connaissances sur notre système de numération et les algorithmes privilégiés dans l'enseignement à l'école élémentaire et ainsi de mieux appréhender les connaissances que l'élève doit construire et d'envisager d'autres procédures à développer. Le sujet 2, même si la dimension didactique prend ici beaucoup d'importance, présente l'intérêt de traiter de la proportionnalité sous presque tous ses angles (il manque ici le lien avec la géométrie).

---

[10] Les mathématiques pour dominer les notions à enseigner.

[11] Les mathématiques pour comprendre et s'approprier les programmes.

[12] Les mathématiques pour comprendre, analyser les séquences, séances et situations d'apprentissage proposées dans les différentes ressources et les mettre en œuvre.

[13] Les mathématiques pour comprendre, analyser, voire hiérarchiser les procédures des élèves.

V - PROLONGEMENTS

Dans la dernière partie de l'atelier, les participants sont invités à proposer d'autres modalités envisageables pour évaluer des modules mathématiques en master de formation des futurs professeurs des écoles.

Une piste déjà expérimentée a été soumise à la discussion. L'épreuve proposée était construite à partir d'un stage d'observation. Les futurs professeurs des écoles, en groupe de 3, devaient récupérer des données dans leur stage et constituer un dossier, avec, sur un thème, la description et l'analyse des documents utilisés, le recueil et l'analyse de productions d'élèves. L'évaluation ne porte pas tant sur le recueil de données que sur l'analyse que les étudiants étaient capables d'en faire. Un premier constat relatif à ce type d'évaluation concerne la nature de leur implication dans le stage de pratique accompagnée.

Un travail du style des « TPE de lycée », des analyses de supports vidéo présentant des séances de classes ou des moments spécifiques d'un déroulement de séquence constituent également des pistes intéressantes à décliner selon le moment où cette évaluation intervient au cours des deux années du master.

VI - DISCUSSION

L'objectif de cet atelier était d'initier une réflexion sur les modalités de contrôle des connaissances et des savoirs faire en mathématiques des étudiants qui se destinent au professorat des écoles dans les futurs master. La première étape lors d'une évaluation est de préciser clairement l'objet de l'évaluation. Six axes, correspondant aux différents aspects des mathématiques utiles aux professeurs des écoles, ont été identifiés. L'axe 1 concerne les mathématiques pour dominer les notions à enseigner ; l'axe 2, les mathématiques pour comprendre les programmes ; l'axe 3, les mathématiques pour comprendre les ressources et savoir les utiliser, l'axe 4 ; concerne les mathématiques pour comprendre les procédures des élèves. Enfin, l'axe 5 met l'accent sur les mathématiques pour réconcilier l'étudiant avec un domaine généralement peu apprécié et l'axe 6 focalise sur les mathématiques pour la formation du citoyen.

Ce prisme permet notamment d'analyser différentes modalités de contrôle de connaissances. Peut-on caractériser les savoirs que doit mobiliser le candidat pour répondre aux questions posées en se référant aux axes identifiés ? Les deux contextes étudiés au cours de l'atelier (une épreuve orale avec préparation en temps limité et une épreuve écrite en temps limité) semblent permettre d'évaluer certains points des différents axes, mais conservent tout de même beaucoup d'inconvénients.

L'épreuve orale permet à l'étudiant de montrer sa capacité d'analyse et son sens de la communication lors d'un échange avec le jury. La discussion orientée par le jury permet de cerner les points forts et faibles de l'étudiant au cas par cas. En revanche, l'élaboration d'un sujet oral semble poser beaucoup plus de questions que celle d'un sujet d'écrit, tant sur les conditions de passation : possibilité ou non d'avoir recours à des ressources bibliographiques ou internet, par exemple ; que sur la formation du jury : quelle serait la spécificité des membres du jury ? D'autre part, les « normes » mises en place pour l'évaluation sont à questionner : les réponses attendues peuvent-elles soumises à un barème ? Peut-il y avoir une grille commune à tous les sujets ? Enfin, comment s'assurer de l'équité de traitement des étudiants si on leur propose des sujets différents, s'ils ont à répondre à des questions différentes face à des jurys différents ? Le principal problème étant qu'un oral peut rapidement dériver et ne plus consister qu'en l'exposé d'une « leçon type » sur une notion ou une compétence à acquérir à un moment de la scolarité. Il se transformerait ainsi en une épreuve « normée » avec des « bonnes » réponses attendues et il apparaît évident qu'il ne pourrait être révélateur de l'aptitude à enseigner.

L'épreuve écrite permet probablement un traitement plus équitable de tous les étudiants : un même sujet, des correcteurs différents mais un même barème, des conditions semblables pour tous. Cette modalité permet d'aborder une série de points précis préalablement choisis et l'étudiant peut formuler ses réponses de manière réfléchie sans le stress de l'échange direct avec le jury. En revanche, il semble ici aussi important de ne pas enfermer l'étudiant dans des réponses attendues et de lui laisser la possibilité d'être critique.

La richesse des échanges au cours de l'atelier a conduit à établir une première catégorisation qui devrait permettre d'éclairer l'idée de la complexité des connaissances mathématiques de diverses natures à acquérir au cours d'une formation en mathématiques des futurs enseignants. Se focalisant sur l'adéquation d'épreuves à l'évaluation de l'acquisition de ces connaissances, les discussions ont amené à mieux cerner les représentations des participants, notamment en faisant émerger les « points qui rencontrent l'accord de tous » et ceux qui suscitent toujours des débats…

VII - REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BONNET N., EYSSERIC P. & SIMARD A. (2006) Elaboration de sujets de concours pour le CERPE. *Actes du XXXIII*[ème] *Colloque de la COPIRELEM*, Dourdan.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2000) Formations des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 20/1, 89-116.

PELTIER ML. (1995) *La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école : entre conjoncture et éternité. Etude des sujets de concours de recrutement et contribution à la recherche des effets de la formation sur les professeurs stagiaires.* Thèse, Université Paris 7.

VIII - ANNEXES

<u>Annexe 1 :</u> Textes officiels traitant du concours CRPE (issus du SIAC1)

A. - Epreuves du concours externe de recrutement de professeurs des écoles

- Epreuves d'admissibilité

L'admissibilité comporte deux groupes d'épreuves de quatre heures chacun, en français et histoire géographie et instruction civique et morale, d'une part, et en mathématiques et sciences expérimentales et technologie, d'autre part.

Dans chaque épreuve écrite, il est tenu compte, à hauteur de trois points maximum, de la correction syntaxique et de la qualité orthographique de la production des candidats.

I-1. Epreuve écrite de français et d'histoire, géographie et instruction civique et morale

(…)

I-2. Epreuve écrite de mathématiques et de sciences expérimentales et de technologie

L'épreuve vise à évaluer :

— la maîtrise des savoirs disciplinaires nécessaires à l'enseignement des mathématiques, en référence aux programmes de l'école primaire, ainsi que la capacité à raisonner logiquement dans les domaines numérique et géométrique et à communiquer dans un langage précis et rigoureux ;

— la maîtrise des principales connaissances scientifiques et technologiques nécessaires pour enseigner à l'école primaire ainsi que la capacité à conduire un raisonnement scientifique.

L'épreuve comporte deux parties.

Dans la première partie, le candidat résout deux ou trois problèmes ou exercices de mathématiques.

Dans la seconde partie, le candidat répond à deux ou trois questions relevant des domaines scientifiques ou technologiques, à partir de documents ayant trait à des notions inscrites dans les programmes du premier degré.

L'épreuve est notée sur 20 : 12 points sont attribués à la première partie, 8 points sont attribués à la seconde partie ; coefficient 3.

Durée de l'épreuve : quatre heures.

(…)

II. - Epreuves d'admission

II-1. Présentation de la préparation d'une séquence d'enseignement en mathématiques et interrogation, au choix du candidat, sur les arts visuels, la musique ou l'éducation physique et sportive

L'épreuve vise à évaluer :
— les connaissances et compétences du candidat et son aptitude à les mobiliser pour concevoir et organiser une séquence d'enseignement s'inscrivant dans les programmes d'une classe de l'école maternelle ou élémentaire ;
— la capacité du candidat à expliquer et justifier ses choix didactiques et pédagogiques.

L'épreuve comporte deux parties.
L'épreuve est notée sur 20. La première partie est notée sur 12 points, la seconde sur 8 points ; coefficient 3.
Première partie : durée de la préparation : trois heures ; exposé n'excédant pas vingt minutes suivi de vingt minutes d'entretien.
Seconde partie : en fonction de la discipline choisie.

La première partie consiste pour le candidat, à partir d'un sujet tiré au sort, à préparer une séquence d'enseignement sur une notion ou un contenu inscrit dans les programmes de l'école primaire (maternelle et élémentaire) et à présenter les raisons qui ont présidé aux choix pédagogiques retenus. Elle est suivie d'un entretien avec le jury.
Dans l'exposé, le candidat présente les éléments constituant la séquence : objectifs, contenus, démarches, supports pédagogiques et procédure d'évaluation. L'entretien avec le jury porte sur l'exposé et sur la progression de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.
Les sujets sont fondés sur les programmes de l'école primaire (maternelle et élémentaire). La classe et le cycle pour lesquels la séquence d'enseignement est préparée sont précisés. Pour chaque sujet, le candidat dispose d'une documentation en salle de préparation.
Dans la seconde partie, le candidat effectue une présentation dans l'un des domaines suivants, choisi au moment de l'inscription :
— arts visuels ;
— musique (expression musicale) ;
— éducation physique et sportive.

<u>Annexe 2 :</u> Sujet d'évaluation orale d'une unité d'enseignement mathématique.

<u>Modalité :</u> Un thème de leçon, un niveau de classe et un contexte sont donnés, ainsi que trois dossiers de documents pédagogiques. Le candidat doit présenter une analyse de ces différents documents et choisir l'un des dossiers comme support d'une séquence. Il argumentera son choix et précisera les modalités de mise en œuvre de cette séquence.

Les dossiers peuvent être constitués d'extraits de manuels scolaires et de livres du maître, de fiches de préparation conçues par des enseignants, de documents pris sur Internet, d'extraits de revues pédagogiques…

Thème : Droites parallèles

Niveau : CM1

Contexte : Ensemble du travail sur ce thème

- J'apprends les maths CM1, éd. 2005, livre du maître : pages 88 - 89, livre élève : pages 38 - 39.

- Pour comprendre les maths CM1, éd 2008, livre du maître : pages 64 - 70 - 129 - 130, livre élève : pages 48 - 49 - 53 et 108 – 109, cahier d'activités : pages 7 - 8

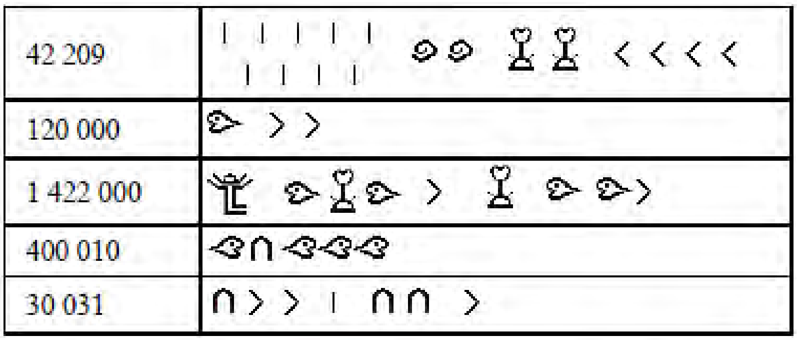
- CAP Maths, éd 2003, livre du maître : pages 123 – 124 ; 131 – 132 ; 137, livre élève : pages 62 – 65 - 68 plus fiches photocopiables : pages 34 - 44 et 46 - 48.

Le candidat doit présenter une analyse des documents fournis et en choisir un en argumentant son choix. Il précisera les modalités de mise en œuvre de ce support.

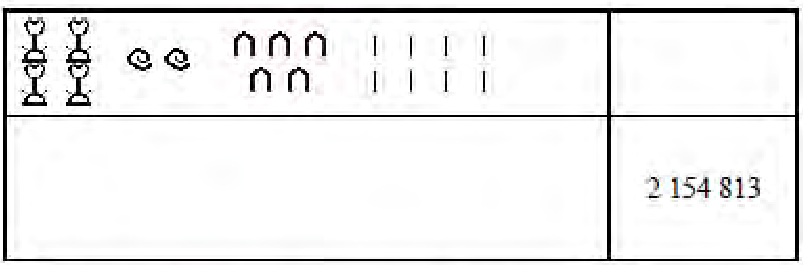
<u>Annexe 3</u> : Sujets d'évaluation écrite d'une unité d'enseignement mathématique.

Sujet 1 (7,5 points)
Thème : numération et multiplication

Dans le tableau ci-dessous, on a écrit quelques nombres avec des hiéroglyphes, tel que des scribes égyptiens auraient pu le faire vers –3000 av. J.C.
On nommera les signes utilisés, dans l'ordre d'apparition ci-dessous : le trait, la spirale, la fleur (de lotus), le doigt courbé, le têtard, le dieu et l'anse (de panier).



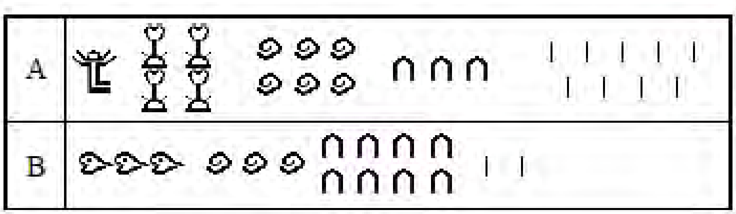
1. On admet qu'il existe une écriture unique de chaque nombre dans ce système (à l'ordre près des symboles utilisés), chaque symbole étant utilisé au maximum neuf fois.
Traduire les nombres suivants : (0.5 point)



2. a. Expliciter une règle permettant de comparer deux nombres quelconques écrits dans ce système de numération. (1 point)

2.b. Citer un avantage de notre système actuel de numération écrite par rapport au système égyptien du point de vue de la comparaison des nombres. (0,5 point)

3. a. Calculer la différence entre les deux nombres suivants par une procédure utilisable par un égyptien de l'époque (on laissera visibles les différentes étapes du calcul). (0,5 point)



3. b. Comparée à la technique anglo-saxonne de la soustraction (par échanges-démolition), en quoi cette technique de calcul est-elle plus facilement compréhensible par les élèves ? Donner un argument. (0,5 point)

4. Pour multiplier deux nombres, les égyptiens utilisaient une méthode dite « par duplications successives ».

Exemples : (avec nos symboles de numération)

$\boxed{\mathbf{1}}$	47
$\boxed{\mathbf{2}}$	94
4	~~188~~
8	~~376~~
16	~~752~~
$\boxed{\mathbf{32}}$	1504
35	1645

donc $35 \times 47 = 1645$

$\boxed{\mathbf{1}}$	25
$\boxed{2}$	~~50~~
4	~~100~~
8	200
16	400
32	~~800~~
64	1600
89	2225

donc $89 \times 25 = 2225$

4a. Effectuez ainsi le produit 28×34 (0,5 point)

4b. Montrez la validité de cet algorithme sur l'exemple de 35×47 en justifiant chacune des étapes du calcul. (1 point)

4c. Décrivez cet algorithme et justifiez qu'il est toujours utilisable pour calculer le produit de deux entiers, quels qu'ils soient. (1 point)

5. Dans les exemples donnés, on a utilisé 6 et 7 lignes avant de pouvoir faire l'addition finale. Supposez que l'on ait à effectuer le produit d'un nombre à quatre chiffres par un nombre à trois chiffres, quel nombre minimal de lignes faut-il écrire ? Quel nombre maximal ? Justifiez vos réponses. (0,5 point)

6. Dans une classe de CE1, des élèves confrontés pour la première fois au calcul de 19×34, ont calculé ainsi :

34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34

68 + 68 + 68 + ...

136 + ...

....

Trouver deux points communs entre cette procédure et l'algorithme " à l'égyptienne ". Donner une capacité supplémentaire nécessitée par ce dernier. (1 point)

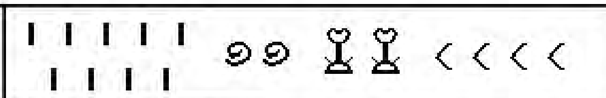
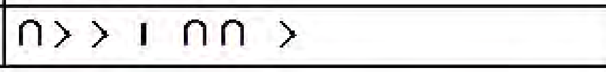
7. On effectue avec l'algorithme usuel la multiplication 34×19 :

	3	4	~~3~~
×	1	9	
3	0	6	
3	4		
6	4	6	

À quel niveau de classe les élèves doivent-ils connaître cet algorithme ? Ont-ils intérêt à l'utiliser dans ce cas précis ? Justifier. (0,5 point)

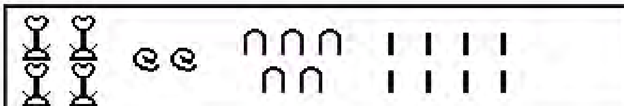
Sujet 1 (7,5 points)
Thème : numération et multiplication

Dans le tableau ci-dessous, on a écrit quelques nombres avec des hiéroglyphes, tel que des scribes égyptiens auraient pu le faire vers –3000 av. J.C.
On nommera les signes utilisés, dans l'ordre d'apparition ci-dessous : le trait, la spirale, la fleur (de lotus), le doigt courbé, le têtard, le dieu et l'anse (de panier).

42 209	
120 000	
1 422 000	
400 010	
30 031	

1. On admet qu'il existe une écriture unique de chaque nombre dans ce système (à l'ordre près des symboles utilisés), chaque symbole étant utilisé au maximum neuf fois.
Traduire les nombres suivants : (0,5 point)

Connaissance disciplinaire : domaine des systèmes de numération (I)

	
	2 154 813

2. a. Expliciter une règle permettant de comparer deux nombres quelconques écrits dans ce système de numération. (1 point)

Connaissance disciplinaire : domaine des systèmes de numération (I)

L'ordre des unités numérales est : trait, anse, doigt, spirale, fleur, têtard, dieu.

Dans chaque nombre, on repère l'unité numérale d'ordre supérieur. Si elles sont différentes, le nombre le plus grand est celui qui a utilise l'unité de plus grande valeur. Si elles sont identiques, on dénombre leurs occurrences : le nombre le plus grand est celui où elle apparaît le plus. En cas d'égalité, on reprend la comparaison avec les unités d'ordre inférieur.

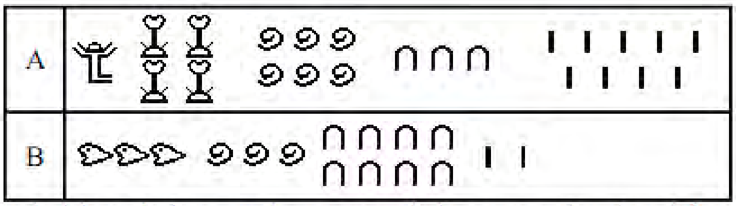
2.b. Citer un avantage de notre système actuel de numération écrite par rapport au système égyptien du point de vue de la comparaison des nombres. (0,5 point)

question d'ordre *épistémologique (évolution des systèmes de numération à travers les âges) (II)*

- chez nous la longueur de l'écriture du nombre est suffisante pour conclure quand elles sont différentes
- on n'a pas besoin de dénombrer les symboles de même espèce, tout se fait sur les écritures

3. a. Calculer la différence entre les deux nombres suivants par une procédure utilisable par un égyptien de l'époque (on laissera visibles les différentes étapes du calcul). (0,5 point)

Connaissance disciplinaire : domaine des techniques opératoires (technique non usuelle) (I)



3. b. Comparée à la technique anglo-saxonne de la soustraction (par échanges-démolition), en quoi cette technique de calcul est-elle plus facilement compréhensible par les élèves ? Donner un argument. (0,5 point)

question sur les choix effectué dans les programmes et comparaison de techniques opératoires (II)

on a les collections sous les yeux ce qui facilite les échanges, alors que dans la technique anglo-saxonne les échanges ne reposent que sur un jeu d'écritures.

4. Pour multiplier deux nombres, les égyptiens utilisaient une méthode dite « par duplications successives ».

Connaissances maths pour justifier à « différents niveaux ». Explicitation sur exemple, et justifier de manière générale. Décrire un algorithme en citant les propriété et en explicitant clairement (utilisation d'un vocabulaire précis).(I)

Exemples : (avec nos symboles de numération)

1	47
2	94
4	~~188~~
8	~~376~~
16	~~752~~
32	1504
35	1645

donc 35×47=1645

1	25
2	~~50~~
4	~~100~~
8	200
16	400
32	~~800~~

donc 89×25=2225

64	1600
89	2225

4a. Effectuez ainsi le produit 28 × 34 (0,5 point)

Identifier un algorithme d'une technique opératoire et le reproduire sur un exemple (I)

4b. Montrez la validité de cet algorithme sur l'exemple de 35 × 47 en justifiant chacune des étapes du calcul. (1 point)

Connaissance disciplinaire : propriétés mathématiques sur les nombres et les opérations (I)

$35 \times 47 = (1 + 2 + 32) \times 47$ → décomposition de 35 en somme de puissances de 2
$= (1 \times 47) + (2 \times 47) + (32 \times 47)$ → distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
$= (1 \times 47) + (2 \times 47) + ((2\times2\times2\times2\times2)\times47)$ → décomposition de 32 en facteurs premiers
$= 47 + 94 + 1504$ → calcul et associativité généralisée à n facteurs
$= 1645$

4c. Décrivez cet algorithme et justifiez qu'il est toujours utilisable pour calculer le produit de deux entiers, quels qu'ils soient. (1 point)

Connaissance disciplinaire, nombres entiers (I)

<u>Description</u> : Dans la colonne de gauche, on écrit successivement la suite des puissances de 2 inférieures à l'un des facteurs et on entoure celles dont la somme est égale à ce facteur. Dans la colonne de droite, on écrit le 2ème facteur que l'on double à chaque ligne.
Le produit des deux nombres est alors égal à la somme des nombres de la colonne de droite qui correspondent aux nombres entourés dans la colonne de gauche.
<u>Justification</u> : - tout nombre a une écriture unique en base 2
ou - tout nombre peut se décomposer en somme de puissances de 2
ou - tout nombre est compris entre deux puissances successives de 2

5. Dans les exemples donnés, on a utilisé 6 et 7 lignes avant de pouvoir faire l'addition finale. Supposez que l'on ait à effectuer le produit d'un nombre à quatre chiffres par un nombre à trois chiffres, quel nombre minimal de lignes faut-il écrire ? Quel nombre maximal ? Justifiez vos réponses. (0,5 point)

Connaissance disciplinaire, nombres entiers (I)

ax : 9999×999 $2^{13} < 9999 < 2^{14}$ donc max 14 lignes
Min : 1000×100 et $2^6 < 100 < 2^7$ donc min 7 lignes

6. Dans une classe de CE1, des élèves confrontés pour la première fois au calcul de 19 × 34, ont calculé ainsi :

34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34

68 + 68 + 68 + ...

136 + ...

....

Trouver deux points communs entre cette procédure et l'algorithme " à l'égyptienne ".
Donner une capacité supplémentaire nécessitée par ce dernier. (1 point)

Envisager des procédures d'élèves (IV)

Ressemblances : - duplications successives de l'un des facteurs et
- addition finale des résultats restants quand les duplications sont finies
- utilisation d'une somme pour effectuer un produit

Capacité supplémentaire : - trouver une décomposition additive du $2^{ème}$ facteur en utilisant les puissances de 2 déjà écrites

7. On effectue avec l'algorithme usuel la multiplication 34×19 :

	3	4	~~3~~
×	1	9	
3	0	6	
3	4		
6	4	6	

À quel niveau de classe les élèves doivent-ils connaître cet algorithme ? Ont-ils intérêt à l'utiliser dans ce cas précis ? Justifier. (0,5 point)

lien avec les programmes (II)

- niveau CE2 (programmes 2008)
- non car plus simple en passant par $34 \times 20 - 34$
- oui si technique maîtrisée, effectuée rapidement sans se poser de questions ...

Sujet 2
- Proportionnalité (8,5 points) -

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves de cycle 3 pour travailler la notion de proportionnalité.

Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 m de papier, et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 m de ce papier. *a- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?* *b- Quelle longueur de papier lui faut-il pour emballer 50 livres ?* *c- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?*

1- Cette situation semble être une situation de proportionnalité.

a) Donner un implicite (non dit) de l'énoncé qu'il serait bon de préciser pour lever toute ambiguité. (0,25 point)

b) La phrase « *Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 m de papier, et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 m de ce papier* » propose des données numériques. Donner une difficulté induite par ces données numériques. (0,25 point)

2- D'un point de vue mathématique, cette situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire (ou sa réciproque). Quelles sont ces fonctions ? Répondre aux questions a, b et c de l'exercice en utilisant l'une ou l'autre de ces fonctions. (1 point)

3- L'exercice est proposé à trois élèves (Laurène, Farida et Yann : voir page suivante).

a) Analyse de la copie de Laurène.Mettre en évidence les procédures que Laurène utilise pour répondre aux questions, pour cela on se réfèrera aux propriétés de linéarités des fonctions introduites à la question précédente. (0,5 point)

b) Analyse de la copie de Farida. Donner une explication plausible aux erreurs commises par Farida pour répondre aux questions a) et c). Farida a-t-elle reconnu une situation de proportionnalité? (0,5 point)

c) Analyse de la copie de Yann. Comment interpreter la réponse de Yann à la question b) ? (0,5 point)

Pour introduire la notion de proportionnalité en classe de CM1, cet enseignant décide d'utiliser le document suivant :

Valérie reçoit ses amis pour son anniversaire.
Elle a décidé de leur préparer un cocktail : « le Margot-drink »

Voici la recette pour 4 verres :

"Margot drink"
- quelques cubes de glace
- jus de 2 citrons
- jus de 8 oranges
- 1 verre à liqueur de sirop de grenadine
- eau gazeuse

Agiter vivement le shaker
Ajouter de l'eau gazeuse à volonté
présentation

• Combien de fruits de chaque sorte et quelle quantité de sirop de grenadine faut-il prévoir pour préparer :

6 verres
8 verres
10 verres
20 verres de « Margot-drink » ?

Valérie a acheté 8 citrons, 8 oranges et 1 bouteille de sirop de grenadine (avec cette bouteille, elle peut remplir 9 verres à liqueur).

• Combien peut-elle préparer de verres de « Margot-drink » pour ses invités ?

Il convient également de préparer la séquence en se référant au canevas suivant :

Etape 1 : La recette est affichée au tableau. La première question est écrite au tableau. Les élèves sont invités à rechercher les informations utiles pour répondre à cette question.

Etape 2 : Les élèves sont répartis en groupes hétérogènes. Ils ont à chercher une solution et à la présenter sur une affiche.

Etape 3 : Le maître procède à la mise en commun des affiches rédigées dans chaque groupe. Des explications orales peuvent être demandées aux producteurs des affiches et des arguments sont échangés entre élèves.

Etape 4 : Une synthèse collective permet à l'enseignant de mettre en évidence les éléments pertinents et les erreurs contenus dans les affiches.

- il met en place un modèle de présentation qui permet d'écrire les données, les résultats calculés et de schématiser la méthode utilisée.
- il organise la correction de la première question en séparant le calcul des ingrédients pour 8 verres et 20 verres de celui pour 6 verres et 10 verres. Il fait intervenir comme intermédiaire le calcul pour 2 verres indiqués par une affiche. Il fait apparaître ainsi les propriétés qu'il veut mettre en place.

Etape 5 : Les élèves prennent connaissance de la deuxième question et essaient d'y répondre individuelllement. Le maître conduit une correction collective à partir des différentes propositions.

Etape 6 : Les élèves ont à résoudre 3 exercices du même style.

Etape 7 : La situation suivante est proposée pour cette fin de séance.

Voici 2 recettes de crêpes

a/ Compare les 2 recettes.

b/ La maîtresse désire faire des crêpes pour les 30 élèves de la classe.

Quelles quantités doit-elle prévoir ?

4- Expliciter les connaissances préalables que doivent avoir les élèves pour résoudre ce problème. Citer trois points importants. (1 point)

5- Analyser la chronologie des sept étapes proposées par l'enseignant en s'appuyant sur les connaissances mathématiques visées et les démarches choisies pour les structurer en soulignant l'intérêt de chaque étape. Donner un intérêt pour chaque étape. (1,5 points)

Sujet 2
- Proportionnalité (8,5 points) -

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves de cycle 3 pour travailler la notion de proportionnalité.

Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 m de papier, et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 m de ce papier. *a- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?* *b- Quelle longueur de papier lui faut-il pour emballer 50 livres ?* *c- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?*

1- Cette situation semble être une situation de proportionnalité.

a) Donner un implicite (non dit) de l'énoncé qu'il serait bon de préciser pour lever toute ambiguité. (0,25 point)

Il suffit de dire que tous les livres sont les mêmes et que le libraire les emballe un par un avec la même longueur de papier pour chaque livre.
Pour traiter cette question il faut identifier « l'invariant » qui caractérise la proportionnalité : c'est-à-dire :
« tous les livres sont les mêmes » définit l'unité ;
« Un par un avec la même longueur de papier » élément invariant qui détermine le coefficient ;

Cette réponse contribue :

- *à s'interroger entre un énoncé issu de la réalité et le traitement mathématiques de la situation : les mathématiques comme production de modèles pour la situation « réelle » (partie I)*
- *à développer un regard critique de travaux proposés-présentés par des manuels et en particulier apprendre à repérer les implicites (partie III)*

b) La phrase « *Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 m de papier, et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 m de ce papier* » propose des données numériques. Donner une difficulté induite par ces données numériques. (0,25 point)

La présence de « 10 livres » et « 10 mètres » peut provoquer une confusion chez l'élève.
Pour répondre à cette question l'étudiant doit avoir compris la notion de fonction [la proportionnalité met en jeu la notion de fonction] (partie I) et permet d'expliquer les erreurs induites par les choix de valeurs numériques {par exemple : 10 livres, 10 mètres donc 14 mètres, 14 livres} (partie III et IV)

2- D'un point de vue mathématique, cette situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire (ou sa réciproque). Quelles sont ces fonctions ? Répondre aux questions a, b et c de l'exercice en utilisant l'une ou l'autre de ces fonctions. (1 point)

La fonction qui au nombre de livre donne le métrage de papier est $f(x) = 0{,}4 \times x$. *La fonction, qui au nombre de mètres de papier donne le nombre de livre maximum que l'on peut emballer est* $g(y) = 2{,}5 \times y$. *Ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre.*
Question a) $g(14) = 2{,}5 \times 14 = 35$ *ou alors* $g(14) = g(10) + g(4) = 25 + 10 = 35$. *Donc 35 livres emballés avec 14 mètres de papier.*
Question b) $f(50) = 0{,}4 \times 50 = 20$ *ou alors* $f(50) = 5 \times f(10) = 5 \times 4 = 20$. *Il faut 20 m de papier*

pour emballer 50 livres

Question c) $g(6) = 2{,}5 \times 6 = 15$ *ou alors* $g(6) = g(2) + g(4) = \frac{1}{2}g(4) + g(4) = 5 + 10 = 15$. *Donc 15 livres emballés avec 6 mètres de papier.*

La proportionnalité, modèle de résolution de la situation, repose sur la fonction linéaire. Pour répondre aux trois questions l'étudiant doit repérer et utiliser deux fonctions linéaires (réciproques l'une de l'autre) en mettant en œuvre soit le coefficient de linéarité soit l'une des deux propriétés de linéarité.

Le modèle mathématique qui permet d'étayer les différents raisonnements. (partie I)

3- L'exercice est proposé à trois élèves (Laurène, Farida et Yann : voir page suivante).

a) Analyse de la copie de Laurène.Mettre en évidence les procédures que Laurène utilise pour répondre aux questions, pour cela on se référera aux propriétés de linéarités des fonctions introduites à la question précédente. (0,5 point)

Pour la question a) : Laurène utilise en acte la propriété additive de la proportionnalité
$g(14) = g(10 + 4) = g(10) + g(4) = 25 + 10 = 35$

Pour la question b) : $f(50) = f(10 + 10 + 10 + 10 + 10) = f(10) + .. + f(10) = 4 + .. + 4 = 20$.

Pour la question c) : Elle décompose 6 en 4+2. Elle ne détaille pas sa manière de dire qu'avec 2 m de papier on emballe 5 livres. On peut cependant supposer qu'intuitivement elle divise 10 par 2. (Ce qui revient au même de dire, « avec la moitie de 4 m j'emballe la moitié de 10 livres »). Pour résumer ses opérations : $g(6) = g(2) + g(4) = \frac{1}{2}g(4) + g(4) = 5 + 10 = 15$.

La question 2) a posé la question de la connaissance mathématique. La procédure de l'élève est identifiée du point de vue mathématique et elle peut alors être rattachée à un type de raisonnement. (partie IV)

Elle permet aussi de repérer les connaissances et les procédures différentes des élèves. (partie IV)

b) Analyse de la copie de Farida. Donner une explication plausible aux erreurs commises par Farida pour répondre aux questions a) et c). Farida a-t-elle reconnu une situation de proportionnalité? (0,5 point)

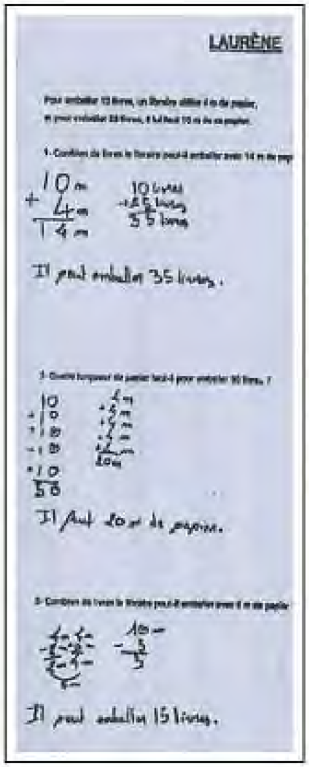
Il semble que Farida n'a pas reconnu une situation de proportionnalité. Pour la question a) Farida traduit la phrase « avec 4 mètres de plus j'emballe 4 livres de plus ». En acte, elle fait l'erreur suivante $g(14) = g(10 + 4) = g(10) + 4 = 25 + 4 = 29$. *(Persistance du modèle additif).*

Pour la question c) : Même style d'erreur $g(6) = g(10 - 4) = g(10) - 4 = 25 - 4 = 21$ *(« avec 4 mètres de moins j'emballe 4 livres de moins ».*

Même partie mais en aucun cas cela donne accès au raisonnement réel de l'élève. Idem pour la question c)

c) Analyse de la copie de Yann. Comment interpreter la réponse de Yann à la question b) ? (0,5 point)

Yann utilise la même procédure que Laurène en a) et c) (en moins explicite). Par contre pour le b) il a tenté d'utiliser la propriété d'additivité de la proportionnalité mais mélange le nombre de livres et le nombre de m de papier. (Il répond à la question, combien de livres peut-on emballer avec 50 m de papier). Ainsi il décompose 50 en additions de 4 et à chaque 4 fait correspondre 10 (il fait *correspondre 5 au 2). Il répond avec les bonnes unités.*



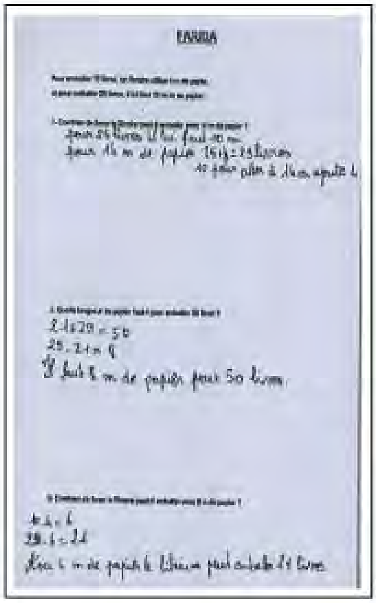
LAURÈNE

10 m + 4 m = 14 m   10 livres + 25 livres = 35 livres

Il peut emballer 35 livres.

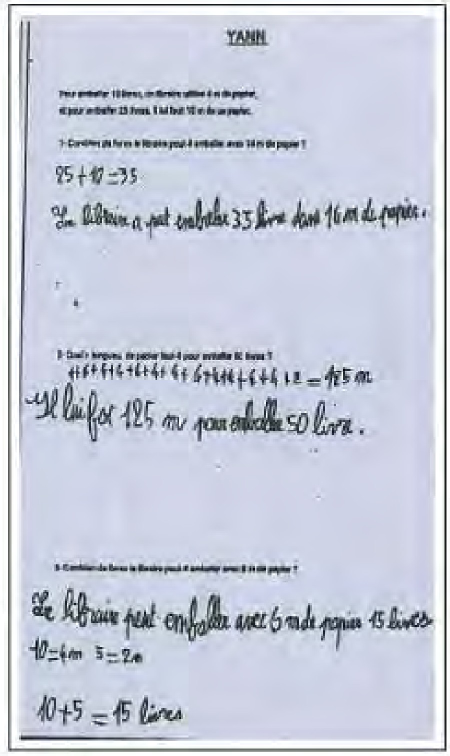
Il faut 20 m de papier.

Il peut emballer 15 livres.



FARIDA

Il faut 8 m de papier pour 50 livres.



YANN

25 + 10 = 35

Le libraire peut emballer 35 livres dans 14 m de papier.

Il lui faut 125 m pour emballer 50 livres.

Le libraire peut emballer avec 6 m de papier 15 livres.

10 = 4 m   5 = 2 m

10 + 5 = 15 livres

Pour introduire la notion de proportionnalité en classe de CM1, cet enseignant décide d'utiliser le document suivant :

Valérie reçoit ses amis pour son anniversaire.
Elle a décidé de leur préparer un cocktail : « le Margot-drink »

Voici la recette pour 4 verres :

• Combien de fruits de chaque sorte et quelle quantité de sirop de grenadine faut-il prévoir pour préparer :

6 verres
8 verres
10 verres
20 verres de « Margot-drink » ?

Valérie a acheté 8 citrons, 8 oranges et 1 bouteille de sirop de grenadine (avec cette bouteille, elle peut remplir 9 verres à liqueur).

• Combien peut-elle préparer de verres de « Margot-drink » pour ses invités ?

Il convient également de préparer sa séquence en se référant au canevas présenté sur la page suivante.

4- Expliciter les connaissances préalables que doivent avoir les élèves pour résoudre ce problème. Citer trois points importants. (1 point)

On pourrait citer ici :
Connaître le sens des opérations multiplication et addition.
Connaître $\frac{1}{2}$ *ou 0,5 et savoir calculer avec ce nombre.*
Savoir élaborer une démarche originale dans un problème pour lequel on ne dispose pas de solutions déjà éprouvée.
Formuler et communiquer sa démarche.

L'analyse des connaissances préalable développe une connaissance essentielle qui contribue d'une part à étudier les apprentissages en lien avec les programmes (partie II) et à analyser les propositions trouvées dans les manuels ou autres ressources (partie III).
L'analyse des conditions préalables suppose que l'on soit capable d'identifier savoir et savoir-faire nécessaires et d'analyser la tâche par rapport au travail dont elle relève (entreprendre et conduire une recherche,...) et par rapport à la continuité du curriculum. (partie III dominante)

5- Analyser la chronologie des sept étapes proposées par l'enseignant en s'appuyant sur les connaissances mathématiques visées et les démarches choisies pour les structurer en soulignant l'intérêt de chaque étape. Donner un intérêt pour chaque étape. (1,5 points)

Etape1 : Appropriation individuelle (lecture et recherche d'informations pertinentes). Les élèves se familiarisent avec l'énoncé.
Etape 2 : Recherche par groupe. Action. Formulation écrite. Les groupes travaillent ensemble, les élèves échangent pour construire une solution.
Etape 3 : Mise en commun. Formulation orale. Débat. Argumentation. Les élèves prennent conscience des autres procédures.
Etape 4 : Synthèse collective. Le maître met en évidence une procédure « expert » si possible en se basant sur les écrits des élèves.
Etape 5 : Approfondissement individuel. Les élèves ré-investissent ce qu'ils ont fait.
Etape 6 : Consolidation. Entraînement.
Etape 7 : Ré-investissement. Les élèves transposent ce qu'ils viennent d'apprendre dans un autre contexte.

L'analyse d'une mise en oeuvre est importante (Partie III). Nécessite l'analyse mathématique des différentes étapes (obstacles, aides,...) Les questions 6 et 7 permettent de travailler les mêmes compétences professionnelles.

6- Concernant l'étape 1 : recenser les informations utiles demandées aux élèves et que le maître veut mettre en relief. (0,5 point)

<u>Données :</u> Recette. Nombre de verres (4), nombre de citrons (2), nombre d'orange (2), nombre de verres à liqueur (1).
<u>Question :</u> Nombre de verres (6), nombre de citrons ? nombre d'orange ? nombre de verres à liqueur ? Idem pour 8, 10 et 20 verres.

7- Proposer un modèle que met le maître en place dans la partie a) de la quatrième étape. Comment schématiser la méthode utilisée ? (1 point)

Le maître peut récapituler les données et les questions sous forme d'un tableau. Il peut également schématiser la méthode utilisée au moyen de flèches pour passer d'une colonne à l'autre...

Nb de verres	*4*	*8*	*20*	*2*	*6*	*10*
Nb de citrons	*2*					
Nb d'oranges	*2*					
Nb de verres à liqueur.	*1*					

La spécificité de la question par rapport aux questions 5,6 et 8 porte sur la transposition du savoir savant à niveau donné pour atteindre un objectif, en principe, explicite ; (partie I)

8- Donner deux propriétés de la proportionnalité évoquées dans la partie b) de la quatrième étape ? (0,5 points)

Les propriétés évoquées sont la multiplicativité et l'additivité. En d'autres termes, les relations de linéarité sous jacentes et que l'on peut expliciter par $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *et* $f(kx) = kf(x)$.

Idem question 1)

9- A l'étape 7-a) le maître propose un exercice de ré-investissement. En quoi cet exercice est-il différent de celui proposé en étape 1 ? Donner une procédure possible qu'un élève de CM1 peut mettre en œuvre pour répondre à la question posée. (1 point)

L'exercice proposé à l'étape 7 utilise la proportionnalité en tant qu'outil. Les élèves doivent trouver un raisonnement qui leur permet de comparer les deux recettes. On ne leur demande pas de calculer les quantités pour un certain nombre de personnes. Une procédure peut être la suivante : calculer les quantités pour un même nombre de personnes pour les deux recettes, on choisira de calculer les quantités pour 2 personnes ou pour 12 personnes. Ensuite, on compare les quantités trouvées.

Renvoie à la partie I par prise de recul de la compétence mathématique (démarche de recherche) et lien entre modèle et situation « réelle » ;
Renvoie à la partie II par nécessité de connaître les programmes ;
Renvoie à la partie III parce qu'elle oblige à s'interroger sur la place et le rôle d'une proposition de travail dans un parcours d'apprentissage ;
Renvoie à la partie IV pour l'identification des procédures possibles des élèves.