L'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole : Où est le Problème?

à L'I.U.F.M d'Auch

3 4 5 Juin 2009

ATELIERS

Atelier A1

COMMENT FAVORISER LE DÉVELOPPEMENT DU RAISONNEMENT STATISTIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE ?

Alain Kuzniak
PU, IUFM Orléans-Tours, LDAR Paris-Diderot

Catherine Taveau
IUFM de Paris, IREM Paris 7

Résumé
L'éducation statistique du citoyen est de plus en plus une priorité des systèmes d'enseignement des pays développés. Dans de nombreux pays, un enseignement des statistiques est proposé aux élèves de l'école primaire. En France, cet enseignement est encore balbutiant et mal défini.
L'atelier proposé vise à réfléchir sur ce que pourrait être un enseignement favorisant le développement du raisonnement statistique chez les élèves. Cette réflexion est menée d'une part en comparant les standards nationaux américains (NCTM) et les programmes français, et d'autre part en analysant deux activités à mener en formation.

1 POURQUOI CET ATELIER HIC ET HUNC ?

Le raisonnement statistique ne fait pas l'objet d'un enseignement à l'école primaire dans le cadre des programmes actuellement en vigueur en France de ce fait la France apparaît en retrait par rapport aux autres pays qui ont inclus une première sensibilisation à la statistique dès le début de la scolarité obligatoire. Quand il existe, à partir du collège mais surtout au lycée, cet enseignement est généralement assuré par des professeurs de mathématiques qui, de par leur cursus, ne sont, semble-t-il pas trop à l'aise avec cette discipline dont ils ignorent souvent les bases et presque toujours l'épistémologie qui est en soi bien différente des mathématiques. Il nous semble important d'éviter de mettre en place des activités renforçant des idées erronées sur la nature de la pensée statistique qui doit incorporer l'idée d'incertitude et de raisonnement de type inductif. Cet atelier visait donc à faire réfléchir sur des pistes de formation favorisant l'appropriation de la démarche statistique en anticipant sa prochaine intégration dans le curriculum de l'école primaire.

2 LES SAVOIRS DÉVELOPPÉS ET ÉVALUÉS EN STATISTIQUES DANS DIFFÉRENTS SYSTÈMES ÉDUCATIFS.

Un certain nombre de documents ont été fournis aux participants de l'atelier pour discuter de l'orientation de l'enseignement sur les statistiques en France et dans d'autres pays notamment anglo-saxon (voir Annexes) :

- deux articles issus de l'évaluation PISA sur l'incertitude et accompagnés des compétences attendues ;
- une présentation des standards dit NCTM et présentés par l'association des professeurs de mathématiques aux Etats-Unis d'Amérique.;
- les programmes français de collège concernant la gestion de données .

Les participants étaient invités à caractériser l'approche française de l'enseignement des statistiques en la mettant en regard avec celle apparaissant dans le monde anglo-saxon.

Un rapide consensus s'est dégagé sur un certain nombre de points.

À l'école primaire :

- il s'agit principalement de lire et d'interpréter des données déjà organisées ;
- de trier et d'organiser ces données en produisant des graphiques ou des tableaux ;
- ces activités sont volontairement rattachées aux mathématiques avec la notion de proportionnalité.

Il n'y a pas de proposition de production d'enquêtes ni de récolte de données ni a fortiori de discussion sur ces données.

Au collège :

Les probabilités n'apparaissent que très tardivement (en 3^{e} et seulement depuis 2008/2009) et il s'agit essentiellement d'effectuer des calculs sur des données en petit nombre sans passer à un réel travail statistique.

Au regard de cette approche tardive et technique des statistiques, les programmes et les objectifs avancés par les anglo-saxons (notamment dans les standards du NCTM) insistent sur l'importance des démarches d'investigation et sur la qualité de l'interprétation des données. Les principes de base de cet enseignement vont être dégagés dans les parties qui suivent.

3 QUELQUES PRINCIPES DE BASE POUR ENSEIGNER LES STATISTIQUES

Dans les études internationales comme celles lancées par la Commission internationale sur l'enseignement des mathématiques, un certain nombre de distinctions sont faites notamment pour bien marquer la différence entre *pensée mathématique* et *pensée statistique*. Puis dans le cadre des statistiques, une gradation est faite entre un premier niveau de maîtrise portant sur les principes de base et un niveau d'expertise qui permet de savoir les limites et les conditions d'usages des différents concepts. Ce dernier niveau concerne davantage le statisticien professionnel alors que le premier s'adresse à tout citoyen. Tout l'enjeu est évidemment de savoir les limites de ce savoir de base. Ceci étant dit, un certain nombre d'orientations ont pu être dégagées pour l'enseignement de cette base statistique et semblent faire l'objet d'un large accord dans les pays engagés depuis longtemps dans l'enseignement des statistiques.

1- Développer un enseignement de type « main à la pâte ». Il s'agit de raisonner sur de vraies données fournies en quantité importante en faisant notamment appel aux bases de données des grands organismes nationaux de statistiques. Ainsi Statistique Canada (organisme national de statistique canadien) emploie à plein temps un certain nombre de statisticiens professionnels dont le travail consiste à aider les professeurs et les élèves dans leur découverte des statistiques.
2- Privilégier le raisonnement sur le calcul. Cette fois, il s'agit d'assumer une rupture avec les mathématiques : la statistique existe quand l'interprétation commence et que le calcul s'arrête. L'idée est d'utiliser un maximum d'outils pour gérer le calcul et de délester ainsi l'élève de cette tâche technique. Dans le même temps, l'accent est mis sur le développement du discours interprétatif qu'il soit écrit ou oral.
3- Utiliser des logiciels d'aide à l'interprétation. Dans ce cas, il s'agit de faciliter l'organisation des données pour décider et cet usage ne doit pas être confondu avec la simulation. Les notions statistiques aident à l'interprétation de représentations qui permettent d'organiser les données d'où l'usage récent des diagrammes à moustache.
4- Changer les modalités d'évaluation. Cette dernière soit s'appuyer sur des enquêtes et des analyses de documents. La présentation de la problématique et des résultats obtenus est essentielle.
5- Du côté des professeurs. Dans le cas des professeurs de mathématiques, il est certain qu'il doit y avoir une double rupture à la fois épistémologique (relative à la pensée statistique) et aussi didactique avec un travail dévolu davantage aux élèves avec un usage différent des logiciels.

Cette orientation de l'enseignement doit permettre de dépasser un certain nombre d'obstacles qui ont été relevés lors de recherches effectuées sur le développement de la pensée statistique. Dans leur ouvrage de synthèse Ben Zvi et Garfield (2008) dégagent ces obstacles.

La représentativité. Les individus ont tendance à penser que quelque soit sa taille, un échantillon donné est d'autant plus probable qu'il contient les mêmes proportions que la population globale. Ainsi, pour les individus si un caractère possède une fréquence de 0.7, ils s'attendent à ce que les échantillons de cette population aient exactement la fréquence en question que la taille de l'échantillon soit 10, 100 ou 1000.

L'occurrence d'un certain événement comme un dû. Dans ce cas, il y a l'idée que les événements du passé affectent un événement futur. Ce phénomène s'observe lorsque que dans le cas d'une pièce équilibrée, il y a eu plusieurs sorties de la même face. Une autre interprétation possible de ce phénomène est celui de la dualité de la probabilité dans un contexte de prise de décision (Carranza et Kuzniak, 2006,2008). Dans ce cadre, les auteurs distinguent l'approche bayesienne qui s'appuie sur les connaissances que le sujet a des expériences et qui lui permet de décider même sur peu de cas, de l'approche fréquentiste qui mesure des phénomènes aléatoires reproductibles un nombre indéfini de fois.

S'appuyer sur le contingent plutôt que sur la statistique. Ainsi, l'on décidera de l'importance d'un phénomène comme celui du chômage ou d'une maladie non pas en fonction des données statistiques disponibles mais en fonction de son apparition dans son propre environnement. Ce sont d'abord, les cas qu'on peut évoquer qui déterminent le sentiment de fréquence ou non d'un phénomène. On retrouve ici la tension plaisamment évoquée par la phrase suivante « Quand les statistiques te disent qu'un français mange du poulet une fois par semaine, alors que tu n'en manges jamais, ne pense pas que les statistiques ont tort mais plutôt qu'un autre français en mange deux fois par semaine ».

Confusion due à l'accumulation d'événements corrélés. Ben Zvi et Garfield donnent l'exemple où des données pouvant avoir un lien sémantique ont été fournies aux étudiants.

« Gaëlle est une jeune femme brillante qui a fait des études de philosophie sur la question des inégalités en fonction du genre. Des deux affirmations suivantes qu'elle est la plus probable :

i. Elle est chargée de la direction d'une agence bancaire.

ii. Elle est chargée de la direction d'une agence bancaire et elle s'investit beaucoup pour la cause des femmes. »

Dans ce cas, pour conclure, ces derniers s'appuient davantage sur les connaissances données sur Gaelle que sur le raisonnement déductif et ils donnent majoritairement comme réponse la réponse ii alors que d'un point de vue déductif la première affirmation est impliquée par la seconde donc plus probable.

D'autres obstacles sont plus liés aux compétences mathématiques dans le domaine des proportions notamment et aussi du calcul sur les nombres. Il y a aussi bien sûr tous les obstacles liées aux probabilités et à la notion de corrélation et de causalité. Pour terminer, signalons aussi cet obstacle lié encore une fois au fait que les individus utilisent les statistiques de manière pragmatiques dans la vie quotidienne. Ainsi, le fait de savoir que la météo annonce qu'il y a 20% de chance qu'il pleuve est interprété comme le fait qu'il ne va pas pleuvoir.

4 INFORMATIQUE ET STATISTIQUES : LE LOGICIEL TINKERPLOT.

Tinkerplot est un logiciel qui permet de travailler les statistiques avec l'orientation pédagogique qui vient d’être présentée précédemment. C’est un logiciel qui effectue tous les calculs et permet ainsi de s’attarder sur la résolution de problèmes en utilisant les outils des statistiques.
Tinkerplot n’est pas seulement un logiciel de calcul mais un ensemble de ressources pédagogiques pour développer le raisonnement statistique à partir de l’école primaire.
Lors de l'atelier, nous avons présenté aux participants une situation empruntée à cet ensemble de ressources et nous leur avons demandé de résoudre le problème portant sur des données concernant des chats (voir Annexes). Nous incitons le lecteur à découvrir par lui-même ce logiciel développé par le MIT (Massachusetts Institute of Technology) et dont la traduction en français bénéficie d'un contrat exclusif avec l’état de l’Ontario pour sa partie francophone. Son utilisation avec la version anglaise est assez aisée dès que la traduction de la barre d’outil est faite.

5 LA SITUATION DES SMARTIES.

L'objectif de cette phase était de présenter une activité de formation que nous avons menée avec les PLC2 et les PE. Il s'agissait de faire percevoir la richesse d’un matériau de la vie quotidienne pour aborder la notion de pensée statistique.
En faisant vivre la situation aux participants, nous souhaitions faciliter leur appropriation de la situation afin de pouvoir en discuter la pertinence en formation.

Description de la situation

> « Par groupe de 3, vous disposerez chacun d’une boîte de smarties. Vous pouvez ouvrir la boîte mais évidemment ne rien manger avant la fin de l’atelier.
> La consigne est la suivante : élaborer un ensemble de questions auxquelles vous essayerez de trouver une solution, à partir du matériel que nous venons de vous distribuer. »

Notre objectif étant de faire travailler aux stagiaires la compétence du NTCM : *Proposer et justifier des conclusions et des prévisions basées sur les données et concevoir des études pour poursuivre l'étude des conclusions et des prévisions.*

Nous avons ensuite fait part de notre expérience en formation des PLC2 en détaillant nos objectifs lors d’un module intitulé « statistiques et probabilités ».
Dans ce cas, il s'agissait de:

- faire vivre une situation qui déstabilise certaines représentations de l'enseignement des statistiques au collège et en seconde (au collège, c'est ne faire que des calculs et en 2nd c'est d'utiliser immédiatement la simulation) ;
- montrer que la conclusion d'une situation mathématique est différente de la conclusion d'une situation statistique car on est ici dans le domaine de l'incertitude ;
- proposer une approche statistique de la fluctuation des échantillonnages pour la classe de 2nd avant de passer par une approche par la simulation qui repose essentiellement sur les lois de probabilités.

Voici un choix de questions élaborées par les PLC2. On notera l'influence du programme et aussi le peu d'importance laissée à la pensée statistique dans ces questions qui privilégient une approche par les probabilités et par des tâches de constructions de graphiques qui permettent à ce niveau de répondre aux questions posées.

Y a-t-il le même nombre de smarties par boîte ?
Quelle est la couleur de smarties la plus fréquente ? la moins fréquente ?
Les différentes couleurs des smarties sont-elles équiréparties dans une boîte ? dans 3 boîtes ?
Les boîtes de smarties sont-elles remplies couleur par couleur ou les smarties sont tous mélangés avant leur mise en boîte?
Si on tire un smarties dans une boîte, quelle est la probabilité d'obtenir un smarties d'une couleur donnée.
On considère deux boîtes de smarties, la configuration de chacune est connue. On tire un smarties d'une boîte pour le mettre dans la seconde puis on tire un smarties de la seconde pour le mettre dans la première. Quelle est la probabilité pour que les boîtes soient dans leur configuration initiale après ces échanges?
Quelle est l'étendue des fréquences des couleurs sur une boîte ? sur trois boîtes ? sur un paquet ?
Y-a-t-il équirépartition des couleurs des smarties ou non?

Par la suite, nous n'avons traité avec les stagiaires que la question de l'équirépartition.

La même situation a été proposée à des PE2 en utilisant la même mise en œuvre. Nous n'avons pas obtenu les mêmes questions. Nous souhaitions ainsi comparer leurs productions avec celles des PLC2.

Voici le type de questions élaborées par les PE2 où apparaissent deux types de préoccupations, les unes ont trait aux statistiques mais les autres, au moins aussi fréquentes, essayent de se rattacher aux programmes de l'enseignement élémentaire et font la part belle aux grandeurs et à la géométrie.

Questions statistiques :

Comment sont réparties les couleurs des smarties ?
Existe-t-il des boîtes de smarties où toutes les couleurs ne sont pas représentées ?
Quelle est la probabilité de trouver une boîte monochrome ?
Est-ce qu'il y a toujours le même nombre de smarties dans une boîte ?
Est-ce que tous les smarties ont le même poids ?
Pour 40 smarties, quelle est la probabilité d'avoir seulement des roses ?
Quel est le nombre maximum de smarties qu'il peut y avoir dans une boîte ?
Est-ce que le remplissage des boîtes répond à une loi de répartition des couleurs ?

Question géométriques

Quelle est la surface d'une boîte de smarties ?
Combien de smarties peuvent entrer au maximum dans une boîte sans la déchirer ?
Combien faut-il de smarties pour remplir un aquarium de 10 litres ?
Comment fabriquer une boîte de smarties ?
Sachant que j'ai le carton pour fabriquer une boîte de smarties, me faudra-t-il 3 fois plus de carton pour mettre tous les smarties (ceux des 3 boites) ?
Quelle forme géométrique peut-on faire avec les 3 boîtes ?

Quelles formes géométriques peut-on faire avec tous les smarties sortis de leur boîte ?
Combien faut-il de boîtes pour recouvrir une feuille A4, sans règle graduée, et en utilisant à chaque fois une des faces de la boîte ?
Combien doit-on empiler de boîtes de smarties au minimum pour atteindre le plafond ?

6 PERSPECTIVES

L'atelier s'est terminé par une rapide prospective de ce qui pourrait être fait à l'avenir. Les participants de l'atelier s'accordent sur l'importance d'une approche de la statistique précoce mais leur venue à cet atelier supposait déjà un intérêt pour ce thème. Le souhait est alors exprimé de tenter de mettre en place ce type d'enseignement en classe, de manière expérimentale. Une affaire à suivre qui laisse augurer d'autres ateliers de ce type dans un futur pas trop lointain du moins nous l'espérons.

7 BIBLIOGRAPHIE

Garfield J. et Ben-Zvi D. (2008) Developing Students' Statistical Reasoning. Springer.

Carranza P. et Kuzniak A. (2006) Dualité de la notion de probabilité et enseignement de la statistique au Lycée en France, Actes du Colloque EMF.

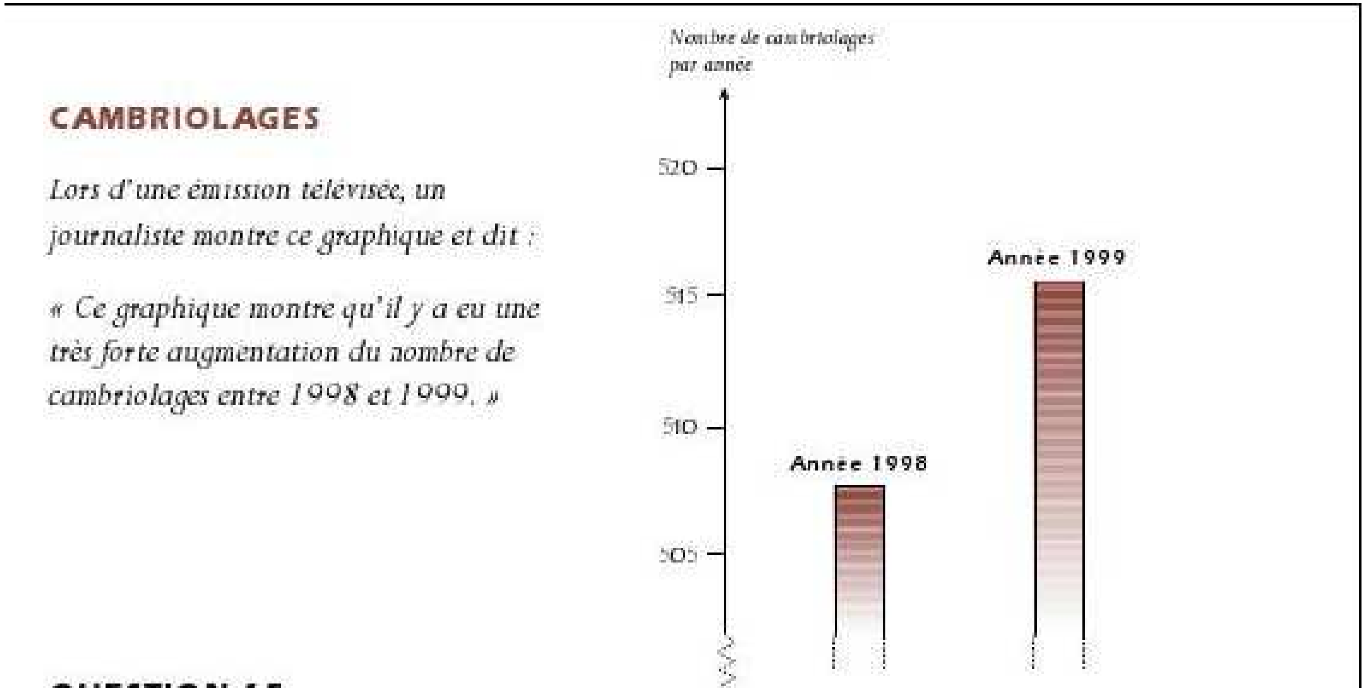
Carranza P. et Kuzniak A. (2008). Duality of Probability and statistics teaching in French education ICME Study on Statistics. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php

Les évaluations PISA

L'incertitude est un des thèmes essentiels de la culture mathématiques qui est évalué lors des tests PISA.
La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi.

Parmi les quatre thèmes abordés par PISA (espaces et formes, variations, quantité, incertitude), l'incertitude est décrite comme un concept qui a trait aux relations et aux phénomènes de statistiques et de probabilités qui jouent un rôle de plus en plus important dans la société de l'information. Les branches des mathématiques qui étudient ces thèmes sont les statistiques et les probabilités.

Voici un des exercices posés dans PISA 2003



Question 15
Considérez-vous que l'affirmation du journaliste est une interprétation correcte de ce graphique ? Justifiez votre réponse par une explication.

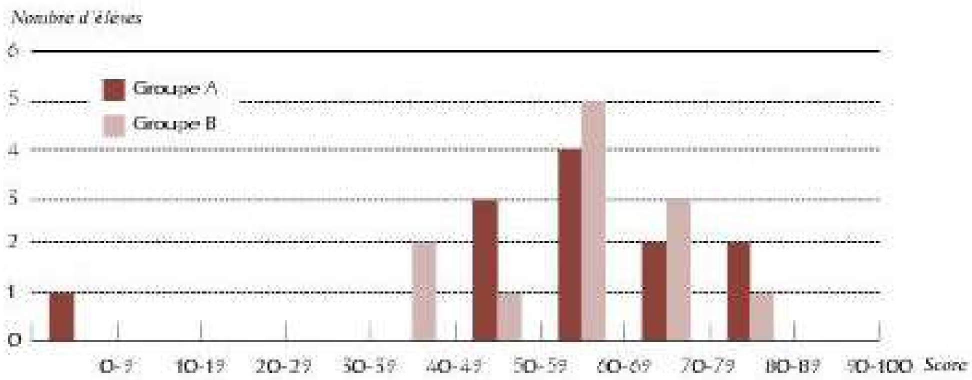
Voici un second exercice proposé dans PISA 2003

RÉSULTATS À UN CONTRÔLE

Le graphique ci-dessous montre les résultats à un contrôle de sciences obtenus par deux groupes d'élèves, désignés par « Groupe A » et « Groupe B ».

La note moyenne pour le Groupe A est de 62,0 et de 64,5 pour le Groupe B. Les élèves réussissent ce contrôle lorsque leur note est de 50 points ou davantage.

Résultats au contrôle de sciences



Question

Sur la base de ce graphique, le professeur conclut que le Groupe B a mieux réussi ce contrôle que le Groupe A. Les élèves du Groupe A ne sont pas d'accord avec le professeur. Ils essaient de le convaincre que le Groupe B n'a pas nécessairement mieux réussi. En vous servant du graphique, donnez un argument mathématique que les élèves du Groupe A pourraient utiliser.

Les standards pour l'analyse de données et les probabilités

(traduction des standards du NCTM (National Council of Teachers of Mathematics)

Programmes du prekindergarten (maternelle) jusqu'à la classe 12(*4ème*) pour rendre tous les élèves capables de:	Du prekindergarten jusqu'à la classe 2 (*CE1*), tous les élèves doivent être capables de:	Dans les niveaux 3(*CE2*) à 5(*CM2*) tous les élèves doivent être capables de:	Dans les niveaux 6(*6ème*) à 8(*4ème*) tous les élèves doivent être capables de:
-Formuler des questions qui peuvent être traitées avec des données et recueillir, organiser et afficher les données pertinentes pour y répondre.	-Poser des questions et recueillir des données sur eux-mêmes et leur environnement; -Trier et classer des objets selon leurs attributs et organiser les données sur ces objets; -Représenter des données en utilisant des objets, des images et des graphiques.	-Concevoir des enquêtes pour répondre à une question et examiner comment les méthodes de collecte de données influent sur la nature de l'ensemble de données; -Recueillir des données en utilisant des observations, des enquêtes et des expériences; -Représenter des données à l'aide de tableaux et de graphiques tels que la *line plots*, histogrammes et *line graphs*; -Reconnaître les différences dans la représentation quantitative et qualitative.	-Formuler des questions, concevoir des études et recueillir des données sur une caractéristique partagée par deux populations ou sur des caractéristiques différentes dans une population; -Sélectionner, créer et utiliser des représentations graphiques appropriées de données.
-Choisir et utiliser des méthodes statistiques appropriées pour analyser les données.	-Décrire une partie des données et les données toutes entières pour déterminer ce que qu'elles montrent.	-Décrire la forme et les caractéristiques importantes d'un ensemble de données et de comparer ces ensembles de données, en mettant l'accent sur la manière dont les données sont distribuées; -Utiliser des mesures du centre, en se concentrant sur la médiane, et comprendre ce que chacune indique ou non sur l'ensemble de données; -Comparer différentes représentations des mêmes données et évaluer dans quelle mesure chaque représentation montre des aspects importants sur les données.	-Trouver, utiliser et interpréter les mesures de centre et de dispersion y compris la moyenne et l'étendue interquartile ; -Discuter et comprendre la correspondance entre les ensembles de données et leur représentation graphique, notamment les histogrammes.

-Effectuer et évaluer des inférences et des prévisions basées sur des données..	-Discuter des événements liés à leur propre expérience comme probable ou improbable.	-Proposer et justifier des conclusions et des prévisions basées sur les données et concevoir des études pour poursuivre l'étude des conclusions et des prévisions.	-Utiliser des observations sur les différences entre deux ou plusieurs échantillons pour faire des conjectures sur les populations dont les échantillons ont été prélevés; -Faire des conjectures sur les relations possibles entre les deux caractéristiques d'un échantillon, sur la base des nuages de points des données et sur les lignes de meilleures approximations ; -Utiliser des hypothèses pour formuler de nouvelles questions et planifier de nouvelles études pour y répondre.
-Comprendre et appliquer les concepts de base sur la notion de probabilité.		-Décrire les événements comme probables ou improbables et de discuter de la probabilité en utilisant des termes tels que certain, également probable et impossible; -Prévoir la probabilité d'apparition dans des expériences simples et tester les prévisions; -Comprendre que la mesure de la probabilité d'un événement peut être représenté par un nombre de 0 à 1.	-Comprendre et utiliser la terminologie appropriée pour décrire des évènements complémentaires ou incompatibles; -Utiliser la proportionnalité et une compréhension élémentaire de la probabilité pour émettre et tester des conjectures sur les résultats d'expériences et de simulations; -Calculer des probabilités pour de simples événements composés, en utilisant des méthodes comme des listes organisées, des arbres ou des modèles d'aires.

Programmes français concernant l'enseignement des mathématiques

Programmes de l'école primaire (2002)

Exploitation des données numériques (document d'application)

À travers la résolution de problèmes appropriés, les élèves différencient progressivement les situations qui relèvent de la proportionnalité de celles qui n'en relèvent pas et les résolvent en utilisant des raisonnements personnels adéquats. Il s'agit d'une première approche de cette notion qui ne fait, au cycle 3, l'objet d'aucune étude systématique, celle-ci relevant du collège.
Les élèves sont également confrontés à la lecture, à l'interprétation et à l'utilisation de divers modes de représentation des données : diagrammes, graphiques, tableaux. L'analyse critique de l'information mise en

Organisation et représentation de données numériques

Compétences	Commentaires
– **Organiser des séries de données numériques (listes, tableaux…).** – **Lire, interpréter et construire quelques représentations : diagrammes, graphiques.**	Les situations qui conduisent à utiliser diverses représentations d'un ensemble de données (tableaux, graphiques, diagrammes) s'appuient sur des données effectives : enquêtes, mesurages en physique ou en biologie (exemple de l'évolution de la taille d'un enfant, d'un animal ou d'une plante), documents en géographie… Dans un premier temps, les élèves sont mis en situation de lecture et d'interprétation de ces différents types de présentation des données, puis, dans des cas simples, en situation de production (voir rubrique « Proportionnalité »). Les situations de construction de diagrammes ou graphiques se limitent à des cas simples ou ayant recours à l'outil informatique (une première initiation au tableur peut être envisagée). Quelques exemples de phénomènes aléatoires peuvent être proposés dans la perspective de faire apparaître des régularités (par exemple, lancers d'une pièce ou d'un dé, lancers de deux dés dont on fait la somme).

évidence par de tels supports contribue à l'éducation civique des élèves.

Programmes de l'école primaire au cycle 3 (2008)

4. Organisation et gestion de données

Les capacités d'organisation et de gestion des données se développent par la résolution de problèmes de la vie courante ou tirés d'autres enseignements. Il s'agit d'apprendre progressivement à trier des données, à les classer, à lire ou à produire des tableaux, des graphiques et à les analyser.
La proportionnalité est abordée à partir des situations faisant intervenir les notions de pourcentage, d'échelle, de conversion, d'agrandissement ou de réduction de figures. Pour cela, plusieurs procédures en particulier celle dite de la « règle de trois ») sont utilisées.

DEUXIEME PALIER POUR LA MAITRISE DU SOCLE COMMUN : COMPETENCES ATTENDUES A LA FIN DU CM2

Compétence 3 : *LES PRINCIPAUX ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES ET LA CULTURE SCIENTIFIQUE ET TECHNOLOGIQUE*

A) Les principaux éléments de mathématiques
L'élève est capable de :

…………
- résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres, mesures, “règle de trois”, figures géométriques, schémas ;
- savoir organiser des informations numériques ou géométriques, justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat ;
- lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques.

B) La culture scientifique et technologique

L'élève est capable de :
- pratiquer une démarche d'investigation : savoir observer, questionner ;
- manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter ;
- mettre à l'essai plusieurs pistes de solutions ;
………..

Programmes de mathématiques pour le collège (2008) (introduction p.2)

L'organisation et la gestion des données sont indispensables pour comprendre un monde contemporain dans lequel l'information chiffrée est omniprésente, et pour y vivre. Il faut d'abord apprendre à lire et interpréter des tableaux, schémas, diagrammes, à réaliser ce qu'est un événement aléatoire. Puis apprendre à passer d'un mode de représentation à l'autre, à choisir le mode le plus adéquat pour organiser et gérer des données. Émerge ainsi la proportionnalité et les propriétés de linéarité qui lui sont associées. En demandant de s'interroger sur la signification des nombres utilisés, sur l'information apportée par un résumé statistique, sur les risques d'erreur d'interprétation et sur leurs conséquences possibles, y compris dans la vie courante, cette partie des mathématiques contribue à former de jeunes adultes capables de comprendre les enjeux et débats de la société où ils vivent.
Enfin, en tant que discipline d'expression, les mathématiques participent à la *maîtrise de la langue*, tant à l'écrit – rédaction, emploi et construction de figures, de schémas, de graphiques – qu'à l'oral, en particulier par le débat mathématique et la pratique de l'argumentation.

Thème de convergence

THÈME 1 : IMPORTANCE DU MODE DE PENSÉE STATISTIQUE DANS LE REGARD SCIENTIFIQUE SUR LE MONDE

L'aléatoire est présent dans de très nombreux domaines de la vie courante, privée et publique : analyse médicale qui confronte les résultats à des valeurs normales, bulletin météorologique qui mentionne des écarts par rapport aux normales saisonnières et dont les prévisions sont accompagnées d'un indice de confiance, contrôle de qualité d'un objet technique, sondage d'opinion…
Or le domaine de l'aléatoire et les démarches d'observations sont intimement liés à la pensée statistique. Il s'avère donc nécessaire, dès le collège, de former les élèves à la pensée statistique dans le regard scientifique qu'ils portent sur le monde, et de doter les élèves d'un langage et de concepts communs pour traiter l'information apportée dans chaque discipline.

Objectifs

Au collège, seule la statistique exploratoire est abordée et l'aspect descriptif constitue l'essentiel de l'apprentissage. Trois types d'outils peuvent être distingués :
- les outils de synthèse des observations : tableaux, effectifs, regroupement en classe, pourcentages, fréquence, effectifs cumulés, fréquences cumulées,
- les outils de représentation : diagrammes à barres, diagrammes circulaires ou semi-circulaires, histogrammes, graphiques divers,
- les outils de caractérisation numériques d'une série statistique : caractéristiques de position (moyenne, médiane), caractéristiques de dispersion (étendue, quartiles).

Contenus

Dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, les élèves s'initient aux rudiments de la statistique descriptive : concepts de position et de dispersion, outils de calcul (moyennes, pourcentages…) et de représentation (histogrammes, diagrammes, graphiques) et apprennent le vocabulaire afférent. Ainsi sont mis en place les premiers éléments qui vont permettre aux élèves de réfléchir et de s'exprimer à propos de situations incertaines ou de phénomènes variables, d'intégrer le langage graphique et les données quantitatives au langage usuel et d'apprendre à regarder des données à une plus grande échelle. L'utilisation de tableurs grapheurs donne la possibilité de traiter de situations réelles, présentant un grand nombre de données et de les étudier, chaque fois que c'est possible, en liaison avec l'enseignement de physique-chimie, de sciences de la vie et de la Terre et de technologie, dont les apports au mode de pensée statistique sont multiples et complémentaires.
Le recueil de données en grand nombre et la variabilité de la mesure sont deux modes d'utilisation des outils de statistique descriptive qui peuvent être particulièrement mis en valeur.

Le recueil de données en grand nombre lors de la réalisation d'expériences et leur traitement

Les élèves sont amenés à récolter des données acquises à partir des manipulations ou des productions effectuées par des binômes ou des groupes ; la globalisation de ces données au niveau d'une classe conduit déjà les élèves à dépasser un premier niveau d'information individuelle.
Mais ces données recueillies à l'échelle de la classe ne suffisent pas pour passer au stade de la généralisation et il est nécessaire de confronter ces résultats à d'autres réalisés en plus grand nombre, pour valider l'hypothèse qui sous-tend l'observation ou l'expérience réalisée.
Tout particulièrement dans le domaine des sciences de la vie, de nombreux objets d'étude favorisent cette forme de mise en œuvre d'un mode de pensée statistique : la répartition des êtres vivants et les caractéristiques du milieu, la durée moyenne des règles et la période moyenne de l'ovulation, les anomalies chromosomiques … Les résultats statistiques permettent d'élaborer des hypothèses sur une relation entre deux faits d'observation et d'en tirer une conclusion pour pouvoir effectuer une prévision sur des risques encourus, par exemple en ce qui concerne la santé.

Le problème de la variabilité de la mesure

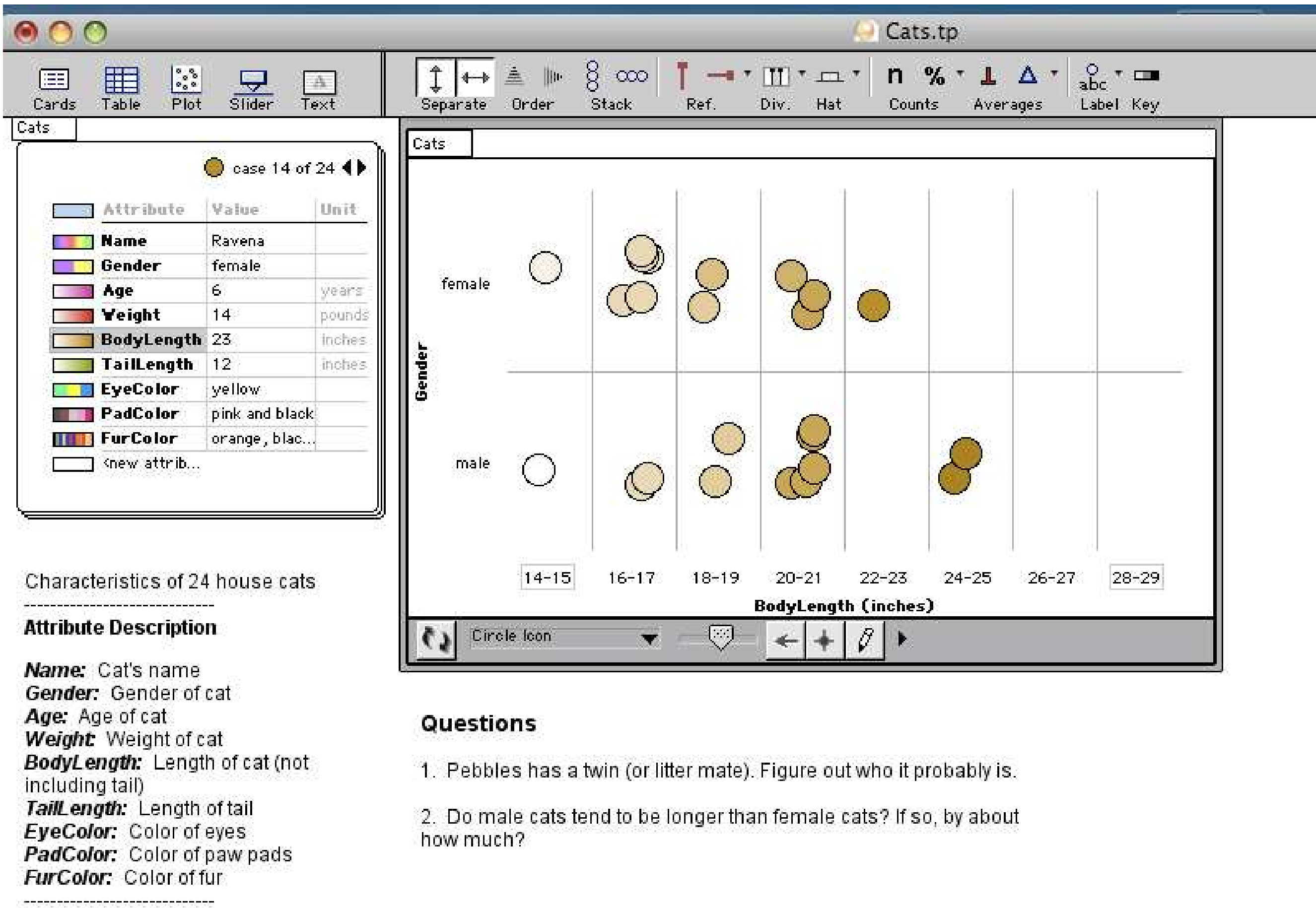
De nombreuses activités dans les disciplines expérimentales (physique-chimie, sciences de la vie et de la Terre, technologie), basées sur des mesures, doivent intégrer la notion d'*incertitude* dans l'acte de mesurer et développer l'analyse des séries de mesures. Lors de manipulations, les élèves constatent que certaines grandeurs sont définies avec une certaine imprécision, que d'autres peuvent légèrement varier en fonction de paramètres physiques non maîtrisés.
Plusieurs mesures indépendantes d'une même grandeur permettent ainsi la mise en évidence de la *dispersion naturelle des mesures*.
Sans pour autant aborder les justifications théoriques réservées au niveau du lycée, il est indispensable de faire constater cette dispersion d'une série de mesures et d'estimer, en règle générale, la grandeur à mesurer par la moyenne de cette série.

3. Organisation des contenus

Les quatre parties des programmes des classes du collège s'organisent autour des objectifs suivants :
• **organisation et gestion de données, fonctions**

- maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité ;
- approcher la notion de fonction (exemples des fonctions linéaires et affines) ;
- s'initier à la lecture, à l'utilisation et à la production de représentations, de graphiques et à l'utilisation d'un tableur ;
- acquérir quelques notions fondamentales de statistique descriptive et se familiariser avec les notions de chance et de probabilité.

Présentation de l'activité de résolution de problème à partir des données sur une collection de chats, en utilisant le logiciel TinkerPlot



Ici l'organisation des données proposée par le logiciel permet d'essayer de répondre à la question n°2 : *Les chats mâles ont-ils tendance à être plus longs que les chattes? Si oui, de combien environ?*

Atelier A2

TRANSPOSER EN FORMATION DES RÉSULTATS DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION DE POSITION AU COURS ÉLÉMENTAIRE.

Chambris Christine,
IUFM de l'académie de Versailles, Université de Cergy-Pontoise
Laboratoire de didactique André Revuz (Didirem – LDSP), Université Paris 7
cchambris@free.fr

Résumé
L'atelier s'est donné comme objectifs principaux de diffuser les résultats d'une recherche auprès des formateurs et de réfléchir à la pertinence de leur utilisation dans la formation des enseignants.
Dans un premier temps, en utilisant les résultats issus de la recherche, l'article rappelle le rôle de la « numération en unités » dans l'étude de la numération décimale de position : stable avant la réforme des années 70, quasi inexistant dans les années 70-80 avec un retour progressif mais partiel jusqu'à nos jours.
Pour montrer la place actuelle de la « numération en unités », l'auteure s'appuie sur l'étude de deux extraits de manuels scolaires de CE2 (« Le Nouvel Objectif Calcul » de 95 et « Le Cap Math » de 2007) : dans ces deux ouvrages, la place de la « numération en unités » est minimisée par rapport à l'utilisation des écritures chiffrées des puissances de dix qui en quelque sorte la remplace.
L'auteure montre également que dans les ouvrages récents, la « relation entre les unités » est peu présente et en particulier que les tâches de conversion ont pratiquement disparues pour être remplacées par celles de type « nombre de, chiffre des » de plus en plus diversifiées.
Dans un second temps, l'article aborde les problèmes de la formation, de façon beaucoup plus empirique.
Il énumère les tâches proposées aux différents publics pour étudier l'utilisation de la « numération en unités » et la compréhension des « relations entre unités ».
Le retour sur une formation continuée montre la difficulté de faire pénétrer la dimension « relation entre unités » dans la pratique des enseignants du fait que celle-ci, difficile, n'est pas forcément nécessaire pour réussir les tâches habituellement proposées.
Les apports des participants à l'atelier sont rapidement évoqués pour souligner l'intérêt, porté par certains, à l'aspect « échanges » à travers la monnaie. L'auteure tient à préciser que la dialectique « groupement/échange » ne date que de la réforme et permettait alors d'accompagner les manipulations des différents matériels introduits.

1 PROBLÉMATIQUE

Nous avons conduit une recherche sur l'enseignement de la numération de position des entiers en France, au cours élémentaire, au 20e siècle (Chambris 2008 2009). Dans ce cadre, nous avons établi des résultats relatifs aux évolutions de cet enseignement pendant un siècle. Pour de multiples raisons, la période de la réforme des mathématiques modernes[1] apparaît cruciale dans ces évolutions. Nous parlerons d'ailleurs globalement de l'enseignement d'*hier* (ou *ancien*) pour désigner la période antérieure à la réforme, qui n'est pourtant probablement pas si uniforme.
En quoi l'enseignement de la numération hier est-il différent de celui d'aujourd'hui ? Ces différences se limitent-elles à des modifications dans la conception sous-jacente de l'apprentissage (de façon caricaturale, passage d'une conception transmissive à constructive) ? Peut-on repérer des « objets »

[1] Dans la suite du texte, nous parlerons de « la réforme ».

d'enseignement anciens qui ont disparu mais qui semblent pertinent pour l'enseignement actuel ? Le cas échéant, comment les enseignants actuels peuvent-ils se les approprier, les intégrer dans leur enseignement ? Comment les former ?
L'objet de l'atelier est donc d'une part de diffuser les résultats de notre recherche auprès des formateurs, d'autre part de réfléchir à leur diffusion et à la pertinence de leur utilisation auprès des enseignants en formation, voire des formateurs.

2 DES RÉSULTATS DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION DE POSITION DES ENTIERS

Nous avons étudié l'évolution de l'enseignement de la numération de position des entiers en France au 20e siècle. Notre corpus de données était constitué d'une part de manuels scolaires du 20e siècle (1900 à 2004) (à ces manuels scolaires, nous avons ajouté l'extrait du traité de Reynaud relatif à la numération) (Bezout & Reynaud 1821, traité de Reynaud, §2) ; d'autre part de productions d'élèves de CM2 (en 2006).
Nous avons utilisé le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992). En particulier dans ce texte, nous nous référons explicitement à trois des quatre composantes d'une praxéologie (moyen de décrire une pratique). Dans une praxéologie, on a un *type de tâches*, c'est à dire un ensemble de tâches problématiques qui se ressemblent (en un certains sens). Ce type de tâches peut être traité par un moyen : la *technique*. Il s'agit de répondre à la question : comment fait-on pour traiter les tâches ? Le moyen (la technique) peut être justifié par une *technologie*, répondant donc à la question : pourquoi la technique fonctionne-t-elle ?
Nous présentons ci-après quelques uns de nos résultats. Nous commençons par deux éléments relatifs à la numération avant la réforme : d'une part un objet banal mais essentiel que nous avons appelé la *numération en unités*, d'autre part la théorie de la numération de position telle qu'on peut la trouver avant la réforme et les discours justificatifs, associés à cette théorie, mis à disposition des élèves pour traiter différentes tâches. Nous mettons ensuite ces éléments en correspondance avec l'enseignement actuel. Nous nous intéressons enfin à un objet qui semble fragilisé aujourd'hui : les relations entre les unités.

2.1 À propos de la numération avant la réforme et du rôle de la numération en unités

2.1.1 Un système pour désigner les nombres : la numération en unités

« La numération en unités » est donc un système particulier pour désigner les nombres. Il s'agit de les désigner en utilisant les mots « unités », « dizaines », « centaines », c'est-à-dire les noms des unités de la numération. Ainsi, parlera-t-on du nombre « six centaines trois unités ». Nous ne distinguons pas le fait d'écrire en lettres ou en chiffres le six et le trois. Ce système de désignation a différentes propriétés : il permet notamment de régulariser la numération orale. Ainsi, « trente » devient « 3 dizaines » (et « soixante-dix », « 7 dizaines »). Il n'est pas univoque, en ce sens qu'un nombre donné a plusieurs désignations dans la numération en unités : « 56 centaines » et « 5 milliers 6 centaines » désignent le même nombre. Il est également plus « souple » que la numération orale. Cette souplesse est probablement liée au fait qu'il n'est pas univoque. Ainsi, « dix cents » n'existe pas en numération orale. Quand on compte de cent en cent, après neuf cents, il y a mille, alors qu'en numération en unités, après « 9 centaines », il peut y avoir « 1 millier » et aussi « 10 centaines ». Ce peu de souplesse de la numération orale n'est pas spécifique de la langue française dans laquelle on utilise des mots différents, « cent » et « centaine », pour désigner respectivement le nombre à l'oral et le nom de l'unité. En anglais où on utilise le même mot « hundred », « ten hundreds » ne relève pas de la numération orale (on dit « one thousand ») mais bien de la numération en unités.

2.1.2 La théorie classique : deux parties imbriquées et complémentaires

Que ce soit dans le traité de Reynaud (Op. cité)[2] ou dans les manuels scolaires antérieurs à 1945, l'étude de la numération de position des entiers semble très stable. Nous identifions deux parties qui ont des dimensions mathématiques différentes dans l'exposé de la numération tel qu'il apparaît dans nos documents.

La première partie constitue un algorithme pour construire la suite des nombres. Elle utilise la numération en unités. On construit les nombres en organisant une collection. On trouve d'abord le discours suivant : « Pour former les nombres, on part de l'unité ; l'unité ajoutée à elle-même donne un nombre nommé *deux* (…) » On poursuit ainsi en ajoutant « une unité » à chaque nombre obtenu jusqu'au nombre « dix ». Ensuite, « la collection de dix unités forme un nouvel ordre d'unités, nommé dixaine[3] ». On poursuit en indiquant qu'on compte par dizaines comme on a compté par unités. Cela signifie qu'on compte une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, jusqu'à dix dizaines. À ce moment-là, on a donc construit les nombres de un à dix ainsi que les dix premières dizaines entières. La suite du discours consiste alors à combler les « trous » entre deux dizaines, en ajoutant les nombres de un à neuf. On a donc construit les nombres jusqu'à neuf dizaines neuf unités (et dix dizaines).

On poursuit en fabriquant une nouvelle unité : la centaine qui est à la fois dix dizaines et 9 dizaines 9 unités auxquelles on a ajouté 1 unité. Et on reprend le processus : on compte par centaines comme on compte par unités et dizaines. C'est-à-dire qu'on compte une centaine, deux centaines, jusqu'à dix centaines. On a alors construit les nombres de un à cent et les dix premières centaines entières. Le processus engagé pour les dizaines est poursuivi au niveau des centaines puisqu'on comble les « trous » entre deux centaines en ajoutant les 99 premiers nombres. Par exemple, entre trois et quatre centaines, on a : trois centaines et une unité, trois centaines et deux unités, …, trois centaines et une dizaine, trois centaines une dizaine et une unité, …. C'est-à-dire qu'entre deux centaines, on ajoute les nombres déjà construits. On poursuit ensuite le processus avec les milliers, etc.

Voici maintenant la deuxième partie de la théorie. À la construction algorithmique de l'ensemble des entiers s'ajoute l'élaboration de deux correspondances : l'une entre numération en unités et numération orale, l'autre entre numération en unités et numération de position.

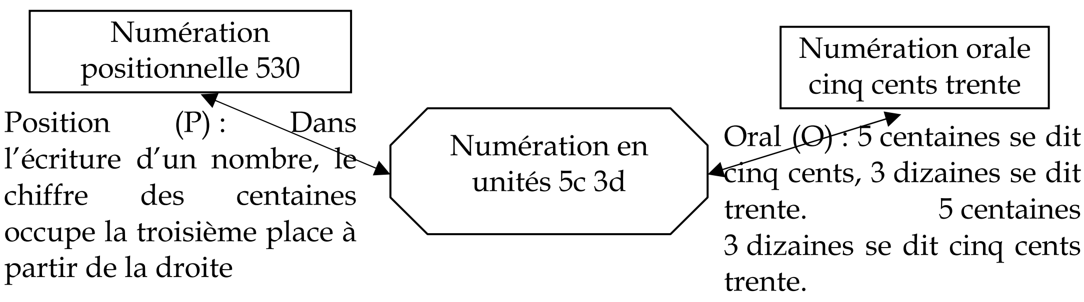
La première consiste en une traduction terme à terme de la numération en unités vers la numération orale : 5 centaines se dit « cinq cents », 3 dizaines se dit « trente » donc 5 centaines 3 dizaines se dit « cinq cent trente ».

La deuxième consiste en l'énoncé d'une correspondance entre les unités de la numération et la place des chiffres dans la numération de position : « On convint que de plusieurs chiffres mis à côté les uns des autres, le premier, à partir de la droite, exprimerait des unités du premier ordre, ou unités simples ; le deuxième, des unités du deuxième ordre, ou dixaines ; le troisième, des unités du troisième ordre, ou centaines ; et ainsi de suite ».

Nous voyons donc la première partie de la théorie de la numération comme une construction de la suite des nombres avec la numération en unités qui utilise deux types de discours fondamentaux :

- Relations entre unités (R) : 1 millier = dix centaines
- Comptage des unités (C) : On compte par centaines comme on a compté par unités.

Les deux autres discours (P et O) relient la numération de position et la numération orale à la numération en unités. Cette dernière apparaît alors comme un pivot.



[2] Les citations de ce paragraphe en sont extraites.

[3] Orthographe d'époque.

Soulignons que contrairement aux numérations positionnelle et orale, la numération en unités n'est probablement pas une pratique sociale.

2.2 Éléments sur l'enseignement de la numération de position aujourd'hui

Nous avons dit que le moment de la réforme est crucial pour comprendre la situation actuelle qui est en fait le produit d'évolutions continues depuis 40 ans. Pourtant, nous ne donnons pas d'indications précises sur ce qui s'est passé au moment de la réforme. En effet, si la mise à jour de ces éléments est déterminante sur le plan de la méthodologie de notre recherche, elle ne nous semble pas indispensable pour réfléchir à la formation des enseignants actuels.

2.2.1 La place des unités de la numération aujourd'hui, les ECPD

Pour montrer la place des unités de la numération aujourd'hui, nous proposons des extraits de manuels scolaires récents. Il s'agit du Nouvel Objectif Calcul CE2 (1995) et de Cap Maths[4] CE2 (2007).
Dans Le Nouvel Objectif Calcul CE2, nous nous intéressons à la deuxième leçon de numération de l'année (étape 4), elle est intitulée « Numération : groupements » (pp.14-15). Nous observons que la double page destinée aux élèves ne mentionne pas les unités de la numération. À la place, on a : la numération orale, cent et dix, et ce que nous avons appelé les *écritures chiffrées des puissances de dix 1, 10, 100, 1000* (ECPD). Le livre du maître (pp.27-30) (Annexe 1) est « conforme » au livre de l'élève puisqu'il ne mentionne pas davantage les unités de la numération (plus exactement, ces unités y sont utilisées à quelques reprises dans les locutions du type *compléter à la centaine supérieure*).
On observe à l'étape 4, le rôle des ECPD. En particulier, le calcul en ligne 100 +100 + 100 + 100 + 100 +100 +100 + 100 + 100 + 100 = 1000 remplace le discours classique (R) : « 10 centaines = 1 millier » et l'addition *implicitement* posée (ce qui permet à chaque chiffre de conserver sa place), 1000+1000+500 = 2500, remplace le discours classique (P) : « le chiffre des centaines (resp. des milliers) occupe la 3^e^ (resp. la 4^e^) position ».
Signalons que les unités de la numération et les relations entre ces unités apparaissent dans l'aide mémoire de la leçon (p.174). Ajoutons que la première leçon de numération de l'année (étape 2) « Numération : dénombrement » ne fait pas davantage référence aux unités de la numération (à l'exception d'une mention dans le livre du maître pour désigner les chiffres du nombre comme aide dans une tâche relative au repérage d'une règle dans une suite d'écritures chiffrées). Ces unités apparaissent (dans le livre du maître) dans la troisième leçon de numération intitulée « Numération : échanges » (étape 5) dont l'objectif est « grouper et échanger selon la règle « dix contre un », pour comprendre la numération écrite ». Le contexte est celui du boulier où « dix unités [s'« échangent »] contre une dizaine (de la 1re à la 2e tige), 10 dizaines contre 1 centaine (de la 2e tige à la 3e tige) […] ». Dans un exercice de la leçon, des échanges de monnaie apparaissent. Les unités de la numération désignent des positions et aussi des « valeurs » qui s'échangent.
Dans le manuel Cap Maths (2007) (Annexe 2), la première leçon (Unité 7 Séance 1) sur les nombres de 4 chiffres est consacrée au nombre mille. La relation 1 millier = 10 centaines n'y apparaît pas explicitement, le mot millier n'est ni dans le livre de l'élève, ni dans celui du maître.
On observe que les ECPD et la numération orale sont présentes contrairement aux unités de la numération et, même si ce qui permet de justifier que $1000 = 100 \times 10$ reste ambigu, la seule justification explicitement proposée est la « règle des zéros ». Nous considérons qu'elle remplace le discours classique (R). Signalons que le discours (R) apparaît dans le dico maths, Tempier (2009, p.57) conclut « nous n'avons pas trouvé non plus de référence à ces équivalences [les discours (R)] dans le manuel ou le guide du maître, ou d'activités qui pourraient y conduire. ».
La leçon suivante (Unité 7 Séance 2) est consacrée aux nombres supérieurs à 1000. Elle met en place des techniques pour obtenir une écriture chiffrée à partir de sommes proposées en ECPD :

[4] Pour cette étude, nous nous référons à Tempier (2009).

> « au début les calculs sont laissés à l'initiative des élèves. Certains peuvent poser des additions du type 10 000 + 10 000 + 10 000 + … (ce qui est assez fréquent), calculer des produits comme 4×10 000 (en prolongeant la règle des 0) ou répondre directement 40 000. On laissera se développer ces différentes pratiques, et ce n'est qu'au cours de la séance qu'est introduit le tableau de numération qui permet de trouver rapidement l'écriture du total des points. Mais il ne serait pas opportun de systématiser son utilisation, ce qui risquerait de conduire les élèves à ne plus réfléchir à la valeur des chiffres dans l'écriture du nombre ». (Cap Maths CE2 2007, livre du maître, p.150).

Tempier (2009, p.56) indique « Cette fois, l'ostensif « numération en unités » apparaît comme un objet de savoir qui permet de nommer les rangs, mais les décompositions » et « recompositions » sont associées aux ECPD et aux ECPDG [ECPD généralisées] ». Ce sont donc des règles de calcul qui permettent de justifier les écritures chiffrées et non des discours de type (P).
D'après notre étude, ces deux exemples sont révélateurs aux évolutions récentes de la place accordée aux unités de la numération : une quasi disparition des unités de la numération dans les années 70-80 avec un retour progressif mais partiel depuis. Cette disparition étant plus nette dans les relations entre les unités que dans la désignation des positions des chiffres, on parle donc souvent du chiffre des centaines sans avoir indiqué qu'une centaine, c'est dix dizaines.
Ces deux exemples montrent que la numération en unités est remplacée, en un certain sens, par les ECPD. Elle avait quasiment disparu et réapparaît avec une fonction différente, pour seconder les ECPD.

2.2.2 Des limites des ECPD

Sur le plan mathématique, les ECPD sont équivalentes aux unités de la numération. Cependant, du point de l'enseignement primaire, des limites apparaissent en particulier lorsqu'il s'agit de justifier certaines techniques. En effet, les ECPD font apparaître des besoins importants en terme de formalisme et de propriétés des opérations. Justifier une retenue dans une addition demande l'utilisation de parenthèses, de factorisations ; de même pour la « règle des zéros » (multiplication d'un nombre d'au moins deux chiffres non nuls par une puissance de dix). La justification de l'algorithme de l'écriture chiffrée avec les ECPD nécessite l'écriture de plusieurs lignes de calcul dont on peut affirmer qu'elles ne sont pas accessibles à la fin du cycle 3. Avec les unités de la numération, un enchaînement de discours permet de justifier toutes ces techniques avec très peu de formalisme.

2.3 Les relations entre les unités

Serfati (2005) écrit à propos de l'interprétation d'un nombre écrit 24579 « comme neuf unités à quoi s'ajouteront sept dizaines, etc. deux dizaines de milliers enfin. Si immédiate qu'elle nous paraisse aujourd'hui, cette interprétation aura cependant requis deux aspects distincts et liés, position et décimalité, dont la conjonction signifiante n'était nullement allée de soi des siècles durant ». Nous nous intéressons maintenant spécifiquement à la décimalité, à savoir donc, le fait que les unités successives de la numération sont liées par une relation de dizaine. À son propos, notre étude de manuels anciens nous a permis d'identifier un type de tâches : les conversions. Il n'existe quasiment plus aujourd'hui en numération, nous y reviendrons.

2.3.1 La structuration du type de tâches classique : les conversions

Pour présenter le type de tâches « conversions », nous nous limitons à une relation entre unités de la numération, nous étudions les tâches autour du discours technologique : un millier c'est dix centaines. Il s'agit donc de convertir des centaines en milliers (ou l'inverse).
Une synthèse de l'étude des manuels anciens nous permet de caractériser une progression dans le type de tâches au fur et à mesure des leçons de numération (et de système métrique) pour l'ordre donné (ici, les milliers) :
- dans la leçon « le millier » : par exemple, « combien faut-il ajouter de centaines à 200 pour faire un millier ? ». Il s'agit de travailler la relation de millier à centaines (ou de millier à dizaines) à un premier niveau de complexité : 10 pour 1 ou 100 ou 1 ;

- dans la leçon « les milliers » : par exemple, « combien 3 milliers font-ils de centaines ? ». Il s'agit de travailler la relation à un deuxième niveau de complexité : autour des relations du type X0 pour X ou X00 pour X.
- dans la leçon « entre deux milliers » : par exemple, « combien y a-t-il de milliers dans 35 centaines ? » (la réponse est 3 milliers 5 centaines ; la technique que nous avons reconstituée consiste à découper la tâche et à utiliser la leçon précédente : « 35 centaines » se décompose en 30 centaines et 5 centaines, qui font 3 milliers et 5 centaines). Il s'agit donc d'un troisième niveau de complexité qui porte simultanément sur plusieurs chiffres significatifs.
- enfin dans l'étude du système métrique : par exemple avec la leçon « le kilomètre », « écrire en hectomètres 3 km 5 hm ». On retrouve la complexité précédente avec un changement de grandeur manifesté par les unités métriques qui indiquent des « milliers » (kilo) et des « centaines » (hecto).
À cette progression dans les difficultés liées strictement à la numération s'ajoutent des variations dans les contextes et les ostensifs (systèmes de désignation). Il ne s'agit pas forcément d'une véritable progression, mais d'éléments qui permettent d'utiliser une même connaissance dans différents contextes. Nous avons retenu les éléments suivants qui nous semblent significatifs :
- Combien de centaines dans 3 milliers ? (décontextualisé, numération en unités)
- Combien d'enveloppes font 30 paquets de cent enveloppes ? (contexte évoqué, numérations de position et orale)
- Au cours d'une promenade, compter les bornes hectométriques entre deux bornes kilométriques (contexte matériel, numération métrique) ;
- Avec 1 kg de graines de betterave, combien un grainetier peut-il faire de sachets de 100 g ? (contexte évoqué, numérations métrique et de position).

2.3.2 Propriété de la troncature

Nous appelons propriété de la troncature, la propriété de la numération de position que nous formulons à l'aide d'un exemple : « le nombre de centaines » s'obtient en prenant tous les chiffres situés à gauche de celui des centaines (inclus).
On ne peut d'ailleurs exclure que cet énoncé soit parfois entendu comme une *définition* du « nombre de centaines ». Plus précisément, on pourrait définir comme suit « le nombre de centaines d'un nombre N » : c'est le nombre obtenu en prenant tous les chiffres situés à gauche de celui des centaines dans le nombre N (chiffre des centaines compris). Énoncé ainsi, le « nombre de centaines » est un objet lié à l'écriture positionnelle décimale et non aux relations entre les unités de la numération.

2.3.3 La faiblesse de la relation entre unités aujourd'hui, le « nombre de »

Parouty (2005) étudie les compétences des élèves actuels du cycle 3 en numération. Elle propose notamment aux élèves (CE2) de traiter la tâche suivante : « Pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ? » La réussite est de 10%.
Nous avons confirmé ou précisé ces résultats dans (Chambris 2008) avec les tâches (et les réussites) suivantes en fin de CM2 :
- Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ? (R = 20%, réponse 85 ou 86 = 39%)
- Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ? (R = 32%)
Ces éléments nous amènent à faire l'hypothèse d'une faiblesse des élèves dans la connaissance des relations entre unités de la numération. Par suite, nous avons voulu mieux comprendre la situation de l'étude de ces relations aujourd'hui.
Comme les unités de la numération sont peu présentes dans les manuels récents, *a fortiori* les relations entre ces unités ne sont pas toujours explicitées dans ces manuels. Elles sont donc absentes de certains manuels actuels du CE1 ou du CE2.
Dans les manuels actuels, nous n'avons pas trouvé de conversion formulée avec les unités (bien que la formulation ne soit pas véritablement celle d'une conversion, nous signalons une exception avec Cap

Maths CE2 2007 et les nombres de 3 chiffres). Il peut y avoir des tâches qui leur ressemblent, elles sont de deux ordres. Il peut s'agir de :
- faire fonctionner la propriété de la troncature, avec le « nombre de »,
- problèmes concrets d'échanges entre billets de 10 et 100 par exemple (très rares).
Ces relations semblent revenir progressivement après une quasi-élimination dans les années 70-80. Toutefois, elles apparaissent en général avec le « nombre de », qui a parfois l'air d'être le représentant exclusif de ces relations.
Tempier (2009) a étudié les pratiques de deux enseignants de CE2 en numération. Il observe que l'aspect décimal de la numération n'est quasiment pas traité par eux. Bien qu'il faille rester prudent sur la représentativité des enseignants étudiés, ces résultats auraient tendance à confirmer que notre étude de manuels postérieurs à la réforme est révélatrice de ce que font les enseignants actuels dans leur classe.

2.3.4 Le « nombre de » aujourd'hui : structuration

Nous nous intéressons aux évolutions des tâches autour du « nombre de ». Avant la réforme, le « couple », « nombre de / chiffre des », n'existe pas. On peut demander dans un exercice quel est le nombre de dizaines dans un nombre de la même façon qu'on demande dans un autre exercice combien de dizaines il faut pour faire le nombre. De même, on demande quel est le chiffre des dizaines comme on peut demander ailleurs quelles sont les plus hautes unités d'un nombre de 4 chiffres ou combien il faut écrire de zéros à droite du chiffre 4 pour que celui-ci représente des dizaines, des mille, des centaines.
En revanche, au début des années 70, on trouve le couple cité précédemment. L'introduction du mot NUMERATION dans MOTS III (APMEP 1976, pp. 2-3) se termine par des « questions d'auto-contrôle » (pour que les lecteurs auto-évaluent leurs connaissances). Parmi elles :

> Voici l'écriture 345 (en base dix). Quel est le chiffre des dizaines ? Quel est le nombre de dizaines du naturel ainsi représenté ?

La réponse est proposée quelques lignes plus loin :

> Chiffre des dizaines : 4. Nombre de dizaines : 34 (trente quatre). La question « Combien d'unités dans 345 ? » est ambiguë ; on devrait répondre : « trois cent quarante cinq » et non pas « Cinq ». (Le nombre des unités est trois cent quarante cinq ; le chiffre des unités est 5).

L'opposition « chiffre des / nombre de » apparaît donc ici comme un moyen de supprimer une ambiguïté, crime de la pire espèce en mathématiques modernes. En réalité, de 1970 à 1995, même le « nombre de » est rare (absent dans certains manuels, existant seulement en « calcul mental » ou dans des « mots croisés » dans d'autres). Les exercices sont stéréotypés puisque si l'on veut voir un type de tâches autour du « nombre de », il semble qu'on puisse dire que ce type de tâches est réduit couple de tâches « nombre de / chiffre des » qui se constitue alors en une sorte de dialectique. Dans certains manuels, on voit à cette époque se développer des discours sur le fait qu'un nombre s'écrit avec des chiffres sur le nombre de ces chiffres : par exemple le nombre 456 s'écrit avec 3 chiffres qui sont 4, 5 et 6. Nous n'excluons pas que l'idée qu'« un nombre, c'est quand il y a plusieurs chiffres » se soit consolidée à cette époque. Cette idée constitue un moyen didactique presque totalement efficace pour *distinguer* « chiffre » et « nombre » dans la dialectique annoncée.
À partir de 1995, dans la 2e édition d'ERMEL, les tâches autour du « nombre de » semblent se diversifier. Les exercices « élèves » du sujet 0 du ministère pour le « nouveau » CRPE (annexe 3) constituent un exemple dans lequel la technique de la « troncature » est mobilisée de façon de plus ou moins approfondie selon les exercices.
D'autres exercices demandent une adaptation de cette technique. Ils ne sont pas très répandus dans les manuels mais semblent être néanmoins de plus en plus fréquents : par exemple « Calcule : 3 centaines 21 dizaines » (Euro maths CE2, Hatier 2004).
Nous interprétons les transformations autour du « nombre de » comme une reconnaissance implicite de la nécessité de faire vivre les relations entre les unités, en numération. Dans quelle mesure ces transformations sont-elles adaptées aux besoins de l'enseignement ?

3 PREMIERS ÉLÉMENTS SUR LA FORMATION

Nous entamons maintenant une discussion sur la formation. Sur le plan méthodologique, précisons que si les résultats relatifs aux manuels scolaires ont été établis dans le cadre d'une recherche, il n'en va pas de même de ce qui concerne la formation. Il s'agit d'une démarche beaucoup plus empirique qui tente de s'appuyer, entre autres, sur nos résultats de recherche.
Dans ce paragraphe nous commençons par évoquer des éléments relatifs à la formation des PE1. Cette réflexion sur les PE1 nous permet de repérer certains raisonnements « d'élèves » et des résistances mais aussi des possibilités d'agir que nous utilisons ensuite comme des balises pour étendre à d'autres contextes de formation.

3.1 En préparation au concours PE

Dans le cadre de la préparation au CRPE, les étudiants sont amenés à étudier la numération de position tant sur le plan théorique que didactique. Sur le plan théorique, une partie du travail consiste à leur enseigner des rudiments sur les « bases », un autre volet consiste à les outiller pour traiter algébriquement des problèmes « théoriques », le plus souvent en base dix. Pour ce qui concerne les bases, outre la nécessité d'apprendre à traiter des tâches spécifiques pour le concours, un autre objectif est d'utiliser les bases pour permettre aux étudiants de prendre un peu de distance par rapport à la base dix. Sur le plan didactique, les étudiants peuvent être amenés à analyser des productions d'élèves ou des documents relatifs à l'enseignement actuel de la numération en base dix.

3.1.1 « Volet » théorique

Pour le travail en bases que nous introduisons souvent avec la situation « des moutons » d'Odette Bassis (1991) nous faisons produire aux étudiants des codes de plus en plus sophistiqués pour désigner le cardinal d'une collection (de moutons) *quand on ne sait pas compter au delà de quatre*. Les étapes sont généralement : écrire la quantité avec des mots, avec des dessins sans mots, avec seulement des chiffres. L'écriture avec les mots amène à se mettre d'accord sur une désignation verbale des différents groupements, par exemple : troupeau (pour un groupe de 4 moutons), bergerie (pour un groupe de 4 troupeaux), surperbergerie (pour un groupe de 4 bergeries). Si le contexte n'est pas celui des ovins, on peut dire : paquet, superpaquet, maxipaquet, etc.
Nous proposons aussi aux PE1 d'effectuer des conversions. Le dispositif que nous avons utilisé à plusieurs reprises relève de l'interrogation rapide (ardoise ou réponse à indiquer sur une petite feuille préparée à l'avance), par exemple « Combien 30 dizaines font-elles de centaines ? » (cf. annexe 6 pour d'autres exemples)
Nous indiquons maintenant des observations récurrentes et des éléments d'évolution du dispositif au fil du temps :
- difficulté de certains étudiants à proposer une réponse à la question, comme si elle ne leur « parlait » pas, comme si elle ne voulait rien dire ;
- une mise en commun rend en général les étudiants capables de répondre à la question.

Nous avons ensuite fait évoluer le dispositif de façon à expliciter les procédures de traitement de cette tâche. Il apparaît que dans leur immense majorité les étudiants mettent en place deux stratégies pour la traiter : une stratégie de type « troncature », ils disent qu'ils visualisent le tableau de numération dans leur tête ; une stratégie de type « multiplication + troncature », 30×10=300 (j'ajoute un zéro), puis troncature ou oral (3 cents, c'est 3 centaines). Il n'est pas rare que, dans un groupe de 30 étudiants, aucun étudiant ne propose de faire référence à la relation 10 dizaines = 1 centaine pour traiter la question. Nous avons tenté d'enseigner aux étudiants la technique classique : 30 dizaines, c'est 3 fois plus que 10 dizaines. Dix dizaines, c'est une centaine donc 30 dizaines, c'est 3 centaines. Il nous semble que beaucoup d'étudiants résistent.
Pour renforcer le lien avec les bases, nous avons souhaité faire évoluer notre dispositif. Le travail en bases n'est en effet pas propice aux conversions : « combien y a-t-il de groupes de quatre dans $(3213)_4$? ». En base 4, la réponse est 321 (elle peut s'obtenir directement en tronquant). Contrairement

aux conversions en base dix, cette connaissance ne nous semble pas prioritaire pour la formation des PE1. Par ailleurs, souvent des étudiants disent qu'ils ne voient pas le lien entre les bases et ce qu'ils savent sur les écritures chiffrées. Nous avons alors aménagé le dispositif de la façon suivante :

- travail en base quatre : les groupements ont des noms (cf. supra) et introduction de l'écriture positionnelle chiffrée ;
- questions sur les relations entre unités de la base 4, mais en base dix. Par exemple, combien de superbergeries avec 16 troupeaux ? etc. Les étudiants n'utilisent pas les propriétés positionnelles pour traiter la question mais les relations entre les groupements ;
- c'est seulement après qu'on les interroge sur la conversion « combien 30 dizaines font-elles de centaines » ?

Quand on le leur suggère, les étudiants font le rapprochement avec le travail fait en bases et il leur semble acceptable de faire référence aux relations entre les unités pour traiter cette dernière tâche. Ils semblent donc renoncer, provisoirement (ce qui est notre but), à la propriété de la troncature. Finalement, le détour par les relations entre unités, en bases, semble permettre une déconstruction de la technique de la troncature en base dix.

Nous réinvestissons aussi la numération en unités dans la relation : $(abc)_{\text{dix}} = 100\,a + 10\,b + c$. Sans que nous ayons réussi à percevoir ce qui pose problème avec elle, nombre d'étudiants ne parviennent absolument pas à se l'approprier. Nous avons utilisé le passage par les unités de la numération puis les conversions :

$(abc)_{\text{dix}} = a$ centaines b dizaines c unités puis convertir en unités « simples » cette expression. Ce qui donne : $(abc)_{\text{dix}} = a \times 100 + b \times 10 + c$ unités.

Certains étudiants sont manifestement sensibles à cette médiation par les unités de la numération.

3.1.2 « Volet » didactique

Sur le plan de la préparation didactique au concours, la situation est pour nous plus délicate. Nous utilisons essentiellement des documents institutionnels, en voici deux. Le premier (Annexe 3) est un extrait d'un « sujet 0 » proposé par le ministère en 2006 (rénovation du concours) ; le second (Annexe 4) date de 2000, c'est une analyse de travaux d'élèves donnée dans l'académie d'Aix-Marseille, nous lui adjoignons un extrait du corrigé proposé par les annales de la COPIRELEM.

Une analyse des exercices du sujet 0 proposés montre que l'ensemble (exercices proposés aux élèves, questions aux candidats) peut être traité en faisant uniquement référence à ce que nous avons appelé propriété de la troncature. Ces exercices et les questions ne sollicitent pas explicitement les relations entre unités.

Nous prenons maintenant l'analyse de travaux d'élèves. Dans la praxéologie classique, les décompositions d'Isabelle ou Claire n'apparaissent pas comme un progrès par rapport à celle de Mickaël. Comme le prouve la praxéologie classique, les ECPD ne sont pas un ostensif nécessaire à l'apprentissage de la numération de position. Il est fort probable que si on ne les enseigne pas aux élèves, ces décompositions n'apparaissent pas. Ces analyses de travaux d'élèves sont susceptibles de constituer un obstacle à la formation à la numération en unités des enseignants débutants.

La question de la place institutionnelle accordée aux ECPD est évidemment centrale du point de vue de la formation à l'enseignement de la numération. Elle est notamment sensible dans la préparation au concours où il s'agit notamment d'apprendre à se conformer aux instructions officielles.

3.2 Des questions pour la transposition en formation

Que faire de ces éléments pour la formation ?

3.2.1 Que faire en PE1 ?

Nous avons vu que les « bases » ne permettent pas *a priori* de revisiter la question des relations entre unités de la numération (pas plus pour les élèves de primaire en 1970 que pour les PE1 des années 2000). Toutefois, certains dispositifs utilisant les bases et les relations entre unités peuvent sans doute y contribuer.

Par ailleurs, le moment de préparation au concours n'est probablement pas un bon moment pour introduire des pratiques qui ne sont pas préconisées par l'institution ! Toutefois, existe-t-il un *bon* moment pour ce faire ?

3.2.2 Les relations entre unités et le « nombre de »

Nous pensons que la résistance des étudiants à faire fonctionner les relations entre unités de la numération pour traiter les conversions mérite d'être remarquée. Il nous semble indispensable de renforcer la maîtrise de ces relations chez les élèves et l'aspect « décimal » de la numération dans l'enseignement.
Les éléments que nous avons sur les connaissances des élèves actuels nous laissent penser que la maîtrise des relations entre unités est complexe. Nous faisons l'hypothèse qu'elle constitue une dimension délicate, difficile, de l'apprentissage de la numération. Nous voyons dans la structuration ancienne du type de tâches « conversions » une organisation temporelle adaptée pour travailler cette complexité et il n'est pas sûr que les évolutions récentes autour du « nombre de » soient pertinentes de ce point de vue. En effet, il nous semble que tant qu'on peut utiliser la propriété de la troncature, on ne travaille pas la spécificité de chacune des relations (relation de dizaine entre millier et centaine, de centaine entre millier et dizaine, etc.). Pour nous, un objectif serait d'importer d'autres techniques que celles de la troncature pour traiter ces tâches.
Par ailleurs, les tâches du type « nombre de » ont pour caractéristique de transformer « certaines quantités d'unités de certains types » en un « nombre » (ou l'inverse) ; les relations entre unités sont plus générales, il s'agit de transformer « certaines quantités d'unités de certains types » en « certaines quantités d'unités d'un ou plusieurs autres types ».
Aussi, en l'absence d'une progression récente convaincante, nous souhaitons privilégier la progression classique qui repose sur les relations en jeu et leur nombre.

3.2.3 Thèmes et variations

Nous commençons par présenter les objets qu'il nous semble nécessaire de valoriser en formation, nous en indiquons des raisons.
La priorité nous semble être la restauration des relations entre les unités (aspect décimal de la numération). L'état de ces relations qui se dissolvent au mieux dans le calcul nous semble particulièrement critique. Il ne nous semble pas abusif d'attribuer tout ou partie des difficultés des élèves repérées par Parouty (2005) à la méconnaissance de ces relations par les élèves. Pour les raisons que nous avons déjà indiquées, le moyen que nous privilégions pour les restaurer est la « réhabilitation » des conversions.
Par suite, il semble nécessaire de revaloriser la numération en unités. Sans elle, il n'y a pas vraiment de conversion possible et l'étude de la numération risque de se réduire à une suite de calculs sur lesquels il est extrêmement difficile de mettre des mots.
Une dernière dimension consiste à réintroduire les explications « classiques » qui impliquent la numération en unités pour les différents types de tâches. Il nous semble en effet que la diversité des contextes dans lesquels la numération en unités est utilisée permet de renforcer son implantation, notamment pour les conversions.
Finalement, tout en prenant en compte les évolutions de l'enseignement des mathématiques en primaire depuis 40 ans, un de nos objectifs en formation consiste à vouloir introduire dans les pratiques des enseignants un certain nombre d'objets anciens qui n'existent plus dans l'enseignement actuel, ces objets nous semblant être pertinents pour une meilleure connaissance de la numération.

4 FORMATION PROFESSIONNELLE : TÂCHES, RÉACTIONS ET RÉSISTANCES

Après les formations en PE1, nous nous proposons maintenant d'évoquer plusieurs situations de formation professionnelles de professeurs d'écoles que nous avons mises en oeuvre. Si ces formations ont des fondements théoriques communs, elles sont cependant pensées en fonction des publics auxquels elles sont destinées : formation initiale en alternance (PE2), néo-titulaires 1ère année (NT1), formation continue (FC). Le but est de montrer à la fois des tâches proposées, des réactions et, le cas échéant, des résistances ou des obstacles que nous avons rencontrés.

4.1 Tâches proposées

Il s'agit donc d'une part de travailler au niveau des explications (technologique) pour renforcer la numération en unités qui est bien davantage présente dans les explications que dans les tâches existant « dans la société » ; d'autre part de proposer des tâches, notamment pour travailler les relations entre unités.

4.1.1 Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

Nous avons utilisé à plusieurs reprises un même dispositif. Nous proposons aux enseignants plusieurs tâches sur le même modèle. Ceci nous permet à la fois d'accéder (un peu) aux pratiques des enseignants et, peut-être, d'agir sur elles. Nous leur demandons de dire quelles explications ils donneraient à leurs élèves pour traiter certaines tâches de numération. Les tâches proposées sont très standard (Annexe 5).
Notre étude de manuels nous incite à faire l'hypothèse que les explications proposées devraient être variées car significatives du moment où les enseignants se sont formés. Par ailleurs, il est bien possible que des enseignants soient démunis pour donner des explications relatives à certaines tâches. Nous donnons quelques exemples de réponses.
Nous avons rencontré des collègues enseignants qui ont affirmé qu'en formation (probablement vers les années 70-80), on leur avait « interdit » d'utiliser ce que nous appelons la numération en unités. Majoritairement, pour *expliquer* le « nombre de », les collègues disent qu'ils « coupent » le nombre dans le tableau de numération. Pour expliquer la retenue dans l'addition, beaucoup d'arguments reposent sur l'utilisation d'un papier quadrillé qui permet de « justifier » d'écrire un seul chiffre par colonne.
Précisons que nous avons repris ce dispositif pour l'atelier de la COPIRELEM. Nous n'avons pas recueilli la diversité observée en formation. Par ailleurs, pour certaines explications, la numération en unités est peut-être bien davantage utilisée par les formateurs que par les enseignants. En revanche, les ECPD semblent être bien davantage utilisées par les enseignants que par les formateurs.
Les réactions des formés aux explications par la numération en unités sont diverses. En effet, ils disposent souvent d'explications, véhiculées par les livres. Par exemple, 100 est plus grand que 90 car « 100 est plus long que 90 »[5]. Avec la numération en unités, on peut : lire 100 comme une centaine, 90 comme 9 dizaines, utiliser la relation entre unités (une centaine, c'est dix dizaines), puis conclure en comparant neuf et dix dizaines. Le gain n'est pas évident *a priori*.
Il semble toutefois que l'évocation des techniques qu'il faudra mettre en place avec les décimaux peut faire évoluer certaines résistances. En effet, beaucoup de ce qui repose sur l'algorithme de l'écriture chiffrée sera mis en défaut avec les décimaux. Si cet argument semble avoir fonctionné auprès de NT1, des PE2 ont semblé plus réticents arguant du fait que « quand nous sommes au CE1 ou au CE2, le CM1 ou le CM2…. C'est loin ! »

4.1.2 Des conversions

Nous proposons aussi aux enseignants des tâches qu'ils pourraient proposer à leurs élèves. Nous leur demandons alors de façon systématique ce qu'on apprend avec ces tâches. Dans ce cadre, nous proposons des conversions. (Annexe 6)
Nous avons introduit du matériel multibase pour travailler les conversions. Nous présentons d'abord les différents groupements et les relations entre les objets. Nous utilisons ensuite une représentation en perspective du matériel imprimée sur un format A4 (Annexe 7). Chaque formé dispose d'un feutre effaçable et d'une pochette plastique transparente pour glisser la feuille A4.
Nous proposons alors par exemple d'entourer une « quantité » dictée : « entourer 41 dizaines (de cubes) ». Signalons que cette tâche n'est pas réussie par tous les PE2.

[5] Cette justification est souvent appuyée par des arguments relatifs à l'algorithme de l'écriture chiffrée.

Nous avons mis en place un petit dispositif matériel avec une règle du jeu : on dispose d'étiquettes « unités » comportant les noms des unités de la numération et d'étiquettes « jetons » comportant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Le matériel à disposition (absence du 0, en particulier) induit assez naturellement une règle du jeu : une unité de la numération est précédée d'un seul chiffre. Les formulations telles que : 4 dizaines 5 unités (ou 5 unités 4 dizaines) sont autorisées mais pas 45 unités.
On peut par exemple demander d'indiquer combien de cubes sont entourés lorsque par exemple, 10 barres de dix, 13, 30, puis 35 sont entourées ce qui donne respectivement 1 centaine, 1 centaine 3 dizaines, 3 centaines, puis 3 centaines 5 dizaines.
Nous avons proposé cette tâche pour le cycle 2 avec deux types de nombres : ceux de la forme X0 dizaines et 1X dizaines. On entoure par exemple 30 (respectivement 16) barres de dix cubes et on demande combien de dizaines de cubes, puis combien de centaines de cubes sont entourées. Elle a été très diversement appréciée, certains collègues disant qu'il s'agit d'un travail pour le cycle 3. En revanche, d'autres ont suggéré pour favoriser l'entrée dans la tâche (CP) d'entourer par exemple 2 barres de dix et 10 cubes isolés. On peut alors demander combien de dizaines de cubes sont entourées. Le fait de réserver cette tâche pour le cycle 3 nous semble problématique : quand et comment travaille-t-on la relation entre dizaine et centaine au cycle 2 ?
Nous avons souvent proposé une adaptation de la tâche « les pirates » (Parouty 2005) : « Dans mon jardin j'ai enterré des pièces d'or. Je veux les transporter ailleurs avec ma brouette. Je peux en prendre 100 000 à chaque tour. J'ai enterré 60 148 020 pièces. Combien de tours de brouette dois-je faire au minimum pour tout transporter ? » On rencontre toujours des étudiants ou stagiaires en plus ou moins grand nombre qui indiquent qu'il faut faire 61 ou 62 voyages. C'est une tâche de type « nombre de » et comme nous l'avons signalé précédemment, les tâches de conversions nous semblent à privilégier dans un premier temps. Toutefois, cette tâche peut être l'occasion de faire une synthèse dans laquelle on fait fonctionner le même type de propriété sur chaque chiffre.

4.1.3 Autres tâches faisant appel à la numération en unités

En utilisant le matériel « jetons » et « unités », nous proposons aussi des tâches qui ne font pas nécessairement fonctionner les relations entre unités mais les relations entre numération orale et numération en unités. Il peut s'agir :
- d'entourer une quantité de cubes donnée en numération orale (trois mille huit cent sept cubes),
- d'écrire avec les étiquettes « jetons » et « unités » un « grand nombre » donné oralement,

Nous demandons aussi d'effectuer des tâches de dénombrement sans qu'il y ait de mise en relation des unités (par exemple, un nombre de cubes est donné en chiffres et il faut entourer les cubes ou l'inverse).
Enfin nous faisons travailler la technique opératoire de l'addition. Pour permettre un détour et éviter tout recours aux écritures chiffrées, nous dictons deux nombres (numération orale) qu'il faut « faire » avec les étiquettes « jetons » et « unités » (nous avons utilisé « cent quatre vingt mille sept cent quatre vingt treize » et « vingt mille quatre cent soixante »). Il faut ensuite les additionner en manipulant les étiquettes. La retenue du rang des dizaines ne pose pas de problème. Ce sont les 11 (ou 12) centaines qui occasionnent les difficultés. Lorsque nous avons proposée cette tâche en formation initiale ou continue, il y a toujours eu des enseignants (ou étudiants) pour faire porter la retenue sur les dizaines de milliers, première unité présente dans les nombres après les centaines. Ils ne voient pas qu'il faudrait introduire une nouvelle étiquette « unités », celle des « milliers ».
Nous considérons que cette tâche est un moyen de consolider la technique opératoire de l'addition et la numération des entiers au CM. Elle est diversement accueillie par les enseignants, certains (peut-être ceux qui ont échoué) estiment qu'il n'est pas nécessaire d'essayer déstabiliser les connaissances des élèves.

4.2 Variations dans les mises en œuvre

Selon les publics ou le contexte de la formation nous n'avons pas toujours organisé les séances de la même façon.

Avec des PE2, nous avons souvent proposé un très petit nombre de tâches : notamment, « Entourer 41 dizaines », « Comment expliquer que 100 est plus grand que 90 ? » Nous avons aussi présenté explicitement le type de tâches conversions qui n'est pas forcément bien distingué du « dénombrement ». En revanche, en formation continue, nous avons plutôt tendance à visiter un grand nombre de tâches et d'explications.

4.3 Retour sur une formation continue

Bien que nous n'ayons pas mis en place de dispositif d'évaluation de nos formations, nous avons eu l'occasion d'avoir un retour sur les effets de l'une d'elles.

4.3.1 Bilan

Nous avons eu accès en fin d'année scolaire aux évaluations mises en place, après leur séquence d'enseignement sur la numération, par une partie des enseignants ayant suivi la formation en début d'année scolaire. Il ressort que si les enseignants ont introduit du dénombrement de multibase – cas simple, sans nécessité de mettre en relation les unités –, l'aspect « relations entre unités » apparaît dans le meilleur des cas sous la forme « nombre de » et n'apparaît pas dans plusieurs des évaluations auxquelles nous avons eu accès…

4.3.2 Proposition de l'atelier

Au cours de l'atelier, ce dernier point a été évoqué. La dimension « relation entre unités » (aspect décimal de la numération) est apparue essentielle à la plupart des participants. Nous avons réfléchi à un moyen de faire « pénétrer » cette dimension dans les pratiques. Il a été proposé d'introduire une tâche dans les formations : « à quoi servent les relations entre unités ? », « pour quelles tâches sont-elles utiles ? »
Les enseignants disent que les relations entre unités, c'est « difficile ». Il nous faut signaler qu'une des raisons des résistances des enseignants nous semble être le fait que la numération en unités n'est pas une pratique sociale. Nous pensons qu'ils ne voient pas alors nécessairement l'utilité de l'enseigner aux élèves. Dans les dispositifs que nous avons proposés, la numération en unités est nécessaire au niveau des « justifications » et mais elle n'est pas forcément nécessaire pour « réussir » les tâches, c'est-à-dire pour les techniques.

4.4 Pour poursuivre, apports de l'atelier de la COPIRELEM

L'utilisation de la monnaie est revenue à plusieurs reprises lors de l'atelier comme un prolongement nécessaire. Par exemple « valoriser l'aspect échange, avec la monnaie ». À ce propos, nous voulons souligner deux éléments.
Notre recherche sur les manuels scolaires nous a permis d'identifier que la dialectique « groupement / échange » est une invention de la réforme. Elle n'existe pas avant. Au moment de la réforme elle permet d'accompagner les diverses manipulations avec les différents types de matériels introduits à l'époque pour faire « manipuler les élèves ».
Avant la réforme, on peut travailler avec la monnaie. Cette grandeur apparaît alors comme une grandeur parmi d'autres : la longueur (on travaille alors souvent le décamètre comme dizaine de mètres, etc.), la capacité, etc. On peut alors évoquer les questions des échanges, comme spécifiques à la monnaie, à cette grandeur. Nous avons identifié deux cadres dans lesquels les « échanges » interviennent : quand il faut faire des sommes inférieures à dix, il s'agit d'apprendre la valeur des pièces et certaines équivalences. Un autre contexte est celui des échanges de matériel : on échange 4 chemises à 35 francs contre… Il s'agit de problèmes portant sur les quatre opérations.
Il est clair qu'on peut travailler la numération avec la monnaie, c'est alors la grandeur « valeur » qui est en jeu. Néanmoins, les questions de conservation nous semblent devoir être travaillées avant celles liées à la numération. Cette question de conservation apparaît d'ailleurs aussi, mais plus discrètement, dans les manipulations liées au multibase : elles sont accessibles à partir du moment où les élèves sont

convaincus qu'il y a autant de cubes dans une barre de dix que dans dix cubes et dans la réversibilité de la transformation, que le fait de grouper les cubes ne modifie pas leur quantité.
Enfin, pour la formation d'adultes analphabètes qui ont une grande pratique de la monnaie, cette pratique pourrait servir d'appui pour construire des connaissances plus « théoriques » en lien avec la numération en unités.

5 CONCLUSION, QUESTIONS OUVERTES

La numération de position a beaucoup évolué depuis 40 ans. L'étude de la situation actuelle montre des faiblesses qui se manifestent clairement au niveau de l'aspect « décimal ». Notre recherche nous donne des pistes pour agir en formation. Nous avons envisagé des modifications assez globales : en particulier au niveau des « explications ».
Un problème qui se pose à nous est celui du « relais ». Nous l'avons évoqué avec la formation à la didactique de nos PE1. Plus généralement, quelle est la pertinence d'une formation de 3 à 6 heures sur un objet aussi gros que la numération de position ? Peut-on former sur ce thème des professeurs, notamment débutants mais pas seulement, alors qu'il n'existe pas de document institutionnel pouvant relayer le discours véhiculé dans la formation ?
En effet, dans quelle mesure, un enseignant peut-il modifier sa pratique en y introduisant des « objets » pour lesquels les relais sont quasiment inexistants tant sur le plan institutionnel – pas d'accompagnement par les programmes des modifications suggérées par exemple –, que sur le plan matériel – absence de supports pour l'enseignement notamment –.
N'y aurait-il pas alors quelque danger à déstabiliser les pratiques d'enseignants. Il est clair que des enseignants, qui souhaitent bien faire, peuvent lorsqu'ils rentrent de formation ne plus oser faire ce qu'ils faisaient avant d'y aller sans savoir véritablement quoi faire à la place. Dans ces conditions, le remède peut être pire que le mal.
Peut-être faut-il chercher à agir beaucoup plus localement que nous ne l'avons fait.

6 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

APMEP (1976) ; *Mots. T. 3 : vocabulaire de l'enseignement des mathématiques ;* Num. 015 ; Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), Paris

Bassis O. (1991) ; *Mathématiques : quand les enfants prennent le pouvoir, des démarches d'auto-socio-construction pour l'Ecole*, G.F.E.N.

Bezout, Reynaud (1821) ; *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, par Bezout ; avec des notes et des tables de logarithmes, par A.A.L.Reynaud. ;* consulté sur Internet le 21/12/2007, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table

Chambris C. (2008) ; *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* ; Thèse de doctorat ; Université Paris-Diderot (Paris 7) http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/fr/

Chambris C. (2009) ; Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2e et 3e années de primaire) ; *Actes du colloque Didirem.*

Chevallard Y. (1992) ; Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique ; *Recherches en didactique des mathématiques* ; 12/1 ; 73-111

Parouty V. (2005) ; Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres* ; IREM de Toulouse

Serfati M. (2005) ; *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, éditions Pétra.

Tempier F. (2009) ; *L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants*, Cahiers de Didirem, n°60, IREM Paris 7

Travailler l'échange « 10 gabarits de 100 carreaux, c'est 1 000 carreaux » en faisant un arbre de calcul ou une addition en ligne.

100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100
200 200 200 200 200
400 400
800
1000

Conclure : « 10 fois 100, c'est 1 000. »
Un gabarit C peut être réalisé en scotchant 10 gabarits B pour obtenir le gabarit 1 000.
Les enfants sont toujours surpris par le nombre important de carreaux obtenus.
25 gabarits de 100, c'est :
10 gabarits de 100 ⟶ 1 0 0 0
10 gabarits de 100 ⟶ 1 0 0 0
5 gabarits de 100 ⟶ 5 0 0
25 gabarits de 100, c'est : 2 5 0 0 carreaux
Cette activité permet le passage au millier pour lequel certains enfants éprouvent encore des difficultés.

Conclure avec les enfants
Les groupements d'objets par 10, 100, 1 000 facilitent le dénombrement : ils évitent de compter un par un et conduisent à un résultat qui donne directement l'écriture du nombre.

EXERCICE 1

Réinvestir les acquis de la découverte.

- Lecture de la consigne et des informations données par l'exercice

Mettre des gabarits à la disposition des enfants en difficulté.
Conseiller aux enfants de rechercher tout d'abord l'écriture additive avant de donner le nombre de carreaux.
Exemple : 4 gabarits de 100 et 8 gabarits de 10 c'est : 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 400 + 80 = 480

- Travail individuel
- Correction collective

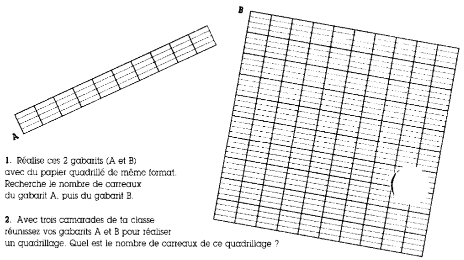
Utiliser le matériel si nécessaire ou les écritures additives.
Certains enfants peuvent proposer des écritures multiplicatives du type (4 x 100) + (8 x 10). Insister sur l'aspect efficace de telles écritures.

Numération : groupements

4 Numération : groupements

Privilégier les groupements par dix ou par cent pour dénombrer.

Découverte



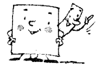
1. Réalise ces 2 gabarits (A et B) avec du papier quadrillé de même format. Recherche le nombre de carreaux du gabarit A, puis du gabarit B.
2. Avec trois camarades de ta classe réunissez vos gabarits A et B pour réaliser un quadrillage. Quel est le nombre de carreaux de ce quadrillage ?
3. Si douze élèves de la classe réunissent leurs gabarits, quel sera le nombre de carreaux du quadrillage obtenu ?
4. Si tous les élèves de la classe réunissent les gabarits A, quel sera le nombre de carreaux du quadrillage ?
5. Et si vous réunissez tous les gabarits B ?

AIDE-MÉMOIRE N° 2 - PAGE 174

Exercices et problèmes

1 Pour compter les carreaux de différents quadrillages, on a utilisé les gabarits suivants :

8 gabarits de 10 = ...
7 gabarits de 100 = ...
12 gabarits de 10 = ...
14 gabarits de 100 = ...



4 gabarits de 100 et 8 gabarits de 10 = ...
15 gabarits de 100 et 3 gabarits de 10 = ...
9 gabarits de 100 et 12 gabarits de 10 = ...
18 gabarits de 100 et 11 gabarits de 10 = ...

Quel est le nombre de carreaux de chaque quadrillage ?

- Travail individuel

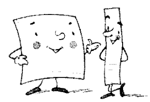
Cette activité demande des qualités d'organisation et d'adresse manuelle car il est nécessaire de placer des repères qui matérialisent les différents déplacements des gabarits. Le nombre des carreaux de la double page sera noté sous forme additive correspondant aux déplacements successifs des gabarits puis sous la forme canonique.

- Correction individuelle

Numération : groupements

CALCUL RÉFLÉCHI
Jeu du Furet de 100 en 100, en croissant, en décroissant. Compléments aux dizaines.

Utilise les gabarits A et B de la *découverte* pour rechercher le nombre de carreaux d'une double page de ton cahier.

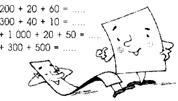


Complète les égalités :

60 + ... = 100
30 + ... = 100
50 + ... = 100
200 + ... = 1 000
500 + ... = 1 000
100 + ... = 1 000

Calcule les sommes :

500 + 200 + 20 + 60 = ...
300 + 300 + 40 + 10 = ...
2 000 + 1 000 + 20 + 50 = ...
1 000 + 300 + 500 = ...



5 Regroupe les nombres pour calculer le plus rapidement possible.

300 + 30 + 600 = 30 + 900 = 930

600 + 8 + 20 + 200 + 20 = ...
7 + 50 + 3 + 20 + 500 = ...
1 000 + 60 + 2 000 + 40 = ...
300 + 9 + 200 + 3 000 = ...

Écris une décomposition des nombres suivants :

712 ; 1 527 ; 980 ; 2 095 ; 5 137 ; 4 978

Puis range-les dans l'ordre décroissant.

Complète les décompositions :

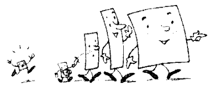
4 842 = 4 000 + ... + 40 + ...
2 064 = 60 + ... + 4
3 940 = 40 + 3 000 + ...

Compare les nombres (= , < , >) .

4 081	1 048	1 807	1 708
2 164	4 612	681	816
975	759	1 207	2 107

9 Écris ces nombres dans l'ordre croissant :

3 142 ; 2 413 ; 3 412 ; 2 314 ; 1 342 ; 3 124 ; 2 143 ; 1 234 ; 3 214.



10 Observe la règle et continue :

63 ; 68 ; 73 ; 78 ; ....
41 ; 241 ; 441 ; ....
136 ; 156 ; 176 ; ....
314 ; 364 ; 414 ; 464 ; ....

CALCUL RAPIDE

Complète les égalités

200 + 100 + 300 = ...
500 + 200 + 50 = ...
20 + 60 + 30 = ...
80 + 20 + 50 = ...
300 + 300 + 600 = ...
500 + 500 + 500 = ...

Mettre du matériel de numération ou des gabarits à la disposition des enfants qui en auraient besoin.

- Correction individuelle

EXERCICE 4 du livre *(3 du fichier)*

Grouper pour calculer.

Annexe 2 : extrait du livre du maître du manuel Cap Maths CE2 (Hatier 2007)

Unité 7, Séance 1

APPRENTISSAGE
Le nombre mille

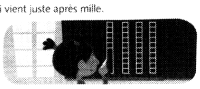
– Connaître le nombre 1 000 et ses relations avec d'autres nombres.

Chercher **manuel p. 62 questions 1 à 5**

Les élèves répondent à différentes questions qui permettent d'envisager l'écriture en chiffres de mille et ses relations avec d'autres nombres, notamment avec 10 et 100 et avec 25, 50, 250 et 500.

Chercher Mille

1. Écris mille en chiffres.
2. Écris en chiffres et en lettres le nombre qui vient juste avant mille.
3. Écris en chiffres et en lettres le nombre qui vient juste après mille.
4. Maïa dessine des colonnes de dix carrés. Combien doit-elle dessiner de colonnes pour obtenir mille carrés ?



5. Sur une grande feuille, trace avec un camarade une ligne brisée de mille millimètres.

INDIVIDUEL / ÉCRIT

1 Mille, son écriture, ses « voisins »

- Demander aux élèves une réponse individuelle et rapide aux **questions 1, 2 et 3**.
- Recenser et faire valider les réponses. Il y a plusieurs manières de trouver les nombres qui précèdent et suivent 1 000 :

– en observant la numérotation des pages d'un livre de plus de 1 000 pages (un dictionnaire par exemple) ;

– en utilisant deux compteurs en carton, mis bout à bout, et en prolongeant aux nombres de 4 chiffres le fonctionnement connu pour les nombres de 3 chiffres ;

– en retranchant ou en ajoutant 1 au nombre 1 000, avec une calculette.

> Comme le nombre 100, **le nombre 1 000** joue un rôle important dans la compréhension du système de numération écrite (découpage en classes de trois chiffres), ainsi que dans celle du système de désignation orale où mille joue un rôle clef. Plusieurs « petites » activités permettent ici une première familiarisation avec le nombre 1 000, avant d'entreprendre une étude plus structurée du système d'écriture des nombres « de plus de 3 chiffres ».

ÉQUIPES DE 2 / ÉCRIT

2 Mille petits carrés

- Demander une réponse, par deux, à la **question 4**.
- Après une mise en commun des procédures, garder une trace écrite collective des procédures les plus caractéristiques :

– 1 000 = 10 × 100 (il faut dessiner 100 rangées de 10 carrés), avec éventuellement utilisation de la règle des 0 ;

– comptage de 10 en 10, puis de 100 en 100…

ÉQUIPES DE 2 / ÉCRIT

3 Une ligne de mille millimètres

- Demander une réponse, par deux, à la **question 5**.
- Recenser les procédures. Certaines peuvent être laborieuses comme par exemple le dénombrement des millimètres du double décimètre avec report ; d'autres peuvent utiliser ce qui a été travaillé précédemment, comme par exemple les équivalences entre 1 cm et 10 mm et entre 1 m et 100 cm.

> On laissera chaque groupe d'élèves choisir sa procédure, sans provoquer de mise en commun trop rapide.
>
> Les erreurs peuvent provenir d'une mauvaise utilisation des équivalences entre unités. Le retour à leur signification sur le double décimètre peut aider certains élèves.

INDIVIDUEL / ÉCRIT

Entraînement **manuel p. 62 exercices 6 à 10**

Exercices

6. Dans une école, lorsque tous les enfants lèvent tous leurs doigts, cela fait mille doigts levés. Combien y a-t-il d'enfants dans l'école ?
7. Un siècle, c'est 100 ans. Combien faut-il de siècles pour faire un millénaire ?
8. Dans mille :
   a. combien de fois y a-t-il 200 ?
   b. combien de fois y a-t-il 50 ?
   c. combien de fois y a-t-il 25 ?
9. Combien faut-il de boîtes pour emballer mille chaussures ?
10. Trouve les calculs qui ont pour résultat le nombre mille. Avec les lettres de ces cases, écris un mot que tu connais.

A 50 x 4	C 100 x 6	M 500 x 2	L 4 x 250
T 250 x 2	E 100 x 10	V 300 x 3	I 5 x 200
B 25 x 20	E 200 x 4	N 10 x 10	P 100 x 0
O 20 x 30	F 25 x 4	L 25 x 40	R 40 x 20

Les élèves traitent certains de ces exercices, soit librement selon le temps dont ils disposent, soit en fonction des indications de l'enseignant.

Exercice 6 Il peut être rapproché de la question 4 et revient à se demander combien il y a de fois 10 dans 1 000.

Exercice 7 Résoudre cet exercice revient à se demander combien il y a de fois 100 dans 1 000 ?

Exercice 8 Certaines procédures peuvent s'appuyer sur des relations connues, comme le fait que 25, 50 et 200 sont respectivement le quart, la moitié et le double de 100.

Exercice 9 On peut faire préciser que, dans chaque boîte, il y a 2 chaussures.

Exercice 10 Le mot « mille » peut être écrit avec les lettres sélectionnées mises en ordre.

APPRENTISSAGE

Nombres supérieurs à 1 000 (1)

– Comprendre les écritures de nombres au-delà de 1 000 et pouvoir les comparer.
– Exprimer ces nombres à l'aide de décompositions du type : 2 540 = 2 × 1 000 + 5 × 100 + 4 × 10.

Chercher **manuel p. 63 question 1 et règle du jeu**

Les élèves doivent essayer de marquer le maximum de points en choisissant un nombre de cartes, fixé par un jet de dé, parmi des cartes rapportant 1 point, 10 points, 100 points, 1 000 points, 10 000 points.

Chercher Au-delà de 1 000

1. Fais une première partie du jeu avec 2 ou 3 de tes camarades. Vous pourrez ensuite faire d'autres parties.

Le plus grand total
3 ou 4 joueurs

Matériel
- 1 paquet de 15 cartes de 1 point
- 1 paquet de 15 cartes de 10 points
- 1 paquet de 15 cartes de 100 points
- 1 paquet de 15 cartes de 1 000 points
- 1 paquet de 15 cartes de 10 000 points
- un dé
- une feuille de jeu par joueur

Jouer
Une partie se joue en 4 tours.
À tour de rôle, les joueurs lancent le dé et prennent dans un paquet autant de cartes qu'il y a de points sur le dé.
Attention, il faut prendre les cartes dans le même paquet.
Le joueur conserve les cartes et complète sa feuille de jeu.

Le gagnant est celui qui a le plus grand total de points.

ÉQUIPES DE 3 OU 4 / ORAL

1 Phase de jeu : première partie

• Demander aux élèves de prendre connaissance de la **question 1** et de la **règle du jeu**.

• Faire reformuler la règle en même temps qu'est mis en place un début de partie avec trois élèves qui remplissent chacun leur feuille de jeu, mais sans aller jusqu'au calcul des points (deux tours par exemple), en précisant bien les éléments de la règle :
– si le dé jeté par le joueur marque 4, celui-ci peut prendre 4 cartes d'une même sorte (il doit donc trouver un paquet dans lequel il y a encore 4 cartes, par exemple 4 cartes marquées « 1 000 points ») ;
– il garde les cartes et remplit alors sa feuille de jeu en inscrivant 4 dans la colonne « dé » et « 1 000 » dans la colonne « carte » ;
– à la fin de la partie, il faudra calculer ce que représente toutes les cartes gagnées, soit à l'aide des cartes, soit à l'aide de la feuille de jeu.

• Demander à chaque équipe de jouer une partie complète en n'oubliant pas de remplir la feuille de jeu. Pendant cette phase, n'intervenir que pour aider dans le déroulement du jeu.

Au cours de cette activité, les élèves vont se familiariser avec les écritures chiffrées de nombres supérieurs à 1 000 et être amenés à les comparer. Pour cela, ils peuvent s'appuyer sur leur connaissance des nombres de 3 chiffres, en prolongeant à ces nouveaux nombres.

Dans un premier temps, pour familiariser les élèves avec le jeu, on peut n'utiliser que les cartons 1, 10, 100 et 1 000 pour rester dans un domaine déjà connu des élèves.

COLLECTIF / ORAL

2 Mise en commun

• À partir de feuilles de jeu d'une même équipe, dont certaines peuvent comporter des erreurs dans l'évaluation du total des points, faire expliciter :

– **les procédés de calcul des points** en les mettant en relation : la valeur de 4 cartes de 1 000 peut être obtenu à l'aide de 4 × 1 000 = 4 000 ou de 1 000 + 1 000 + 1 000 + 1 000 = 4 000, ou encore en considérant que c'est 4 milliers ;

– **les procédés de comparaison des scores**, ce qui peut déboucher sur un rangement de tous les nombres apparus dans la classe : les règles de comparaison déjà énoncées précédemment devraient être mobilisées, en référence à la valeur des chiffres dans l'écriture des nombres (selon leur position) ;

– **les erreurs :** oubli du fait que la valeur de la carte est prise autant de fois qu'il y a de points sur le dé, erreurs dans les types de calcul ou dans les calculs eux-mêmes, confusion entre nombre de points total sur les 4 dés « gagnés » et valeur des cartes gagnées...

COLLECTIF ET ÉQUIPES DE 3 OU 4 / ORAL

3 Synthèse sur les nombres > 1 000

• La synthèse peut prendre la forme d'un tableau de numération proposé par l'enseignant (il est peu probable qu'il soit suggéré par un élève) :

– Écriture

10 000	1 000	100	10	1
dizaine de mille	millier	centaine	dizaine	unité
4	**0**	**5**	**2**	**6**

Ce nombre s'écrit **40 526** (l'espace est destiné à repérer plus facilement le rang de chaque chiffre).
Il contient 4 dizaines de mille, 5 centaines, 2 dizaines et 6 unités.
Il se décompose en 4 × 10 000 + 5 × 100 + 2 × 10 + 6
ou sous forme d'addition du type :
10 000 + 10 000 + 10 000 + 10 000 + 100 + 100 + ...,
ce qui correspond à différentes méthodes de calcul possibles.

– Lecture

40 526 se lit : **quarante mille cinq cent vingt-six.**
Les tranches de 3 chiffres à partir de la droite sont une aide pour la lecture.

– Comparaison

Il faut regarder le nombre de chiffres et, s'il est identique, s'intéresser aux chiffres de plus grande valeur, en partant de la gauche.

• Les élèves sont en particulier invités à consulter leur dico-maths pour y trouver, avec l'aide de l'enseignant, comment s'écrivent, se lisent et se comparent les nombres supérieurs à 1 000.

• À partir de là, de nouvelles parties sont jouées, avec une autre mise en commun (si nécessaire) ou, plutôt, une incitation à s'auto-contrôler dans chaque groupe, avec l'aide éventuelle de l'enseignant.

Au début, les calculs sont laissés à l'initiative des élèves. Certains peuvent poser des additions du type 10 000 + 10 000 + 10 000 + ... (ce qui est assez fréquent), calculer des produits comme 4 × 10 000 (en prolongeant la règle des 0) ou répondre directement 40 000.

On laissera se développer ces différentes pratiques et ce n'est qu'au cours de la séance qu'est introduit le tableau de numération qui permet de trouver rapidement l'écriture du total des points. Mais il ne serait pas opportun de systématiser son utilisation, ce qui risquerait de conduire les élèves à ne plus réfléchir à la valeur des chiffres dans l'écriture du nombre.

INDIVIDUEL / ÉCRIT

Entraînement **manuel p. 63 exercices 2, 3 et 4**

Exercices

DICO-MATHS p. 4
Décomposer les nombres

2 Voici les feuilles de jeu de Tim et Maïa.
Combien chacun a-t-il marqué de points ? Qui a gagné la partie ?

Tim	dé	carte
1er tour	2	1 000
2e tour	4	10
3e tour	1	10 000
4e tour	6	1

Maïa	dé	carte
1er tour	3	100
2e tour	6	1 000
3e tour	5	1
4e tour	6	10

3 Anaïs a marqué 54 023 points.
Combien de cartes de chaque sorte a-t-elle gagnées ?

4 Léo a déjà 40 047 points.
Quelles cartes doit-il gagner pour avoir 43 047 points ?

UNITÉ 7

Exercice 2 Il est très proche de l'activité rencontrée au cours du jeu. Au moment de la correction, le tableau de numération peut être un support utile à condition de ne pas être systématisé.

Exercice 3 C'est la tâche inverse, il faut interpréter la valeur de chaque chiffre en fonction du rang qu'il occupe. Là aussi, le tableau de numération peut être utile à condition de ne pas le systématiser.

Exercice 4 Il suffit de remarquer que seul le chiffre des milliers est modifié.
Réponse : Il doit donc gagner 3 cartes « 1 000 ».

Annexe 3 : Extrait du sujet 0 proposé par le ministère en 2006

Cette question prend appui sur les documents proposés en annexe 1 (exercices proposés à des élèves de cycle 3)

a) Les exercices proposés à l'annexe 1 se présentent sous différentes formes et sont de complexité variable, mais ils sollicitent tous une même connaissance mathématique. Laquelle ?

b) Ranger les exercices par ordre de difficulté croissante. Justifier ce choix.

c) Indiquer trois caractéristiques de l'exercice 4 qui justifient l'intérêt de le proposer à des élèves du cycle 3.

<u>Annexe 1</u>

Exercice 1 : • **Observe l'exemple et complète de même.**

8 621 : 2 est le chiffre des dizaines,
862 est le nombre de dizaines.

7 214 : …… est le chiffre des centaines,
…… est le nombre de centaines.

5 068 : …… est le chiffre des unités,
…… est le nombre d'unités.

8 621 : …… est le chiffre des dizaines,
…… est le nombre de dizaines.

Exercice 2 : • **Retrouve les chiffres masqués.**

3 ▢ 8 : le chiffre des dizaines est plus grand que celui des unités.

▢ 2 5 : il y a 32 dizaines dans ce nombre.

▢ 3 ▢ : le chiffre des unités est double de celui des dizaines ;
le chiffre des centaines est égal à la somme des deux autres chiffres.

▢ ▢ ▢ : il y a 23 dizaines dans ce nombre ;
le chiffre des unités est égal à la somme des deux autres chiffres.

Exercice 3 : • Mon nombre de milliers est 572. Mon chiffre des centaines est le même que celui des dizaines de mille et mon chiffre des dizaines est le même que celui des milliers. Mon chiffre des unités est égal au chiffre des centaines de mille plus 1.
Je suis ▢

• Mon nombre de milliers est 86. Si on m'ajoute 1, mon chiffre des milliers augmente de 1.
Je suis ▢

• Je suis un nombre compris entre un millier et un million.
Mon nombre de chiffres est impair et je suis écrit avec les chiffres 4 et 9.
Si l'on m'ajoute 1, tous mes chiffres changent.
Je suis ▢

Exercice 4 : Voici des nombres :

50 267	6 074	20 681	48 607
40 596	1 740 325	740 634	
40 000	320 978	206 000	740 000
520 630	7 206 158	697	20600

Recopie les nombres qui ont :

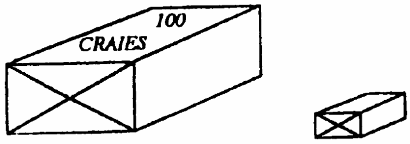
• 6 pour chiffre des centaines : ____________________
• 206 pour nombre de centaines : ____________________
• 0 pour chiffre des milliers : ____________________
• 40 pour nombre de milliers : ____________________
• 740 pour nombre de milliers : ____________________

Annexe 4 : éléments relatifs au sujet du CERPE dans l'Académie d'Aix-Marseille en 2000

Extrait du sujet

Dans cet exercice, vous trouverez en annexe les productions de 9 élèves de CE2[6], en réponse au problème suivant proposé avant tout travail sur la division.

Un fabricant vend des craies par étuis de 10 et par boîtes de 100. Le magasinier doit préparer les boîtes et les étuis pour les livraisons.
Calcule combien d'étuis et combien de boîtes il doit préparer pour chaque client.
- M. Aubin: 800 craies - M. Créon: 254 craies
- M. Elias: 78 craies - M. Béal: 430 craies
- M. Durand: 60 craies - M. Fustie : 305 craies



1) Quelle compétence, en termes de connaissance des nombres, est mise en jeu ?
2) Classez ces productions en fonction de la procédure utilisée, tout en faisant très brièvement les remarques importantes sur chaque production.
3) Six enfants ont trouvé la bonne réponse. Rangez leurs productions de la plus rudimentaire vers la plus experte, en montrant brièvement l'évolution de chaque procédé par rapport au précédent.

M Aubin 8 boites M Elias 7 étuis et 1 étui = M Durand 6 étuis M Créon 2 boites et 6 étuis M Béal 4 boites et 3 étuis M Fustier 3 boites et 1 étuis Mickaël	Alice c | d | u 8 | 0 | 0 8 boites 7 | 8 8 étuis 6 | 0 6 étuis 2 | 5 | 4 2 boites et 6 étuis 4 | 3 | 0 4 boites et 3 étuis 3 | 0 | 5 3 boites et 1 étui
Isabelle M^r Aubin 100+100+100+100+100+100+100+100 = 8 boites M^r Elia 10+10+10+10+10+10+10+8 8 étuis M^r Durand 10+10+10+10+10+10 6 étuis M^r Créon 100+100+10+10+10+10+10+4 2 boites et 6 étuis M^r Béal 100+100+100+100+10+10+10 4 boites et 3 étuis M^r Fustier 100+100+100+5 3 boites et 1 étuis	8×100 = 800 8 boites 7×100 = 70+8 8 étuis 6×10~~0~~ = 60 6 étuis 2×100 = 200+5×10 = 250+4 ~~1~~2 boites et 5 étuis et 1 étui 4×100 = 400+3×10 4 boites et 3 étuis 3×100 = 300+5 3 boites et 1 étui Claire

[6] Nous avons uniquement reproduit (et dans un ordre différent pour des questions de mise en page) les 6 productions qui sont utiles pour la troisième question. Comme on le voit dans l'extrait du corrigé, elles sont représentatives des procédures utilisées qui font l'objet de la deuxième question.

mr Paulin 800=8 boites mr Elias 78=7 étuis et 8 craies donc 8 étuis mr Durand 60=6 étuis mr Créan =254=2 boites 5 étuis et 4 craies donc 2 boites et 6 étuis mr Béal = 430=4 boites et 3 étuis mr Fuster 305 =3 boites et ~~5~~ 1 étuis. odile	Mr Aubin 800 = 8c 8 boites Mr Elias 78 = 7d 8u 7 étuis et 1 étui = 8 Mr Durand 60 = 6d 6 étuis Mr Créan 254 = ~~2c~~ 2c 5d 4u 2 boites 5 étuis et 1 étui Mr Béal 430 = 4c et 3d 4 boites et 3 ~~dizaine~~ étuis. Mr Fuster 305 = 3c et 5u 3 boites et 1 étui Alain

Extraits du corrigé proposé par la COPIRELEM (pp.138–140)

2) Classement des productions en fonction des procédures :

Catégorie n°1 : **Les élèves qui utilisent une schématisation : Benoît et Mickaël.**

Ces deux élèves utilisent une représentation figurative liée au matériel de numération; ils représentent ainsi une décomposition canonique additive (suivant les puissances de dix) des nombres :

| représente 1; ▯ représente 10 et ☐ représente 100.

On peut penser que ces décompositions ont été obtenues par comptage sur les puissances de 10.

Catégorie n°2 : **Les élèves qui utilisent des décompositions additives ou "hybrides"** (faisant intervenir l'addition et la multiplication) **suivant les puissances de 10.**

Ces décompositions peuvent être obtenues à partir de la valeur positionnelle des chiffres; mais nous faisons ici l'hypothèse que les élèves de cette catégorie ont retrouvé ces décompositions par calcul ou comptage de 100 en 100, puis de 10 en 10 avec ajout final des unités quand elles existent.

On peut distinguer deux sous-catégories :

- Isabelle, Élise et Charles qui produisent des décompositions additives des nombres (additions réitérées de 100 puis de 10);
- Claire qui produit une décomposition hybride faisant intervenir l'addition et la multiplication.

Catégorie n°3 : **Les élèves qui utilisent directement la valeur positionnelle des chiffres : Alice, Alain et Odile.**

On peut éventuellement distinguer Odile d'Alain et d'Alice qui explicitent la décomposition en centaines , dizaines et unités.

(…)

3) Rangement des productions de la plus élémentaire à la plus experte :

Pour effectuer ce rangement on peut prendre pour critères **le degré d'abstraction** (de conceptualisation) et **le principe d'économie** (écritures plus courtes, gain de temps,…) :

• Mickaël : schématisation par juxtaposition de symboles qui évoquent le matériel de numération.

• Isabelle : les symboles sont remplacés par les écritures chiffrées 100 et 10; le signe + remplace la juxtaposition;

• Claire : les sommes réitérées sont remplacées par des écritures multiplicatives (écritures plus économiques).

• Alice : elle explicite la valeur positionnelle des chiffres dans un tableau; il n'y a plus comptage ou calcul pour trouver la décomposition.

• Alain : il procède de la même façon mais sans tableau.

• Odile : elle conclut sans s'aider d'écritures du type c/d/u.

Il faut relativiser le jugement porté ci-dessus sur le caractère plus ou moins expert des productions :

• la schématisation utilisée par Mickaël est très élaborée et il est difficile de se prononcer quant à l'économie entre les productions de Mickaël et Isabelle.

• les procédures d'Alain, Alice et Odile sont assez voisines; elles ne diffèrent que par les explications et justifications apportées à la technique mise en oeuvre.

• les deux groupes à distinguer en vue d'une exploitation pédagogique de cette analyse sont le groupe de Mickaël, Isabelle et Claire et celui d'Alain, Alice et Odile : ces derniers extraient l'information contenue dans l'écriture des nombres ; les autres la retrouvent par comptage et/ou calcul.

Des réponses qui seraient :

1- Mickaël 2- Isabelle 3- Claire 4- Odile 5- Alain 6- Alice	1-Mickaël 2-Isabelle 3-Claire 4-Odile, Alain, Alice sur le même plan

sont tout à fait acceptables.

Annexe 5 : Tâche proposée en formation : « Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour… ? »

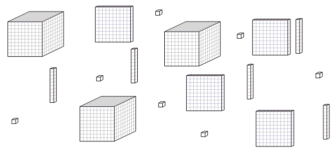
Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- 3406 c'est 3 milliers 4 centaines et 6 unités

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 7

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

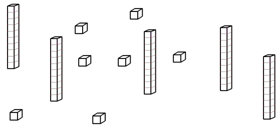
- il y a 3457 cubes sur la feuille



Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 8

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- il y a 57 cubes sur la feuille
- (il y a cinquante sept cubes sur la feuille)



Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 9

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- trois mille quatre cent cinquante six s'écrit 3456

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 10

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- 3406 m c'est 3 km 4 hm 6 m

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 11

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- qu'est-ce que mille ?
- qu'est-ce que 1000 ?
- qu'est-ce qu'un millier ?
- qu'est-ce qu'un million ?

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 12

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- Pourquoi 1000 est-il plus grand que 900 ?
- Pourquoi 56*10=560 ?

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 13

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- compter
  - de cent en cent à partir de 3850 ?
  - de un en un à partir de 48 ?

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 14

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- la retenue :

$$\begin{array}{rr} & \mathbf{1} \\ & 2371 \\ + & 456 \\ \hline & 2827 \end{array}$$

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 15

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- le « nombre de centaines » de 8543 est 85

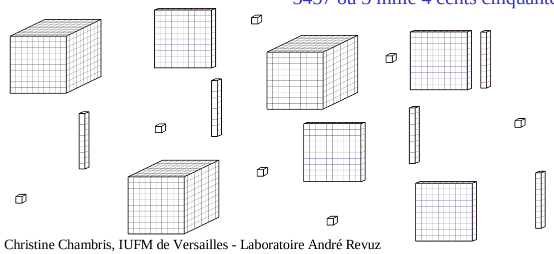
Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 16

La numération en unités pour les différentes explications

Le lien entre le « matériel » et le « symbolique »

C : « on compte par centaines, comme on compte par unités »
3 milliers 4 centaines 5 dizaines 7 unités

P : « le chiffre des milliers occupe la 4e position… » ou O : « 4 milliers se dit quatre mille ».
3457 ou 3 mille 4 cents cinquante sept



Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 25

La numération en unités pour les différentes explications

La possibilité d'expliquer la suite des nombres, les retenues, etc. avec des mots…

À partir de 3 milliers 8 centaines 5 dizaines, compter de centaine en centaine :

- 3m 8c 5d et 1 centaine
- 3m 9c 5d

On compte par centaines… C

- 3m 9c 5d et 1 centaine
- 3m 10c 5d
- 3m 1m 5d
- 4m 5d

On compte par centaines… C

Dix centaines font un millier. R

On compte par milliers… C

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 26

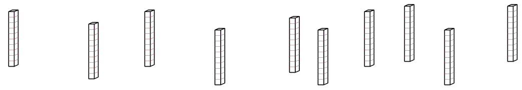
La numération en unités pour les différentes explications

Le lien entre le « matériel » et le « symbolique »

- Combien y a-t-il de dizaines de cubes ? (C)

  Combien y a-t-il de centaines de cubes ?* (R1)

R1 : « Dix dizaines font une centaine »

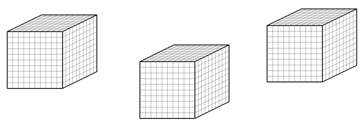


*Quel est le nombre de centaines de cubes ?

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 22

La numération en unités pour les différentes explications

Le lien entre le « matériel » et le « symbolique »



- Combien y a-t-il de milliers ? (C)

  de centaines ? (R2) R2 : « Dix centaines font un millier »

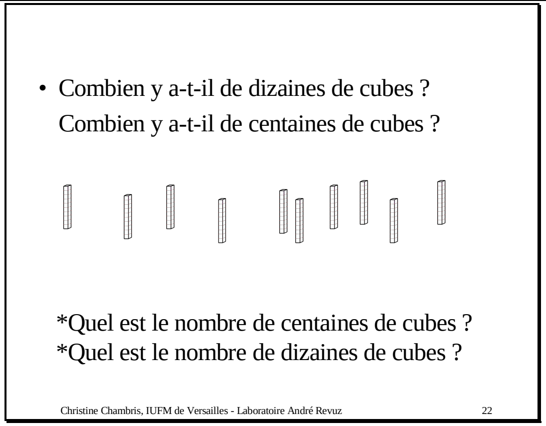
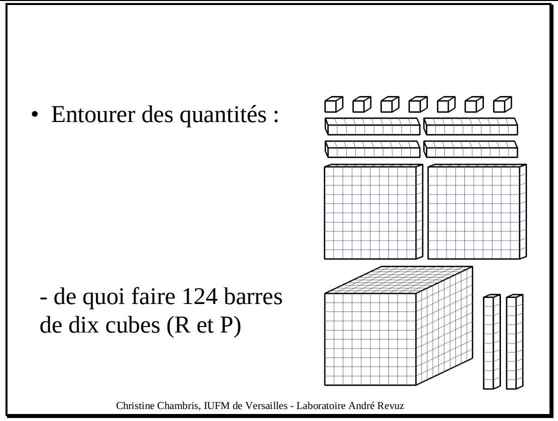
- Combien y a-t-il de dizaines ? (C puis R2 puis R1) ou (C puis R')

R1 : « Dix dizaines font une centaine »

ou R' : « Cent dizaines font un millier »

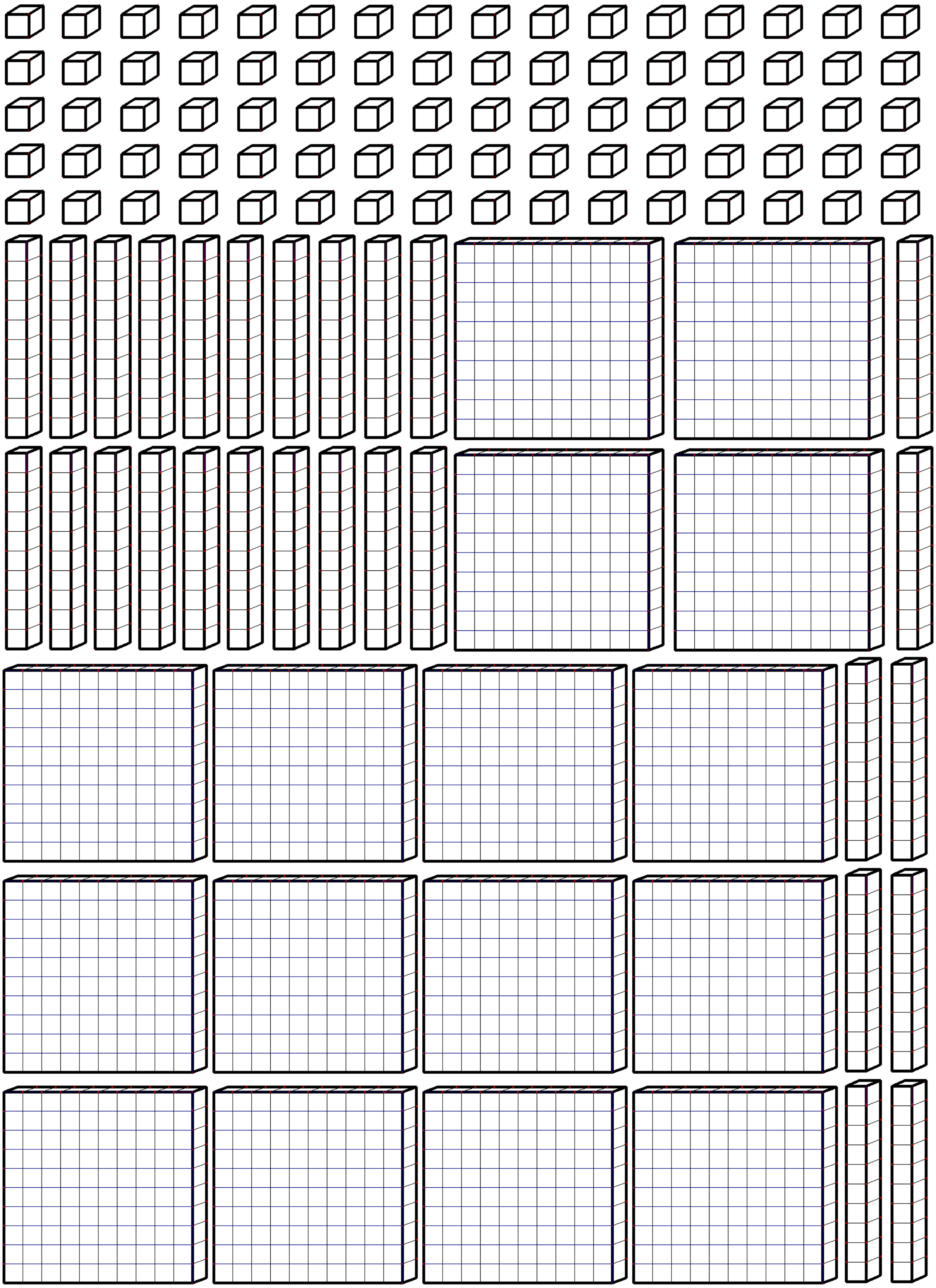
Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 23

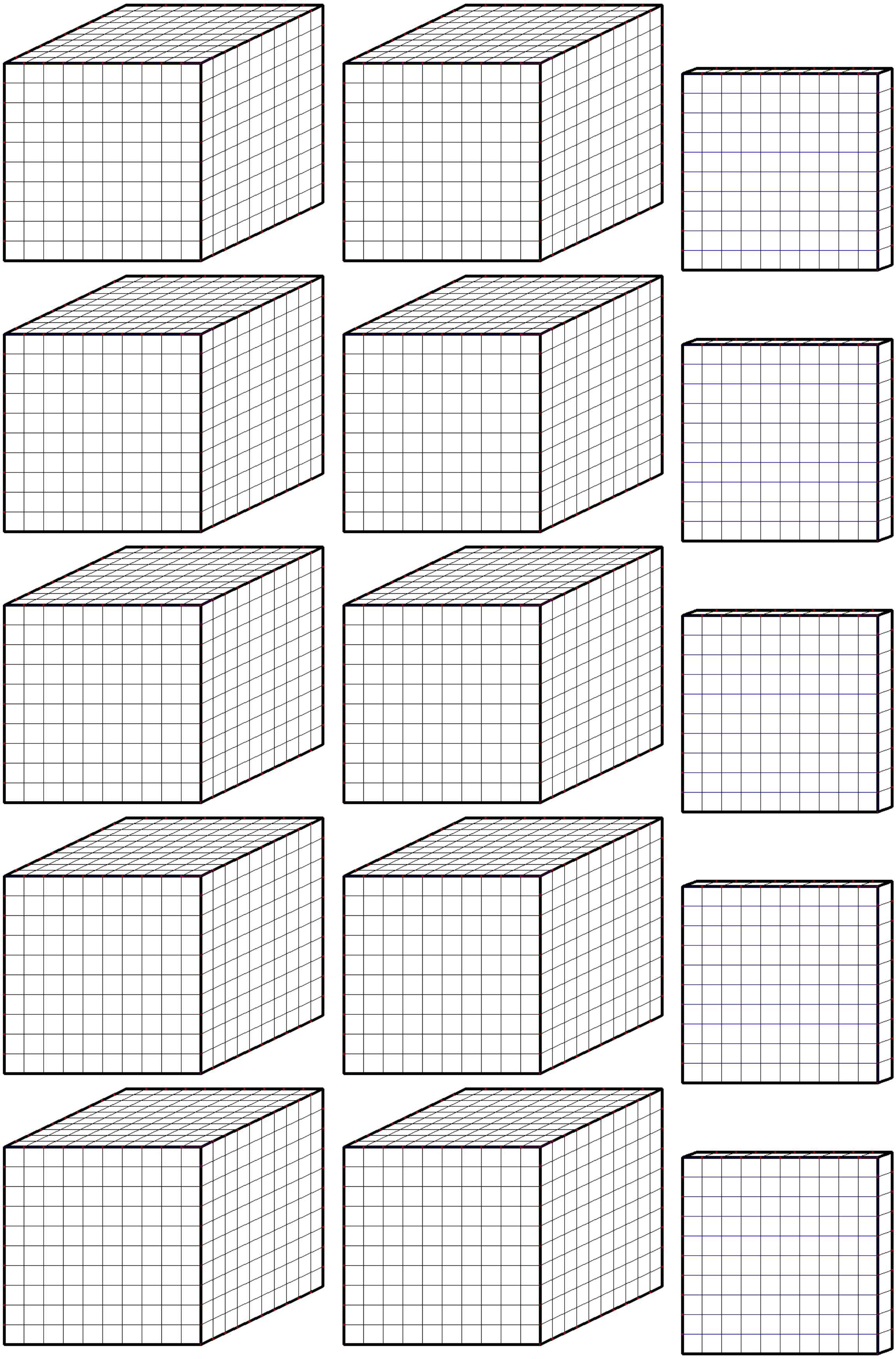
Annexe 6 : Tâche proposée en formation : quelques conversions…

<table>
<tr>
<td>Entourer 41 dizaines de cubes.</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Combien 30 dizaines font-elles de centaines ?</td>
<td>Combien y a-t-il de centaines dans 4 milliers ?</td>
<td>Combien y a-t-il de dizaines dans 1 millier ?</td>
</tr>
<tr>
<td>Combien 56 centaines font-elles de dizaines ?</td>
<td>Combien y a-t-il de dizaines dans 4532 ?</td>
<td>Combien y a-t-il de milliers dans un million ?</td>
</tr>
</table>

Annexe 7

Support utilisé en formation (imprimer les deux feuilles A4 en réduction sur un format A4)





Atelier A3

L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE : ANALYSE D'UNE PROGRESSION CENTRÉE SUR LES PROBLÈMES SPATIO-GÉOMÉTRIQUES ET LEURS REPRÉSENTATIONS

Isabelle Bloch
IUFM d'Aquitaine
isabelle.bloch@aquitaine.iufm.fr

Charlotte Osel
Laboratoire DAESL
cosel@hotmail.fr

Résumé :
Dans une première partie, nous avons exposé notre cadre théorique de recherche afin de présenter aux participants nos questionnements. En effet, de nombreux travaux ont interrogé le domaine géométrique ou le passage du spatio-graphique au géométrique mais peu ont envisagé l'étude du domaine d'expérience et des situations où pourraient se constituer les références spatiales. Dès lors, l'objet de l'atelier était de sensibiliser les participants aux enjeux de la constitution de ces références. A cette fin, nous avons présenté un début de progression expérimentée dans une classe de CM1. Les participants à l'atelier ont ensuite eu à travailler sur des enchaînements de situations, dans lesquels ils ont dû mettre en évidence le rôle des représentations (schémas relatifs aux différentes situations sur l'alignement, le cercle,…) et leur progression possible.

1 MODALITÉS DE FONCTIONNEMENT DE L'ATELIER

Nous nous sommes appuyées sur des situations expérimentées en classe de CM1 : ces situations étaient reprises de celles décrites par M. Artigue et J. Robinet (Artigue et Robinet, 1982), G. Combier et A. Pressiat (Combier et Pressiat, 2003), I. Bloch et M-H. Salin (Bloch et Salin, 2004) et M-H. Salin et R. Berthelot (Berthelot et Salin, 1992). Les participants ont eu à effectuer une analyse *a priori* des situations et à envisager les modalités de leur mise en place avec des élèves de cycle 3, afin de définir ce que pouvait être un répertoire de représentations et de préciser son fonctionnement.
Tout au long du déroulement de l'atelier, nous avons exposé des exemples de comportements observés dans les classes afin de dégager les différentes stratégies adoptées par les élèves dans la résolution des problèmes des situations expérimentées. De plus, la présentation de séquences vidéo a permis de montrer aux participants les liens qui existent entre les différentes situations de la progression. Ainsi, nous avons pu envisager un questionnement sur le rôle des représentations dans l'enseignement de la géométrie et leur progression possible.

2 INTRODUCTION

L'objet de cet atelier est de s'interroger sur les difficultés liées à la géométrie et à la structuration de l'espace dans l'enseignement primaire. Nous partons de constats institutionnels : à l'école primaire, l'enseignement de la géométrie est un problème reconnu comme difficile. Les stratégies d'évitement des professeurs en témoignent : la géométrie reste en effet souvent comme mission pour les décharges de

direction ou les stagiaires, voire complètement délaissée par les enseignants. En témoigne aussi la non-stabilisation des activités proposées par les manuels, activités qui vont du plus évident au inutilement complexe. Le statut des validations en géométrie au primaire est également flou, ce qui conduit à une fluctuation importante dans le niveau d'expertise demandé.
De plus, les programmes insistent sur l'amélioration de la vision de l'espace (repérage, orientation), sur la familiarisation avec quelques figures planes et quelques solides ; il s'agirait aussi du passage progressif d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par explicitation de propriétés et recours à des instruments. Au cycle III, les connaissances géométriques sont supposées s'articuler autour des quatre activités : reconnaître, décrire, construire, nommer et reproduire, qui sont présentées dans les Instructions Officielles du deuxième palier pour la maîtrise du socle commun comme des outils pour les apprentissages géométriques (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008).

Ces constats nous ont amenées à nous interroger dans un premier temps sur la problématique d'enseigner la géométrie et la « structuration de l'espace ». Nous avons cherché des travaux de didactique concernant l'enseignement de la géométrie et de l'espace à l'école primaire et au collège. Les recherches des vingt dernières années ont connu plusieurs étapes, avec une focalisation plus récente et plus réduite sur les spécificités de ce domaine à l'école primaire. En effet, la majorité des recherches sur l'enseignement de la géométrie concernent le collège, les figures, la démonstration en géométrie, les logiciels de géométrie dynamique, les difficultés des élèves avec le passage à la géométrie « théorique ». Ces travaux ont interrogé le domaine spatial et géométrique. Ainsi S. Gobert (Gobert, 2007) s'est interrogée sur le passage du *spatio-graphique* au géométrique : elle a étudié les conditions nécessaires à l'usage des dessins en géométrie déductive, en tentant de dégager des conditions de lecture des dessins utilisés et de formulation des énoncés de problèmes. Elle a ainsi défini ce qu'est le contexte spatio-graphique pour la construction de problèmes de géométrie : c'est l'environnement des dessins, figures… qui permettent de se représenter le problème et de le traiter. Ceci permet de distinguer entre information géométriquement signifiante et propriété géométrique dans une représentation. Dès lors, « les connaissances fondamentales de l'usage des dessins et les différents contrats de lecture peuvent être explicités » (Gobert, 2007, p 55).
Par ailleurs, Offre, Perrin & Verbaere (2007) ont travaillé sur l'usage des instruments, lequel est une condition, au niveau du primaire et du début du secondaire, de la construction de figures permettant ultérieurement la conjecture de propriétés géométriques.

Cependant, à notre connaissance, il n'a été que peu envisagé l'étude du domaine d'expérience et des situations où pourraient se constituer les références spatiales. Peu de recherches incluent le questionnement suivant : comment se constituent les références spatiales ? Ceci nous a amenées à nous demander ce que pouvait être une « bonne situation de constitution de ces références spatiales ». Que doit-elle prendre en compte ? Nous nous interrogeons aussi sur ce qui peut résulter des modes d'enseignement de la géométrie lorsque les élèves abordent le collège. Est-ce que le problème de la constitution des références spatiales est résolu lorsque le lien doit être fait avec la géométrie plus théorique ?
Tenter d'éclaircir les problèmes posés par l'enseignement de la géométrie et de la structuration de l'espace nous a conduit à examiner les questions suivantes :
- A l'école, des objectifs liés à la maîtrise des relations spatiales sont-ils formulés explicitement d'un point de vue institutionnel ?
- Comment pourrait-on formuler ces objectifs, et quelles situations permettraient de les mettre en œuvre ?
- Comment peut-on organiser la découverte de l'espace, l'usage des instruments, et les « énoncés géométriques » pour qu'une progression soit préservée ? En effet, nous avons le sentiment que souvent l'enseignement propose des activités « décousues » et non liées les unes aux autres. Donc nous nous posons également la question du ou des liens dans l'activité et entre les activités ; nous entendons donc proposer des progressions, et les analyser.

- Comment faire en sorte que les élèves puissent considérer les dessins et les représentations plus ou moins symboliques comme des outils du *répertoire de représentation* (Gibel, 2009 ; voir I.5.) qui répondent à des situations (géométriques ou non) ?
- Comment organiser les ruptures nécessaires afin qu'elles soient négociées par l'enseignant et ne soient pas laissées à la seule charge des élèves ?

Dès lors, il s'agit de s'interroger sur la constitution progressive de la géométrie comme outil de maîtrise des relations spatiales, et sur le passage de l'expérience spatiale au fait de pouvoir penser et représenter cette expérience dans un cadre et avec des outils géométriques.

2.1 Les cadres théoriques : la théorie de la schématisation de Gonseth et la théorie des situations didactiques

Dans notre recherche, nous utilisons de manière conjuguée la théorie des situations didactiques et la théorie de la schématisation, respectivement d'un point de vue global pour l'élaboration d'ingénierie et pour l'analyse de situations, et d'un point de vue local pour l'analyse des représentations et de la schématisation.

2.1.1 Quelques définitions selon Gonseth

En ce qui concerne la constitution de la géométrie, de nombreux travaux de recherche portant sur l'évolution des rapports entre géométrie et réalité font référence aux textes de F. Gonseth (Gonseth, 1945-1955). Gonseth étudie la constitution de la géométrie à partir de la réalité et non son enseignement. Il considère que la géométrie « peut être référée à l'espace réel, dans une dimension intuitive ; ou à ce même espace, dans une perspective expérimentale ; ou à une théorie de ces relations, dans un système théorique géométrique » (Gonseth, 1949). Pour Gonseth, l'intuition est la forme *a priori* de la connaissance de l'espace (qui fonctionne sur le mode de l'évidence, dit Gonseth) ; l'expérience s'appuie sur la perception et l'usage des instruments, et le pôle théorique formalise les relations entre les objets.

Selon Gonseth, ces trois aspects de la géométrie (aspects théorique, expérimental et intuitif) ne se disjoignent pas d'eux-mêmes. Ils ne sont pas hiérarchisés car ils fonctionnent en inter-relation, quoique sur des modes différents. L'évidence issue de l'intuition, les renseignements donnés par l'expérimentation, et la déduction issue d'un raisonnement dans un cadre théorique interagissent dans une dialectique[1]. Gonseth ne hiérarchise pas l'intuitif, l'expérimental et le théorique dans la connaissance : ils sont affectés des mêmes valeurs de vérité, mais pas dans le même horizon de réalité (voir ci-dessous).

Le passage de l'intuitif à l'expérimental et au théorique ne peut toutefois s'expliquer que par la médiation de ce que Gonseth appelle un schéma. Selon lui, (Gonseth, 1955, Tome 4), « le travail sur le réel spatial est rendu possible par l'intermédiaire de la schématisation » : un schéma est lui-même « constitué de correspondances symboliques conservant certaines des caractéristiques réelles des objets ».

2.1.2 Les cinq propriétés du schéma

Gonseth tente de cerner la notion de schéma au travers de « la fable de la boule dans la forêt » (voir ci-dessous) et en dégage cinq propriétés :
- certains signes du schéma correspondent à des objets concrets ;
- ces symboles peuvent être eux-mêmes des objets concrets, plus faciles à manipuler ;
- des relations entre les symboles (existantes, ou décidées) répondent à des relations à désigner, distinguer entre les objets réels (pensée et signe étant indissociables) ;
- certaines opérations sont exécutables sur le schéma en tenant compte de sa nature propre (schéma verbal, ou dessin) et sont en correspondance avec certaines opérations réalisables dans la réalité ;
- le schéma est révisable.

[1] Pour un résumé moins succinct des théories de Gonseth, on peut consulter Bloch & Pressiat, 2009

2.1.3 Le schéma et la connaissance

Pour Gonseth, le schéma représente la réalité, certes partiellement et de façon codifiée, mais il vaut pour ce qu'il est : il est authentique et n'est ni antérieur ni postérieur à la connaissance de la signification extérieure, il est l'un des éléments constitutifs de cette connaissance. On peut rapprocher cette déclaration de celle du sémioticien C-S. Peirce qui dit que le signe n'est pas la marque de ce que l'on connaît mais l'action par laquelle on connaît (Peirce, in Tiercelin 1993).

Le schéma est déterminé par ses constituants propres : sa signification extérieure n'est pas une réalité en soi mais un *horizon de réalité*, c'est-à-dire qu'il a vocation à être interprété dans un système déterminé (intuition, expérience, ou géométrie). Il n'est pas à prendre pour lui-même mais pour la signification qu'il porte ; l'existence même du schéma réorganise la vision de la réalité. La signification du schéma est donc extérieure à ce même schéma et définit un travail possible sur le réel, c'est cela que Gonseth appelle un horizon de réalité. Cet horizon de réalité est porteur de connaissances que ne possédait pas la situation première ; le schéma définit par là même un horizon de connaissances.

Ces considérations peuvent déjà nous interroger sur la nécessité où serait l'enseignement de l'espace et de la géométrie d'organiser cette étape de pensée. Cette phase de constitution et d'interprétation d'un schéma n'est pas travaillée du tout à l'école ou au collège où, par exemple, on fournit souvent directement aux élèves une figure déjà bien tracée. De plus, nous ne considérons pas que le schéma ait une composante géométrique prédéterminée. Il permet de travailler non sur le problème physique mais sur un premier horizon de réalité qu'il importe de définir et de connaître. Ce passage du problème physique à un schéma qui le représente est exemplifié par Gonseth par la « fable de la boule dans la forêt » où une boule se trouve au milieu d'une forêt irrégulièrement plantée d'arbres nombreux et plus ou moins serrés. La tâche donnée est de rouler la boule jusqu'à la lisière de la clairière où se trouve la forêt (Gonseth, 1945-1955, p 271).

Un exemple de ce type de travail, transposé dans une classe, est le problème de « la chèvre et du poteau », problème donné en classe de 5ème :

> « On considère un bâtiment rectangulaire, une chèvre est attachée à un point d'un côté. Suivant la longueur L de la corde, quelle surface peut-elle brouter ? »

L'objectif est d'introduire la surface du disque. Si L est inférieur à la distance du point d'attache au coin le plus proche, la solution est un demi-disque ; sinon, il faut ajouter un quart de disque… ou plus. Les élèves ont le matériel (carton, punaises, ficelle) et expérimentent avant de pouvoir calculer. La situation doit conduire à identifier les éléments pertinents dans le schéma de la surface d'une fraction de disque : son rayon, la valeur de la fraction, un moyen calculatoire de mettre ces deux caractéristiques en relation.

Un schéma n'est pas forcément une *figure* : c'est l'horizon de réalité choisi qui détermine son rapport plus ou moins proche avec le cadre géométrique. Dans Bloch & Pressiat (2009), on trouve des exemples de schémas spontanés produits en classe par des élèves suivant un horizon dynamique ou artistique, lesquels schémas ne peuvent être replacés dans une perspective – un horizon – géométrique. C'est le milieu de la situation qui permettra, ou non, d'inscrire le travail des élèves dans un horizon géométrique où l'on s'acheminera vers l'idée de figure.

2.1.4 La structuration du milieu dans la Théorie des Situations Didactiques

Nous souhaitons construire une progression de situations permettant d'élargir les connaissances des élèves. Rappelons que Berthelot et Salin (1992) ont mis en évidence l'intérêt du méso-espace pour la construction et l'utilisation de connaissances géométriques. Au départ, ils ont précisé ce qui différencie les différentes 'tailles' de l'espace : le micro espace étant constitué de la feuille de papier et des objets manipulables, le macro espace des espaces extérieurs où l'on ne peut pas agir par recoupement de points de vue (ville, campagne…), le méso espace correspond à l'école, la cour de récréation… tout espace où l'on peut manipuler des outils de dimension raisonnable, comme un décamètre. Le méso espace est celui qui permet la mise en œuvre d'une démarche de *modélisation,* c'est-à-dire d'application de connaissances géométriques à l'espace à des fins d'anticipation (cf. Berthelot et Salin, 1993-1994 ; Bloch et Salin, 2004).

Nous faisons l'hypothèse qu'une étape de constitution des références spatiales est nécessaire à l'entrée dans des situations de modélisation dans le méso-espace. Cette première étape serait celle de la constitution du milieu objectif (milieu de recherche), niveau du schéma de la structuration du milieu tel

qu'initié par Brousseau, complété par Margolinas (Margolinas, 1994) et modifié par Bloch (Bloch, 2002). En effet, les observations de situations de classe en géométrie, en cycle3 de l'école primaire, montrent le manque fréquent de ce milieu objectif. Son absence empêche les élèves de puiser dans une réserve d'expériences pour anticiper les figures attendues et donc de pouvoir argumenter sur les solutions géométriques attendues (Osel, 2007). Dans notre analyse, les schématisations peuvent tenir lieu d'éléments constitutifs d'un milieu objectif.
Rappelons que dans la structuration du milieu, le milieu objectif a une dimension heuristique – c'est un milieu d'essais/erreurs - ; le milieu de référence est celui où l'on valide les productions de l'étape précédente (mise en commun) ; enfin le niveau didactique correspond à un milieu d'enseignement, celui où l'on institutionnalise les connaissances et savoirs élaborés. Ceci se résume dans le schéma suivant :

M0 : **M- d'apprentissage : institutionnalisation**	**E0 :** **Elève**	**P0 : Professeur enseignant**
M-1 : M-de référence : **formulation validation**	E-1 : E-apprenant	P-1 : P régulateur, gère le débat, fait confronter les procédures
M-2 : M-objectif : **action**	E-2 : E-agissant	P -2 P-observateur, dévolueur
M-3 : M-matériel	E-3 : E-objectif	

Le milieu matériel est celui qui est préparé par le professeur, mais il n'acquiert de signification pour l'élève que dans la phase d'action, lorsque ce dernier peut tester des procédures. Un milieu matériel est toujours constitué d'objets (matériels ou déjà symboliques, cela dépend du niveau d'enseignement où opère la situation) familiers aux élèves, de façon à ce que ceux-ci puissent s'en saisir et engager des actions.

2.2 Expérimentation d'une progression

Nous proposons donc des situations pour introduire l'étape de schématisation, en examinant avec quels moyens et pour quels bénéfices. Dès lors, nous nous demandons :
- Comment élaborer des ingénieries telles que les schémas apparaissent comme des outils en réponse aux situations proposées ?
- Comment travailler les situations de schématisation avec les élèves ? Et quelles schématisations ?

2.2.1 La place de la schématisation par rapport aux recherches existantes

Les travaux de recherche récents traitent de la constitution de la géométrie (GI, GII, GIII) (Houdement & Kuzniak, 2006), mais ne se sont pas focalisés sur cette étape de schématisation. Par ailleurs, Berthelot et Salin (1992) et Gobert (2001) ont évoqué la schématisation, notamment dans la description du milieu des situations méso spatiales, mais ne l'ont pas étudiée pour elle-même. Le manuel ERMEL de géométrie pour le Cycle 3 passe d'ailleurs très vite sur les représentations spontanées des élèves (si même il les évoque) et insiste bien sur les *figures géométriques* à obtenir dans la résolution des problèmes, et ceci, même s'il propose nombre de situations extrêmement riches du point de vue spatial. Une des raisons en est, à notre avis, la difficulté de gérer en classe des situations dont le professeur verrait mal l'issue en termes de savoir.
Notre hypothèse est que cette étape de schématisation est escamotée dans l'enseignement. Elle semble nécessaire dans les prémisses de l'enseignement et elle participe de la constitution d'un milieu objectif spatial et donc du répertoire de représentation des objets géométriques (répertoire que nous définissons ci-dessous). Les objets qui apparaissent dans les schématisations peuvent alors déboucher plus ou moins sur des savoirs géométriques. Ceci permet à terme la constitution d'un milieu de référence (milieu de validation). Par ailleurs, nous faisons une constatation simple : il est difficile, pour des élèves, de

décrypter des schémas et des figures alors qu'ils n'ont jamais été amenés à en faire eux-mêmes, ou alors des figures directement géométriques imposées. Nous pouvons nous référer à ce sujet au texte de Bloch et Pressiat (2009) avec des exemples de schématisations « inattendues » dans la situation de la porte qui se ferme.

2.2.2 Définition du répertoire de représentation

Un répertoire de représentation est, par définition, un ensemble de *moyens* connus ou donnés pour effectuer la tâche prévue dans la situation. Il sera constitué de signes, schémas, symboles, figures ; nous y mettons également les outils et leur usage ; on peut y mettre également les éléments langagiers permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.
Le répertoire de représentation comporte deux composantes liées à la chronogenèse (pour la première) et au milieu de la situation :

- la composante liée au répertoire antérieur (les différentes formules énoncées et les différents usages liés aux connaissances antérieures) ;
- la composante liée au nouveau répertoire de la situation.

Une question ouverte qui nous intéresse au plus haut point est de nous demander quel est le *système générateur* du répertoire de la situation proposée, lequel va permettre de construire de nouvelles représentations à partir des éléments de représentation déjà connus (Gibel, 2009).
L'élaboration du répertoire constitue à terme une base pour la géométrie visée. Son évolution est ce qui va permettre, au final, de passer des schémas à des propriétés et à des raisonnements géométriques. Les schémas seront décryptés en classe, analysés du point de vue de la réponse au problème posé ; un schéma générique adapté pourra alors être proposé. Ceci constitue une étape cruciale vers un travail géométrique.
Donc, si l'on résume drastiquement les questions auxquelles nous cherchons à apporter une réponse :
- Comment élaborer une progression prenant en considération les connaissances spatiales (antérieures et nouvellement construites), dont les objets soient apparents pour les professeurs et donc rendent tenable le contrat didactique ?
- Comment effectuer ensuite la transition vers un milieu de référence débouchant sur des savoirs théoriques ?

2.2.3 Mise en place d'une progression

Deux raisons essentielles nous ont amenées à choisir cette progression :
- ces situations sont relativement faciles à mettre en œuvre et permettent de travailler dans le micro et le méso espace ;
- les notions de distance, de cercle, s'y imbriquent de façon satisfaisante, donc ces situations permettent aux élèves de créer des liens entre la « technique du compas » utilisée pour la situation des triangles et la méthode de triangulation utilisée pour la situation sur les losanges.
Ajoutons que les situations proposées dans les manuels sur le cercle ne sont pas toujours très convaincantes : elles utilisent le compas de façon exclusive et prématurée à notre sens.
Nos situations permettent également de manipuler des outils (ficelles, bandelettes de longueur donnée, règles, compas) et de verbaliser ou d'envoyer des messages.

Nous avons repris des situations déjà expérimentées (voir fiches descriptives des situations en annexe) :
- ***La situation du cercle (cf. Artigue et Robinet, 1982 ; Combier et Pressiat, 2003) :*** La situation a été donnée en CM1 (9 ans) : « tracer le plus de points à une distance donnée d'un point tracé : a) sur une feuille de papier ; b) au sol dans la cour ».
Il faut remarquer que pour un mathématicien raisonnablement « expert » la consigne donnée dans la situation du cercle est déjà une définition du cercle ; mais ceci ne paraît pas comme un savoir ou une connaissance chez tous les élèves et, on constate qu'ils cherchent tous pour résoudre le problème posé. De plus, cette situation n'est pas mise en place pour donner une définition canonique du cercle mais pour permettre aux élèves de se créer leur répertoire de représentation au sujet des « points à même

distance », d'effectuer des liens entre les situations, et afin de leur proposer un type de raisonnement sur l'objet trouvé en fonction d'une consigne qu'ils ne décodent pas de façon évidente, via la situation.
- ***La situation du triangle (cf. Berthelot et Salin, 1992) :*** « Former un triangle par assemblage de trois segments de longueurs données sur une feuille de papier avec validation au tableau ».
Cette situation permet d'interroger la pertinence des situations micro/méso espaces. Dans un premier temps, le changement d'espace permet aux élèves de se constituer des représentations différentes en fonction de l'espace dans lequel ils travaillent. En ce qui concerne la situation sur les triangles, le passage au tableau incluant une validation avec les baguettes en bois permet l'émergence d'une autre stratégie de résolution en lien avec la situation des cercles. Un autre type de méso espace avait été choisi mais n'a pas fait l'objet d'une présentation à l'atelier. La situation des triangles avait été prévue dans la cour afin de créer d'autres liens avec la situation des cercles en utilisant des cordes à la place des baguettes de bois.
- ***Les situations des losanges (cf. Berthelot et Salin, 1992) (non présentée à l'atelier)****:* Dans une première séance, il s'agit d'« envoyer un message écrit (sans dessin ni figure) à l'autre groupe de son équipe contenant tous les renseignements nécessaires pour que celui-ci puisse réaliser la figure sans la voir. La figure doit être superposable à la figure initiale ». Dans une seconde séance, il est procédé à une analyse détaillée des messages.
Cette progression permet aux les élèves :
1) d'expérimenter des tracés du cercle, avec ficelle puis éventuellement avec compas, et de relier les deux conceptions (points à même distance du centre, 'rond' tracé au compas) ;
2) de réinvestir les problèmes de distance dans la situation des triangles ; éventuellement de faire le lien avec le cercle/le compas ;
3) d'analyser une figure plus complexe (losange) et de la référer aux triangles déjà vus.

2.3 Constitution du répertoire de représentation

Dans la constitution du milieu de la situation expérimentée, la schématisation a pris des formes variées, plus ou moins exploitables directement dans une perspective géométrique.
Dans un premier temps, nous exposons les différentes stratégies adoptées par les élèves dans les situations du cercle et du triangle. Ensuite, nous montrons les liens créés par les élèves via les situations tout au long de la progression, afin de déterminer ce qui peut constituer un répertoire de représentation.

2.3.1 Les stratégies des élèves et la constitution du répertoire de représentation

La situation du cercle
Dans le *micro-espace*, trois stratégies ont été recensées :
- Tracé au compas, puis marquage des points sur le cercle tracé au compas. Vérification de la distance avec la bandelette du centre aux points tracés sur le cercle point par point.
- Tracé avec la bandelette en partant du centre.
- Tracé d'un segment parallèle au segment donné et tracé d'un maximum de points sur le segment parallèle tracé avec la bandelette.

Dans le *méso-espace (la cour de récréation)*, cinq stratégies ont été recensées :
- Tourner avec la corde fixée au point tracé dans la cour et tentative d'utilisation de la règle et des fiches (peut-être comme avec la bandelette en classe).
- Tracé avec la corde bien tendue.
- Tracé point par point, du point tracé dans la cour à la distance de la corde puis tracé du cercle sur les points déjà tracés.
- Tracé du cercle et des points par-dessus (un maximum de points). Chaque élève du groupe trace un maximum de points de son côté.
- Tracé du cercle avec des pointillés et vérification avec la règle de la distance tracée avec la corde. Deux méthodes utilisées : certains élèves vérifient avec la règle point par point et d'autres vérifient avec la corde.

La situation du triangle
Dans le *micro-espace*, quatre stratégies ont été recensées :

- Essais à différents endroits de la feuille et non en se servant de l'essai précédent. L'élève relie les trois segments et se rend compte que le troisième segment n'est pas de même mesure.
- Addition de la mesure de tous les segments et division de la somme en trois pour obtenir trois segments de même longueur (méthode utilisée par un seul élève).
- Tracé en se servant de deux instruments pour « croiser » deux segments. Tâtonnement avec les deux instruments.
- Tâtonnement avec plusieurs essais sur les essais précédents.

Dans le *méso-espace (au tableau)*, deux stratégies ont été recensées :

- Tracé en se servant de la règle et de l'équerre. L'élève trace un premier segment horizontal puis met un des instruments à chacune des extrémités. Il croise la règle et l'équerre par tâtonnement jusqu'à obtenir les bonnes longueurs des deux autres segments par coïncidence. Il doit gérer deux paramètres, deux dimensions d'espace qui influent ensemble.
- Tâtonnement avec plusieurs essais sur les essais précédents. Apparition d'un arc de cercle.

Nous pensons qu'un changement de repère aurait pu être effectué dans la cour afin de réactiver les représentations développées lors de la situation sur le cercle. Nous aurions pu donner des cordes aux élèves en guise de règle. Cette situation avait été prévue dans la progression mais pour des raisons logistiques liées à l'école, cette séance n'avait pas pu être menée.

2.3.2 Les liens entre les situations expérimentées

Pour la situation du cercle, les deux méthodes (« point par point » et « tracé de la ligne ») vont permettre de créer des liens en ce qui concerne le report de longueur et la conservation de la distance. Pour les élèves, « *la corde elle garde toujours la même distance* », « *ça fait comme un compas* […] *la corde* », « *un compas géant* », « *c'est pas un compas, c'est un rayon* », « *c'est pareil, pourquoi ?* », « *le rayon est aussi à la même distance* ».

Dans la situation du triangle, la validation avec les baguettes en bois va permettre d'amener les élèves à adopter une autre méthode de construction avec l'utilisation du compas et de la triangulation. Un élève réactive ses représentations de la situation sur le cercle. Selon lui, il faut « *tracer deux cercles qui se croisent pour obtenir un point* ». Il prend la longueur des segments comme rayon. Il fait allusion aux tracés des cercles dans la cour avec les cordes.
Un autre lien est effectué dans la situation du triangle avec la situation suivante sur les losanges (qui n'a pas fait l'objet d'une présentation à l'atelier par manque de temps). En effet, lorsqu'un élève explique sa méthode avec l'utilisation du compas, il trace deux points symétriques de part et d'autre du premier segment horizontal tracé au tableau. Il identifie la figure obtenue comme étant un losange ; or celle-ci était un cerf -volant. Ce faisant, cet élève élargit son propre répertoire de représentation et également celui de ses camarades de classe : il y a en effet identification du cerf-volant. Cette allusion au losange resservira néanmoins dans la situation de communication prévue. La construction de triangles pourra être réinvestie dans la construction du losange (décomposition du losange et reproduction par triangulation). On observe alors une progression de situations : les situations sur le cercle sont réinvesties dans la situation de construction du triangle, qui elle-même servira dans la situation sur les losanges.

2.3.3 Stratégies et liens : constitution du répertoire de représentation

Nous présentons quelques questions que les élèves se sont posées dans les différentes situations et les moyens mis en œuvre, associés à la constitution du répertoire de représentation.

Dans la situation du cercle *:*
Les questions que les élèves ont pu se poser sont celles de l'identification d'un ensemble de points à une même distance d'un autre, celles du report de longueur (comment et avec quel(s) outil(s) conserver la

mémoire de la distance ?) et celles de la matérialisation des points (un point n'est pas encore pour eux un élément « non visible » d'une ligne). De plus, pour résoudre le problème demandé, les élèves ont remarqué qu'ils pouvaient utiliser la ficelle proposée comme un « compas géant » dans un espace à trois dimensions.

Dans la situation du triangle *:*
La question principale que les élèves ont pu se poser est celle du report de longueur : comment et avec quel(s) outil(s) conserver la longueur d'un segment et ajuster les segments entre eux ?
En lien avec la situation du cercle, les élèves ont utilisé le compas en référence à ce qu'ils nomment le « compas géant » pour répondre à leurs questionnements. Ceci leur permet de matérialiser ce que peut être un point (intersection de deux cercles) et de se rendre compte qu'ils peuvent obtenir un deuxième point symétrique du premier par rapport à la base du triangle. Ainsi, lors de la verbalisation d'un programme de construction du triangle quelconque et lors de l'obtention de deux triangles symétriques, un lien est effectué avec la situation sur les losanges. D'autre part, la matérialisation du point comme intersection de deux arcs de cercles a été effectuée par glissements successifs des segments.
Enfin, les élèves ont également fait allusion à la notion de rayon lors de l'utilisation des baguettes en bois matérialisant les segments du triangle lors de la phase de validation.

Dans la notion de répertoire nous pouvons distinguer la nature des éléments mis en jeu : actions, traces, symboles… Ces éléments, plus ou moins sophistiqués et d'un symbolisme plus ou moins achevé, montrent que les élèves ont accès à des niveaux différents de conceptualisation, et que tous ne sont pas prêts à passer au caractère générique de l'objet géométrique.
Cette observation des stratégies et des liens nous donne à penser que l'on peut parfois être amené, dans l'enseignement 'ordinaire', à sauter des stades nécessaires. Les élèves ne sont manifestement pas tous prêts à concevoir des représentations « canoniques » du cercle par exemple. En ce sens, la plupart des situations proposées en primaire, qui insistent sur les représentations mathématiques auxquelles le professeur va aboutir, nous paraissent prématurées, comme nous le disions pour l'ouvrage ERMEL Géométrie.
Les objets qui apparaissent dans les schématisations peuvent alors déboucher plus ou moins sur des savoirs géométriques. Ceci permet à terme la constitution d'un milieu de référence. Par exemple, lors de la situation des triangles, un élève vient au tableau exposer sa démarche en nommant ce qu'il définit comme « la technique du compas » comme sa méthode de référence utilisée et élaborée lors de la situation sur le cercle. Cette « technique » est celle de la triangulation en utilisant le compas comme outil.
La prise en considération de la schématisation permet par ailleurs un développement des ostensifs propre à ce niveau de milieu dans les situations : la production d'une multitude de représentations non canoniques permet aux élèves de chercher avec leurs propres moyens. A l'école primaire, il n'est sans doute pas nécessaire de chercher à aller systématiquement plus loin, même si certains élèves en sont manifestement capables.

3 CONCLUSION

Un de nos objectifs de recherche était de mettre en évidence le rôle des représentations et leur progression possible. Ceci a bien été observé lors de la mise en place de la progression car les élèves ont pu créer des liens entre les différentes situations proposées (« technique du compas » utilisée pour la situation des triangles et méthode de triangulation utilisée pour la situation sur les losanges). Un second objectif était de définir ce que peut être un répertoire de représentation et d'en préciser sa fonction. Ce répertoire se confectionne au niveau du milieu objectif (milieu de recherche) et au niveau du milieu de référence (milieu de validation). Il se constitue à travers les expériences pour anticiper les figures attendues et pour argumenter sur les solutions géométriques possibles. Il constituera une base pour la géométrie déductive à un moment donné de la scolarité. Ainsi, les élèves se familiarisent avec un certain nombre de représentations qu'ils vont être amenés à manipuler.

D'après les premiers éléments d'analyse de la progression mise en place, nous pensons que la phase de schématisation nous permet d'établir des constats, d'analyser les signes dans les schémas produits par les élèves, afin de proposer une démarche constructive de connaissances et de savoirs. De plus, nous faisons l'hypothèse que la prise en compte de la schématisation dans l'enseignement de la géométrie à l'école primaire permet aux élèves de proposer des raisonnements basés sur leur schéma. Il est alors possible de voir émerger, dans la situation, un raisonnement sur un objet géométrique : par exemple sur le cercle, sur le nombre de points d'intersection de deux cercles, etc … comme nous avons pu le montrer dans les vidéos.
Enfin nous pensons nécessaire que les élèves s'entraînent à faire des schémas et à les décoder, afin de disposer d'expériences leur permettant plus tard d'interpréter les figures géométriques. Sur cette question de l'expérience en mathématiques, on relira avec profit Briand (2007).

4 BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M., ROBINET (1982) Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *RDM* **3 (1),** 5-60, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BERTHELOT R., SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans le cycle obligatoire*, Université Bordeaux I.

BERTHELOT R., SALIN M.H. (1993-1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, **53**.

BLOCH I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieux dans la Théorie des Situations Didactiques : recherche d'une dialectique scientifique entre analyses théoriques et contingence. *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 125-139, Dorier et al., La Pensée Sauvage, Grenoble.

BLOCH I. & PRESSIAT A. (2009) L'enseignement de la géométrie, de l'école au début du collège : situations et connaissances, *Nouvelles Perspectives en Didactique des Mathématiques*, p. 51-73, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BLOCH I. & SALIN M.H. (2004) Espace et géométrie : géométrie dans le méso-espace à l'école élémentaire et au début du collège. *Actes du XXXème colloque COPIRELEM*, IREM Paris 7.

BRIAND J. (2007) La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe. *Petit x*, **75**.

BROUSSEAU G. (1983) Etude de questions d'enseignement, un exemple de géométrie, *Séminaire des mathématiques et de l'informatique IMAG*, Université de Grenoble.

COMBIER G., PRESSIAT A. (2003) Apprentissages géométriques au début du Collège, *INRP*, *Actes du colloque inter-IREM 1er cycle de Montpellier*, Quelles géométries au collège ? "Geste physique, geste virtuel, geste mental", IREM de Montpellier.

ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes*. Paris : Hatier.

GIBEL P. (2009) Analyse des connaissances et des savoirs utilisés par les élèves lors de l'élaboration de raisonnements en situation adidactique à l'école primaire, *Actes du colloque EMF*, Dakar.

GOBERT S. (2001) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire* Thèse, Université Paris 7.

GOBERT S. (2007) Conditions nécessaires à l'usage des dessins en géométrie déductive, *Petit x*, **74**.

GONSETH, F. (1945 à 1955) *La géométrie et le problème de l'espace*. Neuchâtel : Editions du Griffon. (Tome IV : La synthèse dialectique)

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol. **11**, Strasbourg.

MARGOLINAS C. (1994) Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe, *Séminaire didactique et technique, n°158*, Université J. Fourier, Grenoble.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2008) *Programmes et Instructions Officielles*, www.eduscol.education.gouv.fr

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.J., VERBAERE O. (2007) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM 2. *Petit x*, **72**.

OSEL C. (2007) *Le problème de la constitution des références spatiales par le biais des schématisations*, Mémoire de Master, Université Bordeaux2.

TIERCELIN C. (1993) *La pensée signe. Études sur C.S. Peirce*. Nîmes : Jacqueline Chambon

Annexe : Descriptif des situations

SITUATION 1 : LES CERCLES

Cette situation est expérimentée dans une école primaire à Lourdes (65) en CM1 le jeudi 12 mars 2009. Nous reprenons les travaux de M. Artigue et Robinet (Artigue et Robinet, 1982).
La classe de CM1 est constituée de 22 élèves.
Nous donnons une définition des différents espaces dans lesquels se produisent les situations proposées (Brousseau, 1983) :
-le *micro-espace* : c'est l'espace des petits objets que l'on peut déplacer, manipuler. On peut les percevoir de façon exhaustive. Le sujet est à l'extérieur de cet espace.
-le *méso-espace* : c'est l'espace des objets fixes qui ont une taille entre 0,5 et 50 fois la taille de l'enfant. Ces objets peuvent être vus globalement, pratiquement de façon simultanée. Le sujet fait partie de cet espace. C'est par exemple l'espace de la classe, de la cour de récréation,…
-le *macro-espace* : c'est celui de l'espace urbain. Le sujet ne peut en avoir que des visions locales, la vision globale ne peut être qu'une construction intellectuelle. Le sujet est à l'intérieur de cet espace.

<u>Objectif général</u> : Installer le cercle comme lieu des points situés à une distance donnée d'un point fixé.
<u>Objectif secondaire</u> : Installer la propriété caractéristique d'un point du cercle. Préserver la mémoire de la longueur.
<u>Descriptif de la séance</u> : Dans un premier temps, les élèves vont agir dans le micro espace. En classe, ils auront à leur disposition une feuille de papier A3 sur laquelle figurent un rectangle représentant la cour de récréation, un segment et un point. Ils devront schématiser l'ensemble des points situés à la même distance du point tracé. La distance à ce point est matérialisée par le segment. La vérification s'effectuera avec une bande cartonnée à la dimension du segment.

Ensuite, dans le méso-espace de la cour, par groupes de 5-6, les élèves devront trouver à nouveau cet ensemble de points. Ils disposeront de cordes de longueurs et de couleurs différentes, d'une règle de 1 mètre et de craies de couleur (pour éviter les reproductions d'un groupe à l'autre et permettre une différenciation avec les couleurs pour la vérification). La vérification s'effectuera avec une corde sur laquelle il y aura des marques des différentes couleurs correspondant aux différentes longueurs.

<u>Consigne du micro-espace</u> : « Sur cette feuille, la cour est dessinée. Dans la cour, il y a une corde et un point. Vous devez tracer le plus possible de points à la même distance du point tracé sur la feuille. Le segment dessiné représente la corde dont vous disposerez lorsque vous irez travailler dans la cour. Vous pourrez vérifier si tous les points que vous avez tracés sont à la bonne distance avec cette bande cartonnée qui est à la dimension de la corde. Je vous donnerai la bande lorsque vous estimerez avoir résolu le problème ».
<u>Matériel du micro-espace</u> : Feuilles A3 avec la cour représentée, Bande cartonnée à dimension du segment de la feuille A3. Les élèves disposent de règle graduée, équerre et de compas.
<u>Consigne du méso-espace</u> : « A présent, vous êtes dans la cour. Vous allez devoir tracer sur le sol le plus possible de points situés à la même distance du point qui est déjà tracé par terre. Vous avez à votre disposition des craies, une corde par groupe et une règle de 1 mètre. Vous pourrez vérifier si vos points sont à la bonne distance avec la corde qui a des traits de différentes couleurs mais seulement une fois que vous serez certains d'avoir résolu le problème. Chaque groupe aura une couleur attitrée, la corde et la craie de couleurs associées. ».
<u>Matériel du méso-espace</u> : 4 cordes de couleurs et de longueurs différentes (L>1m), 4 règles de 1 mètre non graduées, des craies de couleurs, une corde avec des traits de différentes couleurs tracés sur celle-ci. Ces traits matérialisent les 4 longueurs des cordes de couleur dont les élèves disposent. Cette corde est pour la maîtresse à fin d'effectuer les vérifications. Le fait que la professeur utilise la même corde pour vérifier permet de mieux mettre en évidence la similitude des tâches des quatre groupes.

Etape de justification : Sur une feuille, demander à chaque groupe ce qui leur permet de dire que leur méthode est bonne. Puis, leur demander ce qu'ils pourraient dire de tous les points à égale distance du point tracé au sol.

SITUATION 2 : LES TRIANGLES

Cette situation est expérimentée à l'école primaire du Lapacca à Lourdes (65) en CM1. Nous reprenons les travaux du COREM, école Michelet de M.H.Salin.
La classe de CM1 est constituée de 22 élèves.

Objectifs généraux :
- Construire un triangle à partir de segments donnés et à partir d'un message écrit par un camarade.
- Prendre conscience que le compas est l'instrument de conservation et report d'une longueur.
- Formuler et communiquer sa démarche de construction.

Compétences :
- Construire quelques figures.
- Utiliser des outils usuels tels que papier calque, règle, compas, etc… pour construire une figure plane.

Descriptif de la séance : Les élèves vont agir pendant toute la séance dans le micro espace et seuls. La mise en commun s'effectuera dans le méso espace au tableau en groupe classe.
Dans un premier temps, les élèves ont à leur disposition une feuille A4 sur laquelle sont tracés 3 segments de différentes longueurs et de différentes couleurs (le plus long est en vert, le plus court en bleu et le troisième en rouge). Ils sont en oblique sur la feuille les uns en dessous des autres. Le plus long a une mesure supérieure à 21 cm (largeur d'une feuille A4).
Les élèves pourront construire 4 triangles différents dont les mesures sont les suivantes :
Triangle A: 25 cm, 16 cm, 12 cm
Triangle B: 23 cm, 18 cm, 10 cm
Triangle C: 24 cm, 17 cm, 11 cm
Triangle D: 27 cm, 15 cm, 13 cm

Variables : les longueurs des segments, la feuille de papier, les instruments.
Matériel : Feuilles A4 avec les segments de couleur tracés, feuille A4 pour la construction, stylos feutres bleu, vert, rouge, baguettes en bois pour la validation lors de la mise en commun, craies de couleur, compas, règle, équerre, crayon de papier, gomme.
Consigne du micro-espace : « Chacun d'entre vous va recevoir une feuille blanche sur laquelle sont dessinés trois segments (vous n'aurez pas les mêmes segments) et une feuille blanche pour établir la construction. Vous allez travailler seul. ».
Montrer le matériel en même temps.
« Vous allez devoir construire un triangle par assemblage des trois segments dessinés. Vous devez travailler au feutre et utiliser les mêmes couleurs que sur les segments modèles. Lorsque vous avez terminé, vous m'appelez pour vérifier. Vous avez 10 minutes » (numéroter les essais sur la feuille).
Consigne du méso-espace : Les trois segments sont tracés sur le côté du tableau. Les élèves qui ont tâtonné passent au tableau pour expliquer leur démarche.
Nous gardons le même segment pour base. Avoir beaucoup d'essais sur une même base, sur un même segment afin qu'un arc de cercle se dessine.
Faire décomposer les élèves qui font des économies. Par exemple, la base et un segment sont donnés. L'élève ne trace pas le troisième segment avec la règle et voit que cela ne coïncide pas. Lui demander de tracer le segment pour que tout le monde puisse voir que le triangle ne peut pas se former puisque les deux extrémités des segments ne coïncident pas. Ainsi, apparaissent les essais successifs pour chaque segment.

Devant plusieurs essais pour un segment, demander aux élèves s'ils n'auraient pas pu positionner les points des extrémités du segment sans utiliser la règle (utilisation du compas).

Montrer la simulation au tableau avec les baguettes de couleur en les déplaçant sur les différents essais en gardant une extrémité fixée à un des sommets de la base afin que les élèves puissent constater le déplacement du segment et plus particulièrement de l'extrémité non fixe mais aussi la conservation de la mesure du segment.

<u>Étape de justification</u> : Dans le micro espace avec les triangles dessinés sur papier calque. Et dans le méso espace avec les baguettes de bois représentant les segments au tableau.

Atelier A5

FORMATION CONTINUE EN GÉOMÉTRIE AU CYCLE 3 : UNE ENTRÉE PAR LES PROBLÈMES. PRÉSENTATION DU TRAVAIL DU GROUPE IREM ÉCOLE COLLÈGE DE LYON.

Annette Braconne-Michoux
Formatrice IUFM Lyon, site de Saint Etienne, Université Lyon 1
Groupe école collège IREM de Lyon
annette.braconne-michoux@iufm.univ-lyon1.fr

Hélène Zucchetta
Formatrice IUFM Lyon, site du Rhône, Université Lyon 1
Groupe école collège IREM de Lyon
h.zucchetta@free.fr

Résumé
Le groupe IREM de Lyon présente un atelier proposant des activités géométriques à analyser afin de les adapter pour la formation continue et pour des élèves en classe de cycle 3 – 6ème. Il s'agit de problèmes de reproduction de figures géométriques complexes. Pour chacune des figures (présentées en annexe) une analyse de la figure et des variables didactiques de la situation sont exposées. Une des figures est ensuite utilisée pour exemplifier certains points théoriques de Duval et Godin concernant les différentes appréhensions d'une figure (perceptive, séquentielle, opératoire et discursive) et la décomposition d'une figure complexe en unités figurales élémentaires.
Suit une rapide présentation des travaux du groupe puis un scénario de stage de formation est développé de manière détaillée. Dans un premier temps des problèmes de description de figures sont proposés avec pour objectifs ::1-décrire pour reconnaître (jeu du portrait), 2-décrire pour faire. Dans un second temps, des problèmes de reproduction sont à résoudre.
Une synthèse des différents types de problèmes géométriques est proposée (en annexe).
Une mise au point sur l'institutionnalisation, conceptuelle et méthodologique, nécessaire pour conclure ces activités clôt cette présentation.

1 INTRODUCTION

Dans cet atelier, nous nous proposions de mettre les participants en situation de recherche de problèmes de géométrie et ensuite de présenter le Groupe école collège de l'IREM de Lyon, sur la géométrie en cycle 3. Parmi les entrées possibles des formations que nous avons conçues, le choix s'est porté ici sur les problèmes comme outil de formation des enseignants pour une mise en questionnement des pratiques. Nous présenterons et analyserons les problèmes de construction proposés aux participants de l'atelier, puis nous exposerons un exemple de déroulement d'une formation.

Dans le cadre de cet atelier nous avions l'intention de questionner cette pratique (utilisée en formation continue), proche de l'homologie c'est-à-dire de discuter comment le transfert de la démarche telle que vécue dans l'atelier peut se faire dans un contexte de formation continue puis dans la pratique quotidienne de la classe. Ce questionnement porte sur les points suivants :

- dans quelles conditions ce transfert peut-il se faire : adaptation des contenus, des consignes, de l'organisation dans la classe ? etc.
- quels documents, quelles références théoriques faut-il apporter lors d'une formation continue ?

Dans un deuxième temps nous avons évoqué le CD-Rom en cours d'élaboration, où seront regroupés plusieurs scénarios de formation continue, conçus pour s'adapter à différents publics.

2 PRÉSENTATION DE L'ATELIER

2.1 Problèmes de géométrie

Dans un premier temps, nous avons demandé aux participants de l'atelier de construire et d'analyser des figures avec le matériel de géométrie (annexe n°1). Certaines figures ont été choisies car elles posent des problèmes de construction ; elles abordent différents concepts : alignement, cercle, milieu … Nous utilisons ces figures en stage de formation continue dans une activité d'analyse des changements dans les procédures des élèves (voir § 5 : Description d'un scénario de stage). Les participants avaient à produire une affiche pour répondre à la consigne donnée : *Analysez ces activités proposées : quels enjeux, quels intérêts, quels apports du point de vue géométrique, du point de vue de la formation y trouvez-vous ?*
Dans un deuxième temps, nous avons présenté quelques éléments théoriques sur l'appréhension des figures.

2.1.1 Présentation des problèmes proposés

Toutes les situations amènent à analyser la figure et à repérer les éléments qui ont permis sa construction (il est parfois nécessaire de remettre les traits de construction qui auraient été effacés).
Les thèmes abordés dans la reproduction des figures sont les suivants :

Figure 1 a) : alignements.
Figure 1 b) : symétries ou propriétés des quadrilatères particuliers.
Figures 2 a) et b) : cercles et arcs de cercles et leurs centres.
Figure 3 a) : angles (même si on peut commencer la construction par le tracé d'une diagonale et le repérage d'un milieu).
Figures 3 b) : arcs de cercles dans carré.
Figure 3 c) : propriétés des quadrilatères particuliers (carré dans un carré).

Dans le cadre de l'atelier, pour chaque reproduction de figure, les questions posées ont été :

- reproduisez la figure : y a-t-il plusieurs démarches possibles ?
- comment peut-on modifier la consigne pour que la reproduction soit plus facile ? plus difficile ?
- comment peut-on la proposer en formation, compte tenu des différents publics concernés : formation continue d'enseignants du primaire ou du secondaire ? stages de T1 ou de T2 ?
- dans quelles conditions (taille du modèle, consigne orale ou écrite, taille de la reproduction) la reproduction d'une telle figure est-elle intéressante pour un niveau de classe donné ?

2.1.2 Variables didactiques et analyse des problèmes

Avec des élèves, les figures à reproduire sont données en taille supérieure pour permettre une meilleure prise d'informations. Il faut aussi autoriser les élèves à tracer sur la figure modèle (ce qui peut être interdit quand la figure est sur un livre).

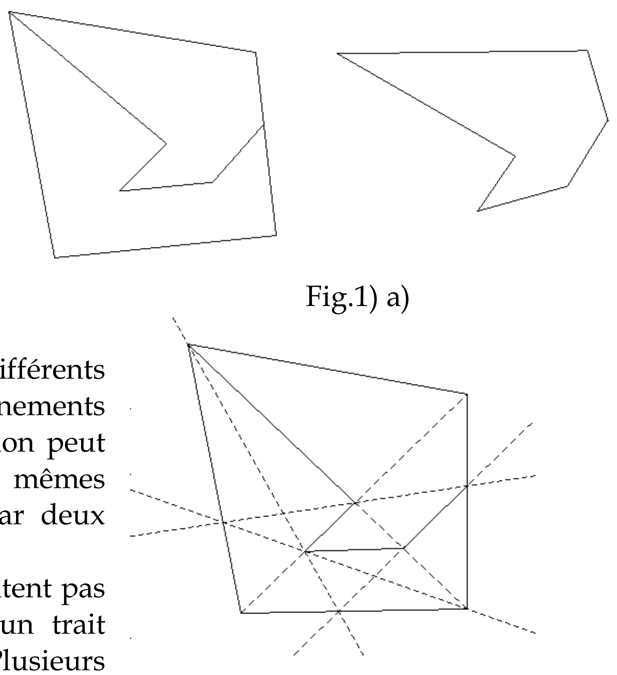


Fig.1) a)

La figure 1) a) est une figure à compléter avec uniquement une règle graduée. La situation est inspirée de l'analyse présentée par Keskessa, Perrin-Glorian et Delplace (2007) mais la configuration initiale a été modifiée.
Pour autant elle repose toujours sur la reconnaissance de différents alignements : certains traits sont à prolonger mais d'autres alignements sont à repérer par la connaissance de trois points. La validation peut être faite grâce à deux alignements supplémentaires. Ces mêmes alignements permettent aussi de terminer la construction par deux méthodes différentes.
Dans le cas de cette figure, les alignements de points ne présentent pas tous les mêmes difficultés selon qu'il s'agit de prolonger un trait existant ou de créer une droite passant par deux points. Plusieurs démarches sont possibles dans la mesure où certains alignements sont indépendants les uns des autres. La figure à compléter est légèrement tournée par rapport à l'original pour éviter des procédures s'appuyant sur une reconnaissance de parallélisme (faite en glissant éventuellement la règle).
On aborde le concept de points et celui de droites : un point est obtenu comme intersection de droites, et une droite est soit vue comme prolongement d'un « trait » tracé, soit définie par deux points (aspect plus difficile pour les élèves).

La figure 1) b) est à compléter à partir d'un losange. Cette figure est composée de trois losanges[1] tels que : les (droites) diagonales sont alignées ; les points d'intersection des diagonales de chaque losange confondus ; les diagonales du petit losange sont les demi-diagonales du grand losange ; le losange « moyen » a deux sommets communs avec le petit losange et deux autres sommets communs avec le grand losange.
Elle nécessite donc la reconnaissance des deux diagonales des losanges.

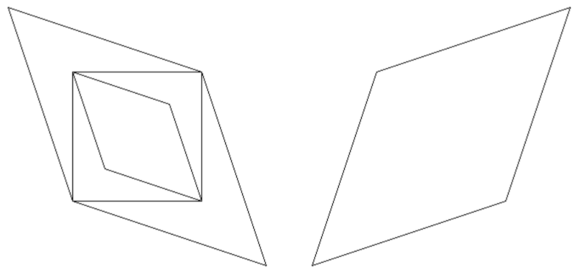


Fig. 1) b)

Dans le cas de cette figure, les variables didactiques sont la taille de la figure demandée (identique ou non au modèle), l'orientation de la figure finale par rapport à la figure initiale, le fait que le losange proposé est le « grand » losange ou le « petit » losange du dessin initial, voire le moyen et les instruments autorisés (règle graduée ou non, compas, équerre). Dans le cas d'une reproduction à l'identique, il peut suffire de reporter les mesures au compas ou à la règle sans prendre en compte les propriétés géométriques de la figure initiale. Dans le cas d'une reproduction à une taille différente, les procédures pourront changer en fonction des instruments autorisés mais les

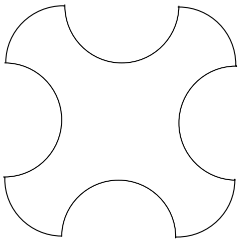


Fig. 2) a)

[1] Dans le fichier photocopiable de CAP Maths CM1, le losange moyen est un carré car le grand losange (comme le petit) a une petite diagonale de longueur moitié de la grande.

propriétés géométriques de la figure initiale devront être identifiées : diagonales perpendiculaires et, quand elles sont de même support, elles sont de longueur double l'une par rapport à l'autre. Enfin donner comme élément de départ ce qui sera le « petit losange » a tendance à être plus difficile pour les élèves que de construire à l'intérieur du « grand losange » puisque, justement ils doivent faire des tracés qui « sortent de la figure ».

Dans les deux figures 2) a) et 2) b), la principale difficulté réside dans le repérage des centres des cercles ou des arcs de cercle. L'expérience auprès de nos élèves a montré qu'une observation globale et donc trop rapide peut inciter à voir un cercle au lieu de quatre petits arcs de cercle dans la 1ère figure et une rosace à six branches dans la deuxième. Les procédures utilisées par les élèves pour construire chacune de ces deux figures sont nombreuses et s'appuient sur des propriétés géométriques différentes (symétries, positions des centres des cercles, rayons des cercles, etc.). Cette variété peut amener à faire une mise en commun et permettre à ceux qui n'ont pas trouvé d'essayer une méthode présentée par leurs camarades.
La figure 2 a) sera étudiée de façon détaillée dans le paragraphe suivant à propos des apports théoriques qui peuvent être donnés à ce sujet.

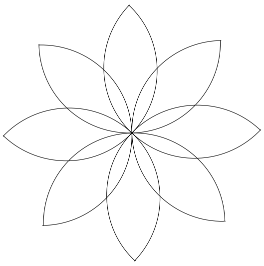


Fig. 2) b)

Là aussi, les deux figures peuvent être reproduites à l'identique ou à une taille différente ; les procédures de construction sont de toutes façon très nombreuses. Dans les deux cas, il faut autoriser les élèves à compléter la figure-modèle pour y prendre des informations qui détermineront la procédure.

Les figures 3) a), b) et c) sont à compléter à partir d'un élément agrandi de la figure. Les constructions de ces figures nécessitent l'utilisation de propriétés conservées dans l'agrandissement : alignements, milieux et angles.

L'intérêt de la figure 3) a) réside dans le fait que seules les mesures d'angles sont conservées. En effet, on peut commencer la construction de la figure en repérant qu'une partie d'une diagonale a été dessinée mais; le triangle de gauche n'est pas isocèle, le sommet de l'autre triangle n'est ni au tiers ni au quart de la longueur, le milieu de la longueur du rectangle qui est aussi un sommet de ce triangle ne permet pas à lui seul de poursuivre la construction ; etc. La reproduction de la figure nécessite donc le report d'au moins un angle pour fixer un des segments obliques qui n'est pas une diagonale du rectangle. Tous les instruments sont autorisés. Un papier calque de taille très réduite peut être distribué. La taille du rectangle à l'intérieur duquel s'inscrit la construction est alors de moindre importance (il suffit que les proportions soient conservées pour l'agrandissement).

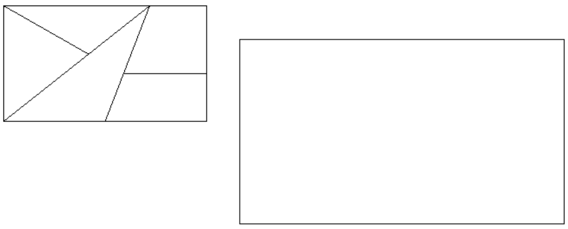


Fig. 3) a)

La difficulté dans la reproduction de la figure 3) b) réside dans le fait que le centre du carré sert ensuite comme point de repère des extrémités des rayons des huitièmes de cercles dont les centres sont les sommets du carré. Là encore il faut autoriser les élèves à compléter la figure initiale pour identifier le rôle du centre du carré.

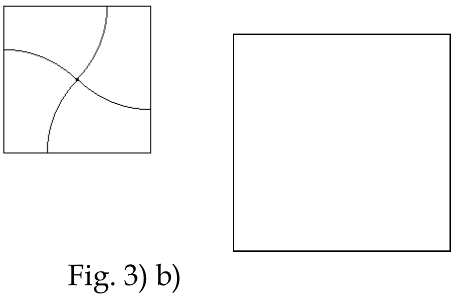


Fig. 3) b)

La figure 3) c) présente les mêmes conditions de reproduction que la figure 1) b) : le carré proposé peut être le « carré intérieur » de la figure initiale auquel cas la construction se fera autour de cette figure, soit le carré proposé est le « carré extérieur » de la figure initiale et la construction se poursuit à l'intérieur de cette figure. Dans ce dernier cas, la difficulté de reproduction réside dans le repérage des milieux des côtés sur le modèle et la construction des côtés du carré intérieur par intersection des segments joignant les milieux des côtés aux sommets du carré. Au contraire si le carré proposé doit devenir le carré intérieur, on obtient les sommets du carré extérieur en prolongeant les côtés du carré existant et en reportant la longueur de ses côtés.

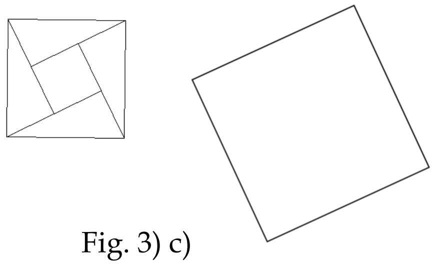


Fig. 3) c)

Comme dans le cas de la figure 1) b) les variables didactiques sont liées à la taille de la reproduction demandée (à l'identique ou d'une taille différente), l'orientation de la reproduction par rapport à la figure initiale. Selon que le carré proposé au début de la reproduction est le carré intérieur ou extérieur de la figure initiale, les procédures seront différentes. Si les figures 1) b), 3) b) et 3) c) sont reproduites à l'identique, le repérage des points importants pour la construction peut se faire uniquement par mesurage sans repérer un point comme étant le milieu d'un segment, ou comme le centre d'un carré. Le passage aux propriétés des figures devient nécessaire avec l'agrandissement de celles-ci.

2.2 Apports théoriques qui peuvent être travaillés avec ces problèmes

La mise en œuvre des situations de reproduction ou de construction de figures est l'occasion de réactiver certaines références théoriques reprises de Duval (1994 ; 1995) et de Duval et Godin (2005), en particulier les différentes appréhensions d'une figure géométrique et la décomposition d'une figure géométrique en ses unités constitutives.

L'illustration de chacune de ces références a été faite à partir de la reproduction d'une seule figure :

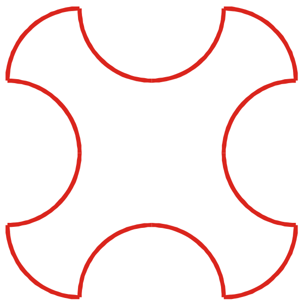


Fig. 1

2.2.1 Différentes appréhensions d'une figure

Appréhension perceptive :

> « Ce qu'une figure montre au premier coup d'œil. Nous pouvons ensuite y discriminer des sous-figures qui ne coïncident pas nécessairement avec les unités figurales prises en compte dans la construction de la figure. »
> (Duval 1994)

Dans le cas présent, l'appréhension perceptive peut suggérer que les quarts de cercle sont sur un même cercle qui a pour centre le centre de la figure. Les centres des demi-cercles sont sur ce même cercle. Sur un modèle suffisamment petit, l'usage du compas pourra confirmer cette perception (fig.2).

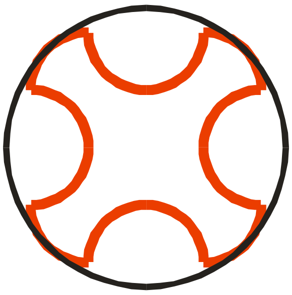


Fig. 2

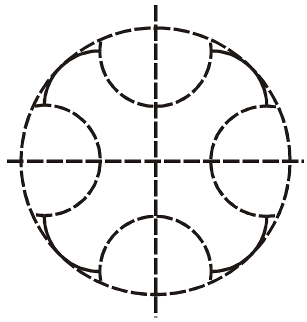


Fig. 3

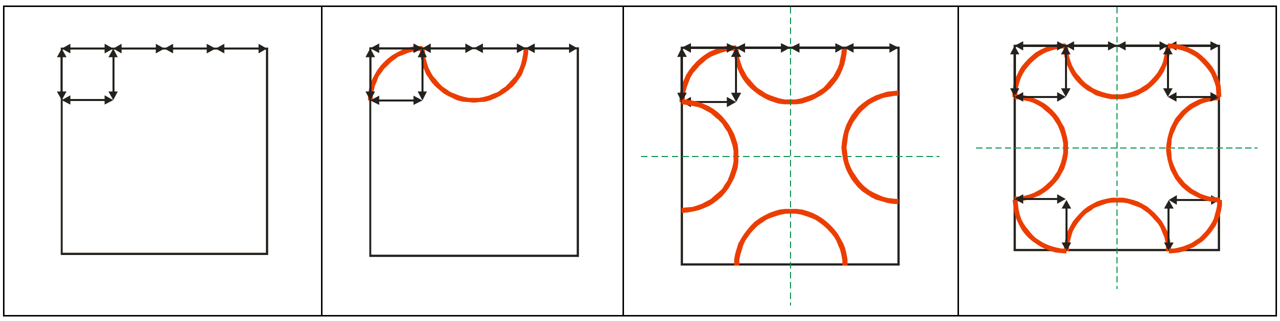
La perception de la symétrie centrale ou des axes de symétrie pourra aussi engendrer des hypothèses de construction erronées (fig.3).

Appréhension séquentielle :

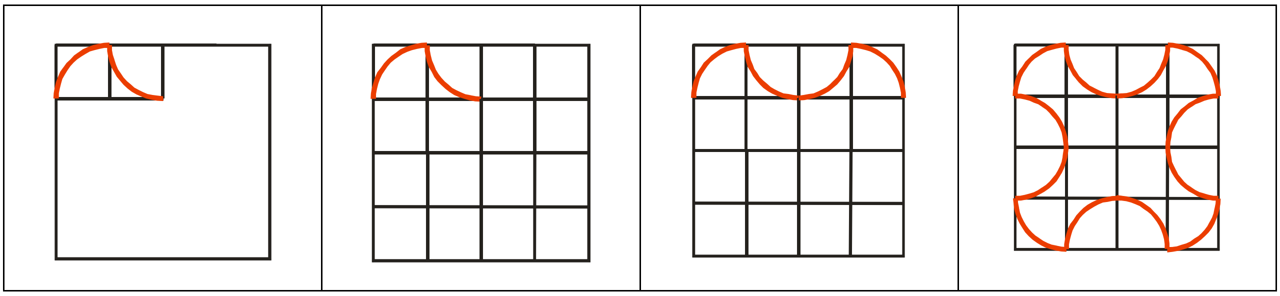
> « Elle concerne l'ordre de construction d'une figure, cet ordre dépend non seulement des propriétés mathématiques de la figure à construire mais aussi des contraintes techniques des instruments utilisés. (…) D'où un traitement spécifique commandé par cette exigence : pour réussir la construction il faut respecter les associations initiales entre propriétés mathématiques et possibilités techniques de l'instrument ».
> (Duval 1994)

Dans le cas étudié ici, plusieurs procédures peuvent être utilisées par les élèves d'une même classe. C'est donc là un objet de discussion et d'échange entre pairs.

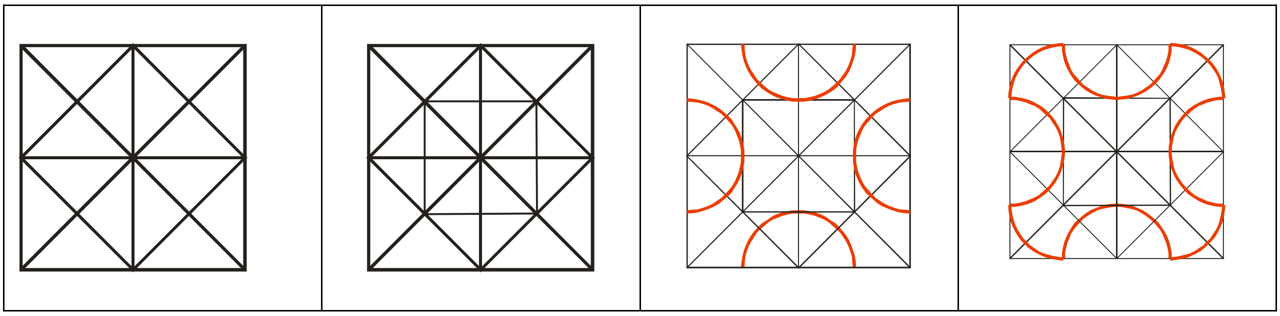
1ère construction :



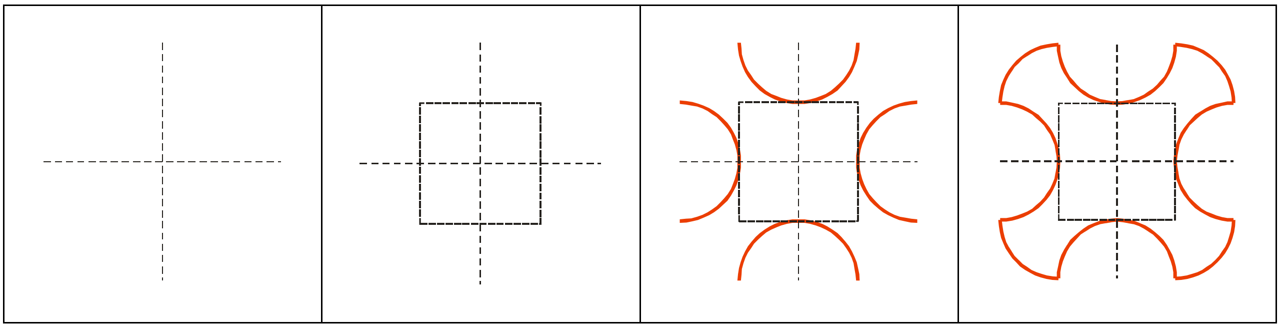
2ème construction :



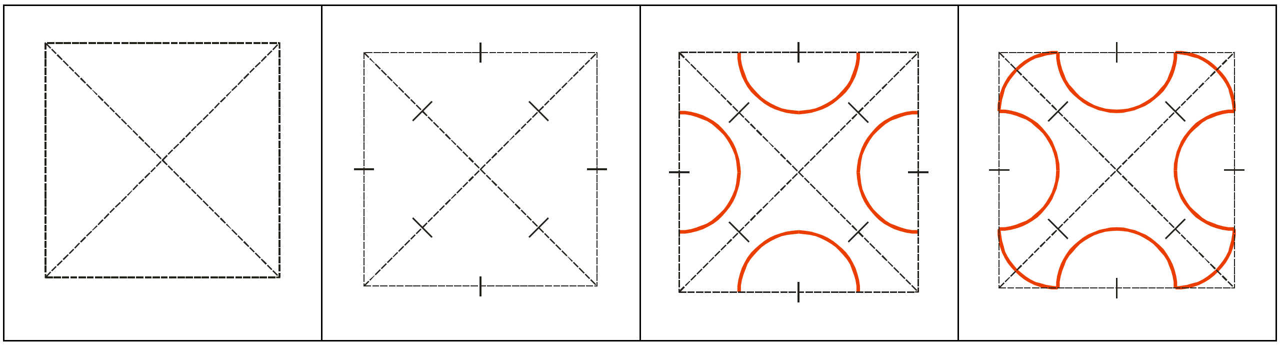
3ème construction



4ème construction

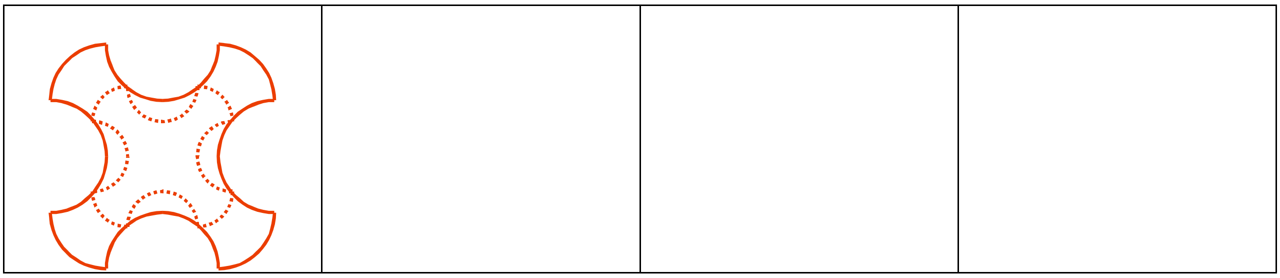


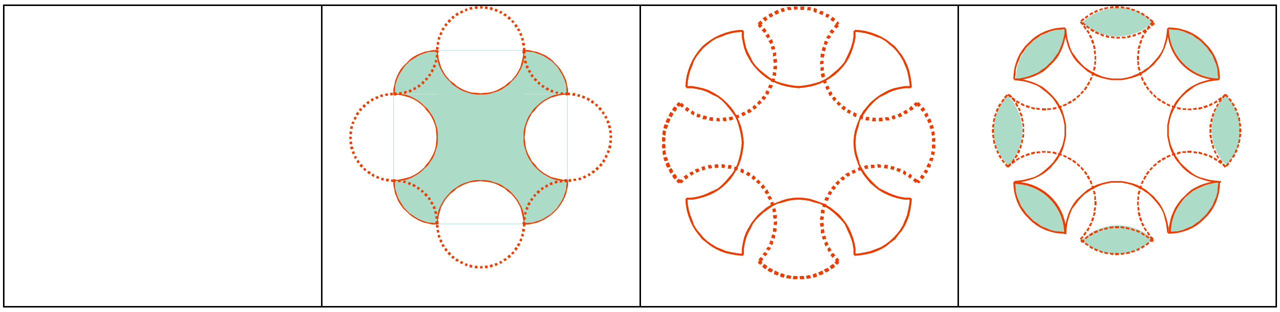
5ème construction



Appréhension opératoire :

> « C'est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures : modifications méréologiques, modifications optiques, modifications positionnelles. »
> (Duval 1994)





L'appréhension opératoire de la figure initiale permet de la reconnaître dans ces nouvelles figures, elle permet aussi de voir que la figure initiale est composée de sous-figures qui se répètent par l'effet de plusieurs symétries

Appréhension discursive :

> « C'est une explication des autres propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. Cette explication est de nature déductive. »
> (Duval 1994)

1ère description : « *Cette figure est composée de quatre quarts de cercle et de quatre demi-cercles de même rayon. Les centres des demi-cercles sont les sommets d'un carré ; les centres des quarts de cercles sont les milieux des côtés du carré. Le rayon des demis ou quarts de cercles est le quart de la diagonale* ».

2ème description : « *Cette figure est incluse dans un carré, les milieux des côtés sont les centres de 4 demi cercles ayant comme rayon le quart du côté, les quarts de cercles complétant la figure ont le même rayon et pour centres les milieux des demi-diagonales du carré* ».

2.2.2 Décomposition d'une figure en unités figurales élémentaires.

Duval (1995) précise que pour qu'il y ait figure il faut qu'il y ait une « tache visible » ou encore « *l'implantation* d'une tache visible ».

> Cette « *implantation* » est susceptible de plusieurs variations visuelles qui peuvent être regroupées en deux grands types :
> - le type des variations liées au nombre de dimensions : 0 (un point), 1 (une ligne) et 2 (une zone),
> - le type de variations qualitatives : variations de forme (ligne droite ou ligne courbe ; contour ouvert ou fermé d'une zone), variation de taille, d'orientation (par rapport au plan fronto-parallèle), variation de grain, de couleur, etc.
> Ces distinctions permettent de définir les éléments constitutifs d'une figure, toute figure apparaissant alors comme une *combinaison de valeurs pour chacune des variables visuelles de ces deux types, **dimensionnel** et **qualitatif***. A partir de là il est facile de déterminer les éléments qui vont fonctionner comme des unités de base représentatives, c'est-à-dire des unités figurales élémentaires. (pp. 175-176)

Les unités figurales élémentaires de dimension 1 sont donc les lignes droites (droites, demi-droites, segments) les lignes courbes (arcs de cercle). Parmi les unités figurales élémentaires de dimension 2 on trouve les formes rectilignes ouvertes (angles, l'intersection de deux droites,…), les formes rectilignes fermées (triangles, quadrilatères, …), les formes courbées ouvertes (courbe avec point de rebroussement, intersection de deux courbes,…) les formes courbées fermées (cercles, ovales ;…).

Selon Duval (1995), toute figure est une combinaison d'unités figurales élémentaires. Ainsi le carré que l'on peut percevoir comme une unité figurale de dimension 2 est aussi la combinaison de 4 unités figurales élémentaires : ses côtés. Or pour reproduire ou construire une figure, l'élève doit décomposer celle-ci en unités figurales élémentaires, souvent de dimensions différentes et établir des relations entre ces différentes unités. C'est là que l'on peut trouver une explication de la difficulté des élèves dans la reproduction de figures : « *Les élèves évitent au maximum de transformer une unité figurale de dimension 2 en une configuration d'unités figurales de dimension 1 ou 0.* » (p.180)

Dans le cas de la reproduction de la figure précédente (figure fermée de dimension 2), l'élève doit identifier les quarts de cercle et les demi-cercles en tant que tels c'est-à-dire la décomposer en 8 éléments de dimension 1 avant de commencer son travail, quelle que soit sa procédure. Il doit ensuite établir les relations existant entre ces différents éléments. Percevoir certaines relations ne garantit pas la réussite dans la reproduction de la figure (cf. appréhension perceptive). L'expérience a montré que dans le cas particulier de la reproduction de cette figure, non seulement sa décomposition en unités figurales élémentaires est difficile mais la relation entre ces différentes unités est un autre obstacle à surmonter. En effet, les élèves ont rapidement identifié que la figure se composait de quatre demi-cercles mais l'identification des quarts de cercles en tant que forme a été plus difficile (qualification de l'unité figurale de dimension 1) et la recherche de la position des centres de ces quarts de cercle (relation entre les unités figurales élémentaires) a été encore plus difficile : les élèves hésitant souvent à tester leurs hypothèses sur le modèle avant d'agir sur leur production ; la taille de la figure initiale étant alors très importante.

Dans le cadre de l'atelier, les figures initiales étaient de petites tailles, la relation entre les unités figurales élémentaires n'a pas été facile à identifier ; si la taille de la figure avait été plus grande, les tests faits par les participants auraient été plus efficaces.
Toutes les figures que nous avons proposées (voir annexe 1) peuvent être analysées de la même manière, que ce soit en termes d'appréhensions d'une figure ou de décompositions en unités figurales élémentaires.

3 PRÉSENTATION DU GROUPE ÉCOLE COLLÈGE DE L'IREM DE LYON

Le groupe IREM « école - collège » de Lyon a été créé à l'initiative de l'IREM et des IPR de maths de l'Académie de Lyon pour construire et assurer des stages en direction de publics variés : des IEN et conseillers pédagogiques, des enseignants en primaire et des professeurs de mathématiques en collège…
Ce groupe conçoit des formations sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire ou à la liaison avec le collège et peut répondre à des demandes spécifiques aussi bien à destination des enseignants qu'à des formateurs des écoles et des collèges ainsi qu'à des conseillers pédagogiques de circonscription. Il est composé de professeurs de collège, de formateurs du primaire (conseillers pédagogiques et animateurs maths sciences) et de professeurs d'IUFM, des trois départements de l'académie.

Le cahier des charges de l'Inspection (et du Rectorat) fixe le cadre comme l'indique l'extrait suivant : « Il y aura donc lieu de prévoir des formations pouvant, à partir d'une structure de base, s'adapter aux différents publics et aux demandes des interlocuteurs, de plus modulables dans le temps, d'une demi-journée à quatre jours. ». Puis il se poursuit avec des indications sur les contenus qui doivent faire l'objet de formations.
Cinq ans plus tard, parmi les thèmes travaillés (Proportionnalité, Calcul mental, Fractions et décimaux, Géométrie plane, Grandeurs et mesures, Numération, Le nombre en maternelle, Géométrie dans l'espace, Langage et maths, Différenciation …), nous en sommes à reprendre deux thèmes : « Géométrie plane » et « Le nombre en maternelle » en vue de pouvoir les communiquer sous forme de CD-Rom ou de brochure. Différents scénarios seront proposés en modules de 3h, 6h ou plus suivant les objectifs de la formation. Lors de l'atelier, nous avons montré brièvement un ou deux déroulements de stage. Nous détaillons un module dans un stage de géométrie dans la suite de l'article.

4 DESCRIPTION D'UN SCÉNARIO DE STAGE

Le groupe « école-collège » de l'IREM de Lyon a conçu plusieurs modules sur le thème de la géométrie. Suivant la demande de stage, nous adaptons un ou plusieurs de ces modules. L'un d'entre eux propose une entrée par les paradigmes géométriques tels que définis par Houdement & Kuzniak (2003) et Parzysz (2003). La consigne donnée aux stagiaires est d'analyser des réponses d'élèves du CE2 à la 5ème sur trois exercices de géométrie. Deux autres modules abordent l'un l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique et l'autre la résolution de problèmes en géométrie nécessitant des raisonnements. Nous avons conçu aussi des modules sur le thème de la géométrie dans l'espace et celui des grandeurs et mesures.

Nous décrivons ici le scénario autour des problèmes de géométrie et plus particulièrement sur ceux de reproduction de figures.

- Dans un premier temps, il peut être proposé un travail sur les problèmes de description de figures avec deux activités :

  - **Activité 1** : Décrire pour reconnaître

Un stagiaire choisit une figure de la fiche 110 Cap Maths CM1 (annexe 1 ; 4°)) avec le jeu du portrait (« qui est-ce ? »). Les autres stagiaires jouent le rôle des élèves : ils essaient de retrouver la figure choisie par le stagiaire en posant des questions auxquelles le stagiaire ne répond que par « oui » ou « non ». Ils peuvent avoir la fiche à disposition ou non. Une discussion s'en suit sur ce qu'on travaille, sur les aides possibles comme donner une liste de vocabulaire dans laquelle l'élève peut piocher…
Le choix de la figure à deviner ne doit pas être fait au hasard : il faut pouvoir discriminer les figures les unes des autres mais pas trop vite. La question de la gestion en classe peut être posée (Qui parle, combien parlent ? …)

  - **Activité 2** : Décrire pour faire faire

Trois figures composées d'un carré et deux demi-cercles (ayant comme diamètre un côté du carré) positionnés de différentes façons sont distribuées aux stagiaires. Ils doivent la décrire par écrit de façon qu'un autre stagiaire puisse refaire la figure à partir du texte qu'il recevra. Le choix est fait pour que la position des demi-cercles par rapport au côté soit un caractère discriminant. Une discussion sur les difficultés rencontrées par les élèves lors de l'écriture de tels messages est amorcée et des pistes d'aide sont données.

- Dans un deuxième temps, nous donnons des figures à reproduire à l'identique (un exemple en annexe 3) comme si les stagiaires étaient des élèves (situation d'homologie). Nous estimons que l'action de reproduction amène les stagiaires à analyser les figures et qu'elle est nécessaire pour imaginer les procédures et difficultés des élèves, ce qui fait l'objet de la consigne suivante : « Vous avez essayé de faire les exercices de cette fiche. Pour chacun d'eux, indiquez si vous les donneriez dans vos classes, à quel niveau, avec quel objectif, pour quelles raisons ? »

L'annexe 2 est un exemple de déroulement de stage tel que nous nous le communiquons au sein du groupe : matériel pour l'animateur et les stagiaires ; durée et objectifs de l'activité ; consignes, synthèse à mettre en place. Des liens hypertextes[2] renvoient à d'autres fichiers. C'est ainsi que l'on trouvera en annexe 3 un exemple de figures et en annexe 4 une synthèse sur les différents types de problèmes en géométrie et sur une démarche d'apprentissage.

Replacer la reproduction de figures dans le cadre de la classe pose la question de l'objectif précis de ce type d'activités et éventuellement d'une idée de progression. La confrontation des différentes

---

[2] Les liens hypertextes ne sont pas actifs dans cet article, ils ne le seront que dans la brochure et le CD-Rom en cours de production à l'IREM de Lyon.

procédures amène les stagiaires à appréhender une figure sous différents aspects. Souvent ceux-ci se positionnent selon les difficultés qu'ils ont rencontrées au cours de leur recherche de l'exercice pour décider du niveau de classe où peuvent être proposées ces figures, d'où leur rejet pour certaines d'entre elles. Nous visons ici la notion de problème en géométrie avec une nécessité de confrontation entre élèves et un objectif spécifique (recherche de traits de construction, concept de cercle par la connaissance du centre et du rayon …). La pratique dans nos classes de 6ème, en début d'année, nous permet d'expliciter un déroulement possible sur une séance entière et de donner des réponses d'élèves. Par exemple, pour la figure analysée ci-dessus, un de nos élèves de 6ème ne voyait la figure que globalement comme un trait courbe continu se refermant sur lui-même et des arcs de cercles ayant le même rayon, il avait fait une figure en jugeant à vue des centres des cercles. Dans le débat sur les constructions pour argumenter sur le fait que les quarts de cercles n'appartiennent pas au même cercle, un autre élève avait dit que « cela tourne pareil mais ça ne se rejoint pas et donc ce n'est pas le même cercle » pour dire qu'il y a bien le même rayon mais pas le même centre. Les différentes conceptions du cercle peuvent être évoquées en apports théoriques.
L'activité 2 propose des variations dans la présentation des figures à reproduire (nous jouons sur les variables didactiques comme des figures à compléter à l'identique ou agrandies, avec une même orientation ou non les contraintes sur les instruments de géométrie autorisés…) et la consigne est d'analyser ces changements du point de vue des procédures et de l'apprentissage des élèves. Les exemples proposés dans nos stages correspondent aux figures reproduites à l'identique dans la première partie et lors de l'atelier nous avons fait analyser aux participants pour certains d'entre eux. Par exemple, la figure 3) a) ayant été reproduite à l'identique (des reports de mesures suffisent), nous proposons d'analyser le changement provoqué par l'agrandissement.

Une synthèse est faite sur les différents types de problèmes de géométrie (annexe 4 distribuée aux stagiaires), ainsi que parfois sur les différentes phases (action, formulation, validation, institutionnalisation) adaptées à des exemples de géométrie (Brousseau, 1983).
L'institutionnalisation est souvent une phase qui est négligée par les enseignants en géométrie. La validation de la reproduction de figures se limite souvent au contrôle à l'aide d'un papier calque ou par un énoncé des étapes de construction repris par l'enseignant lui-même. La question de l'institutionnalisation est en particulier très intéressante dans le cas des figures à compléter seulement par alignements car elle contribue à la construction du concept de droite et de point chez les élèves. On pourra mettre en avant :

- Un point est défini par l'intersection de deux droites (ou de deux lignes si on travaille avec des arcs de cercles) ;
- Par deux points distincts, il passe une droite et une seule ;
- Des points alignés sont des points sur une même droite ;
- On peut toujours prolonger un segment, le segment ayant pour support une droite…

Une institutionnalisation sur des points méthodologiques a aussi sa place dans la classe. Par exemple : « Pour reproduire la figure, je dois repérer les éléments qui la composent (demi-cercles, quarts de cercles, symétries, milieux, alignements…) et pour cela je peux tracer sur le modèle des traits de construction qui auraient été effacés. »

5 CONCLUSION

L'objectif de cet atelier était de mettre les participants en situation de stagiaires éventuels, tels que nous le pratiquons dans l'académie de Lyon, mais aussi d'apporter aux formateurs une proposition d'entrée en géométrie par les problèmes dans le cadre des stages de formation initiale ou continue. Commencer un stage en demandant aux stagiaires de reproduire des figures est une mise en situation de formation continue de type « homologie » dans laquelle il nous semble fondamental que l'activité proposée soit aussi porteuse de questionnements sur les actions et les concepts travaillés. C'est ainsi que l'activité proposée aux participants de l'atelier était une adaptation spécifique permettant à la fois la mise en

situation de type « homologie » et autorisant les « pas de côté » nécessaires à l'analyse des variables didactiques ainsi qu'à la reproductibilité du module de formation.
Les participants ont convenu que le choix des figures posant « problème » est déterminant : elles ne doivent être ni trop évidentes ni trop complexes ce qui engendrerait une perte de temps. Les objets géométriques sur lesquels les reproductions de figures s'appuient doivent être aussi suffisamment variés pour que des stratégies de répétition soient mises en défaut. Les participants ont aussi réalisé l'utilité et la nécessité d'utiliser les instruments de géométrie (certains n'avaient plus utilisé de compas depuis longtemps …) afin d'apprendre aux élèves à réaliser des constructions soignées.

Compte tenu de la multiplicité des configurations proposées, les échanges ont été nombreux dans les groupes mais la synthèse a été brève.
La 1ère figure a été source de toutes les questions qui peuvent être posées lors d'un stage de formation continue en géométrie dans la mesure où l'alignement est rarement évoqué tant en stage qu'en situation de classe :

- contrat : respect et compréhension des consignes (a-t-on le droit de mesurer, d'utiliser le compas, de tracer des perpendiculaires ou des parallèles sont des questions qui apparaissent), matériel utilisé, contraintes, …
- concept de droite et de point (point obtenu par intersection de deux droites, droite vue comme prolongement d'un trait ou définie par deux points ce qui s'est révélé plus difficile)
- validation (autre alignement existant validant la construction qui apparaît par confrontation entre participants) …

Tous les participants ont convenu de l'importance à accorder aux ancrages théoriques associés au sujet du stage, comme ici les constructions géométriques, y compris dans le contexte d'un stage de formation continue. Durant l'atelier, nous n'avons évoqué que les différentes appréhensions d'une figure selon Duval mais les paradigmes géométriques selon Houdement et Kuzniak auraient eu toute leur place.
En formation continue, ces références théoriques permettent d'expliquer des choix, d'éclairer les stagiaires et peut-être de faire bouger leur pratique. Dans les questionnaires d'évaluation de fin de stage, les activités sont plébiscitées, les apports théoriques sont souvent jugés intéressants mais il est important que ceux-ci soient à la portée des stagiaires et puissent vraiment leur être utiles dans leur pratique de classe en leur permettant d'analyser d'autres figures de façon autonome. Les discussions autour des variables didactiques montrent, en général, que les stagiaires en formation continue envisagent difficilement des variations possibles sur les figures. La réflexion sur les effets de ces variations dans les changements de procédures des élèves amène les stagiaires à envisager un travail sur les propriétés à travers les constructions sans attendre la démonstration. A contrario, les participants à l'atelier ont spontanément identifié l'importance du jeu sur les variables didactiques.
Dans la dernière partie de l'atelier nous avons présenté le travail du groupe école-collège de l'IREM de Lyon et nous avons pu constater qu'il y a effectivement une demande de communication de maquettes détaillées de stages pouvant s'adapter à différents publics. Nous avons fait part des préoccupations du groupe qui sont de rendre lisible notre travail, de le diffuser en direction de nouveaux formateurs. La question de l'intégration d'éléments de théorie de la didactique et celle de la forme de la diffusion (CD-Rom et/ou présentation papier) et des droits d'auteurs ont été posées.

6 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (1994): *L'enseignement de la géométrie à l'Ecole primaire,* Grand N n°53; pp. 39-56; IREM de Grenoble

BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (1995): *Un enseignement des angles au cycle 3*, Grand N

BERTHELOT, R. & SALIN, M.H. (2001): *L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive?* Petit *x* ; n° 56 ; IREM de Grenoble

BROUSSEAU, G. (1983) : *Études de questions d'enseignement, un exemple : la géométrie ;* IMAG n°45 ; Grenoble

CHARNAY, R.; COMBIER, G. & DUSSUC, M. - P. (2003) : *Cap maths CM1, Manuel, Guide des activités et Fiches photocopiables ;* Hatier

Commission Inter-IREM Premier Cycle (1998) : *Des mathématiques en sixième*

Commission Inter IREM Premier Cycle, COPIRELEM, (2001) : *Articulation école-collège : Des activités géométriques*, IREM de Lyon

DUVAL, R. (1994) : *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*, Repères IREM, n°17

DUVAL, R. (1995) : *Semiosis et pensée humaine* ; éditions Peter Lang ; pp. 173-207

DUVAL, R. & GODIN, M. (2005) : *Les changements de regard nécessaires sur les figures*, Grand N ; n°76 ; pp. 7 - 27

HOUDEMENT, C & KUZNIAK, A. (2003) : *Epistémologie et didactique : un exemple de cadre conceptuel pour analyser l'enseignement de la géométrie*, Carnets de route de la COPIRELEM, Concertum, tome 2 ; pp. 95- 106

KESKESSA, B. ; PERRIN-GLORIAN, M.J. & DELPLACE, J.R. (2007), *Géométrie plane et figures au cycle 3, une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie*, Grand N ; n° 79 ; pp 33 à 60

PARZYSZ, B. (2003) : *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1*, Carnets de route de la COPIRELEM, Concertum, tome 2 ; pp. 107-125

PELTIER, M.L. (2003) : « *La fleur*» *et « le napperon* » ; Carnets de route de la COPIRELEM. Tome 2 ; pp. 183 - 190

ROYE et al. (2000) : *Travaux géométriques : Apprendre à résoudre des problèmes ; cycle 3*, IREM de Lille, CRDP Nord - Pas de Calais SCÉREN

7 ANNEXES

7.1 Annexe 1

COPIRELEM AUCH juin 2009
<u>Consigne</u> : Réalisez les constructions.
Nous proposons ces figures à reproduire dans le contexte des modules de formation continue
Analysez ces activités proposées : quels enjeux, quels intérêts, quels apports du point de vue géométrique, du point de vue de la formation y trouvez-vous ? Vous devez produire une affiche.

1°) a) En utilisant uniquement la règle non graduée, compléter la figure 2 pour obtenir la figure 1.

Figure 1

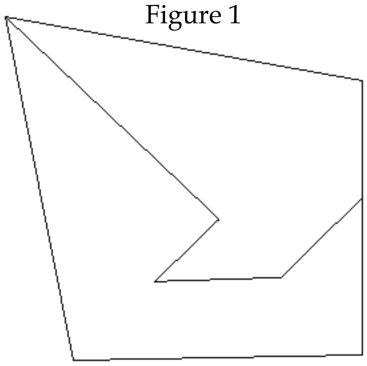
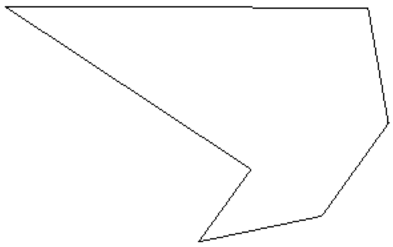


Figure 2



b) Compléter la figure 2, elle doit être identique à la figure 1.

Figure 1

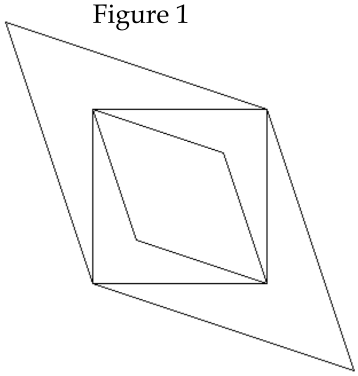
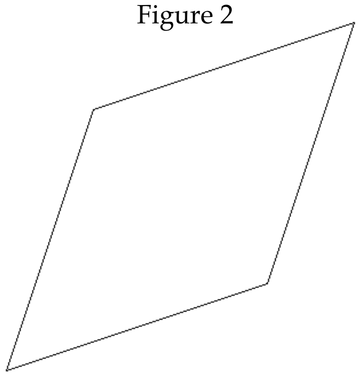


Figure 2



2°) Reproduire les figures ci-dessous.

Figure a)

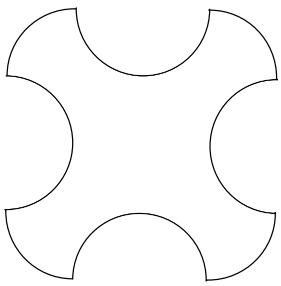
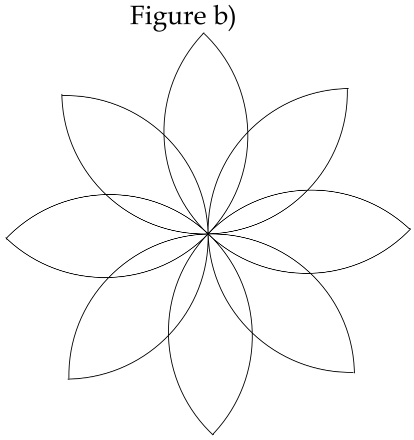
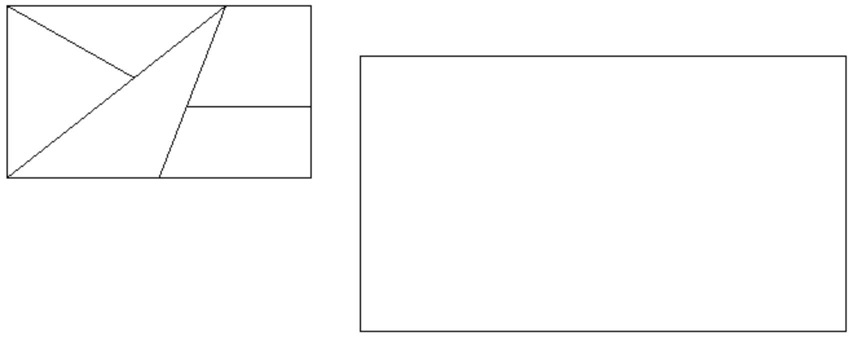


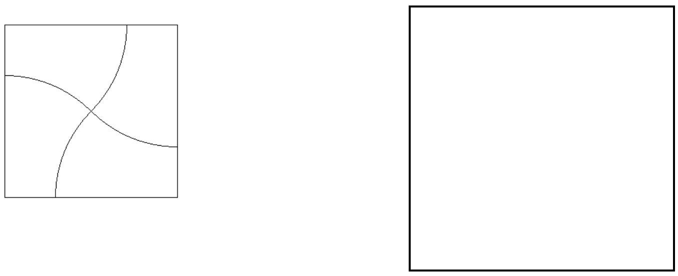
Figure b)



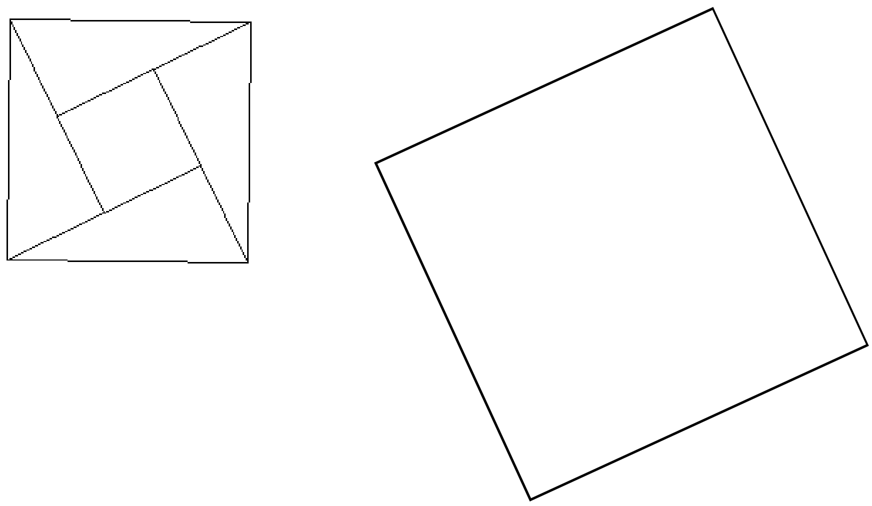
3°) a) La figure a été agrandie. Vous devez la compléter à partir du tracé déjà effectué du rectangle.



b) La figure a été agrandie. Vous devez la compléter à partir du tracé déjà effectué du carré.

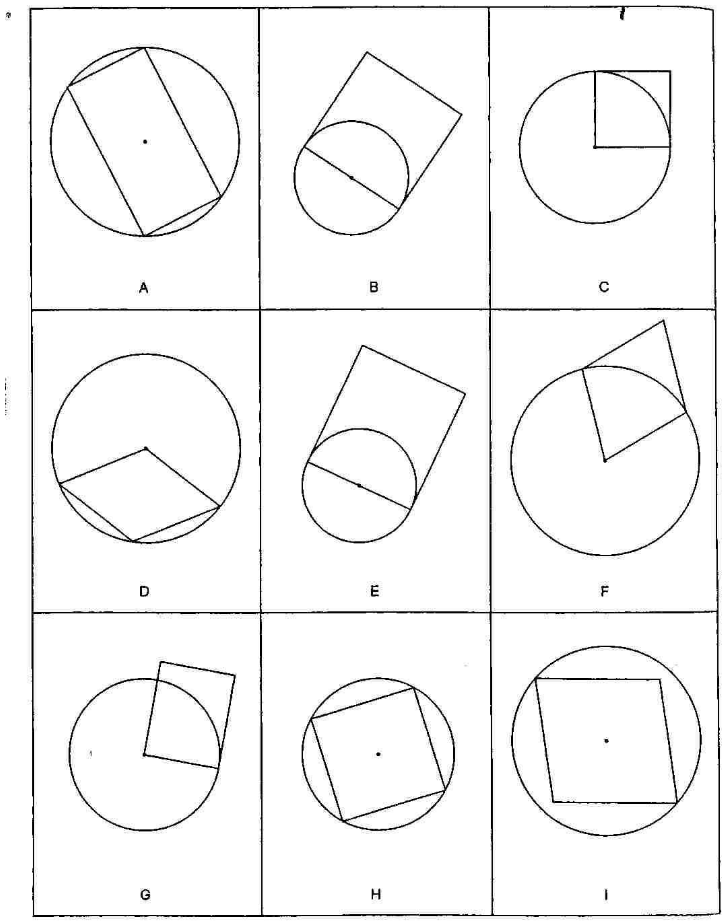


c) La figure a été agrandie. Vous devez la compléter à partir du tracé déjà effectué du grand carré (extérieur).

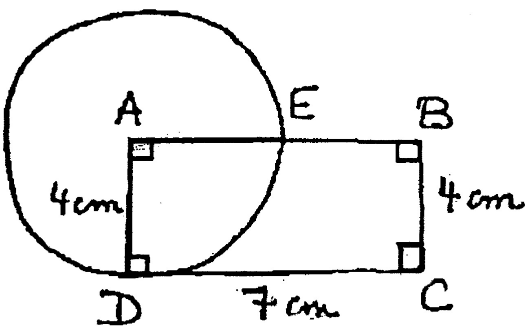


Ces figures sont extraites de CAP CM1, suivi scientifique 6ème, Objectif Calcul CM1…

4°) **CAP Maths CM1 fiche 110 matériels photocopiables**
Les élèves (éventuellement par binômes) reçoivent une de ces figures (pas la même pour tous).
La consigne est donnée en deux temps :
1er temps : « Rédige un message pour permettre à un autre élève de reconnaître la figure.»
2è temps après échanges des messages : « Avec le message que tu as reçu, retrouve la figure parmi celles de la fiche.»



5°) a) Le schéma ci-dessous est réalisé à main levée. Il n'est pas en vraie grandeur. Mais les dimensions indiquées sont celles de la figure en vraie grandeur.

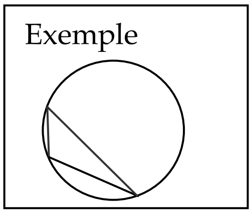


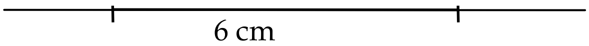
Quelle est la longueur du segment [EB] sur la figure en vraie grandeur ?
Explique comment tu as trouvé :

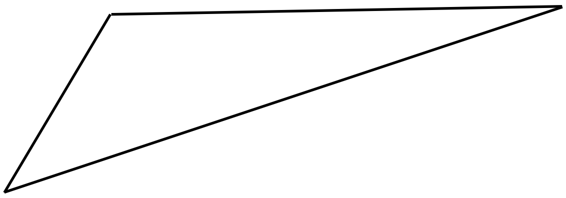
b) D'après Maths et clic 6ème Bordas

Tracer une droite d. Tracer deux points B et C n'appartenant pas à d et situés de chaque côté de d. Placer un point A sur la droite d pour que le triangle ABC soit isocèle en A.

c) On avait dessiné un cercle passant par les trois sommets du triangle.
Ce cercle a été effacé. On sait qu'il avait **6 cm de rayon**.
A toi de retrouver le centre et de retracer le cercle.







7.2 Annexe 2

Les liens hypertextes ne seront actifs que dans la brochure en cours de production à L'IREM de Lyon.

Stage 2009 :
Stage Géométrie au début du collège.
2ème jour
1°Demi-journée

Donner la fiche avec différents problèmes de construction, la consigne étant simplement de faire les constructions (on peut donner la veille sur un stage de deux jours)
jour 1\PbsConstruction.doc (photocopies à donner) voir annexe 3

DES PROBLEMES DE GEOMETRIE (9 h -10h45),
Activité 1 : DES PROBLEMES DE TRACE

***Objectif* :**
Montrer qu'un même type d'activité peut permettre de viser différents buts

Consigne : « Vous avez essayé de faire les exercices de cette fiche, Pour chacun d'eux, indiquez si vous les donneriez dans vos classes, à quel niveau, avec quel objectif, pour quelles raisons ? »

Travail par groupes avec retour par un rapporteur. Mise en commun : chaque groupe propose pour un exercice, les autres complètent (on peut aussi faire faire des affiches pour avoir tout en même temps)
jour 2\Analyse succincte des problèmes de construction.doc

Synthèse rapide
Ce n'est pas le type de tâche qui définit le problème mais c'est l'objectif visé qui définit quel problème choisir dans le type de tâche.
Pour les élèves, il est important d'autoriser les tracés sur la figure à reproduire, ce qui est impossible sur un manuel. Quelle synthèse en classe ?

Activité 2 : DES PROBLEMES MODIFIÉS

***Objectif* :**
Montrer comment à partir d'un problème donné, le professeur peut jouer sur les variables didactiques pour faire évoluer les procédures des élèves pour favoriser un apprentissage.
Consigne : « Voici 4 nouveaux exercices, qu'ont-ils de différent par rapport aux précédents ? Qu'est-ce que cela modifie dans les procédures des élèves, et pour l'apprentissage….»
jour 2\ElevePBsConstruction.doc ; (photocopies à donner)

Synthèse
Pour un objectif d'apprentissage donné, l'enseignant peut construire des problèmes géométriques où la notion visée est utile pour résoudre le problème, il suffit souvent pour cela de faire évoluer les énoncés de problèmes type en jouant sur les variables didactiques (choix de la figure, du support, des contraintes, agrandissement….)
C'est un apprentissage des techniques ou des savoirs à partir de la résolution de problèmes.
A l'école primaire et au collège, les programmes précisent que les notions s'introduisent et peuvent s'apprendre à partir de la résolution de problèmes. jour 2\problèmes.ppt ;
jour 2\Brousseau.doc ; jour 2\géométriecycle 3pbsMPDussuc.doc (photocopies à distribuer) voir annexe 4

PAUSE (10 h 45- 11h)

DES PROBLEMES DE CONSTRUCTION SUR TICE (11 h-12h),

Objectifs **:**

- ***Réfléchir sur les apports éventuels de la géométrie dynamique dans les problèmes de reproduction ou de construction et comment jouer sur cette variable didactique pour favoriser l'apprentissage.***

Consigne : « Voici différents exercices de reproduction ou de construction. Pour chacun d'entre eux imaginer les procédures que les élèves peuvent mettre en place soit sur papier soit avec un logiciel de géométrie dynamique. Les proposeriez- vous à vos élèves ? avec quel support ? Pour quelles raisons ?

jour 2\des problèmes à classer.doc (photocopies à donner) (fichier Cabri)

Mise en commun, débat

Synthèse

L'utilisation d'un logiciel de géométrie permet de :

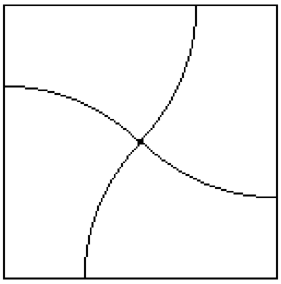
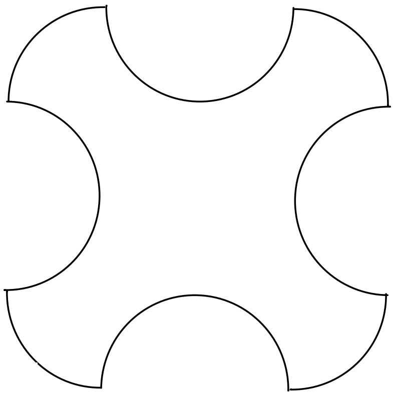
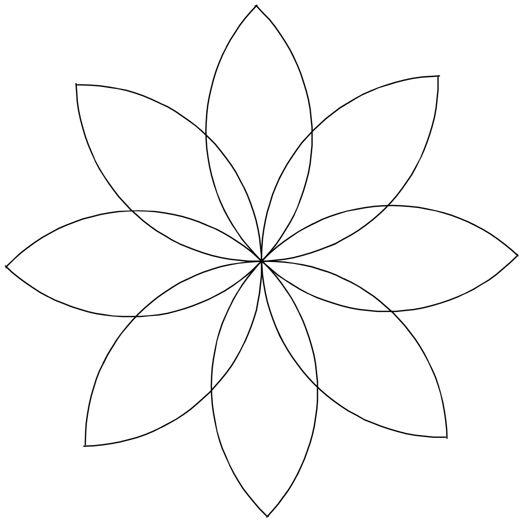
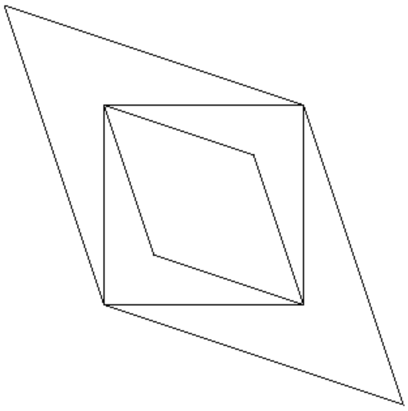
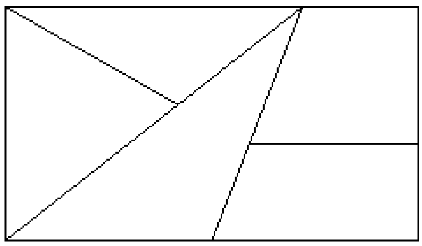
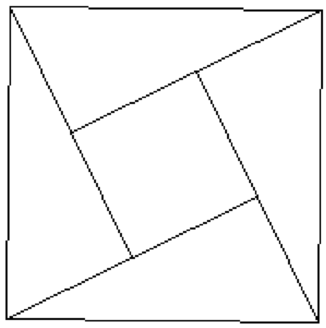
- S'affranchir des difficultés de maniement des outils classiques (soin et précision de tracé)
- De fournir des moyens d'auto validation en bougeant un point de la figure.
- De mettre en œuvre des procédures (de résolution de problèmes) qui ne sont pas accessibles sinon et donc de leur donner du sens. (en particulier les transformations)

Mais la mise en œuvre de ces séances suppose des échanges de procédures et sont conditionnés par une certaine maitrise de l'outil par les élèves.

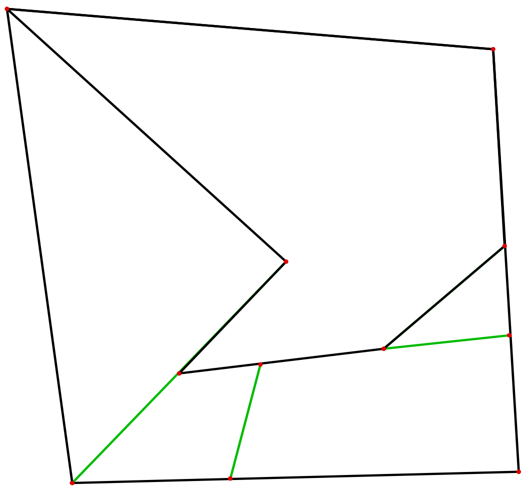
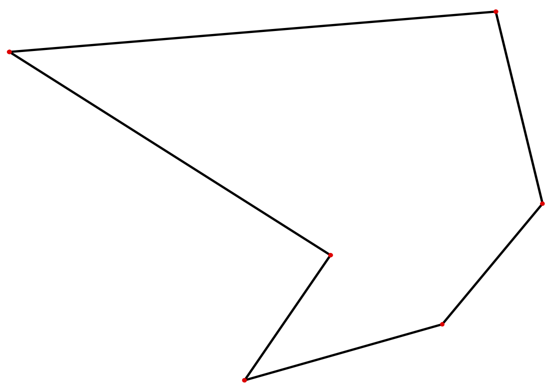
7.3 Annexe 3

Problèmes de construction

1°) Reproduis à l'identique les figures ci-dessous, tu vérifieras avec un papier calque.

Compléter, à partir du modèle, la figure incomplète, en utilisant la règle non graduée seulement.

7.4 Annexe 4

Des problèmes pour enseigner la géométrie en cycle 3

On retrouve les caractéristiques des situations problèmes :

1. L'élève a un problème à résoudre (dans l'espace qui nous entoure, sur la feuille de papier…)
2. Les connaissances ou les compétences visées sont nécessaires à la résolution du problème
3. L'activité de l'élève est finalisée par un but, l'élève peut vérifier lui-même si le but est atteint ou non (validation), la comparaison entre sa production et le but à atteindre est un moment essentiel
4. L'élève peut faire des essais, des erreurs qui sont considérées comme des étapes de l'apprentissage
5. Les échanges entre élèves sont favorisés.

Suite à ces situations, il faut bien sûr ménager des temps de réinvestissement et d'entrainement.

Les principaux problèmes sont :	Exemples
des problèmes de localisation	communication de la position d'un point sur un quadrillage, sur une feuille blanche, le receveur doit placer au même endroit sur un support identique
des problèmes d'identification	jeu du portrait sur des triangles, des quadrilatères, des polyèdres... demande d'informations au maître ou à un autre élève pour reconnaître un objet parmi un lot d'objets de la même famille, seulement reconnaissance pour faire fonctionner des propriétés ou construction à l'identique, travail collectif, une question après l'autre ou recensement de toutes les questions orales ou écrites.
des problèmes de description	reconnaître un objet parmi d'autres programme de construction
des problèmes de reproduction à l'identique ou d'agrandissement-réduction	il faut contraindre l'élève à abandonner une démarche du type : tracé à la règle/validation à vue/essai et réajustement ; il est important de bien choisir le modèle, le matériel utilisé (papier et instruments…), l'orientation du modèle dans la feuille, la donnée ou non d'un 1er élément (un côté a déjà été tracé), la taille du modèle, nombre de modèles et éloignement... L'organisation de la séance est très importante.
des problèmes de construction	A partir d'une description, construire un objet qui est absent (avec un programme de construction ou à partir des caractéristiques de l'objet carré de diagonale 6cm) construction avec des contraintes : compléter le patron d'un solide
des problèmes de représentation,	représentation plane d'un objet de l'espace, en « perspective » ou en patron
des problèmes de mesurage	mesurer un côté d'un triangle coupé par changement d'échelle par exemple
d'autres problèmes : « chercher tous les … »	chercher tous les patrons d'un cube, tous les pentaminos, tous les tétracubes, tous les triangles à construire sur un planche à 9 clous, tous les rectangles dans un quadrillage de 5×3…

Construction d'une progression par rapport à une notion

On peut mettre en progression des situations visant l'apprentissage d'une notion géométrique en combinant les différents types de problèmes. Pour « angle droit » par exemple :

1. Un classement de figures planes peut nécessiter le recours à cette notion pour différencier carrés et losanges presque carrés, l'équerre (ou le gabarit d'angle droit) sera utilisée
2. Un jeu de portrait sur un lot de quadrilatères permet d'expliciter les propriétés des carrés, rectangles, losanges
3. Une reproduction ou une construction à terminer permet de rendre opératoire les propriétés exprimées et d'utiliser l'équerre comme instrument de construction
4. Un jeu de message émetteur-récepteur pour reproduire une figure simple comportant des angles droits obligera à l'utilisation d'un vocabulaire adéquat, à l'explicitation des procédures de construction.

D'après Marie Paule Dussuc IUFM Bourg en Bresse, H. Zucchetta

Atelier A6

MODÉLISATION ET ÉCRITS RÉFLEXIFS : DES OUTILS POUR APPRENDRE ? RÉFLEXIONS À PARTIR D'UNE EXPÉRIMENTATION EN CM2

Jean-Claude Rauscher
MCF, ER de l'IUFM d'Alsace , IREM de Strasbourg et ACODIS

Robert Adjiage
MCF, IUFM-UDS, LISEC EA 2310 (ACODIS)

Tatiana Beliaeva
MCF, IUFM-UDS, IRMA-UMR 7501 et ACODIS
jc.rauscher@wanadoo.fr

Résumé
Nous avons proposé aux participants de cet atelier de réfléchir avec nous au potentiel et aux limites d'une ingénierie didactique mise à l'épreuve dans un CM2 de ZEP de la banlieue strasbourgeoise. Cette ingénierie porte sur une tâche de modélisation étayée par la production et l'utilisation par les élèves d'écrits réflexifs. Notre hypothèse majeure est que la notion de modèle et de modélisation est didactiquement pertinente à ce stade de la scolarité.
Ce qui suppose que :
- ce n'est pas une modélisation « au rabais » ;
- une séquence de modélisation a des effets spécifiques et repérables sur la construction, la déconstruction et la réorganisation de savoirs des élèves.

Les travaux dans l'atelier ont, d'une part, porté sur l'analyse a priori du problème proposé aux élèves et de ses potentialités, et, d'autre part, sur l'analyse de progressions d'élèves observées dans le cadre de l'expérimentation à partir de leurs écrits.
Nous rendrons ici compte des principales présentations, analyses et discussions qui ont émaillé son déroulement.

1 PRESENTATION DE L'ATELIER ET DE SON COMPTE-RENDU

1.1 La finalité de l'atelier

Dans le cadre de notre groupe de recherche Acodis[1], nous avons élaboré et mis à l'épreuve une ingénierie didactique portant sur une tâche de modélisation dans un CM2 de ZEP de la banlieue strasbourgeoise. L'hypothèse majeure de notre ingénierie est que la notion de modèle et de modélisation est didactiquement pertinente à ce stade de la scolarité, c'est-à-dire que ce n'est pas une modélisation « au rabais » et qu'une séquence de modélisation a des effets spécifiques et repérables sur la construction, la déconstruction et la réorganisation de savoirs des élèves. De plus, nous faisons l'hypothèse que le recours à des écrits « réflexifs » (Rauscher, 2006 a&b) : écrire pour expliciter ou programmer son travail, écrire sur les écrits de ses pairs en les commentant, reprendre et/ou finaliser la rédaction d'une solution du problème, favoriserait leur travail de modélisation. Pour mettre ces hypothèses à l'épreuve, nous avons observé une séquence de classe au cours de laquelle les élèves ont été invités à résoudre le problème du « géant » qui sera présenté plus loin.

---

[1] Apprentissages en Contexte didactiques. *Membres* : Robert Adjiage, Tatiana Beliaeva, Marie-José Rémigy, Jean-Claude Rauscher, Virginie Deloustal, Nicolas Séchaud.

La séquence, menée par Nicolas Séchaud (PEMF) dans sa classe en mai et juin 2008, se compose de six séances plus une séance « décrochée » consacrée à des compléments sur le quotient « décimal » de deux entiers. Avec l'équipe de recherche, Nicolas Séchaud a participé à l'élaboration et à la régulation du scénario d'enseignement. Au cours de l'année 2009, notre équipe de recherche a commencé à analyser le corpus d'observations recueilli (notes d'observations prises au cours des séances, analyses par le professeur de sa conduite de classe et des adaptations et infléchissements qu'il proposait, écrits des élèves…).
L'atelier dont nous faisons ici le compte-rendu avait pour perspective de présenter notre recherche en cours et nos premières constatations, mais surtout de partager nos réflexions avec les participants sur la pertinence et les limites d'un tel projet d'enseignement.

1.2 Le canevas de l'atelier

Les participants ont été invités à travailler tantôt individuellement, tantôt en petits groupes. Ils ont successivement été amenés à analyser :

- la tâche de résolution du problème du géant,
- la faisabilité et les enjeux didactiques de cette tâche,
- des écrits de résolution produits par des élèves lors de l'expérimentation, en termes d'évolution des procédures et des apprentissages.

De leur côté, les animateurs sont intervenus notamment pour :

- préciser leur propre analyse de la tâche de résolution du problème du géant,
- préciser leur outil d'analyse des écrits de résolution et son application aux productions des élèves concernés,
- synthétiser les productions des participants,
- animer la discussion autour de la validation de l'hypothèse de l'ingénierie.

Nous allons rendre compte des présentations et des réflexions menées dans le cadre de cet atelier en deux parties principales. La première (paragraphe 2) sera consacrée à la présentation et à la résolution du problème et à l'analyse a priori de ses potentialités et de ses limites dans la perspective d'un processus de modélisation[2]. Dans la deuxième partie (paragraphe 3), nous aborderons l'analyse de progressions d'élèves observées dans le cadre de l'expérimentation à partir de leurs écrits, non sans avoir préalablement donné des précisions sur le dispositif d'enseignement et sur l'origine des écrits soumis à examen dans le cadre de l'atelier.

2 LE PROBLÈME DU GÉANT : PRESENTATION ET ANALYSES A PRIORI

2.1 Présentation et analyse du problème

2.1.1 Un problème de Fermi

La photographie suivante est copiée de http://www.problempictures.co.uk/, avec l'aimable autorisation des auteurs.

[2] Pour la lisibilité du compte-rendu, nous avons dérogé à l'ordre chronologique du déroulement de l'atelier. En effet, l'analyse de la tâche n'a été présentée aux participants qu'après que ces derniers eurent eux-mêmes été invités à résoudre le problème.

Voici l'énoncé distribué aux élèves dès la première séance : *Cette photo a été prise dans un parc d'attraction en Angleterre. On y aperçoit une partie de la jambe d'un géant. Quelle est la taille de ce géant ?*

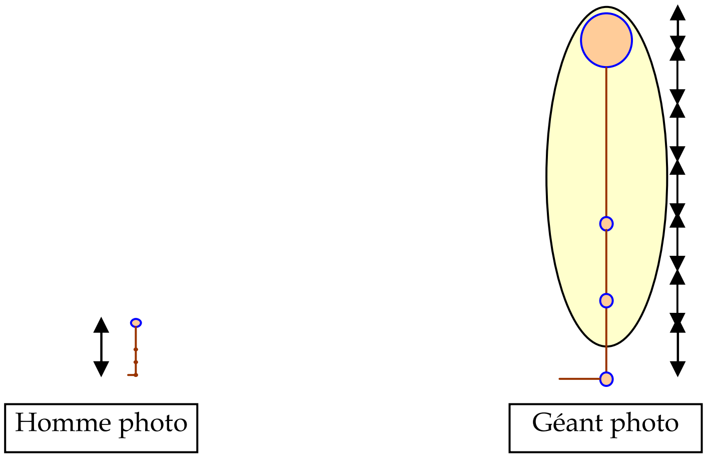
Ce problème est un problème dit de Fermi (Peter-Koop, 2004, p. 457)[3]. En voici les principales caractéristiques :

- aucun nombre n'est fourni dans l'énoncé ;
- résoudre ce problème nécessite de faire des hypothèses : taille d'un des hommes de la photo, proportions du géant, taille d'un pied d'homme… ;
- le problème est ouvert : la réponse dépend des hypothèses et de la précision des mesures éventuellement prises (mesure directe de la stature de l'homme, de la semelle du géant…) sur la photo ;
- personne ne connaît la « bonne » réponse, ni les élèves, ni le maître, ni les chercheurs ;
- la réponse ne peut être fournie qu'au moyen d'une estimation, par exemple sous la forme d'une fourchette.

2.1.2 L'analyse de la tâche

Nous avons, depuis deux ans, proposé de résoudre ce problème à des formateurs IUFM de toutes disciplines, des professeurs de mathématiques et des écoles, stagiaires ou en service, des élèves de cycle 3 dont ceux de la classe observée, des collégiens, des citoyens « lambda »… Trois grands types de stratégies sont apparus.

Stratégie 1.

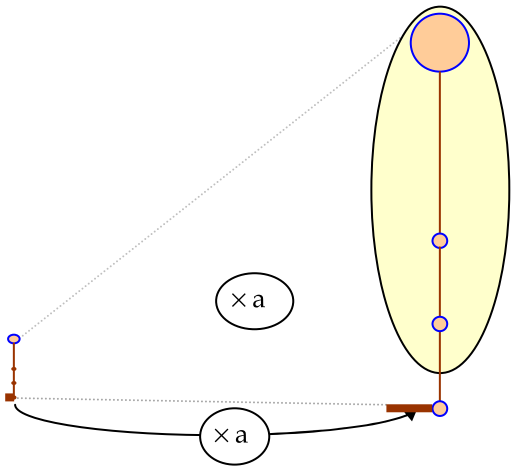


Pour mesurer la stature du géant, on a besoin d'un élément de la photo qui servira d'étalon, par exemple un des deux hommes (stature le plus souvent estimée à 1,80 m). Combien de fois peut-on reporter cet homme sur toute la hauteur du géant (supposé « raide sous la toise ») ? Comme on ne peut pas répondre directement à cette question, vu qu'une partie du géant est cachée, on doit se contenter de la seule information disponible, à savoir que l'homme arrive approximativement à hauteur du mi-mollet du géant. Estimer le rapport géant / homme revient donc à estimer le rapport du mi-mollet au corps entier. A ce stade du raisonnement, il devient nécessaire de faire une hypothèse d'homogénéité, explicitement ou implicitement : ce rapport est constant quel que soit l'individu, adulte ou enfant (soi-même, un camarade…), géant ou pas, soit, exprimé en termes mathématiques : « quels que soient les individus i et j considérés, il existe une dilatation qui fait passer de l'un à l'autre ». Il reste alors à multiplier la stature réelle de l'homme par ce rapport, (en général compris entre 6 et 7), pour obtenir un encadrement de la taille du géant. Une partie de la complexité (les différences de proportions interindividuelles) est ainsi

[3] Fermi posait à ses étudiants des problèmes qui ne pouvaient être résolus qu'aux termes d'une estimation raisonnable comme : « *Combien y a-t-il d'accordeurs de pianos à Chicago ?* »

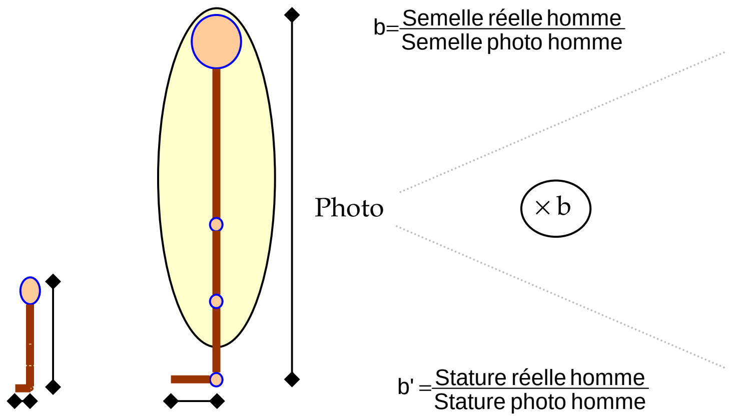
négligée, mais c'est la seule façon de proposer une réponse raisonnable. Cette stratégie a largement la faveur des élèves et des non-spécialistes de mathématiques.

Stratégie 2.



Cette stratégie repose aussi sur l'hypothèse d'homogénéité évoquée ci-dessus. Pour trouver une approximation du coefficient de dilatation de l'homme au géant, il suffit d'évaluer, par exemple par mesurage direct sur la photo, le rapport de deux segments homologues (le plus souvent le rapport des semelles ou des cous-de-pied). Il suffit alors d'appliquer ce coefficient de dilatation à la stature réelle estimée de l'homme pour obtenir une approximation de la stature réelle du géant. Cette stratégie est celle qui a la faveur des spécialistes en mathématiques, mais elle a aussi été observée auprès de « bons » élèves.

Stratégie 3.



Comme les précédentes, cette stratégie repose sur l'existence d'une dilatation de l'homme au géant, mais au lieu de calculer le rapport de dilatation (coefficient fonctionnel), elle passe par la conservation du rapport interne de deux segments du corps, le plus souvent le rapport stature / semelle. En s'appuyant sur la photo, il est possible d'évaluer ce rapport pour un des hommes d'une part, la longueur de la semelle du géant d'autre part et d'en déduire par un calcul de quatrième proportionnelle une approximation de la stature du géant-photo. Pour estimer la stature du géant réel il suffit de trouver une valeur possible pour le coefficient de la dilatation qui fait passer de la photo au réel en calculant le rapport de deux segments homologues, par exemple un des rapports b ou b' de la figure ci-dessus… et de gérer les conflits fort instructifs qui s'ensuivent lorsque des élèves constatent que b et b' diffèrent légèrement.
Cette stratégie, plus rare que les précédentes, a été observée chez des professeurs des écoles et des élèves.
Toutes les stratégies utilisées passent par la construction d'un corps humain standardisé dans ses proportions, soit d'un modèle des proportions du corps humain. Elles reposent sur trois ruptures de contrat importantes : accepter qu'une hypothèse d'homogénéité des individus soit nécessaire bien que fausse en toute rigueur (les contre-exemples abondent dans l'environnement des enfants) ; accepter

qu'une réponse puisse être un intervalle ; entrer dans une pensée relative, c'est-à-dire une pensée qui prenne en compte les proportions et non les dimensions absolues. Ce dernier point est illustré par la remarque d'un élève B. de la classe : « *Ce qui m'a surpris, oui tout ce qui m'a surpris, c'est que le prof m'a dit que N. mesure ma taille, j'étais choqué quand j'ai pris ça* ». Il faut dire que B. est le plus grand de la classe et N. la plus petite. Bien sûr, le maître n'a jamais dit que B. et N. avaient la même taille, mais que, une partie du géant étant cachée, on était amené à « *faire l'hypothèse raisonnable que le géant est fait comme nous, et donc qu'il est légitime d'évaluer le rapport Géant / botte en reportant les parties du corps correspondantes sur soi-même, qu'on soit B. ou N.* ». Pour B., les tailles absolues font obstacle à la nécessité de prendre en compte des rapports.
Remarquons pour finir qu'il existe deux procédures pour estimer la valeur des rapports nécessaires à la résolution du problème : sans numériser les grandeurs concernées, par exemple en reportant sur son propre corps ou celui d'un camarade un objet tiers de la longueur de son mi-mollet ; en numérisant a priori les grandeurs concernées : par exemple pour un enfant de cycle 3, en mesurant son mi-mollet (disons 25 cm) et sa stature (disons 160 cm), puis en effectuant le quotient de ce dernier nombre par le premier. Cette dernière procédure peut se substituer à la première mais peut aussi la suivre (pour affiner, contrôler…). Sa mobilisation au cycle 3 risque d'être entravée par trois types d'obstacles : obstacle entier / décimal (existence d'un nombre - ici 6,4 - tel que : $25 \times \ldots = 160$) ; obstacle de l'interprétation de la partie décimale comme multiplicateur (25×6 est bien compris, mais quid de $25 \times 0{,}4$?) ; obstacle de la division euclidienne : $160 = 25 \times 6 + 10$ (les élèves comprennent que la réponse passe par « 160 divisé par 25 », mais seule la division euclidienne leur est disponible et ils sont embarrassés par le reste).

2.2 Les productions des participants et la discussion avec les animateurs

Dans la première partie de l'atelier, les participants ont été invités à résoudre ce problème puis à répondre individuellement aux questions suivantes : « *Est-il souhaitable de proposer ce problème à des élèves ? Si non pourquoi ? Si oui à quel(s) niveau(x) et dans quel(s) but(s)* ? ». Pour la mise en commun, il a été demandé de se regrouper par binômes, de discuter à l'intérieur de chaque binôme des réponses fournies par chacun avant de présenter à tout le groupe une synthèse de cette concertation.

2.2.1 La résolution du problème

Connaissant et ayant analysé les différentes façons dont divers publics ont résolu ce problème, nous étions ici curieux de savoir comment ce public de formateurs et de chercheurs de la COPIRELEM aborderait le problème à son tour dans le cadre de cet atelier. En fait, dans ce domaine, on a pu constater une assez grande homogénéité entre les participants. Voici les principales caractéristiques de leurs démarches de résolution.

Tous relèvent la nécessité de faire des hypothèses :

- le géant est un homme agrandi, ce qui permet de postuler la constance du rapport des semelles ou des cous-de-pied du géant et d'un des hommes visiteurs ;
- il est indifférent de prendre en compte des semelles de botte ou de chaussure (tennis) pour évaluer le rapport des plantes de pied ;
- la taille d'un des hommes de la photo est comprise entre 1,75 m et 1,80 m.

Ils relèvent aussi la nécessité de recourir à des approximations dues au mesurage des longueurs mobilisées (longueur de la semelle ou du cou-de-pied de l'homme ou du géant), aux erreurs de perspective ou encore à l'inaccessibilité de détails comme le bout de la botte… et en déduisent que la réponse ne peut être qu'approximative.
Une participante répond : « Je ne sais pas » (sous-entendu : en l'absence de précisions sur la plausibilité des hypothèses et des mesures, je ne peux pas répondre), mais accepte de fournir une procédure de résolution tout en précisant que le problème est ainsi idéalisé, donc différent de la réalité.

Fait à remarquer, toutes les procédures de résolution s'appuient sur le calcul du coefficient de la dilatation conjecturée d'un des hommes de la photo au géant. Elles s'apparentent donc unanimement à la deuxième des trois stratégies que nous avons précédemment présentées.

2.2.2 L'évaluation de la situation

En ce qui concerne l'évaluation a priori de la faisabilité et de l'intérêt de proposer une telle situation à des élèves de fin de cycle 3, les réponses des participants furent moins unanimes.
Deux arguments « pour » et deux arguments « contre » étaient demandés. En faveur du « pour », on relève :

- recours au modèle de la proportionnalité dans une situation qui a du sens pour les élèves (notamment, relève une des participantes, car ce sont surtout des grandeurs, et pas seulement des nombres, qui sont impliquées) ;
- nécessité de prendre des initiatives : faire des hypothèses, entreprendre des mesures ou des reports ;
- nécessité de discuter ces hypothèses, ces résultats de mesurage et leurs éventuelles contradictions expérimentales, de revenir sur les erreurs de mesurage ;
- déterminer une longueur inaccessible ;
- situation demandant de réinvestir différentes notions comme la mesure, les ordres de grandeur, certains calculs, la proportionnalité.

Les arguments « contre » sont les suivants :

- les approximations peuvent mener à des résultats contradictoires et/ou abusifs ;
- difficultés à anticiper la taille du géant ce qui réduit les possibilités de contrôle des résultats ;
- obligation de formuler des hypothèses abusives (« sommes-nous tous faits 'pareil' » ?) ;
- rôle des connaissances du monde mis en relation avec la conférence de Stéphane Bonnéry du 3 juin au même colloque ;
- quasi-impossibilité (sauf à se déplacer dans le parc d'attraction concerné) d'une validation par des rétroactions du milieu ou d'une communauté scientifique indiscutable.

2.2.3 La discussion avec les animateurs

On trouve dans les arguments « pour » bon nombre de réponses aux arguments « contre ». Modéliser peut amener à négliger certaines informations (difficiles ou impossibles à obtenir) : « *…un modèle est un moyen, pour un actant donné, de traiter un problème donné par l'usage d'un répertoire de connaissances "restreint". L'actant met en présence sciemment un "univers représenté" et un "univers représentant"* » parce que « *le problème posé dans l'univers représenté n'y est pas résoluble.* » (Brousseau, 2003a, p. 13). L'important est que les approximations et les hypothèses soient explicitées et contrôlées, que l'utilisateur soit conscient que les résultats dépendent de ces hypothèses et approximations et qu'il se tienne prêt à renoncer ou à dépasser le modèle si une des hypothèses ou approximations se révélait intenable, soit par invalidation directe, soit parce qu'on a atteint la limite de validité du modèle.
Trois arguments défendus par les animateurs émergent de la discussion :

- La question de la taille de ce géant peut être posée par un observateur, adulte ou enfant, de la photo. Le problème n'est donc pas artificiel. Accepter de chercher une réponse à cette question, en prenant soin de respecter toutes les précautions exposées ci-dessus, nous semble participer à la valorisation des mathématiques.
- Le modèle construit est consistant dans ce sens où cette construction est extensible à nombre de problèmes de calcul de longueurs inaccessibles.
- Résoudre ce problème peut participer à la construction de connaissances du monde. Pensons à la réflexion de B. qui témoigne en creux de la nécessité dans laquelle se trouve cet élève d'entrer dans le monde des proportions en renonçant à une vision absolue des grandeurs. Cette situation nous semble donc respecter la « condition » de Dhombres (2003, p. 11) : « "*Les historiettes*" *utiles pour l'enseignement des mathématiques... ne doivent pas conduire à oublier qu'il y a création par reconnaissance d'une inadéquation au modèle précédent.* ».

Le problème de la validation est plus délicat. Il aurait sans doute été plus judicieux d'insister auprès des élèves sur le caractère prédictif de leurs réponses. Cette prédiction pourrait certes être confrontée à une mesure directe de la taille du géant (par exemple via le site Internet du parc d'attraction). Mais ce n'est pas une nécessité car nous pensons avec Duval (2005, pp. 15-16) qu'il y a trois types de preuve : par nécessité interne à des opérations discursives de la pensée (fortement présent mais non exclusif dans notre ingénierie) ; au moyen d'un dispositif expérimental ; par nécessité socio-normative (ces deux derniers types de preuve semblant avoir les faveurs d'une des participantes de l'atelier).

3 ANALYSE DE PROGRESSIONS D'ELEVES A PARTIR DE LEURS ECRITS

3.1 Des précisions sur l'utilisation de l'écriture dans le dispositif d'enseignement et sur la nature des écrits à examiner par les participants

Tout au long de la séquence, les élèves ont été sollicités pour écrire, partager et exploiter des textes pour résoudre le problème.

Pour donner une idée des activités de réflexion proposées aux élèves et basées sur leurs écrits, nous donnerons l'exemple du travail demandé aux élèves le 30 mai à partir d'une sélection de textes produits dans la première séance (23 mai). A la fin de cette séance, les élèves avaient à répondre aux questions suivantes : *« Quel est à ton avis la taille du géant ? Qu'est-ce qui te permet de dire ça ? »*. Pour la séance du 30 mai, nous avions sélectionné sept textes que le lecteur trouvera en annexe 1A, qui reflétaient la diversité d'approche initiale du problème par les élèves. Les élèves avaient à lire ces textes et à choisir individuellement une réponse qui ne leur paraissait pas claire et de dire pourquoi, de choisir une réponse qui leur permettait d'avancer dans la résolution du problème et de dire pourquoi et enfin de désigner une réponse qui leur paraissait fausse ou inutile et de dire pourquoi.

Dans l'annexe 1B le lecteur trouvera les choix justifiés d'une élève, Sophie. Ils montrent une idée qui l'intrigue (le rapport 9 dans le texte 2), une idée qu'elle retient (la considération de la partie invisible du géant sur la photo à partir du texte 5) et aussi sa conception erronée de la réponse à obtenir (texte 3 qu'elle rejette car elle n'accepte pas l'idée d'une taille approchée).

Dans le document annexe 1C, un tableau permettra au lecteur de prendre connaissance plus globalement du nombre et de la place des différents écrits demandés aux élèves au cours de la séquence.

Le recours à ce travail d'écriture visait deux effets :

- initier, partager, sélectionner des idées quant à la résolution du problème. Les écrits produits et exploités ont ici les fonctions de communication et de mémoire au service de l'heuristique ;
- développer et approfondir ces idées par les fonctions d'objectivation et de traitement qu'offre le travail de production et de reprise des écrits.

Les écrits produits par les élèves étaient donc d'une part, envisagés classiquement en tant que productions utilisables pour servir de matériau aux échanges et aux débats oraux dans la classe ou d'outils de mémoire à consulter. Mais l'activité d'expression écrite exige aussi une véritable prise de conscience et une réorganisation de la part de celui qui écrit par rapport à ce dont il peut avoir conscience en s'en tenant à la seule communication orale (Vygotski, 1934/1997). Sous ce point de vue, l'écriture comme activité spécifique d'expression était envisagée ici comme un moment essentiel dans le processus de modélisation qui amène les élèves à résoudre le problème.

L'examen des textes successifs, produits par les élèves, nous donne des indications sur la progression de ces derniers dans leur travail de résolution et le processus de modélisation qu'ils ont plus ou moins développé.

Pour partager ce travail d'analyse des progressions des élèves, nous avons proposé aux participants les écrits de quatre élèves, Christina, Anna, Dimitri et Sarah, correspondant plus précisément aux évolutions de la rédaction d'une solution du problème. Ces quatre élèves ont été choisis par les animateurs parce qu'ils représentaient bien a priori la diversité des progressions repérables dans la classe. Pour chacun de ces élèves, les participants avaient à leur disposition quatre écrits successifs correspondants au texte initial du 23/05/08 (première séance), aux deux textes intermédiaires du 06/06/08 et du 09/06/08, et enfin au texte final du 17/06/08.
Dans le cadre de l'atelier, très concrètement, chaque groupe de participants avait à étudier les parcours de deux des quatre élèves retenus en termes d'évolution des procédures et des apprentissages. Nous avons présenté ensuite l'outil d'analyse que nous avions, de notre côté, conçu pour analyser les textes, puis notre propre analyse des textes des quatre élèves.

Pour faciliter la lecture du texte présent, nous allons encore une fois modifier l'ordre chronologique du déroulement de l'atelier et commencer par présenter cet outil à partir d'un exemple. Nous appliquerons ensuite ce dernier aux textes des quatre élèves choisis et ajouterons chaque fois les éléments d'analyse apportés, de leur côté, par les participants de l'atelier.

3.2 Présentation de notre outil d'analyse

Dans le cadre de notre expérience, nous avions à notre disposition les textes des vingt-et-un élèves de la classe. Nous avons conçu et développé un outil pour les analyser et rendre compte des différences entre élèves et de leurs progressions. Cet outil a été développé à partir des raisonnements que les élèves ont majoritairement produits au long de la séquence et tout particulièrement dans la dernière séance où les productions étaient les plus complètes.

Nous présentons cet outil dans le tableau suivant dont le pivot est la deuxième colonne avec le développement des argumentations les plus complètes rencontrées.

Au pied du Géant : outil pour analyser les raisonnements

	Raisonnement possible (celui qui est en général mis en avant par la dernière séance)	**En conséquence repérage d'éléments du raisonnement indiqués ou non**
Projet de report d'un étalon	1. *Pour avoir une estimation de la taille de la statue il faudrait savoir combien de fois je peux mettre la taille d'un homme dans la statue du géant.*	évocation du rapport homme/géant
	2. *Un homme de la photo a une taille d'à peu près 1,80 m.*	évocation d'une estimation de la taille d'un homme
	3. *Or sur la photo l'homme arrive à peu près à la mi-jambe du géant (il faudrait donc savoir combien de demi-jambes je peux reporter sur la statue du géant).*	évocation du rapport homme/segment de la jambe du géant
Modélisation du corps du géant par celui d'un élève	4. *On fait l'hypothèse qu'un géant est fait à peu près comme un élève*	évocation de la justification de l'identification d'un géant à un élève
	5. *Je prends donc un élève pour représenter le géant*	évocation de élève = géant
	6. *Comme l'homme arrive au mi-mollet du géant, je prends un objet qui correspond à peu près à une demi-jambe d'un élève*	évocation de objet = homme
	7. *Puis je regarde combien de fois je peux reporter cet objet sur l'élève*	évocation du rapport objet/élève
Calcul et estimation du résultat	8. *Calcul orienté vers la production d'un résultat pour la taille du géant et explicitation de ce résultat*	calcul final
	9. *Je fournis la réponse sous forme d'une estimation*	évocation de l'approximation
Schéma corps	10. Mobilisation d'une évocation du schéma corporel : *jusqu'à la mi-jambe du géant ça fait … jusqu'à la taille ça fait le double et jusqu'à la tête, ça fait encore le double…*	évocation d'un rapport d'une partie du corps au corps

Commentaires complémentaires : il y a deux types de stratégies :

1. Celles mobilisant explicitement la modélisation du corps du géant par un corps d'élève : « On fait comme si on était le géant ». Cette stratégie débouche sur des manipulations de report d'un segment du corps (de l'élève) sur toute sa taille (Combien de fois mon mi-mollet dans toute ma hauteur ?). C'est la stratégie 1 décrite en 2.1.2.
2. Celles qui ne mobilisent qu'une intériorisation du schéma corporel qui amène à accepter, sans reports sur son corps, que des rapports simples existent dans tout corps humain et notamment dans le corps du géant : « *Deux fois le mi-mollet ça fait le genou, deux fois le genou ça fait une jambe, deux fois une jambe ça fait le corps entier* ». Comme la stratégie 1 de 2.1.2, cette stratégie vise à mesurer la taille du géant au moyen de l'étalon « homme » ; elle s'en différencie par les moyens d'obtenir le rapport entre la longueur à mesurer et l'étalon choisi.

La stratégie 2 a été observée lors de la première séance. Elle requiert les arguments 1, 2, 3 (projet de report d'un étalon), 10, 8 et 9 (justification par le schéma corporel et calcul d'une fourchette pour le résultat).

La stratégie 1 a été observée après la première séance. Elle requiert les arguments 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 (projet de report d'un étalon, nécessité de modéliser le corps du géant par celui d'un élève pour calculer le rapport géant/homme, calcul d'une fourchette pour le résultat).
Dans le codage des raisonnements élèves, nous codons gris ou noir les « non », bleu les « oui » ou « implicite ». Nous colorons en couleur pâle (gris ou bleu clair) le codage des arguments non requis pour un raisonnement donné ; nous colorons en couleur soutenue (noir ou bleu foncé) le codage des arguments requis.
La valeur d'un raisonnement augmente donc avec le bleu soutenu et diminue avec le noir soutenu.
Remarque : Parfois nous sommes amenés à signaler une présence « implicite » d'un élément du raisonnement lorsque la logique du texte permet de l'induire.

3.3 Analyse des progressions de Christina, Anna, Dimitri et Sarah

Le lecteur trouvera en annexe, pour chaque élève, les quatre textes qui font l'objet de la présente analyse.
Avec Christina et Anna, nous aurons des exemples représentatifs d'évolutions contrastées. Christina, comme beaucoup d'élèves de la classe, intègre progressivement et efficacement les composantes d'un raisonnement complet. Ce n'est pas le cas de quelques autres élèves comme Anna qui finit néanmoins par en saisir quelques éléments disparates.
Avec Dimitri et Sarah, nous avons des exemples d'évolutions plus singulières. Ces deux élèves utilisent d'emblée et de façon pertinente la notion de proportionnalité. Dimitri persistera dans cette perspective et l'intégrera dans le raisonnement majoritairement partagé dans la classe. Sarah en revanche, après un bon départ, semblera contrariée dans sa progression en essayant d'intégrer des éléments de raisonnement extérieurs à sa perspective initiale.
Mais, quelle que soit la stratégie envisagée par les élèves pour résoudre le problème, une difficulté était de se donner des données ou estimations numériques de départ (taille d'un des hommes de la photo) sur lesquelles baser leur raisonnement. Lors de la première séance, ils étaient désarçonnés par ce problème sans nombres…

3.3.1 Le cas de Christina

Notre analyse résumée dans un tableau :

Christina	23/05/08	06/06/08	09/06/08	17/06/08
évo[4]. du rapport homme/géant	Non	**Non**	**Oui**	**Non**
évo. taille d'un personnage	Non	**Non**	**Non**	**Oui**
évo. de la comp homme/ segment géant	Non	**Non**	**Oui**	**Oui**
évo just. de l'id. géant élève	Non	**Non**	**Non**	**Implicite**
évo. de élève = géant	Non	**Non**	**Oui**	**Implicite**
évo. de objet = homme	Non	**Non**	**Oui**	**Oui**
évo. du rapport objet/élève	Non	**Oui**	**Oui**	**Oui**
calcul final	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. approximation	**Non**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. rapport partie du corps au corps	**Oui**	Non	Non	Non

Commentaires :

Lors de la première séance (23/05/08), comme beaucoup d'élèves, Christina commence par mesurer une grandeur sur la photo distribuée. En l'occurrence elle mesure « *la taille de la jambe* » (9,7 cm).

[4] Pour des raisons de place, nous avons abrégé « évocation » en « évo »

Mais que faire ensuite avec cette donnée obtenue avec la règle sur la photo ? Comment faire le lien avec l'univers réel de ce parc d'attractions ? Comme beaucoup d'élèves, Christina transforme pour cela les cm, correspondant à l'univers de la photo, en m, une unité qui semble certainement à ses yeux mieux correspondre à la réalité du parc. A ce stade, aucun recours à un élément tiers au géant n'est donc à noter.
A partir de là, comme plusieurs élèves, elle utilise cette mesure pour trouver une estimation de la taille du géant en rapportant la mesure d'une partie du corps à tout le corps, ici par doublages additifs répétés justifiés par la référence à un schéma corporel qu'on peut juger pertinent.

A priori et curieusement, lors de la deuxième séance (06/06/08), Christina, dans ce qu'elle écrit, ignore la photo. Elle ne considère que le rapport entre un tube de colle et elle-même *(« je mesure 18 colles »)*. Que représente ce tube de colle ? Elle n'en dit rien. De même qu'elle ne justifie pas le fait qu'elle prend sa taille *(« et en m, 1,65 m »)* comme référence pour appliquer le rapport entre elle et le tube de colle. Il faut dire que c'est dans cette séance que l'idée qu'on pourrait se référer au rapport entre un personnage de la photo et le géant, et sa transposition dans un rapport objet/élève, a été diffusée en classe (à partir du recensement par les élèves d'idées utiles pour la résolution apparaissant dans les sept écrits sélectionnés par le maître issus de la séance du 23/05/09 annexe 1A). Visiblement Christina s'en saisit en partie mais ne restitue pas encore dans son écrit l'articulation entre la photo et la référence au réel de la classe pour justifier ce transfert.

En revanche, dans les deux derniers de ses écrits (09/06/09 et 17/06/08), Christina explicite les éléments importants d'un raisonnement complet qui l'amène à une estimation cohérente de la taille du géant avec l'hypothèse que le géant est fait comme un élève *(« géant, nous »)*.

Nous voyons, à travers cette analyse, que Christina a réussi progressivement à intégrer des éléments pertinents pour développer un raisonnement cohérent et quasi complet. Cette constatation rejoint d'ailleurs le sentiment qu'elle exprime après le 17 juin à propos de cette séquence : *« Cela m'a surpris de savoir que les hommes à côté servaient à quelque chose. J'ai appris des choses car ça m'a appris comment mesurer le géant quand on ne voit pas le reste du corps ».*

3.3.2 Le cas d'Anna

Notre analyse résumée dans un tableau :

Anna	23/05/08	06/06/08	09/06/08	17/06/08
évo. du rapport homme/géant	Non	**Non**	**Non**	**Oui**
évo. de la. taille d'un personnage	Non	**Non**	**Non**	**Oui**
évo. de la comp. homme/segment géant	Non	**Non**	**Non**	**Non**
évo just. de l'id. géant élève	Non	**Non**	**Non**	**Non**
évo. de élève=géant	Non	**Non**	**Non**	**Non**
évo. de objet=homme	Non	**Non**	**Non**	**Oui**
évo. du rapport objet/élève	Non	**Non**	**Non**	**Implicite**
calcul final	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. approximation	**Non**	**Non**	**Non**	**Oui**
évo. rap. partie du corps au corps	**Non*.**	Non	Non	Non

Commentaires :

Au départ, dans le texte du 23/05/08 tout comme Christina, Anna semble mesurer certaines longueurs de la photo *(« moitié de la jambe : 9,5 cm »)*. Utilisation du double décimètre pour mesurer par exemple le

pied et la jambe. Point commun aussi avec Christina, elle passe de l'univers de la photo à l'univers réel du parc d'attractions en remplaçant les centimètres par des mètres !
Mais comment obtient-elle la longueur des éléments qui ne figurent pas sur la photo *(« bras droit : 9 cm »* ? En étant optimiste on peut imaginer que c'est par estimation par rapport aux autres parties du corps et y voir la mobilisation d'un schéma corporel implicite. Mais on peut aussi en douter car, contrairement à Christina, le traitement qu'elle applique aux données ainsi récoltées ne semble pas relever d'un schéma pertinent pour estimer la taille du géant puisqu'elle additionne les mesures des différents membres (pieds, jambes, bras).

Dans le texte du 06/06/08, seule la partie encadrée semble faire référence à sa procédure initiale. Mais cette fois c'est une multiplication des différentes parties du corps qui est évoquée sans qu'on n'en sache guère plus. Par ailleurs, cet écrit semble déconnecté de la recherche d'une procédure de calcul de la taille du géant. En fait, Anna semble reprendre à son compte une question posée par le maître au cours de cette séance : y a-t-il une variation des mesures de grandeurs en fonction de l'unité choisie ?

Dans le texte du 09/06/08, Anna fait un calcul qui applique un rapport 6 à 1,80 *pour « trouver la taille du géant »* mais sans aucune justification sur l'origine de ce rapport. Anna est donc bien loin de produire les bribes d'un raisonnement. Une hypothèse : 1,80 et 6 sont des données numériques retenues dans les débats en classe tout comme la procédure multiplicative évoquée dans l'encadré.

En revanche, beaucoup d'éléments d'un raisonnement potentiellement complet apparaissent. Anna semble en train de rassembler les pièces du puzzle dont elle a saisi des bribes. Mais il manque encore des articulations essentielles comme, par exemple, la comparaison des personnages et de la botte sur la photo.

Au cours de la séquence, Anna semble donc avoir saisi des bribes utiles pour développer un raisonnement complet, mais elle n'en est pas encore au point d'ordonner et de relier ces éléments. Cette analyse rejoint le sentiment qu'elle exprime, plus sévèrement que nous serions tenté de le faire, en disant : *« je n'ai rien appris car je n'ai pas tellement compris pourquoi on devrait faire plusieurs étapes et pas compris toutes les étapes ».*

3.3.3 Le cas de Dimitri

Notre analyse résumée dans un tableau :

Dimitri	23/05/08	06/06/08	09/06/08	17/06/08
évo. du rapport homme/géant	**Oui**	**Oui**	**Implicite**	**Oui**
évo. de la. taille d'un personnage	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. de la comp. homme/segment géant	**Non**	**Oui**	**Implicite**	**Implicite**
évo just. de l'id. géant élève	**Non**	**Oui**	**Non**	**Non**
évo. de élève = géant	**Non**	**Oui**	**Implicite**	**Oui**
évo. de objet = homme	**Non**	Non	**Oui**	**Oui**
évo. du rapport objet/élève	**Non**	Non	**Oui**	**Oui**
calcul final	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. approximation	**Oui**	**Oui**	**Non**	**Non**
évo. rap. partie du corps au corps	Non	**Oui**	Non	Non

Commentaires :

Dans le premier écrit, Dimitri semble être à la recherche d'un rapport de proportionnalité par procédures multiplicatives successives : il multiplie d'abord par 1,5 puis le résultat par 2 et dans la suite il applique un rapport 3,5. Il met en rapport deux mesures prises sur la photo : les personnages sur la photo (7,05 cm) et le “pied du géant” (15,05 cm). Il applique ensuite le rapport 3,5 à la taille réelle estimée du personnage de la photo pour trouver la taille du géant. Il semble donc que Dimitri ait l’idée globale qu’il convient de trouver un coefficient d’agrandissement entre les personnages et le géant, mais qu’il ne sache pas comment trouver ce rapport.

Pour la deuxième séance, Dimitri a découvert le moyen de trouver le rapport entre la taille d’un personnage et la taille du géant, en se référant à un croquis représentant un homme quelconque, et en s’appuyant sur le fait qu’un personnage de la photo arrive à peu près au milieu du mollet du géant. De ce fait, il n’a pas besoin de recourir à un objet réel représentant le mi-mollet pour chercher le report sur un élève réel, ce qui ne l’empêche pas de le citer. On peut noter qu’il semble compter la semelle dans la taille du géant (sur la pointe des pieds ?).

Dans le texte du 09/06/08, Dimitri suit la procédure qui s’est répandue dans la classe, à savoir prendre un objet qui arrive au mi-mollet d’un élève et voir combien de fois on peut reporter cet objet dans l’élève. Mais il n’explicite pas les éléments qui permettent de justifier cette procédure. Ce n’est peut-être pas étonnant car il l’a fait dans le texte précédent et estime certainement qu’il n’a plus besoin de le refaire.

Dans l’écrit final, Dimitri indique tous les éléments nécessaires pour justifier sa procédure. Seul reste implicite le fait que le personnage de la photo arrive au mi-mollet. Réussite quelque part paradoxale car Dimitri « flotte » encore un peu dans les invariants : « *Le reste du géant sera certainement faux, car un géant est un homme agrandi* » ; « *7 fois ou 6 fois pour les petits* » (schéma en bas à droite).

3.3.4 Le cas de Sarah

Notre analyse résumée dans un tableau :

Sarah	23/05/08	06/06/08	09/06/08	17/06/08
évo. du rapport homme/géant	**implicite**	**Non**	**Non**	**implicite**
évo. de la. taille d’un personnage	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. de la comp. homme-botte	**implicite**	**Non**	**Non**	**Oui**
évo just. de l’id. géant élève	Non	**Non**	**Non**	**Non**
évo. de élève = géant	Non	**Non**	**Non**	**Non**
évo. de objet = homme	Non	**Non**	**Oui**	**Non**
évo. du rapport objet/élève	Non	**Non**	**Non**	**Non**
calcul final	**Oui**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
évo. approximation	**Non**	**Non**	**Oui**	**Oui**
évo. rap. partie du corps au corps	**Oui**	Non	Non	Non

Commentaires :

Contrairement à la plupart des élèves de la classe, dans son premier écrit (23/05/08), Sarah présente un projet de résolution très acceptable, même si peu d’arguments sont explicités ou justifiés. Le « environ » (feuille réponse) semble bien dire qu’elle fait une hypothèse de taille moyenne pour un homme. Sa procédure est additive : Sarah découpe le schéma corporel en segments valant une ou deux fois son étalon de 1,77 m (la taille de quelqu’un dans sa famille ?). Ses calculs sont justes et le résultat est très proche de ce que donne la procédure finale retenue par la classe à la fin de la séquence.

Dans le deuxième écrit, Sarah régresse considérablement. Elle prend la taille moyenne de l’homme retenue par la classe (1,80 m) et fait l’hypothèse que le géant fait 10 fois plus, sans aucune justification du coefficient. Dans une « étude » de cette hypothèse, elle considère simultanément la taille de sa voisine (1,60 m) et la taille d’un homme (1,80 m) et, sans le justifier, conclut que le géant « *droit* » mesure 18 m et que « *plié* » il mesure 16 m. On retrouve donc ici la question de la notion « taille du géant » soulevée par

les participants de l'atelier. On ne connaît pas la vraie raison de cette régression, cependant on peut émettre deux hypothèses.
Premièrement, il est probable qu'ayant obtenu une solution correcte (mais non validée par le maître ou les observateurs), elle ne sait plus quoi faire et essaye d'attraper les éléments de propositions qui émergent lors de la discussion en classe. La deuxième hypothèse est fondée sur l'observation de la classe, et non sur ses écrits. Visiblement, entre les deux séances, le père de Sarah a essayé de lui expliquer une solution basée sur une bonne connaissance des proportions du corps humain (avec « l'homme de Vitruve »[5], d'après ses gestes) ce qui l'a visiblement perturbée.

Le troisième écrit est encore plus bref que le deuxième. Rien n'est expliqué, ni la taille de l'homme (moyen ? sur la photo ? autre ?), ni les multiplicateurs 6 et 7. On doit cependant remarquer qu'elle donne le résultat sous forme d'un intervalle. Sarah semble ne pas voir l'intérêt de ce que la classe est en train de faire, elle a l'air d'être lasse du problème («Nous avons repris le problème »).

L'écrit final semble expliquer une bonne démarche, même si toutes les justifications nécessaires ne sont pas présentes. On peut noter un grand souci d'explication avéré par la présence des dessins et schémas.

En conclusion, aucun argument ne permet de dire que Sarah a bien construit un « Model of », celui de l'élève pour le géant. Elle trouve une réponse acceptable au problème du géant par des procédés qui pourraient être corrects. Mais en l'absence d'une explicitation suffisante de ses arguments, rien n'indique si sa solution est plus le produit d'une remémoration de gestes acquis pendant la phase de recherche que d'enchaînements maîtrisés.

3.3.5 Eléments d'analyse et de discussions apportés par les participants à propos des textes des élèves

Une remarque préalable : faire une analyse approfondie de ces textes dans le cadre d'un atelier en temps si limité, relevait d'une gageure ! Il faut déjà beaucoup de temps pour prendre connaissance des huit textes (quatre par élève). En particulier, certains participants n'ont souvent eu le temps d'aborder que les textes d'un seul des deux élèves. De plus, et de façon délibérée de notre part, ils ne disposaient pas, à ce moment-là, de la grille de lecture que nous n'avons présentée qu'après. Dans ce contexte difficile, les participants ont néanmoins retrouvé bon nombre d'éléments de notre propre analyse sur lesquels nous ne reviendrons donc pas. Mais sur certains points, les échanges ont apporté des points de vue et des discussions bien intéressants que nous allons essayer de restituer.

Par rapport à Christina et Anna :

- Les participants font remarquer que Christina semble déchirée entre l'utilisation d'un rapport interne à l'individu (textes du 23/05/08 et du 17/06/08) et le recours à des rapports externes (textes du 06/06/08 et du 09/06/08). Dans le texte du 06/06/08, l'égalité des rapports externes « tube de colle/taille élève » et « taille élève/taille géant » est fausse. Mais l'égalité des rapports externes utilisée dans le texte du 09/06/08 (« demi-mollet/taille élève » = « demi-mollet/taille géant » via l'égalité « demi-mollet du géant » = « taille homme ») est correcte.
- On souligne aussi l'instabilité de cette découverte et de la modélisation en cours, car le texte du 17/06/08 semble erroné. Pour notre part, nous avons en effet noté que quelques éléments du raisonnement figurant dans le texte précédent ont disparu. En particulier, on pourrait imaginer qu'un maillon essentiel du raisonnement manque vraiment avec l'ambiguïté : « on prend un objet qui fait la taille du mi-mollet de l'homme sur la photo » sans référence au-mi-mollet d'un élève. Mais à notre avis, l'examen de l'écrit précédent (09/06/08) permet une interprétation plus optimiste qui considère que l'élément manquant est implicite. Le raisonnement aurait été

[5] Croquis *Étude des proportions du corps humain selon Vitruve* réalisé par Léonard de Vinci. On trouvera une reproduction de ce célèbre croquis à : http://fr.wikipedia.org/wiki/Homme_de_Vitruve

intériorisé et Christina n'en restitue plus tous les éléments. Ou bien aussi ce manque peut s'expliquer par un changement de destination de l'écrit : aux yeux de Christina, il s'agit peut-être d'expliquer à une autre classe « comment on fait » et non pas de « justifier ». Nous laissons au lecteur le soin, s'il le veut bien, de se faire lui aussi une opinion au sujet de cette discussion et de cette interprétation.

- En ce qui concerne une comparaison entre Christina et Anna, les participants soulignent le passage commun des centimètres aux mètres pour passer de la photo à la réalité du parc. Pour l'une des participantes, il s'agit de la preuve du « déficit de connaissances du monde ». D'autres soulignent qu'il s'agit là du seul aspect de la proportionnalité qui semble apparaître dans un premier temps pour ces élèves. Cette remarque est nuancée par d'autres participants qui font remarquer qu'on peut aussi relever de la proportionnalité dans les représentations physiques du corps même si elles sont plus ou moins cohérentes d'un élève à l'autre : Christina faisant un report correct entre une partie du corps du géant à la totalité du géant ce qui n'est pas le cas d'Anna.

Par rapport à Dimitri et Sarah :

Sarah et Dimitri sont tous les deux des élèves qui réussissent bien en mathématiques. Leur premier écrit présente des éléments très pertinents (Sarah a une procédure tout à fait acceptable, même si additive, et Dimitri est le seul de la classe à avoir identifié le problème comme relevant de proportionnalité), mais ces deux élèves évoluent de manière très différente tout au long de la séquence, comme le montrent les deux grilles d'analyse. C'est d'ailleurs une des raisons pour lesquelles nous avons proposé les travaux de ces deux élèves aux participants de l'atelier, et c'est ce qui, probablement, leur a posé problème. Aucun groupe de participants concernés n'a pu analyser la production de Dimitri et très peu de choses ont été dites sur Sarah. Tous les participants qui ont parlé de la production de Sarah ont remarqué surtout la procédure acceptable dans le premier écrit et la présence des deux réponses et de l'intervalle des possibilités.

4 UN BILAN DE L'ATELIER

La situation du « Géant » est riche et complexe. C'est une situation qui est en rupture avec ce qui se pratique habituellement dans les classes. Elle s'appuie sur un problème de Fermi : pas de nombre dans l'énoncé, problème ouvert, nécessitant de faire des hypothèses et de les valider. Enfin, elle est ancrée dans le réel.
Notre analyse des écrits des élèves a révélé la façon dont ces derniers se sont emparés de ce problème : compréhension, en tous cas pour nombre d'entre eux, de la nécessité de développer et d'utiliser un modèle des proportions du corps humain, compréhension de l'importance de la production d'un raisonnement argumenté et articulé.
Dans cet atelier, nous avons eu l'occasion de partager cette analyse avec les participants, mais aussi de relever leurs interrogations et leurs différents points de vue sur l'intérêt et les difficultés didactiques de cette situation. Cela n'est pas sans rejoindre les réflexions et débats institutionnels, nationaux et internationaux, sur les problèmes issus du monde réel, en particulier en ce qui concerne la question de la validation.

5 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ADJIAGE R. & CABASSUT R. (2008). La modélisation dans une perspective de formation et d'enseignement, *actes du 34ème Colloque de la COPIRELEM* 11-13 juin 2007, Troyes.

ADJIAGE R. (2005), Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de l'IREM de Strasbourg*. *Vol. 10*, pp. 95-129.
ADJIAGE R. & PLUVINAGE F. (2007), An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*. *Vol. 65*, pp. 149-175.
BLUM W. (2002), ICMI Study 14 : Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 51, N° 1-2, pp. 149-171. *http://www.springerlink.com/content/p1l244802942w921*
BROUSSEAU G. (2003a), Quels types de savoirs mathématiques utilise-t-on dans la modélisation ? In Comité scientifique des IREM (ed), *LA MODÉLISATION, recueil des contributions* (pp. 13-17). Paris.
BROUSSEAU G. (2003b), Pratique de la modélisation par les élèves et complexité didactique. In Comité scientifique des IREM (ed), *LA MODÉLISATION, recueil des contributions* (pp. 25-27). Paris.
BUCHETON D. & CHABANNE J-C. (2002), Parler et écrire pour penser, apprendre et se construire ; l'écrit et l'oral réflexifs. Paris : PUF Education et Formation.
COMENIUS-LEMA (2006), Learning and Education in and through Modelling and Application http://www.lema-project.org
DHOMBRES J. (2003), Modèles, modélisations et mathématisations, en vue d'activités IREMs. In Comité scientifique des IREM (ed), *LA MODÉLISATION, recueil des contributions* (pp. 8-12). Paris.
DUVAL R. (2005). Compréhension des démonstrations, développement de la rationalité et formation de la conscience individuelle, *actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec*, pp. 7-38, 3-4 mai 2005, Montréal.
http://www.math.uqam.ca/~tanguay_d/Pdf%20des%20articles/Actes_GDM_2005.pdf
DUVAL R. (1998), Ecriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? In actes du colloque : *« Produire et lire des textes de démonstration », 23-24 janvier 1998* (pp. 79-98). Rennes 1 : laboratoire de didactique des mathématiques.
PETER-KOOP, A. (2004). Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils' Interactive Modelling processes. In I. Putt, R. Faragher and M. McLean (eds.), Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville, (pp. 454-461). Sydney : MERGA.
http://www.merga.net.au/documents/RP542004.pdf
RAUSCHER J-C. (2006a), Écrire en mathématiques pour situer et négocier les écarts. Un outil d'évaluation partagé. In Hélot et al. (ed), *Écarts de langue, écarts de culture : à l'École de l'autre* (pp.87-102). Frankfurt am Main : Peter Lang.
RAUSCHER J-C. (2006b), L'écriture réflexive au centre de l'activité mathématique dans la résolution de problèmes de proportions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de l'IREM de Strasbourg.* Volume 11, (pp 75-102).
VYGOTSKI L. (1934/1997), Pensée et langage, *La Dispute, Paris.*

6 ANNEXES

Annexe 1A : sélection des textes du 23 mai à examiner par les élèves dans la séance du 30 mai

Elève 1 (vendredi 23 mai)

Je pense que le géant mesure 100 m de long car j'ai fait 12 fois 8 = 100
J'ai trouvé ces mesures en mesurant la longueur et la largeur et j'ai fait ×

Elève 2 (vendredi 23 mai)

A mon avis la taille du géant est de 144 m. Moi j'ai dit qu'il fallait faire 9 × 1,60 car
1,60 est la taille d'un homme et 9 ça veut dire 9 hommes.

Elève 3 (vendredi 23 mai)

A mon avis la taille du géant serait 26 m. En fait j'ai vu sur la photo qu'il y avait des hommes et un pied de géant alors déjà je sais que la taille d'un homme ça peut être entre 1 m 90 et 1 m 80. Donc le pied déjà, sa taille ça doit être 1 m 90 environ et après pour la taille du géant peut être ça serait 26 m environ.

Elève 4 (vendredi 23 mai)

La taille du géant fait à peu près 5,4 hm (500 m) car la taille d'un homme mesure environ 1,80 m puis je multiplie par 3,5

180

× ?

500

$180 \times \boxed{2} = 360 \times \boxed{1{,}5} = 540$

$2 + 1{,}5 = 3{,}5$

Elève 5 (vendredi 23 mai)

Les deux homes mesurent à peu près 1 m 80 ou 1 m 70. La chaussure mesure 2 m à peu près 2 mètres. Le géant mesure 6 mètres quand je fais 2 × 3 = 6 mètres.
2 car la chaussure mesure 2 mètres à peu près et qu'il manque 3 parties du corps : tête, jambes, ventre.

Elève 6 (vendredi 23 mai)

1) La taille du géant est de 10,43 m environ
2) Car quand on prend la taille de l'homme, on fait plusieurs fois sa taille et sa jambe fait deux fois la taille de l'homme sur le document et ainsi de suite jusqu'à ce que je trouve la taille du géant.

Elève 7 (vendredi 23 mai)

La taille de ce géant est 150 m. Moi j'ai mesuré tous le grande jambe et j'ai trouvé 15 cm et je les mis de 150 m.

Annexe 1B : les choix de Sophie lors de la séance du 30 mai

Choisis une réponse qui ne te paraît pas claire ? Pourquoi ?

La réponse 2 ne me parait pas claire. Car je ne comprend pas d'où sort 9 hommes pourquoi pas 10 hommes?

Choisis une réponse qui te permet d'avancer dans la résolution du problème ? Pourquoi ?

La réponse 5 me parait juste. Car les 3 parties manquantes seront utiles pour pouvoir s'avoir la taille du géants.

Choisis une réponse qui te paraît fausse ou inutile pour avancer dans la résolution du problème ? Pourquoi ?

La réponse ~~8~~ 3 me paraîte inutile. Car la personne qui a trouver se résultat a donner la taille environ, mais il nous faut la taille exacte.

Annexe 1C : les différentes phases du travail des élèves et les écrits demandés

23 mai au pied du géant : début	Première approche : *« Quelle est à ton avis la taille du géant ? Qu'est-ce qui te permet de dire ça ? »*
27 mai	Elaboration par groupe d'un intervalle de plausibilité et débat en classe à ce sujet
30 mai	Analyse de 7 réponses d'élèves produites lors de la première séance en vue de *« découvrir des idées qui permettent d'avancer dans la résolution du problème »* puis production par groupes d'un programme d'actions à développer pour résoudre le problème
6 juin	Calcul de la taille du géant à la suite d'un débat basé sur l'analyse de quelques textes du 23 mai avec réactions correspondantes
9 juin	Questionnement dynamique dans la classe à partir de la lecture d'un document faisant état d'observations et de questions (globales) du maître sur leurs résolutions précédentes.
17 juin au pied du géant : fin	Analyse individuelle de 4 résolutions du 9 juin puis rédaction de la résolution dans la perspective d'une transmission à une autre classe
Une semaine après	**Questionnaire bilan** : Surprises ? Difficultés ? Expérience à refaire ? Apprentissages réalisés ?

Annexe 2 : Les 4 textes de Christina

Texte initial 23/05/08

Le géant (1)

1. Quelle est à ton avis la taille du géant ? Qu'est-ce qui te permet dire ça ?

A mon avis le géant mesure ~~29,7m~~ 39,1m car déjà la taille de la jambe mesure 9,7m (9,7m) donc j'ai fait 9,7m + 9,7m = 19,4m et sa fait une jambe entier j'ai fait 19,4 + 19,4 = 39,1m et sa fait un corpention

Deuxième texte 06/06/08

Je fais environ 18 colle, et je mesure 1,65m

Le géant mesure : 21,70m car moi je mesure 18 colle et en m 1,65m donc j'ai fait ~~21~~ 1,65 × 18 = 21,7cm
est j'ai utiliser le m et la colle.

Troisième texte 09/06/08

Il faut d'abord voir la photo est voir jusqu'à ou vont les
homme sur la jambe du géant est ~~sa~~ va jusqu'au mollet
donc on imagine que qu'on est les géant est
on prend un objet qui va ~~jusqu~~ jusqu'à la moitie
du mollet peus apres qu'on ~~est~~ c'est choisie un
~~au~~ objet jusqu'au demi mollet on regarde combien
de fois il rentre dans le géant (mais) est sa donne
pour tout le monde environ 6 et 7.

reponse du problème : 6x 1,80 = 10,80 m

le géants fait : 10,80m

Texte final 17/06/08

On regarde la photo est on regarde jusqu'à ou les homme vont et sa va jusqu mi-mollet
est les homme font appeler 1,80m et on imagine qu'on est le
géant et ~~on regarde~~ on prend un objet qui fait la taille ~~est va~~ jusqu'au mi
~~de l'homme sur la photo est on regarde combien de fois~~
~~sa rentre~~
du mi-mollet (de l'homme sur la photo) est on regarde ~~jusqu'à~~
~~et sa~~ combien de fois sa rentre et pour tous le monde
C'est soit 6 ou 7 fois est on fais le calcul pour cella qui font
6 fois le mi-mollet c'est : 6x1,80 = 10,80 est il fait 10,80 ou
celle qui font 7 fois le mi-mollet c'est = 7x1,80 = 12,60 est
sa fait 12,60.

Annexe 3 : Les 4 textes d'Anna

Texte initial 23/05/08

j'ai fait le calcul de chaque partit du corp.

9,5 + 9,5 + 9,7 + 9,7 + 9,0 + 9,0 + 0,8 + 0,8 72,2 m	moitie de la jambes : 9,5 cm Pieds : 8cm moitié de la jambes : 9,5cm autre Pieds : 8cm autre moitié de la jambes : 9,7 autre moitié de la jambes : 9,7 bras droits : 9,0 bras droits : 9,0

la taille du geants est de 72,2 m.
j'ai fait le calcul d'est partis du corps.

Deuxième texte 06/06/08

ce que je vais faire :

je vais prendre differentes chose cor, l'equerre, une colle, un effaceur et je vais voir si sa fair la meme mesure et je vais comparer.

une règle : 4
colle : 15,00
equerre : 8
grande règle :

je pense que le géant mesure 16 m car j'ai mesurer chaque partit du corp et j'ai multiplier.

Maïma

une règle : 5
colle : 15,38.
equerre : 8
grande règle.

j'ai fait avec maïma on a fait avec l'equerre, la regle et la colle. A j'ai comparer et comme elle est plus grande que moi je ne peut pas pareille.
je prend de la colle et je mesure chaque partit du corp.

Troisième texte 09/06/08

Lundi, 9 juin 2008.

Ma Méthode

je fais 6 x 1,80 = 10,80 j'ai fait 6 x 1,80 pour trouver la taille du geant. j'ai utiliser la moitié de la jambé et il faut 6 fois la moitié de la jambe.

Texte final 17/06/08

pour trouver la solution on à repris les réponse des autre pour voir si il y avait tout ce qu'il faut. on a fait des calcul on a pris des élève de la classe puis on à pris un objet pour faire les homme on a fait des dessin des explication pour trouver la taille du geant. il faut prendre un objet puis le faire jusqu'a qu'on arrive à la tête. il faut 6 ou 7 fois l'objet pour arrivé a la tête et pour trouver la taille. ex il y avait des homme à côté du pied du geant on les à utiliser pour trouver la taille du geant. un homme mesure a peu près 1,80 m on prend 1,80 et combien de fois on a pris l'objet pour arrivé a la tête.
1,80 x 6 = 10,80.

Annexe 4 : Les 4 textes de Dimitri

Texte initial 23/05/08

Le pied du géant mesure : 15,05 cm =
L' homme mesure = 7,01 cm =

La proportion : $\frac{7,01}{15,05}$ ×2

701 × 2 = 1402
1402 × 1,5 =

$$\begin{array}{r} 1402 \\ \times \quad 15 \\ \hline 7010 \\ +\ 14020 \\ \hline 21030 \end{array}$$

1. Quelle est à ton avis la taille du géant ? Qu'est-ce qui te permet dire ça ?

La taille du géant fait à peu près 5,41 m (500 m) car la taille d'un homme mesure environ 1 m 80 puis je multiplie par 3,5 .

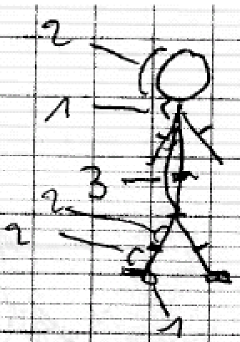
$\frac{180}{500}$ ×

180 × 2 = 360 × 1,5 = 540
2 + 1,5 = 3,5
~~36 × 5 = 1800~~

$$\begin{array}{r} 360 \\ \times \quad 15 \\ \hline 1800 \\ +\ 3600 \\ \hline 5400 \end{array}$$

5 0 0

Deuxième texte 06/06/08



2 + 2 + 2 + 1 + 3 + 1 = 11 hommes, il faut.

J'ai pris un dessin au hassard car de toute façon ça revient au même, puis je pense prendre n'importe qu'elle homme pour essayer de voir combien ont peut en mètre.

1,80 × 11 = 19,80 m

hommes 11×

la taille d'un adulte normal.

le géant mesure 19,80 m

Troisième texte 09/06/08

la taille de l'homme

$7 \times 1m80 = 12,60\ m$

le nombre de X qui y a d'homme.

la taille du géant

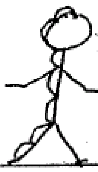
Moi j'avais une bande qui m'arrivait à mi mollet (mi jambe) puis j'ai vu que je pouvait faire 7 × l'homme sur moi.

Texte final 17/06/08

Moi, je dois d'abord trouver la taille moyen de l'homme (adulte) = 1,80 m, puis je cherche un outil de mesure qui est égale jusqu'à notre mi-mollet* et j'essaie de rentrer mon outil de mesure sur moi jusqu'à la tête car je représente le géant si je m'imagine le reste du géant se sera sertainement faux parce que un géant est un homme aggrandit. Ensuit j'ai trouvé que je peut mettre 6 ou 7 fois l'outil de mesure (l'homme) sur moi.

La taille du géant est entre 10,80 m et 12,60 m.

$1,80\ m \times 6 = 10,80\ m$ $\quad$ $1,80 \times 7 = 12,60\ m$



Géant

7× fois ou 6 pour les petits.

* Elle va représenter un homme.

1m77 + 1m77

3m54 genoux

3m54 x 2 =

3,54 x 2,00 = 7,08

7,08

7,08 + 1,77 = 8,85

8,85 ventre

8,85 + 1m77 =

10,62 cou

10,62 + 1,77 =

12,39 bouche

12,39 + 1,77 =

14,16 cheveux

Annexe 5 : Les 4 textes de Sarah

Texte initial 23/05/08

Le géant (1)

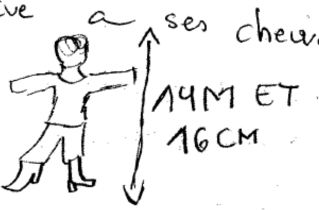
1. Quelle est à ton avis la taille du géant ? Qu'est-ce qui te permet dire ça ?

La taille du géant est de 14m,16 cm

Ce qui me permet de dire ça c'est on calcul environs la taille d'un homme est de 1m77 puis on calcule

jusqu'a on arrive a ses cheveux.

ont fait plus 1m77 (+)



Deuxième texte 06/06/08

Hyphotese : Je pense que la taille
du geant est de 18 m
car un homme mesure 1,80 m
nous multiplions par 10 sa fait 18m.

etude : j'ai mesurer ma Hylène elle mesure
1,60 m un homme fait 1,80m
je le mesurer ×10 = 18,0m
si il est a la diagonal on le rapetisser
sa fait 20 m si il est plier il
fait 16 m

Troisième texte 09/06/08

Nous avons repris le problème on a trouver le
~~(mis)~~ (le) mis mollet .

L'objet : l'homme 1,80.

calcule :

1,80 × 6 = 10,80
1,80 × 7 = 12,60

Le géant mesure entre 10,80 et 12,60.

Texte final 17/06/09

Par pouvoir comencer il faut regarder la photo. Vous prenez l'homme sur le trotoire puis vous regardez il va à son mit mollet* (ceau) puis ont le reporte normalement sa rentre 6 à 7 fois dans notre corps. Si un homme de taille moyenne mesure 1,80 m. On fait un calcule:

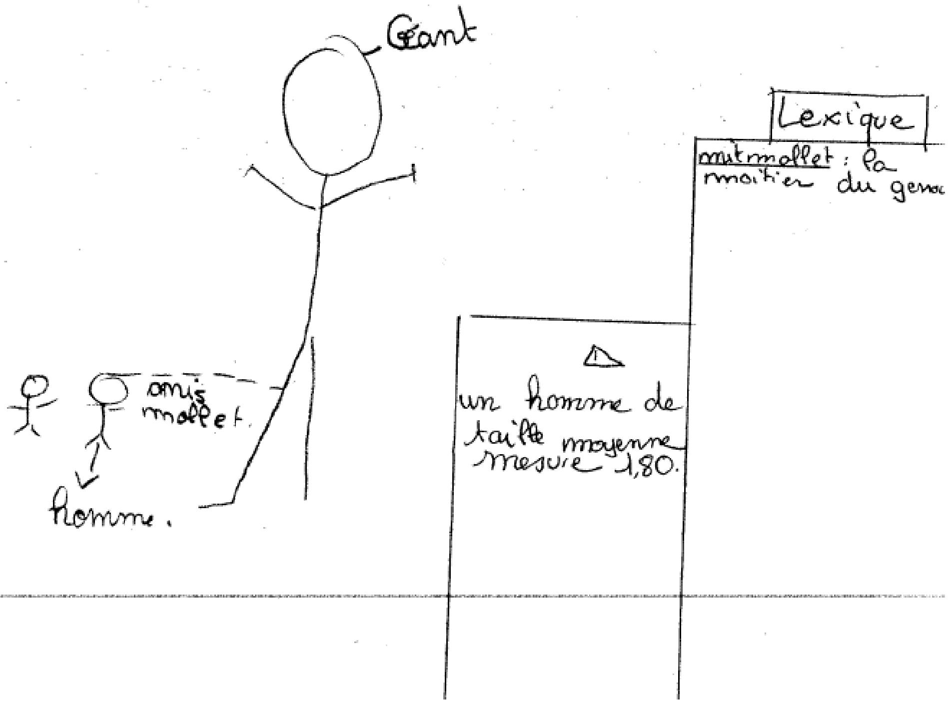
$1,80 \times 6 = 10,80.$

$1,80 \times 7 = 12,60.$

taille de l'homme — combien ça rentre de fois.

Reponse : Le géant mesure entre 10m,80 et 12,60.

schemas:



Atelier B1

PLACE DES REPRODUCTIONS ET DES CONSTRUCTUCTIONS DANS LES APPRENTISSAGES GÉOMETRIQUES

Annie NOIRFALISE
IREM de Clermont Ferrand
annie.noirfalise@free.fr

Yves MATHERON
UMR-P3- ADEF, INRP, Aix-Marseille Université
yves.matheron@inrp.fr

Résumé
L'atelier s'attache à faire analyser des pratiques géométriques de l'école primaire en utilisant la notion d'organisation praxéologique (tâche, technique, technologie, théorie) issue de la théorie anthropologique du didactique (élaborée par Yves Chevallard).
Après une analyse collective d'exemples, des activités de reproduction de figures, de construction et de reconnaissance de figures sont proposées aux participants. Pour chaque activité, il est demandé de mettre en évidence les techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre pour accomplir la tâche demandée, d'identifier les éléments technologiques et théoriques qui justifient ces techniques et de repérer les implicites utilisés.
Seul le travail des participants sur les deux premières activités de reproduction de figures donne lieu à un compte-rendu.
Pour les activités de construction et de reconnaissance de figures, les auteurs fournissent leurs propres commentaires. Les énoncés des activités soumises aux participants sont fournis.

1 APPORTS PRÉALABLES

1.1 Espace sensible / espace géométrique

Dans une première approche nous avons distingué :

- d'une part l'**espace sensible**, espace contenant des objets qui nous sont accessibles par le biais des sens (vue, toucher, odorat, etc.) et grâce à notre motricité,
- d'autre part l'**espace géométrique**, résultat d'un effort de théorisation et qui rend raison de l'espace sensible,

« […] la géométrie part du monde sensible pour le constituer en monde géométrique, celui des points, des droites, des cercles, des sphères, des courbes, des surfaces et des volumes, etc., de la même façon que, plus largement, la physique part du monde sensible pour le constituer en en monde physique ». « La physique en effet décrit un univers où il est question de “ masses ”, de “ forces ”, de “ quantités de mouvement ”, etc. : toutes choses étrangères à la perception non physicienne de l'espace sensible ». (Chevallard et Jullien, 1991, p. 52)

Dans le monde sensible, pour accomplir des tâches, on recourt à des techniques visuelles, tactiles, olfactives, motrices. Dans le monde géométrique, les tâches relèvent de la manipulation d'énoncés suivant les techniques de la démonstration à l'intérieur d'une théorie.

L'espace géométrique, comme l'espace physique, est un monde construit par les hommes à partir de l'espace sensible, ayant sa propre cohérence interne, et permettant de ***produire des***

connaissances sur l'espace sensible : pas plus que la masse, le point n'appartient à l'espace sensible.
L'existence d'un espace géométrique est avant tout le fruit d'un travail de ***modélisation mathématique de l'espace sensible,*** c'est aussi par un travail de modélisation que l'on produit des connaissances sur l'espace sensible dans l'espace géométrique.

La distinction faite précédemment entre l'espace sensible et l'espace géométrique doit être affinée pour analyser les activités participant à la construction de savoirs géométriques. En effet, même si les objets sur lesquels on s'interroge sont matériels, les techniques que l'on utilise peuvent être partiellement géométriques.
M.-H. Salin et R. Berthelot (Berthelot et Salin 1992) distinguent trois types de techniques : celles relevant des « problématiques géométrique, pratique, et de modélisation ». Toutefois les choses nous paraissent plus complexes et comme dans tout travail de modélisation au service de l'étude d'une question dans un champ donné, un va et vient entre ce champ et la théorie fera partie intégrante de l'étude. Nous souhaitions, à travers des exemples, attirer l'attention des participants sur cette complexité. De plus si actuellement, à l'école primaire, l'étude de l'espace géométrique doit passer par l'interaction avec l'espace sensible[1], celle-ci n'implique pas nécessairement la mobilisation, et encore moins l'acquisition de connaissances de type géométrique.
Au cours de cet atelier, à travers l'analyse de différentes activités, la proposition a été faite aux participants de réfléchir aux rencontres géométriques que les élèves peuvent faire à l'occasion de ces activités.

1.2 Cadre théorique pour l'analyse des activités

Les participants à l'atelier ont été invités à analyser les activités proposées à l'aide des outils fournis par la théorie anthropologique du didactique[2]. Pour les lecteurs non familiers de l'usage de cette théorie, précisons que dans cet atelier, nous n'avons utilisé qu'un nombre très restreint des éléments théoriques qui la constituent. En début d'atelier un rappel rapide a été fait sur la définition d'une organisation praxéologique ponctuelle en termes de type de tâches, technique, technologie et théorie.

2 DESCRIPTION DE L'ATELIER

2.1 Travail prévu a priori

Nous avions prévu de faire travailler les participants à l'analyse d'activités de reproduction, de reconnaissance et de construction de figures. De façon plus ou moins approfondie, ce contrat a été rempli.
Nous souhaitions aussi leur proposer de réfléchir et débattre sur « le soin des reproductions géométriques ». En effet nous pensions attirer l'attention des participants sur la ou les fonctionnalités de la qualité d'exécution d'un dessin. Dans le mouvement de « va et vient entre l'espace sensible et l'espace

---

[1] « *L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.* », B. O. n° 3 du 19 juin 2008, page 23.

[2] Nous nous référons à la théorie didactique développée par Yves Chevallard et les didacticiens qui se réclament de cette approche. On pourra se reporter à la bibliographie de référence (Chevallard Y. (1998 & 1999), Matheron Y., Noirfalise R. & Combelles C. (2006), Noirfalise A. & Matheron Y. (2009)). On trouvera une présentation succincte des éléments théoriques nécessaires à la compréhension de notre contribution dans l'introduction d'un article des mêmes auteurs, intitulé « *Gérer la résolution des problèmes, non pas seulement pour chercher, mais aussi et avant tout… pour apprendre des mathématiques* », publié dans la revue Grand N n° 82, ou dans leur communication au XXXV[e] colloque de la COPIRELEM, Bordeaux-Bombannes, juin 2008.

géométrique », que nous avons évoqué plus haut et que nous exemplifierons plus loin, le dessin géométrique doit être clairement porteur des informations utiles à l'étude que l'on mène, dans le cadre où on la mène. Les conventions de représentation et de lecture dépendent des institutions dans lesquelles on travaille : par exemple, elles ne sont pas les mêmes en dessin d'architecture, en dessin industriel, en géométrie descriptive, ...
Nous avons manqué de temps pour aborder ce dernier point durant l'atelier.

2.2 Activités de reproduction de figures

2.2.1 Deux exemples, traités collectivement pour percevoir la complexité

Ces activités ont été traitées sous forme d'échanges avec les participants à l'atelier.

- ✓ **Premier exemple :**

Considérons une figure représentant sur une feuille de papier une pyramide en plastique, de forme un tétraèdre ; cette figure, comme la pyramide elle-même, est un objet matériel. Néanmoins pour passer de l'un à l'autre, on ne reste pas dans le monde sensible. La représentation graphique de la construction dans le système scolaire suppose déjà la modélisation de certains éléments constituant la pyramide : les sommets et les arêtes par exemple, sont modélisés par des points et des segments. La modélisation à laquelle on se livre crée de nouveaux objets liés entre eux par des propriétés géométriques qui, à leur tour, vont guider le tracé et lui donner du sens. Une analyse géométrique de « l'objet matériel pyramide » et un travail dans le monde géométrique sont indispensables pour construire un autre objet matériel, « une pyramide géométrique » ; c'est-à-dire quatre points non coplanaires de l'espace, dans le cas où cette pyramide est un tétraèdre. La figure que l'on a sous les yeux en est une représentation graphique. Ce dernier objet matériel porte la trace de sa construction en tant que représentation du modèle géométrique de l'objet de l'espace sensible qu'il modélise. Ainsi, si la pyramide est un petit jouet en plastique mou, que ses faces sont de ce fait légèrement déformées, la figure ne saurait les représenter puisqu'elle représente non l'objet de l'espace sensible mais l'objet géométrique pour lequel les faces sont nécessairement planes. De même, si les arêtes du jouet possèdent une légère « épaisseur », celle-ci ne peut exister en tant que telle dans la figure, puisqu'elle représente l'objet géométrique dont les arêtes sont des segments ; donc qui sont sans « épaisseur ».

- ✓ **Deuxième exemple :**

Supposons que l'on veuille remplacer des vitres dont l'encadrement donne à voir des trous du type suivant :

Pour passer commande au vitrier, qui ne se déplace pas, on peut utiliser une des deux techniques, suivantes, parmi d'autres :
- Première technique τ_1 : on peut, en appliquant un papier calque sur chaque hublot, tracer des patrons de chaque vitre, les découper et les apporter au vitrier. La motricité, le contrôle des gestes par la vue, voire le toucher, sont sollicités pour mettre en œuvre au mieux cette technique.
- Deuxième technique τ_2 : on peut « analyser les propriétés de chaque trou ». Faire l'hypothèse que le premier est un losange, le vérifier en mesurant les quatre côtés, puis se tenir le « discours » suivant : « je sais, en géométrie, que deux losanges ayant leur côtés égaux ne sont pas nécessairement

superposables (en géométrie on dirait isométriques), mais que deux losanges ayant par exemple leurs côtés égaux et une diagonale égale sont superposables, je vais donc mesurer la longueur du côté et la distance entre deux sommets opposés du hublot et les communiquer au vitrier. » Pour le second trou, on peut faire l'hypothèse à la vue que c'est un cercle. Mais pour donner des informations numériques au vitrier, il faudra utiliser un petit travail de modélisation afin de déterminer le centre et le diamètre : tracer deux cordes non parallèles et les médiatrices de celles-ci.

En première approche, la première technique ne relève que du monde sensible et aucune incursion n'est faite dans le monde géométrique. La seconde technique implique un va-et-vient entre le monde sensible et le monde géométrique. Dans un premier temps nous pouvons décrire la technique de la façon suivante :

Monde sensible	***Modélisation***	***Monde géométrique***
Le ***hublot*** est observé		
	L'hypothèse est faite que c'est un ***losange***	
		Etude des conditions suffisantes pour que deux losanges soient ***isométriques***
On mesure un côté du hublot et la distance entre deux sommets opposés, afin que le vitrier fasse un objet exactement ***superposable*** au trou.		

Cet exemple montre, de façon modeste, comment le monde géométrique permet « ***de produire des connaissances pour agir dans l'espace sensible*** ».
Ces connaissances permettent ***de penser, d'élaborer et de décrire la technique*** τ_2 pour accomplir la ***tâche*** évoquée précédemment.
Si on modélise cette activité : « passer commande au vitrier » dans le cadre de la ***théorie anthropologique du didactique***[3], c'est donc au niveau ***technologique*** que les connaissances géométriques sont sollicitées.

Toutefois les éléments technologiques associés aux techniques τ_1 et τ_2 évoquées précédemment peuvent être de nature très différente:

---

[3] Pour une présentation de la notion d'organisation praxéologique on pourra se référer à un des textes suivants :
CHEVALLARD Y. (1999).
CHEVALLARD Y. (1998).
MATHERON Y., NOIRFALISE R. & COMBELLES C. (2006), pp 30-47.
MATHERON Y. et NOIRFALISE A. (2008) pp. 91-113.
NOIRFALISE A. et MATHERON Y. (sept. 2009).

- En ce qui concerne la première technique, τ_1, la conservation de la forme du patron dans le transport, élément fondamental pour justifier la pertinence de la technique, est rarement verbalisée à l'école primaire, on fait comme si « ça allait de soi ». Or, bien sûr, c'est un élément technologique qui relève de l'expérience sensible, perceptive, et qui devient « invisible » car naturalisé par son usage quotidien : on a, en tant qu'adultes et à de nombreuses reprises, pu constater expérimentalement cette conservation… « par isométrie », dirions-nous en mathématiques. Toute personne qui la nierait devrait s'affronter à la désapprobation des autres, majoritaires. Est-elle si naturelle pour des élèves ?

- En ce qui concerne la seconde technique, τ_2, la description précédente fait apparaître deux phases.
La première est repérée par la phrase : « l'hypothèse est faite que c'est un losange ». Cette reconnaissance est-elle due à une grande familiarité avec cette configuration, permettant de la reconnaître, de façon perceptive, « au premier regard », ou cette phase suppose-t-elle un vrai raisonnement hypothético-déductif, du type « si ce trou a la forme d'un losange alors les côtés sont de même mesure, je vérifie s'il en est ainsi pour pouvoir poursuivre » ? Autrement dit, un raisonnement par analyse, ou condition nécessaire (« si c'est un losange, alors nécessairement il possède telle propriété… vérifions si c'est le cas »), qui s'appuie sur l'expérience : celle que l'on a des losanges, celle qu'on peut mener sur celui-ci.
La deuxième phase est repérée par la phrase : « étude des conditions suffisantes pour que deux losanges soient ***isométriques*** » ou synthèse (« pour que ce soit un losange, il suffit que… ; vérifions si c'est bien le cas ») qui s'appuie elle aussi sur les mêmes types d'expériences. Cette assertion suppose que l'on ait à sa disposition de telles conditions ou que l'on soit en mesure de les élaborer : par exemple par les techniques du monde géométrique ou des techniques expérimentales. Suivant le cadre de travail, c'est-à-dire l'institution dans laquelle on se situe, effectivement ou en pensée, la nature des justifications de la manière de faire ne sera pas la même[4].
S'il s'agit d'un hublot de forme rectangulaire, à l'école primaire par exemple, on peut penser que la familiarité avec cette configuration est suffisamment grande pour que la reconnaissance se fasse de façon perceptive, sans être interrogée. On donnera sans doute au vitrier la longueur et la largeur de ce rectangle mesurées sur le trou, sans se poser la question de savoir si c'est suffisant pour qu'il puisse produire une vitre exactement superposable au trou ; un travail dans le monde géométrique permettrait de trancher en la matière, lequel n'est pas possible à l'école élémentaire ; l'artisan, d'expérience dans ses pratiques professionnelles, saura que ces informations lui suffisent pour produire exactement ce qu'il faut. Ne serait-il pas souhaitable d'attirer l'attention des élèves sur le fait que ces informations seraient insuffisantes dans le cas d'un parallélogramme non rectangle ?

2.2.2 Une série de quatre activités étudiées par les participants

Organisation du travail

Les participants ont été invités à analyser des activités de reproduction de figures dont on trouvera la description ci-dessous. Le travail a été mené en groupes de deux à quatre personnes, à partir de la consigne suivante :
« Pour chaque activité de reproduction de figures :
- décrire l'organisation praxéologique correspondante, *essentiellement imaginer des techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre pour accomplir la tâche demandée et les éléments technologiques et théoriques rendant celles-ci intelligibles et permettant de les justifier*
- préciser les propriétés que l'on rend visibles, les manières de faire que l'on considère comme allant de soi, et échappant à une justification géométrique.
- de façon incidente, s'interroger sur ce qui justifie ces choix »

[4] « *Comme tous les autres éléments constitutifs des praxéologies, les technologies migrent dans l'espace social par* transposition *d'institution à institution : toute technologie, toute technique ou toute théorie a donc pour premier mérite d'exister en un cadre institutionnel donné »*, citation extraite de Y. Chevallard (2002), page 5.

On trouvera en annexe 4. 1, une reproduction du support de travail utilisé. Il s'agit de la page 121 de l'ouvrage « J'apprends les maths avec Picbille », CP, édition Retz, 2002, reprise dans « J'apprends les maths avec Tchou », même éditeur, 2008, pages 132 et 133.
A partir de ce même support on envisage quatre situations différentes :

1re situation : on donne aux élèves la planche page 121 partie supérieure, du papier calque à la dimension du cadre où sont tracées les trois fusées, une feuille avec, déjà tracé, un cadre analogue, et on leur demande de reproduire le dessin dans le cadre.

2e situation : on donne aux élèves la planche page 121 partie supérieure, le formographe, une feuille avec déjà tracé un cadre analogue à celui qui entoure les trois fusées, on leur demande de reproduire le dessin dans le cadre. Le formographe est un matériel livré avec le livret élève de la collection. Il s'agit d'un rectangle de plastique semi-rigide dans lequel des formes géométriques sont évidées, dont celles qui constituent les éléments des trois fusées en dimensions réelles.

3e situation : on donne aux élèves la planche page 121 partie supérieure, une feuille de papier quadrillé, une règle graduée, on leur demande de reproduire le dessin.

4e situation : on donne aux élèves la planche page 121 partie supérieure, une feuille blanche, une règle non graduée, un compas et un gabarit d'angle droit, on leur demande de reproduire le dessin.

Echanges avec les participants
Dans le temps imparti à l'atelier, seul le travail accompli sur les deux premières activités a pu être restitué au groupe. On trouvera en annexe une description sommaire de techniques et d'éléments technologiques correspondant aux quatre activités proposées.
Au cours de cette restitution, de nombreuses questions ont émergé, que les notes prises par les rapporteurs[5] nous permettent d'évoquer ci-dessous.
A propos de la première activité, les techniques envisagées par les différents groupes diffèrent peu de celle décrite en annexe. Les participants voient dans cette activité un entraînement à une activité motrice de précision, contrôlée par la vision, demandant une attention soutenue importante, compte tenu du nombre de figures à reproduire. Le problème de la validation a été posé : comment l'élève ou le maître sait-il que la tâche est accomplie correctement ? On peut envisager un modèle sur une feuille transparente pour comparer. Mais alors quelles différences va-t-on prendre en compte ? Ceci soulève, d'une part, le problème de la signification des expressions telles que « ***tracer avec soin et précision*** »[6], que l'on trouve dans le programme de 2008 : par exemple, dans le cas de cette activité qui n'est pas finalisée au sein de laquelle rien, en dehors de ce que décide le maître, ne justifie que telle ou telle différence avec le modèle, invalide la façon dont la tâche a été accomplie. Par ailleurs, le repérage des différences renvoie au repérage des différents représentants que l'on utilise en géométrie comme signe des objets du monde géométrique intervenant au niveau théorique[7] : par exemple, dans le dessin à reproduire, une partie de la figure est visuellement perçue rectiligne entre les deux sommets d'un triangle (ou deux points tracés sur la feuille distribuée aux élèves), et à ce titre il représente un segment (objet géométrique), d'extrémités les deux sommets d'un triangle (objet géométrique) ; un tracé non « intentionnellement rectiligne », ne coïncidant par exemple pas avec le bord d'une règle, ne peut être admis comme représentant le même objet géométrique que celui que l'on veut reproduire. Sans expliciter le va-et-vient que nous venons d'évoquer entre le monde sensible et le monde théorique, tout en restant dans un monde empirique, la verbalisation des raisons de l'adéquation ou de la non adéquation d'un tracé est l'occasion de mettre en évidence des outils et des pratiques attachés à un objet

[5] Que Bruno Canivenc et Christine Niel soient ici remerciés pour les notes très claires, prises en cours d'atelier, qu'ils ont bien voulu nous laisser.
[6] B. O. hors série n° 3 du 19 juin 2008, page 20.
[7] Nous revenons sur ce point dans le paragraphe suivant, en italique.

géométrique qui, lui, n'est jamais rencontré. C'est un des points que nous souhaitions soumettre au débat dans cet atelier.

Pour préciser ce qui précède, pour faire des mathématiques on utilise des outils : des instruments règles, équerres, etc.), des signes (écritures, tracés, dessins, figures, tableaux, graphiques, etc.). Chacun de ces objets matériels est considéré comme un représentant d'un objet de la théorie qu'il est réputé représenter : $C\,(O, r)$ représente un cercle, de même qu'un graphisme du type : O. Ces outils sont porteurs de certaines informations pouvant être établies dans la théorie et/ou perçues expérimentalement : par exemple l'écriture (AB) renvoie au fait expérimental, maintes fois constaté par les élèves à l'aide d'une règle, que deux points distincts définissent une droite et une seule ; résultat qu'on prend généralement comme axiome pour des pratiques relevant de la géométrie (théorique) affine euclidienne. La certitude de ce résultat expérimental permet de nommer sans ambiguïté la droite. Dans le cas du trait tracé à la règle et au crayon, il s'agit de pratiques consistant à définir une droite à partir d'un point en lequel on pose la règle et d'une direction, celle prise par la règle.
Les résultats démontrés dans la théorie d'une part, perçus en expérimentant avec les représentants d'autre part, s'enrichissent mutuellement : le cercle, $C\,(O, r)$, par exemple, peut être perçu comme trace laissée sur la feuille par le crayon situé à une extrémité des branches d'un compas écartées de la distance r, l'autre extrémité étant en O, ou dans la théorie comme lieu des points du plan distant de r d'un point donné O ; l'expérience renseigne par exemple sur ce qui se passe pour les points communs à deux cercles $C(O, r)$ et $C(O', r')$ si $OO' < r + r'$, ce que l'on cherchera à démontrer dans la théorie, et/ou inversement ce que l'on peut obtenir sur le papier connaissant le résultat théorique.
On peut faire l'hypothèse que le travail dans les différents systèmes matériels évoqués précédemment, et la familiarisation avec ce que véhiculent les signes utilisés pour désigner des objets géométriques représentés – C (O, r) ou (AB) pour ne citer que les deux exemples utilisés dans ce texte –, encore absents à l'école primaire, participent à l'entrée des élèves, au Collège, dans un nouveau contrat : pratique démonstrative à l'aide d'énoncés de propriétés admises comme légitimes[8].

2.3 Activité de reconnaissance et activité de construction de figures

2.3.1 Travail prévu

Nous avions prévu de poursuivre le travail de l'atelier par l'analyse d'une situation de construction d'une figure géométrique puis par l'analyse d'une situation de reconnaissance d'une figure géométrique. Compte tenu de la richesse des échanges précédemment évoqués, et faute de temps, nous n'avons pas abordé cette partie avec les participants. On trouvera en annexe les supports à partir desquels l'analyse devait être proposée, et une description sommaire de techniques et d'éléments technologiques correspondant aux deux activités envisagées a priori. Cette description nous semble utile pour comprendre les commentaires qui suivent. Les consignes de travail prévues étaient les mêmes que celles de l'activité décrite ci-dessus.

A partir de ces deux activités nous souhaitions engager une réflexion sur plusieurs points.

2.3.2 A propos de l'activité de construction

Des propriétés géométriques de la figure à construire doivent nécessairement être utilisées pour élaborer une technique de construction ; quelquefois même, il est nécessaire de verbaliser pour justifier la technique de construction utilisée. Celles que l'on doit considérer comme acquises dans le matériau initialement proposé doivent être lues sur la figure sans qu'aucun codage ou texte ne les mentionne : par exemple que M est le milieu de $[AB]$, que $AQOM$ est un rectangle, que O est le milieu de $[BD]$ et Q le milieu de $[AD]$...,

---

[8] Pour approfondir le rôle du travail dans un dispositif dont le support est matériel pour un travail ultérieur dans un dispositif dont le support est langagier, on pourra se référer à Noirfalise R. (1993), Contribution à l'étude didactique de la démonstration, *Recherche en didactique des mathématiques,* Vol 13/3, pp. 229-256.

Afin d'élaborer une technique de construction, il sera nécessaire de prendre en compte, au préalable, certaines des propriétés géométriques que la figure à obtenir devra nécessairement vérifier, en les choisissant de façon à permettre une construction avec les instruments de dessin imposés. Une question importante surgit alors : quelle visibilité donne-t-on à cette ***phase d'analyse*** ? Peut-on imaginer que cette étude soit conduite à partir d'une figure du rectangle à obtenir faite à main levée, intégrant les éléments donnés au départ et leurs propriétés ?
Une autre question, tout aussi importante, en résulte : comment s'assurer que la figure obtenue soit effectivement la représentation d'un rectangle, (***phase de synthèse***), puisqu'à ce niveau les élèves n'ont pas à leur disposition de ***propriétés caractéristiques*** ?

2.3.3 A propos de l'activité de reconnaissance de figures

A ce niveau, si on lui demande comment il reconnaît qu'une figure est ou n'est pas un rectangle, l'élève sait qu'il ne peut pas répondre « parce que ça se voit », et qu'il devra faire appel aux propriétés géométriques du rectangle. La question se pose alors de savoir quel ensemble de propriétés doivent être vérifiées (respectivement infirmées) pour être sûr que la figure est (respectivement n'est pas) un rectangle. Dans les réponses de l'élève A on perçoit la mobilisation de quelques propriétés largement insuffisantes, (côtés parallèles ou une certaine « régularité ») pour justifier sa réponse. Les réponses de l'élève C montrent l'efficacité de la définition du rectangle : « quadrilatère ayant quatre angles droits », pour justifier que les figures A et C ne sont pas des rectangles. Pour la figure B on note la redondance des propriétés choisies pour justifier que c'est un rectangle ; mais quel ensemble de propriétés parmi toutes celles que l'on connaît, à ce niveau, suffit-il de mobiliser pour justifier que c'est un rectangle ?
Les réponses données par les élèves témoignent de leur manque d'aisance dans la description géométrique des figures proposées, ce qui conduit à se demander comment redonner au vocabulaire attendu sa fonctionnalité.

3 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERTHELOT R. et SALIN M. H., (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.

BERTHELOT R. et SALIN M. H. (2001) : Le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive. Analyse critique de démarches préconisées actuellement dans les instructions officielles et dans les manuels. Quelques propositions alternatives à étudier, in *Quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental*, Actes du colloque inter-IREM 1er cycle juin 2001, éditeur IREM de Montpellier.

CHEVALLARD Y. (1999) : L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 19, n° 2, pp. 221-266.

CHEVALLARD Y. (1998) : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, in Actes de l'Université d'été de La Rochelle, pp. 89- 118, édition coordonnée par Noirfalise R., Aubière : Edition IREM de Clermont Ferrand.

CHEVALLARD Y., JULLIEN M., (1991), *Autour de l'enseignement de la géométrie au collège*, Petit *x* n° 27.

MATHERON Y., NOIRFALISE R. & COMBELLES C. (2006), Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques : quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique, *Petit x n° 70*, Université Joseph Fourier et IREM de Grenoble.

NOIRFALISE A. et MATHERON Y. (2009) : *Enseigner les mathématiques à l'école primaire, Les quatre opérations sur les nombres entiers* (tome 1) et *Géométrie, grandeurs et mesures*, (tome 2), Paris, Vuibert.

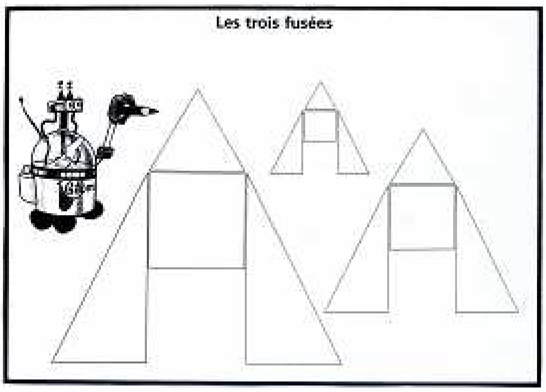
NOIRFALISE R. (1993) : Contribution à l'étude didactique de la démonstration, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 13 n°3, édition La Pensée Sauvage.

4 ANNEXES

4.1 *Supports utilisés*

4.1.1 Pour les quatre activités de reproduction de figures

Il s'agit de la page 121 de l'ouvrage « J'apprends les maths avec Picbille », CP, édition Retz, 2002, reprise dans « J'apprends les maths avec Tchou », même éditeur, 2008, pages 132 et 133.

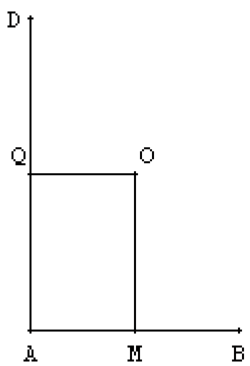


4.1.2 Pour l'activité de construction de figure

Cette situation est extraite de « Travaux Géométriques. Apprendre par la résolution de problèmes, cycle 3 », (CRDP du Nord Pas de Calais, 2000).
Il s'agit de compléter une figure pour obtenir un rectangle *ABCD* de centre *O* (on considère implicitement que *M* est le milieu de [*AB*] et que *AQOM* est un rectangle).
Une des deux mises en œuvre réalisées en CM2 est la suivante :

Consigne :

Complète la figure ci-dessous pour obtenir un ***rectangle*** de centre *O*.
Tu ne peux utiliser que la règle non graduée et le compas

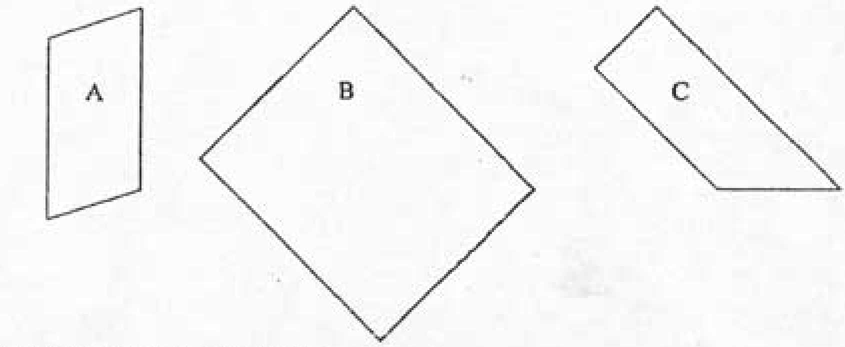


4.1.3 Pour l'activité de reconnaissance de figures géométriques

Il s'agit d'un exercice proposé en début de la classe de 6e, et les productions de deux élèves.
Pour cet exercice, les élèves avaient à leur disposition une règle graduée, une équerre et un compas.

Texte de l'exercice

Voici trois figures.



Remplis le tableau ci-dessous.

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	OUI NON	
B	OUI NON	
C	OUI NON	

Productions d'élèves

Annexe 1b

ELEVE A

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	OUI NON	C'est un rectangle parce que les cotés sont droites.
B	OUI NON	Parce que il y a 4 sommet et 4 côtés.
C	OUI NON	Parce qu'il y a 1 côtés qu'il est pas comme les autres!

Annexe 1c

ELEVE C

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	OUI NON	car il n'a pas d'angles droits
B	OUI NON	Oui car il a deux parallèles de 4,2 cm et deux autres de 3,1 cm et il a 4 angles droits
C	OUI NON	car il a que deux angles droits.

4.2 Techniques possibles et éléments technologiques correspondant pour ces activités

4.2.1 Pour les quatre activités de reproduction de figures

Pour accomplir la tâche attendue, la technique qu'un élève peut mettre en œuvre sera différente dans chacune des situations évoquées précédemment. Nous précisons ci-dessous des techniques possibles.

1re activité : les élèves font coïncider le cadre du papier calque et du modèle. Avec leur crayon, ils repassent sur les tracés des trois fusées. Ils peuvent faire ces tracés dans un ordre quelconque ; s'ils en oublient ils pourront replacer le calque sur le modèle pour compléter. Ils retournent le calque et noircissent l'envers des tracés effectués, le retournent une seconde fois et font coïncider le cadre du papier calque et de la feuille blanche, puis repassent sur leurs premiers tracés. Dans ce cas encore, ils peuvent faire ces tracés dans un ordre quelconque ; s'ils en oublient, ils pourront replacer le calque sur la feuille pour compléter.
Ce type de techniques suppose une activité psychomotrice contrôlée par la vision : adaptation du geste pour suivre un trait déjà tracé et pour ne pas percer le calque, contrôle visuel de la mise en coïncidence

de deux tracés. La situation permet de rester dans le monde sensible. Elle suppose aussi que l'on sache que la figure est invariante lorsqu'on la décalque, puis qu'on la déplace sur un papier calque ; autrement dit, qu'il y a conservation des longueurs, des angles, des aires… Et plus sûrement, au niveau du CP, conservation de « la forme », sans plus de précision sur ce dernier terme. Ce qui renvoie aux ***propriétés « métriques »*** d'une certaine géométrie « théorique » qui demeure évidemment implicite.

2e activité : les élèves décomposent chaque fusée en quatre morceaux. Ils font correspondre un trou du formographe avec chacun des morceaux. Ils peuvent pour cela faire coïncider les parties évidées du formographe avec les différentes parties de chacune des trois fusées, et ensuite tracer sur la feuille, dans le cadre déjà tracé, les différentes parties de chaque fusée. Ils peuvent par exemple commencer par la pièce la plus à gauche et avancer dans le tracé du dessin en évoluant de gauche à droite ; selon le sens de la lecture qu'ils ont déjà rencontré.
Cette technique suppose la prise en compte de ***propriétés « topologiques »*** (morceaux de fusée reconnues par leur frontière, dedans, dehors, frontières qui se touchent, morceaux qui sont d'intersection vide ou non, ...), de ***propriétés « projectives »*** (tel morceau est aligné avec tel autre, est à gauche de, à droite de, au-dessus de, au-dessous de, ...) Dans ce cas encore, ces propriétés sont implicites, contenues dans la conception du formographe, et les propriétés « métriques » ou « angulaires » de chaque figure sont prises en charge par les éléments du formographe qui permet de les transporter. Une lecture partiellement modélisée de la figure est effectuée : au-delà du fait que l'on a affaire à des contours fermés, la reconnaissance des formes reste de l'ordre de la perception visuelle (« ça coïncide » ou non avec des patrons), et leur position relative utilise le vocabulaire des géométries topologiques et projectives.

3e activité : les élèves peuvent décomposer chaque fusée en quatre morceaux. Par exemple, tracer sur la feuille les différentes parties de chaque fusée, ce qui suppose la prise en compte de la position de chaque partie de fusée dans la feuille et la prise en compte de la position relative des différentes pièces les unes par rapport aux autres et, de plus, pour chaque pièce, la considération de la position relative des traits la délimitant. Les lignes du quadrillage seront sans doute utilisées pour débuter le tracé de la base du pied de gauche de la grosse fusée, le côté vertical sera tracé en utilisant les lignes du quadrillage. Les élèves devront prendre les dimensions des côtés de chaque pièce, pour les reporter sur la ligne verticale et la ligne horizontale, puis terminer le tracé de la première pièce...
Cette technique suppose la prise en compte de propriétés topologiques (dedans, dehors, franchir la frontière, ...), de propriétés projectives (tel morceau est aligné avec tel autre, de propriétés d'orientation spatiale (tel morceau est à gauche de, à droite de, au-dessus de, au-dessous de, ...), de propriétés métriques (dimension des côtés, le support quadrillé prenant en charge le tracé des angles droits).

4e activité : les élèves peuvent décomposer chaque fusée en quatre morceaux. Par exemple, tracer sur la feuille les différentes parties de chaque fusée, ce qui suppose la prise en compte de la position de chaque partie de fusée dans la feuille et la prise en compte de la position relative des différentes pièces les unes par rapport aux autres et, de plus, pour chaque pièce, la considération de la position relative des traits la délimitant. Ils peuvent commencer par le tracé de la base du pied gauche de la grosse fusée, qui sera sans doute choisi approximativement horizontal. Pour tracer le trait vertical, le recours au gabarit d'angle droit sera nécessaire. Ils devront prendre les dimensions des côtés de chaque pièce, pour les reporter sur la ligne verticale et la ligne horizontale, puis terminer le tracé de la première pièce ; poursuivre ainsi pour les différentes fusées.
Cette technique suppose, même si elle semble transparente, invisible à l'observateur, la lecture, sur le modèle, de propriétés topologiques (dedans, dehors, franchir la frontière, ...), de propriétés projectives (tel morceau est aligné avec tel autre, de propriétés d'orientation spatiale (tel morceau est à gauche de, à droite de, au-dessus de, au-dessous de, ...), de propriétés métriques (dimension des côtés). Dans ce cas, le support ne prend pas en charge le tracé des angles droits : l'hypothèse que l'angle de la ligne horizontale et de la ligne verticale est droit pourrait être vérifiée en appliquant un gabarit d'angle droit sur le modèle, mais il sera sans doute simplement vu en s'appuyant sur la familiarité avec ce type d'objets. La reconnaissance étant établie de façon perceptive, on en déduit que le gabarit permettra de tracer un

angle superposable au modèle. Il y a là un début de modélisation : on remplace l'objet matériel à reproduire par un autre objet matériel réputé représenter, dans la communauté où on travaille, un objet géométrique nommé. L'opération est de même nature que celle qui consiste, dans le domaine numérique, à énumérer le début de la suite numérique en correspondance terme à terme avec les objets d'une collection, et à utiliser ce même début de suite numérique pour créer une collection dont on sait qu'elle aura le même nombre d'éléments que la première. Le dernier nombre que l'on atteint représente le cardinal des deux collections, c'est à travers ce type d'activités, rendant fonctionnel le nombre pour travailler avec une caractéristique commune à toutes les collections équipotentes, que la notion de cardinal se construit.

4.2.2 Pour l'activité de construction de figure

Première technique :
Avec la règle on « prolonge » le segment [*AO*] au-delà de *O* et, sur cette droite, on reporte au compas un segment [*OC*] de longueur *AO*. On joint alors *C* et *D* d'une part, et *B* et *C* d'autre part, pour terminer le tracé du rectangle ainsi obtenu. On a utilisé la propriété, ou encore le résultat technologique, qui énonce que si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu (parallélogramme) et s'il possède un angle droit, alors c'est un rectangle.

Deuxième technique :
La pointe du compas en *D* et l'écartement égal à *AB*, on trace un arc de cercle à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAD}$; la pointe du compas en *B* et l'écartement égal à *AD*, on trace un arc de cercle à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAD}$; ces deux arcs se coupent en *C*, et avec la règle on termine la construction du rectangle.
On a utilisé le théorème qui énonce qu'un quadrilatère non croisé qui a ses côtés opposés égaux deux à deux est un parallélogramme et que si, de plus, il possède un angle droit, alors c'est un rectangle.

Troisième technique :
On « prolonge » les demi-droites [*MO*) et [*QO*) au-delà de *O* et avec le compas on y place respectivement les points *M'* et *Q'* tels que *OM'* = *OM* et *OQ'* = *OQ*. Les droites (*BQ'*) et (*DM'*) se coupent en *C*.
On a utilisé principalement le théorème qui énonce que si un quadrilatère a les médiatrices de ses côtés pour axes de symétrie, alors c'est un rectangle. D'autres théorèmes sont utilisés, de manière implicite, par exemple celui qui énonce que deux perpendiculaires à deux droites perpendiculaires sont perpendiculaires entre elles, qui justifie par exemple que $(QO) \perp (AD)$ et que $(DM') \perp (AD)$, etc.

4.2.3 Pour l'activité de reconnaissance de figures géométriques

Il s'agit de reconnaître si une figure est un rectangle. Ce type de tâches peut être accompli à l'aide de différentes techniques telles que celles mentionnées dans le programme :

- reconnaître *de manière perceptive* une figure plane. « *L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.* » [9]
- ou « *Reconnaître, décrire, nommer et reproduire, tracer des figures géométriques : carré, rectangle, losange, triangle rectangle. Vérifier la nature d'une figure plane en utilisant la règle graduée et l'équerre.* », en CE2, et « *Vérifier la nature d'une figure plane simple en utilisant la règle graduée, l'équerre, le compas.* », en CM1.[10]

Ces extraits des programmes du cycle des approfondissements mentionnent deux techniques différentes pour accomplir la tâche demandée. La première, qui n'est plus considérée comme suffisante en cours de cycle, suppose que l'on sache reconnaître la forme – carré, losange ou cercle – de façon globale, un peu

[9] B. O. n° 3 du 19 juin 2008, page 23.
[10] B. O. n° 3 du 19 juin 2008, page39.

comme on reconnaît son voisin !… C'est-à-dire sans décomposer les éléments qui la constituent, sans modéliser ces éléments par des objets géométriques et sans étudier les propriétés géométriques de ces objets pris individuellement ou entre eux, donc sans recourir à une observation plus ou moins instrumentée qui permettrait de vérifier les inférences faites sur la nature de l'objet concret que l'on a sous les yeux. La seconde technique, qui autorise des gestes de ce type, est évidemment celle qui est attendue à ce niveau.

Atelier B2

SITUATIONS ET ASSORTIMENTS D'EXERCICES POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AUX ELEVES DE 5ÈME ET 6ÈME SEGPA

Marie-Hélène Salin
Université Bordeaux 2 LACES Equipe DAESL
mh.salin@sfr.fr

Résumé
Depuis quelques années, je travaille avec un enseignant de SEGPA, J.Y. Jongboët, pour préparer des suites de séances de mathématiques, relatives à un thème précis, comportant des « situations de recherche » de préférence issues de manuels du primaire, dans lesquelles les élèves puissent rentrer facilement et les plus simples possibles à gérer par l'enseignant, et des situations plus classiques, permettant la mise en fonctionnement répétée, sous forme d'exercices, des connaissances mises en œuvre dans les situations de type précédent, en vue de l'appropriation progressive de ces connaissances. L'atelier a comporté une première partie présentant les raisons de ce travail et deux exemples de «situations de recherche » sur lesquelles nous travaillons. Dans une deuxième partie, les participants ont été sollicités pour s'interroger sur les « situations intermédiaires » favorables à la mise en fonctionnement des connaissances rencontrées dans les situations présentées.

1 PREMIERE PARTIE

Assurant pendant de longues années, la formation des enseignants préparant l'option F de ce qui s'appelle maintenant le CAPASH, je m'étais rendu compte de l'absence de documents (manuels, livres pour les professeurs) les aidant dans leur enseignement. Mon projet de début de retraite était donc d'élaborer des documents utiles aux enseignants de SEGPA, tenant compte de mes acquis de chercheur en didactique des mathématiques, mais sans engager une recherche aux normes universitaires. Pour réaliser ce projet, il me fallait commencer par trouver des enseignants acceptant de mettre à l'épreuve certaines de mes propositions ainsi que ma présence dans leurs classes. Cela n'a pas été très facile et je remercie D. Houdart et J.Y. Jongboët qui ont bien voulu s'engager dans cette démarche.
L'objectif de l'atelier était double : décrire une démarche d'enseignement des mathématiques pour les classes de 6ème et 5ème de SEGPA et inciter des collègues à s'investir sur ce créneau.

1.1 Le contexte de l'enseignement des mathématiques en SEGPA

Dans un tiers environ des collèges, une SEGPA accueille les élèves, qui : « à l'issue de la scolarité élémentaire, cumulent des retards importants dans les apprentissages scolaires et des perturbations de l'efficience intellectuelle, sans toutefois présenter un retard mental. Les SEGPA ont pour objectif de permettre à ces élèves d'accéder, à l'issue de la formation en collège, à une formation professionnelle qualifiante».

L'enseignement dispensé se veut le plus proche possible de celui destiné aux autres élèves de collège : « Les finalités qui y sont poursuivies sont celles des enseignements du collège même si les programmes n'y sont pas applicables à l'identique » et plus précisément : « La classe de 6ème a pour objectif de permettre à l'élève accueilli en SEGPA de s'approprier ou se réapproprier des savoirs en re-dynamisant les apprentissages. Pour ce faire, et avec toute la souplesse requise dans une démarche d'adaptation, les

enseignants organisent leur action à partir des programmes de la classe de 6ème du collège en prenant en compte les difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves » (Circulaire juin 98).
Ces directives ont eu un effet bénéfique sur les attentes des enseignants vis-à-vis de leurs élèves et sur les plans d'étude, plus exigeants qu'auparavant. Mais, il y a une facette négative : il se développe dans ces classes un enseignement dont les contenus et les formes peuvent sembler proches de ceux en vigueur dans les classes ordinaires, conformément aux instructions, alors que deux caractéristiques des populations concernées (élèves et professeurs) les différencient :

- les niveaux en mathématiques des élèves, à l'entrée en 6ème, s'étendent entre celui visé à la fin du cycle 2 (et encore !) et celui de la deuxième année du cycle 3.
- les enseignants de SEGPA sont des enseignants du premier degré, dont la plupart n'ont pas de formation mathématique, même s'ils font l'essentiel de leur service dans cet enseignement.

Le divorce entre le niveau de connaissances des élèves et les objectifs assignés aux professeurs, en conduit beaucoup à privilégier un enseignement très formel, où les élèves peuvent obtenir des réussites, alors qu'ils sont incapables d'associer des connaissances aux techniques qu'on leur enseigne.

Ainsi, dans un manuel[1] de 6ème spécialement destiné à ces élèves (annexe 1), la première leçon sur les nombres décimaux comporte un premier encadré qui énumère sur quoi porte l'apprentissage des décimaux :

« Je vais apprendre à :
- identifier la partie entière et la partie décimale d'un nombre,
- identifier le chiffre des dixièmes, des centièmes, des millièmes…,
- écrire un nombre décimal compris entre deux nombres »

et propose un découpage en « technique » : l'usage du tableau de numération, et « sens » ainsi précisé : « il existe une infinité de nombres entre deux entiers ; la partie décimale permet de les exprimer ». L'enseignement consiste donc à fournir aux élèves une suite d'algorithmes leur permettant de développer quelques connaissances sur les décimaux (voir les exercices en annexe 2) mais en aucun cas, de comprendre à quels problèmes répondent ces nombres, ni comment ils sont construits.
Voici, en contrepoint, les réponses de groupes de deux élèves de 5ème dans une activité permettant de prendre des informations sur le sens que les élèves donnent aux nombres décimaux : il s'agit pour chaque groupe, d'indiquer à l'enseignant la longueur d'une bande de carton à l'aide d'une unité de papier (pliable), pour que ce dernier puisse découper une bande de même longueur que celle dont dispose le groupe.

Après un certain nombre d'échanges avec le professeur, non concluants pour la plupart, la mise en commun finale fait apparaître trois types de messages :

« 2 u et un petit bout d'unité » (2 groupes)
« 2,0 u, 2,2 u ou 2,3 u ou 2,5 u » (6 groupes) mais aucun élève ne sait montrer à la professeure comment construire un segment de cette longueur,
« 2 u + ¼ u », (2 groupes, un peu aidés par l'enseignant quant à la formulation du message) qui a permis de construire une bande de la bonne taille.

Ainsi, plus de la moitié des groupes pensent bien à utiliser un nombre décimal pour indiquer une longueur comprise entre 2 entiers mais aucun ne sait attribuer un sens précis au chiffre de la partie décimale. Personne n'a parlé de dixième, la partie décimale correspond sans doute à « un petit bout en plus ».
Ces résultats sont représentatifs de l'état de savoir des élèves de SEGPA : ils disposent de connaissances « culturelles » dont ne disposent pas les élèves plus jeunes qui rencontrent pour la première fois ces notions mais ces connaissances ne sont pas efficientes.

[1] Augendre J. et Serresèque T. (2002) *Maths 6ème*. Paris : Delagrave

On ne peut évoquer le contexte de l'enseignement en SEGPA sans aborder la question du « climat de classe ». Les problèmes sociaux de beaucoup d'élèves, les difficultés psychologiques de certains d'entre eux, contribuent à rendre difficile, et souvent imprévisible, la gestion des rapports entre les différents éléments de la classe, professeur et/ou élèves. Ces difficultés s'ajoutent à celles que rencontre le professeur d'un point de vue proprement didactique. Ceci peut expliquer pourquoi les enseignants avec lesquels j'ai travaillé choisissent un enseignement collectif (le même sujet pour tous au même moment) avec des temps de soutien différenciés quand ils en ont la possibilité. Je pense que ce choix est celui de la majorité des enseignants de SEGPA en ce qui concerne les mathématiques.

En conclusion, on peut formuler ainsi le problème didactique majeur auquel sont confrontés les enseignants : Comment travailler un domaine des mathématiques qui a déjà été enseigné, sans que les élèves aient l'impression de rabâcher, et en visant un double objectif : leur permettre de donner du sens aux concepts en jeu et les guider jusqu'à la maîtrise d'outils décontextualisés ?

1.2 Lignes directrices pour un enseignement des mathématiques en SEGPA

Les propositions faites aux enseignants s'appuient sur la théorie des situations didactiques en essayant de mettre en œuvre ses développements récents, en particulier sur les champs ouverts par la thèse de F. Genestoux.

1.2.1 Rappel : les étapes d'un processus d'enseignement

Tout processus d'enseignement d'une notion mathématique (dans le cadre de la théorie des situations didactiques) comporte une suite de « moments forts », correspondant aux situations–clés adidactiques. En général, l'entrée dans la situation « n » suppose des connaissances construites dans des situations antérieures. Ces connaissances doivent être suffisamment maîtrisées par les élèves, même si elles n'ont pas besoin de l'être complètement parce que, à terme, elles vont être remplacées par d'autres, plus simples, plus efficaces, etc. Des situations didactiques que j'appelle intermédiaires, qui permettent de retravailler certaines de ces connaissances « naissantes » sont nécessaires[2].

1.2.2 Quelques « principes » pour une adaptation aux classes de 6ème-5ème SEGPA

1) Il est nécessaire, et possible sous certaines conditions, de confronter les élèves de SEGPA à des situations, « à dimension adidactique[3] », dans lesquelles ils aient la possibilité de saisir l'enjeu des apprentissages en terme de prise de pouvoir sur le milieu, c'est-à-dire au cours desquelles ils aient la possibilité d'éprouver l'efficacité des connaissances dont ils disposent déjà ou des notions qui leur sont enseignées. Comment choisir un milieu pertinent ? Il est nécessaire de respecter la condition exigeante suivante : « *le savoir visé doit être représenté convenablement par les situations choisies* ». Ainsi, par exemple, l'entrée dans les décimaux par les problèmes de monnaie, très fréquente dans ces classes, n'est pas adéquate. J'ai choisi d'introduire les décimaux comme moyen d'exprimer une mesure sous la forme de la somme d'un nombre entier d'unités et d'une fraction décimale d'unité inférieure à 1, pour 2 raisons :
- C'est une démarche compatible avec les connaissances dont les élèves avaient fait preuve lors de la situation évoquée ci-dessus. Mais il ne s'agit pas de leur expliquer ensuite très vite que « quand ils proposent 2,2 u pour une longueur, cela veut dire qu'on a découpé l'unité en dix parties égales et qu'on en prend deux morceaux » ! Ce qui est visé est de permettre, par un processus d'enseignement s'étalant sur plusieurs séances, de découvrir le sens de cette écriture et de pouvoir l'utiliser convenablement[4].

---

[2] Voir des exemples dans Brousseau G. et N. (1987) Rationnels et décimaux

[3] Voir Mercier (1995), L'emploi de l'expression « à dimension adidactique » est justifié dans Salin (2006).

[4] Je me suis appuyée sur l'introduction des fractions de CAP MATHS CM1

- D'autre part, commencer par travailler sur des fractions non décimales permet de revenir sur le sens de moitié, demi, tiers, « ième » et de ne pas isoler les fractions décimales des autres fractions. Des situations intermédiaires plus classiques, s'appuyant sur des exercices calibrés, sont nécessaires pour la mise en fonctionnement de ces connaissances, en vue de leur appropriation progressive et de leur institutionnalisation. En SEGPA, plus encore que dans l'enseignement ordinaire, ce travail, qui contribue à la transformation des connaissances en savoirs, est essentiel mais la conception en est difficile, car il faut trouver un équilibre entre le sous et le sur-apprentissage.
Ces deux types de situations doivent être gérables à un coût pas trop élevé par les professeurs, sinon ils renoncent à les utiliser.

1.3 Quelles situations « à dimension adidactique »?

1.3.1 Les situations de « prévision »

Le problème posé concerne un milieu matériel effectif, sur lequel un « acteur » doit opérer. Il s'agit de prévoir le résultat de cette action, à partir d'un certain nombre d'informations données ou prises préalablement et non de lire le résultat, une fois l'action effectuée.
La vérification du résultat de la prévision est un moteur pour le retour sur la démarche qui a servi à la prévision.

Un exemple
Matériel : 2 bandes de longueur 7/10 u et 5/10 u ; une règle graduée en dixièmes.
Le professeur a préparé les 2 bandes qu'il montre rapidement, en indiquant leurs longueurs au tableau. Il rappelle ce que veut dire « mettre bout à bout », et le réalise derrière le tableau. Les élèves doivent prévoir la longueur totale [et découper une bande de cette longueur][5].Une fois les prévisions effectuées et, dans la mesure du possible, justifiées, la vérification effective donne l'occasion aux élèves, pour ceux qui ont réussi, d'augmenter leur confiance dans leurs raisonnements, pour ceux qui n'ont pas réussi, de revenir, avec l'aide de l'enseignant le plus souvent, sur le sens des écritures proposées et leurs transformations possibles, en l'occurrence pourquoi la longueur de la bande ne peut pas être 12/20 u (réponse fournie le plus fréquemment).

1.3.2 Les situations « retournées » (Bloch 2004)

Dans une situation d'apprentissage par adaptation, le milieu doit être facteur de déséquilibres donc d'adaptation pour l'élève. Ceci peut être mis en œuvre à travers des modifications des tâches usuelles qui correspondent à un *retournement de la situation.* La situation est organisée de façon à ce que l'élève se trouve forcé à questionner les liens existants entre un milieu matériel sur lequel réaliser une action, et un résultat à obtenir.

Un exemple[6]
Pour la première séance sur les fractions, nous avions prévu de reprendre la mesure de la longueur d'une bande par report de l'unité (tous les élèves se sont accordés sur 3u après une mise au point sur le soin à apporter au report), puis en utilisant une échelle graduée mais non numérotée. L'enseignante a ensuite demandé de numéroter les traits intermédiaires de l'échelle pour qu'on puisse mesurer très rapidement la bande : 11 élèves sur 14 ont commencé par 1 ! Quelle n'a pas été leur surprise de découvrir que la longueur de leur bande fournie par l'échelle était alors de 4 unités ! La discussion qui a suivi a permis d'expliquer le phénomène, de mettre en relation la solution avec l'attention à la position du zéro, pourtant rappelée constamment par l'enseignante dans les activités antérieures de mesurage. Il

[5] Le professeur peut ou non laisser le découpage sous la responsabilité des élèves.
[6] dont la simplicité montre l'étendue du travail à mener !

semble que ce mini-événement ait produit une espèce de choc puisque dans les exercices à faire à la maison, reprenant cet item, il y a eu très peu d'erreurs.
Si ce type de situation dite « retournée » n'est pas absent de l'enseignement destiné aux classes ordinaires, il est peu fréquent, alors que nous faisons l'hypothèse qu'il permet au professeur de diversifier les situations à proposer aux élèves pour les aider à se placer dans une position réflexive par rapport au savoir en jeu.

1.3.3 Remarques à propos de ces situations

De nombreuses questions se posent, qui n'ont pas été développées au cours de l'atelier, mais dont certaines sont abordées dans Salin (2006). Je n'explicite ici que celles liées à ce qui suit.
- Suffit-il de proposer une seule fois ces situations, en faisant le pari que la plupart des élèves auront saisi le lien entre le problème posé et la solution ébauchée par l'un d'entre eux ou proposée par l'enseignant ? La réponse est évidemment négative, il est donc nécessaire de confronter les élèves plusieurs fois au même problème, en modifiant certaines variables.
- Mais aussitôt, se pose la question : comment alléger le dispositif matériel pour rendre l'enseignement compatible avec les contraintes de ces classes ?

1.4 La construction de situations « intermédiaires »

Ces situations sont construites autour de séries d'exercices, de manière à fonctionner comme le font le plus souvent les enseignants de ces classes. Ces exercices sont cherchés individuellement, éventuellement avec l'aide du professeur, puis corrigés ensuite au tableau, suivant un mode assez strict. C'est à cette occasion que le professeur aide à repérer les erreurs, insiste sur ce qui est important, etc.
La validation effective est réalisée au tableau tant qu'elle s'avère nécessaire. Une difficulté importante est de déterminer à quel moment les élèves n'ont plus besoin de vérification effective parce qu'ils disposent de critères de validité (Margolinas 1993) efficaces et donc combien de fois le même type de situation doit leur être proposé, et avec quelles variations sur les valeurs des variables. Dans les faits, il est nécessaire d'accepter une assez grande hétérogénéité des résultats des élèves et donc d'avancer dans le travail même si certains n'ont pas encore bien réussi.

C'est la « qualité » de ces exercices qui rend ce travail plus ou moins fructueux. Encore faut-il pouvoir définir des critères pour la qualifier. Les travaux de F. Genestoux (2000) qui, dans le cadre de la théorie des situations, a consacré une partie de sa thèse à l'étude de l'enseignement des savoirs destinés à être sus par cœur, comme la table de multiplication, paraissent susceptibles d'être étendus à l'étude d'apprentissages longs, se développant par étapes.

1.4.1 Assortiment didactique

La notion d'« assortiment didactique », qui modélise les séries d'exercices, en permet l'étude a priori. Un assortiment didactique est « une suite ordonnée de questions réunies autour d'une même intention didactique et réalisable dans une unité de temps didactique » dont on peut étudier les variables didactiques.
F. Genestoux distingue différents types d'assortiments suivant leurs finalités : pour apprendre du nouveau, pour l'entraînement du « déjà appris », pour l'évaluation. Ces trois types d'assortiments sont nécessaires pour les élèves de SEGPA, mais le travail en cours présenté ici ne porte que sur les assortiments « pour apprendre du nouveau ».

1.4.2 Caractères des assortiments pour apprendre du nouveau : (Genestoux APM)…)

- Forte redondance ;
- Pas trop de nouveauté à la fois ;

- Pas de standardisation précoce d'écriture ou de présentation. C'est la vigilance cognitive de l'élève qui doit être sollicitée ;
- Un plongement du nouveau dans du déjà connu (non problématique).

« En effet, si l'élève rencontre les nouvelles connaissances trop rarement par rapport à celles qu'il connaît déjà, il n'apprend pas. S'il les rencontre trop fréquemment (et donc si les occasions de les rattacher à ce qu'il connaît déjà se raréfient), il apprend mais ne saura pas réorganiser ses anciennes connaissances. Les apprentissages seront morcelés, indépendants et difficilement réinvestis. D'autre part, pour construire du nouveau, il faut le faire fonctionner sur du déjà familier ».

1.5 Quelques remarques en guise de conclusion

1.5.1 Concernant les élèves

Mes observations hebdomadaires m'incitent à penser que la voie que nous explorons peut permettre des avancées pour les élèves, concernant leurs connaissances et leurs rapports aux mathématiques.
- Chaque nouvelle situation leur demande un temps d'adaptation important, mais nous n'observons pas les phénomènes de découragement et de rejet, fréquents dans ces classes.
- Les « situations intermédiaires » sont particulièrement nécessaires pour que les élèves s'engagent dans l'élaboration de critères de validité pertinents.

1.5.2 Concernant les demandes du professeur

Avec le temps, la demande de l'enseignant porte de manière pressante sur la programmation en 6ème et 5ème concernant l'organisation des thèmes et leur répartition au long des deux années de 6ème et 5ème. Et je ne suis pas assurée de mes réponses. Tous les thèmes à travailler ont déjà été rencontrés par les élèves mais la plupart des connaissances ne sont pas maîtrisées. Aussi, il n'est pas concevable de vouloir toutes les retravailler de manière systématique, d'autant plus qu'il y a un effet de ras-le-bol des élèves. Le choix et l'organisation des thèmes sont plus liés aux intérêts des élèves qu'à un programme ou même qu'à la détermination de leurs besoins puisque ceux-ci sont énormes. Ainsi, en première année de SEGPA, le travail sur la durée et la lecture de l'heure, celui sur les mesures de longueur (sans les décimaux mais avec retour sur les unités, les ordres de grandeur) puis sur les mesures de poids (avec des balances Roberval) sont l'occasion de revenir aussi sur la numération décimale et d'introduire des contextes matériels, qui pourront peut-être permettre aux élèves de mieux entrer dans les contextes évoqués dans les problèmes. Ces derniers, dont les élèves ont une vision très négative, sont peu travaillés en 6ème. Les fractions ne sont abordées qu'en 5ème, un minimum de maîtrise de la numération de position et de la droite numérique étant nécessaire. Toutes ces décisions auraient besoin de s'appuyer sur des travaux précis portant sur les dépendances entre connaissances, travaux initiés depuis très longtemps par Guy Brousseau mais trop ponctuels.
Une seconde demande de l'enseignant porte sur de l'aide pour élaborer des projets. Nous avons passé beaucoup de temps l'année dernière à réfléchir au type de travail à mettre en œuvre pour la réalisation collective par la classe (en vue d'une exposition de fin d'année), d'une maquette du bâtiment principal du collège.

1.5.3 Concernant les limites de ce travail

Elles sont la conséquence d'une situation de bricolage méthodologique : je n'ai pas les moyens (ni la motivation) de recueillir les données nécessaires à un minimum de validation de la démarche présentée. Je ne peux que me fier aux observations que je réalise chaque semaine.

2 DEUXIEME PARTIE

Etant donné le peu de temps disponible, le thème travaillé a porté sur les fractions, thème abordé dans l'exposé. Il s'agit de redonner du sens et d'aider à la structuration de connaissances déjà rencontrées par certains élèves mais dont ils maîtrisent très peu l'utilisation dans des situations autres que purement formelles.
Pour les participants à l'atelier, l'objectif était de s'interroger sur les « situations intermédiaires » favorables à la mise en fonctionnement des connaissances rencontrées une première fois dans une situation « à dimension adidactique ».Après une présentation rapide des deux premières séances du thème « fractions », plusieurs groupes ont été constitués avec comme consigne : « Comment retravailler les connaissances rencontrées dans cette leçon, sous la forme d'une suite d'exercices, sans introduire de franchement nouveau, mais sans que ce soit répétitif ? ».

Une mise en commun rapide a permis de pointer les difficultés de ce travail, en particulier celle relative à la difficulté de différencier le « nouveau » du « pas nouveau ».

Ce compte-rendu comprend la fiche didactique de la deuxième séquence sur les fractions, la liste des propositions des collègues, des commentaires et quelques exercices proposés effectivement aux élèves.

3 RÉFÉRENCES CITÉES

BLOCH, I. (2005). Dimension adidactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' d'une situation. In Salin M.H., Clanché P. & Sarrazy B. (Eds) *Sur la théorie des situations didactiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage Editions

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage
BROUSSEAU, G. & BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire,* Talence : IREM de Bordeaux.
GENESTOUX, F. (2002) Les assortiments didactiques In Dorier J. L. (Ed). *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématique.* (CD-rom Thème2-TD2) Grenoble : La Pensée Sauvage.Editions
MERCIER A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. In Margolinas (ed), *Les débats de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions
SALIN Marie-Hélène (2007) Situations et assortiments d'exercices pour l'enseignement des mathématiques destiné aux élèves de collège en grande difficulté scolaire in Bednarz, N., Mary, C. (dir.) (2007) "*L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*". Actes du colloque EMF 2006 (cédérom). Sherbrooke: Éditions du CRP

4 ANNEXES

Annexe 1

Fiches de préparation des deux premières séances sur les fractions

SEGPA 5ème Fractions Extrait de la séance 1
Objectifs de la séance :

- revenir rapidement sur le mesurage des longueurs, et le vocabulaire associé : unité, report
- coder par des entiers une échelle fournie aux élèves, l'utiliser pour mesurer des longueurs de bandes et des segments
- poser le problème de la mesure d'un segment dont la longueur n'est pas égale à un nombre entier d'unités (la question est posée à la fin de la phase 3. Il s'agit seulement de conclure sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un nombre entier).

Phase 3

Vous allez maintenant utiliser votre instrument pour mesurer des segments, tracés sur cette feuille et en tracer vous-même deux de la longueur indiquée

Correction rapide : pour les longueurs à mesurer, par mise en commun ; pour les segments à tracer à l'aide d'un calque sur lequel sont tracés les segments, réalisée par le professeur.

Pas d'erreurs notoires, la correction se fait rapidement

Que se passe-t-il pour les 2 derniers, KL et MN ? Examen des réponses proposées par les élèves.

J'ai noté à la volée : 5 et demi, ou 5, 2 ou 5,5

Conclusion : *la prochaine fois, c'est sur cette question-là que l'on va travailler : comment indiquer des longueurs plus petites que l'unité ?*

SEGPA 5ème Fractions Séance 2

Communiquer une longueur avec pliage de l'unité[7]

Objectifs :

- reposer le problème de la désignation d'une longueur qui n'est pas égale à un nombre entier d'unités (ou le poser s'il n'a pas été abordé à la séance 1)
- introduire les fractions d'unités : ½ u, ¼ u et ¾ u et l'écriture 2 u+ ½ u, etc…
- relations entre ¼ u + ¼ u, ½ u et 2/4 u

Matériel :

- des bandes de carton ayant comme longueur 2 v + ¼ v, 3 v + ½ v et v + ¾ v
- des unités papier (facilement pliables), (longueur v : 6 cm)
- « l'instrument » pour unité de 6 cm, sur transparent
- une fiche d'exercices

Déroulement

Phase 1 : Essai de formulation par quelques élèves de ce qui a été fait à la séance précédente et correction des exercices. […]

Phase 2 : Examen des réponses pour KL et MN, longueurs des segments de la séance 1. Formuler le problème, relever les réponses, montrer que tout le monde n'est pas d'accord, et introduire la suite en disant : « je ne vais pas vous dire qui a tort, qui a raison, mais nous allons faire la chose suivante : je vais vous donner par groupes de 2 une bande et vous allez m'indiquer sa longueur sur ce papier, comme si vous étiez mes clients et moi, le marchand de bandes (évoquer peut-être les magasins de bricolage). Ensuite, devant vous, je prendrai vos indications et j'essaierai de découper une bande de la même longueur que la vôtre. Pour cela, je vous donne la nouvelle unité, une bande graduée avec cette nouvelle unité, et la bande dont vous devez me donner la longueur. L'unité que je vous donne est en papier, vous pouvez la plier mais pas la découper. Nous verrons quelles sont les indications qui permettent de découper ma bande pour qu'elle soit de la même longueur que la votre. »

Phase 3 : Le professeur distribue le matériel à chaque groupe de deux.

Temps de recherche (5 min) puis temps collectif

Le professeur définit les règles du jeu : le groupe dont on examine les indications au début ne dit rien. Il regarde ce que fait et dit le professeur au tableau. Le groupe s'explique ensuite, s'il le demande.

Propositions possibles et arguments :

- 2v et cette longueur (représentée sur le papier, par exemple un petit segment) : renvoyer à l'usage social des mesures et au fait qu'il faut trouver un moyen utilisant des nombres.
- 2v et demi ou 2 et la moitié : Le professeur plie suivant les indications, cela ne va pas.
- 2v et un petit bout : Le professeur prend un petit bout différent du ¼
- 2,2v ou même 2,5v : comment est-ce que je fais pour mesurer ? avec cette unité, je n'ai pas de règle.
- 2v et quelque chose qui exprime qu'on plie en 2 et encore en 2, ou un quart, si cela apparaît : réalisation de la bande et réussite. Si aucun groupe ne l'a proposé, c'est le professeur qui le propose comme une solution au problème posé.

Moment d'introduction de l'écriture ¼ v, mise en relation avec d'autres rencontres avec ¼ si déjà faites.

La longueur de la bande est 2v + ¼ v . Commentaire sur l'écriture : pourquoi utilise-t-on le signe + ?

Phase 4 : Retour aux segments KL et MN : quelle est leur longueur (avec l'unité u) ?

On peut penser que certains vont hésiter pour 1/2. Les trois écritures peuvent être proposées pour KL : 4u + ¼ u + ¼ u ou 4 u + ½ u ou 4u + 2/4 u.

Faire écrire l'égalité : ¼ u + ¼ u = ½ u = 2/4 u

[7] Les résultats de cette séance sont évoqués dans la partie I

Annexe 2

Propositions des collègues pour une suite à cette séance (en supposant que la séance se soit relativement bien déroulée, c'est-à-dire que le professeur ait pu aller jusqu'aux conclusions énoncées) :

Groupe 1 : Créer une banque d'exercices systématiques jouant seulement sur la relation « segment, écritures de la mesure de ce segment », et ce, dans les deux sens en donnant tantôt l'un tantôt l'autre et en demandant la production du deuxième terme. Le groupe a élaboré un « outil », sous forme d'un tableau articulant différentes possibilités :

Ce qui est donné	*Ce qui est à produire*
bande	Ecriture de la longueur (langage naturel ou symbolique)
Ecriture de la longueur	Bande
Une bande et plusieurs écritures	Retrouver la ou les bonnes écritures
Une écriture	Une autre écriture de la même longueur
….	

Pour les deux derniers exemples, la mise à disposition ou non d'une échelle constitue une variable didactique.

Groupe 2 : Ensemble de propositions plus proches du travail de la séance 2 :
- reprendre le problème de la séance 2 avec une bande plus petite que l'unité, une autre plus grande ;
- faire des pièges : arriver à 16/4 u et 16 + ¼ ;
- Mettre en place un répertoire aidant les élèves à structurer leurs connaissances : répertoire d'écritures différentes possibles, nécessaire pour arriver ensuite aux équivalences ;
- Introduction de 1/8 u ;
- Construction d'instruments gradués.

Groupe 3 : Travail sur la mesure d'une bande plus petite que la bande unité, pour arriver à la notion de 1/10 u
D'abord avec une bande moitié de la bande unité, (évaluation par pliage), puis d'une bande quart de la bande unité (deuxième pliage). Usage des égalités : ½ u + ½ u = u
Puis introduction du 1/10 et de l'égalité : 1/10 u + … + 1/10 u = u
Enfin, mesurage d'une bande très longue comme 2u + 7/10 u. Ecritures différentes avec les bandes sous-unités précédentes.
Remarques sur ces propositions :
Dans un exercice artificiel comme celui proposé aux collègues, il est difficile de se limiter à des propositions pour une seule séance. Même si celles ci-dessus vont un peu au delà de ce qu'il est possible de faire dans une séance intermédiaire, les groupes ont suggéré des activités donnant l'occasion aux élèves de faire fonctionner sous leur propre responsabilité les connaissances rencontrées dans la séance, sans que le milieu soit modifié, ce qui n'avait pas été le cas l'année précédente où j'avais proposé le même travail.

Annexe 3

L'annexe 3 donne une idée des exercices proposés effectivement dans la séance suivante, chaque exercice est un prototype d'une série dont le titre indique la caractéristique.

Série 1 : refaire plusieurs fois l'activité, objet de la séance 2, comme par exemple :

1) Indique à ton voisin la longueur du segment MN avec l'unité u.

M N

2) Trace sur (D) un segment PQ de la longueur indiquée par ton voisin.
(D)

Comparez vos segments en vous aidant de la bande beige *(une bande sur laquelle les élèves peuvent repérer la longueur des segments)*

Série 2 : introduire un petit peu de nouveau

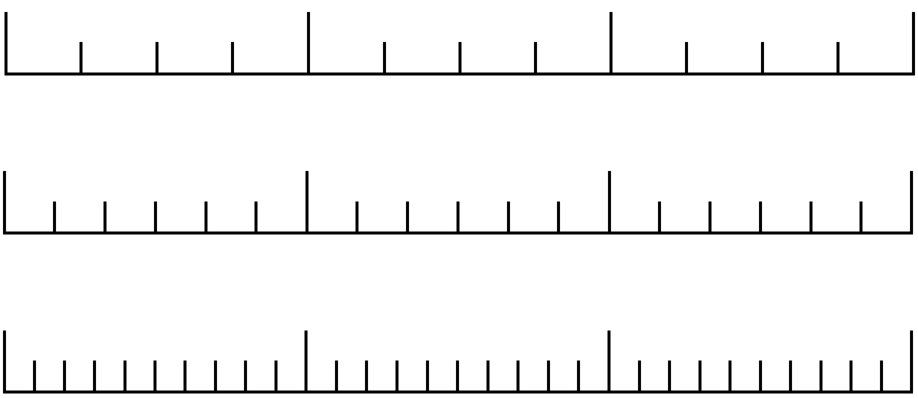
3) Plie ton unité en 2 puis encore en 2 et encore une fois en 2. Quelle est la longueur de la petite bande que tu obtiens ?

4) Comment construire un segment qui mesure 3/8 u ? Traces-en un.

Série 3 : il faut décider ![8]

Matériel :
Un matériel nouveau est proposé : des règles graduées avec des fractions de l'unité, pour pouvoir mesurer les longueurs de segments de manière rapide.

3 règles de découpages différents dont une règle décimale



Exercices :

[8] Les longueurs des segments sont exactes pour au moins une des règles, ce qui bien sûr, est artificiel !

Choisis la bonne règle pour mesurer la longueur de ces trois segments

A B

AB =

C D

CD =

E F

EF =

Atelier B3

L'ANALYSE A PRIORI : UN OUTIL POUR LA FORMATION D'ENSEIGNANTS (EXEMPLE D'UN JEU ISSU DES MANUELS SUISSES ROMANDS DE PREMIERE ANNEE PRIMAIRE).

Jean-Luc DORIER
Faculté de Psychologie et de Sciences de l'Education
Université de Genève
Equipe DiMaGe
Jean-Luc.Dorier@unige.ch

Résumé
Le but de cet atelier est de montrer comment l'outil de l'analyse a priori tel qu'il a été développé par G. Brousseau (1998) dans la Théorie des Situations peut être utilisé en formation d'enseignants.
Après avoir rapidement présenté l'analyse a priori, l'auteur en développe l'intérêt en tant qu'aide à une prise de recul pour aborder des situations de classe. Ses propos sont ensuite illustrés par l'analyse d'une activité, le « dé basculé » proposée aux enfants de la Suisse Romande en première année primaire. Six variables didactiques sont dégagées et interrogées en regard des procédures et stratégies possibles, qui conduisent à identifier des conditions favorables de mise œuvre. La mise à jour de ces variables permet également à l'auteur de situer l'activité dans un ensemble plus large d'activités possibles.

1 INTRODUCTION

Le but que je poursuis dans cet atelier est de montrer comment l'outil de l'analyse a priori tel qu'il a été développé par G. BROUSSEAU (1998) dans la Théorie des Situations peut être utilisé en formation d'enseignants afin de permettre un travail de préparation d'activités existantes de façon distanciée.
Dans cet atelier, j'ai tout d'abord présenté aux participants quelques éléments de rappel sur ce qu'est l'analyse a priori en soulignant ce qui me semblait le plus important pour la formation. Je reprends ces éléments, dans la section 2 de cet article, en les enrichissant et les recentrant sur les questions débattues par les participants de l'atelier.
Dans un deuxième temps, j'ai présenté une activité sur l'addition issue des moyens d'enseignement suisses romands[1] pour la première année primaire sous la forme d'un jeu de dé. J'ai présenté cette activité ainsi que le contexte de la Suisse Romande et quelques considérations sur les jeux, que je ne reprendrai pas ici[2].
J'ai ensuite proposé aux participants de faire une analyse a priori d'une situation plus générale (décrite par moi) en montrant comment cette activité en était un cas particulier (comme la course à 20) pour un certain choix de valeurs des variables didactiques dégagées. Les participants devaient également dégager les objectifs d'apprentissage atteignables et les comparer à ceux affichés dans les moyens suisses romands d'où cette activité a été tirée.
Après avoir échangé sur les productions des participants et sur mes propres analyses, nous avons visionné quelques extraits d'une expérimentation menée à Genève avec une classe ordinaire de première année primaire sur l'activité du « dé basculé » afin de voir l'intérêt d'une telle analyse.
Nous avons conclu par un rapide débat sur les apports possibles en formation.

[1] En Suisse romande, les enseignants de mathématiques disposent d'un ensemble de sources officielles que l'on désigne sous le terme de « moyens », voir explications plus bas.
[2] Voir DORIER J.-L., MARECHAL C. (2008) Analyse didactique d'une activité sous forme de jeu en lien avec l'addition, Grand N, 82, 69-89.

2 QUELQUES RÉFLEXIONS SUR L'ANALYSE A PRIORI

Je ne reprendrai pas ici de façon systématique ce qu'est une analyse a priori renvoyant aux travaux de BROUSSEAU (1998), synthétisés dans une approche « abordable » dans BESSOT (2003). Je voudrais plutôt rappeler quelques points qui me semblent essentiels pour un usage en formation, visant à outiller des enseignants pour qu'ils abordent des activités de classe avec le recul suffisant pour une gestion la plus optimale possible. J'essaierai aussi de mettre à jour certains quiproquos assez répandus sur ce qu'est une analyse a priori (sans accent sur le « a » latin !).

2.1 Quelques précisions

Tout d'abord, il faut ici repréciser que « a priori » ne signifie pas « avant dans le temps », en tout cas par rapport à une réalisation en classe de l'activité. S'il y a bien une idée d'antériorité, elle se situe dans le processus dialectique de l'analyse.

Il s'agit en fait de définir un cadre (a priori) qui permet de penser l'activité dans sa généralité et d'offrir une sorte de grille d'analyse, permettant de mieux comprendre le travail des élèves (voire de l'enseignant). L'analyse a priori vise à donner des explications rationnelles aux comportements des élèves en termes de choix et de stratégies. Dans ce sens, tout ne peut pas toujours être anticipé, c'est pourquoi une première réalisation avec de « vrais » élèves amène souvent à rectifier certains points (parfois fondamentaux).

L'essentiel est qu'à partir de l'analyse a priori (en partie construite après une ou plusieurs pré-expérimentations), tout ce qui sera observé prenne sens en termes de comportement cognitif des élèves. L'analyse a posteriori est alors une lecture des observables à la lumière de la grille fournie par l'analyse a priori.

Il ne faut donc pas voir l'analyse a priori comme un produit fini qu'un bon chercheur se devrait de fournir après de longues heures de réflexion dans son bureau, mais comme un élément d'un processus d'élaboration d'une compréhension des enjeux d'apprentissage d'une situation.

Il existe donc un processus dialectique entre analyse a priori et observations, qui est au cœur de la spécificité du rôle de l'expérimentation dans la théorie des situations. C'est une des originalités de la Théorie des Situations par rapport à la plupart des approches théoriques sur l'enseignement des mathématiques[3]. Dans ce sens, la démarche de l'analyse a priori, surtout si on la pense comme un outil pour l'enseignant, correspond à une posture nécessitant de faire un pas de côté, de prendre un peu de distance par rapport à la réalité de la classe, mais aussi et surtout par rapport au savoir mathématique en jeu.

2.2 Analyse a priori et procédures d'élèves

On limite souvent l'analyse a priori à sa fonction de prédiction des procédures des élèves, mais en fait, la question qui est au cœur de l'analyse a priori est : « *avec tout ce que mes élèves savent et ce qu'ils ont à disposition* – le milieu – *comment la question que je leur pose ou le problème que je leur soumets peut-il prendre sens* – problème de dévolution – *et que doivent-ils apprendre de nouveau pour arriver à le résoudre ?* ». La question du sens est donc centrale ! Il ne s'agit pas seulement de trouver une activité qui permette aux élèves de faire des choses seuls, mais encore faut-il que ce qu'ils fassent leur apprenne des mathématiques !

L'analyse a priori offre un modèle explicatif du comportement des élèves en termes d'apprentissage et pose la question du sens de leur actions par rapport à un savoir visé. Il est donc important de bien distinguer dans l'analyse a priori cette dimension théorique qui permet de distinguer le contingent du nécessaire.

---

[3] On pourra à ce sujet consulter le cours de A. BESSOT à la 15e école d'été de didactique des mathématiques qui s'est tenue à Clermont Ferrand du 16 au 23 août 2009 et dont les actes devraient paraître en octobre 2010 à la Pensée Sauvage Editions.

Par exemple, cette distinction joue sur la différence entre procédure et stratégie. Une procédure se situe au niveau des observables et comporte donc de la contingence, c'est ce que fait un « vrai élève » avec ses contradictions et ses hésitations (sa psychologie propre). Une stratégie se situe au niveau d'un élève théorique, générique et s'explique entièrement en termes de connaissance.
C'est pourquoi l'analyse a priori discute des stratégies qui seront le modèle explicatif des procédures observées lors de l'expérimentation. Tout le jeu de l'analyse a posteriori consiste alors à expliquer les procédures à la lumière des stratégies.

2.3 Analyse a priori et variables

Un point essentiel de l'analyse a priori consiste à faire apparaître les choix qui sont faits en creux quand on propose une activité à des élèves. En effet, toute activité de classe comporte une part importante de choix qui sont faits plus ou moins délibérément, voire consciemment, par l'enseignant (ou les manuels avant eux). Ces choix ne sont pas coupables, ils sont inévitables, mais ils sont faits contre d'autres (possibles mais non retenus). Le propre de l'analyse a priori est de mettre à jour certains (on ne peut jamais tout embrasser) de ces choix, les autres alternatives et leurs conséquences en termes d'objectifs de savoir et de possibilité d'acquisition de connaissances. C'est ce qui est au coeur de la détermination des variables didactiques.
Rappelons que l'explicitation de variables didactiques est un moyen de mettre à jour les choix qui peuvent être faits par l'enseignant (ou le manuel) dans la conception d'une activité de classe. Un enseignant ne peut par exemple pas changer l'âge de ses élèves, ce n'est donc pas une variable didactique, mais il peut choisir de les faire travailler individuellement ou en petits groupes, gérer les temps de mise en commun… ce sont des variables didactiques qui portent sur la gestion didactique. Il peut aussi choisir les valeurs numériques qui interviennent dans l'activité ou le nombre de données, etc.
A chaque variable didactique dégagée est associé un ensemble de valeurs. La pertinence de ces différentes valeurs s'évalue à l'aune de ce qu'elles modifient dans la hiérarchie des stratégies possibles pour résoudre la tâche. Cette hiérarchie porte sur l'accessibilité, le coût ou la validité des stratégies. C'est bien ce qui fait le caractère didactique d'une variable et de l'ensemble des valeurs qui lui est associé.
Ainsi, quand on réalise une analyse a priori, il existe une dialectique constante entre la mise en évidence des variables, les groupes de valeurs pertinentes et l'ensemble des stratégies possibles avec une discussion sur leur accessibilité, leur coût et leur validité par rapport à la tâche proposée. Cette dialectique qui se construit au fur et à mesure est souvent difficile (voire impossible) à rendre dans la rédaction finale d'une analyse a priori, qui en écrase nécessairement le côté dynamique. C'est pourquoi un atelier comme celui proposé ici est important, pour permettre de rendre compte du processus d'élaboration essentiel dans une démarche formative.
Dès qu'une variable est dégagée, l'activité analysée rentre dans un ensemble plus large d'activités dont elle est un cas particulier correspondant à un choix de valeur de chacune des variables dégagées.
C'est ainsi que l'on peut prendre de la distance par rapport à l'activité proposée en prenant conscience des choix opérés et de leurs implications tant sur la signification du savoir visé que sur les stratégies accessibles, leur coût et leur validité. Du point de vue théorique, on peut dire que l'activité est une instanciation d'une situation. Une situation est un objet du modèle, donc de la théorie.

2.4 La théorie des situations

La Théorie des Situations propose une modélisation de l'action de l'élève où celui-ci interagit avec un milieu a-didactique : l'enseignant propose une situation didactique qui permet de dévoluer aux élèves une situation a-didactique, lui permettant s'il résout la tâche d'accéder à une nouvelle connaissance, sans que sa réponse ne relève d'une injonction didactique. L'élève fait ce qu'il fait pour des raisons strictement de l'ordre du savoir mathématique, pas pour faire plaisir à son enseignant, ni pour lui obéir.
Je me contenterai ici de cette description sommaire du modèle théorique renvoyant aux publications citées plus haut pour plus de détails. Je voudrais cependant préciser un point qui me semble important et qui est souvent mal compris en formation. En effet, on dit que le milieu avec lequel l'élève interagit

doit être antagoniste pour assurer le caractère a-didactique. Ce terme d'antagoniste montre bien que ce n'est pas à l'enseignant de donner les moyens d'accéder à la bonne réponse (injonction didactique ou effet Topaze), mais que c'est un peu plus subtil. Le milieu lui-même doit résister, c'est-à-dire qu'il ne doit pas permettre à l'élève de trouver la bonne réponse en évitant d'apprendre ce qui est visé. Je prendrai un exemple pour mieux me faire comprendre.

2.5 L'exemple des « boîtes d'allumettes »

BRIAND et al. (1999-2000) ont mis au point une situation pour faire travailler l'énumération aux élèves de maternelle connue sous le nom des « boîtes d'allumettes ». Rapidement pour les lecteurs qui ne connaîtraient pas, l'énumération est tout ce qui ne relève pas du numérique en jeu dans une activité de dénombrement. C'est ce que qui est nécessaire pour organiser une collection dont on doit compter les éléments. La situation des boîtes d'allumettes permet de travailler l'énumération avec de jeunes enfants sans qu'il y ait à compter.

On donne aux élèves des boîtes d'allumettes vides percées sur les deux côtés et un récipient avec plusieurs allumettes. L'élève doit mettre dans chaque boîte, sans l'ouvrir, une allumette et une seule, quand il déclare avoir fini, la maîtresse ouvre les boîtes, s'il y a bien effectivement une et une seule allumette dans chacune, il a gagné, sinon il a perdu (validation par rétroaction du milieu).

Ce qui est visé ici c'est que l'élève apprenne à organiser la collection des boîtes de façon à savoir celles qui sont remplies et celles qui sont encore à remplir.

Bien entendu, on doit organiser un milieu de façon à ce que la mémorisation simple soit mise en défaut. Ceci conduit au niveau des choix de valeurs de certaines variables par exemple à mettre suffisamment de boîtes, à les prendre ou les rendre identiques (masquer les dessins éventuels), etc.

Mais il y a aussi une variable importante dont les différentes valeurs vont influer sur l'aspect antagoniste du milieu et qui vont rendre inaccessibles certaines stratégies (fortuites) que l'on veut éviter. Cette variable porte sur la *disposition* des boîtes sur la table où se réalise la tâche.

En effet, si les boîtes sont à l'autre bout de la table par rapport à l'enfant et qu'il peut les atteindre en étendant le bras, et que l'espace devant lui est libre (c'est une valeur de la variable « disposition des boîtes sur la table ») pour remplir les boîtes, il y a de fortes chances que l'élève étire le bras, prenne une boîte, mette une allumette dedans et ensuite repose la boîte devant lui (parce que c'est plus simple) et ainsi de suite. Ainsi l'élève va réussir, mais rien n'assure qu'il ait pris conscience de la nécessité d'organiser sa collection en deux tas (boîtes pleines, boîtes vides) ; il le fait « naturellement » parce que le milieu le suggère. On est ici typiquement dans un cas où un choix de valeur pour une variable didactique ne permet pas d'installer un milieu suffisamment antagoniste pour écarter une stratégie gagnante, mais non porteuse de la connaissance visée. Ce serait la même chose si on mettait les boîtes en tas les unes sur les autres.

Ici un choix adapté consiste à mettre les boîtes proches de l'élève réparties sans alignement et de façon à ne pas laisser d'espace vide où l'enfant pourrait poser les boîtes pleines sans que ce soit un choix délibéré. Ce n'est que par ce choix de valeur de la variable sur la disposition des boîtes que l'on s'assure d'un milieu suffisamment antagoniste pour que la stratégie gagnante soit à coup sûr porteuse de la connaissance visée, autrement dit nécessite que l'élève prenne conscience de la nécessité de mettre à part les boîtes déjà remplies.

Ces quelques rappels étant faits, je vais passer à l'analyse d'une activité issue des moyens d'enseignement de première année primaire de Suisse Romande, mais avant tout je présente dans la section suivante quelques particularités du contexte de la Suisse Romande.

3 PRÉSENTATION DU CONTEXTE DE LA SUISSE ROMANDE

En Suisse Romande, depuis la période des mathématiques modernes (1972), les enseignants du primaire disposent de « moyens d'enseignement » officiels et communs à tous les cantons francophones de Suisse[4]. Avec les plans d'études, ils déterminent la seule source officielle pour organiser l'enseignement des mathématiques. Ils peuvent être éventuellement complétés par quelques documents cantonaux issus de diverses instances officielles dépendant plus ou moins directement des *Départements de l'Instruction Publique*, qui peuvent apporter quelques éclairages complémentaires. La dernière édition de ces moyens COROME[5] a été publiée entre 1997 et 2002.

Pour les degrés 1P-4P (4 premières années de l'enseignement primaire, élèves de 6 à 10 ans), les moyens comprennent :

- un fichier, avec en plus en 3/4P un livre de l'élève par degré ;
- un fichier du maître par degré ;
- un classeur de commentaires didactiques (commun pour les 4 degrés).

Enfin, un fichier de formes prédécoupées (par élève), et divers matériels pédagogiques à disposition pour chaque classe viennent compléter le tout.

Ainsi ces « moyens d'enseignement » ne sauraient se réduire à un manuel au sens où on l'entend en France par exemple.

Sur la forme, les moyens COROME ont été conçus de sorte à ne pas enfermer les enseignants dans une progression déterminée ou des choix exclusifs sur l'organisation des apprentissages, comme le soulignent les auteurs dans l'introduction des commentaires didactiques :

Parmi les soutiens offerts au maître pour le seconder dans sa tâche, les moyens d'enseignement occupent une place importante. Ce ne sont néanmoins que des aides parmi d'autres, pour atteindre les objectifs déterminés par les programmes officiels. Ce serait accorder trop de poids au document écrit et sous-estimer la responsabilité et les compétences professionnelles du maître que de les confondre avec des directives légales, voire une doctrine imposée. On considère d'ailleurs ces moyens comme des « ouvrages ressources ». (GAGNEBIN et al. 1998, 10).

Les fichiers et livres de l'élève se présentent ainsi comme une succession d'activités réparties dans 6 à 8 modules correspondant au découpage du plan d'études. Le fichier du maître présente une introduction pour chaque module visant à en définir les objectifs et reprend chaque fiche et exercice des documents élèves avec quelques commentaires sur l'organisation, les objectifs, les stratégies possibles des élèves et des prolongements envisageables. Les activités à l'intérieur d'un même module ne sont pas hiérarchisées et c'est à l'enseignant d'organiser sa progression. Aucun élément de « cours » n'est donné. Il est donc clair qu'une part importante du travail de préparation est laissée entièrement à l'initiative et à la charge des enseignants[6].

Par ailleurs, les moyens mis en place à partir de 1998 s'inscrivent dans le paradigme de la résolution de problèmes[7], et surtout dans les petits degrés, une part importante des activités se présente sous la forme de jeux.

Dans son enquête sur le rapport des enseignants de Suisse romande aux innovations, TIECHE-CHRISTINAT (2001) relève que les jeux sont souvent retenus en fonction du plaisir (supposé) qu'ils provoquent en classe, mais que les contenus mathématiques qu'ils permettent d'aborder ne sont pas

[4] Ce qui ne veut pas dire nécessairement que l'enseignement des mathématiques est identique dans tous les cantons. L'enseignement restant entièrement une prérogative des gouvernements cantonaux, des distinctions plus ou moins fortes peuvent exister, sur les volumes horaires, les découpages en cycles, ou les choix de contenus, etc…

[5] COmmission ROmande – Moyens d'Enseignement et d'apprentissage, désignée par des instances officielles inter-cantonales.

[6] Plusieurs enquêtes et travaux de recherche ont analysé le rapport des enseignants primaires aux moyens et la façon dont ils se les approprient. Notre équipe DiMaGe est en train de travailler à un projet dans ce sens.

[7] Les travaux de l'équipe ERMEL ont été une source d'inspiration importante dans la rédaction de ces moyens.

centraux. On sait par ailleurs, que tous les enfants n'apprécient pas les jeux qu'on leur impose en classe de mathématiques et que leurs aspects ludiques sont diversement perçus. La situation est donc périlleuse et il n'est pas acquis qu'un jeu soit toujours le meilleur moyen d'arriver à faire apprendre dans une ambiance ludique.
Il n'est pas inutile de rappeler un des principes fondateurs de la théorie des situations :
On ne fait des mathématiques que lorsqu'on s'occupe de problèmes mais on oublie parfois que résoudre des problèmes n'est qu'une partie du travail ; trouver de bonnes questions est aussi important que leur trouver des solutions. Une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des théories, qu'il les échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc.
Pour rendre possible une telle activité, le professeur doit donc imaginer et proposer aux élèves des situations qu'ils puissent vivre et dans lesquelles les connaissances vont apparaître comme la solution optimale et découvrable aux problèmes posés. (BROUSSEAU 1986, 35) ou (BROUSSEAU 1998, 49).

Lors d'une journée d'étude[8], des acteurs du système éducatif suisse romand et des invités étrangers se sont intéressés à plusieurs activités présentes dans les moyens qui se présentent sous forme de jeu.
Dans leur conclusion, les auteurs soulignent que les études dans ce sens sont à poursuivre. Dans un article publié dans Grand N[9], nous avons tenté de répondre modestement à cette invite, en présentant une réflexion sur une activité de première année primaire, le « Dé basculé », qui se présente sous la forme d'un jeu de dé à deux joueurs. Cette activité ne fait pas partie de celles qui ont été discutées dans le document précédent.
J'ai proposé aux participants de l'atelier de faire une analyse a priori de cette activité.

4 ANALYSE A PRIORI DU DÉ BASCULE

4.1 Présentation

Cette activité est proposée en première année primaire dans le module 3 « *Des problèmes pour connaître l'addition* », dans l'introduction duquel elle est présentée comme se rapportant à la rubrique « *Additionner et soustraire en situation* » et plus précisément à l'objectif « *Obtenir 20 en additionnant plusieurs nombres* ». C'est d'ailleurs la seule activité qui corresponde à cet objectif précis alors qu'il n'est jamais fait état d'additions dépassant 20 dans toute la rubrique.
Voici la fiche du maître (celle de l'élève ne contient sur une feuille A4 que le texte de la consigne en plus gros caractères et un dessin de dés, laissant ainsi la place éventuellement pour écrire sans que ce soit explicitement demandé) :

[8] À l'initiative de l'Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique (IRDP), cette journée s'est tenue à Neuchâtel le 30 novembre 2001. Les actes de cette journée (JAQUET & TIECHE-CHRISTINAT, 2002) rendent comptent de l'ensemble de ces travaux.
[9] Voir DORIER J.-L., MARECHAL C. (2008)

Le dé basculé

Description

Nombre d'élèves : 2

Matériel

- fichier de l'élève p. 53
- un dé

Règles

Un élève lance le dé et annonce le nombre de points obtenus.

L'autre bascule le dé sur l'une des quatre faces latérales et additionne les points de la face du dessus au premier nombre annoncé. Le jeu continue ainsi, chacun, à tour de rôle, basculant le dé et additionnant les points de la face supérieure.

Le premier qui atteint 20 gagne la partie.

Gestion

Prolongements

- Partir du nombre 20 pour atteindre 0.
- Celui qui dépasse 20 gagne la partie.
- ...

4.2 Analyse a priori

Une analyse a priori consiste à faire entrer une activité dans une ensemble plus vaste de situations, dont elle est un cas particulier pour un certain choix de valeurs des variables didactiques. Dans ce sens, j'ai proposé aux participants de l'atelier de faire une analyse de la situation plus générale que l'on peut présenter sous la forme d'un jeu à deux joueurs :

À tour de rôle, chaque joueur choisit ou tire au hasard (ça peut dépendre des coups) un nombre parmi un certain ensemble E_i (i étant le numéro du coup qui est joué) que l'on additionne au total du coup précédent. Le joueur qui atteint ou dépasse une valeur N fixée au départ a gagné.

Comme l'activité du dé basculé, une course à N est un cas particulier de cette situation pour un certain choix de valeurs des variables didactiques de cette situation.
La tâche proposée aux participants était la suivante :

Dégager les variables didactiques de cette situation en discutant des valeurs possibles de ces variables et de leur influence sur la hiérarchie des stratégies et du savoir visé.
On examinera à la lumière de cette analyse les enjeux possibles en termes d'acquisition de connaissances de l'activité du dé basculé.

Je ne peux rendre compte ici du détail des débats, je me contenterai donc de donner les principaux résultats[10].

4.2.1 Variables didactiques

On peut dégager six variables didactiques.
- Tout d'abord deux variables générales sur les règles du jeu :
Vdép : elle prend deux valeurs « oui » ou « non », selon que l'on accepte ou non de dépasser la valeur

[10] Voir DORIER J.-L., MARECHAL C. (2008) pour plus de détails.

cible. Dans le premier cas, le gagnant est le premier joueur qui a réussi à atteindre ou dépasser N. Sinon, on considère que l'on ne peut jamais dépasser N, et que le gagnant est celui qui atteint exactement N. Dans ce dernier cas, certaines parties peuvent éventuellement ne pas permettre de déterminer de gagnant (je reviendrai sur ce point).
VN : c'est la valeur que l'on donne à N, le nombre à atteindre.
- Puis deux variables qui peuvent changer de valeur à chaque coup :
VHasard : elle prend deux valeurs « oui » ou « non », selon que le nombre qu'on ajoute est tiré au hasard ou choisi par le joueur.
VE$_i$: c'est l'ensemble des nombres où l'on tire au hasard ou choisit au coup i. Notons que cet ensemble peut dépendre éventuellement de l'issue du coup (i-1), comme cela est proposé dans l'activité du « Dé basculé », puisque si un joueur vient de choisir (ou tirer au hasard) le 3 par exemple, ni le 3, ni le 4 sont possibles au coup suivant (puisque la somme des points sur deux faces opposées d'un dé fait toujours 7).
Ces quatre variables ainsi que la règle qui détermine comment on décide des valeurs des deux dernières à chaque coup constituent les règles du jeu.
- Il reste encore deux variables plus circonstancielles :
La première, **VMat**, porte plus sur les aspects matériels du jeu, selon que les nombres sont figurés sur des cartes, sur des dés, par des jetons, etc… ou encore seulement écrits en chiffres ou énoncés à l'oral.
Et enfin, la variable **VEcrit** selon que les joueurs ont la possibilité de noter les sommes obtenues et de faire les calculs par écrit, ou qu'au contraire, ils doivent mémoriser la somme et faire tous les calculs mentalement. On a vu que la valeur de cette variable n'était pas fixée dans l'activité du « Dé basculé », elle est laissée au libre-arbitre de l'enseignant.
Cette liste de variables n'est sûrement pas exhaustive et comprend une part d'arbitraire, de même que mon choix d'énoncé d'une situation générale a déjà bloqué certains choix possibles, comme le nombre de joueurs par exemple. L'important est ici de faire apparaître cette activité comme un cas particulier d'un ensemble de situations plus générales, il pourrait y avoir plusieurs pistes. Celle que je propose s'appuie sur une analyse du contexte scolaire auquel on s'intéresse et des observations. Je vais à présent justifier nos choix en montrant comment ils éclairent l'analyse de l'activité.

4.2.2 Connaissances en jeu, savoirs visés et stratégies

Je vais distinguer deux niveaux d'analyse. Le premier concerne les stratégies locales qui permettent aux joueurs de réaliser l'addition à chaque étape, alors que le deuxième concerne le niveau plus global du jeu, et donc les stratégies de choix du nombre à chaque étape.

4 Réaliser l'addition

La valeur de VN détermine le plus grand nombre accessible dans le champ des additions. Au niveau de la première année primaire, le choix de 20 semble raisonnable.
L'ensemble E_i, détermine les nombres à ajouter. En première année primaire, beaucoup d'élèves ont encore recours à un sur-comptage sur les doigts, le répertoire additif est en découverte et peu de sommes sont apprises par cœur. Il n'est donc guère possible de dépasser 5 ou 6.
La valeur de VEcrit est ici fondamentale, puisqu'elle détermine si les élèves vont ou non pouvoir s'appuyer sur l'écrit. Si on n'autorise pas l'écrit, les élèves vont devoir non seulement mémoriser la somme à chaque étape, mais aussi devoir faire appel à du calcul mental (réfléchi ou par cœur), en s'appuyant éventuellement sur une procédure de sur-comptage sur les doigts ou sur un appui du matériel (voir la valeur de VMat). Au contraire autoriser l'écrit peut alourdir le jeu et rendre l'activité plus scolaire.
La valeur de VMat a une assez grande importance quant aux stratégies pour réaliser les additions. Des dés[11], des cartes avec des constellations, des jetons, … vont favoriser des procédures de sur-comptage un à un. Au contraire, si le matériel à disposition ne donne qu'une représentation chiffrée ou orale du nombre, les procédures de mémorisation du répertoire additif ou de calcul réfléchi seront plus

[11] On n'envisagera ici que les dés « classiques » avec des points sur les faces, mais on pourrait utiliser des dés qui ont des écritures en chiffres.

favorisées. Dans tous les cas, cependant, les élèves pourront soit trouver le résultat immédiatement ou par une procédure de calcul réfléchi, soit utiliser le matériel à disposition ou à défaut leurs doigts pour sur-compter. En première année primaire, cette dernière stratégie est encore utilisée par beaucoup d'élèves surtout en début d'année, même si un des objectifs d'apprentissage à ce niveau est de progressivement la remplacer par la mémorisation du répertoire additif et la mise en place de procédures de calcul réfléchi. Le fait que les valeurs des E_i changent à chaque coup ne change rien sur les stratégies pour réaliser la somme ou sur la mémorisation de celle-ci.

Les valeurs des variables qui correspondent à l'activité du « Dé basculé » sont donc conformes à ce que l'on peut attendre et exiger d'un élève de 6 ans, au moins en fin d'année. Les connaissances en jeu sur les additions sont ici explicitement sollicitées comme un moyen pour que le jeu puisse avoir lieu. Il n'y a donc rien d'a-didactique sur l'addition, c'est bien une activité de réinvestissement.

Si un élève se trompe dans son addition, seul l'autre élève peut être amené à le corriger ou l'enseignant s'il suit la partie. Dans ce sens, la rétroaction du milieu est assez pauvre sur l'addition.

Deux élèves en désaccord sur le résultat de la somme peuvent s'appuyer sur le dé pour vérifier la somme par sur-comptage. Par contre deux élèves peuvent se mettre d'accord sur un résultat faux et, si l'enseignant n'est pas là pour vérifier, continuer la partie comme si de rien n'était.

Il paraît donc clair que cette activité ne peut se concevoir avec profit que dans le cas où les élèves maîtrisent suffisamment les additions de nombres inférieurs à 6, jusqu'à 20. Un des objectifs qu'elle peut alors remplir est d'entraîner les élèves à celles-ci en leur permettant de les vérifier, voire de les réaliser par sur-comptage sur les points des faces du dé. Dans ce sens, cette activité ne force en rien des procédures de calcul réfléchi ou d'appel au répertoire mémorisé. Par contre, elle permet éventuellement, par la répétition des parties, de familiariser les élèves avec des sommes, en vue de leur mémorisation.

Remarquons que d'autres jeux pourraient plus utilement entraîner les élèves à faire des additions. Par exemple, un jeu de cartes comportant sur une face une addition, dont l'élève doit annoncer le résultat. Il retourne la carte qui donne ce résultat et la garde s'il a trouvé le bon nombre. Le « Dé basculé » n'est pas une activité dont le but pourrait se réduire à entraîner les élèves aux additions. On verra que d'un point de vue plus global, il peut permettre de développer d'autres connaissances.

4 Stratégies de choix des nombres

Le deuxième niveau porte sur l'enjeu du jeu, qui consiste à atteindre 20 le premier (on n'envisagera pas d'autres valeurs cibles dans cet article). Les valeurs des variables VHasard, VE_i et Vdép sont ici déterminantes.

Si VHasard = « non », $VE_i = \{1,2\}$ et Vdép = « non », on retrouve la course à 20. Il existe dans ce cas une stratégie gagnante, dont la découverte peut être un enjeu d'apprentissage selon des conditions que je ne rappelle pas ici[12].

Si par contre VHasard = « oui » à tous les coups, on a affaire à un jeu de hasard pur, qui n'appelle aucune recherche de stratégie. Une telle activité n'aurait alors d'autre intérêt que de servir à entraîner les élèves à faire des additions, sans aucun enjeu stratégique, ni milieu approprié pour les rétroactions. Notons que même si VHasard ne vaut quasiment jamais « oui » (comme dans le cas du « Dé basculé »), il n'est pas certain que les élèves perçoivent tout de suite qu'ils peuvent jouer autrement qu'au hasard. De plus, l'usage d'un dé, souvent associé au hasard peut renforcer cette tendance. Il y a donc nécessité d'une dévolution[13] de la possibilité d'établir des stratégies pour gagner ou du moins augmenter ses chances de gagner.

Il est impossible ici d'examiner toutes les possibilités de choix de valeurs de la variable VE_i. Les deux exemples ci-dessus représentent en quelque sorte deux extrêmes entre lesquelles le choix des possibles est très large. Le « Dé basculé » est une de ces possibilités entre deux.

---

[12] Voir BROUSSEAU (1998, 25-44)

[13] La dévolution consiste, non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne, mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, (au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité), du résultat qu'il doit chercher.

On s'intéressera ici seulement au cas où Vdép = « non », l'autre cas (suggéré comme prolongement dans la fiche des moyens COROME), est en fait plus simple du point de vue stratégique.
Dans le cas du « Dé basculé », le jeu peut être complexe, d'autant que certaines parties peuvent se bloquer comme lorsqu'un élève atteint le 19 en ayant basculé un 1 ou 6 ! En se plaçant seulement dans la fin de la partie (somme supérieure ou égale à 14) on voit déjà qu'il n'est pas toujours simple d'adopter une stratégie gagnante, qu'il faut anticiper toutes les possibilités sur au moins les trois coups à venir pour les éviter ! Il est clair que c'est hors de portée d'un élève de 6 ans. Contrairement à un jeu comme la course à 20, le jeu du « Dé basculé » ne permet pas de dégager une stratégie gagnante à tous les coups. Un expert très entraîné pourrait au mieux retenir ou anticiper sur plusieurs coups et éviter quelques pièges ou tenter de se mettre sur une position gagnante à tous les coups vers la fin de la partie, mais il est impossible de s'assurer de la victoire dès le départ.
Examinons maintenant, ce qui reste à portée d'un élève de 6 ans.

4.3 Stratégies en première année primaire

Le hasard décide du premier coup. Même si c'est le 6 qui sort, on est encore loin de 20 et les issues semblent encore bien incertaines. Une première stratégie « prudente » peut consister à retarder au plus l'approche du 20 et donc à jouer systématiquement le plus petit nombre (1, ou 2, si le 1 n'est pas accessible). Au contraire le goût du risque ou l'envie de gagner peut conduire à s'approcher le plus vite possible de 20 et jouer donc systématiquement 6 ou 5. Enfin, l'éloignement du but peut conduire à jouer au hasard.
Dans les premiers coups, l'anticipation a peu de chance d'apparaître. C'est quand on approche de 20 que l'anticipation de la somme obtenue, voire du coup suivant peut apparaître. Néanmoins, cette anticipation risque de ne pas être le fait de la majorité des élèves en première année primaire.
Comme je l'ai dit plus haut, le fait de jouer avec un dé peut fortement induire l'idée de hasard pur. Dans ce cas, les parties risquent de défiler sans aucune anticipation.
La motivation à gagner devrait quand même conduire les élèves progressivement (si ce n'est dès les premières parties) à anticiper à l'approche de 20, les effets de leur choix au moins sur la somme obtenue et sur le coup suivant. Anticiper sur la somme consiste à faire une addition, c'est jouer avant de jouer… Les élèves peuvent donc sur-compter sur les faces latérales du dé en le tournant sur les quatre côtés, ou en se penchant sur la table. Il faut ensuite en tirer les conséquences. Si 20 est accessible, c'est tout à fait à la portée d'un élève de 6 ans, sinon, comme on l'a vu plus haut, ce peut être rapidement complexe.
Une condition indispensable à une anticipation efficace est de pouvoir savoir combien il reste pour atteindre 20, ce qui revient à effectuer une addition à trou. Dans ce cas, on peut dire que ce jeu est un moyen de pousser à faire une addition à trou pour trouver le complément à 20. Dans ce sens, le jeu peut permettre de bonnes conditions pour construire des connaissances locales, comme la liste des nombres qui permettent d'atteindre 20 en additionnant au plus 6 et tous les compléments qui vont avec.

4.4 Conclusions

Le « Dé basculé » permet aux élèves de s'entraîner à ajouter à des nombres inférieurs ou égaux à 20, des nombres inférieurs ou égaux à 6. Ces calculs se font mentalement (par mémorisation du répertoire ou calcul réfléchi) ou en sur-comptant sur les doigts ou sur les points représentés sur les faces du dé. Cette dernière technique est favorisée, on ne pousse donc pas les élèves à retenir des sommes par cœur, ou à utiliser du calcul réfléchi.
La seule rétroaction vient du contrôle de l'adversaire ou du maître s'il est là. En cas de conflit, la possibilité du sur-comptage à l'aide des points sur la face du dé peut être une aide. Cette activité ne peut donc se concevoir qu'avec des élèves ayant bien acquis la technique du sur-comptage pour ce type d'addition. Elle permet alors un entraînement et éventuellement une familiarisation avec des sommes à connaître par cœur, mais elle n'offre que peu de rétroaction et pousse à des stratégies que l'on vise plutôt à dépasser en fin de première année primaire.

Aucune stratégie gagnante dès le début du jeu n'est accessible. Les premiers choix ne peuvent être guidés que par des stratégies subjectives ou par le hasard. Ceci, renforcé par la présence d'un dé, peut conduire les élèves à ne pas chercher à construire de stratégie et à jouer au hasard. Des stratégies guidées par l'anticipation ne peuvent surgir que vers la fin de la partie. Elles peuvent permettre de pousser les élèves à construire des connaissances sur les compléments à 20 à partir de 14 et de façon plus générale à anticiper des sommes ou faire des additions à trou en favorisant les techniques de sur-comptage.
Si les élèves s'investissent dans le jeu et concentrent leurs efforts pour gagner, en anticipant leurs actions et le jeu de l'adversaire, ils risquent de buter sur la difficulté de la tâche et de se décourager. La conséquence peut alors être de ne s'en remettre qu'au hasard et d'accepter la fatalité du sort. Au niveau des apprentissages, il ne reste alors que la possibilité de s'entraîner à des additions en renforçant la technique de sur-comptage sur les faces du dé. En outre, le jeu sera dans ce cas peu motivant.
L'atelier s'est terminé en montrant quelques extraits d'une expérimentation de cette activité réalisée dans une classe de première année primaire dans le canton de Genève, sans intervenir auprès de l'enseignante, et de l'observation de deux binômes d'élèves de cette même classe quelques jours après la séance. L'analyse de cette vidéo où l'enseignante a une difficulté de gestion de sa classe montre qu'une analyse a priori préalable aurait peut-être pu éviter une part des problèmes qui se sont posés.
Enfin, nous avons échangé sur l'intérêt de l'analyse a priori en formation d'enseignant. L'exemple analysé montre bien qu'une telle approche est un moyen d'éviter les écueils de ce genre d'activité sous forme de jeu qui peut facilement se transformer en un jeu sans enjeu et sans apprentissage. La question reste d'ailleurs entière de savoir si cette activité peut permettre quelque apprentissage. Il faut en tout cas l'adapter, nous proposons quelques pistes dans ce sens à la fin de notre article de Grand N[14].
Tout ce qui a été dit et fait lors de l'atelier ne peut être retranscrit dans ce court compte-rendu . J'ai plutôt choisi ici de développer l'aspect analyse a priori en retranscrivant divers éléments qui ont été discutés lors de l'atelier avec les participants.

[14] Une bonne part est développée dans DORIER J.-L., MARECHAL C. (2008).

5 BIBLIOGRAPHIE

BESSOT A. (2003) Une introduction à la théorie des situations didactiques, *Cahier du Laboratoire Leibniz 91*, Grenoble : Laboratoire Leibniz.
http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/2003/Cahier91/ResumCahier91.html

BESSOT A. (à paraître) L'ingénierie didactique au coeur de la Théorie des Situations, *In C. Margolinas (Ed.) Actes de la 15e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BRIAND J., LACAVE-LUCIANI M.-J., HARVOUËT M., BEDERE D., GOUA DE BAIX V. (1999-2000). Enseigner l'énumération en moyenne section, *Grand N*, **66**, 7-22. Rééd. 1999-2000, Grand N Spécial Maternelle, Approche du Nombre T.1, 123-128.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **7(2)**, 33-115.

DORIER J.-L., MARECHAL C. (2008) Analyse didactique d'une activité sous forme de jeu en lien avec l'addition, *Grand N,* **82**, 69-89.

GAGNEBAIN A., GUIGNARD N., JAQUET F. (1998) *Apprentissage et enseignement des mathématiques. Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*. Neuchâtel : COROME.

JAQUET F., TIECHE CHRISTINAT C. (eds) (2002) L'apport des jeux à la construction des connaissances mathématiques, *Actes de la journée d'étude du 30 novembre 2001*, Neuchâtel : IRDP.

TIECHE-CHRISTINAT C. (2001) L'innovation en mathématiques et ses priorités : le regard des enseignants de Suisse Romande, *Math-Ecole,* **196**, 13-16.

Atelier B4

ENSEIGNER LE ZÉRO. OÙ EST LE PROBLÈME ?

Serge PETIT
Formateur en mathématiques
Université de Strasbourg, IUFM d'Alsace, EA 1339
serge.petit@unistra.fr

Annie CAMENISCH
Maitre de Conférences en Sciences du langage
Université de Strasbourg, IUFM d'Alsace, EA 1339
annie.camenisch@unistra.fr

Résumé
Cet atelier porte sur l'enseignement du nombre *zéro* à l'école primaire. Il interroge sur les liens éventuellement établis entre des usages courants du *zéro* dans la langue et l'enseignement explicite du *zéro* en mathématiques en cours préparatoire. Il s'appuie pour cela notamment sur des manuels de cours préparatoire et des albums à compter.
Le contenu de ce compte-rendu est celui d'un atelier interactif. Il retrace le travail effectué par les stagiaires et pointe certaines interrogations qui ont été soulevées lors de l'atelier.

L'atelier s'est déroulé en quatre temps ainsi marqués :

1) expressions premières des représentations des stagiaires à propos du *zéro*,
2) échanges portant sur les expressions du *zéro* dans la langue, le *zéro* sous des aspects linguistiques,
3) échanges portant sur la place du *zéro* dans l'enseignement des mathématiques au début des apprentissages,
4) échanges portant sur la place du *zéro* dans la littérature.

Il s'est terminé par quelques questions que peut poser l'apprentissage du *zéro*.

1 ZÉRO, UN SÉMANTISME TRÈS VARIÉ

1.1 Le zéro pour les participants

Chaque participant a été invité à compléter sur un transparent la phrase :
« Pour moi, zéro c'est : _____ » [voir en encadré les réponses des participants].
Puis, collectivement, les participants ont formulé des hypothèses sur la nature des représentations du zéro sous-jacentes afin de classer les différentes réponses. On a pu ainsi observer les classes suivantes où les représentations sous-jacentes du zéro ont été repérées :

- Zéro comme cardinal de l'ensemble vide
  - le cardinal de l'ensemble vide
- Un repère
  - le premier repère de la règle
- Un nombre
  - le nombre d'écriture 0
  - un nombre (un chiffre)

Pour moi, zéro c'est :

5 le premier repère de la règle
6 le cardinal de l'ensemble vide
7 le nombre d'écriture 0
8 3 – 3, a – a
9 0 x b = 0 pour tout b
10 pas grand chose
11 un chiffre, qui est devenu un nombre dans un deuxième temps
12 le plus petit des entiers naturels
13 pour aller à 10
14 l'élément neutre de l'addition
15 un nombre, un chiffre
16 un problème ! (je ne sais plus qui il est…)
17 l'absence

- le plus petit des entiers naturels
- un chiffre qui est devenu un nombre dans un deuxième temps
- l'élément neutre pour l'addition
- l'élément absorbant de la multiplication
- 0 x b = 0 pour tout b

- Un chiffre
  - un chiffre qui est devenu un nombre dans un deuxième temps
  - pour aller à 10 (?)
  - (un nombre) un chiffre
- Un ensemble d'écritures (?)
  - 3 – 3, a – a
- Autres représentations
  - l'absence (sans préciser de quoi…)
  - un problème ! (je ne sais plus qui il est)
  - pas grand chose

Toutes ces représentations des adultes apparaissent très tôt à l'école. Sont-elles enseignées ? Si oui, comment ? Quelles sont les significations de l'*absence*, *du problème,* de *pas grand chose* ?
Mais zéro est aussi fréquenté au quotidien et apparaît dans bien des expressions du langage courant ou se trouve inscrit sur des objets régulièrement vus ou utilisés.

1.2 Le zéro dans la langue

1.2.1 Classement en fonction du sens de zéro

Les participants ont été invités ensuite à trouver quel pouvait être le sens de zéro ou 0 dans quelques expressions ou supports qui leur ont été distribués et à classer ces expressions dans les catégories trouvées précédemment.

Expressions distribuées :

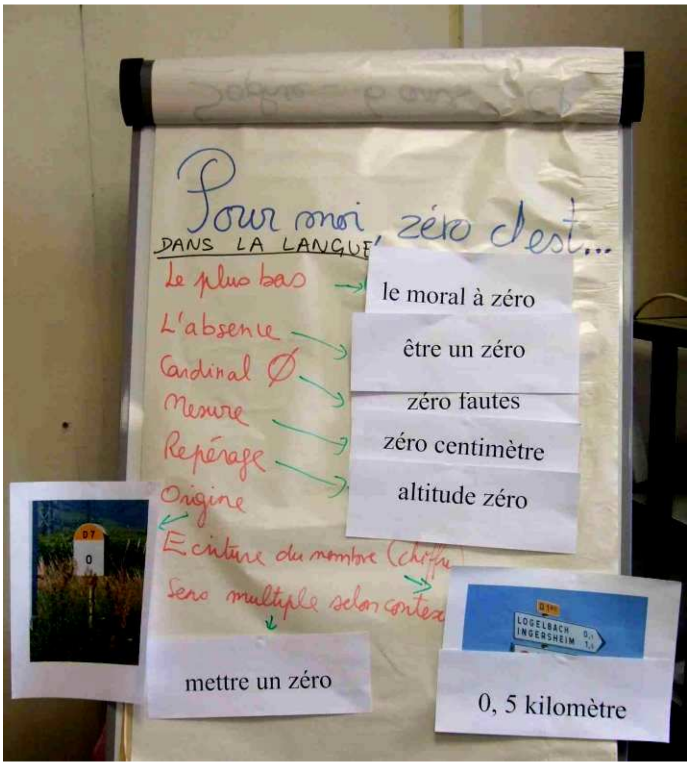
1- le moral à zéro
2- être un zéro
3- zéro faute(s)
4- zéro centimètre
5- altitude zéro
6- mettre un zéro
7- avoir la boule à zéro
8- zéro de conduite
9- une boisson Zéro
10- repartir à zéro
11- remettre les compteurs à zéro
12- les avoir à zéro
13- 0 degré
14- le degré zéro de la pensée
15- le zéro absolu
16- le fromage blanc à 0 %

Objets distribués ou représentés :

17- le 0 de la borne kilométrique (photo)
18- 0,5 kilomètre sur un panneau indicateur (photo)
19- extrait de journal avec un match nul : 0-0
20- un thermomètre
21- une règle graduée
22- un ruban mesureur (en mètre d'un côté, en pouces de l'autre)

Ces expressions ont été classées puis structurées en fonction de différents sens de zéro, avec un exemple particulièrement représentatif [voir photo] :

1. Le plus bas : le moral à zéro
2. L'absence : être un zéro
3. Le cardinal de l'ensemble vide : zéro faute
4. Une mesure : zéro centimètre
5. Un repérage : altitude zéro
6. Une origine : le 0 de la borne kilométrique
7. L'écriture d'un nombre : 0,5 kilomètre sur un panneau indicateur
8. Un sens multiple selon les contextes : mettre un zéro



Certaines expressions, interprétées de manières différentes, ont conduit à des débats entre les stagiaires. Ainsi :

avoir le moral à zéro est interprété comme avoir le moral le plus bas possible, ceci est-il à mettre en relation avec "zéro est le plus petit entier naturel" ? L'analogie avec une graduation ne conviendrait pas puisque des températures négatives existent. Mais cette analogie pourrait convenir dans une échelle qui repérerait le moral (sorte d'échelle de Beaufort).

être un zéro semble devoir rejoindre l'absence et pourtant, quand on est un zéro, on est bien quelque part, mais peut-être inexistant pour une certaine activité.

zéro faute rejoint bien évidemment zéro comme cardinal de l'ensemble vide, mais peut aussi être considéré comme le résultat d'une mesure. Rejoindrait-il alors *zéro degré* ?

zéro centimètre est considéré comme le résultat d'une mesure. Il pourrait se distinguer de celui de l'ensemble vide car il utilise un instrument de mesure et appartient au domaine des mesures physiques. Mais il lui est semblable aussi si l'on considère la mesure cardinale (davantage dans le domaine des mathématiques que dans celui de la physique). Dire que le cardinal d'un ensemble est *zéro* est aussi effectuer une mesure.

zéro degré ou plus généralement la notion de *zéro* dans le domaine du repérage des températures est très arbitraire puisque dans l'échelle Celsius, il correspond au phénomène physique de l'eau qui se transforme en glace sous certaines conditions de pressions, dans l'échelle Kelvin, il correspond à l'absence de vibration des molécules et dans l'échelle Fahrenheit, il correspond à la température la plus basse que Fahrenheit ait mesurée pendant un hiver particulièrement rigoureux à Dantzig.

zéro est considéré comme une origine d'une graduation quand il apparaît sur la borne routière, mais il peut tout autant, sur la même borne, indiquer la distance par rapport au point même où est située la borne et devenir le résultat d'une mesure de longueur.

altitude zéro, là, zéro est considéré comme faisant partie d'une échelle de repérage, encore une fois, arbitraire.

0,5 km, 0 est ici considéré comme un chiffre dans l'écriture d'un nombre.

mettre un zéro est une expression dans laquelle zéro peut avoir des sens multiples dépendant de la situation d'énonciation.

Les débats ont clairement mis en évidence qu'il n'est pas toujours aisé d'analyser le sens de *zéro* ou de *0* dans des expressions courantes.

En conclusion de cette partie, on peut considérer, à partir des exemples mis à disposition, que *zéro* ou *0*, s'inscrit dans une des classes suivantes (ou peut s'y ramener) :

- Le cardinal de l'ensemble vide
- L'origine d'une graduation
- Le résultat d'une mesure
- Le résultat d'un repérage
- Signifier une borne inférieure (*le plus bas possible*)
- Signifier l'absence (ce sens est-il à relier à celui du cardinal de l'ensemble vide ?)
- Un chiffre (mais qui signifie l'absence ?)

Ce travail sur la polysémie du zéro, ainsi mise en relief, peut être complété par une analyse lexicale du mot, portant par exemple sur les sens référencés par différents dictionnaires, sur les différents synonymes ou termes équivalents dans la langue, sur son étymologie (*sefer*, signifiant *néant, vide, etc.*), voire encore sur la classe grammaticale du mot.

1.2.2 Classement en fonction de la nature grammaticale de zéro

Si le mot *zéro* est d'abord considéré comme un **nom masculin**, il peut cependant appartenir, en fonction de son emploi, à plusieurs classes grammaticales.
Il est un **nom** lorsqu'il présente les caractéristiques syntaxiques de tout nom, telles qu'elles sont définies dans un ouvrage de grammaire :

> « On appelle **noms** les mots :
> - qui peuvent être précédés d'un déterminant ;
> - qui possèdent un genre inhérent ;
> - qui constituent le noyau d'un groupe nominal. » [Pellat, 2009]

Lorsque zéro est précédé d'un déterminant (le ou un), il est donc facilement reconnu comme un nom, comme dans les expressions suivantes :

- le zéro absolu
- mettre un zéro
- être un zéro
- un zéro de conduite

Il est aussi utilisé comme nom dans des locutions où il est employé seul après la préposition *à* :

- le moral à zéro
- avoir la boule à zéro
- repartir à zéro
- les avoir à zéro
- remettre les compteurs à zéro

Zéro appartient cependant à la classe des **déterminants numéraux**, lorsqu'il répond à une autre définition :

> « Constituant obligatoire du groupe nominal, le déterminant précède un nom et il est placé en tête du groupe nominal. Il ne peut être employé seul. » [Pellat, 2009]

Zéro est donc un déterminant lorsqu'il est placé devant un nom. Il détermine alors une quantité, ou une mesure, comme tout déterminant numéral :

- zéro faute(s)
- zéro centimètre
- 0 degré

Un troisième emploi de *Zéro* demande une analyse plus approfondie afin de déterminer la classe grammaticale. Dans les emplois suivants, l'usage du mot ne répond à aucune des caractéristiques clairement définies précédemment :

- une boisson Zéro
- l'altitude zéro
- le degré zéro de la pensée

Le mot *zéro* apparaît dans ces cas dans un emploi facultatif avec un autre nom. En effet, il est possible d'effacer le zéro sans pour autant altérer le groupe nominal d'un point de vue syntaxique : une boisson, une altitude, un degré. Cependant si on interprète le sens du zéro, on peut constater que dans les deux premiers exemples, il s'agit d'une expression elliptique. Ainsi, « une boisson Zéro » est une boisson à « zéro calorie » et « l'altitude zéro » est une altitude de « zéro mètre ». Dans ces deux expressions, zéro renvoie donc à un déterminant.

Cependant dans « le degré zéro de la pensée », le mot zéro est apposé au nom « degré » et son sens est équivalent à « nul ». On retrouve cet usage dans des expressions comme « la tolérance zéro, la croissance zéro, le taux zéro, etc. ». Il peut alors être interprété grammaticalement comme un complément du nom ou comme un adjectif épithète.

Ce travail sur la nature grammaticale de zéro permet de croiser les considérations sur le sens de zéro et sur son emploi dans la langue.

2 ZÉRO, QUELLES APPROCHES DANS LES CLASSES ?

2.1 Les ouvrages de CP

Des ouvrages de CP ont été distribués aux participants. Chacun devait repérer la première occurrence du zéro dans l'ouvrage, en repérer le sens, et surtout analyser la manière dont le zéro a été introduit. Chacun repérera aussi l'existence d'un travail spécifique sur le zéro et l'analysera.
Le transparent reproduit ci-contre (aux blancs près) a été distribué aux participants.

Titre :
Éditeur : Année :
Première apparition du zéro ou du 0 page :
Sous quelle forme ?
Dans quel sens ?
Comment ce zéro ou 0 est-il introduit ?
Y-a-t-il un travail spécifique sur le zéro ou 0 ?
Oui Non
Si oui, à quelle page ?
Sera commenté par vous à l'oral.

Transparents distribués aux participants

2.1.1 Résultats des observations

Nous recopions dans le tableau ci-dessous les contenus des transparents tels qu'ils ont été remplis par les participants.

Références des ouvrages de CP	Première apparition du zéro et de quelle manière		Travail spécifique sur le zéro
Optimath, Hachette, 1998.	p.30-31 Forme : 2 + 0 Sens : cardinal de l'ensemble vide	Ajouter zéro à un nombre : 3 + 0 = …	NON
Maths tout terrain, Bordas, 2007.	p.16, leçon 6 Forme : file numérique décroissante. Sens : absence (ensemble vide)	Le zéro est associé à une collection n'ayant aucun élément.	NON
Vivre les maths, Nathan, 2002.	p.3 Forme : dans 10, dans une comptine. p.5 Forme : 0 Sens : cardinal de l'ensemble vide, absence	Association à une collection vide : « Barre ce qui est en trop »	NON
Clé des maths, Belin, 2008.	p.1 Forme : dans la file numérique Sens : origine, chiffre de l'écriture de 10	Montré dans l'écriture des files numériques (écriture en vert ou dernier nombre de la file)	p.23 : élément neutre de l'addition
J'apprends les maths, Retz, 2008.	p.25 Forme : titre (introduction du nombre 0) Sens : cardinal de l'ensemble vide	Quantité : 0 noisette Addition : élément neutre	p.25
Plic, Ploc, Hachette, 2002.	Séance 1 Forme : chiffre Sens : reconnaître les chiffres	Distinction entre chiffre et lettres	p.12 en tant que nombre
Maths +¸Sed, 2006.	p.18 Forme : 0 Sens : écriture (apprendre à écrire 0)	1) 0 introduit dans la notation 10, seulement écrit en chiffres, jamais en lettres (successeur de 9) 2) toutes les bandes numériques commencent à 1 - pour expliquer 11, 12 ; 11 = 10 + 1 ; 12 = 10 + 2	NON
CAP maths, Hatier, 2009.	p.5 Forme : 10 Sens : dix, successeur de neuf	Passage à la dizaine sur la file numérique	p.38 2 + 0 = 4 – 4 =
Nouvel objectif calcul, Hatier, 1997.	p.13 Forme : écriture de 10 Sens : chiffre	Niveau zéro	
Collection Thévenet, Bordas, 2008	p.8 Écriture du nombre 10	p.24 leçon sur le nombre 0 → nombre d'éléments d'une caisse vide → écriture en chiffres et en lettres	OUI
Diagonale, Nathan, 2006.	p.17 Forme : domino double 0 Sens : absence de point	p.18 exercice pour compléter un tableau avec l'écriture littérale et le chiffre.	

Les **premières occurrences de *zéro*** sont distribuées de la manière suivante (les couleurs permettent de repérer le sens principal de zéro dans les manuels) :

Cardinal de l'ensemble vide	Dans l'écriture de 10 sans travail préalable	Introduit comme chiffre, sans donner de sens	Élément neutre pour l'addition
Quatre fois	Cinq fois	Deux fois	

Cependant on peut constater que l'**introduction du *zéro*** suit une autre distribution :

Cardinal de l'ensemble vide	Dans l'écriture de 10 sans travail préalable	Introduit comme chiffre, sans donner de sens	Élément neutre pour l'addition
Trois fois	Trois fois	Deux fois	Deux fois

Une fois *zéro* apparaît dans le sens d'un niveau *zéro*.

2.1.2 Conclusions

Une quasi absence d'enseignement du zéro

La première constatation est l'absence de travail spécifique sur le *zéro* dans les ouvrages du Cours Préparatoire. Zéro serait-il si insignifiant qu'il n'ait pas besoin d'être travaillé ? Ceci semble déjà aller à l'encontre des différents sens repérés précédemment et dont certains font même partie d'expressions courantes.

Zéro comme cardinal de l'ensemble vide

Même quand zéro est présenté comme cardinal de l'ensemble vide, il n'est pas introduit dans l'écriture de 10 dans ce sens. Ce sens, qui pourrait être le nombre d'unités libres dans l'écriture d'un nombre. Ce lien n'est jamais établi. Par contre, le risque est grand, de considérer qu'il n'y a pas d'unité dans 120 ou dans 90… par confusion entre chiffre des unités et nombre d'unités libres.
Le lien n'est souvent pas établi non plus entre *zéro* comme cardinal de l'ensemble vide et *zéro* comme élément neutre pour l'addition. Ce nombre est en effet quelquefois fréquenté uniquement dans l'écriture du 10 comme suivant de 9 (machine type compteur), puis apparaît, comme par magie, comme élément neutre de l'addition.
L'automatisme de l'écriture des nombres dans le système de numération semble prédominer sur l'enseignement d'un ou de plusieurs sens de *zéro* et surtout sur l'enseignement des liens qui peuvent exister entre plusieurs aspects de *zéro*.

On pourrait penser que si *zéro* n'est pas enseigné de manière explicite, comme un nombre qui est devenu un nombre naturel, après avoir traduit *l'absence*, c'est qu'il est bien connu des élèves avant et qu'il aurait donc été construit dès l'école maternelle.

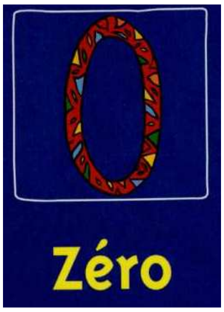
2.2 Les albums à compter

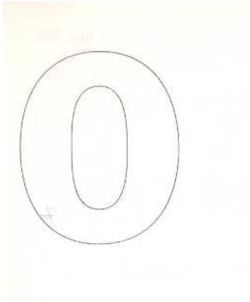
Les albums, souvent utilisés à l'école maternelle et au cours préparatoire, pourraient nous renseigner sur cette question.
Les animateurs ont donc distribué un album numérique (plus communément appelé album à compter) à chaque participant en leur demandant d'analyser la manière dont *zéro* était présent ou présenté dans ces albums.

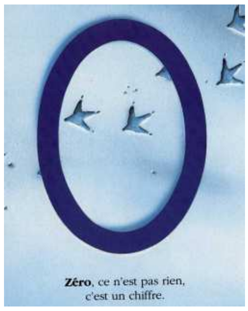
On constate plusieurs approches qui montrent une grande variété d'aspects du *zéro* présents dans les albums :

<u>Zéro, comme suite naturelle du 9</u>
Zéro apparaît alors généralement dans une suite croissante qui commence bien souvent à 1 pour se terminer à 10. Le danger relevé est de faire apparaître cette écriture 10, comme un nouveau symbole dont aucun des chiffres n'a de valeur particulière. Les écritures romaines et chinoises ou égyptiennes avaient d'ailleurs un symbole particulier pour désigner ce 10 (X chez les romains, + dans l'écriture chinoise, etc.) .

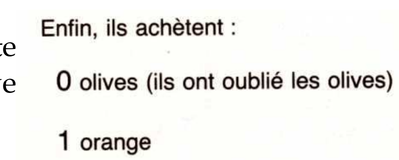
<u>0 comme chiffre</u>
On présente des chiffres, sortes de lettres qui serviront à écrire les nombres. 0 est un de ceux-là. Son sens est alors évité. Voir par exemple les images ci-contre.

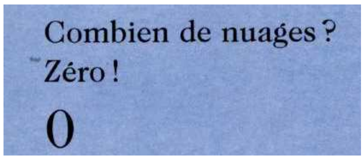




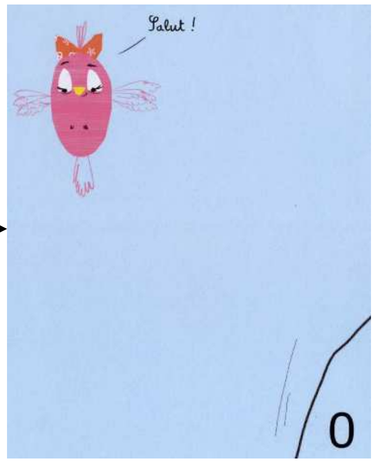


<u>0 comme cardinal de l'ensemble vide</u>
Ils ont acheté 0 olives. L'expression est certes non usuelle, mais présente *zéro* comme désignant le cardinal de l'ensemble vide. On le retrouve aussi dans :
Combien de nuages dans le ciel ? Zéro. Suivi de *0*.



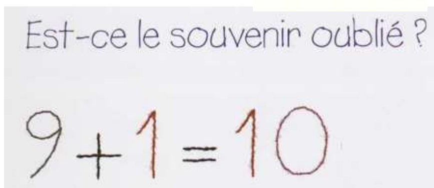


Dans les deux extraits ci-dessous, on ne peut savoir si *zéro* est présenté comme cardinal de l'ensemble vide (ensemble des oiseaux restant sur le fil après qu'il eût été coupé par la coquine) ou résultat de l'opération 9 – 9.



<u>0 comme mesure d'une température ou repère sur une graduation</u>
Voir images ci-contre. On peut remarquer que l'écriture de 10 est présente simultanément sur le thermomètre et que dans l'autre album, *zéro* est écrit en lettres.

<u>0 dans l'écriture de 10</u>
Comme le nombre suivant 9 (sous la forme 9+1, démarche proche de l'axiomatique de Peano, mais en oubliant de présenter le *plus petit des entiers naturels*, 0. Celui-ci ayant été présenté au départ comme *un souvenir* ! En fait sa présentation est une sorte de dessin de 0



dans un tableau. Il pourrait y avoir doute sur le sens de zéro qui, ici, n'est pas présenté comme un nombre.
Voir ci-contre :

… avec une malheureuse tentative d'explicitation graphique

Dans le dessin ci-contre on peut se demander si l'auteur n'indique pas que 1 signifie bien une unité et 0 semble alors signifier neuf ! Deux indices : dans le zéro se trouvent neuf objets, repris en-dessous et sous le 1 se trouve un objet. En tout, dix objets. L'interprétation est vraisemblablement fausse, mais l'illustration n'en reste pas moins ambiguë.

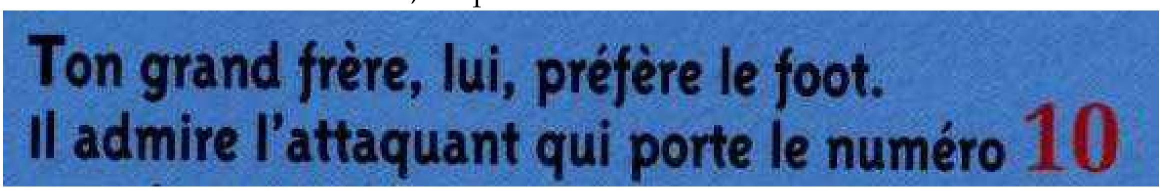
Zéro pour traduire le résultat d'un match (d'un match nul !)
Quel est le sens donné à 0 dans ce cas ?

Zéro comme ultime mot d'une suite ordonnée

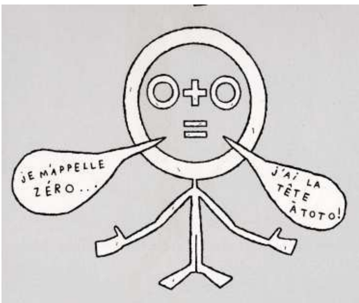
La suite ordonnée est décroissante si l'on pense que les référents sont des nombres, elle ne l'est pas si on considère les mots et leur ordre alphabétique, ni si l'on considère l'ordre dans lequel elle est énoncée puisque le mot *zéro* arrive en fin d'énonciation, juste avant l'ordre de départ. Cette suite de mots a-t-elle dans ce cas un sens mathématique ? Ce n'est pas certain, toute autre suite de mots qui serait par convention utilisée dans ce cas conviendrait aussi (mirabelle, cerise, pomme, pêche, poire, partez !). Quel est alors le sens donné à *zéro* dans ce cas, si ce n'est le mot limite, qui déclenche un phénomène, en général un départ.

Zéro dans des numéros

Il s'agit ici d'utiliser les écritures chiffrées pour identifier des éléments, comme certains constructeurs le font avec certaines voitures. Zéro dans ce cas, n'a pas d'existence autonome.



<u>Zéro est même présenté comme un personnage</u>



Cette grande diversité des aspects du *zéro* présentés dans les albums et fréquentés de fait par les élèves fait-elle l'objet d'un apprentissage ? Ce n'est pas certain.
Le groupe s'est donc interrogé sur quelques approches possibles de ce nombre au niveau du cycle 1 et en Cours Préparatoire.

3 QUELQUES PISTES POUR ENSEIGNER LE ZÉRO

3.1 Continuité linguistique

Toutes les « comptines descendantes » comportant la suppression d'un élément d'une collection à chaque étape permettent d'atteindre le *zéro*. La continuité linguistique permet d'introduire ce nombre comme répondant à une question du type *Combien de… ?* ou à une autre structure linguistique comme *il reste* ______.

Par exemple :

Le lapin et les carottes

Lapinou a *trois* carottes, il en mange une.
Combien lui en reste-t-il ?
Deux.

Lapinou a *deux* carottes, il en mange une.
Combien lui en reste-t-il ?
Une.

Lapinou a *une* carotte, il en mange une.
Combien lui en reste-t-il ?
Zéro.

Feuilles d'automne

Trois feuilles sur la branche,
le vent souffle
il reste *deux* feuilles sur la branche

Deux feuilles sur la branche,
le vent souffle
il reste *une* feuille sur la branche

Une feuille sur la branche,
le vent souffle
il reste *zéro* feuille sur la branche

Le *zéro* ainsi introduit peut alors aisément être mis en relation avec le cardinal de l'ensemble vide.

Note : seules les structures ont été évoquées lors de l'atelier, leur mise en forme ci-dessus provient des auteurs du compte-rendu, à titre d'illustration.

3.2 Expression d'un cardinal dans le cas d'une résolution de problème

Il s'agit ici de tous les problèmes additifs dans lesquels on enlève d'un seul coup la totalité des éléments d'une collection, illustré – peut-être - précédemment par la jeune fille oiseau qui coupe le fil sur lequel se trouvent neuf prétendants.
Il s'agit d'exprimer la solution de tels problèmes.

Par exemple :
Luc a sept pommes dans son panier, il en donne deux à son frère Nathan. Combien lui en reste-t-il ?
Réponse : Il lui en reste *cinq*.

Luc a trois pommes dans son panier, il en donne trois à sa sœur Héloïse. Combien lui en reste-t-il ?
Réponse : Il lui en reste *zéro*.

La question commençant par combien implique une réponse par un déterminant numéral. Le seul possible pour le deuxième énoncé est bien *zéro*, que l'on peut alors mettre en relation naturelle avec le cardinal de l'ensemble vide.

4 CONCLUSION

Zéro, si polysémique, tant dans le domaine des mathématiques que dans celui de la langue n'est que rarement enseigné, sauf comme chiffre. Il apparaît cependant dans des sens variés dans les ouvrages de mathématiques du CP ou dans des albums à compter.

Une telle fréquentation de *zéro* suffit-elle à assurer la construction des différents sens rencontrés ? Sinon, quel enseignement mener à propos de ce nombre ?

5 BIBLIOGRAPHIE

5.1 Références

CAMENISCH Annie, PETIT Serge, Atelier « Utiliser des albums numériques pour enseigner les mathématiques à l'école », In 35e *Colloque européen des Professeurs et Formateurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres*, COPIRELEM, IUFM de Bordeaux : 2009.

CAMENISCH Annie, PETIT Serge, « Enseigner ou introduire le zéro ». Paris, *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (APMEP) n° 483, 2009, p.549-556.

CAMENISCH Annie, PETIT Serge, « Les mathématiques et l'apprentissage du pluriel des noms au cycle 2 ». In Pellat, J.-C., Brissaud, C. et Jaffré J.-P. (dir.), *L'orthographe aujourd'hui : regards croisés*, Limoges, Éditions Lambert Lucas, 2008.

CAMENISCH Annie, PETIT Serge, « Nombre et marques du pluriel ». Paris, *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (APMEP) n°476, 2008, p.282-288.

CAMENISCH Annie, PETIT Serge, « Des albums pour apprendre à compter et à développer la maîtrise de la langue ». Paris, *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (APMEP) , n°471, 2007, p.574-579.

PELLAT Jean-Christophe (dir.), BEZU Pascale, CAMENISCH Annie, DELHAY Corinne, MEYER Jean-Paul, PETIT Serge, SCHMOLL Laurence, *Quelle grammaire enseigner ?* Hatier (Enseigner à l'école primaire), 2009.

5.2 Manuels scolaires

CAP maths, Hatier, 2009.

Clé des maths, Belin, 2008.

Collection Thévenet, Bordas, 2008

Diagonale, Nathan, 2006.

J'apprends les maths, Retz, 2008.

Maths +¸ SED, 2006.

Maths tout terrain, Bordas, 2007.

Nouvel objectif calcul, Hatier, 1997.

Optimath, Hachette, 1998.

Plic, Ploc, Hachette, 2002.

Vivre les maths, Nathan, 2002.

5.3 Albums

ALFAENGER Peter K., *Apprivoise les nombres,* Epigone, 1991.

ANGELINI Catherine, LEFEBVRE Gabriel, *Le livre des Chiffres et des Nombres,* La Renaissance du livre, 2003.

ANNO Mitsumasa, *Dix petits amis déménagent*, L'école des loisirs, 1982.

BALLART Elisabet, CAPDEVILA Roger, *J'apprends à compter*, Casterman, 1992.

BUKIET Suzanne, ANGELI May *Les bons comptes font les bons amis* de, Editions de l'observatoire, 1987.

CAUWET Nouchka, *Compter le monde – La naissance des nombres*, Editions Bélize, 2008.

DELAFOSSE Claude et GRANT Donald, *Compter*, Gallimard (Mes premières découvertes), 1993.

DELEDICQ André et Jean-Christophe, *Le monde des chiffres,* Circonflexe, 1997.

DORIN Perrine, *Salut !* Editions du Rouergue, 2008.

EKELAND Ivar, *Le chat au pays des nombres*, Le Pommier, 2006

KOECHLIN Lionel, *Grigri compte*, Hatier, 1991.

KOECHLIN Lionel, *Un et ses amis*, Mango, 1995.

MASSIN, *Jouons avec les chiffres*, illustré par Les chats pelés, Seuil Jeunesse, 1993.

PACOVSKA Kveta, *Jamais Deux sans Trois,* Seuil Jeunesse, 1996.

RAND Ann et Paul, *Petit 1*, Circonflexe, 1992.

ROSANO Laura, *Au Fil des nombres,* Bilboquet (l'art en page), 2002.

ROSENSTHIEL Agnès, *Chiffres en friche*, Larousse, 1979.

Atelier B5

UN MEME PROBLÈME, UNE DIVERSITÉ DE PROCÉDURES DE RÉSOLUTION : COMMENT LES ANALYSER ?

Lucia Grugnetti
Unité de recherche en didactique des mathématiques,
Université de Parma (Italie)
lucia.grugnetti@unipr.it

François Jaquet
Ancien chercheur à l'Institut romand de recherche et documentation pédagogique (IRDP, Suisse)
francois.jaquet@aliceadsl.fr

Philippe Skilbecq
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques,
Nivelles (Belgique)
philippes@crem.be

Résumé
Cet article est le compte-rendu d'un atelier proposé lors du colloque COPIRELEM de Auch en juin 2009. Les auteurs présentent le Rallye Mathématique Transalpin (RMT) qui s'adresse à des classes d'élèves de 8 à 15 ans. Au-delà de l'organisation elle-même du concours, le RMT est l'occasion d'un travail de nombreuses équipes : en amont pour choisir les problèmes (analyse a priori) et a posteriori à partir des productions des élèves, en particulier sur les différentes procédures suivies. Un des objectifs est aussi d'insérer ces problèmes dans l'enseignement lui-même. En parallèle, en formation initiale des futurs instituteurs, certains problèmes sont utilisés comme support de travail sur les notions mathématiques en jeu, les procédures, les erreurs, les obstacles, les variables et vers la création de nouveaux problèmes. Plusieurs de ces problèmes sont ensuite présentés et analysés dans ce cadre de formation.

1 INTRODUCTION

Le *Rallye mathématique transalpin* (*RMT*) est un concours de mathématique organisé depuis plus de 10 ans dans plusieurs pays européens. Chaque année, plusieurs centaines de copies d'élèves ayant résolu les mêmes problèmes sont collectées. Leur analyse est riche d'enseignement, tant pour les enseignants en fonction que pour les futurs enseignants et les chercheurs en didactique des mathématiques. Dans cet article, nous examinons des copies rendues par des groupes d'élèves (niveaux CE2, CM1 et CM2) sélectionnées pour leur intérêt. Nous distinguons les différentes procédures de résolution et les niveaux de construction des concepts mathématiques intervenant dans la résolution du problème. Ce travail s'effectue notamment à partir des erreurs rencontrées, des représentations et des justifications apportées. Pour certains problèmes, les données recueillies auprès de l'ensemble des classes sur les problèmes analysés sont également présentées. Tout au long de cet article, des propositions de travail avec de futurs enseignants (instituteurs ou professeurs de mathématiques) sont également énoncées.

2 LE RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

Le *RMT* est organisé par l'*Association Rallye Mathématique Transalpin* (*ARMT*). Ce concours de mathématique s'adresse à des classes entières du CE2 à la 2e année du lycée [1](élèves de 8 à 15 ans). Il est proposé dans cinq pays européens : Suisse, Italie, France, Luxembourg et Belgique. Durant l'année scolaire 2008-2009, plus de 3000 classes y ont participé.

2.1 Les objectifs du RMT

Le *RMT* propose aux élèves de faire des mathématiques en résolvant des problèmes, d'apprendre les règles élémentaires du débat scientifique en discutant et défendant les diverses solutions proposées, de développer leurs capacités à travailler en équipe en prenant en charge l'entière responsabilité d'une épreuve et de se confronter avec d'autres camarades, d'autres classes.

Pour les maîtres, le *RMT* permet d'observer des élèves en activité de résolution de problème (les leurs lors de l'épreuve d'essai et ceux d'autres classes durant les épreuves qualificatives), d'évaluer les productions de leurs propres élèves et leurs capacités d'organisation, de discuter des solutions et de les exploiter ultérieurement en classe, d'introduire des éléments de renouvellement dans leur enseignement par des échanges avec d'autres collègues et par l'apport de problèmes stimulants, et de s'engager dans l'équipe des animateurs et de participer ainsi à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions.

Outre le concours, le *RMT* est aussi un outil intéressant et efficace pour nourrir une réflexion en didactique des mathématiques et pour les formations initiale et continue des maîtres. Cette deuxième perspective du *RMT* est rendue possible parce qu'outre l'énoncé de la ou des solutions, il est demandé aux élèves de justifier leur réponse ou d'expliquer leur démarche. À partir de ces récits explicatifs ou justificatifs, une analyse des réponses et des stratégies est possible, de même que la mise en évidence d'obstacles à la résolution d'un problème, à la mobilisation et à l'utilisation d'un objet mathématique ou à la compréhension de celui-ci.

2.2 Des possibilités d'exploitation

Pour chaque épreuve du *RMT* (3 par an), entre 20 et 25 problèmes sont mis au point par l'ensemble des sections[2] de l'*ARMT*, soit près de 70 problèmes par an. Pour chacun d'eux, une analyse *a priori* permet de déterminer leur intérêt pour le concours et de régler les variables pour qu'ils soient les mieux adaptés aux classes auxquelles ils sont destinés.

Outre les analyses *a priori*, les sections ou les groupes de travail[3] sur les concepts mathématiques mènent aussi des analyses de certains problèmes après les passations des épreuves dans les classes. Ces analyses

[1] Le RMT s'organise en catégories, de la catégorie 3 à la catégorie 10. La catégorie 3 correspond à la troisième année d'étude primaire (CE2) ; la catégorie 4 correspond à la 4e année d'étude primaire (CM1) ; ainsi de suite jusqu'à la catégorie 10 (2e année du lycée).

[2] L'ARMT compte actuellement 23 sections réparties dans les cinq pays européens participant au RMT. Une section peut représenter soit une région (Bourg-en-Bresse, Lyon, Franche-Comté sont les trois sections françaises), soit un pays (Luxembourg et Belgique), soit encore un type d'enseignement (les lycées agricoles français). Chaque section organise le RMT à son niveau en collaboration avec l'association internationale.

[3] Les groupes de travail sur les concepts rassemblent des membres francophones et italophones des 23 sections. Ces groupes ont pour objectifs d'analyser les problèmes du RMT dans la double perspective d'en proposer de nouveaux et d'étudier le potentiel de chaque problème pour une utilisation en classe dans le cadre de l'enseignement d'un concept. Les groupes de travail sont au nombre de sept : géométrie plane, géométrie dans l'espace, chiffre et nombre, équation, proportionnalité, fonction, algèbre.

sont réalisées souvent à partir d'une analyse des résultats globalisés sur l'ensemble des sections pour chacun des problèmes. Cela est possible grâce à la collecte des résultats via le site Internet de l'*ARMT*.

Cependant, les analyses *a posteriori* ne se limitent pas à l'analyse de ces résultats. La lecture des copies des élèves renvoyées après chaque épreuve et leur analyse constituent le véritable travail. C'est à ce niveau que l'on peut observer les procédures utilisées par les élèves et tenter de les comprendre, de les rattacher à des conceptions. C'est aussi à ce niveau que l'on peut relever les erreurs, tenter de les comprendre et de les interpréter en termes d'obstacles à la résolution du problème, et au-delà émettre des hypothèses en termes d'obstacles à l'apprentissage de notions mathématiques.

Ces obstacles peuvent avoir des origines bien différentes : ontogénique, épistémologique, didactique,… Parfois, l'analyse *a posteriori* montre que ce sont les variables du problème qui sont pour l'essentiel à l'origine des difficultés des élèves. Un travail sur ces variables mène alors à la conception de nouveaux problèmes. Ceux-ci sont ensuite utilisés dans les classes et les copies des élèves sont à nouveau analysés, tant pour observer des modifications au niveau des résultats qu'au niveau des procédures investies. L'impact de la modification des variables peut alors être mis en évidence. Au-delà, c'est l'importance des variables didactiques qui est soulignée.

Ainsi, avant de trouver place dans une épreuve, chaque problème est l'objet d'un long travail de mise au point. Le travail sur les variables est sans doute le plus exigeant pour les sections. Plusieurs relectures des problèmes sont organisées avant que ceux-ci ne soient acceptés et insérés dans les épreuves. Chaque problème, produit par les sections ou par les groupes de travail, est analysé par l'ensemble des sections. Ces analyses sont menées à partir de l'expérience acquise par les enseignants qui composent les sections, mais aussi en comparant avec les résultats à des problèmes similaires déjà proposés aux classes les années précédentes. Ces analyses tiennent également compte des travaux réalisés par les groupes de travail sur les concepts. En fonction des remarques émises par ces sections, une équipe composée des membres de deux ou trois sections est chargée d'élaborer la version finale d'une épreuve.

L'examen des copies des problèmes du *RMT* confirme généralement les prévisions de l'analyse *a priori* en ce qui concerne les procédures de résolution. Pour certains problèmes, les analyses *a posteriori* apportent des informations complémentaires sur les procédures engagées par les élèves. Dans certains cas, ces analyses mettent en évidence des obstacles inattendus, des représentations dominantes non adéquates, des procédures détournées permettant d'obtenir la solution par des voies non prévues. Quoi qu'il en soit, ces analyses peuvent conduire à des exploitations de problèmes en classe ou à des investigations complémentaires. Ces travaux aboutissent souvent à la création de nouveaux problèmes à partir des modifications des variables didactiques ou de contexte.

Ainsi, le *RMT* ne se propose pas seulement d'organiser un concours. Il tente aussi de mettre au point des problèmes qui, certes servent de base au concours, mais trouvent également une place en classe dans un processus d'enseignement.

De même, pour des formateurs d'enseignants, le *RMT* est une source de problèmes analysés ou à analyser qui mettent en évidence des stratégies, des erreurs, des obstacles, des variables didactiques, … Il peut aussi être considéré comme un champ d'investigation et de développement pour la recherche en didactique des mathématiques.

3 ANALYSER DES PROBLÈMES DU RMT

Abordons maintenant deux séries de problèmes qui pourraient être utilisés en formation d'enseignants. Nous avons choisi de travailler à partir de problèmes de géométrie. Notre objectif sera de mettre en évidence la notion d'unité de mesure commune, ainsi que les difficultés des élèves par rapport aux notions d'aire et de périmètre.

3.1 Proposition d'une séquence de travail avec des futurs instituteurs[4]

Dans un premier temps, les étudiants sont invités à résoudre les problèmes. Cette première phase leur permet de prendre contact avec les problèmes, de prendre conscience de leurs propres difficultés et, en fonction de leur expérience, d'émettre des hypothèses quant aux difficultés que les élèves peuvent éprouver et les obstacles auxquels ils peuvent être confrontés.
Dans un deuxième temps, pour chaque série de problèmes, des analyses sont menées à partir de quelques questions. Ces analyses concernent d'abord le travail des étudiants, ensuite celui des élèves à partir de l'analyse de quelques copies :

- *Quelles sont les notions « rencontrées » ou « mobilisées » dans ces problèmes?*
- *Quelles sont les procédures utilisées ?*
- *Quelles sont les « erreurs » produites, quels sont les « obstacles » à surmonter?*
- *Quel est le travail à réaliser sur les variables pour aménager ces problèmes si nécessaire… en fonction de quel(s) objectif(s)?*

Ces analyses des problèmes et des difficultés des élèves permettent parfois d'ébaucher une première progression dans l'apprentissage des notions mathématiques que sont l'unité de mesure commune, l'aire et le périmètre. La référence à un cadre théorique, en l'occurrence celui présenté par une équipe du *CREM* [2007][5], et l'expérimentation dans des classes peuvent ensuite servir de validation et de structuration des savoirs ébauchés lors des séances de travail avec les étudiants.

3.2 Une première série de trois problèmes

Les trois problèmes que nous proposons sont « *Les tables de Tante Marie* » et les deux versions du problème « *La rosace de Julie* ». Ils sont présentés en annexe de cet article.

Après avoir laissé du temps à la résolution individuelle des problèmes, les analyses *a priori* réalisées par les sections sont présentées aux étudiants. Une comparaison entre ces analyses, les procédures des étudiants et celles des élèves initie une première réflexion. Pour le problème « *Les tables de Tante Marie* » (catégories 3, 4), l'analyse *a priori* mettait en avant différentes procédures, dont :
- Comprendre qu'il faut déterminer une unité de mesure (carré ou triangle)
- Se rendre compte de la relation entre les deux unités de mesure (moitié/double)
- Comprendre que, puisque tante Marie utilise 34 pièces pour chacune des deux tables, elle ne peut pas, pour paver la première table, utiliser uniquement des pièces carrées (il en faudrait alors uniquement 25). Pour l'autre table, il est évident que les formes seront mélangées, mais il faut aussi comprendre qu'il doit y en avoir 34. C'est le point central de la compréhension de l'énoncé…

---

[4] Enseignants prenant en charge des élèves de 6 à 12 ans.

[5] Nous présentons succinctement ce cadre à la section 4. Succinctement, la recherche menée par le CREM met en évidence quelques « stades » dans la construction du concept d'aire : la perception qualitative de l'aire ; la quantification d'une aire ; la numérisation de l'aire ; le calcul de la mesure de l'aire.

Constatons d'emblée que ce problème de pavage ne fait pas appel à une « mesure » d'aire et que le concept d'unité de mesure commune n'est pas nécessaire pour arriver à la solution. Par contre, il est nécessaire de constater « l'équivalence » entre un carré et deux triangles ; ce qui a pour conséquence que le nombre de pièces augmente de un chaque fois que l'on partage un carré en deux triangles. Cette constatation peut être implicite chez les élèves qui procèdent au hasard et adaptent ensuite leurs choix. Elle semble explicite chez ceux qui procèdent de manière progressive pour s'approcher des 34 pièces en remplaçant un carré par deux triangles et faisant ainsi augmenter le nombre des pièces un à un. Elle peut être considérée comme intégrée chez ceux qui calculent d'avance le nombre de carrés à remplacer.

L'analyse *a priori* se poursuivait en indiquant un usage possible de tableaux tels que celui présenté ci-dessous :

- Pour la table carrée, on peut faire successivement plusieurs hypothèses sur le nombre de pièces carrées et sur le nombre correspondant de pièces triangulaires permettant de compléter le pavage, et vérifier s'il y a effectivement 34 pièces, avec un tableau comme celui-ci :

carrés	*24*	*23*	*22*	*21*	*20*	*19*	*18*	*17*	***16***	*15*
triangles	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*	*14*	*16*	***18***	*20*
total des pièces	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*	*31*	*32*	*33*	***34***	*35*

jusqu'à retenir la solution : 16 morceaux carrés et 18 triangulaires.

L'analyse des copies d'élèves montre que ce type de tableau n'a été utilisé par aucune classe. On peut donc s'interroger sur la manière d'introduire cet outil de résolution dans les classes de CE2 et de CM1.

Au niveau de l'analyse statistique des résultats, ce problème obtient 1.5 de moyenne[6]. Pour les classes de CE2 (329), près de 50% de celles-ci ont obtenu 0 point. Au niveau du CM1 (414 classes), 30% des classes obtiennent 0 point et 36% obtiennent 4 points.

Les deux versions du problème « *La rosace de Julie* » étaient dévolues aux catégories 3,4 (CE2, CM1) et 5,6 (CM2, 6e). Ce problème, quelle que soit sa version, fait intervenir les décompositions et les recompositions de formes tout comme dans le problème précédent. Cependant, l'utilisation d'une unité de mesure commune est cette fois nécessaire.

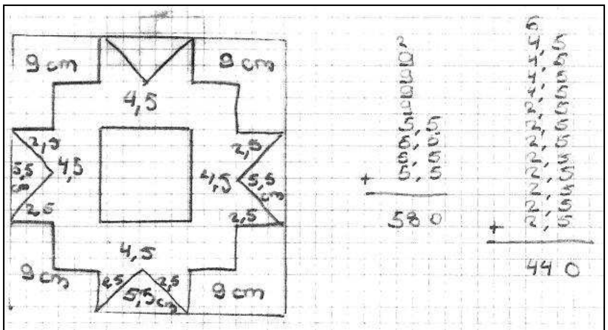
[6] Les problèmes du RMT sont évalués à partir d'un dispositif sur 4 points maximum : 0 correspondant à l'incompréhension du problème, 4 à la réponse correcte avec des explications ou des justifications complètes, 3 à la réponse correcte avec des explications ou justifications incomplètes. Les notes 1 et 2 correspondent souvent à des réponses incomplètes ou à des erreurs de calculs.

Tab. 1 – « *La rosace de Julie* »

	Copies belges		
cat 3	19	Moyenne	**1.83**
		Mode	Ind.
		Écart-type	**1.57**
cat 4	13	Moyenne	**1.63**
		Mode	**0**
		Écart-type	**1.69**
cat 5	18	Moyenne	**1.25**
		Mode	**0**
		Écart-type	**1.30**
cat 6	28	Moyenne	**2.89**
		Mode	**4**
		Écart-type	**1.59**

Lors de la conception du problème, dans la perspective de le complexifier pour les catégories 5 et 6, les segments qui délimitent des triangles ont été supprimés, de telle sorte que l'unité de mesure commune (les petits triangles rectangles isocèles) ne soit plus directement perceptible. L'analyse des résultats indique que ce problème est moins bien réussi en catégorie 4 qu'en catégorie 3 et, à l'inverse, qu'il est moins bien réussi en catégorie 5 qu'en catégorie 6. Plusieurs hypothèses peuvent être avancées pour expliquer ces constats.

Tout d'abord, dans le cursus belge, les notions de périmètre et d'aire sont abordées à partir de la 4e année (cat 4) et approfondies en 5e (cat 5) et 6e primaire (cat 6). L'analyse des copies des élèves montre que c'est particulièrement dans les catégories 4 et 5 que les erreurs sont liées à des obstacles de type épistémologique, c'est-à-dire là où les connaissances liées à ces notions de périmètre et d'aire sont encore mal maîtrisées (figures 1 et 2). En catégorie 3, les élèves ont plutôt tendance à utiliser des procédures de découpage ou d'association, les seules qu'ils ont à leur disposition à ce moment du cursus.
En catégorie 6, les connaissances sur les formes et sur les notions de périmètre et d'aire étant mieux structurées et maîtrisées, les élèves utilisent des procédures associées à ces notions qui sont plus appropriées à la résolution du problème.



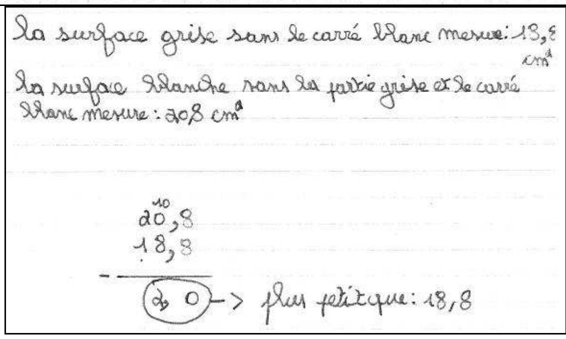


Fig. 2 – Calcul des aires

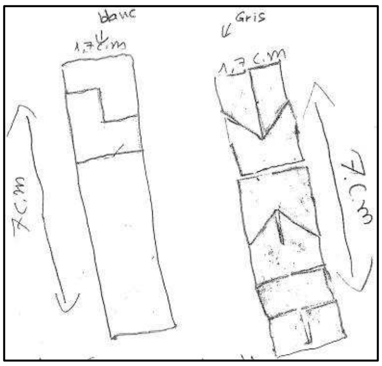


Fig. 3 – Décomposer et recomposer

Fig. 1 - Calcul des périmètres

Enfin, une procédure surprenante (unique sur près de 80 copies) consiste à décomposer la rosace en formes blanches et formes grises, et ensuite à recomposer deux rectangles identiques à l'aide des formes découpées (figure 3).

Notons encore que des erreurs peuvent aussi être expliquées par un obstacle d'ordre ontogénique pour les classes de catégorie 3 notamment. La compréhension de l'association entre la quantité de peinture et la surface à peindre reste problématique pour certains élèves de cet âge (figure 2). Ces élèves associent ainsi un nombre de figures à peindre avec la quantité de peinture, quelle que soit la grandeur de ces figures.

Mais, une autre hypothèse peut aussi être mise en évidence par les étudiants : celle qui consiste à dire que c'est le problème en lui-même qui est plus complexe, que c'est le fait d'avoir introduit les segments délimitant les triangles qui complique la lecture de la figure. De même que ce découpage en triangles induit le comptage de figures non iso-superficielles. À ce jour, nous n'avons pas encore vérifié cette hypothèse.

3.3 Une deuxième série de trois problèmes

Les problèmes précédents ont permis de mettre en évidence la notion d'unité de mesure commune, des procédures différentes pour résoudre des problèmes faisant appel à cette notion (comparaison, correspondance terme à terme, calcul), des erreurs et des obstacles auxquels des élèves des catégories 3 à 6 sont confrontés. La deuxième série de problèmes a pour objet de comprendre en quoi la modification de certaines variables modifie le comportement des élèves. Ainsi, nous proposons trois nouveaux problèmes (voir annexe) faisant également appel à l'unité de mesure commune, mais pour lesquels soit le contexte a été changé (arithmétique) soit des variables ont été modifiées (nombres de figures de base, contexte de la comparaison : géométrie ou arithmétique). Pour cette deuxième série, l'investissement des constats réalisés précédemment permet d'approfondir les savoirs en jeu et d'améliorer la qualité des observations des étudiants.

Deux problèmes peuvent être considérés comme semblables dans la mesure où des procédures semblables peuvent être investies pour les résoudre. Ces problèmes sont « *RMT 2005* » et « *Cartable RMT* ». Des procédures de correspondance terme à terme, de recherche d'unité de mesure commune, de recherche d'éléments communs que l'on peut ne pas prendre en compte, … peuvent être utilisés par les élèves. Du côté des procédures erronées, des similarités existent également, par exemple compter les éléments sans tenir compte de leur « poids » relatif. Force est cependant de constater que le problème situé dans le contexte numérique est mieux réussi. Différents arguments peuvent être mis en évidence pour expliquer cette différence. Nous en proposons trois.

D'abord, le problème des cartables possède moins d'unités différentes (cahier, livre, farde) que le problème des briques (rectangle, carré, triangle, trapèze). Ensuite, sans doute est-il moins complexe pour les élèves de comparer des nombres plutôt que des figures géométriques. Enfin, dans le problème numérique, les rapports entre les différents éléments sont précisés dans l'énoncé. Cela induit très probablement le comportement des élèves.

Dans le cadre de la formation des étudiants, cette première analyse permet de montrer comment faire varier le contexte d'un problème, mais aussi le domaine mathématique dans lequel il s'inscrit, tout en maintenant des démarches de résolution.

Le travail se poursuit par une comparaison des problèmes « *RMT 2005* » et « *Les surfaces de Monsieur Minipot* ». Ceux-ci présentent des situations géométriques. Pour les résoudre, la détermination d'une unité de mesure commune peut être utile. Mais d'autres procédures peuvent être utilisées. Cependant, si dans « *RMT 2005* » la procédure relative à l'unité de mesure commune est induite par le dessin des briques, dans « *Les surfaces de Monsieur Minipot* », l'unité de mesure doit être construite par l'élève, généralement en prolongeant le quadrillage. À partir de quoi, l'unité de mesure indiquée est le carré. Ce qui n'est pas le cas dans « *RMT 2005* »[7].

Pour « *Les surfaces de Monsieur Minipot* », les procédures utilisées par les élèves sont les suivantes :

- comptage des carrés unités avec recomposition de carrés unités à partir de l'assemblage de deux triangles et de l'assemblage d'un triangle et d'un trapèze ;
- de même mais avec une procédure d'extension à un rectangle pour la « voile » du bateau, comptage puis division par deux, assemblage de deux triangles pour former un carré (figure 4) ;

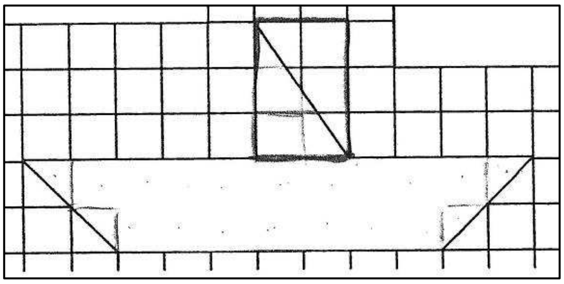
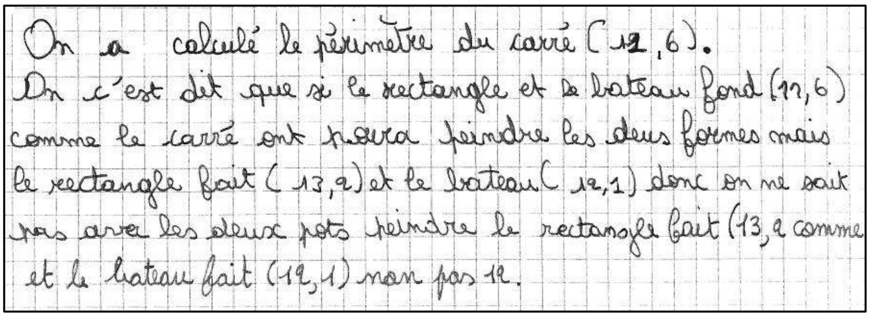


Fig. 4 – Extension à un rectangle

- calcul du périmètre (figure 5).



On a calculé le périmètre du carré (12,6).
On s'est dit que si le rectangle et le bateau fond (11,6)
comme le carré ont pourra peindre les deux formes mais
le rectangle fait (13,2) et le bateau (12,1) donc on ne sait
pas avec les deux pots peindre le rectangle fait (13,2 comme
et le bateau fait (12,1) non pas 12.

Fig. 5 – Calcul du périmètre

Les procédures d'appariement et de comptage de formes sans tenir compte de leur grandeur ne sont pas apparues dans le problème de « *Monsieur Minipot* », alors qu'elles représentaient respectivement 45% et 3% des procédures pour le problème « *RMT 2005* ».

[7] Pour plus de détails sur l'analyse de ce problème, nous renvoyons le lecteur vers l'article de Grugnetti L. & Jaquet F., 2005.

Au-delà de l'analyse des procédures, les résultats pour la catégorie 4 (classes belges) semblent indiquer que le problème « *RMT 2005* » est moins bien réussi (tableau 2). Cependant, notre échantillon est trop petit pour pouvoir l'affirmer. Par contre, les résultats globalisés pour l'ensemble des sections montrent que ce problème peut être considéré comme difficile. En effet, pour les 300 classes de Suisse, Italie, France, Luxembourg et Belgique, les moyennes se situent entre 0,5 et 1,5 en catégorie 3 et entre 0,9 et 1,7 en catégorie 4, alors que la moyenne globalisée est de 1.9 pour « *Monsieur Minipot* ».

Points	MINIPOT			RMT 2005	
	Belgique (11 classes)		ARMT (416 classes)	Belgique (22 classes)	
0	5	45%	31.7 %	13	59%
1	2	18%	13.9 %	2	9%
2	1	9%	7.9 %	2	9%
3	0	0%	22.1 %	1	4,5%
4	3	27%	24.3 %	4	18%
Moyenne	1.45		1.9	1.14	

Tab. 2 – « Les surfaces *de Monsieur Minipot* » et « RMT 2005 ».

4 APPRENDRE À METTRE EN ÉVIDENCE DIFFÉRENTES PROCÉDURES

Ce travail d'analyse comparative permet de montrer l'influence des variables sur les procédures et les résultats des élèves. Il a aussi pour objectif d'apprendre aux étudiants à déterminer et interpréter des procédures utilisées par les élèves.

Le problème « *RMT 2005* » nous semble être un bon problème pour atteindre cet objectif avec de futurs enseignants parce que, d'une part, ces procédures sont nombreuses et, d'autre part, elles sont relativement explicites :

- comptage des « pièces » sans tenir de leur grandeur relative,
- comptage des briques entières après recomposition,
- comptage des briques entières uniquement,
- mesure,
- appariement.

Ajoutons que selon les copies, ces procédures sont appliquées soit aux quatre chiffres de 2005, soit uniquement au 2 et au 5 lorsque les élèves ont compris que les 0 ne changeaient pas la réponse puisque pris en charge de la même manière par les deux enfants (figure 6).

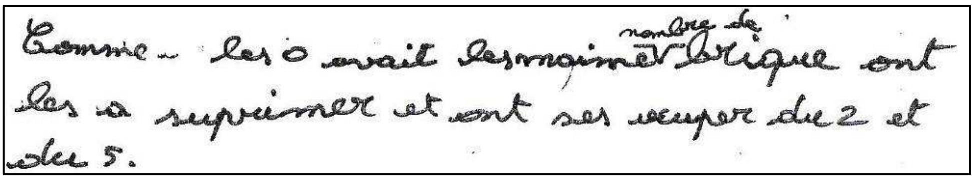

Comme les 0 avait les mêmes nombre de brique ont les a supprimer et ont ses ocuper du 2 et du 5.

Fig. 6 – Justification de l'abandon des 0.

Au-delà de la détermination des procédures d'élèves, la compréhension des erreurs et leur mise en relation avec des obstacles est aussi une activité importante dans la formation des futurs enseignants. Si, dans un premier temps, il est possible de s'appuyer sur les hypothèses des élèves, elles-mêmes énoncées à partir de leurs connaissances, par la suite, pour confirmer certaines hypothèses ou pour compléter celles des étudiants, la référence à un cadre théorique ou à des expérimentations est nécessaire. Un cadre théorique utilisé avec les étudiants est celui établi par une équipe du CREM (2007). Il met en évidence « un fil conducteur relatif aux concepts d'aire et de mesure des aires » constitué de quatre *niveaux* de procédure :

- la perception qualitative de l'aire : comparaisons directe et indirecte d'aires (équidécomposition, équicomplémentarité), rapport entre deux aires ;
- la quantification d'une aire par recouvrement à l'aide d'unités entières ou d'unités entières et de fractions de celle-ci, ou par encadrement ;
- la numérisation de l'aire où la grandeur est remplacée par un nombre ;
- le calcul de la mesure de l'aire à partir de formules s'appuyant sur des longueurs.

Pour les futurs enseignants, en plus de ce fil conducteur, à considérer comme non linéaire, il est essentiel de montrer en quoi la mobilisation conditionnelle de ses composantes est importante. En effet, tout problème relatif à l'aire et à l'unité de mesure commune ne demande pas l'utilisation d'une procédure de calcul à l'aide d'une formule. Celle-ci est par ailleurs parfois plus coûteuse en termes cognitifs qu'une procédure de comparaison simple.

5 PRODUIRE DE NOUVEAUX ÉNONCÉS

Les analyses de problèmes, le retour sur les cadres théoriques et l'observation des procédures investies par les élèves sont autant d'occasions de mettre au point de nouveaux problèmes. Ce travail s'effectue à partir d'hypothèses que les étudiants émettent pour rencontrer une difficulté particulière ou pour vérifier la pertinence ou l'influence d'une variable. Au-delà, c'est la mise au point d'un dispositif d'enseignement de la notion d'aire, associée à celle de périmètre et d'unité de mesure commune qui est questionnée. Par exemple, pour le problème de Monsieur Minipot, plusieurs variantes ont été construites. Nous en présentons quelques-unes ci-dessous.

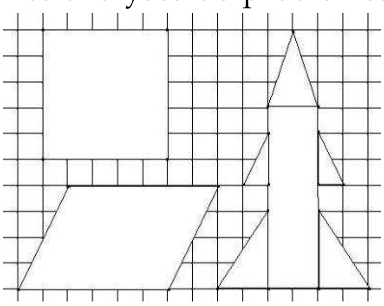


Fig. 7 – Variante 1.

La figure 7 est une variante où les figures (carré, parallélogramme et fusée) à comparer sont composées de formes plus variées que dans le problème initial. La mesure de l'aire de chaque figure ne s'effectue donc plus à partir de carrés et de triangles rectangles isocèles, moitiés de carré. Cependant, comme dans la version initiale, les élèves peuvent mesurer l'aire des trois figures en transformant certaines de leurs parties en rectangle ou en carré, en les décomposant (figure 8), ou en en juxtaposant deux (figure 9).
C'est la perception de la décomposition et de la recomposition de carrés unités à partir de formes diverses qui sont en jeu.

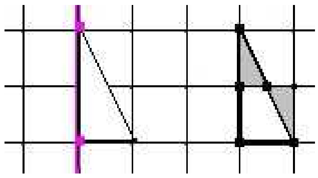


Fig. 8 – Décomposer une forme.

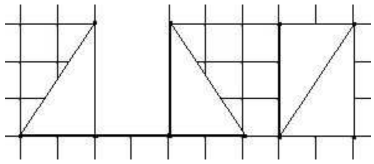


Fig. 9 – Juxtaposer deux formes.

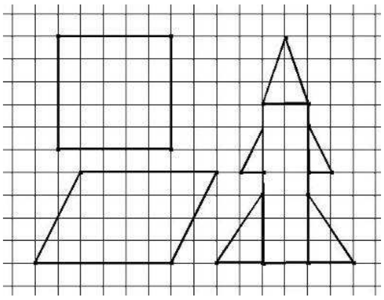


Fig. 10 – Quadrillage

Le problème peut aussi être proposé en montrant le quadrillage (figure 10), faisant apparaître ainsi une des unités de mesure qu'est le carré. Une des hypothèses que l'on peut émettre concernant les procédures investies par les élèves, à l'aune des observations réalisées pour le problème RMT 2005, est que ceux-ci vont plutôt traiter de petites surfaces distinctes plutôt que de juxtaposer des formes comme dans la situation précédente (figure 9). Une des explications est que le quadrillage structure la lecture des figures à partir de petites surfaces isolées et que l'interprétation de la figure, notamment pour la fusée, ne se fait plus à un niveau « globale » mais plutôt à un niveau que l'on pourrait qualifier d'« atomisé »[8].

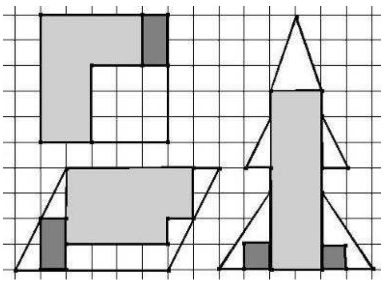


Fig. 12 – Une procédure d'appariement

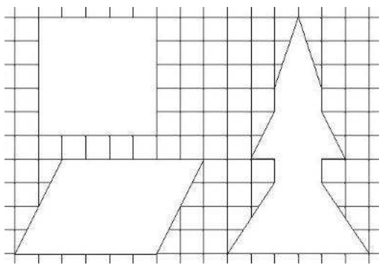


Fig. 11 – La fusée en *une seule pièce.*

De la même manière, la fusée, plutôt que d'être composée de plusieurs formes, peut apparaître en *une seule pièce* (figure 11). La décomposition de la figure est alors entièrement dévolue aux élèves.

Mais l'énoncé du problème peut aussi être modifié. Ainsi, la notion de proportionnalité, bien que presque implicite dans la version initiale, peut être ôtée du problème : « M. Minipot a peint ces trois surfaces. Il souhaite à présent savoir pour laquelle des trois il a utilisé le plus de peinture ». Ce changement d'énoncé peut ne pas modifier les procédures investies par les élèves. En effet, comme dans « RMT 2005 », il est possible que les élèves mesurent l'aire de chacune des trois figures et ensuite comparent les mesures obtenues.

Par contre, ce changement peut amener les élèves à utiliser d'autres procédures, notamment la correspondance terme à terme. Par exemple, dans un premier temps, les élèves peuvent enlever (ou colorier) dans chaque forme le même nombre de carrés unités (figure 12). Ensuite, poursuivre avec des procédures qui peuvent être mixtes, dont la recomposition de carrés accompagnée de leur mise en correspondance.

---

[8] Nous renvoyons le lecteur intéressé par la problématique de la vision et de la lecture des figures géométriques vers, entre autres, le travail du CREM (2007) et l'article de R. Duval (2005).

Le problème « *Décoration* »[9] (en annexe) est une autre variante où la notion de proportionnalité apparaît davantage. Comme pour Monsieur Minipot, seules deux unités d'aire sont utilisées (des carrés et des triangles rectangles isocèles). Les procédures relatives à la notion d'aire sont également semblables. D'autres problèmes du RMT proposent également des situations similaires à celle de Monsieur Minipot , tel que « Coupe et découpe »[10] présenté également en annexe.

Ainsi, une autre piste de travail avec de futurs enseignants est de parcourir les différentes épreuves du RMT et de repérer des problèmes qui concernent les notions d'aire, de périmètre et d'unité de mesure commune. Ensuite, de proposer un arrangement de ceux-ci dans le cadre de l'enseignement et de l'apprentissage de ces notions.

6 CONCLUSION

L'utilisation de problèmes du RMT avec des futurs instituteurs permet de rencontrer plusieurs objectifs de leur formation en mathématique, en didactique et en sciences cognitives. Tout d'abord en demandant aux étudiants de résoudre les problèmes, ceux-ci sont confrontés à leurs propres difficultés, notamment au niveau mathématique. Le recours à un cadre théorique mathématique est alors nécessaire et motivé par les difficultés des étudiants.

Ensuite, l'analyse des copies permet aux étudiants de construire une attitude empathique qui consiste à s'intéresser et comprendre ce que l'autre pense, connaît et est capable d'investir. Cette analyse permet aussi d'amener les étudiants à interpréter certaines erreurs en termes d'obstacles à la résolution de problème et au-delà à comprendre des difficultés d'élèves face à l'apprentissage de certaines notions mathématiques. Ce travail d'interprétation nécessite souvent un retour sur des cadres théoriques didactiques et cognitifs.

L'analyse des problèmes permettent également de mettre au point de nouveaux problèmes à partir d'hypothèses que les étudiants émettent pour rencontrer telles difficultés ou pour vérifier la pertinence de telle variable. Ce travail débouche parfois sur la mise au point de dispositifs d'enseignement de telle ou telle notion.

7 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Bisso, C. & Grugnetti, L. [2008]. Il concetto di area in un percorso quinquennale e il ruolo del RMT. *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*. 8. 167-178. Traduction française, 179-182. ARMT.
- Bisso, C. & Grugnetti, L. [2007]. La costruzione a lungo termine del concetto di area. *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*. 7. 199-216. ARMT.
- Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Noël, G. (Dir.). [2007]. *Impact du*

[9] Voir notamment F. Jaquet (2005), P. Stegen (à paraître) et M. Vernex (2001).
[10] Pour une approche des ces problèmes dans le cadre d'un enseignement de la notion d'aire, nous renvoyons le lecteur, notamment, à l'article de C. Bisso et L. Grugnetti (2008), le concept d'aire avec les problèmes du RMT : un parcours de 5 ans.

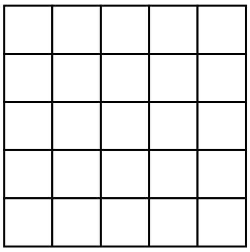
logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages. Nivelles : CREM.
- Duval, R. [2005]. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- Grugnetti L. & Jaquet F. [2005]. D'un concours de mathématiques par classes à la formation des maîtres, *Actes de la COPIRELEM*.
- Jaquet, F. [2005]. Successioni proporzionali e variabili didattiche. L'Educazione matematica. 3.
- Skilbecq, Ph. [2006]. Un problème de géométrie ! *Livret RMT*. 2. 48-63. Section belge du RMT : Nivelles.
- Stegen, P. [À paraître]. Exploitation d'un problème du RMT : Décoration. *Livret RMT*. 5,6. Section belge du RMT : Nivelles.
- Vernex, M. [2001]. Analyse et utilisation du problème Décoration du 9e RMT. *Math-Ecole*. 198. 4-18.

8 ANNEXES

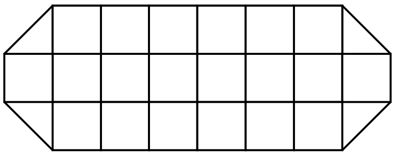
LES TABLES DE TANTE MARIE (Cat. 3, 4 ; problème 4 ; 16e RMT, épreuve 2)

Tante Marie a deux vieilles tables de jardin dessinées ici,

une table carrée :

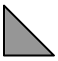


et une table allongée :



Elle décide de recouvrir ses tables avec des pièces de papier plastifié adhésif de deux sortes :

- des pièces carrées, rouges, de la même grandeur que les carrés des tables : 

- des pièces triangulaires, vertes, qui sont des moitiés de carré : 

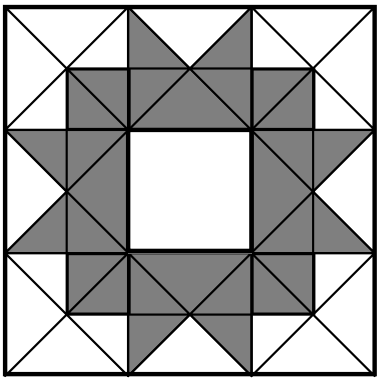
Son travail fini, tante Marie remarque que les deux tables sont entièrement recouvertes et que les pièces sont placées correctement les unes à côté des autres, sans se chevaucher.
Elle remarque aussi qu'elle a utilisé 34 pièces pour chacune des deux tables, soit 68 pièces en tout.

Combien de carrés rouges et de triangles verts tante Marie a-t-elle utilisés pour recouvrir la table carrée ? Et la table allongée ?

Expliquer comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

LA ROSACE DE JULIE (I) (Cat. 3, 4 ; problème 4 ; 15e RMT, épreuve 2)

Julie veut repeindre le cadre de ce miroir en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de peinture blanche ou plus de peinture grise. Bien sûr, le miroir (le carré au centre) ne doit pas être repeint et la couche de peinture aura partout la même épaisseur.

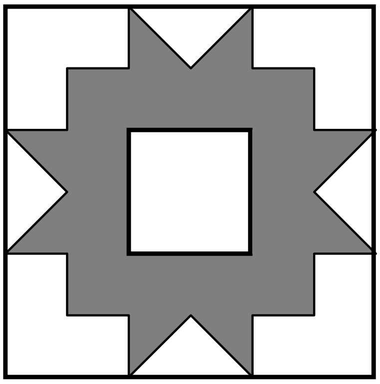


Devra-t-elle utiliser plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris … ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

LA ROSACE DE JULIE (II) (Cat. 5, 6 ; problème 7 ; 15e RMT, épreuve 2)

Julie veut repeindre le cadre de ce miroir en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de peinture blanche ou plus de peinture grise. Bien sûr, le miroir (le carré au centre) ne doit pas être repeint et la couche de peinture aura partout la même épaisseur.

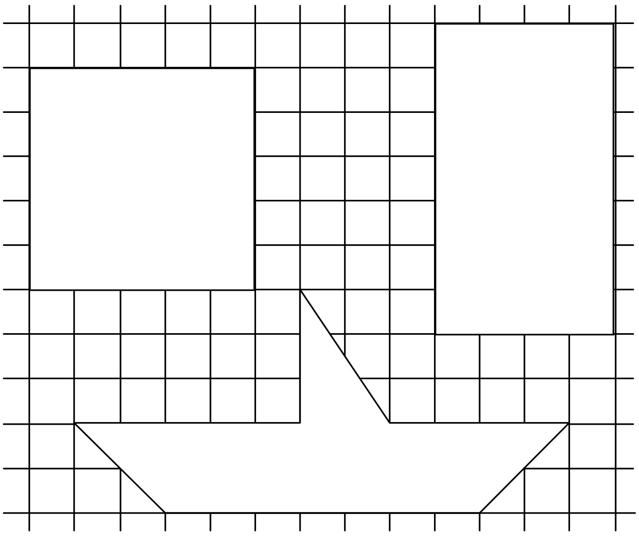


Devra-t-elle utiliser plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris … ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

LES SURFACES DE M. MINIPOT (Cat. 4, 5 ; problème 6 ; 16e édition, épreuve 2)

M. Minipot veut peindre les surfaces dessinées ci-contre en mettant toujours la même épaisseur de peinture.
Il possède trois pots de peinture identiques.
Il en utilise un, complètement, pour peindre la surface carrée.



Avec les deux pots qui restent, et en mettant la même épaisseur de peinture partout, pourra-t-il peindre entièrement les deux autres surfaces ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

CARTABLE RMT (Cat. 4, 5, 6 ; problème 7 ; 16e RMT, épreuve 2)

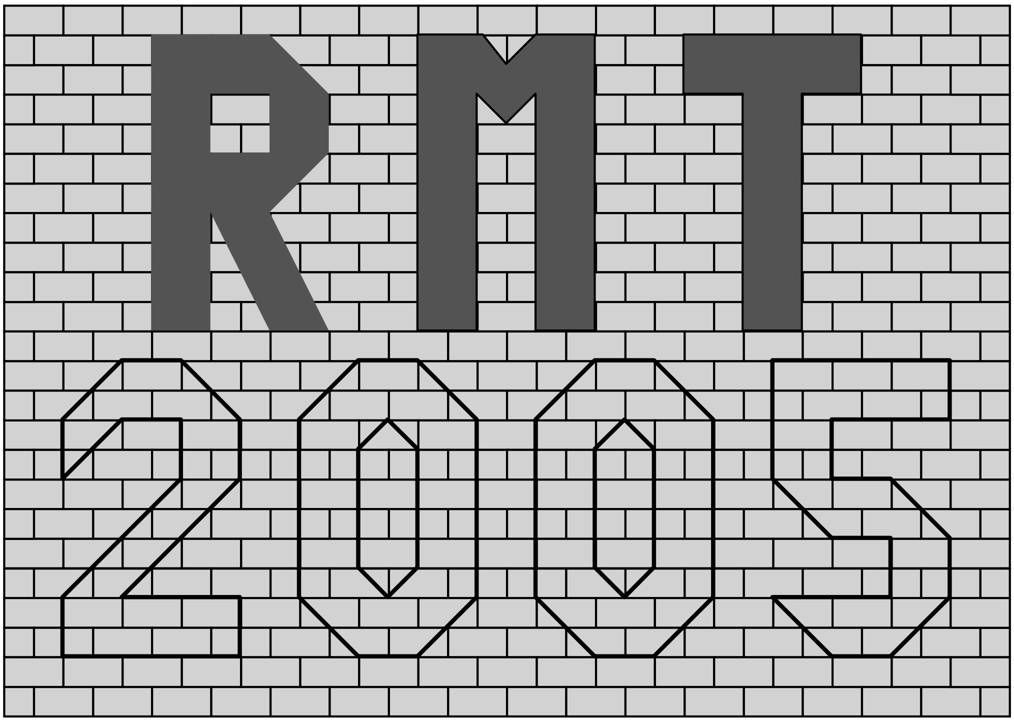
Philippe et Pierre ont acheté le même cartable de la marque RMT. Dans son cartable Philippe a mis 2 classeurs, 6 cahiers et 3 livres de classe. Pierre a déposé dans son cartable, 1 classeur, 8 cahiers et 2 livres.
Pierre et Philippe savent que le poids d'un classeur est égal au poids de 4 cahiers mais est aussi égal au poids de 2 livres.

Qui a le cartable le plus lourd ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

RMT 2005 (Cat. 3, 4 ; problème 2, 13e RMT, épreuve 1)

Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005.
Sophie va peindre, le « 2 » et le premier « 0 ». Marc peindra l'autre « 0 » et le « 5 ».

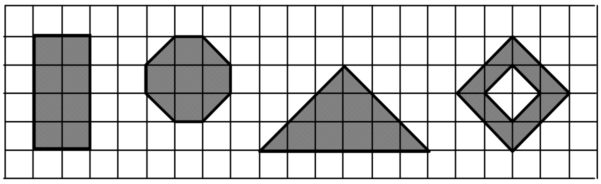


Qui utilisera le plus de peinture ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

DÉCORATION (Cat. 5, 6, 7 ; problème 9 ; 9e RMT ; épreuve 2)

Un peintre a peint ces quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur :

- 18 pots de rouge pour une des figures
- 21 pots de bleu pour une autre figure,
- 27 pots de jaune pour une autre figure
- des pots de noir pour la figure qui reste.

A la fin de son travail, tous les pots étaient vides.

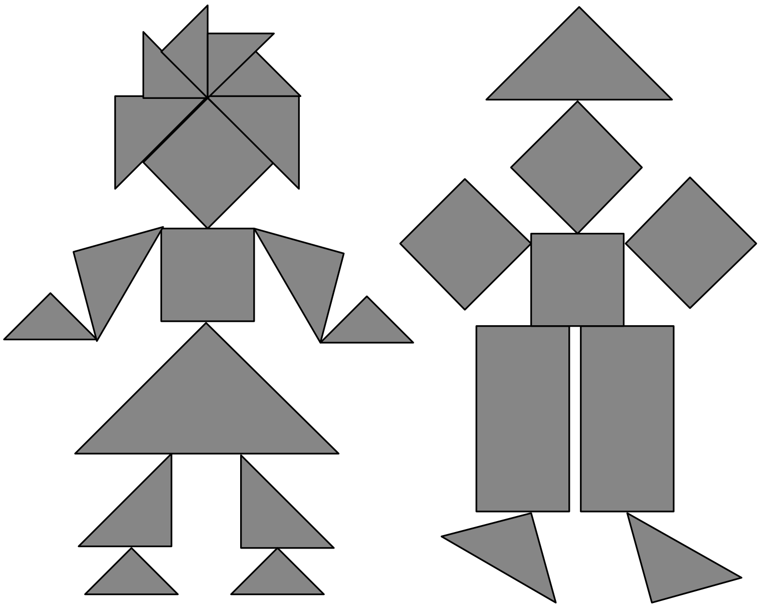
Indiquez la couleur de chaque figure.

Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

10. COUPE ET DÉCOUPE (Cat. 5, 6 ; PROBLÈME 10 ; 15 RMT ; épreuve 2)

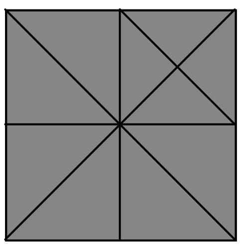
En collant des pièces qu'il avait découpées dans du carton, Aldo a fait un tableau qui représente deux personnages : une fillette à gauche et un garçon à droite.



Selon vous, pour faire son tableau, Aldo a-t-il utilisé plus de carton pour la fillette ou pour le garçon ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Pour préparer les pièces de son tableau, Aldo a utilisé plusieurs feuilles de carton, carrées et de même grandeur.
Il les a pliées une, deux ou trois fois, puis découpées en suivant certains des plis obtenus.
Cette figure montre une feuille carrée de carton et les différents pliages qu'Aldo a pu effectuer :



Atelier B6

« QUESTION D'ENSEIGNANTS, QUESTION D'ENSEIGNEMENT : UN PARTAGE D'EXPÉRIENCE DE FORMATION AVEC DES ENSEIGNANTS DE COURS PREPARATOIRE RELATIVEMENT A LA CONSTRUCTION DE LA NUMERATION »

Joël BRIAND
IUFM d'Aquitaine
Laboratoire DAESL Bordeaux 2
briandjoel@free.fr

Résumé
Cet atelier a pour origine une demande faite par des enseignants d'une circonscription de la banlieue bordelaise. Ces enseignants souhaitaient construire une évaluation « sans brouillage par le dire ou par l'écrit » des acquis en numération au CP (au mois de Mars).
En première partie, les participants à l'atelier sont invités à réfléchir, par groupe, à la conception d'une telle évaluation diagnostique.
La seconde partie de l'atelier rend compte, à l'aide d'une vidéo, de l'évaluation diagnostique construite alors avec les enseignants de la circonscription, évaluation fondée sur une situation d'action (dans un milieu différent des contraintes habituelles de l'écrit et du discours) mise en œuvre et suivie d'un travail de soutien sur 2 mois.
- Pour la première partie, les discussions qui ont suivi chacune des présentations des 7 groupes ont permis d'évoquer certains aspects d'une situation dite de diagnostique.
- Pour la seconde partie, la vidéo montre le scénario suivant : une enseignante donne à chaque élève une étiquette prise sur le tableau des nombres de la classe. Il s'agit de constituer, de la façon la plus rapide et la plus fiable possible, une collection de cubes correspondant au nombre proposé. Pour ce faire, deux boîtes sont mises à disposition : une contenant des cubes « isolés », en vrac, une autre dans laquelle les cubes sont emboîtés par paquets de dix.
Le groupe a observé les démarches de 6 élèves. Partant de ces observations, la discussion qui a suivi a eu pour objet de faire évoluer cette situation d'évaluation vers une situation de remédiation-consolidation..

1 ORIGINE DU PROBLÈME ET TRAVAIL DES PARTICIPANTS

1.1 La question d'origine

Dès le cours préparatoire, les élèves sont confrontés aux différences fondamentales de fonctionnement des deux systèmes de numération : lire le groupe de signes « 18 », en disant « dix-huit » et comprendre que 18 est construit à partir de 10 et de 8 par une addition (10 + 8). Or, il n'est pas rare d'observer des élèves qui lisent « 18 » en énonçant « dix-huit » et simultanément considèrent que 18 c'est 8 et 1 (donc 9 !)[1] .

[1] Plus tard, au cycle 3, certains élèves ont toujours des difficultés à voir dans les écritures chiffrées autre chose que les « chiffres » qui le composent : dans 4 537 par exemple, ils sont capables de repérer que 5 est le chiffre des centaines, mais ne parviennent pas à envisager 5 comme la « trace » de 500 ; pour d'autres, le fait que le nombre 4 537 contient 45 centaines n'est pas encore acquis, or dans un calcul de division tel que 4 537 divisé par 42, il est nécessaire de pouvoir envisager de retrancher 42 centaines aux 45 centaines du nombre 4 537. Par ailleurs, les résultats des évaluations nationales à l'entrée en sixième montrent une persistance des difficultés chez certains élèves à écrire en

Il s'agit donc de se donner les moyens d'observer et d'évaluer dès le cours préparatoire, après les premiers apprentissages, comment les élèves vivent ce passage de la lecture première des nombres à une re-lecture fondée sur la numération que nous appellerons "lecture-numération".
A la demande d'une enseignante de cours préparatoire, nous avons construit une situation d'évaluation sur laquelle nous posons des contraintes que nous allons préciser. Mais avant cela, détaillons le contexte : dans la classe de cette collègue, les élèves suivent la progression définie par un fichier. Les nombres y sont étudiés les uns après les autres de manière linéaire, c'est-à-dire dans leur ordre d'apparition au sein de la suite numérique. Pour les nombres composant la première dizaine, des exercices portant sur des « faits numériques » sont systématiquement proposés. Ils consistent à reconnaître ou produire diverses décompositions additives. L'étude de la deuxième dizaine doit alors permettre aux enfants de percevoir les principes de la numération décimale positionnelle. Les nombres allant de 11 à 19 sont décomposés en une dizaine et en unités.
L'enseignante a déjà perçu que le fait de demander où se situait le chiffre des dizaines, le chiffre des unités ou de le faire souligner dans une évaluation écrite ne constituait en aucune façon une garantie de la compréhension de « l'écriture numération ». En effet les élèves apprennent vite que la réponse à donner à la question « où est le chiffre des unités » consiste à désigner le signe qui est à gauche…
L'enseignante souhaite donc faire une évaluation plus fine (on est en mars) sur les connaissances des élèves et pour cela veut mettre en place une activité qui permettrait d'évaluer l'état des compétences acquises ou non relativement à cette lecture de l'« écriture numération ».
Les contraintes sont donc : construire une situation d'évaluation qui permette, sans brouillage par l'écrit ou le dire, de s'assurer que les élèves sont devenus lecteurs de l' « écriture numération » des nombres.
Dans le cadre de l'atelier, nous avons donc demandé aux participants de réfléchir à l'élaboration d'une telle situation.

1.2 Travail par groupe à la constitution d'une situation d'action dite diagnostique

Nous avons travaillé par groupe pendant environ une heure sur la conception d'une situation d'action qui tiendrait lieu d'évaluation diagnostique. Puis, chaque groupe a présenté le résultat de ses réflexions grâce à une ou deux fiches rétroprojetées. Nous décrivons rapidement les situations des sept groupes.

- G1 développe une situation dans laquelle il s'agit de produire une collection en utilisant des paquets initialement présentés tout faits et déposés dans des boîtes : boîte de 10, boîte de 1, boîte de 5, etc. Les élèves doivent produire une réponse sous la forme de groupement : par exemple : 14 = 12 x 1 + 1 x 2 (c'est-à-dire 12 paquets de 1, 1 paquet de 2). Une contrainte importante serait de disposer d'un nombre limité de paquets dans les boîtes.
- G2 présente une situation basée sur un système d'étiquettes-nombres (disposées aléatoirement). Dans un premier temps, l'élève doit reconnaître des étiquettes et les nommer (d'abord il reconnaît celles qu'il connaît, puis le maître cite des nombres et l'élève doit les reconnaître sur les étiquettes). Dans un deuxième temps, l'élève doit construire des collections à partir des étiquettes. Puis inversement, l'élève doit, à partir d'une collection donnée, désigner une étiquette correspondante.
- G3 propose des jetons soit organisés par boîtes de 10 soit donnés librement. A partir d'une étiquette codée 18, l'élève doit rapporter autant de jetons que le nombre indiqué sur l'étiquette.
- G4 décrit une situation dans laquelle le maître passe à l'élève une commande écrite sous forme chiffrée à propos d'un matériel de type « carrelage » constitué d'objets isolés, d'objets groupés par paquets de 10, d'objets groupés autrement que par paquets de 10 (ex : par paquets de 5) pour contrôler l'effectif des groupements. Le maître évalue la réponse de l'élève. Nombres choisis possibles : 5 ; 18 ; 12, etc. Si l'élève échoue, le maitre demande à l'élève de repérer un nombre et de le nommer ; il peut aussi lui demander de dénombrer une petite collection. Si l'élève réussit, retour à la situation avec la contrainte de ne pas utiliser plus de 9 objets isolés.

---

chiffres des nombres donnés en lettres et réciproquement.

- G5 propose une situation individuelle qui s'effectue par le passage un par un des élèves avec un matériel basé sur des pièces de 1€ ou 10€ et/ou un matériel 'organisé' : allumettes, mains, constellations, etc. La première consigne est : « donne-moi ou montre-moi vite X allumettes/mains, etc. » ; avec X=7, 18, 15, 24, etc. La seconde consigne est : « où est-ce qu'il y a X ? » où la désignation de X peut également se faire sous la forme d'étiquettes où on trouverait par exemple pour X=17 : 1+7 ; 17 ; 10+7 ; 8 ; un billet de 10€ et des pièces de 1€, etc.
- G6 propose une situation de communication (émetteur récepteur). La tâche indiquée à l'émetteur est de réaliser une collection équivalente au nombre-étiquette donné. Le récepteur doit écrire la quantité correspondante à la collection constituée par l'élève émetteur. Les nombres choisis peuvent être 58 ; 67 ; 75 ; 82 ; 89 ; 97 etc.
- G7 décrit une situation qui consiste à aller chercher des pailles pour *n* gobelets (n=18, ou 17). Les pailles sont données par paquet de 10 et par unités.

1.3 Discussion

Les discussions qui ont suivi chacune des présentations des sept groupes ont permis d'évoquer certains aspects d'une situation dite de diagnostique comme par exemple :
- « s'il s'agit d'une situation diagnostique, on ne devrait pas se préoccuper de la validation ».
- « autour de la disponibilité de la connaissance : elle peut être là et ne pas être sollicitée par la situation ».
Plusieurs groupes ont donc construit des situations qui mobilisent le savoir visé. La situation que nous avons ensuite observée est proche de plusieurs propositions faites : groupes G3 ; G4 ; G7.

2 VIDÉO DE LA SITUATION DIAGNOSTIQUE OBSERVÉE DANS L'ATELIER

2.1 Description de la vidéo

La maîtresse donne à chaque élève une étiquette prise sur le tableau des nombres de la classe. Il s'agit de constituer, de la façon la plus rapide et la plus fiable possible, une collection de cubes correspondant au nombre proposé. Pour ce faire, deux boîtes sont mises à disposition :
- une boîte contenant des cubes « isolés », en vrac ;
- une autre dans laquelle les cubes sont assemblés par paquets de dix.

Les élèves réalisent un travail individuel : ils ont donc devant eux deux corbeilles dans lesquelles il y a d'une part des cubes emboités par 10 et d'autre part des cubes seuls. L'élève doit associer à une étiquette une collection de cubes ; l'étiquette en question est bicolore car le chiffre des dizaines est différent du chiffre des unités.

Parmi les variables de la situation, citons :

- Le choix des nombres : proposer 61 nécessite 7 prises pour un élève qui est lecteur de « l'écriture numération » et 61 prises pour celui qui comptera un à un. Proposer 13 nécessite 4 prises pour un élève qui est lecteur de « l'écriture numération » et 13 prises pour celui qui comptera un à un. Le différentiel est plus grand avec le premier nombre qu'avec le second. Un nombre tel que 20 ; 30 ou 40 peut susciter des lectures particulières.
- les paquets de dix sont mis à part ou bien les paquets de dix et les cubes en vrac sont dans une même boîte…

2.2 Bilan de l'observation

	Effectif	Travail observé
Réussite		
Immédiate	5	
Hésitation	1	L'élève commence par construire une barrettes de nombre égal au chiffre des dizaines de son nombre, s'arrête et prend des barrettes de dix.
Hésitation	1	L'élève reconstitue une barrette de dix à laquelle il rajoute des cubes unités. L'intervention de l'enseignante lui permet de trouver la solution.
	Effectif	Travail observé
Échec		
Nombre et somme	3	Les élèves confondent le nombre avec la somme de ses chiffres. (voir illustration pour 32)
Barrettes « variant »	1	L'élève constitue une barrette de nombre égal au chiffre des dizaines (ou au chiffre des unités : voir illustration 45) de son nombre.

Près de la moitié des élèves ayant pris part à l'activité tire le meilleur parti du matériel fourni pour la construction des collections et utilise à bon escient les barrettes de dix pour les dizaines et les cubes isolés pour les unités.

Deux élèves parviennent au résultat attendu après quelques hésitations ou par des voies détournées. Le premier se met à construire des barrettes de nombre égal au chiffre des dizaines de son nombre (ayant l'étiquette « 74 », il se met à former des paquets de 7) avant de s'interrompre et d'utiliser les paquets de dix déjà constitués. Le deuxième élève (E) dispose lui du nombre « 67 ». Il commence par reconstituer une barrette de dix à laquelle il rajoute 7 cubes unités. La maîtresse (M) arrive et s'engage alors un dialogue.

— M : Sur ton étiquette peux-tu me dire ce que représentent les différents chiffres ?

— E : Le 7 c'est les unités et le 6 les dizaines.

— M : D'accord. Et qu'est-ce que c'est qu'une dizaine ?

— E : C'est ça ! (Il montre les cubes organisés en paquets de dix.)

—M : À ton avis, est-ce que la collection que tu viens de construire et l'étiquette que tu as sous les yeux représentent la même chose ? Est-ce qu'on peut les mettre ensemble ?

— E : Non !

— M : Alors je te laisse faire.

Suite à cette brève discussion permettant à l'élève de clarifier la relation qui existe entre la notion de dizaine et l'écriture du nombre « 67 », il va alors réussir sans difficulté l'activité proposée en utilisant très justement barrettes de dix et cubes isolés.

Trois élèves en revanche éprouvent des difficultés dans la construction des collections car ils confondent le nombre qui leur est donné avec la somme de ses chiffres. Ainsi, une petite fille qui a devant elle l'étiquette « 47 », forme une collection de 11 cubes (constituée d'un groupement de 4 et d'un autre de 7). C'est cette élève que nous avons plus particulièrement observée lors de l'atelier.

Un autre élève qui dispose de l'étiquette « 51 » construit cinq barrettes de cinq cubes auxquelles il adjoint un cube unité.

2.3 L'observation de « 47 »

L'élève doit représenter 47 : elle propose 4 cubes emboîtés et 7 unités et dit : « 4 dizaines et 7 unités ». L'enseignante l'invitant à recompter l'ensemble des éléments de sa collection et à dire comment elle écrirait le nombre ainsi obtenu, elle répond sans sourciller : « un 1 et un 1 ». L'enseignante lui demande alors si le nombre qu'elle vient de décrire (11) ressemble à l'étiquette « 47 », ce à quoi elle rétorque : « Non, 11 c'est une dizaine et une unité ! » mais sans toutefois percevoir l'incohérence de ses actions et de ses propos.

2.4 Discussion après cette observation : recherche de remédiation

Extraits bruts de la discussion :
« On devine les prémices de groupement chez cette élève (les 4 cubes emboîtés) mais la règle n'est pas celle de la numération. » (…) « Il faudrait un milieu où justement les collections 47 et 11 ne répondent pas au problème : il faudrait une rétroaction qui invaliderait le 11 ».
Nous proposons ce qui a été mis en place, de façon relativement spontanée, dans cette classe pour que la contradiction apparaisse. Nous avons demandé de replacer l'étiquette (47 pour cette élève) dans le tableau (de la suite numérique) afin qu'elle se rende compte, via la comptine, que le 11 n'est pas 47 (dans le but de faire apparaître une incompatibilité).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

Tableau de la suite numérique

2.5 Apports d'informations

Dans cette classe, cette élève a dû être mise dans cette situation contradictoire à plusieurs reprises pour comprendre la règle d'écriture du nombre. Par la suite, l'enseignante a repris une progression au cours de laquelle des situations d'actions collectives étaient régulièrement proposées aux élèves.

3 CONCLUSION

Nous venons d'étudier le rôle du professeur dans le déroulement d'une situation. Nous avons dit que ses interventions étaient déterminantes pour faire en sorte que ses rappels à la règle du jeu soient perçus comme une invitation à s'aventurer vers d'autres expérimentations. Or, le professeur est souvent bien seul face à l'émergence des premières connaissances et déclarations des élèves lors des apprentissages. Ces premiers signes, manifestations de connaissances utiles pour l'organisation de l'enseignement, ne sont pas répertoriées dans les documents dont le professeur dispose couramment. L'irrésistible ascension du terme de compétence focalise actuellement le système enseignant sur le listage d'items pour effectuer des évaluations. Ces items sont le plus souvent calqués sur l'organisation des savoirs, et ceci dans chaque discipline[2]. Mais les compétences ne sont pas actuelles, elles s'actualisent et se manifestent en performances à l'occasion d'accomplissement de tâches. Nous avons vu que c'est en observant de près les tâches à accomplir que nous pouvons commencer à repérer des manifestations, même faibles, de connaissances, dont nous savons qu'elles sont nécessaires à la construction de savoirs dans un domaine donné. Si ces modèles implicites d'action, ces « briques » élémentaires ne sont pas jugées dignes d'être repérées, c'est une part délicate du métier de professeur qui consiste à faire vivre les connaissances, les savoirs en devenir, ou encore maladroitement formulés, mais qui sont nécessaires à la construction des savoirs établis, qui est ignorée.
Dans un article [Briand 2007] nous répertorions les compétences à construire pour s'approprier la signification de ce qui est convenu d'appeler une « suite additive ». Nous faisions alors la conclusion suivante : *« En focalisant toute l'énergie des enseignants sur un listage de compétences directement issu de l'organisation des savoirs, au détriment de l'observation de manifestations des connaissances des élèves, de règles d'actions […], il y a un risque non négligeable d'égarer les professeurs vers des formes officielles d'organisation naturalisée de savoirs et donc d'évaluations qui ne correspondent pas aux émergences et aux organisations des connaissances des élèves dans une situation donnée. »*
Le but de cet atelier était donc de réhabiliter le rôle de l'enseignant dans la construction d'évaluations fines de l'état des connaissances nécessaires à l'acquisition de la numération au cours préparatoire.

4 BIBLIOGRAPHIE

BODIN A. (2007) Dissonances et convergences évaluatives, *Bulletin APMEP*

BRIAND J. (2007) La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe, *Petit x*, **75**.

GAUTHIER R.F. (2006) Évaluation des acquis des élèves, évaluation de système, où en est-on en France en 2006 ?, *Conférence École Navale de Brest*.

[2] Il est difficile de parler de compétence hors du couple compétence/performance, ou, mieux encore hors de la triade : tâche-compétence-performance.

Atelier B7

UTILISATION DE L'ATELIER JEUX MATHÉMATIQUES DE L'IREM DE TOULOUSE DANS LES ÉCOLES DE L'ACADÉMIE

Jean Pierre Abadie
IREM de Toulouse
njpabadie@orange.fr

Nicole Abadie
IREM de Toulouse

Gérard Martin
IREM de Toulouse

Résumé
L'objectif de cet atelier est de présenter les jeux contenus dans une mallette utilisée par l'IREM de Toulouse lors de diverses manifestations dans l'Académie. Les jeux sont regroupés en quatre catégories :
- jeux numériques (figures magiques, …)
- pavages du plan (puzzles, grilles logiques, …)
- remplissage de l'espace (reconstitution de cubes, de pyramides, …)
- casse-tête.

Après un bref historique de la genèse de « l'atelier jeux mathématiques de l'Irem de Toulouse », les auteurs s'attachent à mettre en évidence les conditions d'utilisation de la mallette et à justifier que les activités proposées sont bien des jeux.
Par la suite, quatre jeux sont présentés en détail, chacun appartenant à une des catégories précédemment citées. Le premier consiste à disposer en triangle les nombres de 1 à 6 pour que la somme des valeurs placées sur chacun des côtés soit la même. Le second consiste à placer des pions de deux couleurs sur un quadrillage carré de façon à ce que deux pions d'une même couleur ne soient disposés sur une ligne verticale, horizontale ou oblique. Le troisième est un assemblage de billes pour reconstituer une pyramide. Enfin, le quatrième jeu est un casse tête visant à séparer des éléments constitués d'une planchette et d'une cordelette.
Outre la présentation d'un jeu, les auteurs s'attachent à décrire les comportements des enfants lors des animations et engagent quelques pistes de réflexion sur l'aide à apporter aux élèves.

1 UTILISATION DE L'ATELIER JEUX MATHEMATIQUES

1.1 Historique

L'Atelier Jeux Mathématiques a vu le jour en l'an 2000, déclarée année mondiale mathématique par l'UNESCO. La Régionale APMEP et l'IREM avaient organisé entre autres des animations grand public (Beaumont de Lomagne, place du Capitole à Toulouse) en proposant quelques jeux et casse-tête à un public très varié qui n'était pas venu pour ce genre d'activité. Vus les lieux et le public visés, le parti pris était de ne retenir que des jeux basés sur des manipulations. C'était, en quelque sorte une illustration de la pensée d'Anaxagore « l'homme pense parce qu'il a une main ». Ces manifestations ont eu un grand succès et ont appelé une suite.

Ces jeux ont été utilisés pour la première fois en milieu scolaire par Jean-François Bergeaut pour la formation des professeurs des écoles de l'Ariège et dans l'atelier maths de son collège.

Les jeux ont été et sont encore regroupés en quatre catégories :
- jeux numériques (figures magiques, …)
- pavages du plan (puzzles, grilles logiques, …)
- remplissage de l'espace (reconstitution de cubes, de pyramides, …)
- casse-tête.

Un premier intérêt pédagogique est apparu immédiatement. Certaines activités sont tirées de jeux papier crayon mais au lieu d'écrire les nombres on utilise des jetons numérotés. En écrivant, les divers essais de solution laissent des traces et peuvent donner un sentiment d'échec, tandis que déplacer un jeton donne l'impression d'améliorer une situation. Des élèves sont ainsi plus actifs sur ces jeux que sur des problèmes semblables en classe.

1.2 Utilisation

Aujourd'hui cinq exemplaires de la mallette (deux écoles, trois école-collège) existent. Au cours de ces dernières années scolaires ils ont été utilisés dans :
des animations grand public comme la Fête à Fermat à Beaumont de Lomagne, la fête de l'ail toujours à Beaumont de Lomagne, et divers festivals de jeux.
des animations en direction des établissements scolaires :
- pendant le Fête de la Science dans le Gers,
- dans le hall de l'Administration de l'Université Paul Sabatier (une semaine en janvier et une semaine en mars)
- à Rodez (invitation de Sciences en Aveyron)
- auprès des étudiants et des professeurs stagiaires de l'IUFM de Foix.
Durant ces animations, c'est surtout des classes de cycle 3 qui sont reçues. Chaque année, lors de ces manifestations, près de 200 classes sont accueillies dont plus de 120 d'écoliers pendant des plages horaires de 1 h à 1 h 30. Nous intervenons surtout pour donner éventuellement des explications sur les consignes, pour valider des réponses ou pour donner des indications pour débloquer une situation. Entre ces activités, nous observons les réactions des élèves. Les remarques qui suivent dans ce texte découlent d'observations faites lors des animations.

des prêts aux établissements scolaires pendant une semaine minimum : une quarantaine en bénéficient dont plus de la moitié d'écoles pendant l'année.

Pour répondre à la demande, nous avons créé une mallette cycle 2 utilisée surtout pour la fête de la science dans le Gers et des prêts aux écoles.

Depuis 2006, l'atelier Jeux Mathématiques est invité au Salon de la culture et des jeux mathématiques à Paris. Il est aussi connu internationalement avec son utilisation dans des camps d'été de lauréats du concours Kangourou et par une conférence atelier à un colloque de l'espace mathématique pan africain en novembre 2008 en Tunisie.

1.3 Les activités proposées sont-elles des jeux ?

Mais tout d'abord qu'est ce qu'un jeu ?

Tout en soulignant la difficulté de le définir, les auteurs qui se sont intéressés au jeu ont essayé de cerner au plus près cette activité.

Roger Caillois dans « les jeux et les hommes » définit le jeu comme une activité :
- libre (le joueur ne saurait être obligé)
- séparée (circonscrite dans des limites de temps et d'espace)

- incertaine (le résultat n'est pas acquis préalablement)
- improductive (ne créant ni bien ni richesse)
- réglée (soumise à des conventions)
- fictive.

Gilles Brougère (université Paris 13 auteur de « jeu et éducation » et de « jouer/apprendre ») ne définit pas le jeu mais donne des critères ou caractéristiques qui permettent d'analyser les situations de jeu. Ces critères sont :
- le second degré (c'est pour de faux, on fait semblant)
- la présence d'une décision (entrer dans le jeu et par la suite prendre une succession de décisions en relation avec les autres joueurs)
- la règle (préalable ou construite avec le jeu)
- la frivolité ou l'absence de conséquence de l'activité
- l'incertitude.

Pour ces deux auteurs la notion de liberté est fondamentale : on ne peut pas jouer sous la contrainte. Les activités proposées sont conformes à la plupart des critères donnés lors d'animations grand public qui est libre de participer ou pas. Par contre, on s'éloigne de ces critères lors des animations pour les établissements scolaires !!! On peut remplacer « jeu » par « activité ludique », « amusement » ou « divertissement » mais cela ne fait que déplacer le problème sans le résoudre.

Pour Michel Criton (président de la Fédération Française de Jeux Mathématiques), auteur de « les jeux mathématiques », c'est évidemment l'activité « résolution de problème » qui est prépondérante.
Il précise quelques sont les conditions pour qu'un problème soit considéré comme un jeu :
il doit être accessible au plus grand nombre, formulé dans un langage courant,
son énoncé doit surprendre, intriguer, poser un défi à celui qui le lit,
la résolution du problème doit pouvoir étonner, distraire celui qui l'entreprend.
Les jeux de l'atelier s'inspirent très largement de ces réflexions.

Qu'en pensent les utilisateurs ?
Les constatations suivantes s'appuient sur des réactions ou des remarques des utilisateurs et non sur une enquête rigoureuse. Les jeux numériques sont plutôt considérés comme mathématiques alors que les autres jeux (pavage du plan, remplissage de l'espace et surtout casse-tête) sont plutôt considérés comme des amusements.

1.4 Présentation de quatre jeux

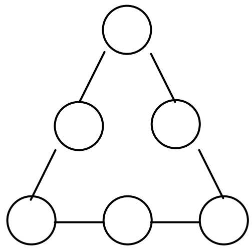
1.4.1 Jeu numérique

Voici trois jeux qui en réalité n'en font qu'un.

Rappel de la consigne :

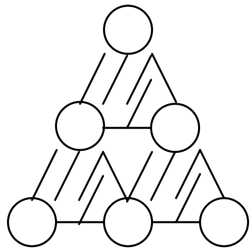
Triangle magique

Placer les nombres entiers de 1 à 6 sur les côtés du triangle de telle façon que la somme des nombres sur chacun des côtés soit la même.



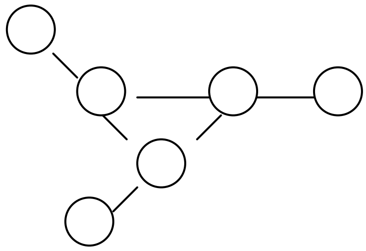
Magie dans trois triangles

Placer les nombres entiers de 1 à 6 de telle façon que la somme des nombres inscrits aux trois sommets de n'importe quel triangle hachuré soit la même.



Six nombres, trois alignements

Il s'agit de placer les nombres de 1 à 6 de sorte que les trois sommes de trois nombres sur chacun des alignements soient les mêmes.



Dans les trois cas six pions numérotés de 1 à 6 accompagnent la consigne.

Dans tous les cas on doit obtenir trois sommes égales en utilisant les nombres entiers de 1 à 6, trois d'entre eux étant utilisés deux fois. La somme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 est égale à 21 qui est divisible par trois. La somme des trois nombres qui sont utilisés deux fois doit aussi être divisible par 3 pour que la somme totale le soit aussi.
Les nombres qui sont utilisés deux fois peuvent être 1, 2 et 3 (somme 6), 4, 5 et 6 (somme15), 1, 3 et 5 (somme 9), 2, 4 et 6 (somme 12). Par contre on arrive rapidement à une impossibilité avec 1,2 et 6 et avec 1, 5 et 6 (c'est une condition nécessaire et non suffisante).

Pour les élèves, il y a :
l'utilisation du calcul mental
la reconnaissance que les cases ne jouent pas toutes le même rôle
la nécessité de répartir les grands nombres et les petits nombres (on ne peut pas mettre 5 et 6 ou 1 et 2 côte à côte dans des cases de poids différents)
Quelles réactions des élèves ? Si c'est leur première activité de l'atelier avec des pions, il y a souvent des demandes d'explication de la consigne. Les élèves ne sont pas dans le schéma « j'apprends, j'applique ». Il n'y a aucune méthode particulière de résolution qui serait directement applicable et rencontrée au préalable en classe. Ils se rendent très vite compte qu'ils peuvent faire autant d'essais qu'ils veulent. On peut faire avec eux un travail d'analyse des essais et des erreurs que certains, peu nombreux, font naturellement.
Ces activités développent des capacités d'ordre méthodologique : élaborer une démarche, faire et gérer des essais, faire des hypothèses et éprouver leur validité.
Une solution peut-elle être trouvée par hasard ? Un calcul de probabilités simple donne une chance sur trente, ce qui n'est pas négligeable.

1.4.2 Pavage du plan

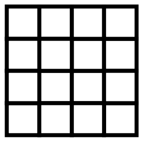


fig. 1

Rappel de la consigne :
Il s'agit de placer les quatre pions bleus et les quatre pions rouges dans les cases de telle façon qu'il n'y ait jamais deux pions de la même couleur sur une ligne horizontale, verticale ou oblique.
Quelques indications :
Pour le premier pion bleu il n'y a que trois cases possibles (fig.2).
Par diverses symétries, on en déduit les résultats pour les autres.

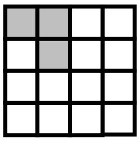


fig. 2

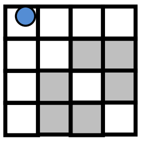


fig. 3

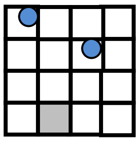


fig. 4

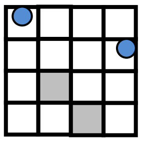


fig. 5

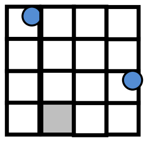


fig. 6

Si l'on place le pion bleu dans un coin, en haut à gauche par exemple, on obtient 6 cases pour placer le second pion (fig. 3). Le deuxième pion étant placé comme sur la fig. 4, il ne reste qu'une case pour 2 pions. Placé comme sur la fig. 5 il reste deux cases mais elles sont sur une même ligne oblique. Enfin placé comme dans la figure 6 il ne reste qu'une case pour deux pions. L'impossibilité pour les autres cases de la fig.3 se déduit par symétrie. On ne peut donc mettre aucun pion dans les quatre coins.

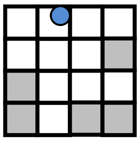


fig. 7

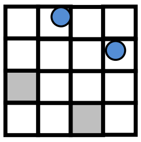


fig.8

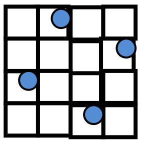


fig. 9

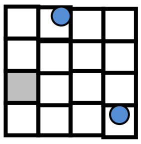


fig. 10

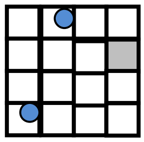
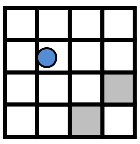
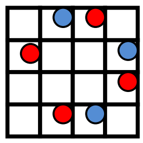


fig. 11

Si l'on place le pion bleu comme sur la fig. 7, on obtient 5 cases pour placer le second pion. Le deuxième pion étant placé comme sur la fig. 8, il ne reste que deux cases pour les deux derniers pions. Ces deux cases répondent à la question
Il ne reste qu'à examiner le cas de deux cases. Dans les deux cas il ne reste qu'une case pour deux pions (fig. 10 et fig. 11).



Il reste à examiner deux cas où l'on obtient rapidement une impossibilité (deux cases pour trois pions).
On obtient finalement la solution ci contre.



Ici la symétrie axiale est très présente. Au CE1, on doit « percevoir et reconnaître quelques relations et propriétés géométriques : …, axe de symétrie, … ». La déduction est aussi présente : cette case est occupée donc je ne peux pas utiliser telle et telle case …

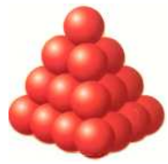
Quelles aides pour les élèves ?
Les élèves commencent avec les deux couleurs en même temps, ce qui n'aide pas pour voir les cases qui conviennent. On peut leur suggérer de faire une couleur après l'autre.
Ils commencent souvent comme sur la fig. 3. Ils obtiennent des impossibilités mais ils ont du mal à remonter au pion de départ.
La recherche par tâtonnement, retour en arrière et essai-erreur est utilisée ici.

1.4.3 Remplissage de l'espace

Rappel de la consigne :

Le tas d'oranges
Il s'agit de reconstituer, avec les quatre éléments, le tas d'oranges qui a la forme d'une pyramide à base triangulaire

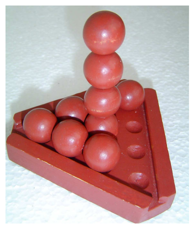
Tirer à boulets rouges
Il s'agit de reconstituer, avec les six éléments, le tas de boulets rouges qui a la forme d'une pyramide à base triangulaire

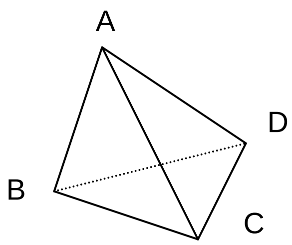


Le matériel se compose de deux barrettes de trois billes et deux barrettes de deux billes dans le premier cas, deux barrettes de quatre et quatre barrettes de trois dans le second.

Quelques indications :

Peut-on avoir la construction ci-contre ?
Dans les deux cas, la bille du sommet repose sur trois billes de l'étage en dessous et sur cet étage, il n'y a pas de bille à la verticale de la bille du sommet. Ce début de construction ne peut pas donner la solution.





Les barrettes de trois (ou de quatre) ne peuvent pas être sur des arêtes qui ont un sommet commun (la seconde barrette aurait une bille de moins). Elles sont situées sur des arêtes opposées : [AB] et [CD], [AD] et [BC], [AC] et [BD]. Dans ce dernier cas l'arête [BD] n'est pas visible sur les représentations données.

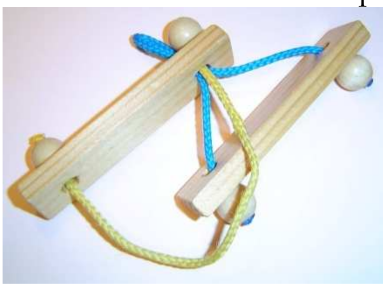
Quelle aide apporter aux élèves ?

On peut demander aux élèves d'observer ce qu'ils ont (les barrettes) et ce qu'ils veulent obtenir (les pyramides représentées dans les consignes). Dans le cas du « tas d'oranges », où sont situées les barrettes de trois sur la photo ? Une fois repérées sur la représentation, on peut leur faire placer approximativement sur la base. Enfin comment combler le vide entre les deux ?.
On peut faire la même chose avec les barrettes de quatre pour « tirer à boulets rouges ».
Nous insistons sur ce que l'on a (données de l'énoncé) et sur ce que l'on veut obtenir (question à résoudre).
D'une façon générale, nous constatons des difficultés en géométrie dans l'espace,. Il n'est pas rare de voir des élèves qui doivent reconstituer un cube faire un assemblage plat qui ressemble plus ou moins à un carré. Pourtant, dès le CE1 on doit « reconnaitre, décrire, nommer quelques solides droits : cube, pavé … »
Dans le primaire, la géométrie dans l'espace reçoit-elle le même traitement qu'en collège ou lycée où elle est souvent le parent pauvre des mathématiques ?

1.4.4 Casse-tête : « la séparation »

Rappel da la consigne :
il s'agit d'obtenir deux éléments séparés formés chacun d'une planchette et de sa corde comme l'indiquent les vues ci-contre. sans bien sûr couper la ficelle.

Pour séparer il est nécessaire de sortir de la boucle formée par la planchette et la ficelle jaune. Comment ?
Il faut d'abord trouver une porte de sortie qui est un trou de la planchette dans lequel passe la ficelle.

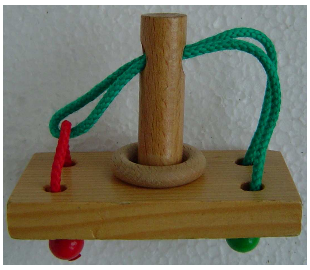


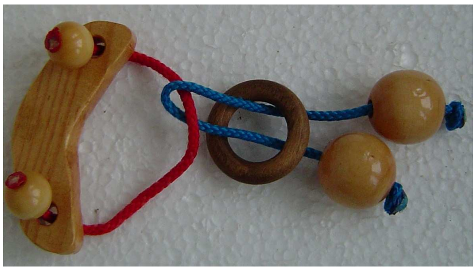
Après avoir passé la ficelle dans le trou, (figure de gauche) on se retrouve dans la situation de la figure de droite où l'on fait passer la ficelle bleue par dessus l'extrémité de la ficelle jaune c'est-à-dire la bille de bois.

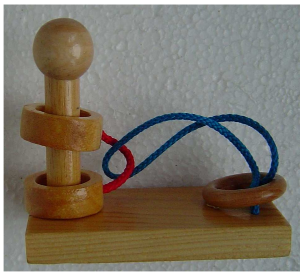
Très souvent, on cherche d'abord à contourner la planchette, c'est-à-dire l'obstacle, alors qu'il faut passer à travers.

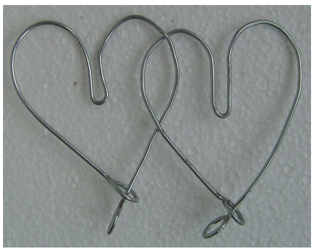
D'une façon générale, les élèves sont amenés à réinvestir un nouveau savoir ou savoir-faire dans d'autres problèmes.

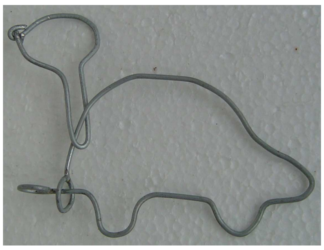
On peut faire la même chose avec des casse-tête, en particulier en trouvant la solution des six ci-dessous qui sont proposés en même temps que le casse-tête précédent. Ils sont basés sur le même principe : ce que l'on croit fermé est en réalité ouvert. On y trouve une boucle de laquelle il faut sortir avec une sortie qui est un trou (par exemple l'un des deux trous de la planchette dans les deux premiers cas).











1.5 Conclusion

Les jeux de cet atelier ne sont pas destinés à introduire de nouvelles notions du cours. Les résultats mathématiques utilisés sont peu nombreux même si certaines activités sont un excellent entraînement au calcul mental pour les écoliers. Certaines énigmes proposées, sans l'habillage de l'atelier (en particulier les pions), peuvent souvent figurer dans la partie exercice d'un manuel scolaire. Cette originalité a pour but de rendre les mathématiques plus séduisantes.

Cet atelier a ses limites : comme il n'y a pas d'écrit, il est difficile d'analyser des productions d'élèves. De plus lors des animations (qui durent de 1 h à 1 h 30), il n'est pas possible de faire le point sur les méthodes utilisées comme par exemple la recherche de la solution par essais-erreurs. Mais on peut, pour certains jeux, en observant les actions des élèves, voir leur démarche. C'est surtout un outil très intéressant qui n'est, pour le moment, pas assez exploité.

Les jeux et énigmes donnent leur chance à tous et ce n'est pas forcément le meilleur en classe qui va trouver le plus rapidement. Ils évitent le blocage de l'écrit pour certains. Les élèves peuvent faire les activités par eux-mêmes, sans risque, en dehors de toute sanction notée.

La résolution d'énigmes permet de changer de cadre, de réagir devant l'inconnu. Rendre le tâtonnement systématique, c'est élaborer une méthode. Le jeu change le statut de l'erreur avec des recherches par essai-erreur. Les élèves proposent parfois des solutions, des méthodes auxquelles on n'avait pas pensé.
Les jeux font plus appel à la logique et au raisonnement qu'a des résultats du cours. Ils apportent un plus aux écoliers pour qui la recherche d'une stratégie est une difficulté, la plupart d'entre eux n'étant pas confrontée à ce genre de situation.

Ils peuvent permettre de montrer que l'apprentissage peut se faire autrement que sous la contrainte, qu'on peut prendre du plaisir à chercher et bien sûr un plaisir encore plus grand à trouver.

Et les enseignants qui accompagnent les élèves ? Nous voyons le pire comme le meilleur. Le pire : des enseignants qui ne s'intéressent pas aux énigmes proposées ou qui valident des réponses fausses. Le meilleur : des enseignants qui veulent réinvestir l'atelier dans leur classe et leur école à qui l'on envoie les fichiers des jeux. Heureusement ce sont les plus nombreux. L'exemple de Caussade est très intéressant : un conseiller pédagogique nous a contactés pour présenter l'atelier à plus de vingt collègues. L'atelier a été emprunté pendant deux mois et a circulé dans les écoles de la circonscription qui se sont réparti le travail pour copier les jeux. C'est cette forme d'utilisation qui est la plus efficace car il permet un travail plus en profondeur.

Dans l'atelier du colloque, après un exposé basé sur le texte ci-dessus, les participants ont pu découvrir les autres jeux proposés. Pour résoudre les énigmes proposées, leur tendance a été de chercher avec méthode sans forcement passer par une résolution théorique à l'aide des mathématiques, d'un papier et d'un crayon, c'est la même démarche que les élèves. La solution trouvée ils réinvestissaient leurs découvertes dans les jeux de même type. Nous avons essayé de leur faire expliciter leur démarche mais comme pour les élèves des classes visiteuses, les recherches ont été passionnantes et une fois le but atteint, une seule envie : relever un nouveau défi.

Ils ont copié sur leur clé USB les dossiers correspondant à ces jeux. C'est un des intérêts de cet atelier qui n'avait pas été mentionné plus haut. Dans des stages de formation, des visites lors d'animations et même des manifestations grand public ce sont plusieurs centaines d'enseignants (de l'Académie et hors Académie au salon de la culture et des jeux mathématiques) qui ont demandé et reçu les fichiers. Ils peuvent être demandés à l'adresse mèl donnée au début. Les trois quarts environ sont instituteurs ou professeurs des écoles. C'est sûrement une lacune mais nous ne leur demandons pas de compte rendu de leur utilisation.

2 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ACL - Les Editions du Kangourou Les malices du Kangourou écoles

APMEP Brochures Jeux n ($n \in$ N et $1 \leq n \leq 8$)

APMEP Lorraine Objets mathématiques (tome 1 et 2)

Gilles Brougère Jeu et éducation L'Hamattan

Gilles Brougère Jouer/apprendre Economica Anthropos

Roger Caillois Les jeux et les hommes Gallimard

Michel Criton Les jeux mathématiques Que sais-je

Mathematice (dossier sur les jeux)

Site : www. Apmep.tlse.free.fr/spip/spip/php?rubrique2

Tangente Jeux mathématiques HS n° 20

L'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole : Où est le Problème ?

à L'I.U.F.M d'Auch

3 4 5 Juin 2009

COMMUNICATIONS

UN DISPOSITIF DE FORMATION CONTINUE « HYBRIDE » : LES PARCOURS PAIRFORM@NCE

Teresa Assude, Pierre Eysseric, Jean-Louis Imbert, Marie-Hélène Lallement-Dupouy
Université de Provence (IUFM) & Université du Mirail – Toulouse (IUFM)
t.assude@aix-mrs.iufm.fr

Résumé
Dans cette communication, nous présentons un travail fait dans le cadre d'un dispositif de formation continue « hybride » (en présentiel et à distance) des enseignants (premier et second degré) lancé par la SDTICE (Ministère de l'Education Nationale). Dans un premier temps, nous présenterons le dispositif « Pairform@nce », et la structure des parcours de formation (www.pairformance.education.fr). Dans un deuxième temps, nous nous placerons en tant que concepteurs d'un parcours de formation *Pairform@nce* concernant le domaine numérique à l'école primaire intitulé : Mathématiques au Primaire : calcul et calculatrices (MPC2). Nous expliciterons les principes sous-jacents à cette conception et montrerons quelques exemples concernant ce parcours. Dans un troisième temps, nous analyserons les différentes étapes de conception de ce parcours en mettant l'accent sur le travail collaboratif entre les enseignants, les formateurs et les chercheurs.

1 LES PARCOURS DE FORMATION PAIRFORM@NCE

Les buts du programme Pairform@nce sont indiqués sur le site plus haut. On peut y lire : « Le programme Pairform@nce est la déclinaison française d'un vaste programme de formation "structurelle" destiné à augmenter l'usage des Technologies de l'Information et de la Communication (TIC) dans l'enseignement, et contribuer ainsi au développement de la "société de la connaissance" ».[1] Ce programme de formation continue des enseignants proposé par le Ministère de l'Éducation Nationale s'appuie sur des parcours de formation qui sont conçus par des acteurs divers : des formateurs, des enseignants, etc., en vue de développer les usages des TICE dans le système d'enseignement en France. Les dispositifs de formation prennent appui sur les parcours et sur le PAF (Plan Académique de Formation) des différentes académies. C'est un dispositif « hybride » car il peut y avoir de la formation à distance (des échanges, du partage des documents, etc.) et de la formation en présentiel. On peut encore lire sur ce site que les enseignants peuvent se former, non seulement aux usages des TICE, mais aussi au travail collaboratif et en réseau, car l'un des buts est de concevoir ensemble une séquence d'enseignement et d'apprentissage pour les élèves, de la mettre en œuvre, et de l'analyser dans le cadre d'un groupe de travail. Ainsi les parcours Pairform@nce sont organisés selon sept étapes, chacune des étapes proposant des activités et des ressources pour les enseignants en formation :

Étape 1 : Introduction à la formation
Étape 2 : Sélection des contenus pédagogiques visés. Formation des équipes
Étape 3 : Auto-formation et co-formation en présence et à distance
Étape 4 : Production collective d'une séquence pédagogique
Étape 5 : Mise en œuvre de la séquence de classe
Étape 6 : Retour réflexif collectif sur la mise en œuvre
Étape 7 : Évaluation de la formation

[1] http://national.pairformance.education.fr/mod/glossary/view.php?id=14&mode=&hook=ALL&sortkey=&sortorder=&fullsearch=0&page=0

Comme on peut le voir, la structure de ces parcours met l'accent sur la production, la mise en œuvre et l'analyse de séquences pour la classe, et sur le travail collectif. Ainsi on peut dire que ce type de parcours porte en germe plusieurs éléments qui peuvent transformer les pratiques des enseignants. Le premier élément est le travail sur les TICE et l'acquisition de compétences du C2I2e qui peut faire évoluer le rapport des enseignants aux technologies numériques vu que, différentes enquêtes montrent que ces technologies sont encore peu utilisées dans les classes (voir par exemple celle de Imbert (2008) concernant l'enseignement primaire). Le deuxième élément est celui du travail collectif. La culture professionnelle des enseignants est souvent une culture où l'enseignant est le maître dans sa classe, où il est seul face à la classe. Le travail collectif entre collègues de conception de séances n'est pas vraiment développé, sauf dans certains cas particuliers (comme participation à des associations, comme Sésamath). Le troisième élément est que l'enseignant n'a pas l'habitude d'aller observer un autre enseignant, et d'analyser ensuite conjointement la mise en œuvre observée, sauf dans des cas particuliers (comme en formation initiale). Ainsi, la structure des parcours Pairform@nce induit des possibles changements dans les pratiques et la culture professionnelle des enseignants. Mais ceci ne veut pas dire que ces changements auront bien lieu. Nous allons présenter le parcours MPC2, et ensuite nous intéresser aux effets de cette production collective d'une séquence pédagogique sur les pratiques des enseignants à partir de déclarations des enseignants.

2 LE PARCOURS MPC2 : MATHÉMATIQUES AU PRIMAIRE, CALCUL ET CALCULATRICES

L'intitulé de notre parcours de formation indique les principaux buts de ce parcours qui s'intéresse à la discipline de mathématiques et plus spécifiquement au domaine numérique à l'école primaire. Le fait que la calculatrice est une technologie numérique qui existe dans le curriculum officiel depuis un certain nombre d'années et qui est peu présente dans le curriculum réel nous questionne. Pourquoi ces résistances aux usages de cet outil ? Nous avons identifié par ailleurs (Assude 2007), un certain nombre de résistances à ces usages. Certaines de ces résistances ne sont pas spécifiques aux calculatrices ni à la France (Assude, Buteau & Forgasz 2009). Un certain nombre de travaux (Kynigos & al. 2007, Hoyles & Lagrange 2009) ont montré que les usages des TICE dans les classes ne sont pas à la mesure des attentes institutionnelles.

2.1 Les objectifs

Face à ces résistances, il nous semble que la formation des enseignants peut être l'un des facteurs qui peuvent changer cet état de fait, en travaillant notamment à partir de ces résistances. Par exemple, l'une de ces résistances est l'opposition entre le calcul instrumenté et les autres types de calcul (mental et posé). Ainsi, notre parcours de formation vise à travailler à partir de ces résistances des enseignants, pour ensuite concevoir des activités et des ressources qui montrent que les différents types de calcul (mental, posé, instrumenté) sont complémentaires et que l'élève peut ainsi apprendre à avoir un rapport plus adéquat au calcul et au champ numérique.
Pour nous placer dans le cadre des principes des parcours Pairform@nce, les objectifs visés par le parcours MPC2 sont les suivants :

- Travailler sur les représentations des enseignants sur les calculatrices
- Connaître des ressources disponibles des différents usages des calculatrices
- Concevoir des séquences d'enseignement où la calculatrice a différentes fonctions pour l'apprentissage du domaine numérique (par exemple être un outil pour améliorer les performances des élèves sur la numération positionnelle)
- Mettre en œuvre ces séquences dans les classes
- Analyser conjointement des séances en classe
- Produire une ressource (texte ou cd-rom) à partir de ce travail

- Apprendre à mutualiser et à travailler avec des collègues d'une manière collaborative sur la conception, l'analyse de séquences d'enseignement

2.2 Les principes

Ce parcours, outre l'appui sur la structure des parcours type Pairform@nce, se fonde sur notre expérience dans la conception d'ingénieries de formation autour des calculatrices et autour des usages de logiciels de géométrie dynamique dans des classes de l'enseignement primaire. Notre postulat de base pour la conception d'ingénieries de formation (Assude 2009) est « systémique et fonctionnel ». Cela veut dire que les ingénieries de formation sont bâties à partir d'un certain nombre de dimensions qui forment un système. Ces dimensions sont les suivantes :

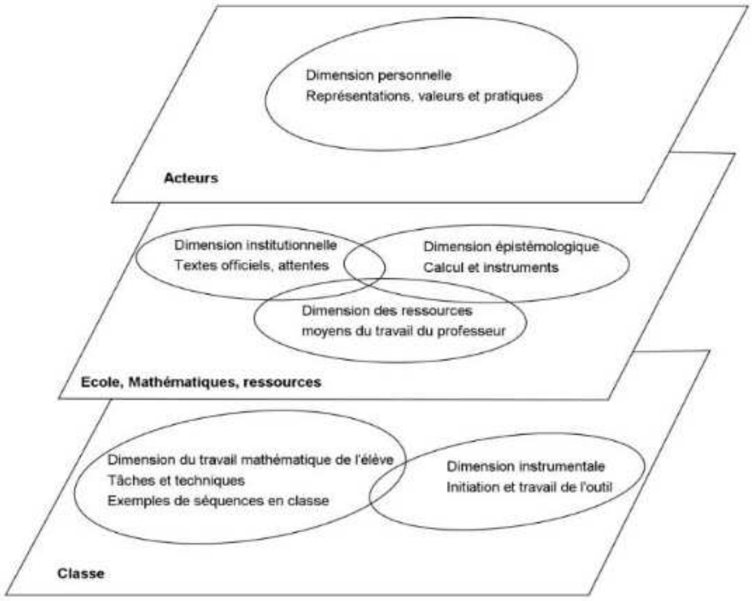
- la dimension épistémologique concernant la nature du travail mathématique ;
- la dimension institutionnelle concernant les attentes de l'institution en ce qui concerne l'enseignement du calcul et du champ numérique avec ces technologies ;
- la dimension praxéologique concernant le travail mathématique proposé aux élèves ;
- la dimension instrumentale concernant l'organisation des processus de genèse instrumentale ;
- la dimension personnelle concernant les représentations, les valeurs et les pratiques des acteurs ;
- la dimension de l'analyse et de la production des ressources ;
- la dimension temporelle prenant en compte la durée nécessaire pour que les pratiques puissent changer.

Chaque dimension est nourrie à la fois par des éléments théoriques et « justifiée » par les fonctions que les différents éléments viennent remplir. Ces fonctions peuvent être liées à des besoins théoriques, à des besoins pragmatiques, à des besoins des acteurs ou à des besoins institutionnels. Ces principes nous permettent de définir des contenus de formation dans le parcours MPC2.

2.3 Contenus de formation

Les contenus de formation sont organisés en trois niveaux : le niveau des acteurs, le niveau de l'école, des mathématiques et des ressources, et le niveau de la classe. Ils sont organisés de la manière suivante :

Nous donnons ici un schéma de l'organisation de ces dimensions



Contenus de formation du parcours MPC2

Nous précisons ensuite dans le parcours ces contenus :

1 - La dimension personnelle

Quelles représentations les stagiaires ont-ils sur les calculatrices et sur leur usage à l'école primaire ? Commencer par travailler sur ces représentations nous apparaît comme un élément important car un certain nombre de stagiaires ont beaucoup de résistances à utiliser les calculatrices en classe. Ce travail peut être fait à partir du questionnaire.

Voir le document "Questionnaire sur les calculatrices"

Une phase collective est conseillée pour mettre en évidence les arguments pour ou contre l'utilisation de la calculatrice.

2 - La dimension institutionnelle

La dimension institutionnelle permet de placer ce qu'on fait avec les élèves par rapport aux attentes de l'institution. Le travail sur les textes officiels, les programmes, et les documents d'application et d'accompagnement apparaît comme nécessaire.

Voir les programmes du cycle des apprentissages fondamentaux

Voir les programmes du cycle des approfondissements

3 - La dimension épistémologique

Il nous semble nécessaire de réfléchir sur les liens entre le calcul et les instruments. En quoi les outils changent la nature du travail mathématique ?

Nous conseillons la lecture et un travail autour de la réflexion épistémologique de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) pilotée par Jean-Pierre Kahane. Voir la référence suivante : Calcul et CREM.

4 - La dimension des ressources

Quelles sont les ressources existantes ? Comme les analyser ? Nous utiliserons essentiellement deux critères pour ces analyses : quels sont les types de tâches utilisant des calculatrices proposés dans les manuels ? Quelles sont les fonctions que cet outil assume dans le travail ?

Nous n'allons pas faire un recensement exhaustif des ressources existantes mais seulement indiquer quelques exemples.

Nous présentons ici un diaporama qui a été produit dans un groupe constitué par des formateurs et des enseignants à l'IUFM d'Aix-Marseille. Voir « titre »

Le « document d'accompagnement sur les calculatrices » associé aux programmes de 2002 est aussi une ressource intéressante à utiliser car des exemples nombreux d'activités y sont présentés. Voir le lien « Utiliser les calculatrices en classe »

Nous renvoyons aussi à documentation indiquée plus loin dans la rubrique « documentation »

5 - La dimension instrumentale

Certains travaux de recherche ont montré que la dimension instrumentale n'est pas assez prise en compte lors de l'intégration des technologies numériques à l'école. L'usage d'un outil n'est pas transparent. Ainsi il nous semble important de faire prendre conscience aux stagiaires de ce problème : comment initier les élèves aux usages des calculatrices ?

Voir un exemple dans le document « titre »

6 - La dimension du travail mathématique de l'élève

Les questions essentielles ici sont : quels sont les types de tâches qu'on propose aux élèves ? Quelles sont les techniques qu'ils utilisent ? Quelle est la fonction de la calculatrice dans le travail mathématique de l'élève ?

Nous présentons ici un autre exemple d'activité pour la classe où le travail mathématique de l'élève inclut l'usage de la calculatrice en lien avec le calcul mental.

Nous avons présenté dans Assude et Eysseric (2008), une ingénierie de formation autour des calculatrices qui prennent en compte ces dimensions. Nous y renvoyons le lecteur. Nous donnons ici seulement un exemple concernant la dimension personnelle décrit en Assude (2009) :

> « *Depuis très longtemps, des travaux en didactique des sciences (moins en didactique des mathématiques) ont montré l'intérêt de partir des conceptions initiales des élèves à propos d'une notion pour ensuite bâtir des ingénieries didactiques à partir de ces conceptions (souvent erronées) (Joshua et Dupin 1993). Les travaux sur les représentations des enseignants (Robert & Robinet 1992)) ont aussi montré que les pratiques des enseignants dépendent de leurs représentations sur les mathématiques, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ces travaux nous incitent à prendre comme variable pour la formation le travail sur les représentations des enseignants à propos des usages des calculatrices. En outre le travail de Favre & Tièche-Christinat (2007) et notre propre travail sur les calculatrices à l'école primaire (Assude 2007) ont permis de mettre en évidence un certain nombre de résistances sur lesquelles nous avons intérêt à nous appuyer pour faire évoluer les pratiques existantes avec les calculatrices à l'école primaire qui restent très limitées. Le but est de travailler à partir du positionnement des acteurs par rapport à cet artefact, et de créer les conditions pour qu'il y ait une adhésion et un engagement.*
>
> *La question travaillée ici sera : quelles représentations les professeurs (ou stagiaires) ont-ils sur les calculatrices et sur leur usage à l 'école primaire ? Ce travail peut être fait à partir d'un questionnaire. Ce questionnaire est constitué de questions ouvertes et de questions fermées à propos des rhétoriques utilisées pour défendre ou non les usages des calculatrices.*
> *Une phase collective est conseillée pour mettre en évidence les arguments pour ou contre l'utilisation de la calculatrice. Le travail proposé par la suite tiendra compte de ce type d'arguments. Par exemple, pour les personnes qui affirment que l'usage des calculatrices empêche les élèves d'apprendre à calculer mentalement, des types de tâches seront proposés pour montrer la complémentarité de ces deux types de calcul : calcul mental et calcul instrumenté.* »

2.4 L'organisation du travail

Le groupe de conception du parcours MPC2 est constitué de quatre formateurs, trois d'entre eux ont déjà travaillé ensemble dans la conception d'ingénieries de formation. Dans un premier temps, nous nous sommes mis d'accord sur les principes qui fondent notre travail, ce qui n'a pas été difficile vu le

travail précédent. L'un de ces principes, qui fonde le travail fait ensuite avec les enseignants, est que la conception de séances doit tenir compte de deux conditions : la première est de montrer la plus value des calculatrices dans le travail mathématique de l'élève ; la deuxième est de montrer l'une des fonctions de la calculatrice dans ce travail, par exemple celle où la calculatrice est un outil pour l'apprentissage de la numération de position, ou celle où la calculatrice est un outil pour la résolution de problèmes[2].
La deuxième étape est celle de la constitution d'équipes de travail (formateurs et enseignants). Trois équipes de travail ont été constituées, chacune pilotée par un formateur : une à Avignon, une deuxième à Banon et une troisième à Tarbes. Nous préciserons plus loin le fonctionnement interne de l'une de ces équipes. Le travail dans chacune des équipes est à la fois un travail de co-formation, et ensuite de conception, de mise en œuvre et d'analyse de séances ou séquences en classes. Cette étape est finalisée par un produit qui peut prendre la forme d'un diaporama ou d'un document texte.
La troisième étape est celle de la mutualisation du travail des trois équipes : chacune des équipes prend connaissance du travail des autres, et le but est d'échanger, de partager mais aussi d'analyser le travail fait par les autres en vue de faire évoluer les documents produits dans la deuxième étape.
La conception du parcours de formation MPC2 tient compte de cette analyse et production de documents, non seulement par les documents eux-mêmes qui doivent figurer dans les ressources du parcours mais aussi par l'analyse des apports et des difficultés de ce travail qui se veut collaboratif. La production et l'analyse de ressources prennent une place importante dans le parcours MPC2 ce qui rejoint la structure et les principes des parcours Pairform@nce.
Le parcours MPC2 peut être vu, d'une manière globale, sur le site national de Pairform@nce. Nous n'allons pas le faire ici. Nous allons présenter l'organisation de l'équipe d'Avignon et analyser les effets déclarés par les enseignants de ce travail collaboratif sur leurs pratiques. Mais avant nous voulons expliciter quelques éléments théoriques et une hypothèse de travail.

3 POTENTIEL DE TRANSFORMATION : HYPOTHÈSE DE TRAVAIL

Nous allons reprendre ici quelques éléments théoriques développés dans Assude & Loisy (2008, 2009) pour aborder la question des changements des pratiques. Nous appelons *potentiel de transformation* d'un parcours de formation (ou d'un dispositif de formation), « *les réponses présentes dans ce dispositif aux différents besoins que nous avons identifiés, qui permettent potentiellement aux acteurs et aux institutions de se transformer de manière à co-construire une autre culture professionnelle qui tienne vraiment compte des technologies numériques* ». Ces besoins élémentaires sont les suivants :

- besoins épistémologiques : en quoi les technologies numériques changent la nature des savoirs et aussi des savoirs enseignés ?
- besoins instrumentaux : quels artefacts sont-ils utiles pour les apprentissages et comment les utiliser ?
- besoins éducatifs et pédagogiques : en quoi les technologies numériques changent les rapports entre les sujets entre eux, entre les sujets et les institutions ?
- besoins didactiques : quelles situations d'enseignement et d'apprentissage pour que les usages des technologies soient pertinentes ?
- besoins documentaires : quelles ressources pour aider les enseignants à changer leurs pratiques ?
- autres besoins professionnels : quels sont les justifications et les valeurs concernant le métier ?

Nous avons fait l'hypothèse par ailleurs, à la suite d'analyses de parcours de formation Pairform@nce, que les étapes de la production, de la mise en œuvre et de l'analyse de séquences d'enseignement a un fort potentiel de transformation. Certes, cette force tient au fait d'échanger, de communiquer mais il tient aussi au fait qu'« *il s'appuie sur les pratiques habituelles des enseignants qui peuvent être questionnées par les*

[2] Nous suivons ici le document d'accompagnement du programme de mathématiques pour l'école primaire de 2002 consacré aux calculatrices. Pour des exemples, voir aussi l'article de Charnay (2008).

autres, par les apports théoriques, par les apports d'exemples de situations pour les élèves. La « mise en question » des pratiques habituelles est ainsi une des conditions du fort potentiel de transformation : mettre les pratiques en question est ainsi une manière de « se mettre en question », d'être disponible à la transformation. Cette mise en question est d'autant plus facilitée si le parcours de formation (ou le dispositif de formation) apporte des réponses satisfaisantes à un plus grand nombre de besoins, et que la distance de ce potentiel n'est pas très éloignée des pratiques habituelles des enseignants. »

4 QUEL POTENTIEL DE TRANSFORMATION ? ANALYSE D'UN CAS

Nous allons partir de cette hypothèse et voir ce qui s'est passé dans le cas de notre parcours MPC2. Quel est le potentiel de transformation de ce parcours déclaré par les enseignants? Nous allons nous appuyer sur le discours des enseignants qui ont participé à la conception de ce parcours à partir d'un premier bilan rapide en réponse à un questionnaire. Nous allons le faire essentiellement à partir du travail fait dans l'équipe d'Avignon.

4.1 Organisation de l'équipe d'Avignon

Le groupe d'Avignon est constitué par quatre enseignantes (deux en CE2 et deux en CM1) et une formatrice. Nous allons d'abord décrire l'organisation du travail commun et ensuite nous donnons des éléments de réponse à l'impact déclaré de ce travail sur leurs pratiques. Le travail en commun est organisé en quatre étapes que nous passons à décrire :

Étape 1 – Documentation (à distance)

Divers documents concernant les fonctions possibles de la calculatrice en classe illustrées par des exemples d'activités ont été envoyés par mail pour info avant la réunion de présentation effective du projet.

Étape 2 – Réunion plénière (4 enseignantes et une formatrice) : choix des thèmes et des modalités de travail. Des décisions sont prises concernant le choix du thème et les modalités de travail. Il s'agit de :

- préparer une séquence d'apprentissage (les grandes lignes) pour chacun des deux niveaux de classe concernés (le CE2 et le CM1) après avoir choisi une ou deux fonctions de la calculatrice et le thème de travail ;
- définir les modalités de travail permettant une mutualisation des pratiques et une co-préparation à distance ;
- préciser les traces écrites communes à réaliser au cours de l'expérimentation.

Étape 3 – Réunions par niveaux : conception, analyse, régulation, choix (alternance présentiel et distance)

Niveau CM1 : les deux enseignantes se sont rencontrées une fois avant la mise en place des séances essentiellement pour la préparation des documents et du déroulement de la première séance. Puis une des deux PE a pris en charge la rédaction des fiches de préparation des deux premières séances qu'elle a envoyées par mail au fur et à mesure, celle-ci a, par ailleurs, pu assister aux quatre séances de la progression de sa collègue. La formatrice et les deux enseignantes se sont retrouvées toutes les trois quatre fois pour observer et analyser à chaud la séance menée par une des deux PE, proposer des aménagements pour réaliser la même séance dans l'autre classe et donner les grandes lignes de la séance suivante.
Après la seconde séance de la séquence, toutes les trois se sont rencontrées en dehors de la classe pour réguler, préparer les grandes lignes des deux autres séances, lister les thèmes sur lesquels qu'il serait bon de travailler en parallèle en calcul mental (comme par exemple les différentes écritures d'un nombre, le calcul mental réfléchi pour le calcul approché, ...) et décrire des activités possibles.

<u>Niveau CE2</u> : les deux enseignantes se sont réunies une première fois pour construire l'évaluation diagnostique puis ont d'abord échangé leur fiche de préparation par mail pour les séances n° 1 (évaluation diagnostique) et n° 2. Une des deux PE a pu assister à la séance 2 chez sa collègue et ainsi grâce à l'analyse à chaud à la suite de cette observation, réajuster ses prévisions pour la mener dans sa classe. A partir de la séance 3, les échanges entre elles se sont faits uniquement par mail, mais il s'agissait davantage de mails informatifs ; la formatrice a été présente à chaque séance chez les deux enseignantes, et elle a pu réguler avec elles au fur et à mesure. En outre, elle a de temps en temps apporté quelques compléments didactiques par mail notamment sur les sens de $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ construits au cycle 2 et sur l'équivalence de « $\boldsymbol{a}$ pour aller à $\boldsymbol{b}$ » et $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

Comme pour le CM1 après la deuxième séance de la séquence, toutes les trois se sont rencontrées en dehors de la classe pour réguler, préparer les grandes lignes des autres séances, mettre en évidence que la calculatrice n'est qu'un outil parmi d'autres pour aider à développer des apprentissages sur la numération positionnelle, et que des séances sans la calculatrice sont nécessaires et font tout autant partie de la séquence.

Étape 4 : Observation et analyse de séances (présentiel)

Cette étape est entrelacée avec l'étape 3. Il s'agit d'aller observer des séances menées par d'autres, d'analyser ce qui s'est passé, d'analyser les productions des élèves.

Étape 5 : Production d'un diaporama à partir des séances conçues, observées et analysées.

Étape 6 : Bilans (distance et présentiel)

Dans un premier temps, chaque enseignante a répondu à un questionnaire pour faire le bilan des apports du travail en groupe (à distance et individuellement).

Une réunion, en fin d'année, est organisée pour faire un bilan collectif du travail réalisé dans les classes c'est-à-dire pour :

- la présentation par les collègues des séances réalisées, difficultés rencontrées et remédiations apportées ;
- la présentation du diaporama réalisé sur le CM1 et des questions autour de sa lisibilité et de sa pertinence pour une formation à distance ;
- les propositions pour la suite.

4.2 Analyse des réponses au questionnaire : quels besoins identifiés ?

Notre analyse se fonde sur les discours des enseignantes tenus dans les réponses au questionnaire pour essayer de voir comment répondre à notre question : quel est le potentiel de transformation déclaré du parcours MPC2, notamment en ce qui concerne les étapes de production, de mise en œuvre et d'analyse de séquences d'enseignement ?

Pour cela, nous allons identifier les besoins auxquels le parcours de formation a permis d'apporter des réponses aux enseignants, et cela à partir de deux éléments : les représentations et les pratiques.

Certains enseignants insistent sur le fait qu'ils ont changé leurs représentations concernant les usages des calculatrices en classe, comme nous pouvons le voir dans les citations suivantes :

« Complètement. Cette expérience m'a permise d'envisager la calculatrice comme un outil de questionnement, voire de découverte de propriétés mathématiques plutôt qu'un outil essentiellement de vérification ».

et

« oui car la calculatrice a été un outil dans l'apprentissage, mais son utilisation a aussi fait ressortir des difficultés en numération pour certains élèves (difficultés qui étaient plus ou moins « cachées » jusqu'alors) ».

Mais ce parcours peut aussi ne pas faire changer les représentations même si l'enseignant trouve un intérêt de ce travail par la dimension didactique :

« Non, mais cela m'a permis d'avoir des séquences très intéressantes ».

Les changements de pratiques, de manière analogue que les représentations, s'ils existent ne sont pas des changements en rupture. Certains insistent sur les différences de pratiques :*« Un regard différent de l'utilisation de cet outil en classe. De plus les enfants apprennent à s'en servir de plusieurs façons sans rechercher immédiatement les résultats exacts ».*

et d'autres préfèrent parler d'une continuité :

« non et oui, dans l'idée de traiter la calculatrice en tant qu'objet technologique aux fins mathématiques ».

comme l'indique l'utilisation du mot « aussi » :

« De ce fait, j'utilise aussi la calculatrice comme un outil dans la construction du nombre et outil pour évaluer ».

Les changements de représentations et/ou de pratiques ne sont pas forcément des « grands changements » mais ce parcours a permis aux acteurs de trouver un certain nombre de réponses à des besoins élémentaires du métier d'enseignant. Nous indiquons ici quelques-uns de ces besoins et quelques-unes des réponses à ces besoins.

Les enseignants ont indiqué des réponses à des besoins didactiques, par exemple en travaillant sur des activités, séances ou séquences où la calculatrice est « autre chose qu'un outil de vérification ». Les enseignants parlent de la calculatrice comme outil de questionnement, comme moyen de découverte de propriétés mathématiques, comme outil dans la construction du nombre et comme outil pour évaluer. Certaines de ces réponses étaient apportées par le parcours, d'autres non (comme celle où la calculatrice est un outil pour évaluer).

Les enseignants ont indiqué des réponses à des besoins instrumentaux, par exemple le fait d'apprendre à se servir de la calculatrice de plusieurs façons, ou alors d'étudier la calculatrice comme outil technologique à des fins mathématiques. Ici encore, certaines des réponses ont été construites pendant le travail de co-conception des séances.

Les enseignants ont aussi mis en évidence des réponses à des besoins documentaires, en mettant l'accent à la fois sur l'importance de la lecture et de l'analyse de ressources déjà existantes et sur la production de ressources (fiches de préparation mais ensuite aussi le diaporama), comme l'indique cette citation :*« des ressources ainsi produites ont été réfléchies, testées et analysées en équipe (avec un spécialiste de la discipline). Elles peuvent s'insérer dans une programmation annuelle quelle que soit la méthode suivie, pour travailler un point précis ».*

Les enseignants ont aussi mis l'accent sur les réponses apportées à des besoins professionnels autres que ceux déjà énoncés, comme par exemple le fait que la calculatrice peut être un révélateur des difficultés « cachées » de l'élève ou encore la calculatrice comme « prétexte » au travail en équipe. Ce travail en équipe est l'un des principes des parcours Pairform@nce. Dans le parcours MPC2, les enseignants retrouvent ces principes car ils parlent de l'importance des échanges d'idées, de partage d'expériences et de connaissances, et aussi de l'importance des questionnements sur la pertinence des choix, sur les adaptations à faire à différents publics, et finalement sur les appropriations collectives qui « supportent » les appropriations individuelles des enseignants.

5 CONCLUSION

Nous avons travaillé avec un petit nombre d'enseignants par rapport à l'ensemble des enseignants pour que nous puissions considérer que nos résultats sont généralisables. Ils nous permettent de faire des hypothèses pour la suite des travaux de recherche sur les parcours Pairform@nce et leurs effets sur les pratiques enseignantes. Dans cette conclusion, nous voulons formuler quelques-unes de ces hypothèses.

L'un des effets du parcours MPC2 que nous pouvons identifier par les déclarations des enseignants est celui de l'élargissement du topos de l'enseignant. Certes, des gestes professionnels comme concevoir, mettre en œuvre ou analyser des activités pour les élèves font partie de la profession de l'enseignant.

Mais l'élargissement du topos de l'enseignant vient ici du fait que l'enseignant peut assumer d'autres fonctions que celle du maître qui agit. Ce qui change c'est le topos de l'observateur, le topos d'aide à l'analyse et le topos de l'aide à l'évaluation. L'enseignant a pu, d'une manière systématique pendant le temps de notre expérience, être celui qui observe et celui qui est observé, celui qui analyse et celui qui aide à l'analyse. Comme le dit l'un des enseignants : « se rendre compte des écueils du déroulement ».
L'élargissement du topos du professeur apparaît comme un des effets du parcours ayant un impact positif sur les pratiques des enseignants. Nous pouvons dire qu'il y a là une ouverture du champ des possibles de l'action didactique du professeur, comme l'indique aussi la citation suivante :

> *« Il n'est pas toujours facile d'évaluer l'efficacité de ce que l'on fait en classe et lorsqu'on est dans l'action, il n'est pas toujours facile de voir la réaction de tous les élèves et de penser d'autres moyens d'action. Il est encore plus intéressant d'être observé par un collègue-spécialiste dans la discipline».*

Le travail en équipe est aussi un moment où peuvent apparaître certaines difficultés. L'une de ces difficultés rencontrées dans l'équipe d'Avignon est d'ordre temporel. Certes, le temps n'est pas élastique et ce type de travail implique un gros investissement en temps qui doit être pris en compte par la formation continue pour créer ainsi des conditions favorables à l'investissement des acteurs dans les changements de pratiques. En plus, une autre difficulté concernant le choix du thème de travail est aussi d'ordre temporel. La difficulté du choix du thème est d'autant plus difficile qu'il s'intègre dans une progression car ce choix se heurte à des valeurs concernant le métier. Il est plus facile de travailler en équipe si cela concerne peu de séances ou simplement quelques activités. Il semble plus difficile de travailler en équipe lorsqu'on veut faire un travail de longue durée et de progression commune car cela implique de se mettre d'accord sur des principes génériques concernant le métier.
Pour finir, nous formulons une hypothèse de travail qui est la suivante : la force du potentiel de transformation d'un parcours de formation (ou d'un dispositif de formation) apparaît assez « forte » si un certain nombre de besoins trouvent des réponses qui puissent satisfaire les acteurs, qui puissent élargir leur topos et ouvrir le champ des possibles de l'action didactique.

6 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Assude T. (2007), Changements et résistances à propos de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques au primaire. *Informations, Savoirs, Décisions et Médiations (ISDM)*, n°29, revue en ligne, http://isdm.univ-tln.fr/articles/num_archives.htm#isdm29

Assude T. & Loisy C. (2008), La dialectique acculturation/déculturation au cœur des systèmes de formation des enseignants aux TIC. *Informations, Savoirs, Décisions et Médiations* (ISDM), n°32, revue en ligne, http://isdm.univ-tln.fr/PDF/isdm32/isdm32-assude.pdf.

Assude T., Eysseric P. (2008), *Conception de scénarios de formation autour des calculatrices*, Actes du XXXVe colloque de la COPIRELEM, CD-ROM.

Assude T. (2009), *Une approche systémique et fonctionnelle de la conception de parcours de formation*. Communication au colloque international EMF 2009, Dakar (avril 2009).

Assude T, Buteau C & Forgasz H (2009), Factors Influencing Implementation of Technology-Rich Mathematics Curriculum and Practices, in C. Hoyles and J.-B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. Springer

Assude T., Loisy C. (2009), *Potentiel de transformation à travers l'analyse de parcours de formation Pairform@nce*, colloque EPAL, Grenoble. Actes en ligne : http://w3.u-grenoble3.fr/epal/dossier/06_act/actes2009.htm

Charnay R (2008), Pour un bon usage des calculatrices à l'école primaire, *Revue en ligne MathemaTice* : http://revue.sesamath.net/spip.php?article143.

Favre J-M. & Tièche Christinat C. (2007), La calculette : un outil médiateur de la relation ternaire dans l'enseignement spécialisé. In Floris R. & Conne F., Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques (pp.95-118). Bruxelles : De Boeck.

Gueudet G, Soury-Lavergne S & Trouche L (2008), *Soutenir l'intégration des TICE : quels assistants méthodologiques pour le développement de la documentation collective des professeurs ? Exemples du SFODEM et du dispositif Pairform@nce*. Communication pour le colloque DIDIREM, Paris, http://www.didirem.math.jussieu.fr/colloque2008

Gueudet G & Trouche L (2008), Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique*, 2(3), 7-33.

Hoyles C. & Lagrange J.-B. (eds) (2009), *Mathematical Education and Digital Technologies: Rethinking the terrain*, Springer.

Imbert J-L. (2008), *L'intégration des TICE dans les pratiques mathématiques à l'école primaire*, Thèse en sciences d'éducation. Université de Provence : Aix-en-Provence.

Joshua S. & Dupin J.J. (1993), *Introduction à la didactique des mathématiques et des sciences*. Paris : P.U.F.

Kynigos, C., Bardini, C., Barzel, B., & Maschietto, M. (2007). Tools and technologies in mathematical didactics. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1332-1338). Larnaca: CERME-5.

Robert A. & Robinet J. (1992), Représentations des enseignants et des élèves. *Répères-IREM*, n°7, 93-99.

Communication C2

LA QUESTION DU SENS DES MATHÉMATIQUES ILLUSTRÉE PAR UNE ÉTUDE DU PARALLÉLISME ET DE LA PROPORTIONNALITÉ DANS LA COUR DE L'ÉCOLE

Eric Laguerre
Laboratoire André Revuz
Université Paris Diderot Paris 7
elaguerre@club-internet.fr

Résumé
Cette communication a été proposée lors du colloque COPIRELEM de Auch en juin 2009.
Elle s'appuie sur un travail en cours sur la question du sens qu'une notion ou qu'une activité mathématique peut prendre au sein de l'enseignement primaire. Le cadre théorique est celui de la Didactique des Domaines d'Expérience.
L'auteur décline d'abord les composantes intérieures et extérieures du sens d'une notion.
Ensuite, un exemple de situation en classe de cycle 3 est développé, en plusieurs séances dont le but est de trouver la hauteur d'un arbre de la cour de l'école. Les difficultés des élèves, de représentation, de modélisation, ou liées à la proportionnalité en jeu sont évoquées.

1 INTRODUCTION

Le but de cette communication qui s'appuie sur un travail en cours est, dans un premier temps, de proposer une réponse à la question du sens qu'une notion ou qu'une activité mathématique peut prendre au sein de l'enseignement primaire. Nous tentons de répondre à la question : en quoi peut consister faire des mathématiques pour des élèves de l'école élémentaire ? Nous choisissons de scruter ce sens multiple tout à la fois à l'extérieur et à l'intérieur des mathématiques en nous plaçant, dans les deux cas, du côté du savoir et de celui de l'élève.
Dans un second temps, il s'agit d'analyser une situation construite et mise en œuvre dont l'objectif est – à partir d'un travail sur l'ombre – d'une part, de faire émerger une relation géométrique, le parallélisme, des propriétés numériques en rapport avec la proportionnalité et, d'autre part, d'apporter une solution à un problème posé à l'extérieur des mathématiques.
Même si nous empruntons ponctuellement certaines notions telles que celles d'obstacle ou de structuration du savoir à d'autres auteurs, notre cadre théorique est celui de la Didactique des Domaines d'Expérience (Boero, 2009 ; Boero & Douek, 2008).

2 CONSTRUCTION DU SENS EN MATHÉMATIQUES

A l'école, la question de la résolution de problèmes est un levier fondamental pour construire ce sens tant du point de vue institutionnel : « *La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages* » (BO n°3 juin 2008).- que du point de vue de la recherche : « *Un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résout pas de problèmes.* » (Brousseau, 1989). D'une façon générale, nous pouvons considérer que ces problèmes peuvent être intra mathématique ou extra mathématique. Dans les deux cas, ils ne correspondent qu'à un élément de la composante intérieure et extérieure du sens d'une notion en mathématiques.

2.1 Composante intérieure aux mathématiques

En ce qui concerne la composante intérieure aux mathématiques du sens d'une notion, il s'agit pour nous de concevoir des points d'appui pour éclairer de l'intérieur des mathématiques un nouveau savoir enseigné à des élèves. Nous nous plaçons donc à la fois du côté de la notion, de l'activité et de l'élève. Nous fondons notre réflexion sur l'idée que c'est en termes de structuration du savoir qu'il est possible de poser le problème du sens d'une notion (Chevallard, 1999). Cette structuration est en rapport avec les liens qui peuvent être tissés entre plusieurs notions d'un même domaine des mathématiques. Ainsi, dans le cadre de notre travail, la mise en relation de la notion de proportionnalité avec celles des échelles et des conversions d'unités qui relèvent toutes du domaine de l'organisation et de la gestion des données participe de leur prise de sens chez les élèves. La structure peut aussi être élaborée en prenant appui sur les liens qui peuvent être établis entre plusieurs domaines des mathématiques. Par exemple, notre texte met en évidence une liaison qu'il est possible d'instaurer entre le domaine des nombres et celui de la géométrie. D'une façon plus attendue, le domaine des grandeurs et mesures constitue une interface entre la géométrie et les nombres.

En second lieu, nous pouvons penser que les mises en fonctionnement logiques peuvent également contribuer à donner du sens aux notions mathématiques. Prenons le principe d'information maximale qui régit nos échanges de la vie de tous les jours. Si une personne dit qu'elle ne porte jamais de cravate bleue, nous en déduirons forcément qu'elle porte des cravates car dans le cas contraire, elle n'aurait pas précisé la couleur. En mathématiques, ce principe n'est plus valable et c'est la raison pour laquelle les élèves éprouvent quelques difficultés à admettre qu'un triangle équilatéral est aussi isocèle et qu'un carré est un rectangle.

En troisième lieu, nous pouvons considérer que certains problèmes intra mathématiques - c'est-à-dire strictement mathématiques et sans habillage - introductifs d'un nouveau savoir peuvent participer de la prise de sens interne aux mathématiques de ce dernier.

En quatrième lieu, en nous plaçant à présent un peu plus du côté de l'élève, c'est en termes d'obstacles (Brousseau, 1983) qu'il est possible de poser le problème du sens du savoir. Ce sens peut être approché grâce au dépassement de conceptions erronées qu'un élève peut avoir *a priori* à son sujet. Par exemple, l'une d'entre elles, très répandue au sujet de l'agrandissement est la suivante : pour agrandir, il faut ajouter. Cela constitue un obstacle à la reconnaissance du modèle proportionnel adapté à la notion d'échelle et parfois appelé « obstacle additif ». Ainsi, le dépassement de l'approche additive de la proportionnalité contribue à l'élaboration du sens de cette notion pour les élèves. De même, ne plus considérer le parallélisme comme une propriété intrinsèque à une droite mais comme une relation entre deux ou plusieurs droites constitue une prise de sens de cette notion. L'idée est de concevoir un enseignement qui favorise, d'une part, la mise en évidence d'éventuelles conceptions et, d'autre part, de permettre aux élèves de les dépasser si nécessaire.

Enfin, le cinquième point est en rapport avec les tâches mathématiques (Chevallard, 1999) qu'une notion permet aux élèves d'accomplir. Faire des mathématiques, dans l'univers scolaire, pour les élèves, revient, d'une part, à établir des procédures personnelles ou expertes efficaces dans la résolution d'un type de problèmes et, d'autre part, à comprendre et à justifier ces procédures. Ainsi, nous pouvons distinguer trois grandes catégories de tâches à l'école résolues à partir de la notion de proportionnalité (Comin, 2001) : la recherche de la quatrième proportionnelle, la comparaison de mélanges comprenant deux composants comme dans l'exemple d'un pot de peinture de couleur orange obtenue en mélangeant du rouge et du jaune, et la double proportionnalité que nous retrouvons dans la situation du nombre de bottes de foin nécessaires pour nourrir un troupeau qui est proportionnel à la fois au nombre de vaches et au nombre de jours.

2.2 Composante extérieure aux mathématiques

Pour ce qui est de cette composante extérieure qui concerne les points d'appui extérieurs aux mathématiques qui favorisent la prise de sens d'une notion, en nous plaçant du point de vue de l'élève, une approche langagière peut contribuer à la construction de ce sens. Ainsi, le connecteur positionnel « et » peut être à une ou à deux places. Si nous disons que « Eric et Nathalie sont amis », il n'y a pas d'ambiguïté car le connecteur est à une place ; Eric et Nathalie sont amis l'un avec l'autre. En revanche, dans la phrase « Eric et Nathalie sont mariés » réside une incertitude car ils peuvent être mariés ensemble ou l'un indépendamment de l'autre. Nous retrouvons cette difficulté en mathématiques chez des élèves dans le cadre de l'étude des droites parallèles, des droites perpendiculaires et de la symétrie axiale. « Les figures F et G sont symétriques » : sont-elles symétriques l'une par rapport à l'autre ou l'une indifféremment de l'autre ? De même, lorsque les élèves considèrent le parallélisme de deux droites (d) et (d') comme une propriété intrinsèque à chacune des droites (d) et (d') et non comme une relation d'équivalence, c'est peut-être parce que le connecteur « et » n'est pas perçu comme étant à une place.
Le sens d'une notion peut être aussi abordé à l'extérieur des mathématiques grâce à un problème extra mathématique posé et vécu par les élèves dans la réalité ou au sein d'une autre discipline. Nous proposons la mise en scène d'un problème en situation qui prend du sens pour les élèves du fait qu'il motive l'enseignement d'une notion mathématique.
Ainsi, dans le but d'introduire les notions de droites parallèles, de proportionnalité et d'échelle, nous proposons à des élèves d'une classe de CM1/CM2 du Val d'Oise le problème de la mesure de distances inaccessibles dans la cour. Comment calculer la hauteur d'un arbre ? L'objectif est de proposer une réponse dans l'espace initial à partir de la mesure des ombres en la modélisant mathématiquement dans un espace plus familier celui de la feuille format A_4.

3 LA DIDACTIQUE DES DOMAINES D'EXPERIENCE (D.D.E.)

Notre démarche de travail dans l'espace dit « réel » nécessite un outil d'analyse pertinent. La D.D.E. (Didactique des Domaines d'Expérience) est un cadre qui permet de traiter de nombreux contextes de façon unitaire. Elle est relative aux relations complexes qui se développent à l'école entre :

- le contexte interne de l'élève – ses conceptions, l'ensemble de ses schèmes, ses représentations, ses émotions, ses analyses –, qui lui permet de faire un repérage des données pertinentes du monde réel, un choix d'hypothèses supplémentaires sur le monde réel si cela est nécessaire, ce qui aboutit à un choix de représentation du monde réel ;
- le contexte interne de l'enseignant – ses conceptions, ses objectifs d'apprentissage, ses représentations, ses émotions, ses attentes – ;
- et le contexte externe – portion de réalité, objet de réflexion, signes, objets, contraintes physiques, discussion, analyse –.

Le fait qu'un modèle puisse constituer une nouvelle réalité nous interroge sur le sens de ce vocable. Comment peut-on concevoir la réalité matérielle et en quoi consiste la modélisation du réel dans ce cas ? Aussi nous proposons à présent une acception du concept de réalité matérielle.
Nous concevons ce concept comme un certain niveau de notre rapport au monde envisagé sous les catégories du contexte et de l'événement. La réalité comprise dans le contexte externe de la D.D.E. est donc perçue selon le binôme contexte/événement. Nous entendons par événement la donnée d'un espace, d'un temps et d'une interprétation de faits observés. Nous comprenons le vocable « contexte » en tant qu'il est décrit par des objets, du matériel et des actions. Modéliser le contexte consiste à modéliser le matériel et l'action initiaux. Modéliser l'événement revient à l'interpréter dans le contexte modélisé ou à faire apparaître de nouveaux événements dans ce contexte qui permettent d'obtenir de nouvelles interprétations de l'événement. La réalité évolue donc au fur et à mesure que le modèle prend forme.
Nous proposons maintenant d'illustrer notre réponse au sens des mathématiques dans le cas particulier d'un problème en situation en rapport avec la mesure de distances inaccessibles (Laguerre, 2008).

4 UN EXEMPLE DE MISE EN SITUATION DANS UNE CLASSE DE CYCLE 3

4.1 Objectifs généraux et progression de la séquence

Nous allons préciser à présent les objectifs généraux des séances et les liens tissés entre elles.
Dans la première séance, les élèves doivent être capables de mettre en évidence une relation entre les mesures des longueurs de bandes de papier collées parallèlement sur des fenêtres et celles de leurs ombres obtenues sur des plans parallèles au sol, ce qui met en œuvre le concept de proportionnalité qui est l'objet de l'étude.
Au cours de la deuxième séance, une situation de réinvestissement de la première doit permettre aux élèves de « trouver une méthode pour calculer la hauteur d'un arbre » en prenant pour référence les mesures des longueurs connues d'un objet, de son ombre et de l'arbre en question. Après la mise au point de cette démarche par les élèves aidés en cela par l'enseignant de la classe et l'expérimentateur, nous nous rendons dans la cour pour procéder aux prises des mesures puis nous revenons en classe pour effectuer les calculs.
La troisième séance permet d'introduire et d'exploiter la notion de droites parallèles en permettant aux élèves de comprendre que les droites, matérialisées à l'aide de morceaux de ficelle, qui joignent un point d'un objet, ici la coupe d'un escalier en carton collée sur une fenêtre, à son ombre projetée sur une feuille de papier sont équidistantes. Le but est d'imaginer que les rayons du soleil sont parallèles pour parvenir à une représentation plane de l'ombre afin d'aboutir, dans la séance qui suit, à une autre démarche de calcul de distances inaccessibles.
La quatrième séance a pour objectif de travailler sur la notion de représentation à l'échelle et de produire une telle représentation pour la situation arbre/objet/ombres. Le but final étant d'effectuer la mesure instrumentée de la hauteur de l'arbre sur le dessin. Un travail sur les conversions d'unités prend place pour obtenir la hauteur réelle de cet arbre. Dans cette situation, la proportionnalité intervient comme un outil pour définir un nouveau concept, celui des représentations à l'échelle et permet la poursuite de la modélisation d'un phénomène physique en l'occurrence « les ombres ».

4.2 Analyse du problème en situation

Nous procédons à une analyse de la situation en termes :
- de contexte interne enseignant pour lequel nous précisons les objectifs d'apprentissage spécifiques visés, le scénario et les tâches,
- de contexte interne élève au regard de leurs conceptions et des connaissances disponibles,
- et de contexte externe lié aux contraintes.

Nous décrivons la réalité selon le couple contexte/événement.

4.2.1 Première séance : « bandes de papier »

Contexte externe

Matériel : le milieu matériel se compose de quatre paires de bandes de papier de 5 centimètres de large numérotées de 1 à 8, une paire regroupant deux bandes superposables. Elles sont placées verticalement et séparément sur des vitres situées dans un même mur, découplées et à différentes hauteurs. Les bandes sont associées de la façon suivante : fenêtre 1 : bandes 50 cm et 10 cm ; fenêtre 2 : bandes 30 cm et 10 cm ; fenêtre 3 : bandes 20 cm et 30 cm ; fenêtre 4 : bandes 50 cm et 20 cm. Les ombres de ces bandes de papier se projettent sur des feuilles fixées sur quatre tables. Les élèves disposent de double-décimètre, de mètres enrouleurs et de crayons à papier. Nous leur remettons une fiche sur laquelle sont inscrites les longueurs de leurs deux bandes de papiers et sur laquelle ils doivent consigner les deux mesures des ombres demandées. Les résultats sont rassemblés au tableau par l'enseignant dans l'ordre croissant des mesures des bandes. Nous pouvons considérer *a priori* et sans l'avoir vérifié que l'organisation des données de la situation sous forme de tableau de nombres peut, d'une part, soulager la mémoire de travail lors du traitement de la situation et, d'autre part, favoriser le développement de procédures heuristiques plus riches. Au moment voulu, pour mettre en évidence la proportionnalité, les élèves ont à leur disposition des calculettes qui représentent alors un support à l'exploration de propriétés numériques.

Environnement : les élèves se répartissent en quatre groupes de six ou sept dans la salle de classe. Chaque groupe se place devant une feuille sur laquelle se projettent les ombres de deux bandes de papier. Il n'y a pas ici d'actions menées par les élèves à modéliser.

Contraintes : les conditions météorologiques doivent être fiables du point de vue de l'ensoleillement, ce qui représente une contrainte plus ou moins forte. Les élèves doivent tenir compte de leur position par rapport au soleil pour tracer correctement les ombres.

Contexte interne enseignant

Objectifs : l'objectif d'apprentissage de cette séance est d'aboutir à une approche scalaire de la proportionnalité. Pour cela, quatre objectifs sont visés. Les élèves doivent constater que :

- plus la bande est « grande » plus son ombre est « grande » ;
- la longueur d'une bande ne dépend ni de sa position sur la fenêtre, ni de sa hauteur ;
- à des bandes de mesures égales correspondent des ombres de mesures égales : la longueur de l'ombre ne dépend pas du choix de la fenêtre (correspondance en égalité) ;
- à la somme de deux mesures de longueurs de bandes correspond la somme des mesures de leurs ombres respectives (conservation en somme).

Les connaissances à mobiliser de la part des élèves lorsqu'ils ont à comparer des mesures concernent la comparaison des nombres entiers et décimaux en particulier la relation d'ordre, la notion de double ou de triple et des relations simples telles que 10 + 20 = 30 ou 20 + 30 = 50.

Tâches : deux binômes de chaque groupe ont pour tâche de tracer les ombres des deux bandes qui se projettent sur une feuille placée sur une table horizontale, de les mesurer au millimètre près - précision plausible dans le cadre de cette situation - et d'inscrire leurs mesures sur une fiche. Une fois les données rassemblées dans un tableau par l'enseignant, l'ensemble de la classe est amené à répondre à la consigne suivante : « *Pouvez-vous faire des remarques au sujet des mesures que vous voyez au tableau ?* ». Les élèves doivent en particulier mettre en relation les mesures des ombres et celles des bandes. Le choix des variables numériques est tel que nous pouvons penser qu'ils peuvent identifier les relations 20 = 10×2 et 50 = 20 + 30 et les relations correspondantes dans la suite des mesures des ombres, au moins de façon approximative, c'est-à-dire en tenant compte des erreurs liées aux mesures et aux calculs effectués à l'aide d'une calculatrice. Les élèves doivent aussi émettre des hypothèses expliquant le fait que certains n'ont pas trouvé exactement les mêmes relations (erreurs, incertitudes de mesures, segments mal tracés etc.). Nous pensons que les erreurs commises à deux ou trois millimètres près seront admises par les élèves et n'empêcheront pas une éventuelle validation d'un résultat qui concernerait les ombres. En effet, le réflexe que nous pouvons retrouver souvent chez de tels enfants est de justement négliger, à tort ou à raison, les chiffres de la partie décimale.

Contexte interne élève

Deux binômes de chaque groupe tracent au préalable les segments représentant les ombres puis la prise des mesures se déroule ensuite sans difficulté. Les données sont consignées dans un tableau visible par tous les élèves. Bien que ces derniers se soient alors retrouvés en classe entière, ils ont continué au début de cette phase à raisonner en groupe. Aussi, aucune remarque n'est apparue chez les élèves des groupes 1, 3 et 4. En revanche, le groupe 2, a émis la remarque suivante : « *La bande 3 est deux fois plus grande que la bande 4* ». Nous l'avons inscrite au tableau et à partir de cet instant, d'autres remarques ont été formulées :

Numéro bande Groupe	1 1	2 1	3 2	4 2	5 3	6 3	7 4	8 4
Longueur bandes	50	10	20	10	30	20	50	30
Ombre sur table	90,8	18	36,4	17,6	55,4	36	91	55

Elève F : « *L'ombre est plus grande à chaque fois, elle est plus grande que la bande.* »
Exp : « *Oui, mais regardez les bandes de papier n'ont pas été prises au hasard* »
Elève A : « *Elles n'étaient pas pareilles* »
Elève F : « *Si, il y en avait qui étaient égales. Deux à chaque fois sont les mêmes et les ombres aussi presque*»
Exp : « *Oui, les bandes de même longueur ont des ombres qui ont la même mesure. Cette mesure de longueur ne dépend pas de la fenêtre ni de la hauteur à laquelle se situe la bande de papier. D'après vous, pourquoi on ne trouve pas exactement les mêmes mesures ?* »
Elève B : « *Parce qu'on n'a pas mesuré pareil.* »
Elève F : « *Ou alors on n'a pas dessiné exactement le même trait.* »
Exp : « *On admet que les mesures des ombres de deux bandes de papier de même longueur sont égales.* ».

L'expérimentateur intervient soit pour relancer les observations émises par les élèves si ces dernières ne correspondent pas exactement à celles attendues (1ère intervention) soit pour reformuler voire compléter leurs remarques (2ème intervention). La question et la conclusion liées à la précision des mesures auraient pu émaner des élèves.

Nous n'avons alors conservé au tableau qu'un exemplaire de chaque couple de mesures et nous avons demandé aux élèves de réfléchir sur la remarque faite par le groupe 2 en leur disant qu'ils pouvaient employer leur calculatrice s'ils le voulaient.

Elève A « *20 et 30 ça fait 50 et les ombres c'est presque pareil…*»
Elève B « *20 c'est 10 fois 2 et pour les ombres on fait fois 2 aussi…* »
Elève A : « *Oui, l'ombre est aussi presque le double* ».

Evolution du contexte interne élève en particulier en termes d'apprentissages : en se fondant sur des ostensifs, les élèves ont mis en évidence les propriétés additives et multiplicatives de la linéarité liée à la proportionnalité des mesures des bandes et de celles de leurs ombres respectives. Les difficultés rencontrées sont en rapport avec les valeurs approchées des mesures. Certains ne pouvaient pas admettre les relations numériques ci-dessus. Pour cela, il a fallu chercher quelques causes des approximations obtenues.

4.2.2 Deuxième séance : « la hauteur de l'arbre »

Contexte externe

Matériel : les élèves disposent de la trace écrite obtenue à la séance précédente à partir de laquelle ils doivent élaborer une méthode de calcul.
Dans un second temps, trois décamètres enrouleurs sont à leur disposition. Des lattes de bois constituent l'objet de référence dont on connaît la longueur (2 m). Trois groupes doivent prendre les mesures des longueurs retenues pour se mettre d'accord, au final, sur ces mesures. Un retour en classe est alors consacré au calcul. Les calculatrices peuvent être autorisées sachant que les élèves doivent malgré tout consigner leurs calculs sur une feuille.

Environnement : la première partie de la séance se déroule dans la classe et la seconde partie dans la cour.

Contraintes : les lattes doivent être placées perpendiculairement au sol. La prise des mesures de longueurs des ombres dans la cour relève de connaissances spatiales particulières en particulier celle du report de l'instrument de mesure.

Contexte interne enseignant

Objectif : l'objectif d'apprentissage visé est de compléter les propriétés de linéarité de la proportionnalité en faisant prendre conscience aux élèves de la nécessité d'un retour à l'unité dans certains cas de calculs d'ombres comme pour 71 cm. En premier lieu, grâce à un réinvestissement des résultats obtenus à la première séance, ils doivent calculer la mesure de la longueur de l'ombre de bandes de papier de 40 cm, 60 cm, 80 cm, 5 cm de long qui auraient été disposées dans les mêmes conditions que les précédentes. Pour cela, les connaissances disponibles attendues de la part des élèves sont liées aux relations de

linéarité. Les trois premiers calculs (40, 60, 80) relèvent d'un tel réinvestissement direct (20×2, 40 + 20, 40×2), le calcul suivant (5) peut être favorisé par la relation $10\div2$. Ce contexte permet de préparer le dernier calcul justement plus délicat (71).
Dans un second temps, cette séance a également pour objectif de mettre en œuvre une méthode de calcul de distance inaccessible déduite des derniers calculs. Si on peut mesurer la hauteur d'un objet vertical et la longueur de son ombre, ainsi que la longueur de l'ombre d'un autre objet vertical trop haut pour être mesuré directement, on peut calculer cette hauteur.

Tâches : il est dit collectivement aux élèves qu'ils doivent s'appuyer sur les résultats précédents pour trouver une méthode aboutissant dans un second temps au calcul de la hauteur cherchée. « *Comment va-t-on pouvoir calculer la hauteur d'un arbre en utilisant les résultats que nous avons obtenus précédemment ?* ». « *Comment va-t-on pouvoir calculer la hauteur d'un arbre en utilisant le fait qu'il y a proportionnalité entre la mesure de la longueur d'un objet, ici une bande de papier, et la mesure de la longueur de son ombre ?* ». Cette tâche constitue un prolongement de celle qui a consisté précédemment à calculer la longueur de l'ombre d'une bande de papier. Mais ces deux tâches se trouvent aussi en rupture du fait du changement du type de longueur inconnue (objet ou son ombre). La seconde consigne qui est donnée aux élèves est de procéder, en trois groupes, à la prise des mesures dans la cour puis d'utiliser ces résultats pour calculer la mesure cherchée.

Contexte interne élève

Evolution du contexte interne élève en particulier en termes d'apprentissages : la situation a fonctionné car les élèves ont rapidement réinvesti la linéarité mise en évidence précédemment en particulier en utilisant ici les relations reliant 20 et 40 ; 40, 20 et 60 ; 40 et 80 ainsi que la relation qui lie les bandes de papier de 20 et 10 cm : $20 = 10\times2$ et $10 = 20\div2$, ce qui leur a donné l'idée de la démarche pour la bande de 5 cm, $5 = 10\div2$. La décomposition de 71 cm en 40 + 30 + 1 a ensuite été produite par les élèves. La difficulté est apparue pour 1 mais le passage par 5 a permis de comprendre la manière dont nous pouvions obtenir 1. Le calcul $10 \div 10$ a émergé après plusieurs échanges entre élèves. La difficulté liée aux calculs sur les nombres décimaux, qui n'étaient pas un objectif d'apprentissage, a été éludée grâce aux calculatrices.

Ces apprentissages ont permis aux élèves de trouver une méthode pour calculer la longueur de l'ombre de n'importe quelle bande toujours en référence au contexte précédent. Lorsque nous sommes revenus sur la question initiale de distances inaccessibles, les élèves, en explicitant le fait que dans la situation ombre/bande en connaissant trois longueurs nous pouvions en calculer une quatrième, ont émis l'idée qui consiste à prendre un objet de référence pour ensuite calculer la hauteur d'un arbre. Ils ont mis en évidence que dans ce cas et contrairement aux bandes de papier, c'est la longueur des deux ombres que l'on connaît.

4.2.3 Troisième séance : « parallélisme des rayons du soleil »

Contexte externe

Matériel : le milieu matériel comprend quatre escaliers découpés dans du carton, fixés sur quatre fenêtres et dont les ombres se projettent sur quatre grandes feuilles de papier posées sur deux tables horizontales. Les élèves disposent, par groupe, d'une grande feuille de papier blanc de format 60×85 déjà mise en place, de doubles décimètres, de feutres pour dessiner le contour de l'ombre, de paires de ciseaux, d'un rouleau de ficelle fine, pour relier les points caractéristiques de l'escalier et leurs ombres, et de rouleaux de scotch pour fixer les morceaux de ficelles.

Contraintes : les contraintes « naturelles » de la situation sont, comme tout ce qui concerne les ombres d'objets, la présence du soleil et une bonne exposition de la salle. L'heure à laquelle se déroule l'expérience est également une contrainte puisque, suivant le fait que le soleil soit rasant ou pas, certaines ombres ne seront pas perceptibles. Le tracé de l'ombre doit être rapidement exécuté. Une autre contrainte est liée au fait que les feuilles sur lesquelles se projettent les ombres ne doivent pas bouger, c'est la raison pour laquelle nous les avons fixées au préalable.

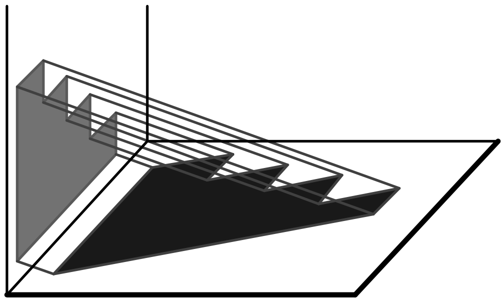
Contexte interne enseignant

Objectifs : l'objectif d'apprentissage est de parvenir, grâce à des échanges entre élèves et à l'ostension, à une approche de l'ombre et au parallélisme des rayons du soleil. D'autres conceptions en rapport avec la course du soleil et son effet sur les ombres ont été étudiées par Douek (1999) qui travaille en s'appuyant sur le cadre théorique de la DDE. Aucune connaissance disponible n'est spécifiquement attendue de la part des élèves.

Pour nous, il s'agit, dans un premier temps, de réfléchir avec eux sur la nature de l'ombre d'un objet : « *Qu'est-ce qu'une ombre pour vous ?* » pour réinvestir ces conceptions dans le cadre d'une modélisation du problème initial.

Dans un second temps, le but est de mettre en évidence le parallélisme des rayons du soleil ce qui permet d'aboutir à une définition de deux droites parallèles comme ayant un écart constant. Il est à noter que cette activité est réinvestie lors de la mise en place de la séance suivante relative à une nouvelle méthode de calcul de distances inaccessibles. Enfin, la question qui suit est posée : « *Pourquoi a-t-on demandé de tracer le contour de l'ombre de l'escalier avant de relier les arêtes avec la ficelle et des bandes de papier avant de les mesurer ?* » dans le but de leur faire comprendre que la longueur de l'ombre dépend aussi de l'heure à laquelle elle est mesurée. Même si plusieurs conceptions, sur lesquelles il ne s'agit pas ici de s'appesantir avec les élèves, sont sous-jacentes, il est tout à fait plausible que celle qui est attendue et qui est en rapport avec le fait que le soleil bouge, soit émise par certains d'entre eux.

Tâches : il est tout d'abord demandé aux élèves de nous dire ce qu'ils savent de l'ombre d'un objet en général.



Matérialisation du parallélisme des rayons du soleil

Ils ont alors pour première consigne, qui est donnée collectivement, de tracer à la règle le contour de l'ombre.

La seconde consigne, qui est communiquée à la classe réunie et après que la première soit exécutée afin de bien les distinguer, est de relier une arête de chaque marche à l'arête correspondante sur l'ombre projetée.

La troisième consigne consiste, pour les élèves, à faire un constat sur ce qu'ils obtiennent. Ils doivent constater que les ficelles qui sont censées représenter les rayons du soleil et qui relient un point de l'escalier à son ombre gardent le même écart (les rayons du soleil sont parallèles).

Les élèves ont à leur charge de tracer l'ombre de la coupe de l'escalier, de relier les points avec de la ficelle et de constater le parallélisme ceci afin qu'ils aboutissent au fait que les rayons du soleil peuvent être considérés parallèles.

Contexte interne élève

Certaines de leurs conceptions au sujet de l'ombre sont apparues :

> Elève A : « *Le soleil, par exemple, il est arrêté par moi c'est pour ça qu'il y a de l'ombre. « C'est quand y a plus de lumière. La lumière, elle passe pas, c'est pour ça qu'il y a l'ombre.* »
> Exp : « *D'accord, mais pourquoi alors ce n'est pas tout noir si le soleil est arrêté ?* »
> Elève A : « *Mais parce que le soleil il passe là quand même. Là lumière elle passe pas mais là elle passe !!* »

L'élève a fait des gestes avec ses deux bras qu'elle a écartés dans un mouvement d'avant en arrière pour signifier que le soleil « passe sur les côtés ».

Pour ce qui est des constats qu'il y avait à faire au sujet des escaliers et de leur ombre, des remarques ont alors été formulées, nous ne donnons que les plus significatives :

« Les ficelles sont placées les unes à côté des autres. »
« L'écart entre les ficelles est tout le temps le même. »
« Les ficelles ne se rencontreraient jamais si on les allongeait. »
« Ah oui, c'est comme parallèle ! »

Les élèves ont éprouvé quelques difficultés à associer les morceaux de ficelle aux rayons du soleil, ce qui est compréhensible car il s'agit d'une première modélisation qui leur est finalement imposée. Mais une fois cette association faite, ils n'ont pas eu de mal à considérer que deux rayons ont un écart constant.

Les observations que nous avons pu faire et les commentaires que nous avons entendus de leur part nous ont incités, avant de leur demander de faire des commentaires mathématiques sur leur production, à leur demander de formuler les difficultés matérielles qu'ils avaient rencontrées. Les uns nous ont dit qu'à un moment le soleil avait disparu, les autres que l'ombre de l'un de leur camarade les avait parfois gênés et enfin les élèves d'un dernier groupe nous ont fait comprendre qu'après avoir placé la première ficelle, ils avaient prédécoupé deux autres morceaux de la même longueur et qu'ils ont dû recommencer car ils étaient trop courts. Les élèves ont bien compris également la raison pour laquelle il leur a été demandé de tracer des contours avant toute chose : « *Le soleil il bouge…* ».

4.2.4 Quatrième séance : « modélisation à l'échelle »

Contexte interne enseignant

Objectifs : l'objectif d'apprentissage spécifique est de réinvestir la notion de représentation à l'échelle qui a été introduite par l'enseignant pour parvenir à un modèle à l'échelle du problème initial de mesure de la hauteur d'un arbre et de trouver ainsi une seconde méthode de résolution du problème. Les connaissances disponibles attendues de la part des élèves sont celles mises en évidence lors de la troisième séance (ombre et rayons du soleil parallèles) et la notion de représentation à l'échelle qui leur est proposée.

Dans un premier temps, nous attendons de cette séance que les élèves parviennent à schématiser la situation dans le plan grâce à une représentation de l'objet de référence, de l'arbre dont on cherche la mesure de la longueur et de leurs ombres respectives sans se soucier des longueurs exactes pour le moment. Sur ce schéma, les élèves doivent faire apparaître deux rayons du soleil parallèles. Dans un second temps, le but est de proposer une représentation à l'échelle de cette situation permettant d'obtenir la longueur à l'échelle du segment représentant l'objet dont on cherche la hauteur. Il s'agit alors d'une modélisation du problème qui permet d'aboutir à une seconde méthode de résolution de la question initiale de mesure de distances inaccessibles dans le méso-espace réinvestissant la définition des droites parallèles.

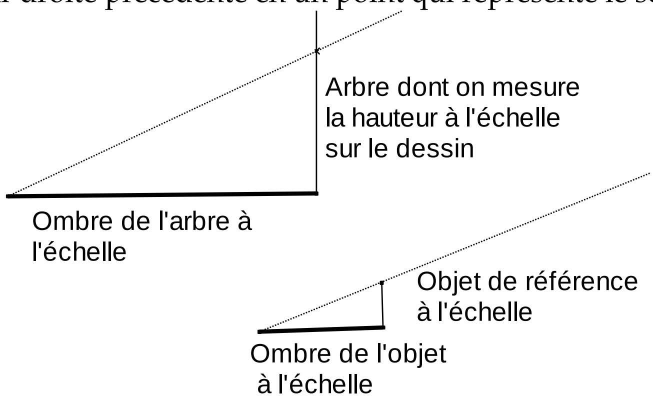
Tâches : premier temps :

Les élèves doivent répondre aux questions suivantes :

- Comment va-t-on représenter de façon simple sur un dessin, l'arbre, l'objet de référence et leur ombres ?
- Que doit-on représenter en plus des ombres et des objets ?
- Décrire le schéma en fonction des représentations de l'arbre, de l'objet et de leurs ombres.
- Proposer des dessins accompagnés de leur programme de construction afin de savoir si le segment représentant l'arbre n'a pas été obtenu après calcul de sa longueur ou s'il a été produit après coup grâce au tracé d'une droite parallèle.

Un ordre de construction possible est le suivant.

Construction à l'échelle de deux segments dont les supports sont perpendiculaires représentant l'objet de référence et son ombre.
Tracé d'un rayon du soleil passant par les extrémités de l'objet et de son ombre.
Construction à l'échelle de l'ombre de l'arbre et d'une demi droite perpendiculaire à l'ombre.
Construction de la parallèle au premier rayon passant par l'extrémité de l'ombre de l'arbre.
Cette droite coupe la demi-droite précédente en un point qui représente le sommet de l'arbre.



Modélisation de la situation

Second temps :
Les élèves doivent calculer les mesures des longueurs à l'échelle à l'aide de calculatrices.

Contexte externe

Nous allons ici nous centrer sur une approche de la réalité en termes de contexte et d'événement à modéliser ce qui n'était pas le cas jusqu'à présent.

Contexte :

environnement : la cour de l'école ; matériel : un arbre et un objet de référence ;
action : le soleil agit et fait apparaître les deux ombres.

Il s'agit, pour les élèves de représenter ce contexte aidé pour cela par l'enseignant, ce qui correspond à la première partie de cette séance.

Evénement :

lieu : dans la cour
instant : après avoir travaillé sur les bandes de papiers et sur une schématisation de la situation ;
interprétation d'un fait : les mesures de longueur d'un objet et de son ombre sont proportionnelles.

A partir de ce constat, les élèves, aidés par l'enseignant, doivent modéliser le contexte précédent à l'échelle pour calculer ensuite la hauteur de l'arbre.

Organisation et matériel :

En ce qui concerne la première partie, le travail est commencé en petits groupes. Chaque groupe doit mettre au point une représentation de la situation qu'il expose à l'ensemble de la classe. La classe entière doit ensuite s'accorder sur le schéma qui peut être retenu. L'enseignant joue le rôle de régulateur. Il peut aussi intervenir en posant des questions sur la forme des schémas proposés par les élèves. La représentation schématique doit faire apparaître le fait que les deux objets sont perpendiculaires au sol et que les rayons du soleil sont parallèles. Les élèves disposent de feuilles de papier, de crayons et de règles.

Pour ce qui est de la seconde partie, les élèves doivent calculer les mesures des longueurs, à l'échelle, de l'objet référentiel, de son ombre ainsi que celle de l'objet dont on cherche la longueur. Pour cela ils disposent de feuilles de papier, de crayon et de calculatrices. Le professeur prend en charge l'exposé de la méthode de construction du dessin à l'échelle 1/100 : 1 cm sur le dessin représente 100 cm dans la cour puis tracé du segment représentant l'objet de référence et de son ombre qui lui est perpendiculaire. Tracé de l'ombre de l'arbre et des deux rayons parallèles. Le premier passant par les extrémités de l'objet et de son ombre et le second, qui est parallèle au premier, passant par l'extrémité de l'ombre de l'arbre.

Contexte interne élève

Evolution du contexte interne élève en particulier en termes d'apprentissages : une étude reste à faire quant aux apprentissages effectués par les élèves à ce niveau de la séquence. En effet, tout le travail a été mené pas l'expérimentateur sans vérifier les acquis qui peuvent en résulter.

Les élèves ont rencontré des difficultés : en particulier, ils n'ont pas pensé à matérialiser les rayons du soleil, ce qui semble compréhensible puisque ce type de représentation modélise un phénomène physique peu perceptible. Nous avons proposé et donc imposé la représentation ce qui constitue une ostension assumée.

Deux types de schémas ont été produits par quelques élèves. L'un faisant apparaître deux triangles dissociés et l'autre les plaçant l'un dans l'autre. Mais le fait que ces triangles allaient être représentés comme étant rectangles a été communiqué par l'expérimentateur sans interaction avec la classe. Aussi, c'est en particulier à ce niveau de notre étude que le contexte interne des élèves devrait être mieux pris en compte car ces derniers ont beaucoup été guidés par l'expérimentateur et l'enseignant.

5 CONCLUSION

Le but de cet article a été de répondre de façon générale puis particulière à travers la conception et la mise en oeuvre d'un problème en situation à la question du sens que peuvent prendre les mathématiques pour les élèves dans le cadre de l'enseignement primaire.

Il s'est agi de proposer des éléments pratiques afin que chacun puisse se forger ses propres représentations des rapports entre les mathématiques et la réalité à ce niveau de la scolarité. Nous avons gardé à l'esprit l'idée directrice qui consiste à penser que ce qui donne du sens aux notions, ce n'est pas uniquement un problème, qu'il soit ou non lié à la réalité mais, d'une part, les questions qu'il suscite chez les élèves et, d'autre part, la modélisation qu'il génère chez eux.

Le concept d'ombre est réinvesti dans une activité qui aboutit à la notion de proportionnalité à partir de constats effectués par les élèves en rapport avec les mesures de longueurs de bandes de papier et de leurs ombres. Le but final consistant, de la part des élèves en premier lieu à savoir calculer la mesure de la longueur de l'ombre d'une bande de papier dont on connaît les dimensions, à l'aide d'une méthode personnelle sans qu'aucune solution experte ne soit attendue de leur part. En second lieu, les élèves doivent trouver une méthode de calcul de la hauteur d'un objet. Enfin, du fait qu'elle ait été menée à l'école primaire, la dernière partie qui consiste à modéliser cette méthode à l'aide d'un schéma à l'échelle a totalement été menée par l'expérimentateur. Un travail reste à faire pour mieux adapter cette tâche à ce niveau de la scolarité.

L'ensemble de ces séances, à partir de la problématique de mesure de distances inaccessibles dans le méso-espace, illustre bien notre approche de la modélisation de la réalité. L'enseignant mène l'explicitation de la démarche mais cette dernière permet malgré tout de donner du sens aux mathématiques enseignées en reliant des domaines disjoints (géométrie/numération) et des disciplines parfois séparées (sciences/mathématiques) et en permettant aux élèves d'anticiper dans le modèle des réponses d'un problème posé dans le réel.

Mais ce travail, au sein de la Didactique des Domaines d'Expérience, mériterait une analyse plus fine du contexte interne des élèves afin de mieux prendre en compte leurs conceptions sans qu'ils soient trop ou même exclusivement guidés dans leurs démarches.

Les limites émergeant de la mise en œuvre de ce problème en situation montrent les difficultés qu'un enseignant peut rencontrer lorsque son questionnement est en rapport avec la prise en compte de la réalité chez les élèves. Ces situations peuvent rapidement devenir très complexes si nous voulons les faire travailler d'une façon la plus autonome possible dans un environnement peu habituel. Malgré tout, ce type de modélisation devrait s'appuyer le plus possible sur les conceptions de la réalité des élèves. Aussi, nous avons pleinement conscience que les notions de rayon de soleil et d'ombre sont d'un accès de conceptualisation difficile pour de jeunes enfants. Notre travail demanderait une étude complémentaire dont le principal objectif serait de beaucoup moins fonder les séances sur l'ostension.

6 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Boero P. (2009) Les domaines d'expérience : lier le travail scolaire à l'expérience des élèves. *Cours de la 15ème Ecole d'été de didactique des mathématiques. Clermont-Ferrand. ARDM.*

Boero P. & Douek N. (2008) La Didactique des Domaines d'Expérience. *Carrefour de l'Education n° 26.*

Brousseau G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol 4.2. La Pensée Sauvage.*

BROUSSEAU G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Colloque international "obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif." Construction des savoirs. Agence d'Arc inc Cirade.*

Bulletin Officiel (2008) Ministère de l'Education Nationale et du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. Numéro Hors série n°3 19 juin 2008.

Chevallard Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *In Analyse des pratiques des enseignants et didactique des mathématiques. IREM de Clermont-Ferrand.*

Comin E. (2001) Difficultés d'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Séminaire National de Didactique des Mathématiques Université Paris Diderot Paris 7.*

Douek N. (1999) Argumentation and conceptualization in context : a case study on sun shadows in primary school. *Educational Studies in Mathematics 39.*

Laguerre E. (2008) Problèmes dans la cour de l'école. Mathématiques : la question du sens.

Les Cahiers Pédagogiques n°466. CRAP Paris.

Communication C4

REPRODUCTION ET REPRÉSENTATION AU CYCLE 1

Jean-François GRELIER,
IUFM Midi-Pyrénées
jean-francois.grelier@toulouse.iufm.fr

Résumé
De 1980 à 2002, les Instructions Officielles pour l'école primaire (programmes, compléments, documents d'application et d'accompagnement) ont proposé pour les apprentissages géométriques un plan de travail qui se résumait en quatre verbes d'action : *reproduire*, *décrire*, *représenter*, *construire*. Or la *représentation* disparaît explicitement des programmes 2008 de l'école élémentaire, bien que les programmes 2008 de l'école maternelle y fassent toujours référence.
Ce texte propose différentes définitions de la représentation, suit l'évolution des notions de reproduction et de représentation dans les programmes de 1980 à 2008, pour ensuite donner une proposition d'organisation des apprentissages géométriques pour l'école maternelle et des activités de classe.

De 1980 à 2002, les Instructions Officielles pour l'école primaire (programmes, compléments, documents d'application et d'accompagnement) ont proposé pour les apprentissages géométriques un plan de travail qui se résumait en quatre verbes d'action *: reproduire, décrire, représenter, construire.* Or la représentation disparaît explicitement des programmes 2008 de l'école élémentaire, bien que les programmes 2008 de l'école maternelle y fassent toujours référence.
Cette contradiction apparente des programmes 2008 peut s'expliquer par la polysémie du mot représentation. Il y a une ambigüité sur la définition de ce mot, si bien que la « représentation » qui disparaît des programmes 2008 de l'école élémentaire n'est pas la « représentation » qui figure encore dans les programmes 2008 de l'école maternelle.
Et ce flou sur le sens est d'autant plus gênant que la représentation nous aide à comprendre des situations d'enseignement, en cela qu'elles sont le moment crucial où l'objet matière est projeté sur la feuille de papier.
Nous allons donc d'abord préciser les différentes définitions de la représentation, puis suivre l'évolution des notions de reproduction et de représentation dans les programmes de 1980 jusqu'à 2008, en passant par 1995 et 2002, puis essayer de comprendre si ces deux définitions de la représentation sont complémentaires ou contradictoires, pour ensuite en déduire une proposition d'organisation des apprentissages géométriques pour l'école maternelle, que nous illustrerons par des activités de classe.

1 TENTATIVE D'ÉCLAIRCISSEMENT THÉORIQUE

1.1 Deux définitions de la représentation

Il y a au moins deux définitions différentes pour *la représentation*. L'une, de sens étroit, est donnée par les programmes d'enseignement de 1980. Là, représenter est le troisième verbe de la série « reproduire, décrire, représenter, construire », et se définit peu ou prou toujours de la même façon de 1980 à 2005 : « ***représenter un objet ou une situation spatiale, c'est l'évoquer à l'aide de procédés graphiques conventionnels*** **».**
Le cadre est posé. C'est un cadre très général, notamment quand il parle d'« objets », ce qui entretient l'ambigüité entre l'objet matériel et l'objet mathématique, et entre les objets à deux ou trois dimensions. Mais peut-être que c'est justement cette ambiguïté qui lui a valu son succès, chacun pouvant l'interpréter à sa façon … ce qui lui a permis d'être un formidable incubateur d'idées.

L'autre, de sens large, est issue de la psychologie, depuis Piaget, et a pris pied dans la didactique, notamment grâce à Britt-Mari Barth (1997, 2001).
Quand on passe de la représentation de la psychologie du développement à la représentation de la didactique, le rôle et la place de l'écrit apparait. La représentation au sens didactique se situe presqu'exclusivement dans le cadre graphique de la feuille de papier. Du point de vue du langage, elle correspond à un passage de l'oral à l'écrit, ce qui n'est pas le cas au sens psychologique.
Cette définition de la représentation recadrée au sens didactique pourrait être : **« tout ce qui permet de travailler sur l'objet dans le cadre de la feuille de papier ».** Et c'est sur cette définition que nous allons nous appuyer dans ce texte.

1.2 Reproduire/décrire/représenter/construire dans les programmes

1.2.1 Programmes de 1980

Les programmes de 1980 de l'école primaire sont parus dans la brochure n° 6108 du CNDP. On peut lire page 61 :
« Les activités géométriques peuvent concerner ***la reproduction, la description, la représentation ou la construction d'un objet.***
Reproduire un objet *dont les élèves disposent, c'est en réaliser une copie conforme.*
Décrire un objet*, (sous l'angle géométrique) c'est communiquer des formulations de nature géométrique permettant de l'identifier, de le reproduire ou de le représenter.*
Représenter un objet*, c'est le décrire, mais à l'aide de procédés conventionnels (oraux, écrits ou graphiques). Ces procédés évoluent avec le niveau des élèves et peuvent être divers, chacun prenant en compte certaines propriétés et en négligeant d'autres.*
Construire un objet *est différent de le reproduire car les élèves partent alors d'une représentation ou d'une description et non de l'objet lui-même. »*

1.2.2 Compléments aux programmes et instructions du 13 mai 1985

Ce texte reprend les programmes de 1980 en les précisant. En voici des extraits :
« Les activités géométriques consistent à reproduire, à décrire, à représenter, à construire.
Reproduire
Les élèves disposent d'un objet et ils doivent réaliser une copie … Le résultat obtenu est conforme ou non à l'objet initial. En cas d'erreur, il suffit de mettre la production "à l'épreuve des faits". En cas de demande d'un objet "semblable", il convient de préciser le degré de conformité souhaité, si l'on désire évaluer le résultat obtenu.
Décrire
En reproduisant un objet et donc en choisissant, puis en agençant le matériel, les élèves sont amenés à s'exprimer à propos de cet objet et à formuler des remarques de type géométrique … Progressivement, ils utilisent, en situation fonctionnelle, un vocabulaire géométrique qui permet : d'identifier l'objet … , de le reproduire … , de le représenter.
On pourra effectuer des classements et dresser une liste des propriétés de l'objet, en utilisant un langage de plus en plus précis. Il s'agit donc de décrire pour : identifier … , reproduire …
Représenter
Dès lors qu'on représente un objet géométrique à l'aide de procédés conventionnels, on se trouve dans l'obligation de négliger des propriétés pourtant présentes dans la description. La représentation ne permet pas, en effet, de mettre en évidence toutes les propriétés : par exemple, les six faces de la description d'un cube n'apparaissent pas toutes sur une représentation. Il est donc intéressant d'habituer les élèves à effectuer et à utiliser des représentations différentes d'un même objet et à savoir choisir la représentation qui convient le mieux. Il est utile de prendre de nombreux points de vue de l'objet (empreintes, gabarits, ombres ...), de passer des dessins d'un objet à des schémas conventionnels. On peut, en particulier, et dès le cours élémentaire, procéder à des activités sur les patrons : développements divers d'un même objet, comparaison et classement de patrons.

Construire

La construction est l'aboutissement d'un processus qui s'appuie sur la représentation et la description. Elle nécessite la mise en œuvre de techniques de tracé associées à un vocabulaire fonctionnel. Pour les constructions dans l'espace, on pourra utiliser divers matériaux (pâte à modeler, carton, baguette, fil de fer ...) … La diversité des matériaux permet donc une bonne articulation entre la reproduction et la description et peut aider à la représentation. … Une partie importante du travail à effectuer concerne l'usage des instruments de tracé et de mesure : règle, équerre, compas, règle graduée, papier calque, quadrillage, réseau, gabarit, rapporteur. … »

Ce texte fondateur définit le premier, par quatre verbes d'action, des types de tâches géométriques, et précise par quelles activités elles se mettent en œuvre. Il a ainsi armé des générations d'enseignants et de formateurs pour réfléchir sur les apprentissages géométriques, et a joué un rôle incomparable de pépinière d'idées. Par rapport au texte de 1980, une modification est apportée pour le « construire » qui se rapproche de la forme scolaire de la construction à la règle et au compas.
Certaines remarques sont à faire. D'abord il faut remarquer la priorité que le texte ci-dessus accorde au travail sur les solides, même si ce n'est pas le sujet de l'article. Nous ne la suivrons pas dans cet article, notamment parce qu'une large majorité d'élèves sait identifier et représenter les quatre formes du plan dès la fin du cycle 1, alors que représenter les solides n'est possible que dans des cas très simples pour des élèves de fin de cycle 3. Il semble que depuis, un consensus se soit mis en place, notamment dans les pratiques d'auteurs de manuels, pour convenir plutôt d'organiser des apprentissages croisés entre le plan et l'espace, niveau par niveau, en fonction du développement des enfants.
Ensuite, ce texte propose d'utiliser le même appareillage théorique pour le plan et pour l'espace à trois dimensions, ce qui ne fonctionne que si on reste dans de larges généralités. Ainsi le « reproduire » se matérialise par des activités très différentes pour l'espace et le plan. Pour l'espace, il s'agit d'activités matérielles, de type technologique, alors que pour le plan, il s'agit d'un travail très conventionnel de tracé. Pour éclairer le « représenter », ce texte ne propose que des exemples dans l'espace.
On remarque que bien qu'il soit aussi nécessaire pour le « représenter », ce n'est que dans le « *construire* » que « *l'usage des instruments de tracé et de mesure : règle, équerre, compas, règle graduée, papier calque, quadrillage, réseau, gabarit, rapporteur.* » est mentionné.

1.2.3 Programmes 1995

Pour le cycle 2, on peut lire page 49 :
- approche de quelques solides (cube, pavé) et de quelques figures planes usuelles (carré, rectangle, cercle) : reproduction, description

Et pour le cycle 3, on peut lire page 64 :
- à partir d'un travail sur des solides et des surfaces divers (reproduction, description, représentation, construction), notions de :
- face, arête, sommet
- côté, segment, milieu, ligne droite, angle
- perpendiculaire, parallèle

Les programmes 1995 s'appuient sur le texte de 1985. Ils considèrent toujours que les objets à deux ou trois dimensions doivent être traités de la même façon. Cependant ils introduisent une progression, *reproduction* et *description* n'intervenant qu'au cycle 2, et *représentation* et *construction* venant compléter le dispositif au cycle 3 … ce que le texte de 1985 ne prévoit pas du tout. Cette proposition nous semble raisonnable pour les solides, et pas du tout pour les formes du plan. Reste la question générale de savoir s'il est pertinent de disjoindre dans le temps *reproduction* et *représentation*.

1.2.4 Programmes 2002

Dans les programmes 2002 publiés sous le titre « Qu'apprend-on à l'école primaire ? », on trouve page 232 (extraits) :
L'objectif principal est de … passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par explicitation de propriétés et recours à des instruments. Les

activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais des connaissances fonctionnelles, utiles pour résoudre des problèmes dans l'espace ordinaire, dans celui de la feuille de papier ou sur l'écran d'ordinateur, en particulier des problèmes de comparaison, de reproduction, de construction, de description, de représentation d'objets géométriques ou de configurations spatiales (notamment, représentations planes de solides) ...

Les connaissances relatives à l'espace et à la géométrie concernent :

— *…*
— *les figures planes (en particulier : triangle et ses cas particuliers, carré, rectangle, losange, cercle) : reconnaissance, reproduction, construction, description, décomposition d'une figure en figures plus simples,*

Les programmes 2002 introduisent pour la première fois une distinction dans le traitement du plan et de l'espace. Il n'est fait mention de *représentation* que pour les « *objets géométriques ou les configurations spatiales (notamment, représentations planes de solides)*. Pour les figures planes, il est fait mention de « *reconnaissance, reproduction, construction, description, décomposition d'une figure en figures plus simples* ».

1.2.5 Documents d'accompagnement 2005 « espace et géométrie au cycle 2 »

Voilà comment les quatre verbes sont définis, page 66 :
– « reproduire » un objet, c'est en faire une copie à l'identique, cet objet étant visible un certain moment (mais pas nécessairement pendant tout le temps de l'activité). Quand l'objet est un dessin plan, la superposition de l'original et de l'objet produit permet de contrôler la qualité de la reproduction.
La reproduction peut être réalisée à l'échelle 1 ou à une autre échelle ; dans ce dernier cas, la validation se fait par superposition à l'aide d'un calque réalisé par l'enseignant ;
– « décrire » un objet, oralement ou par écrit, c'est utiliser un vocabulaire géométrique permettant à un interlocuteur d'identifier l'objet, de le reproduire ou de le représenter ;
– « représenter » un objet ou une situation spatiale, c'est l'évoquer à l'aide de procédés graphiques conventionnels ;
– « construire » un objet, c'est le produire à partir d'un texte descriptif ou prescriptif, à partir d'un schéma éclairé ou non par du texte, des codages…
Ici le « reproduire », comme le « décrire » concerne aussi bien des objets matériels que des objets mathématiques, et aussi bien des objets à deux dimensions que des objets à trois dimensions. Ces définitions sont finalement très proches du texte de 1980.

1.2.6 Premières remarques

1) On ne peut utiliser le même appareillage théorique pour les objets du plan et les solides que si on en reste à des considérations générales sur la construction du savoir géométrique. C'est nécessaire et utile, mais dès que l'on se pose le problème concret de construire des progressions, il faut différencier entre le plan et l'espace, ne serait-ce que parce les mêmes compétences dans le plan et l'espace se traitent à âges très distants (cycle 1 et cycle 3).
2) On bute dans tous les cas sur la difficulté de représenter les solides à l'école primaire.
3) Il nous semble que si on opère la distinction entre apprentissage et structuration, l'apprentissage étant la phase où les élèves essaient de résoudre un problème sans en avoir les compétences, justement pour les construire, et la structuration étant la phase où ils ont identifié le concept à construire et où les compétences ont été institutionnalisées, « reproduire, décrire et représenter » font partie de l'apprentissage, et « construire » est l'étape de structuration des savoirs.

1.2.7 Programmes 2008

Programmes 2008 de l'école élémentaire

En rupture avec les programmes précédents, les programmes 2008 de l'école élémentaire se contentent de recenser les savoirs qui doivent être acquis en fin de cycle, en laissant le choix de la méthode d'apprentissage aux enseignants. Ils abandonnent toute référence à la psychologie des enfants et aux conseils de mise en œuvre d'ordre didactique. Si on ne se pose plus de questions, il n'est plus besoin d'essayer d'y répondre ! Dans cette logique construire les concepts mathématiques par la manipulation

ou les enseigner par la définition devient un choix privé. Et tout ce qui concerne l'apprentissage, ce moment où on essaie de faire avant d'en avoir les compétences, justement pour les construire, n'a plus sa place. Il n'est donc pas étonnant que la représentation disparaisse, avec les trois autres verbes d'action, puisqu'elle est constitutive de l'apprentissage.
Mais pour les enseignants au delà des programmes qui fixent le résultat à atteindre, reste le principal, avoir la culture pour organiser les apprentissages, car la liberté de choix suppose que l'on soit formé pour exercer ce choix. Cet article vise à les aider dans cette difficile tâche.

Programmes 2008 de l'école maternelle

On peut cependant lire dans le BO du 19 juin 2008, page 15 et 16 (extraits):
« Découvrir le monde
… Il devient capable de compter, de classer, d'ordonner et de décrire, grâce au langage et à des formes variées de ***représentation*** *(dessins, schémas) …*
Se repérer dans l'espace
… Les enfants effectuent des itinéraires en fonction de consignes variées et en rendent compte (récits, représentations graphiques). Les activités dans lesquelles il faut passer du plan horizontal au plan vertical ou inversement, et conserver les positions relatives des objets ou des éléments ***représentés,*** *font l'objet d'une attention particulière. Elles préparent à l'orientation dans l'espace graphique. Le repérage dans l'espace d'une page ou d'une feuille de papier, sur une ligne orientée se fait en lien avec la lecture et l'écriture ...*
Percevoir, sentir, imaginer, créer
… Le dessin et les compositions plastiques (fabrication d'objets) sont les moyens d'expression privilégiés. Les enfants expérimentent les divers instruments, supports et procédés du dessin. Ils découvrent, utilisent et réalisent des images et des objets de natures variées. Ils construisent des objets en utilisant peinture, papiers collés, collage en relief, assemblage, modelage...
Dans ce contexte, l'enseignant aide les enfants à exprimer ce qu'ils perçoivent, à évoquer leurs projets et leurs réalisations; il les conduit à utiliser, pour ce faire, un vocabulaire adapté. Il les encourage à commencer une collection personnelle d'objets à valeur esthétique et affective ... »
Bien sûr la représentation dont parlent ici les programmes est la représentation de la seconde définition, elle est prise dans un sens général.

1.3 La représentation : phase centrale de l'apprentissage

Si on prend *représentation* au sens général, tout ce qui permet de travailler sur l'objet alors qu'il n'est pas là, alors il y a bien d'autres représentations que la trace graphique de l'objet matériel sur la feuille de papier. Une image mentale, une photo, un dessin, une reproduction avec un autre matériel, sont des représentations. Ce travail sur des représentations au sens large est en jeu dès le cycle I, et il convient de hiérarchiser les représentations du point de vue de ce qu'elles conservent, et de ce qu'elles perdent.
Piaget (1977) nous est là d'un grand secours. On peut dire très schématiquement qu'il distingue trois grands stades de développement : le stade sensori-moteur, le stade des représentations et le stade des opérations abstraites. Dans le premier stade, ce qui prédomine, ce sont les perceptions qui se coordonnent aux actions. Dans le second, les enfants sont capables d'inférences lorsqu'ils sont en présence des objets matériels de leurs pensées. Dans le troisième, ces inférences ne sont plus soutenues par les objets eux-mêmes, mais par le langage et les symboles.
Si on prend l'exemple de la symétrie axiale, le premier stade correspondrait à l'action de pliage ou retournement d'un motif le long d'un axe ; le second stade serait le pliage ou le retournement pensé sur représentation, et le troisième stade la définition mathématique de la symétrie par la médiatrice. Et les élèves de l'école primaire ne peuvent certainement pas découvrir la symétrie axiale autrement que par une manipulation, pliage et/ou retournement. Mais ils ne rentrent vraiment dans la mathématique que quand ils auront appris à tracer le symétrique par la perpendiculaire, c'est-à-dire sans plier. Le pliage pourra rester encore un moment un moyen de valider, mais à terme il faudra s'en passer. Cette conception nous permet de caractériser d'une part *reproduction* et *représentation*, et d'autre part le passage

de l'une à l'autre. La reproduction correspond au premier stade, celui de l'action contrôlée par la perception, et la représentation correspond au second stade.
Britt-Mari Barth (1997, 2001) a beaucoup travaillé sur le rôle de la perception dans les apprentissages, et elle cite J. Bruner pour évoquer **les trois modes de représentation** dont nous disposerions pour traiter de l'information et la transformer en savoir :

1. **Le mode enactif ou sensori-moteur** : (le geste). Il s'agit d'apprendre "par le faire". Beaucoup d'apprentissages en restent là.
2. **Le mode iconique ou visuel** : (l'image du geste). L'action est transformée en image mentale.
3. **Le mode symbolique** : (explication verbale du geste). C'est l'apprentissage le plus complet : « *On peut communiquer sa pensée à soi-même et aux autres, dire ce qu'on fait et ce qu'on pense faire* ».

La croissance cognitive est stimulée par le conflit entre ces deux derniers modes. En encourageant l'enfant à expliquer ce qu'il fait ou voit, on l'oblige à quitter l'action ou l'image, « *qui sont souvent des représentations limitées de la chose* » pour approfondir. Et c'est par la représentation écrite que l'on sort le mieux de l'action et de l'image.

1.4 Une synthèse est-elle possible ?

1.4.1 Passer de l'objet au concept par la représentation

Il suffirait qu'un enfant rencontre deux ou trois chats pour qu'il construise le concept de chat. Les concepts mathématiques ne se construisent pas aussi facilement, bien sûr, mais ceux dont on vise la construction à l'école primaire sont justement ceux qui peuvent s'appréhender de cette façon, par l'expérience : on part des objets, puis on les représente sur la feuille de papier, et on apprend progressivement à les remplacer par des représentations que l'on codifie, que l'on organise logiquement pour qu'elles finissent par exister indépendamment de l'objet matériel de départ.
L'objet est là, et son concept doit finir par se construire abstraitement. Reproduction et représentation sont les deux instances médiatrices d'apprentissages entre ces deux pôles extrêmes et figés. Et cela donne donc quatre instances géométriques :
- l'objet matériel qui peut être présent ou imaginé,
- la reproduction de cet objet physique,
- la représentation géométrique codifiée sur papier du concept mathématique,
- le concept mathématique lui-même.

Les objets matériels peuvent exister sur plusieurs supports matériels. Pour les objets du plan ce support matériel peut être les « blocs logiques » du cycle 1, c'est-à-dire les formes élémentaires découpées dans du bois ou du plastique, les élastiques du géoplan, des bandes articulées, mais aussi la feuille de papier. Pour les solides, ce support matériel peut être des pommes de terre à sculpter, de la pâte à modeler, des pailles et les rotules pour les relier, ou le papier d'un patron. D'abord il s'agit de reproduire à l'identique avec le même matériel, mais à mesure que l'on progresse, on peut également reproduire avec un autre matériel, ce qui permet d'identifier certaines propriétés.
On a là une façon de comprendre la construction du savoir qui réintroduit la reproduction et la représentation des programmes de 1980 à 2002, tout en respectant les apports de la psychologie cognitive. De ce point de vue, reproduction et représentation sont deux moments de l'apprentissage où le savoir se construit progressivement en se déplaçant de l'objet réel au concept mathématique.
La reproduction est une activité plutôt technologique, matérielle. Les concepts sont présents implicitement, et sont évoqués oralement dans des activités de description, par exemple les jeux de la marchande ou du portrait.
Le passage de la reproduction à la représentation se fait en même temps que le passage de l'oral à l'écrit. C'est pourquoi préciser le rôle de ce couple reproduction-représentation devrait nous aider à mieux penser le travail sur la langue dans le cadre géométrique.
Nous proposons de conclure de la manière suivante : un objet géométrique est proposé dans un certain matériel. La définition des IO de 1980 convient parfaitement pour la reproduction. Il s'agit de réaliser

une copie conforme. Cette copie conforme peut être réalisée à l'identique c'est-à-dire avec le même matériel, ou en modifiant l'échelle (en modifiant la conformité attendue dans la consigne). Elle peut être aussi réalisée dans un autre matériel, en fonction des propriétés que l'on veut mettre en exergue.
Dès que l'on abandonne cet objet pour le projeter sur la feuille de papier, quel que soit le procédé employé, il s'agit d'une représentation. Mais pour garder nos objectifs mathématiques, cette représentation devra être assez fidèle pour qu'elle puisse permettre de reproduire l'objet initial, et pour cela il faudra apprendre à utiliser les « procédés graphiques conventionnels ».
Il reste à traiter le cas paradoxal de la figure géométrique à reproduire. C'est paradoxal, parce qu'il s'agit d'une représentation que les élèves doivent reproduire à l'identique. C'est bien une reproduction, bien que l'objet à reproduire soit déjà très conceptualisé, et qu'il n'y ait rien à en abstraire.

1.4.2 Difficultés de mise en place

Quand on se fixe comme objectif de mettre en place concrètement ces activités en les intégrant dans des progressions, de multiples difficultés surviennent. Car les objectifs et les obstacles ne sont pas les mêmes :
- suivant le niveau d'enseignement,
- suivant que l'on travaille sur des objets du plan ou sur des solides,
- suivant que l'on est en phase d'apprentissage ou de structuration.

Les progressions doivent également respecter une autre contrainte, celle d'organiser l'apprentissage croisé des compétences dans le plan et dans l'espace. Toute connaissance structurée dans le domaine du plan va aider à l'apprentissage de compétences de l'espace, et toute compétence structurée dans le domaine de l'espace va aider à l'apprentissage de connaissances dans le domaine du plan. Et cela doit s'étudier niveau par niveau, compétence par compétence.

1.5 Reproduction et représentation au cycle 1

Pour prendre en compte la réalité de l'enfant qui sort de la crèche pour arriver en maternelle, il faut sans doute introduire une distinction chronologique entre une première maternelle où les élèves manipulent des objets, et une seconde maternelle où ils apprennent progressivement à coder ce travail sur la feuille de papier.
Ainsi dans un premier temps, les élèves ne pourront que reproduire. Par la reproduction les élèves commencent à faire passer les informations d'un objet à un autre, et implicitement à faire correspondre à un objet certaines de ses propriétés. Ils peuvent reproduire avec une progression de modalités qui font varier le type d'objet à reproduire, le type du modèle et le mode de reproduction, et il y aura un saut qualitatif, disons vers le milieu de la moyenne section, où les élèves pourront commencer à représenter. Ce passage signifie également la prise de conscience de la puissance de l'écrit, du rôle de mémoire de la représentation. Dans des activités de reproduction, il faut rendre le matériel à la fin de l'activité. Et les élèves devront démonter les assemblages qu'ils auront réalisés, même s'ils ont pu être pris en photo. Quand ils sauront représenter, ils pourront s'approprier leur production, la signer de leur nom et l'emmener chez eux pour le montrer à leur famille. Ils pourront ainsi produire un répertoire de représentations d'agencements qui permettra d'entrer beaucoup plus rapidement dans les activités pour les séances suivantes. Ce répertoire sera le référentiel de la classe.
Le passage à la représentation est un saut cognitif majeur. Et on peut trouver dans les programmes 2008 de l'école maternelle des arguments pour nous en convaincre.
C'est d'abord un premier vrai travail de conceptualisation. On peut lire dans ces programmes, page 14 : « *Les élèves établissent une relation entre les activités matérielles qu'ils réalisent et ce qu'ils en apprennent (on fait cela pour apprendre, pour mieux savoir faire)* ». Cette relation se fera surtout dans l'effort de représenter.
Mais c'est aussi la découverte de l'écrit. Mais ce passage à l'écrit nécessite une première maîtrise des relations spatiales, celles qui permettent d'organiser les informations sur une feuille de papier.
On peut encore lire dans les programmes 2008, page 16 : « *Les activités dans lesquelles il faut passer du plan horizontal au plan vertical ou inversement, et conserver les positions relatives des objets ou des éléments représentés, font l'objet d'une attention particulière. Elles préparent à l'orientation dans l'espace graphique* ». Le

repérage dans l'espace d'une page ou d'une feuille de papier, sur une ligne orientée se fait en lien avec la lecture et l'écriture ».
Et c'est pourquoi il faudra penser la construction des compétences spatiales en interaction avec la construction des autres compétences.
L'activité mathématique apparaît ici comme une propédeutique de la maîtrise de l'écrit. Car coder en mathématique, éprouver la puissance de l'écrit comme mémoire de ce que l'on a fait peut se faire simplement, bien avant que l'on maîtrise l'outillage complexe que représente les mots écrits en lettres.

C'est pourquoi nous proposons d'organiser les apprentissages géométriques au cycle 1 en deux étapes. D'abord **une première maternelle** où les élèves apprendront à agir sur les objets en les classant, les agençant, puis en reproduisant des agencements dans de multiples modalités dans un traitement purement oral de la langue. Puis **une seconde maternelle** où ils apprendront progressivement à représenter ce qu'ils font, et donc à croiser des activités de reproduction et de représentation.

2 LA SITUATION DES TRIANGLES RECTANGLES ISOCÈLES

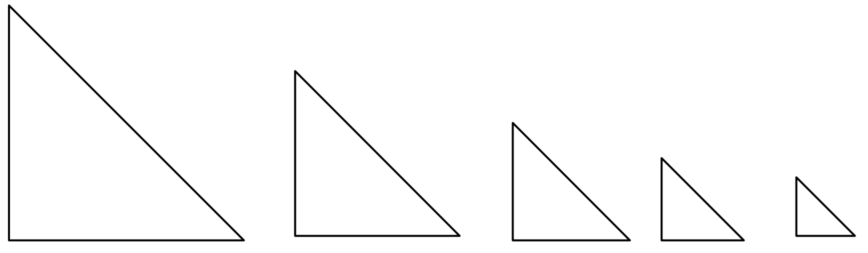
Le travail qui est présenté ici est construit avec des triangles rectangles isocèles, dans un prolongement de l'article « pliages » de Colette Farge et Anne Zois paru en 1999 dans le *Grand N spécial maternelle*, tome 2, structuration de l'espace. Notre volonté est d'éclairer cette réflexion sur reproduction-représentation par un exemple concret.

2.1 Présentation de la situation

Un carré se partage par une de ses diagonales en deux triangles rectangles isocèles. Et le triangle rectangle isocèle a une propriété très intéressante, il est semblable à sa moitié. On a ainsi un procédé de construction très simple d'une série de triangles rectangles isocèles de taille décroissante. On partage un carré par sa diagonale, et on obtient ainsi deux triangles rectangles isocèles. Et là se met en place un algorithme. On garde un des deux triangles, et on partage l'autre en deux, et on recommence tant que c'est possible. On a donc facilement une série de triangles semblables d'aire moitié les uns des autres.

2.1.1 Matériel

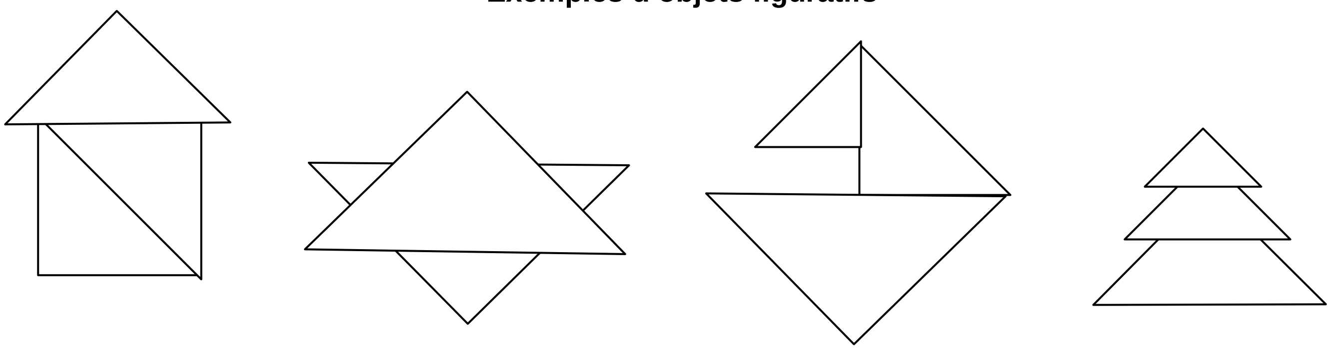
D'un point de vue pratique, on a intérêt à travailler avec deux types d'objets : les formes découpées dans des matériaux solides : alvéolaire, plastique, carton plume ou PVC expansé, et les mêmes découpées dans du papier de couleur. Pour les formes en dur, on part d'un carré de 20 cm de côté qu'on partage en deux, et on obtient des triangles rectangles isocèles d'aires moitié, et de côté 14,1 cm, puis 10 cm, puis 7 cm, puis 5 cm. C'est l'alvéolaire qui se révèle le matériau le mieux adapté. On peut en acheter à bon marché chez des imprimeurs. Il sert à réaliser des publicités provisoires de chantier. Il est solide, et se découpe facilement au cutter ou au massicot. On a intérêt à colorer un des côtés, de manière à avoir des triangles bicolores, blanc d'un côté et coloré de l'autre. Pour les colorer, le plus simple est de les peindre avec de la peinture en bombe. Il est utile de produire ainsi trois séries de triangles bicolores : blanc d'un côté et bleu de l'autre pour la première série, blanc et rouge, blanc et vert pour les deux autres, par exemple.
Pour les formes papier, pour des raisons pratiques, on utilise du format A4, et on part cette fois d'un carré de côté 21 cm.



Taille 1 (21x21) Taille 2 Taille 3 Taille 4 Taille 5

Dans les activités de découverte, se constituera progressivement un magasin de formes, c'est-à-dire une collection d'agencements de triangles de différentes tailles. Cette collection fait également partie du matériel. Elle sera déclinée sous plusieurs modalités : d'abord l'agencement en triangles plastiques collés une fois pour toutes sur des plaques en carton, puis des photos les moins déformées possibles de ces agencements et enfin des croquis de ces agencements, c'est-à-dire le tracé géométrique de l'agencement réalisé par le maître. Le maître pourra également utiliser dans la progression des croquis ne reprenant plus que les frontières extérieures de l'agencement.

Exemples d'objets figuratifs



Cabane Etoile Bateau Sapin

2.1.2 Potentialités liées au matériel

2 Types d'agencements de triangles

Les agencements de triangles peuvent être figuratifs ou géométriques, frises et pavages. Il vaut mieux ne pas imposer aux élèves des objets figuratifs, et au contraire repérer les objets qu'ils produisent spontanément dans la phase de découverte, et les introduire au fur et à mesure dans la culture de la classe. Le maître pourra être plus normatif pour les frises et les pavages, mais bien sûr au rythme des élèves.
Deux agencements figuratifs seront particulièrement travaillés : le sapin pour travailler implicitement le rangement du plus petit au plus grand, et le papillon pour travailler implicitement la symétrie.

2 Activités de reproduction

Avec les formes découpées dans des matériaux solides se mettent en place les activités de reproduction, dans de multiples modalités, ce qui permet de les adapter au niveau des élèves de la « première maternelle » :
- reproduire un agencement par superposition (la validation est alors simultanée à l'action) ;
- reproduire un agencement sur un croquis adjacent au modèle ;
- reproduire un agencement dans un espace fermé adjacent au modèle ;
- reproduire un agencement sur un croquis, le modèle étant une photo placée verticalement sur un présentoir ;
- reproduire un agencement sur un espace délimité, le modèle étant une photo placée verticalement sur un présentoir ;
- et enfin reproduire un agencement d'après un croquis du modèle, d'abord sur le croquis, puis à côté.
Comme souvent pour un outil, on commence à l'utiliser dans une situation fonctionnelle, et quand on en maîtrise le fonctionnement, on essaie d'en comprendre le mode de construction, puis de le produire. Le maître aidera vers le milieu de la moyenne section les élèves à découvrir le procédé de fabrication des

triangles rectangles isocèles, et il organisera alors l'apprentissage du pliage-découpage et le passage à la représentation pour « la seconde maternelle ».
A partir de ce moment, les activités de reproduction et de représentation pourront être croisées, ce qui multiplie les possibilités.

2 Activités de représentation

Les formes pourront être découpées dans du papier par les élèves (mais surtout par le maître pour la qualité et la rapidité de la production …), et pourront être utilisées comme des vignettes qui seront collées pour garder la mémoire d'un agencement réalisé avec les formes plastiques. C'est ce que nous appelons la première représentation. Une seconde représentation s'obtient par traçage autour des triangles matériels qui sont utilisés là comme des gabarits, une troisième étant la représentation à main levée.

2.2 Exemples d'activités

2.2.1 Remarque préalable

L'école maternelle a ses spécificités. C'est là que les enfants deviennent des élèves. Plus les élèves grandissent, et plus leurs réactions sont prévisibles. Au cycle 3, une séquence cohérente peut être plaquée sur les élèves, et elle passera, pour autant que le maître ait un peu d'expérience. Au cycle 1, ça ne sera pas le cas. Ainsi toutes les séances que nous présentons ne sont que des moments de séquences beaucoup plus longues. Ces séances ne peuvent être mises en place qu'après des phases réussies et plus ou moins longues de découverte de la situation. Ainsi le travail sur des pavages proposé au paragraphe suivant est précédé par un travail analogue sur des frises.

2.2.2 Pavages

Matériel : les triangles plastiques en trois, puis quatre tailles ; des supports en carton quadrillé au format du plus grand carré (2x3, puis 4x3) ; des supports en carton quadrillé au format du carré immédiatement inférieur (2x3, puis 4x3) ; des pavages réguliers réalisés par le maître, notamment celui du carré reconstitué selon l'algorithme de découpage (un triangle taille 1, un triangle taille 2, deux triangles taille 3) ; des supports en carton sur lesquels sont dessinés les croquis de ces pavages.

2 **Reproduction** (petite et moyenne section)

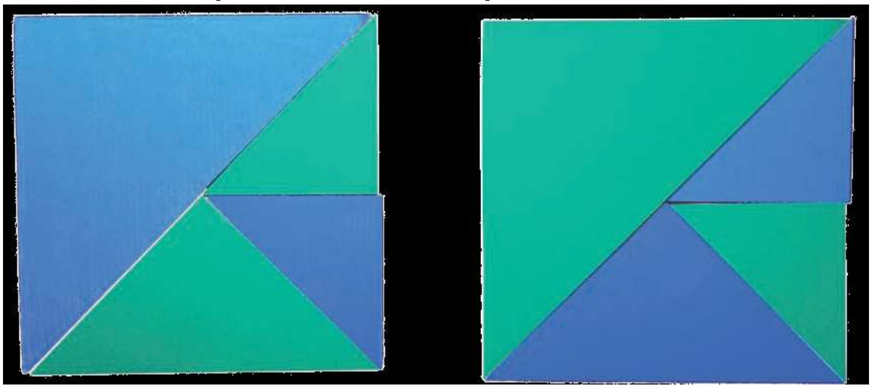
Les compétences en jeu sont les suivantes :
- *s'organiser pour une activité, distribuer des objets ;*
- *reconnaître, nommer des objets selon leurs qualités et leurs usages ;*
- *adapter son geste aux contraintes matérielles (instruments, supports, matériels) ;*
- *savoir reproduire l'organisation dans l'espace d'un ensemble limité d'objets (en les manipulant, en les représentant)*
- *reproduire un assemblage d'objets de formes simples à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides);*
- *approcher la représentation d'espaces par la photo ;*
- *passer d'une représentation dans un plan vertical à une représentation dans un plan horizontal et inversement.*

A. Le maître présente un pavage régulier construit sur six carrés (2x3). Les élèves doivent le reproduire par superposition. Leur tâche est double : d'abord choisir le bon triangle, puis le poser au bon endroit, et ceci pour tous les triangles. La validation est simultanée à l'action : les formes doivent se superposer au montage.
B. Le maître présente une reproduction grandeur nature du motif de base de ce pavage régulier (le motif recouvre en général les deux premiers carrés), et le pose sur un croquis du pavage entier, et il demande de terminer le pavage avec les formes plastiques. La validation se fait par comparaison avec le pavage

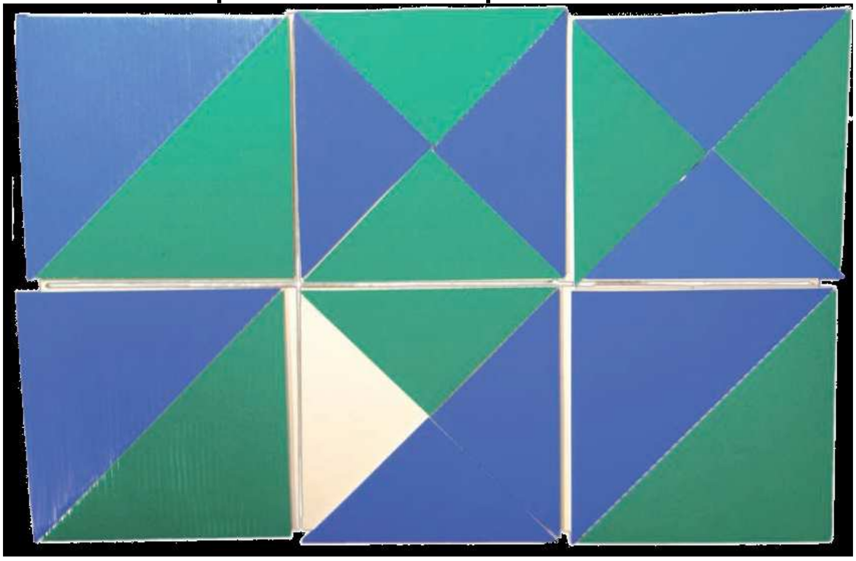
complet que le maître a réalisé à l'avance. La validation se fait d'abord globalement, par un contrôle perceptif : « Est-ce que le pavage réalisé est régulier ? », « Est-ce que le pavage réalisé est pareil que celui réalisé par le maître ? ». Puis si un défaut est repéré, la comparaison se fait entre les deux pavages, pièce par pièce.
C. Le maître propose un croquis du pavage sur lequel les élèves doivent poser les formes plastiques. La validation se fait par comparaison avec le pavage complet que le maître a réalisé à l'avance.
D. Les élèves créent leur propre pavage sur les supports quadrillés. Il ne s'agit plus d'une reproduction, mais d'une création. La consigne est de remplir complètement le quadrillage sans chevaucher les traits du quadrillage. Pour valider, il faut vérifier que la consigne est respectée, que les formes plastiques ne laissent pas d'espace vide, et que les formes ne chevauchent pas le quadrillage.

Voici des exemples de pavages

Une production d'élève pour l'activité C



Une production d'élève pour l'activité D



2 **Représentation** (moyenne et grande section)

Les compétences en jeu sont :

- *se repérer dans l'espace d'une page ;*
- *adapter son geste aux contraintes matérielles (instruments, supports, matériels) ;*
- *savoir reproduire l'organisation dans l'espace d'un ensemble limité d'objets (en les manipulant, en les représentant) ;*
- *reproduire un assemblage d'objets de formes simples à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides).*

Matériel : le même que pour les activités de reproduction, et en plus, les triangles de papier qui vont servir de vignettes. Ils seront classés en cours de séquence dans un casier par taille et par couleur.

A. A côté du pavage modèle réalisé avec les formes plastiques, le maître donne un croquis sur lequel les élèves doivent poser, puis coller les vignettes. Ils peuvent sélectionner les vignettes en les posant sur le modèle, puis les coller après validation sur le croquis qu'ils pourront emmener chez eux.
B. Les élèves doivent représenter le pavage en collant les vignettes sur une feuille blanche posée à côté du pavage modèle. La tâche de l'élève est de choisir la bonne vignette, puis de la poser au bon endroit. Il doit poser la première vignette au bon endroit de la feuille blanche, puis poser la seconde au bon endroit par rapport à la première, et ainsi de suite. Ils ne collent les vignettes qu'après validation.
C. Les élèves doivent représenter le pavage par traçage et coloriage en utilisant les triangles plastiques comme des gabarits. Le support est une feuille blanche sur laquelle le premier motif est déjà tracé et colorié.
Pour ces trois activités, la validation se fait d'abord globalement, par un contrôle perceptif, puis s'il y a une difficulté par un contrôle, pièce par pièce, entre le pavage modèle et sa représentation. Les modalités d'organisation sont multiples, au choix de l'enseignant. Soit chaque élève valide sa production, soit l'atelier valide successivement chaque production, soit les élèves échangent deux à deux leurs productions et valident la production de l'autre.

2.2.3 Différentes modalités de reproduction **(petite et moyenne section)**

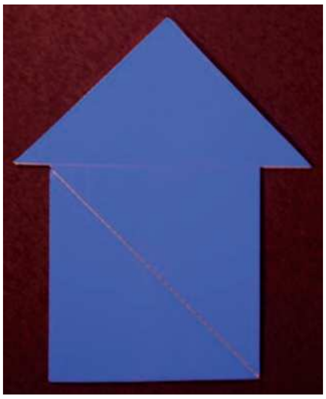
Les compétences en jeu sont :
- *différencier et classer des objets en fonction de caractéristiques liées à leur forme;*
- *reconnaître, nommer, ranger et classer des objets selon leurs qualités et leurs usages ;*
- *adapter son geste aux contraintes matérielles (instruments, supports, matériels) ;*
- *savoir reproduire l'organisation dans l'espace d'un ensemble limité d'objets (en les manipulant, en les représentant) ;*
- *reproduire un assemblage d'objets de formes simples à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides).*

Matériel : les triangles plastiques bicolores en trois, puis quatre tailles classés dans un casier; une collection d'agencements de triangles plastiques. Ces agencements peuvent être des objets figuratifs ou géométriques ; un répertoire de photos en couleur et grandeur nature de ces agencements ; les croquis de ces agencements.
A. Le maître demande à chaque élève de l'atelier de choisir un agencement parmi la collection d'objets constitués de trois triangles, il lui donne l'objet et sa photo qu'il place à sa droite. Chaque élève doit reproduire l'agencement en choisissant les bons triangles, et en les posant sur la photo au bon endroit. La validation (qui peut être faite par un autre élève) se fait en comparant une à une toutes les pièces de l'agencement. Le maître peut aussi prévoir un dessin sur calque du modèle qu'il suffit alors de superposer à la production.
B. Refaire l'activité avec un agencement quelconque (par exemple une frise ou un pavage). Les élèves ont toujours le modèle, qui est un agencement de triangles plastiques, et une photo de cet agencement sur laquelle ils doivent poser un à un les triangles plastiques. Même validation qu'en A.
C. Refaire l'activité, mais on remplace la photo grandeur nature par un croquis délimitant les formes. Les élèves ont toujours le modèle, qui est un agencement de triangles plastiques, et un croquis de cet agencement sur laquelle ils doivent poser un à un les triangles plastiques. Même validation qu'en A.
D. Refaire l'activité, mais on remplace le croquis délimitant les formes par un espace fermé libre posé à côté du modèle en triangles plastiques, par exemple un couvercle de boîte à chaussures. Les élèves ont toujours le modèle, qui est un agencement de triangles plastiques, mais ils ne sont plus guidés par le croquis. Ils ont un espace délimité dans lequel disposer un à un les triangles plastiques. Même validation qu'en A.
E. Refaire l'activité mais le support de reproduction est directement la table. Les élèves ont toujours le modèle, qui est un agencement de triangles plastiques, mais ils disposent les triangles plastiques directement sur la table. Même validation qu'en A.

F. Refaire l'activité de reproduction sur un croquis, le modèle en triangles plastiques étant remplacé par sa photo placée verticalement sur un présentoir. Même validation qu'en A.
G. Reproduire un agencement directement sur la table, le modèle étant une photo placée verticalement (on peut organiser aussi une progression sur les propriétés de la photo : grandeur nature et en couleur ; grandeur nature et en noir et blanc ; de taille réduite et en couleur ; de taille réduite et en noir et blanc). Même validation qu'en A.
H. Jeu de la marchande. Pour réaliser son agencement, l'élève doit commander ses pièces oralement, en précisant la taille et la couleur. Le marchand est d'abord le maître, puis c'est un élève contrôlé par le groupe.
I. Reproduire un agencement sur croquis du modèle. Même validation qu'en A. Mais cette fois plusieurs réponses sont possibles, puisque le croquis ne donne pas les couleurs.

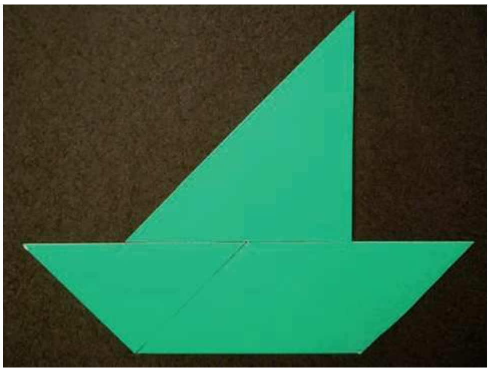
	Modèle à reproduire	Support de reproduction
Activité A	Agencement de 3 triangles plastiques	Photo du modèle
Activité B	Agencement de triangles plastiques	Photo du modèle
Activité C	Agencement de triangles plastiques	Croquis du modèle
Activité D	Agencement de triangles plastiques	Espace délimité
Activité E	Agencement de triangles plastiques	Espace libre de la table
Activité F	Photo de l'agencement sur un présentoir	Croquis du modèle
Activité G	Photo de l'agencement sur un présentoir	Espace libre de la table
Activité I	Croquis du modèle sur un présentoir	Espace libre de la table

Des objets figuratifs à reproduire



La cabane

Le sapin



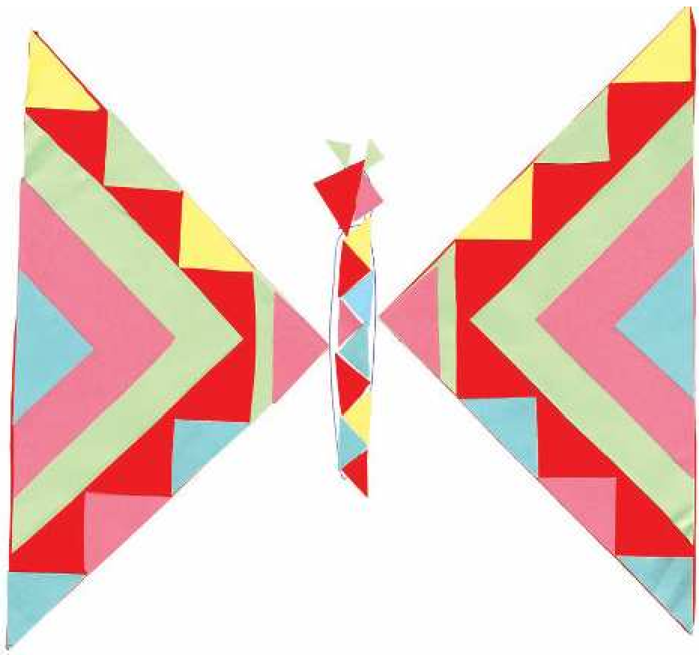
Le bateau

2.2.4 Travail sur la symétrie : finir le papillon **(grande section)**

Les compétences en jeu sont :
- *s'organiser pour une activité, distribuer et ranger ;*
- *se repérer dans l'espace d'une page ;*
- *adapter son geste aux contraintes matérielles (instruments, supports, matériels);*
- *réaliser une composition en plan selon un désir exprimé ;*
- *savoir reproduire l'organisation dans l'espace d'un ensemble limité d'objets (en les manipulant, en les représentant);*

Matériel : les triangles plastiques bicolores en trois, puis quatre tailles ; des carrés de couleur découpés dans du papier A4 ; un répertoire de photos en couleur et grandeur nature d'agencement de triangles en papillon ; des croquis de ces agencements ; des vignettes en papier de couleur préparées par le maître et classées dans un casier où les lignes sont les couleurs et les colonnes suivant leur taille.

Activité
L'objectif est de travailler implicitement la symétrie.
Le maître propose aux élèves des papillons dont les ailes sont incomplètes, puis des moitiés de papillons réalisés avec les formes en papier.
Il leur explique que le papillon a eu un accident, qu'il a perdu une partie d'une aile, ou une aile entière. Le maître leur demande de le soigner en reconstituant l'aile incomplète ou manquante pour qu'il puisse s'envoler pour rejoindre sa famille, donc de choisir les pièces manquantes et de les coller au bon endroit.
Les élèves peuvent commencer par compléter le papillon avec les formes plastiques et ne le reproduire qu'après avec les formes en papier. Mais pour cela le papillon ne doit pas contenir trop de pièces.
Le maître a réalisé une photo du papillon reconstitué (en couleur ou en noir et blanc suivant les compétences des élèves), et également un tirage sur calque de la moitié du papillon.
La photo du papillon entier peut aider les élèves à choisir les formes papier, et le calque retourné peut servir de modèle et/ou de validation.



Un papillon réparé en fin d'apprentissage (échelle 1/4)

2.2.5 Agrandir ou réduire un modèle **(grande section)**

Les compétences :
- *savoir décomposer une forme complexe en éléments simples ;*
- *reconnaître, nommer, décrire, comparer, ranger et classer des objets selon leurs qualités;*
- *adapter son geste aux contraintes matérielles (instruments, supports, matériels) ;*
- *savoir reproduire l'organisation dans l'espace d'un ensemble limité d'objets (en les manipulant, en les représentant).*

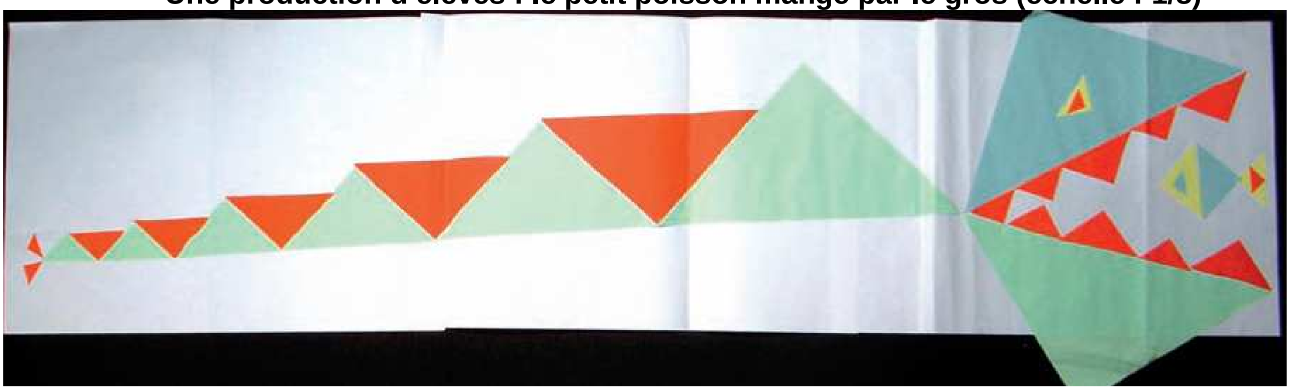
Matériel : les triangles plastiques bicolores en trois, puis quatre tailles ; des carrés de couleur découpés dans du papier A4 ; un répertoire de photos en couleur et grandeur nature d'agencement de triangles, objets figuratifs et géométriques ; des croquis de ces agencements ; des vignettes en papier de couleur de ces différents triangles préparées par le maître.
1. Les élèves classent les vignettes dans un casier à double entrée. Le classement par ligne est celui des couleurs, et le classement des colonnes est celui des tailles (première colonne taille 1 demi-carré 21x21, deuxième colonne demi-carré 15x15, etc.).
2. Le maître présente un modèle fabriqué en plusieurs tailles. Mais il manque quelques triangles. Il faut donc compléter les modèles, en identifiant chaque pièce manquante, par sa taille et par sa couleur. Pour

cela, collectivement, les élèves discutent et commandent les pièces au maître (par leur numéro et leur couleur).

3. Les élèves sont en binôme. Le maître propose un objet figuratif simple, avec trois ou quatre pièces en une, deux ou trois tailles. Il faut le reproduire en plus petit ou en plus grand. Les élèves peuvent se servir dans le casier, et faire le montage. Le groupe valide collectivement avant d'effectuer le collage.

Un bateau tricolore reproduit en quatre tailles différentes (échelle ½)

Une production d'élèves : le petit poisson mangé par le gros (échelle : 1/8)



3 CONCLUSION

La distinction reproduction-représentation (reproduire, c'est une activité manuelle faite sur des objets géométriques matériels, et représenter est une activité graphique dans le cadre de la feuille de papier) nous permet de mieux comprendre les apprentissages à l'école maternelle. Elle permet de partager le temps de la maternelle en deux, une première maternelle où les élèves ne se projettent pas encore sur la feuille de papier, et où ils apprennent à devenir des élèves notamment par des activités de reproduction, et une deuxième maternelle où ils commencent à utiliser la feuille de papier comme mémoire d'une activité, où ils commencent à représenter, tout en continuant à reproduire.
Cette distinction nous semble utile pour aider les jeunes enseignants à appréhender ce monde étrange qu'est l'école maternelle, d'où les élèves sortent deux fois plus vieux que lorsqu'ils y sont entrés.
Quand ils arrivent en maternelle, les enfants ont tout à apprendre, devenir une classe, comprendre ce que l'on attend d'eux, apprendre à distinguer les différents moments et les différentes disciplines. Les activités manuelles de la première maternelle du « reproduire » les aident beaucoup à effectuer cette mue. Et le passage à la représentation permet un passage à l'écrit dans la langue mathématique qui est une langue beaucoup plus simple que la langue écrite avec les lettres et les mots.
Du point de vue disciplinaire, ces activités aident à construire les compétences attendues par les programmes, tant du point de vue de l'identification des formes que du point de vue du repérage.
Nous espérons qu'elles donneront envie aux lecteurs de s'y essayer …

4 BIBLIOGRAPHIE

BRIAND J, LOUBET M, SALIN MH (2004) *Apprentissages mathématiques à la maternelle*. CD Hatier Pédagogie

BRITT-MARY BARTH : l'apprentissage de l'abstraction, Editions RETZ, Paris 1987. Nouvelle édition 2001

CEBE, PAOUR, GOIGOUX, CATEGO (2002) *Imaginer pour apprendre à catégoriser*. Hatier

Grand N Spécial maternelle (1999), tome 1 Approche du nombre

Grand N Spécial maternelle (2000), tome 2 structurations de l'espace

Bulletin n° 430 de l'APMEP : géométrie, 2000

GRELIER J.F. (2004) *Apprentissages géométriques au cycle 2 et 3 .* Sceren CRDP Midi-Pyrénées

GRELIER J.F. (2009) Devenir élève au cycle 1 par les apprentissages géométriques, Sceren CRDP Midi-Pyrénées

PIAGET J. (1977) *La construction du réel chez l'enfant.* Delachaux & Niestlé

PIERRARD A. (2002) *Faire des mathématiques à l'école maternelle.* Scéren, 2002

VALENTIN D. (2007) *Découvrir le monde avec les mathématiques*, situations pour la petite et moyenne section. Hatier

VALENTIN D. (2007) *Découvrir le monde avec les mathématiques*, situations pour la grande section. Hatier

Communication C5

TICE ET RECHERCHE : DES PISTES D'ÉCHANGES AVEC L'ASSOCIATION SÉSAMATH

Sébastien HACHE,
fondateur de l'association Sésamath
sebastien.hache@sesamath.net

Résumé
Cette communication présente un état des lieux du développement de Sésamath qui est devenu un média des mathématiques via différents outils (Mathenpoche, Mathematice, Sésaprof, Labomep, ...). De nombreuses questions sont posées sur : la place de ses ressources dans le système éducatif et dans la formation des enseignants, leur utilisation, leur analyse. Il est souligné que l'évolution très rapide de ces ressources en ligne en fait un objet d'étude difficile à saisir pour la recherche en didactique. Cet article présente également des pistes de partenariats (outils pour la recherche, collaborations pour améliorer les contenus, vecteur de diffusion de la recherche).

1 INTRODUCTION

Les exemples de communautés d'enseignants « bottom up » ayant atteint la dimension de Sésamath sont finalement très rares à l'échelle internationale. Or, à tous les stades de son existence, la question des liens entre Sésamath et la recherche s'est posée, tant sur le plan des usages et des contenus que sur celui de la formation des enseignants. Obéissant à des fonctionnements a priori très différents, chacun peut avoir intérêt dans cette relation, étant donné l'objectif commun qui est de permettre au plus grand nombre de personnes d'accéder à l'enseignement des Mathématiques dans les meilleures conditions qui soient. Que peut apporter la recherche et la formation à Sésamath et réciproquement ? Comment s'articulent les questions de recherche autour de Sésamath ? Où en sont les différents partenariats ?

2 POSITION DU QUESTIONNEMENT : DES TEMPS ET MODALITÉS DIFFÉRENTS

En 2005, j'ai eu l'occasion de présenter les travaux de Sésamath lors d'une réunion des membres de la COPIRELEM. Sésamath réfléchissait alors à créer des ressources pour le premier degré, essentiellement à la demande des professeurs des écoles déjà utilisateurs des ressources Sésamath/collège mais aussi des professeurs de collège intéressés par la liaison école/collège. Contrairement aux ressources pour le collège où les concepteurs étaient eux-mêmes utilisateurs, il semblait alors difficile de reproduire le même schéma avec des professeurs des écoles non spécialistes de la discipline (cette question reste actuellement une question ouverte). Cette prise de contact a initié une présence régulière de Sésamath lors des colloques de la COPIRELEM mais n'a pas pu permettre d'engager un vrai travail collaboratif, pour des raisons conjoncturelles (manque de temps des uns et des autres), mais aussi beaucoup plus structurelles. En effet, lors des différents échanges sont apparues de profondes différences d'approche, à la fois méthodologiques et presque culturelles. D'un côté, la recherche en didactique des Mathématiques travaille essentiellement, et de manière très fine, sur des objets d'étude précis et restreints. Tout le processus de la recherche elle-même tend à produire des articles, protocoles et ressources nativement très éprouvées et solides. Une fois cette solidité établie (par des processus internes aux équipes), le produit de la recherche est alors communiqué au dehors. De l'autre, dans Sésamath, des enseignants en exercice qui produisent collaborativement des ressources et les médiatisent rapidement sur Internet, tout à la fois lieu de publication, mais aussi lieu de dépôt des brouillons successifs. D'un côté donc, un temps long de maturation, des contenus en nombre volontairement restreint, pour ainsi dire scientifiquement éprouvés et un processus très codifié d'édition et de publication. De l'autre, un temps court, en phase avec l'évolution rapide des nouvelles technologies, engendrant des corpus massifs pour atteindre des paliers de travail collaboratif, avec des règles de publication très souples, adaptatives, la publication étant le premier stade d'une vie plus ou moins longue d'adaptations et de modifications. D'un côté, une démarche plutôt déductive, s'appuyant sur les travaux antérieurs... de l'autre une démarche plutôt inductive,

presque instinctive, s'appuyant constamment sur l'essai-erreur et même sur des méthodes calquées sur la « fausse position ». Dans le cas de Sésamath, il n'y a pas de distance entre le lieu de la production, le lieu de l'expérimentation et le lieu de la publication : cette absence de distance peut rapidement démultiplier l'impact à court terme (surmédiatisation ?) et enclencher des tas de processus d'autoformation, d'adaptation des pratiques mais sans véritable contrôle, sans analyse a priori ou a posteriori. Le risque pour la recherche est de rester enfermée dans une tour alors même que tout n'est que mouvement dans la société actuelle... le risque pour Sésamath est d'être incapable de maîtriser les processus enclenchés, en particulier celui des modifications vertueuses, et donc de participer paradoxalement à un appauvrissement généralisé des pratiques, à une forme de culture de l'immédiateté et à une course folle des technologies vides de sens. Cette distinction est évidemment très caricaturale mais permet quand même de bien mesurer la difficulté d'un tel partenariat et sa richesse potentielle. Comment conjuguer les forces de ces deux logiques ? Quelles modalités « gagnant/gagnant » peuvent être mises en place ?
Dans un récent rapport à l'UNESCO concernant « Les défis de l'éducation mathématique et scientifique dans la scolarité de base » Michèle Artigue a écrit une annexe sur le cas de l'association Sésamath : « Annexe 11 : L'émergence de communautés d'enseignants - l'exemple de Sesamath ». On peut en particulier y lire les paragraphes suivants :
« L'association Sesamath a développé initialement son projet en contact direct avec les
utilisateurs finaux et sous leur contrôle mais en dehors des médiateurs traditionnels que sont en France l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), les IREM (Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques) et la communauté didactique. Les choix effectués, et en particulier la volonté de couvrir très vite l'ensemble des programmes des quatre années du collège, ont conduit à des ressources utilisables mais facilement critiquables. Et les critiques ont été vives, renforcées par le succès même remporté par Mep, la méfiance vis-à-vis de cette communauté d'enseignants de terrain développant leur projet de façon autonome et avançant si rapidement, et les réserves de beaucoup, à la fois enseignants, didacticiens et institutionnels, vis-à-vis de ce type de ressource technologique.
En fait, dès 2004, un rapprochement avec les IREM s'est opéré conduisant à la création d'une commission inter-IREM/Mathenpoche, rebaptisée plus tard «Ressources en ligne». Assez vite aussi, des liens se sont établis avec des didacticiens qui ont commencé à analyser les exercices de la base sur des domaines précis, ont suggéré des améliorations et ont aussi essayé de cerner les usages faits de Mep par les enseignants et les effets de ces usages sur les élèves. Ce faisant, ils ont découvert une qualité d'écoute, une réactivité et des capacités d'adaptation auxquels généralement ils ne s'attendaient pas. Ceci est cohérent avec la vision des créateurs de Sesamath qui voient les ressources, non comme des objets qui sont diffusés seulement après avoir été patiemment élaborés, testés et améliorés, mais comme des objets beaucoup plus rapidement partagés, ne prétendant pas être optimaux mais pensés pour pouvoir évoluer et être adaptés en permanence dans le cadre d'un travail collaboratif. En résultent de nombreuses questions pour lesquelles les réponses nécessitent le développement de recherches appropriées. »

3 QUESTIONS DE RECHERCHE

3.1 La production et la médiation de ressources pédagogiques

La production de ressources pédagogiques dépasse le cadre de la didactique des Mathématiques. Elle soulève en effet des questions d'ordre social et économique. Il est très important de l'intégrer dans toute réflexion concernant Sésamath. Qu'en est-il de la création de ressources pédagogiques libres dans l'environnement économique actuel ? Comment se situe Sésamath par rapport à d'autres collectifs comme Wikipedia ou des communautés de développeurs de logiciels libres ? Plus généralement, comment qualifier le travail de cette association d'enseignants par rapport au service public d'éducation et son évolution actuelle ? Ces questions dépassent le propos de cet article et font l'objet de recherches croisées entre sociologues et économistes. Elles ne sont pas spécifiques aux mathématiques même si on peut penser que les mathématiques présentent des spécificités, en particulier concernant la liberté des sources. Sur ces aspects socio-économiques, on mentionnera les travaux de mémoire sur Sésamath (en cours d'Isabelle Quentin (Quentin, 2009) et de Clément Bert-Erboul (Bert-erboul, 2009).
Concernant plus particulièrement l'aspect didactique, Sésamath pose des questions à différentes échelles. En particulier, avec plus d'1,5 millions de visites mensuelles, Sésamath est devenu un média

des mathématiques. En tant que tel, il peut amener des mathématiques là où il n'y en avait pas ou peu et changer la relation qu'ont les élèves par rapport à cette discipline. Cet aspect médiatique, massif, n'est pas forcément directement corrélé à la qualité des contenus. L'une des difficultés concernant la recherche sur l'impact de Sésamath tient en partie à cette difficulté de regarder à la fois le média et les contenus qu'il véhicule.
Pour autant, la question de la qualité intrinsèque des ressources est posée : comment ces ressources évoluent-elles dans le temps ? Comment s'articulent-elles avec des usages ? Les travaux de Luc Trouche dans le cadre du SFODEM (Trouche, 2008) permettent de donner un cadre théorique à ces « viviers de ressources » qui peuvent évoluer très rapidement.
Comment les enseignants adaptent-ils les ressources proposées ? Dans quelle mesure y-a-t-il consommation ou réappropriation ? Répondre convenablement à de telles questions nécessiterait des recherches assez lourdes, avec un volet statistique et qualitatif : en tant que média, Sésamath pourrait servir à faciliter de telles recherches si elles voyaient le jour.

3.2 La formation des enseignants

C'est une question centrale. Il faut sans doute distinguer la formation à l'utilisation d'outils technologiques ou logiciels et la formation à l'enseignement des Mathématiques, même si ces deux aspects sont évidemment liés. Le postulat qui a prévalu de nombreuses années dans Sésamath était que la formation pouvait être un corollaire de la co-construction de ressources pédagogiques. Autrement dit, construire collaborativement des ressources pédagogiques peut en particulier amener à se poser des questions sur sa pratique et amener à la modifier le cas échéant. Ce fonctionnement a sans doute été vrai pour le noyau des contributeurs (plusieurs centaines), c'est en tous cas ce qu'on retrouve dans les entretiens réalisés par les chercheurs avec les membres de l'association, mais beaucoup moins vrai pour l'ensemble des utilisateurs (plusieurs dizaines de milliers). Au niveau des contributeurs, fortement impliqués, il n'était pas besoin d'être injonctif quant à l'utilisation des ressources puisque chacun cherchait à en tirer le meilleur parti. Cette absence d'injonction, de direction, laissant à chacun le soin d'optimiser dans sa pratique l'utilisation de ces ressources, peut poser problème dès lors que celui qui les reçoit ne se place pas dans une position de recherche mais plutôt de consommation. Ceci est évidemment renforcé quand les ressources en question sont fortement organisées et cohérentes (cas de Mathenpoche et des manuels Sésamath par exemple). Cet aspect a fait l'objet de beaucoup de critiques, à la fois institutionnelles mais aussi venant de la recherche. Concernant le premier degré, il semble que ce soit cette crainte précisément qui a été le plus souvent formulée (de différentes façons). Clairement, il s'agit d'un paradoxe pour Sésamath : l'association a besoin d'une large médiatisation pour générer le travail collaboratif réflexif… mais cette large médiatisation peut entraîner un phénomène d'institutionnalisation et de consommation passive. Ce paradoxe n'a pas été identifié tout de suite, mais il est clairement au centre des préoccupations de l'association depuis plus d'un an maintenant. En particulier, il a directement initié deux projets très importants de Sésamath. Le premier est la revue Mathematice, qui vise à susciter et mutualiser les usages plutôt que les contenus. Le second est le site Sésaprof (8000 profs de Maths inscrits) dont l'objectif initial est de servir à créer des communautés de pratiques beaucoup plus larges que le noyau central. Il est difficile de faire un bilan, mais il est clair qu'il est très difficile d'élargir la réflexion et de sortir de comportements consuméristes : cette difficulté oblige en retour à distinguer plusieurs niveaux de finalisation des ressources et de se poser la question de la qualité et de l'impact de celles dont on sait qu'elles peuvent être consommés avec peu de recul.

3.3 Des indicateurs sur les pratiques réelles des enseignants

L'informatique et en particulier Internet ont cette particularité à la fois fascinante et très inquiétante de pouvoir traiter et mémoriser un très grand nombre d'informations. Si par ailleurs, les outils s'adressent à un large public d'utilisateurs, comme c'est le cas dans Sésamath, alors on peut penser qu'il y a là matière à mieux comprendre les pratiques réelles des enseignants sur une large échelle. Evidemment, tout cela est à nuancer fortement. Il ne faut pas en particulier minimiser tous les biais possibles (et ils sont nombreux) et les questions éthiques liés au traitement de ces informations. Ceci dit, on peut penser que pour le collège en particulier, Sésamath peut être un terrain de recherche intéressant concernant les pratiques ordinaires des enseignants. Une application comme mathenpoche-reseau peut, par exemple, servir à analyser la réussite à certains types d'exercices, réalisés plusieurs dizaines de milliers de fois. Plus globalement, la façon dont certaines ressources émergent d'un travail collaboratif doit sans doute témoigner de certaines pratiques ou postures communes. A la fois en terme d'usage et de conception, Sésamath constitue donc sans doute un stock de données potentielles à très large spectre, un peu comme peuvent l'être certaines évaluations nationales, mais sans justement les biais du protocole de ces évaluations (ce qui entraîne aussi d'autres biais, sans doute).

4 PISTES DE PARTENARIATS

4.1 Des outils pour la recherche : cas du boulier virtuel et de la calculatrice cassée

Dans sa conférence au colloque COPIRELEM, Ghislaine Gueudet (Gueudet, 2009) a en particulier montré le boulier virtuel créé dans le cadre de Sésamath. Loin de se substituer au boulier réel, le boulier virtuel a quand même des spécificités : en affichant le nombre en temps réel (si on le souhaite), il peut par exemple permettre à un élève de comprendre son fonctionnement de manière expérimentale. Placé dans un environnement comme Mathenpoche-réseau (ou prochainement Labomep), un tel boulier peut par ailleurs devenir un « mouchard paramétrable » : « mouchard », car il pourra garder la mémoire de l'utilisation que pourront en faire de multiples élèves (y compris temps passé, hésitations au besoin...) constituant un matériau riche pour le chercheur... « paramétrable », car il peut être potentiellement paramétré dans un tel environnement (fonctionnalités, place de la virgule...). Cet exemple illustre de façon claire la façon dont Sésamath peut venir aider ou compléter des recherches en cours.
Il y a un autre exemple en tous points identiques. Sésamath a développé dans le cadre du projet Calculatice, une calculatrice cassée virtuelle. Ce développement a fait écho à des recherches menées par l'équipe de didactique de l'université de Sherbrooke (Lajoie, 2009) au Québec. De la même façon que pour le boulier, cette calculatrice cassée, plongée dans Labomep, est un outil de recherche en tant que tel et un outil qui aide la recherche en permettant de collecter facilement des résultats. Un travail dans ce sens a été amorcé avec cette équipe.

4.2 Des collaborations avec des spécialistes pour améliorer les contenus : le cas de « statistix »

Statistix est une association visant à promouvoir l'enseignement des proba-stats, fondée et présidée par Claudine Schwartz. Statistix est récemment devenu un projet soutenu par Sésamath et Claudine Schwartz est devenue membre de Sésamath. Cela permet en particulier au projet Statistix de bénéficier de la médiatisation de Sésamath. Mais en retour, Sésamath gagne une grande expertise sur un domaine où justement les enseignants sont fort démunis. En particulier, Sésamath et Statistix travaillent sur quelques activités communes, par exemple dans le domaine de l'utilisation des TICE. Toutes les ressources présentées par Sésamath en proba-stats bénéficient aussi progressivement de cet apport expert, au rythme des mises à jour et des disponibilités de chacun. Cet exemple de partenariat pourrait devenir prototypique et étendu à d'autres spécialités mathématiques. Il permet en effet une formation du noyau central et une amélioration qualitative très nette des ressources concernées. Très adapté au cas d'une branche des mathématiques en quête légitime de médiatisation, il faut voir si cela est transposable à d'autres branches et comment Sésamath peut gérer de tels apports.

4.3 Un vecteur pour la diffusion de la recherche : le cas du projet Pepite

Pepite est une partie du projet Lingot. Pour simplifier, Pepite propose un test diagnostique sur les difficultés des élèves en Algèbre au début du lycée. L'enseignant récupère alors des profils d'élèves, suivant les erreurs commises. Il s'agit d'un travail qui a une forte cohérence et a demandé un gros travail de recherche. Sésamath n'a pas participé à ce travail. Les développements informatiques de Pepite ont été faits dans le cadre de recherches en Informatique. Mais à l'usage et malgré l'intérêt de l'outil, l'équipe qui l'a développé a eu beaucoup de mal à le faire connaître et à rendre facile son utilisation massive. Or, Pepite est arrivé à un stade où cette diffusion est non seulement possible mais permettrait aussi de nourrir les recherches sur l'utilisation de l'outil. Le partenariat avec Sésamath se situe précisément à ce niveau-là. En permettant, à terme, d'intégrer Pepite à Labomep, c'est une porte qui est potentiellement ouverte vers un grand nombre d'enseignants de Mathématiques qui pourront a priori très facilement utiliser l'outil. En retour, Sésamath y gagne en densité, mais aussi en expertise sur la question diagnostique qui peut être étendue à d'autres domaines que celui de l'Algèbre.

5 CONCLUSION

Une conclusion en forme d'ouverture : si les lignes précédentes vous parlent, si elles font naître l'idée de partenariats possibles, eh bien Sésamath est ouvert aux propositions. Ensuite, le temps et les occupations des uns et des autres, rendront peut-être difficiles la mise en place effective de tels partenariats. Mais le champ d'expérimentation est ouvert !

6 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE M. (2007) La didactique des mathématiques face aux défis de l'enseignement des mathématiques. *Colloquium de didactique des mathématiques*. Paris.
http://www.ardm.asso.fr/rencontre/semin/s200710/Colloquium-Artigue.pdf

BERT-ERBOUL C (2009) *Quand le manuel Sésamath bouscule le marché de l'édition scolaire*. USTL. Département de sociologie. Mémoire de Master 1.

CAZES C., GUEUDET G., HERSANT M., VANDEBROUCK F. (2004) Using Web-based learning environment in teaching and learning advanced mathematics. *ICME 10, Copenhagen*, July 4-11, 2004.

DUBOIS M.-C., GUEUDET G.., JULO J., LE BIHAN C., LORIC F. (2008) Quels échanges pour quels usages de MathEnPoche ? Article en ligne sur *MathemaTICE* :
http://revue.sesamath.net/spip.php?article149

GUEUDET G. (2007) Emploi de Mathenpoche et apprentissage : l'exemple de la proportionnalité en Sixième. *Repères IREM*, **66**, 5-25.
http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/66gueudet.pdf

GUEUDET G. (2009) Travailler avec Mathenpoche autrement ? *Repères IREM*, **75**, 69-83.
http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR09011.htm

GUEUDET G. (2009) Ressources en ligne, enseignement et apprentissage des mathématiques au premier degré. *Actes de ce colloque,* Auch 2009.

GUIN D., TROUCHE L. (2004) Intégration des TICE : concevoir, expérimenter et mutualiser des ressources pédagogiques. *Repères IREM*, **55**, 81-100.
http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/55_article_387.pdf

GUIN, D., TROUCHE, L. (2008) Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs : le cédérom SFoDEM 2008. *Repères IREM*, **72**, 5-24.

HERSANT M., VANDEBROUCK F. (2006) Bases d'exercices de mathématiques en ligne et phénomènes d'enseignement-apprentissage. *Repères IREM*, **62**, 71-84.
http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR06004.htm

KUNTZ G.. (2004) Mathenpoche : de la percée institutionnelle vers un espace numérique de travail. *Bulletin de l'APMEP*, **452**, 418-431.
http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/AAA04041.htm

KUNTZ G., HACHE S., CLERC B. (2009) Sésamath : un modèle pour créer, éditer et apprendre des mathématiques, dans un nouveau cadre économique. *Repères IREM,* **75**, 46-66. http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR09010.htm

LAJOIE C. (2009) La calculatrice comme source et support de questions fécondes : quelques exemples pour la classe de mathématiques au primaire et pour la formation des maîtres. *Bulletin AMQ,* vol XLIX n°1, Mars 2009.

QUENTIN I. (2009) *Fonctionnement et impact de Sésamath : une étude exploratoire*. Recherche didactique des sciences et des techniques ENS Cachan. Master 2.

RUTHVEN K., HENNESSY S. (2002) A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics* **49(2-3)**, 47-86.

SABRA H. (2009) Entre monde du professeur et monde du collectif : réflexion sur la dynamique de l'association Sésamath. petit x **81**. 55-78

WENGER, E. (2005) *La théorie des communautés de pratique*. Presses de l'Université Laval, Laval (http://books.google.fr/books?id=MRZsyGExGsQC, puis aperçu du livre).

Communication D1

DIFFICULTÉS ET RÉUSSITES DES ENSEIGNANTS MEXICAINS DE L'ÉCOLE PRIMAIRE FACE AUX PROGRAMMES Á TENDANCE CONSTRUCTIVISTE DE LA DERNIÈRE DÉCENNIE[1]

David Block
Département des Recherches en Education. CINVESTAV Mexico
dblock@cinvestav.mx

Résumé
Depuis 1993, les programmes de l'école primaire mexicaine, s'appuyant sur les recherches en didactique, imposent un enseignement des mathématiques basé sur la résolution de problème. Quinze ans après leur mise en place, l'étude décrite ici cherche à connaître l'appropriation de ces programmes par les enseignants, les difficultés et réussites qu'ils rencontrent dans leur mise en œuvre.
Après une rapide description du contexte de l'enseignement primaire mexicain et de l'approche didactique proposée par les programmes de mathématiques, l'article présente certains des résultats obtenus à partir de l'analyse d'entretiens faits avec des enseignants et de l'observation de séances de classe, et, notamment, certaines conditions nécessaires à une mise en œuvre satisfaisante d'un enseignement basé sur la construction de savoirs par la résolution de problèmes.

En 1993, dans l'idée d'améliorer la relation des élèves avec les connaissances, a été mise en place au Mexique une réforme des programmes qui officialise l'approche constructiviste malgré ses ambiguïtés et les différentes interprétations faites par les multiples acteurs impliqués. Cette réforme se caractérise par la participation de la communauté des chercheurs en didactique, qui, après 20 années de travail, ont atteint un certain niveau de perfectionnement. En Mathématiques, une des équipes participantes est en relation étroite avec les équipes françaises en didactique dans cette discipline.
Quinze années après l'entrée en vigueur de ces programmes, le Ministère a mis en place un programme d'études et d'évaluations des différents aspects de la réforme. Je présente ici les résultats d'une de ces études[2] dont l'objectif est de faire connaître les diverses formes d'appropriation des propositions pour l'enseignement des mathématiques issues de la réforme de 1993, à travers les difficultés rencontrées par les maîtres et les stratégies que ceux-ci développent pour réussir.
Nous ferons d'abord une brève présentation de l'école primaire mexicaine, puis nous décrirons de façon générale l'approche didactique pour l'enseignement des mathématiques proposée dans les programmes de 1993. Après une description rapide des aspects méthodologiques, je présenterai quelques résultats.

1 L'ÉCOLE PRIMAIRE AU MEXIQUE. QUELQUES DONNÉES

La population totale du Mexique est de 104 millions d'habitants, dont un peu plus de 10% appartiennent à des communautés indigènes où l'on parle plus de 300 langues ou dialectes différents.
Il y a à peu prés 15 millions d'élèves à l'école primaire et 560 000 enseignants dans un peu plus de 100 000 écoles : 83% sont des écoles publiques et 17% des écoles privées. 55% d'entre elles bénéficient d'un enseignant pour chaque classe, et 45 % n'ont qu'un seul enseignant pour deux classes ou plus. 30 % de ces écoles possèdent au moins un ordinateur relié à Internet.

[1] Ce texte est une adaptation du texte plus ample de Block et al, 2007.
[2] Projet de recherche: *Le rôle de l'atelier "L'enseignement des mathématiques a l'école primaire", dans les processus d'appropriation des programmes scolaires de la réforme de 1993 par les professeurs*. David Block (Coord.) Martha Dávila, Silvia García, Patricia Martínez F., José A. Moscoso, Ligia Ramírez, Margarita Ramírez V., Diana Solares, Laura Reséndiz (aux.), Minerva Reséndiz (aux.)

La durée moyenne de la scolarité est de sept ans. Les programmes sont centralisés, les manuels scolaires officiels gratuits et l'enseignement est obligatoire pour tous les enfants du pays.
La journée de classe est de seulement quatre heures dans les écoles publiques, car celles-ci offrent « deux tours » pour répondre à la demande.
Le système scolaire comprend quatre niveaux : maternelle, entre trois et cinq ans ; primaire, entre six et onze ans ; secondaire entre 12 et 14 ans, et « préparatoire » entre 15 et 17 ans. L'école est obligatoire à partir de la deuxième année de la maternelle (quatre ans) jusqu'à la troisième année du secondaire (14 ans).
Les enseignants de l'école primaire sont titulaires d'une licence d'enseignement en quatre ans. Lors de cette formation, ils reçoivent, pendant un an, un cours de 216 heures sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Par la suite, la formation continue dans ce domaine est de qualité variable, plutôt pauvre. La participation des enseignants à certains cours a une répercussion sur leur salaire.

2 L'APPROCHE DIDACTIQUE DES PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES DE 1993.

La caractéristique fondamentale de cette approche est l'importance accordée à la résolution de problème comme source d'apprentissage, et comme lieu de signification des notions (Secretaría de Educación Pública 2002 et 2003).
Il est attendu des enseignants qu'ils favorisent la participation des élèves à la résolution de certains problèmes avant même que les connaissances que ceux-ci impliquent ne leur soient enseignées. Les enseignants doivent valoriser de manière positive les procédures initiales de résolution, non formelles et parfois incorrectes, que les élèves mettent en jeu lors de leurs premiers essais, et, dans une certaine mesure, donner aux élèves un rôle dans la validation des productions réalisées en classe (Balbuena, Block, Carvajal, 1995).
Des changements sont également perceptibles dans l'organisation des contenus mathématiques qui sont enseignés. Par exemple, il ne faut plus enseigner les nombres un par un, comme cela a été fait pendant des décennies, mais plusieurs à la fois, dans des situations qui les impliquent tous ; il faut donner une grande place aux problèmes additifs et multiplicatifs de différentes structures sémantiques, alors que l'importance du calcul diminue (Block y Álvarez, 1999).
Pour mettre en œuvre cette réforme, les maîtres ont eu accès à une formation de longue durée (non obligatoire) sur l'enseignement des mathématiques (120 heures) et à des ateliers courts (six heures) pour chaque niveau scolaire. Le manuel officiel de mathématiques pour l'élève, une brochure pour le maître et un fichier d'activités sont également à leur disposition.

3 MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

L'étude que nous avons faite est qualitative et a été menée auprès d'un groupe de 21 enseignants. Le seul critère de sélection des enseignants a été leur réussite à un examen organisé par le Ministère pour évaluer leurs connaissances concernant les programmes et l'approche didactique. De cette façon, nous étions sûrs qu'ils connaissaient les programmes.
Nous avons procédé à des entretiens individuels et à des observations de classes. Nous avons essayé d'utiliser les outils de deux cadres théoriques : la TSD pour l'analyse des séquences didactiques mises en œuvre par les maîtres et des interactions en classe, et l'approche ethnographique de la pratique des enseignants, pour essayer d'évaluer leur façon d'aborder la problématique de la réforme.
Nous sommes partis de l'idée que les propositions didactiques subissent de multiples transformations lorsqu'elles sont mises en œuvre par les maîtres dans les classes. Ce phénomène a été largement étudié et expliqué selon diverses perspectives. Les études ethnographiques sur les techniques d'enseignement ont largement contribué à démystifier la soi-disant transparence existant entre les modèles pédagogiques et les pratiques réelles de l'enseignement. Elles ont permis de comprendre que les maîtres construisent leur pratique à partir de leur propre biographie, dans des conditions scolaires spécifiques, en fonction des ressources culturelles dont ils disposent (Rockwell et Mercado, 1988). Espinosa (2004) signale que les

maîtres ne se limitent pas à utiliser les propositions pédagogiques telles qu'elles sont prescrites, ils en refont l'élaboration, ils les reformulent, parce qu'ils les « remplissent avec leurs propres intentions ».
En ce qui concerne la didactique des mathématiques, on connaît l'existence de relations entre les multiples décisions prises par le maître lorsqu'il enseigne un contenu, en utilisant ses conceptions pas toujours explicites sur la discipline enseignée, sur la façon dont les élèves apprennent (Artigue y Perrin G.1991, Carrillo 1995; Block, Dávila y Martínez, 1995), et en fonction des connaissances qu'il a du thème particulier qu'il enseigne (Ramírez, 2004). D'autre part, l'idée même d'une méthode facilitant l'apprentissage dans la salle de classe a été fortement critiquée ; on lui a opposé l'importance de trouver un équilibre entre divers types de « contrats » ou de relations didactiques (Brousseau, 1995).

4 QUELQUES RÉSULTATS

Notre étude confirme l'hétérogénéité des interprétations et des évaluations que les maîtres font des différents composants des programmes, ainsi que la diversité des manières dont ils les mettent en œuvre. Nous présenterons ici quelques résultats tirés des entretiens que nous avons menés, et quelques observations découlant de l'analyse des classes. Ces observations révèlent un large éventail de pratiques et d'utilisations de la proposition officielle, dans la salle de classe.

4.1 Les entretiens

Nous avons demandé aux enseignants, entre autres questions, leur avis sur les nouveaux programmes, les aspects qu'ils en ont repris, ceux qu'ils ont rejetés, les différences qu'ils trouvent entre l'approche didactique de ces nouveaux programmes et celle des anciens.

Aspects généraux largement partagés.

Nous avons identifié un ensemble de considérations courantes qui, d'une manière générale bien qu'un peu vague, ont une relation avec l'approche didactique des nouveaux programmes. Par exemple : les enseignants considèrent que les élèves apprennent en résolvant des problèmes ; certains questionnent le vieux modèle "j'apprends- j'applique"; ils parlent souvent de l'aspect ludique des mathématiques ; de plus, ils disent qu'ils utilisent beaucoup les outils qui accompagnent les nouveaux programmes, surtout le manuel officiel pour les élèves.

Pratiques considérées comme divergentes de l'approche didactique officielle.

Parmi les considérations générales antérieures, certaines accusent une certaine rigidité. Par exemple, plusieurs enseignants nous ont laissé voir qu'ils considéraient que des pratiques telles qu'« exercer les algorithmes », « fournir de l'information ou des explications aux élèves », « signaler aux élèves leurs erreurs » n'étaient plus acceptables dans la perspective de l'approche didactique des nouveaux programmes. Ceci ne veut pas dire que les enseignants aient abandonné ces pratiques, simplement qu'ils les considèrent en quelque sorte comme "interdites".

Aspects qui se radicalisent.

Nous avons observé chez plusieurs enseignants une tendance à interpréter de façon extrême certaines caractéristiques de l'approche didactique proposée. Par exemple ils affirment que selon cette approche, *tout* doit s'apprendre à partir de problèmes, *toutes* les procédures doivent être soumises à l'analyse collective, le travail doit *toujours* se faire en équipe.

Aspects des approches antérieures qui prévalent sur celles de 1993.

Dans les caractéristiques des nouveaux programmes telles qu'elles sont définies par les enseignants, nous avons trouvé aussi des superpositions d'éléments appartenant à des approches didactiques issues de périodes différentes. Par exemple, la recommandation d'utiliser du matériel concret pour vérifier des hypothèses dans certaines situations est souvent confondue avec la manipulation du matériel en soi, comme s'il s'agissait d'une sorte d'étape précédant la représentation symbolique. L'importance donnée aux problèmes pour favoriser les apprentissages est interprétée comme une préconisation à poser des problèmes *de la vie quotidienne,* ou à « mettre en contexte » les notions enseignées, ce qui, effectivement, n'est pas tout a fait faux, mais laisse de côté la question centrale de la recherche de situations qui

fonctionnalisent les savoirs, tout en permettant une approche aux élèves qui n'ont pas encore acquis ces savoirs.
En résumé, les principes les plus généraux de l'approche didactique des programmes de mathématiques paraissent être connus, mais on observe une certaine polarisation, un amalgame avec les idées générales d'autres approches et l'omission des aspects les plus précis de cette approche.

4.2 Les classes des enseignants

L'observation de classes nous a permis d'entrevoir différentes formes et degrés d'appropriation des programmes de 1993. Nous avons pu connaître un peu mieux certains aspects de ces processus, les réussites et les difficultés.
Les maîtres constituant le petit échantillon de notre étude avaient des conditions de travail plus ou moins homogènes et favorables : écoles avec un seul maître par classe, dans la ville de Mexico, formation universitaire supérieure à la licence en éducation pour la plupart, et une bonne connaissance des programmes. Néanmoins, nous avons relevé une grande diversité dans leurs modes de relation avec les propositions de la réforme. Pour certains, la relation est faible et s'exprime par la sélection de seulement quelques-unes des activités proposées qu'ils insèrent dans leur progression, avec une approche didactique éloignée de celle qui est proposée. Certains décident de prendre des risques de façon limitée, à travers l'organisation d'un « atelier du vendredi » par exemple, ou en choisissant un seul sujet du programme pour essayer la nouvelle approche. D'autres s'identifient pleinement avec l'approche didactique, mais manquent d'outils pour la mettre en œuvre. D'autres encore s'approprient largement les principaux éléments de l'approche didactique, mais avec une autonomie qui leur permet de faire des choix et des adaptations importantes.
J'ai choisi d'analyser quelques caractéristiques de l'enseignement des mathématiques chez deux enseignants qui me semblent représentatifs de cette diversité, tout en permettant d'entrevoir les conditions qui favorisent les changements ou celles qui les rendent difficiles.
Aarón[3] est un enseignant de quatrième année. Il se montre convaincu par les idées générales de l'approche didactique des programmes, mais il ressent des difficultés importantes quant à leur mise en œuvre. Pendant les séances que nous avons observées, il a travaillé sur l'aire du triangle.
Nous avons pu voir que, lors de la résolution des problèmes, les élèves se mettent au travail avec une certaine autonomie et que la mise au point (ou confrontation) occupe une place importante dans la classe. Aaron reconnaît et valorise les réponses non conventionnelles mais correctes, et consacre des moments en classe pour repérer ce qui est important.
Cependant, Aaron éprouve de grandes difficultés quand il s'agit de passer de la manipulation des objets à la mise en évidence d'une relation. Par exemple, il a organisé plusieurs activités avec du matériel concret pour que les élèves constatent que l'aire du triangle rectangle est la moitié de celle du rectangle (papier quadrillé, géoplan, découpage). Ensuite, il a essayé d'obtenir une généralisation à partir d'un cas particulier :

> (Sur le tableau : rectangle d'aire 30 divisé en deux triangles par une diagonale)
>
> ***Enseignant :*** *15 par rapport à 30, ça fait combien ?*
>
> ***Élève :*** *45*
>
> ***Enseignant :*** *non … (j'ai dit) 15 par rapport à 30, et non pas 15 et 30.*
>
> ***Luis :*** *ça fait 45, monsieur*
>
> ***Élève :*** *cela fait quinze*
>
> ***Enseignant :*** *Voyons donc Oscar ?*
>
> ***Oscar :*** *15 ?*
>
> ***Enseignant :*** *15 quoi?*

---
[3] Les noms ont été changés

Oscar : *centimètres carrés.*

Enseignant : *Je vais vous le dire autrement, combien de fois 15 dans 30 ? C'est la moitié, le quart, le huitième ?*

Élèves : *la moitié !*

Enseignant : *C'est la moitié, c'est-à-dire, regardez, un triangle mesure la moitié de son rectangle. N'est-ce pas ? Oui ? Vous êtes tous d'accord ?*

Élèves : *Oui.*

(…)

La principale difficulté réside probablement dans le fait que, pour déduire une règle générale, il faut disposer de plusieurs cas particuliers déjà connus et non pas d'un seul. De plus, la question *combien fait 15 par rapport à 30 ?* n'est pas favorable à la recherche d'une relation générale. Ce type de difficulté est à mettre en relation avec l'organisation des processus inhérents à l'activité mathématique des élèves, dans ce cas, avec la généralisation et l'élaboration de formules.
Aaron rencontre aussi des difficultés dans les processus de validation et d'institutionnalisation. Voyons un exemple :
Les élèves, organisés en équipes, ont proposé plusieurs expressions pour exprimer la formule de la surface du triangle. Elles ne sont pas toutes correctes.

a) $\frac{b \times a}{\times 2}$ c) $\frac{b \times a}{2\overline{)\ldots\ldots}}$

b) $\frac{b \times a}{)\ldots 2}$ d) $2\overline{)b \times a}$

Lors de la mise en commun le maître leur a demandé quelle formule devrait être copiée dans leur cahier :

Enseignant : *(…) Très bien … On copie lesquelles ?*

Élèves : *Toutes, toutes*

Enseignant *: Toutes, bien sûr, très bien. Toutes, parce que toutes nous ont plu (…).*

On peut y voir une intention de donner une place au choix de chacun, mais ce n'est pas une situation qui aide à identifier les erreurs.
Je commente maintenant le cas d'une enseignante qui réussit mieux la mise en œuvre de l'approche didactique des programmes : Mar, enseignante en sixième année de l'école primaire.
Nous avons observé quatre séances portant sur la comparaison des fractions. Mar a repris la séquence proposée dans le livre de l'élève, mais en y introduisant plusieurs changements : elle a laissé de côté certaines activités considérées trop difficiles pour ses élèves, et a intercalé des activités personnelles faites dans le même esprit que celles de la proposition officielle. De plus, elle nous a dit que, vers la fin de l'année, elle s'éloigne davantage des programmes pour travailler sur ce qui, de son point de vue, manque à ses élèves, comme la maîtrise des algorithmes. Ces adaptations cherchent donc à combler les lacunes de la proposition officielle, en fonction de ce que cette enseignante considère nécessaire pour ses élèves.
Quant au déroulement de chaque séance, nous avons observé des moments fréquents de travail autonome des élèves, préalables à l'intervention de l'enseignante, et des moments de mise en commun, d'institutionnalisation et d'affirmation. Il est important de le souligner car l'organisation de tels moments est l'un des aspects peu clairs et souvent mal compris des recommandations officielles.
Mar fait preuve d'assurance dans ses décisions, même lorsqu'elle les considère divergentes de l'approche didactique officielle.
Nous allons présenter quelques exemples d'interventions observées pendant la classe de Mar, pour montrer la forme avec laquelle elle a réussi à mettre en œuvre certaines orientations de l'approche didactique des programmes de 1993, ainsi que des questions qu'elle domine moins bien.
Au cours d'une activité, elle a systématiquement valorisé les procédures qui permettent aux élèves de comparer les fractions sans l'appui du matériel concret (réglettes)

Mar*: très bien merci, nous allons voir et revoir cela …, Linda, César, écoutez : on dit que 4/6 est plus petit que 1 (en montrant le dessin réalisée par l'équipe) et 6/4 donne plus que 1, et ainsi vous* *pouvez déterminer si c'est plus petit ou plus grand. D'accord, César ? Tu as compris ? C'est sûr ? Bien, certains n'ont donc pas besoin de la droite (numérique), nous sommes en train de chercher… par le raisonnement, si c'est plus petit qu'un entier ou plus grand qu'un entier. [MCL1:P350]*

Après deux séances au cours desquelles les élèves comparent des fractions ayant des caractéristiques particulières, Mar ferme la séquence avec une intervention clairement destinée à résumer et à conclure, en introduisant les termes plus exacts. Il s'agit d'une typique intervention d'institutionnalisation.

***Mar** : dans ces trois exercices, [3/4 comparé à 3/5, 8/7 et 8/9, 11/8 et 11/7], le chiffre du haut, qui s'appelle numérateur, est le même pour les deux fractions. Ingrid ! Lorsque le numérateur est le même, la fraction la plus petite est celle qui a, voyez vous, le plus grand numérateur[4]: c'est l'observation que l'on peut faire. C'est pour cela que l'on procède de cette manière (en montrant la deuxième série d'exercices).*

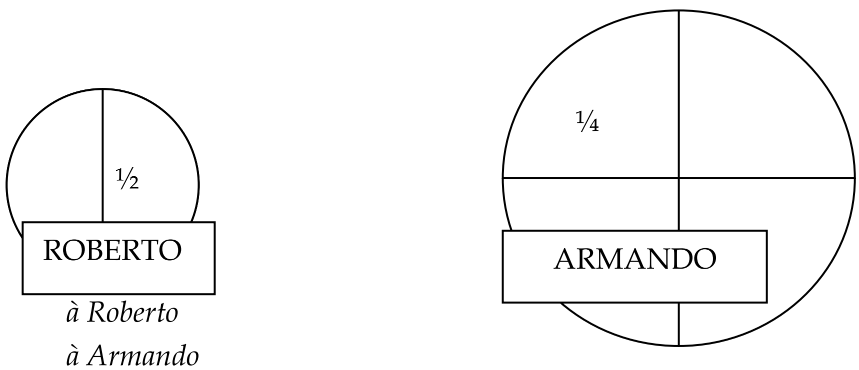
Si les numérateurs sont les mêmes et si le dénominateur est plus grand, cette fraction sera la plus petite (en montrant les fractions enfermées dans un cercle). Regardez attentivement, ces trois-là, ou faut-il les mettre ? trois et trois,[3/4 et 3/5] huit et huit [8/7 et 8/9] onze et onze [11/ 8 et 11/ 7], avec des dénominateurs différents. Quand le dénominateur est plus grand, la fraction est plus petite. [MCL1:P358]

Certains élèves utilisent mal la propriété selon laquelle plus le dénominateur est petit plus la fraction est grande, car ils ne tiennent plus compte du fait que les numérateurs doivent être égaux. Mar leur propose un contre-exemple.

***Mar** : (…) voyons, regardez bien. Victor va me répondre, (la maîtresse écrit au tableau 3/6 et 4/12). Vous dites que parce qu'ici les morceaux sont plus petits (elle montre 4/12) il parcourt moins de chemin, donc… si j'écris 9/12 (au lieu de 4/12) c'est pareil ? Julio ? Parce que les morceaux sont plus petits ? [MCL3:P267]*

Or, Mar ne laisse pas les élèves conclure par eux-mêmes. C'est elle qui le fait à travers une explication qui évoque la possibilité de former des fractions plus grandes même avec des parties d'unités très petites.
Un autre exemple arrive lorsque certains élèves dessinent des unités de tailles différentes pour comparer des fractions. Mar leur propose un contre-exemple assez clair :

***Mar** : …lorsque vous travaillez sur un problème, l'unité doit toujours avoir la même taille. Le segment doit être de la même longueur, sinon vous ne pouvez pas comparer. Par exemple, si je vous dis qu'ici (elle montre le tableau) je vais donner la moitié de la pizza à Roberto et à Armando un quart. Attention ! À qui j'en donne le plus ?*



Élève x : *à Roberto*

Élève y : *à Armando*

Mar : *vous êtes surs?*

Élèves : *(en chœur) noooon*

Élève : *à Armando*

[4] On peut attribuer cette erreur au fait que la classe était presque terminée

Mar : je donne un quart de pizza à Armando. Qui va en avoir le plus dans cet exemple ? (elle montre le tableau)

Élève : Armando . [MCL3:P311-318]

Certains élèves se basent sur l'aire de la portion sur le dessin tandis que d'autres se basent sur les fractions, sans tenir compte des unités. Le contre-exemple perd un peu de sa puissance parce que la maîtresse coupe vite la discussion.

L'analyse des classes de Mar et des autres enseignants suggère que l'**adaptation** des propositions didactiques officielles est une condition *sine qua non* de leur utilisation. Cette observation qui semble évidente est néanmoins importante, si l'on pense que l'on attend du travail du maître qu'il soit fidèle aux propositions officielles. Il apparaît aussi qu'une certaine maîtrise des connaissances mathématiques à enseigner est une condition - non suffisante, mais nécessaire - de la mise en place d'une approche didactique favorable.

4.3 Les processus de changement.

Voyons ici quelques aspects de la façon dont les enseignants ont vécu ces processus de changement.

Qu'est ce qui déclenche le changement ?

Les enseignants expriment diverses motivations : la perception que les choses ne marchent pas en classe, la conscience de la distance entre l'approche didactique des programmes et la façon dont eux-mêmes enseignent, et l'existence d'un conflit déclenché par la connaissance de l'approche didactique, lors de leur formation continue :

> *(...) le fait est qu'après avoir suivi le cours de PRONAP (formation longue donnée en formation continue), et bien moi j'ai été déstabilisé ; je me suis dit « mince, qu'est-ce que ce que je fais, non ?, (…)» bon, je ne faisais pas vraiment mal, n'est-ce pas ?, mais (…) il y avait des choses que… enfin oui, bref, que j'étais en train de bien faire mais une grande partie des choses, et bien, je les avais proposées à partir d'un autre cadre (ELeo: P116)*

Difficultés vécues par les enseignants et stratégies pour mettre en place les changements.

Une enseignante dit avoir vécu l'introduction des changements dans sa façon de travailler comme *un risque pour l'apprentissage des élèves,* et pour son prestige personnel. Qu'est-ce qu'elle a fait ? « Un acte de foi », dit-elle : puisque ce sont les « spécialistes » qui font ces propositions, elles doivent marcher. Par la suite, elle a persévéré parce qu'elle a vu des résultats assez vite. Mais elle avoue qu'elle n'a pas tout changé.

> *…mais, ça a été un processus, je sens… difficile, parce que parfois (…) j'ai eu la force de l'affronter, mais après, j'arrivais et je disais : Oh mon Dieu ! Qu'ai-je fait ?, il vaut mieux que je recule, j'étais mieux avant, parce que j'étais reconnue par la communauté, c'est-à-dire reconnue par mon travail… [MEI:P60]*

> *Alors, je pense, ce sont eux les spécialistes, ils y ont déjà réfléchi (…), c'est pour cela que je suis le livre… [MEPC2:P47]*

L'évaluation du travail du maître par les collègues constitue une autre difficulté, surtout lorsque ceux-ci ne partagent pas l'idée d'introduire certains changements. Face à cela, une enseignante de première année nous explique qu'elle essaye de rester deux ans de suite avec le même groupe d'élèves, pour ne pas subir la pression du maître de l'année suivante. On constate également que, dans une école, la présence d'au moins un enseignant engagé dans la recherche d'alternatives et ayant une certaine influence sur ses collègues, est importante pour motiver les changements.

Les autres difficultés citées par les enseignants sont : le temps pour couvrir le programme qui est toujours très insuffisant, les groupes scolaires qui sont trop chargés (beaucoup ont encore plus de 40 élèves), la difficulté pour maintenir la discipline et l'hétérogénéité des groupes. Quand le temps presse, les enseignants reviennent aux formes d'enseignement antérieures, ou bien n'appliquent pas tout le temps l'approche didactique suggérée, ou pas pour tous les thèmes. Quant à l'hétérogénéité des groupes scolaires, les maîtres n'ont pas de stratégie particulière : ils travaillent individuellement avec certains élèves, ou cherchent l'appui des élèves les plus avancés.

Conditions qui semblent agir positivement.

Le fait que le projet soit partagé par plusieurs enseignants de la même école, c'est-à-dire que le changement soit un ***projet d'école,*** est une condition très favorable à la mise en œuvre des propositions didactiques des programmes. Ceci permet d'atténuer les risques et les incertitudes, et accélère l'acceptation des nouvelles modalités par les parents des élèves.

La seconde condition est la ***maîtrise des connaissances mathématiques.*** Elle permet aux enseignants d'assumer les propositions avec plus d'assurance, de prendre plus de risques, de mieux gérer la classe, en particulier les procédures inattendues et les erreurs des élèves, et de mettre en évidence les choses importantes.

Pour certains enseignants, l'exploration d'alternatives « constructivistes » avait commencé bien avant l'arrivée des nouveaux programmes, et cela a bien évidemment favorisé l'acceptation et l'appropriation des programmes et de leur approche didactique.

5 COMMENTAIRE FINAL

Les résultats les plus marquants de cette étude concernent la diversité des formes de relation des maîtres avec les innovations proposées par les programmes de 1993. Cependant, les conditions particulières de travail des enseignants qui réussissent le mieux à s'approprier ces innovations d'une manière significative, méritent notre attention.

1) Ils développent leur enseignement dans le cadre d'un projet d'école, et non pas d'une manière individuelle.

2) Ils ont une bonne connaissance mathématique des sujets qu'ils enseignent.

3) Ils n'utilisent pas les propositions officielles à la lettre, ils les adaptent d'une manière plus ou moins importante. Les matériaux (les programmes, les manuels, les fichiers d'activités) leur servent de point d'appui.

4) L'aide qu'ils ont reçue à travers un atelier de longue durée sur l'enseignement des mathématiques, semble avoir été importante pour plusieurs d'entre eux.

Parmi les directions possibles dans lesquelles il serait intéressant de poursuivre cette recherche, une qui a été suggérée lors de la présentation au colloque et que nous envisageons de suivre consiste à chercher s'il y a une relation entre les enseignants qui ont été repérés comme ayant réussi un bon niveau d'appropriation des programmes de 1993 et certaines caractéristiques du travail des élèves, y compris les résultats aux épreuves nationales.

Pour terminer, nous voudrions insister sur un point : les grandes difficultés qui subsistent quant à l'apprentissage des mathématiques pour les élèves de l'école primaire, les mauvais résultats obtenus aux examens externes (et pas seulement concernant les élèves issus de milieux défavorisés) démontrent qu'il faudra encore beaucoup progresser dans plusieurs directions. Néanmoins, nous pensons qu'il faut se garder des solutions drastiques qui proposent de « repartir de zéro », comme celles qu'on nous propose ces jours-ci. Les lignes générales des orientations actuelles pour l'enseignement des mathématiques reposent sur des résultats de recherches en épistémologie, psychologie et didactique. Nous pensons également que certains aspects ont bien fonctionné et pourraient fonctionner encore mieux avec davantage de travail de la part des professeurs. Il ne faut pas perdre de vue que, dans l'enseignement, les processus d'appropriation des innovations sont longs et qu'il faut sans cesse les soutenir.

6 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M., et PERRIN-GLORIAN, M. J. (1991). Didactic Engineering. Research and Developmental Tool: some Theoretical Problems linked to this Duality. *For the Learning of Mathematics,* 11, pp. 13-18.

BALBUENA, H., D. BLOCK, A. CARVAJAL. (1995). "Las operaciones básicas en los nuevos libros de texto". *Cero en conducta*. Año 10 (40-41), mai-août, pp. 15-30

BLOCK, D., MOSCOSO, A., RAMÍREZ, M., SOLARES, D. (2007) "La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria". En: *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. Vol. XII (33) México, Consejo Mexicano de Investigación Educativa. (ISSN 1405-6666), pp. 731-762.

BLOCK, D., DÁVILA, M., y MARTÍNEZ, P. (1995). La resolución de problemas: una experiencia de formación de maestros. *Educación Matemática, 7(3)*, pp. 5-26.

BLOCK, D. y ÁLVAREZ ICAZA, A.M. (1999). Los números en primer grado : Cuatro generaciones de situaciones didácticas. *Educación Matemática* 11(1), pp. 57-76.

BROUSSEAU, G. (1995). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. En *VIIIè École et Université d'été de Didactique des Mathématiques*, Saint-Sauves d'Avergne.

CARRILLO, J., et CONTRERAS, L. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación Matemática, 7(3)*, 79-92.

ESPINOSA, E. (2004). *Los maestros y la apropiación de perspectivas pedagógicas para la enseñanza del lenguaje escrito en el contexto de un programa de asesoramiento.* (projet de recherche pour obtenir le titre de Docteur en Sciences) : DIE-Cinvestav-IPN. Mexico

RAMÍREZ, M. (2004). *El saber enseñado: protagonista en la trama de acontecimientos en el aula. La proporcionalidad en sexto grado de educación primaria.* Thèse de maîtrise , Cinvestav-IPN, Mexico.

ROCKWELL, E., y MERCADO, R. (1988). La práctica docente y la formación de maestros. *Revista Investigación en la escuela, 4*, pp. 65-78.

Secretaría de Educación Pública (2003) *Libro para el maestro. Matemáticas Primer grado* (4ª ed.) Mexico : CONALITEG.

Secretaría de Educación Pública (2002) *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Primer Grado.* México : CONALITEG.

Communication D3

ALTERNANCE ET FORMATION EN MATHÉMATIQUES DES EXEMPLES EN PE2 ET EN T1

Equipe ERMEL

Henri-Claude Argaud
IUFM Grenoble,site de Valence
Université J. Fourier
henri-claude.argaud@ujf-grenoble.fr

Jacques Douaire
IUFM de Versailles- Université Cergy-Pontoise, LDAR, INRP
jacques.douaire@wanadoo.fr

Marie-Paule Dussuc
IUFM de l'Académie de Lyon ,site de l'Ain,
Université Claude Bernard Lyon 1
mpdussuc@wanadoo.fr

Résumé
A partir de besoins et de difficultés repérés par des formateurs ou exprimés par des maîtres débutants, concernant entre autre la mise en place en classe d'activités de résolution de problème, un accompagnement personnalisé d'une jeune maître est décrit puis analysé. Il s'agit dans un premier temps de travailler en amont des situations de manière à décrire précisément le scénario de la séance dans une fiche de préparation opérationnelle : les actions prévues des participants, les gestes professionnels du maître y sont précisés en insistant sur les écrits à envisager pour la communication du problème, les modalités de conduite et de régulation de la phase collective. Un deuxième temps est consacré à l'analyse d'une vidéo de la même séance effectué par un maître expert pour y repérer des gestes professionnels, des principes d'action transposables.
L'observation et l'analyse accompagnée par les débutants d'un maître « chevronné » , notamment sur la situation qu'ils vont avoir à mener en classe, semble être un élément efficace pour une formation en alternance des jeunes maîtres, en lien avec la classe d'exercice.

1 INTRODUCTION

Dans le contexte actuel des stages filés et de la formation T1, des enjeux essentiels se jouent dans l'alternance entre la formation et les pratiques. En particulier se pose la question de la confrontation fréquente à des pratiques d'enseignement qui peuvent conduire les enseignants débutants à sous-estimer l'importance de l'analyse des situations d'apprentissage ou des conditions de leur mise en œuvre. Il paraît important de mieux comprendre ces enjeux, de les décrire pour mieux pouvoir défendre, dans ce temps d'incertitude sur les projets de formation à venir, l'intérêt et la nécessité d'une réelle alternance.
La communication s'est appuyée sur deux documents vidéo : celui d'une maîtresse débutante et celui d'un maître chevronné qui essaient de mettre en place des situations a-didactiques dans leurs classes. Elle a eu pour but premier de rendre explicites certaines des difficultés des maîtres débutants dans leur enseignement des mathématiques à l'école. Elle a voulu ensuite identifier des besoins en formation découlant de ces difficultés. Elle a été aussi l'occasion de présenter, à titre d'exemple, une demande d'aide manifestée par un maître débutant, ainsi que des modalités organisées pour fournir cette aide. Se

posent alors les questions : Quels sont les besoins en formations de ces maîtres débutants ? Quelles actions de formation peuvent être appropriées ? Quels contenus peuvent être abordés ? Sous quelles formes ?

Questions posées par les maîtres débutants & Difficultés manifestées

Certaines des difficultés ont été identifiées à différentes occasions :

- une enquête auprès de CPC et de formateurs qui suivent les maîtres débutants ;
- des échanges avec des formateurs de terrain ;
- des actions de formation (visites de formateurs, animations ou stages) ;
- des contacts personnels.

Notre intention est de montrer qu'un certain nombre de difficultés relève non pas essentiellement du côté du « didactique » (la situation ou même les connaissances des maîtres pour l'enseignement des mathématiques), mais plutôt du côté du pédagogique et des compétences des jeunes maîtres. Bon nombre d'entre eux en effet sont fortement engagés ; ils ont une bonne compréhension des enjeux… et leurs difficultés se situent surtout sur des aspects que nous diront « secondaires ». Nous allons examiner d'abord qui les perçoit et qui les exprime.

1.1 Celles, perçues, exprimées par des formateurs

Selon eux, les enseignants débutants ont des difficultés :

- dans « la communication du problème » ;
- dans « la relance de la recherche » ;
- pour « prendre le temps de regarder et analyser les productions » ;
- pour « prendre en compte ce que font les élèves » ;
- pour « gérer la mise en commun »[1]

On rapporte aussi qu'elles peuvent porter sur :

- « la conception de l'activité mathématique » ;
- « l'organisation de progression ».

Tous les formateurs sont confrontés à ce type de difficulté.

Des dérives sont observées dans les pratiques des débutants comme :

- le maître résout le problème à la place de l'élève ;
- le maître s'engage dans la phase collective sans prendre d'information sur ce qu'ont fait les élèves;
- le maître se donne trop d'objectifs (notamment transversaux) sur la phase collective comme, par exemple s'exprimer, expliquer, valider, argumenter…;
- le maître conclut trop rapidement sur le savoir visé.

Sur quoi portent alors les actions menées par les formateurs ? Ils donnent comme exemples :

- « la réalisation d'une analyse a priori » ;
- « la préparation de la présentation de l'activité et de la consigne » ;
- la réflexion sur « la place du maître dans les différentes phases » ;
- « la préparation de la forme de la phase collective, en faisant le deuil d'un trop plein d'objectifs ».

Les difficultés mentionnées sont ainsi très diverses. Elles touchent à peu près tous les temps de l'activité mathématique. Et leur liste est loin d'être exhaustive. Certaines surprennent parce qu'elles ne paraissent pas insurmontables. D'autres, portant sur la conception de situations ou de progressions, interrogent : Est-ce vraiment la tâche du maître que de concevoir des activités mathématiques ? Est-ce vraiment la tâche du maître que de constituer des progressions ? Dispose-t-il d'assez de temps pour accomplir de telles tâches, et cela dans toutes les disciplines ?

---

[1] Nous préférerons parler de « phase collective ». Le « vrai » et le « faux » peuvent être établis, en cours de recherche, par l'élève lui-même et au moyen d'éléments de la situation (le milieu) ; mais ils garderont un caractère privé. Une phase collective venant après une recherche, a pour but de donner un statut public au « vrai » et au « faux » : ils acquièrent par ce moyen une autre « dimension ».

1.2 Celles, éprouvées, et exprimées par quelques maîtres débutants

Il va de soi que bon nombre de maîtres débutants expriment eux-mêmes les écueils précédents. Nous en explicitons quelques autres, dans ce paragraphe, exprimés par de jeunes maîtres, désireux d'enseigner au moyen de « la résolution de problème pour construire et apprendre du nouveau »[2]. Un certain nombre de ces jeunes sont restés en contact avec nous et, lors de leur année de T1, manifestent leurs attentes. Nous illustrons ci-dessous par deux exemples, celles dont font état ces maîtres.

1.2.1 Premier témoignage

Ce maître a été T1 en classe unique dans un petit village d'Ardèche pendant l'année
2008 - 2009. Son intérêt pour la « résolution de problèmes pour construire et apprendre du nouveau » s'était manifesté déjà lors de sa formation en PE2, l'année précédente. Il avait alors demandé s'il était possible de travailler ainsi dans une classe unique. Il écrit le 11 octobre 2008 :
« Juste un petit mot pour vous faire part du plaisir et de la satisfaction professionnelle que j'ai eus à mener des situations … (de recherche) en cette première période. En définitive, cela est tout à fait compatible avec une classe unique, même si la programmation est un véritable puzzle! »
Il déclare alors avoir plus de difficultés dans sa programmation en géométrie. Cette difficulté est d'autant plus sensible qu'il y a des niveaux différents de classe, des connaissances différentes chez les élèves, de nombreux apprentissages à effectuer… Et il demande alors s'il est possible de concevoir un « bloc » cycle 2 et un « bloc » cycle 3, réalisant que cela lui semble difficile à faire dans le domaine numérique.
En décembre 2008, il déclare n'utiliser que des situations … de recherche, et précise: *« Pourtant, de plus en plus de gens me conseillent d'arrêter: trop de temps pour un résultat que j'obtiendrais avec un fichier. Cela est parfois décourageant, étant donnée l'énergie que je passe à la préparation (ou plutôt à l'organisation) des mathématiques. Aussi, je serais content d'avoir votre avis à l'occasion, sur plusieurs points: rythme des apprentissages, niveau d'exigence à avoir, pertinence des programmations ».*
Il participe fin janvier 2009 au stage T1 prévu. Il peut dire alors : *« Cette première journée m'a permis de croiser quelques maîtres ou maîtresses qui ont fait le choix d'utiliser Ermel en classe à multi-niveaux. Tous en sont ravis, et nos expériences convergent positivement ».* Nous le rencontrons à cette occasion avec quelques autres collègues de sa promotion pour échanger et nous efforcer de répondre aux questions.
Ce témoignage nous renseigne sur plusieurs points. Les jeunes maîtres subissent les critiques, entendent les conseils de maîtres plus anciens. Ils font le point, évaluent (seuls souvent) ce qu'ils ont fait, notamment en termes d'avancées des situations et d'avancées (explicites) des apprentissages ; ils sont débordés de travail : leurs élèves sont attendus par les évaluations sur les compétences ; ils ont l'impression que ce type d'enseignement-apprentissage n'est pas « rentable » (rapport compétences effectives/ temps d'apprentissage) … La tentation peut être forte d'aller vers des solutions qui paraissent simples.
Un point essentiel nous semble ressortir quant aux attentes de ce débutant : le besoin d'une aide pour la « programmation ». Le maître le mentionne dans les deux conditions d'enseignement dans lesquelles il s'est trouvé. Mais sur quoi porterait la « programmation » ? Compte tenu du contexte particulier de ce type de classe, il nous semble qu'il faut entendre deux composantes pour que le pari soit tenable:

- Quels apprentissages fondamentaux viser ?
- Quelles situations - clé utiliser pour y parvenir ?

1.2.2 Second témoignage

Précisons tout d'abord que cette jeune collègue M se déclare comme ayant toujours eu un rapport difficile aux mathématiques. Elle a été en formation à l'iufm et ce qu'elle a vu de l'enseignement des maths lui a donné envie de faire pareil, puisqu'elle se dit: « si on avait procédé comme cela avec moi, je n'en serais pas restée là ».

---

[2] En contraste avec « la résolution de problème pour utiliser de l'appris ».

Dans **son premier contact** – en PE2 en décembre 2007 – elle réalise, en stage filé, «*la nécessité de faire le lien entre le cycle 2 et le cycle 3* » où elle « *met en pratique les situations Ermel* ». Elle souhaiterait savoir s'il existe déjà des situations exploitables en cycle 2 et cycle 3. A l'occasion ensuite d'un stage groupé, elle étend ses investigations à la maternelle et met en place une situation sur la reconnaissance de formes planes.
Le second contact date de mai 2008, toujours en PE2 : ayant conduit en classe « Courteligne »[3], elle déclare qu'elle s'est rendu compte de quelques maladresses qui ont fait qu'elle « *a induit la procédure* **».** « *Je leur ai demandé* (dit-elle) *de mesurer puis de classer les ficelles de la plus courte à la plus longue. J'aurai du éviter la mesure...*»
Au troisième contact, juste après: ayant entrepris de travailler le parallélisme avec ses élèves, elle demande quelle situation utiliser. Nous lui conseillons « Feuilles qui coulissent»[4]. Elle manifeste le besoin de disposer des fiches de préparation d'un maître expert qu'elle a observé mener la situation dans une vidéo en formation. Elle questionne sur l'utilité de la séquence de problèmes proposés. Elle déclare en fin de situation : « *Quand j'ai introduit le terme de //, ils se sont rappelés que la titulaire leur avait déjà expliqué ce qu'était deux droites //… Or ce terme n'est absolument pas sorti durant les deux phases. Comme quoi....* ». Elle effectue ensuite manifestement un gros travail de préparation, et pour le matériel et pour la conduite de classe. Obtenant les informations sur sa classe à la rentrée 2008, elle dit redouter de se retrouver seule à utiliser Ermel dans l'école où elle sera T1. Les enseignants de sa future école ont, en effet, commandé les manuels d'une même collection.
Au cours de l'été 2008 elle demande la critique d'une programmation sur une semaine qu'elle a établie, et elle cherche à savoir si le travail prévu est conforme aux programmes. Elle commence donc son année scolaire avec des CM2 et peut dire **en janvier**, dans une classe de centre ville, où elle se retrouve avec une seule collègue faisant les mêmes choix pédagogiques qu'elle :

« *Si je "fais du ERMEL" c'est parce que je m'y sens bien mais je suis encore trop novice dans ce domaine. Il est vrai que je suis plus à l'aise dans les situations déjà pratiquées (ERMEL géométrie pour le CE2) qu'avec certaines situations de numération du CM2. J'ai du mal à entrevoir les objectifs finaux. Je me sens en période de tâtonnement. Je me lance avec bon coeur car je pense que ce travail apporte beaucoup à mes élèves. Avec eux, je n'en suis pas encore à des débats "qui décoiffent" mais il y a des progrès depuis le début de l'année. Ils se lancent eux aussi avec beaucoup d'intérêt dans ce que je leur demande. Je vois que cela porte ces fruits, qu'ils s'épanouissent aussi. D'enfants faisant exercices sur exercices les années précédentes, ils apprennent enfin à réfléchir et à argumenter et moi j'essaie de leur donner un peu plus de place. Ils progressent et je progresse lentement moi aussi dans ma pratique.*
Cette façon d'enseigner, je ne la réserve pas qu'aux maths mais aussi à la littérature et à l'étude de la langue. C'est plus difficile en HG mais j'essaie de les pousser un maximum à comparer, analyser. Tout simplement à se poser des questions. Oui c'est ça se poser des questions, à s'interroger, à ne pas avaler tout cru ce qu'on leur donne ».
Elle mène à ce moment-là l'évaluation cycle 3 et les résultats sur « parallèle » et « perpendiculaire » ne sont pas bons. « *Les élèves ont tout mélangé* » déclare-t-elle. Il est alors décidé avec M. que l'on allait s'efforcer de faire en sorte que ses élèves aient les connaissances attendues sur le parallélisme et la perpendicularité.

Ce témoignage évoque encore les contraintes et les pressions auxquelles sont soumis les maîtres débutants. Il fait part d'autres questions cruciales comme :

- comment s'organiser pour articuler et mener les apprentissages dans des classes à plusieurs cours ?
- pourquoi, au fond, les apprentissages menés n'ont-ils pas eu l'effet escompté ?
- comment parvenir à réduire rapidement des déficits constatés, compte tenu des attentes et des contraintes de l'institution ?

[3] Le problème proposé est d'abord de comparer du point de vue de la longueur des lignes dessinées sur une feuille de papier entre deux points puis de matérialiser la ligne la plus courte entre deux points.
[4] Le problème se ramène à tracer un trait passant par un point et parallèle à un trait donné.

Mais ce témoignage pose aussi la question de la mise en œuvre des situations ; cette jeune collègue exprime les difficultés (souvent perçues par les formateurs) à faire les choix qui garantissent le caractère a-didactique des situations :

- quelles interventions pendant la recherche ? quelle(s) consigne(s) ?
- comment organiser l'institutionnalisation ? à quel moment la faire ? quel doit être son contenu ? sur quels éléments du côté de la situation ou du côté des élèves la fonder ? selon quelles modalités la conduire ?

M. demande de l'aide, des éléments plus explicites sur les objectifs, les modalités pour les atteindre, la gestion des situations. Comment donc aider ces maîtres pour ces questions ?

2 UN EXEMPLE D'ACCOMPAGNEMENT : LES OUTILS CHOISIS

Nous allons présenter, à titre de support à la réflexion et au questionnement sur la formation professionnelle dans le cadre de l'alternance, l'accompagnement proposé à la jeune collègue M du second témoignage.

2.1 Cadre de l'accompagnement

A la demande présentée par M, nous avons donné une réponse hors du cadre institutionnel de la formation, une réponse « à la carte », personnalisée, parce que la demande s'est faite de l'un à l'autre, dans des relations de confiance, et aussi par souci d'efficacité. Cela en particulier parce que cette réponse est très fortement liée

- à la préparation de l'activité faite par M ;
- au déroulement de l'activité menée par M, qui est propre à M et à la classe.

De sorte que l'accompagnement fourni a été organisé autour :

- du choix de ressource,
- de l'aide à la mise en place de gestes professionnels (propres aux mathématiques, ou plus généraux).

2.2 Choix de la situation

Une fois qu'il a été décidé de travailler ensemble, la première chose qui s'imposait était de choisir une situation susceptible de répondre aux attentes (larges) :

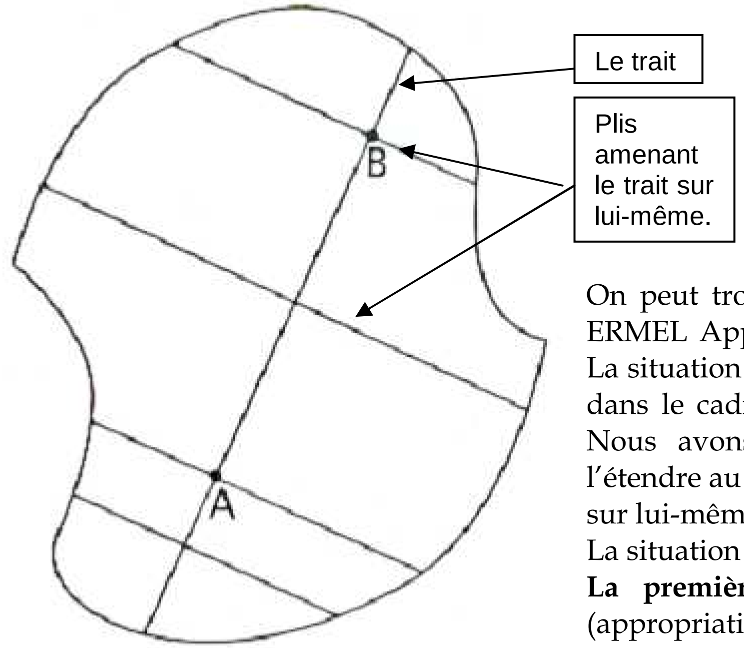
- « consolider » les acquis des élèves sur parallélisme et perpendicularité au plan de la signification des concepts (distinction parallèle/perpendiculaire, caractère d'invariant spatial de ces relations mis en évidence et perçu ; procédés de contrôle et de tracé, usage des instruments appropriés, vocabulaire requis et expressions langagières possibles…)
- parvenir à le faire sans « consommer » trop de temps d'apprentissage ;
- savoir les aspects institutionnels qui pourraient être retenus.

Le choix s'est porté sur la situation ERMEL « **Trait sur trait** » qui, moyennant de petites retouches, peut permettre de faire travailler les élèves sur les deux concepts conjointement (ce qui permet de les caractériser l'un par rapport à l'autre) et de répondre aux attentes ci-dessus formulées. Par ailleurs, il se trouve que les conceptions sous-jacentes de chacun des deux concepts sont assez nouvelles en général pour les élèves :

- droites parallèles comme droites perpendiculaires à une même troisième;
- droites perpendiculaires, comme étant un des deux axes de symétrie d'une droite.

Ce choix a paru complémentaire à ceux déjà effectués sur les concepts et, comme tel, approprié.

2.3 Présentation de la situation



Étape 1 : plier trait sur trait

L'enseignant donne à chaque élève sa feuille de plis et lui demande, en lui montrant comment procéder, de plier selon le trait : « Je plie la feuille de façon à amener le trait sur le trait ; faites deux plis de cette manière. »
Pour guider le pliage, on utilise le fait que le trait initial se devine à travers la feuille. On peut indifféremment plier de façon à ce que le trait soit à l'intérieur ou à l'extérieur.
Quand chaque élève a effectué ses deux plis, il peut échanger la feuille des plis avec son voisin qui vérifie si on obtient bien deux pliages trait sur trait. Si un pliage est jugé non conforme par les deux élèves, ils barrent le pli.

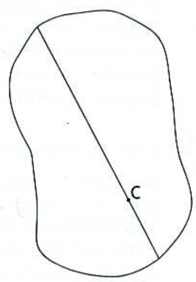
On peut trouver le descriptif de la situation fourni dans ERMEL Apprentissages géométriques au cycle 3 (Hatier). La situation telle qu'elle est, prévue pour le CE2, est placée dans le cadre des apprentissages sur la perpendicularité. Nous avons indiqué plus haut que nous souhaitions l'étendre au parallélisme puisque deux plis amenant le trait sur lui-même sont parallèles.
La situation est organisée en **plusieurs « phases »**.
La première a pour titre « Pour apprendre à plier (appropriation du problème) ». Elle se déroule en deux « étapes ». La première étape demande à l'élève d'effectuer la tâche demandée : « plier la feuille... ».
L'étape 2 est l'occasion pour l'élève de faire le même type de pli que précédemment, mais passant par d'autres points.
La seconde « phase » a pour titre : « Anticipation du trait de pliage passant par un point ». La feuille étant fixée sur un support, l'élève doit dessiner (par anticipation) l'emplacement du pli amenant le trait sur lui-même. Le descriptif fourni dans l'ouvrage se compose :

- de la spécification des objectifs ;
- de la composition du matériel à disposition de l'élève ;
- et des procédures attendues

Il s'en suit un descriptif du déroulement de l'activité en deux étapes, la première intitulée « recherche » :

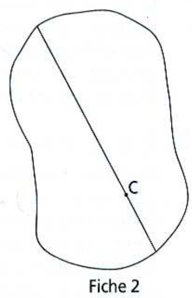
☐ Étape 1 : recherche

Consigne
« Vous savez plier votre feuille trait sur trait en passant par le point C. Mais cette fois, avant de plier, vous devez prévoir par un trait au feutre l'emplacement du pli. Vous vérifierez ensuite si votre prévision est bonne en pliant la feuille. »
Le travail est individuel.
Toutes les procédures ci-dessus sont attendues ; les procédures 3 et 4 sont visées.



Fiche 2

La seconde intitulée « vérification » :



Fiche 2

☐ Étape 2 : vérification

Un premier temps de jugement est organisé par groupes de quatre. Les élèves examinent les quatre productions et doivent dire pour chacune si le pli du pliage trait sur trait va coïncider avec le trait qui vient d'être tracé au feutre.
Les élèves effectuent ensuite le pliage et déclarent leur production « réussie » si le trait au feutre est dans le pli, « pas réussie » sinon.
Le maître effectue un simple comptage des productions valides.

On s'attend à de nombreuses procédures au jugé. Aussi, vu la précision induite par le pliage trait sur trait, le nombre de réussites devrait être faible et légitimer la reprise de l'exercice.

Nous nous arrêtons là pour ce qui est de la présentation de la situation ; cela suffit pour l'exposé de ce qui suit.

3 DES MODALITES POUR L'ACCOMPAGNEMENT

3.1 Orientation choisie pour l'accompagnement

L'expérience montre que, très souvent, sinon la plupart du temps, les maîtres débutants (comme M), sont extrêmement investis dans leur travail. Aujourd'hui, les éléments de formation aux T1 fournis par les formateurs sont donnés :

- le plus souvent à l'occasion de modules où les maîtres T1 sont par groupes ;
- plus rarement à l'occasion de contacts plus personnels, notamment lors de visites dans la classe de l'intéressé.

Ils sont donc donnés, en raison de contraintes légitimes, hors de la classe elle-même du maître T1 ou hors de l'action effective du maître au sens où ils arrivent

- soit avant que l'action ait lieu (et ils ont souvent un caractère un peu théorique et décontextualisé[5])
- soit alors que l'action a eu lieu, et peut-être parfois trop dans la généralité ou le discours, non suffisamment dans l'effectif : « qu'est-ce que je fais ? », « qu'est-ce que je dis ? »

Or les conditions professionnelles pour les maîtres ont changé. Les attentes de l'institution et des parents aujourd'hui sont très grandes. Le maître T1 essaie d'y répondre, au moyen notamment d'éléments écrits (traduisant ce qui est à retenir ou les évaluations par exemple)[6] :

- soit en soignant les éléments fournis (le maître pourra se contenter de ces éléments et engagera moins de forces sur le « contenu didactique ») ;
- soit en soignant le « contenu didactique », et de fait il risquera de ne pas soigner assez ces éléments.

Le maître T1 qui envisage de travailler dans le cadre de « la résolution de problèmes comme moyen d'apprendre du nouveau » a besoin d'un accompagnement opérationnalisé, c'est-à-dire qui s'appuie sur les actions des participants à la classe, sur les gestes professionnels du maître, et d'un accompagnement dans le temps:

- juste avant l'acte de classe (pour la préparation de la séance)
- pendant l'acte de classe, à chaud si besoin.

C'est ce qu'il a été choisi de faire pour M. Précisons maintenant la manière dont cet accompagnement peut être mené.

3.2 Contenu de l'accompagnement

L'accompagnement ici porte de façon essentielle sur la conduite de l'activité proprement dite (séance par séance), **avant** que l'activité ne soit menée effectivement. De fait, il porte aussi sur les éléments écrits à envisager de communiquer. L'accompagnement aura lieu aussi ensuite, éventuellement, **pendant** le déroulement de l'activité : de façon très limitée, discrète, occasionnelle, en coopération. Il peut être en effet difficile au maître de percevoir certains faits de classe lorsqu'il est dans l'action ; un observateur non impliqué dans l'action peut alors les voir et en faire part immédiatement au maître qui peut ainsi réguler son action dans l'instant. Ce type d'interaction s'avère souvent efficace dans la mesure où le point identifié peut avoir des conséquences gênantes, mais peut en revanche être mineur à retoucher.

---

5 C'est-à-dire sans référence particulière à une situation, ou en référence à une autre situation.

6 Il est probablement plus rassurant pour le maître de satisfaire à ces attentes de surface.

L'accompagnement **avant** consistera dans une rédaction « fine » de la fiche de préparation à propos des deux moments particulièrement:

- la communication du problème,
- la phase collective qui peut suivre,

puisque la phase de recherche ne pose pas de difficulté particulière en général.
Les deux moments signalés sont délicats à mener. En effet, pour le premier, le plus souvent le maître se donne quelques idées générales, se fixe quelques éléments à expliciter et, pour ce qui est de l'objectiver, va agir « au feeling », en agissant et réagissant par improvisation, faisant confiance en cela à ses connaissances. Cela n'est pas, en général, suffisant pour un débutant. Ce maître omet ou néglige d'affiner bon nombre d'éléments, didactiques (Quel problème sera effectivement donné aux élèves ? Que dit-on aux élèves pour l'amener ? Que s'interdit-on de dire ? Que s'autorise-t-on ?...) ou pédagogiques (Qu'est-ce que les élèves ont sur les tables ? La boîte à outils a-t-elle été distribuée ? Comment sont constitués les groupes ?...). Les conséquences peuvent en être :

- la non-compréhension du problème ;
- des activités élèves « périphériques » : jeu avec le matériel, incertitudes dans l'organisation, discussions entre élèves…

Les jeunes maîtres sont d'autant plus en difficulté que tous les formateurs n'ont pas les mêmes attentes en matière de fiche de préparation. Il suffit de se poser la question de ce qui doit y apparaître… en général : les objectifs, les compétences visées… mais ces éléments sont-ils vraiment indispensables pour faire classe ?
Un second moment délicat est celui de la phase collective. Il faut en fixer et en expliciter le but (comme il a été dit, le plus souvent de demander aux élèves de soumettre aux autres leur réponse, leur procédé pour y parvenir, afin de donner un caractère public au vrai et au faux). Mais les modalités de sa conduite sont aussi à anticiper :

- il ne faut pas penser qu'il sera possible de tout improviser (Les productions sont-elles toutes visibles ? Tous les groupes exposent-ils ? Qui en premier ? Comment se passe la présentation ? M s'autorise-t-il à des questions. Lesquelles ? Qui décide de la fin d'une présentation ? Comment se déroule-t-elle ?) ;
- quelles questions le maître peut poser ? que s'autorise-t-il ? que s'interdit - il ?. Les jeunes maîtres sont d'autant plus en difficulté que tous les formateurs ne sont pas d'accord sur les modalités à tenir. L'intervention auprès du maître a donc pour but de donner des réponses effectives à toutes ces questions et, par là, d'anticiper les difficultés.

3.3 La mise en oeuvre de l'accompagnement

Elle s'est composée ici de deux éléments en articulation :

- la rédaction de la fiche de préparation ;
- l'observation de l'enregistrement du déroulement de l'activité par un maître chevronné.

La fiche de préparation construite se veut utile lors de la phase avec les élèves. Des principes d'élaboration sont proposés. Les premières versions de cette fiche obligent à anticiper et expliciter ce qui va ou devrait se passer. Les actions de M et des élèves sont décrites. Les dires de M sont explicités. Des hypothèses explicites sont faites sur les réponses des élèves aux questions posées… Quand M propose une rédaction, nous posons des questions sur les passages incertains, proposons des retouches. Les retours effectués font revenir sur les choix, pointent certains manques…
Vient ensuite l'observation de **l'enregistrement vidéo**. Elle donne à M à la fois un retour vis-à-vis des choix qui avaient été faits, mais aussi des solutions aux questions posées. Par exemple :

- les actions effectives de M ainsi que leur ordre dans le temps,
- la position de M dans la salle selon les moments,
- les mots, les paroles explicites de M et leur ordre,
- le contrat didactique établi…

M est alors contrainte de revenir sur certains choix.

4 ELÉMENTS D'ANALYSE DE L'ACCOMPAGNEMENT

C'est la phase de communication du problème qui a été examinée (phase 2 étape 1) pour des raisons qui apparaîtront ci-dessous.

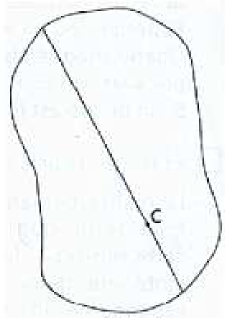
☐ Étape 1 : recherche

Consigne

« Vous savez plier votre feuille trait sur trait en passant par le point C. Mais cette fois, avant de plier, vous devez prévoir par un trait au feutre l'emplacement du pli. Vous vérifierez ensuite si votre prévision est bonne en pliant la feuille. »

Le travail est individuel.

Toutes les procédures ci-dessus sont attendues ; les procédures 3 et 4 sont visées.



Fiche 2

Pour la communication, il a été choisi de ne pas présenter ce qui s'est passé pour la première phase « Pour apprendre à plier », puisque ce n'est pas la phase où se résout véritablement le problème. Signalons cependant que, lorsque la situation a été préparée, nous avons conseillé à M de ne pas négliger cette phase, car elle nous paraît être le moment où les élèves peuvent se constituer des images mentales : l'élève effectue le pli amenant le trait noir sur le trait noir ; il intériorise ces actions ; il en perçoit les contraintes ; il en évalue les effets ; il voit **les objets spatiaux** existants, ceux produits par les actions, et les met en relation avec celles-ci ; il perçoit **les relations spatiales** entre les objets… Il mémorise ces éléments et, de la sorte, perçoit le but à atteindre lorsqu'il est contraint d'anticiper, c'est-à-dire de réaliser le but sans être autorisé à mener les actions telles qu'elles ont été faites initialement. Il est fort possible que de nombreux maîtres considèrent cette première « phase » comme allant presque de soi, et soient tentés de l'abréger au maximum. Ce choix peut être compris en raison des contingences auxquels les maîtres débutants sont soumis ou en raison des indications de durée implicitement données par l'ouvrage (« 2 séances d'une heure environ »).

4.1 Moment de la situation étudié

De sorte que, lors de la communication, ont été proposés les éléments suivants :

- une analyse de l'évolution de la fiche de préparation de ce moment ;
- une analyse des caractéristiques du même moment conduit par le maître chevronné ;
- une analyse du déroulement de ce moment de classe par M.

4.2 Utilisation du document de référence : quelle fiche de préparation ?

L'ordre chronologique de l'accompagnement a voulu qu'au départ M dispose du document référence ERMEL rappelé ci-dessus et qu'elle commence la préparation.

Il arrive assez souvent que, devant préparer une séance à partir d'un document ERMEL, le maître T1 déclare : « *Mais c'est tout fait dans l'ouvrage* » ! Et, pour sa fiche de préparation, il détaillera volontiers les compétences en jeu, les objectifs (qui ne lui servent pas à grand chose lorsqu'il sera dans l'action)… mais il trouvera inutile de développer un développement plus précis du scénario. Par exemple, M prend connaissance du document ERMEL et constate qu'il donne une information (importante) : la consigne, qui contient le problème – et deux éléments qui ne sont pas à proprement parler en rapport avec le moment étudié :

- la façon dont se fera la vérification,
- des informations sur les procédures attendues.

M peut volontiers penser : « *La consigne, c'est l'essentiel, c'est le plus difficile. Ce qui est écrit me suffit* ». Or, si ce descriptif peut suffire à un maître confirmé, et habitué à développer la démarche implicite sous-tendue par « la résolution de problèmes pour construire et apprendre du nouveau », est-il vraiment suffisant, pour un maître débutant, ou pour un maître ayant décidé de modifier sa pratique ? Est-il possible à ce maître de faire une totale improvisation le moment venu ? Et c'est souvent lors de cette

phase de communication du problème que les premières difficultés des maîtres débutants apparaissent. Le moment est en effet assez délicat pour le maître dans la mesure où c'est là que peut commencer à s'effectuer la dévolution, et où c'est là qu'il doit mettre en place un certain nombre d'éléments décrits en début d'ouvrage, mais qui ne sont pas redéveloppés ici dans le descriptif, dans le contexte.
M est donc invitée à faire une description détaillée de la suite des actions qu'elle entreprendra. Elle en effectue plusieurs versions consécutives aux remarques qui lui sont faites. La fiche a donc évolué avec, en particulier :

- la spécification de l'énoncé du problème, qui sera écrit sur une affiche fixée au tableau :

Tracer, avec le feutre vert, le trait qui passe par le point E et qui serait sur le pli si on amenait le trait noir sur le trait noir.

- la nécessaire prise en compte du fait que des éléments de la situation ont déjà été présentés ;
- la transformation d'un apport d'informations faites par M, par des questions posées aux élèves pour qu'ils répondent en explicitant les données du problème.

4.3 Que peut apporter l'observation d'un maître chevronné ?

L'observation d'un maître chevronné dans la conduite de la situation en question peut alors permettre au maître débutant **de repenser ses propres gestes professionnels.** Chaque fois que l'on a eu la possibilité de faire ainsi pour un maître débutant, cela n'a pas été à son détriment puisque les éléments qu'il prélève sont des éléments « transposables ». Pourquoi ? Parce que ce sont essentiellement des éléments autant à caractère pédagogique que didactique, et des éléments qui ne sont pas propres aux mathématiques. Développons-en le contenu.
L'observation du maître chevronné a pour but de permettre à M

- de se rendre compte de ce qui peut poser problème aux élèves ;
- de percevoir la posture à adopter, la place à occuper ;
- de revenir sur l'ordre des actions (matériel, informations, consignes à donner) ;
- de retoucher la tournure de phrases pour les consignes ;
- de sentir les passages clé, où le maître a peu de marge ;
- de disposer d'exemples de réponses à donner ;
- de savoir éventuellement comment encourager les élèves ou les réprimander ;
- etc...

Ce sont tous ces éléments pratiques qui sont présents dans un document vidéo de maître chevronné et qui sont d'autant mieux perçus et appropriés par le maître débutant qu'il les voit. Eventuellement en plus, M aura, par ce moyen, la capacité à rectifier, à compléter des éléments absents de la fiche de préparation ou à éliminer des éléments inappropriés ou inutiles.
Quelles réponses pratiques donne donc l'observation du maître chevronné en rapport avec ces questions ?
1. Le maître prend la latitude d'enchaîner la phase 2 juste après la phase1 où les élèves ont fait le pli. Au risque de dépasser l'horaire journalier de mathématiques. Ce qui fait que les élèves viennent d'avoir sous leurs yeux au tableau toutes les feuilles pliées selon quatre plis effectués, feuilles affichées et classées selon qu'il y a des plis corrects ou incorrects. Les élèves font ainsi le plein d'images mentales qui seront à disposition pour le problème à venir (celui de la phase 2 ici examinée). Pour favoriser ce recours aux images mentales, le maître laisse au tableau trois productions issues de l'examen collectif des feuilles pliées.
2. Le maître indique aux élèves que, dans le travail qui va suivre (celui de la phase 2), il faudra qu'ils soient encore plus précis.
3. Le maître met en place la feuille problème sur chaque bureau à un moment déterminé, et sans la boîte à outils. Une fois celle-ci installée, le maître dit : « *Alors ?* » et **les élèves font des hypothèses sur l'énoncé du problème** : « *il va falloir que nous fassions les plis* », « *il va falloir que nous tracions les traits des plis* ». Un élève s'exprime (inaudible) mais le maître a entendu et dit : « *C'est exactement ça* ». Il reformule

alors : « ***Comme la feuille est collée, à vous de prévoir où pourrait se trouver le pli si on avait fait comme tout à l'heure*** ». Comme les élèves ont devant eux de façon évidente les conditions matérielles dans lesquelles ils vont être placés, ils sont à même de connaître le problème à résoudre.
Le maître n'a pas de fiche dans les mains. Comme il s'agit alors de reprendre un problème voisin de celui de la première phase, il a seulement établi et mémorisé des principes d'actions auxquels il va se tenir.
La communication du problème a ainsi duré moins de 4 minutes.
Le maître oppose très simplement et clairement les choses : ce qui a changé par rapport à ce qui précède, ce qui n'a pas changé, l'énoncé du problème.
Le maître est très calme :

- expression orale lente, précise, claire, peu abondante ;
- déplacements limités (il fait déplacer les élèves), peu brusques... Le plus souvent il est debout, immobile, adossé.

Il est ainsi conseillé à M de tirer profit d'une telle observation, pour rédiger sa fiche de préparation. Puis, pour conduire la séance avec les élèves, de s'y tenir au plus près si cela lui convient, et à moins de fait de classe inattendu.

4.4 Quelle utilisation de ces éléments dans la conduite de la classe par M ?

M. a placé sur le tableau de droite une affiche où se trouve une consigne (cf. plus loin), ainsi que sa fiche de préparation.
1. M. enchaîne aussi le déroulement de la phase 2 à celui de la phase 1. Cependant, elle fait enlever toutes les productions affichées au tableau issues de cette phase 1.
2. M. évoque le matériel maintenant à disposition :

- la feuille problème, fixée au tableau et non sur les tables comme fait le maître ;
- la boîte à outils, évoquée mais encore non présente sur les bureaux.

Contrairement à ce qu'a fait le maître, les élèves n'ont devant eux sur leur bureau

- ni la feuille collée (M va devoir expliquer que le pli ne sera plus possible) ;
- ni la boîte à outils (les élèves ne connaissent pas son contenu et vont poser des questions).

3. Face à la question : « *Qu'est-ce que je vais vous faire faire ?* » des élèves font des propositions inappropriées, et un autre avance : « *Imaginer…* ». M. s'en empare et enchaîne : « ***Imaginer où on devrait tracer...*** ».
Les élèves reviennent ensuite par leurs questions ou remarques à la fois sur la façon dont ils vont pouvoir procéder, et sur les outils qui seront disponibles.
4. M. a le souci, comme il avait été décidé conjointement, de placer l'affiche énoncé au tableau. Elle se trouve surprise car elle prend l'affiche de la première phase et s'aperçoit qu'elle est inadaptée : elle a égaré l'affiche de l'énoncé. Sur notre suggestion, elle commence à écrire :
« ***Tracer le trait qui passe par le point F...*** »
et fait trouver la suite du texte par les élèves. Ceux-ci parviennent à dire :
« ***... et qui amène le trait noir sur le trait noir*** ».
5. M. autorise alors les élèves à poser des questions si besoin.
6. M. indique qu'elle ne donnera le feutre vert pour tracer que lorsque les élèves auront réfléchi… M. reprend en cela le mode de fonctionnement habituel du maître observé.
Il apparaît que les deux scénarios sont peu différents. Certains choix de M. auraient pu avoir des conséquences fâcheuses :

- non utilisation des productions de la phase 1 ;
- non présence devant les élèves des conditions effectives nouvelles pour le problème ;
- absence de l'affiche énoncé qui a motivé une suggestion à chaud.
- ordre des actions légèrement différent.

Mais M. a su s'en apercevoir, s'adapter et les réduire « à chaud ». Elle réagit très bien dans l'action, et notamment à une intervention classique d'élève qui commence à expliquer comment il ferait : « *Tu feras*

ton travail. Entendu? Et tout à l'heure, on verra comment tu as fait » et à un autre qui déclare qu'il ne saura pas faire : « *A toi de réfléchir* » ! Ce qu'elle a vu faire par le maître chevronné en d'autres circonstances.
La communication du problème a duré moins de huit minutes. C'est une durée plus longue que celle de la communication du problème par le maître du fait de questions d'élèves incitées et d'expressions qu'il a fallu expliciter et clarifier un peu.

Il nous semble très utile que les maîtres, qui ont fait le choix de proposer des situations ambitieuses puissent disposer, en débutant, de la possibilité d'observer un maître expert. Ils peuvent, par ce moyen, s'approprier des gestes professionnels qui sont des éléments clé dans la conduite d'une activité mathématique. Par ailleurs, l'observation est d'autant plus profitable qu'elle s'effectue sur la situation qui sera elle-même mise en œuvre ensuite par le maître novice. Car celui-ci peut alors identifier les gestes pratiques professionnels auxquels il n'aurait pas nécessairement pensé, il peut aussi les mettre en œuvre et les évaluer dans son action d'enseigner. Il restera à sa charge de les transposer alors dans les situations menées ultérieurement.
Bien sûr, cette démarche décrit une modalité d'aide à des maîtres débutants ; mais d'autres modalités existent et sont tout à fait appropriées.

5 CONCLUSION

Au moment où la formation des maîtres subit de fortes turbulences, au moment où les maîtres subissent de fortes contraintes et sont l'objet d'attentes élevées de la part de l'institution et des familles, la question de la continuation d'une véritable formation professionnelle au-delà d'une formation initiale se pose. Quelle forme peut avoir cette formation dans les premières années d'exercice du métier ?
Les maîtres débutants ont des charges de travail lourdes : le type de poste souvent fractionné ou à plusieurs niveaux, toutes les disciplines à enseigner, des élèves qui peuvent être difficiles… Désireux de mener des situations de recherche pour faire apprendre, ils peuvent être très vite découragés par différentes causes : les réflexions d'autres collègues, une « rentabilité » difficile à évaluer.... Les débutants sont confrontés aussi à des difficultés liées aux mathématiques très diverses, très pratiques… **Suite à leur formation initiale en didactique, une aide conséquente peut avoir, à ce moment-là de la vie professionnelle, des conséquences à long terme très positives.**
Il est en général possible d'aider beaucoup d'entre ces jeunes enseignants à dépasser ces difficultés avec succès compte tenu, en particulier, de la qualité de leur engagement professionnel. Dans la mesure où elle serait en alternance, une formation pourrait s'avérer efficace ; étant, de ce fait, en prise directe avec la classe d'exercice, elle pourrait avoir des conséquences immédiates.
Sur quoi pourrait porter cette formation ? Le soutien décrit dans les lignes précédentes pourrait-il en être un exemple ? Il a porté objectivement sur la phase de communication du problème ; il aurait pu aussi avoir pour objet :

- la gestion des phases collectives ;
- la conclusion à établir en fin de situation et sa mise en œuvre ;
- la façon de s'y prendre avec une classe à plusieurs cours…

Une aide comme celle-ci, dans la conduite d'une séance ou d'une situation, nous semble avoir un impact plus large : celui de contribuer à rassurer le maître et à l'encourager. Lorsqu'il se décide à mener des situations adidactiques, le maître sent qu'il se met en position inconfortable, parce qu'utiliser de telles situations s'avère être tout à fait nouveau par rapport au mode usuel d'enseignement, parce qu'il a l'impression de prendre des risques, parce qu'il a l'impression de ne pas avancer assez vite, parce qu'il n'a pas de réponse à nombre de ses interrogations :

- lors des moments de classe ;
- hors déroulement en classe, vis-à-vis des attentes des parents ou de l'institution.

Une aide à chaud est donc rassurante et bénéfique.

Pour les maîtres engagés dans « la résolution de problèmes pour construire et apprendre du nouveau », il nous semblerait utile que la formation permette non seulement l'acquisition de « règles » qui régissent les interventions du maître (« règles » adossées à des points d'appui mathématiques et didactiques), mais encore de rendre ces « règles » effectives en classe et de les opérationnaliser dans le temps d'enseignement/apprentissage. Il faut aider les débutants à acquérir des gestes professionnels (qui peuvent relever de la pédagogie générale) et à en saisir la signification et la portée didactique.

Dans la perspective des accompagnements prévus pour les enseignants débutants, et dans l'esprit des questionnements et des propositions exposés dans cette communication, il serait donc utile de préciser systématiquement quels sont les compétences professionnelles et les contenus didactiques spécifiques à une formation lors de ces premières années d'exercices. Cette analyse, et l'étude de dispositifs de formation qui y répondent constituent des objets de recherche pour la communauté.

Nous adressons nos remerciements profonds à :

- Véronique Siegler, professeur des écoles, pour avoir autorisé l'utilisation du travail fait dans sa classe (questions, préparation d'activités, enregistrement vidéo) qui a constitué le support essentiel de ces lignes ;
- Yves Gourgaud, professeur des écoles, pour son travail avec les élèves très utile à la formation des maîtres et pour la mise à disposition de documents vidéo ;
- Emmanuel Falguières, professeur des écoles, pour le témoignage qu'il nous a accordé.

6 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Berthelot Salin. L'enseignement de l'espace à l'école élémentaire Grand N n°65 IREM de Grenoble 1999

Berthelot Salin. L'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire Grand N n° 53 IREM de Grenoble 1994

Brousseau. Théorie des situations didactiques *La Pensée Sauvage (1998)*

Douady. Jeux de cadres et dialectique outil - objet RDM 7.2 *La Pensée Sauvage (1990)*

Douaire J., Argaud H.-C., Dussuc M.-P, Hubert C, (2003) Gestion des mises en commun par des maîtres débutants» in *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes* (coordination Colomb J., Douaire J., Noirfalise R. ADIREM/INRP).

Douaire J, Elalouf M.-L, Pommier P. « Savoirs professionnels et spécificités disciplinaires : analyse de mises en commun dans trois disciplines » *(2005) Grand N n°75.*

Margolinas. De l'importance du vrai et du faux. La Pensée sauvage. Grenoble 1993.

ERMEL Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3 *Hatier (2006)*

Document vidéo n°1 : Classe de Véronique Siegler CM Ecole L. Pergaud Valence Drôme, pour la situation « Trait sur trait ».

Document vidéo n°2 : Classe de Yves Gourgaud CE2 Ecole L. Pergaud Malissard Drôme, pour la situation « Trait sur trait ».

PRÉPARER LE CONCOURS DE PROFESSEUR DES ÉCOLES
EN UTILISANT
UN LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

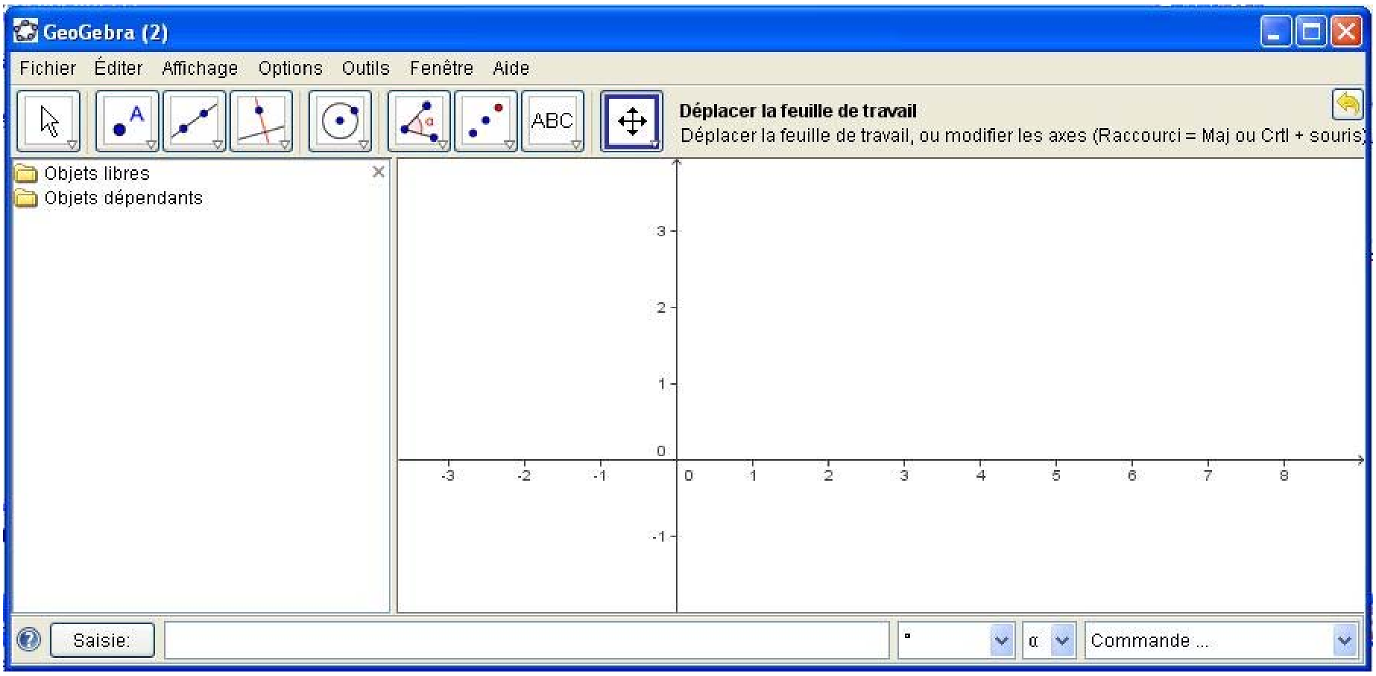
Une séance d'initiation à Géogébra

Cette année nous vous proposons aussi de travailler la géométrie en utilisant un logiciel de géométrie dynamique. Il existe de nombreux logiciels de géométrie dynamique, nous avons choisi de vous faire travailler avec GeoGebra. http://www.geogebra.at/

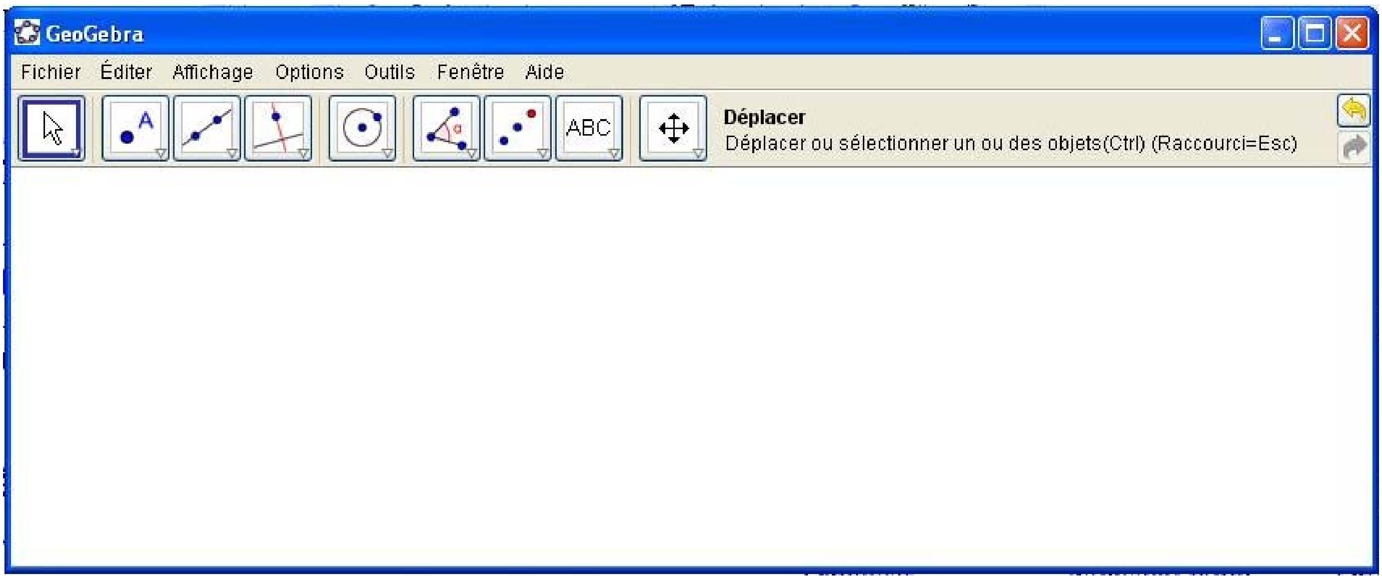
Ce logiciel utilisant la technologie Java, peut être utilisé sur tout ordinateur (PC, Mac …) quel qu'en soit le système d'exploitation (Windows, Linux …), seul l'environnement Java est nécessaire.
Ce logiciel est libre et GRATUIT, ce qui autorise donc tous les enseignants et tous les élèves à l'installer sur leur ordinateur. Il est utilisable de l'école à l'université pour les mathématiques, mais aussi les sciences physiques, la technologie et pourquoi pas tout simplement le « dessin » !
La communauté des collaborateurs et utilisateurs a à sa disposition :
Un forum où chacun peut manifester ses difficultés, ses réussites ou ses désirs :
http://www.geogebra.at/forum/
Un wiki : banque de dépôt mutualiste des productions : http://www.geogebra.at/en/wiki/index.php/French pour les contributions en langue française.

Découverte des objets de base et des outils de GeoGebra.

Une fois ouverte, une feuille de travail « GeoGebra » se présente sous l'aspect suivant :

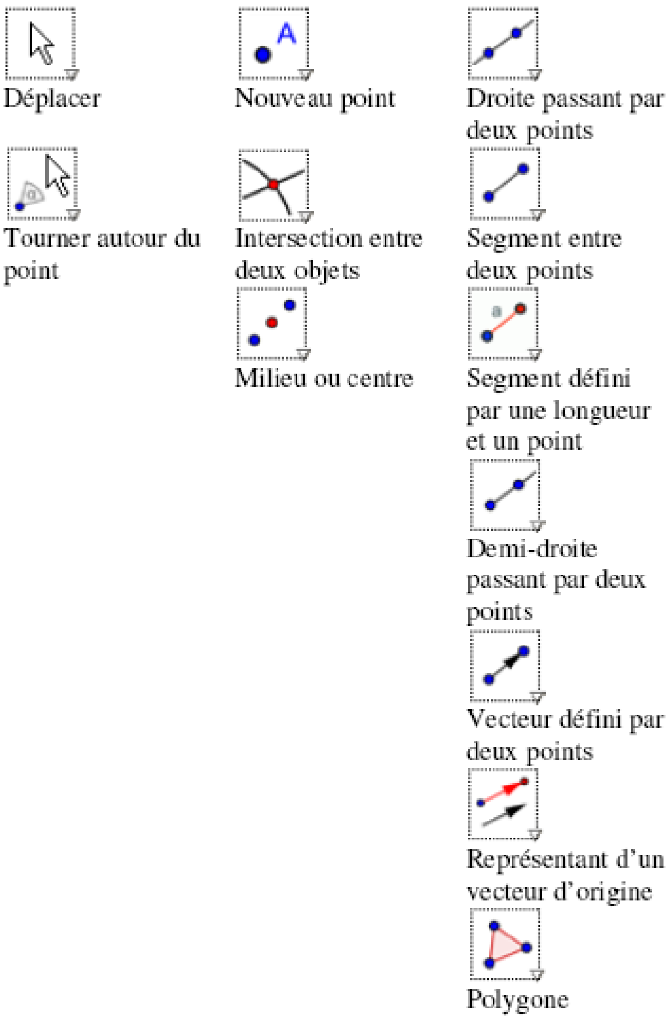


Sous le nom GeoGebra on peut voir une ligne de menu.
Pour le travail qui nous concerne nous n'avons besoin que d'une seule fenêtre et d'une page blanche sans axe. En cliquant sur le menu « Affichage » vous avez la possibilité de « décocher » trois options : « Axes », « Fenêtre Algèbre » et « Champ de saisie ». Une fois que vous aurez effectué cette opération vous obtenez la forme suivante de la feuille de travail :



Dernier point à évoquer avant d'aller plus loin, la ligne de boutons.
Il faut savoir que ces boutons sont des portes qui ouvrent sur de nombreux outils.
Un double-clique sur un bouton permet de voir et d'avoir accès aux outils qui sont derrière.

Voici ci-contre ces outils pour les trois premiers boutons.



Dans la suite du texte, les mots soulignés correspondent à des outils de GeoGebra, les *mots en italiques* correspondent à des menus de GeoGebra.

1) Les outils de base : point, droite, cercle

1.1 - Point

Cliquez sur l’outil point puis cliquez sur une partie quelconque de l’écran.

Vous obtenez un point que vous pouvez éventuellement renommer.

Renommer le point, l'appeler B, en utilisant dans le menu *Éditer*, l’option « Propriété » puis l'onglet « Nom ».

Puis renommez le C en utilisant le clic droit de la souris pointée préalablement sur le point.
Vous pouvez créer autant de points que vous le désirez tant que vous ne quittez pas l’outil point.
Vous quitterez cet outil en cliquant sur un autre outil et par exemple sur le pointeur.

Vous pouvez alors déplacer le point à l’aide de la souris (approchez le curseur près du point, et lorsque ″**une flèche**″ s’affiche sur l’écran déplacez la souris en maintenant enfoncé le bouton de la souris).

Pour effacer un point (un objet), le sélectionner à l'aide du pointeur et enfoncez la touche « Suppr ». Pour retrouver un écran vierge, on peut, dans le menu *Editer*, tout sélectionner, puis enfoncer la touche Suppr.

1.2 - Droite

Choisissez maintenant l’outil Droite (3ème bouton) et dessinez une droite. Avec le pointeur, vous pouvez déplacer cette droite (il y a deux façons de le faire).

1.3 – Point sur objet, point d'intersection de deux objets

Sélectionnez l'outil point, puis approchez le curseur d'une des droites tracées précédemment.
Lorsque cette droite « s'épaissit », cliquez. Déplacez le point ainsi créé. **Qu'observez-vous ?**

Assurez-vous que sur votre écran il y a deux droites sécantes (sinon, créez une telle situation). Avec l'outil point, créez le point à l'intersection de deux droites. Essayez de déplacer ce point. Bougez l'une puis l'autre droite (si possible). **Qu'observez-vous ?**

Synthèse :

1.4 - Cercle

1) Sélectionnez l'outil cercle (5ème icône). Cliquez une première fois pour créer le centre d'un cercle, puis une seconde fois pour fixer son rayon. Avec le pointeur, bougez le centre du cercle, puis la circonférence du cercle et observez les modifications de la figure.

2) Vous pouvez aussi utiliser l'outil Cercle(centre-rayon). Essayez.

2) Premières constructions pour explorer d'autres commandes

2.1 - Droite d'Euler

Dessinez un triangle ABC (en utilisant Polygone, 3ème bouton) et son orthocentre (outil droite perpendiculaire (4ème bouton) , puis point à l'intersection de deux droites). Nommez H cet orthocentre. Déplacez les sommets du triangle. **Que devient H ? Est-ce toujours l'orthocentre ?**

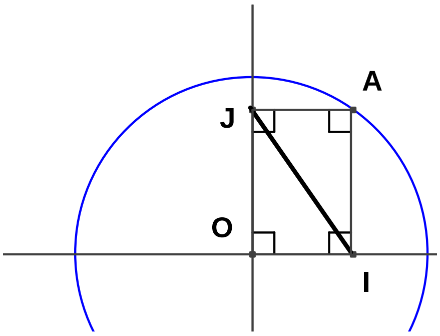
Le regarder sortir ou rentrer dans le triangle !...
Cachez les hauteurs (Dernier bouton : Afficher/cacher l'objet).

Construisez le centre de gravité G du triangle ABC et le centre du cercle circonscrit O à ABC. Ne laissez visible sur l'écran que le triangle et les trois points H, G et O. **Quelle conjecture peut-on émettre ? Comment peut-on tester cette conjecture avec le logiciel ?**

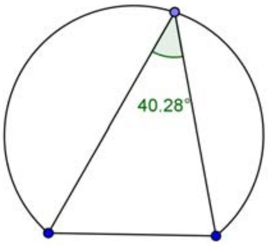
Tracez les segments [OG] et [OH] et les mesurer (outil distance ou Longueur du 6ème bouton). **Les positions relatives de O, G et H semblent-elles particulières ?**

2.2 : On considère un cercle C de centre O, de rayon 4 cm et deux droites perpendiculaires en O. A est un point quelconque du cercle C et on construit le rectangle OIAJ, I et J étant les projetés de A sur les deux droites tracées.

Déplacez le point A sur le cercle ; la longueur IJ varie-t-elle ? Justifiez votre observation.



2.3 - Arc et angle inscrit



Construisez un <u>segment</u> [AB] et un <u>arc de cercle créé par trois points</u> d'origine A et d'extrémité B, mais attention, il faut utiliser un point intermédiaire. Cachez ce 3ème point ayant servi à construire l'arc. Prenez un <u>point</u> M sur l'arc AB. Tracez les segments [AM] et [BM], tracer et mesurer l'angle $\widehat{AMB}$ avec l'outil <u>angle</u>.

Déplacez M sur l'arc AB, avec l'outil <u>pointeur</u>. Observez…

3) Figures robustes

On dira que certaines propriétés d'une figure résistent au déplacement, si la figure conserve ces propriétés lorsque l'on déplace n'importe lequel des points ou objets de base de la figure.

3.1 Ouvrir le fichier « carré1 ». Le dessin laisse penser qu'un carré est représenté. Cette propriété apparente est-elle résistante au déplacement ? <u>carré1</u>

Même question pour « carré2 » <u>carré2</u>

3.2 Construire un carré qui reste un carré lorsque l'on déplace n'importe lequel de ses points ou objets de base.

4) Des « protocoles »

Il est possible d'observer a postériori la procédure utilisée pour la construction en utilisant dans le menu *Affichage* la fonction « Protocole de construction ». (Il est aussi possible d'exporter ces « protocoles »).

4.1 Ouvrir le fichier carré1, faire apparaître le protocole de construction. En étudiant ce protocole, dire quelles ont été les propriétés utilisées ? Quelle est la figure ainsi obtenue ?

4.2 Les deux protocoles suivants correspondent-ils à des figures ayant les mêmes propriétés ?

Compte-rendu de construction

1. Trace le point **A** avec la valeur pour x **2.86** et pour y **-0.46**.
2. Trace le point **B** avec la valeur pour x **5.48** et pour y **-0.36**.
3. Trace la droite **a** passant par les points **A** et **B**.
4. Trace le cercle k_a ayant pour centre **A** et pour rayon **8**.
5. Coupe **a** avec k_a. Les points d'intersection seront désignés par **C** et **D**.
6. Trace la droite **b** passant par le point **C** et perpendiculaire à **a**.
7. Trace le cercle k_b ayant pour centre **C** et pour rayon **6**.
8. Coupe **b** avec k_b. Les points d'intersection seront désignés par **E** et **F**.
9. Trace la droite **c** passant par le point **E** et perpendiculaire à **b**.
10. Trace la droite **d** passant par le point **F** et perpendiculaire à **b**.
11. Trace le cercle k_c ayant pour centre **E** et pour rayon **4**.
12. Trace le cercle k_d ayant pour centre **F** et pour rayon **4**.
13. Coupe **c** avec k_c. Les points d'intersection seront désignés par **G** et **H**.
14. Coupe **d** avec k_d. Les points d'intersection seront désignés par **I** et **J**.
15. Trace le Pentagone **AGHJI**. Il sera désigné par P_a et ses cotés seront les segments suivants: **e** = [**AG**], **f** = [**GH**], **g** = [**HJ**], **h** = [**JI**], **i** = [**IA**].

Protocole de construction

Fichier Affichage Aide

No.	Nom	Définition
1	Point A	
2	Point B	Point sur Cercle[A, 8]
3	Segment a	Segment[A, B]
4	Droite b	Droite passant par B perpendiculaire à a
5	Cercle c	Cercle avec centre B et Rayon 6
6	Point C	point d'intersection de c, b
7	Point D	point d'intersection de c, b
8	Droite d	Droite passant par C perpendiculaire à b
9	Droite e	Droite passant par D perpendiculaire à b
10	Cercle f	Cercle avec centre C et Rayon 4
11	Cercle g	Cercle avec centre D et Rayon 4
12	Point E	point d'intersection de f, d
13	Point F	point d'intersection de f, d
14	Point G	point d'intersection de g, e
15	Point H	point d'intersection de g, e
16	Pentagone poly1	Polygone A, E, F, G, H

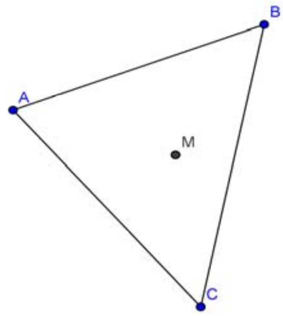
5) Boîtes noires

Une boîte noire en géométrie dynamique, est une figure composée d'objets initiaux et d'objets finaux. La construction des objets intermédiaires étant cachée, c'est à celui qui découvre la figure de retrouver cette construction (d'où l'appellation de boîte noire).
L'usage des boites noires est un outil qui peut aider le professeur à mettre les élèves en situation où ils devront reconnaître les liens entre les objets d'une figure.

Exemple : ouvrir le fichier « boîte1 », boîte1 .

Les objets initiaux sont les points A, B et C et les segments [AB], [BC] et [CA], l'objet final est le point M.

Pour la figure GeoGebra proposée, existe-t-il un lien entre le triangle ABC et le point M ?



6) Trois problèmes

6.1 : Alignés ou pas ?

Voici un schéma réalisé à main levée

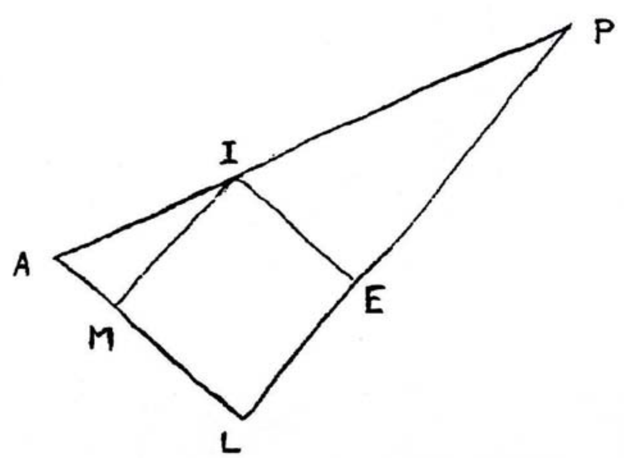
ALP est un triangle rectangle en L.
AL = 6,5 cm, LP = 10,5 cm

MIEL est un carré. E est sur le côté[LP],

M sur le côté [AL] et LE = 4 cm.

Construire la figure.

Les points A, I et P sont-ils alignés ?



6.2 : « Le quadrilatère qui tourne »

On considère un rectangle ABCD avec AB = 6 cm et BC = 9cm, M sur [AB], N sur [BC], O sur [CD] et P sur [DA] tels que AM = BN = CO = DP. Comment varie l'aire du quadrilatère MNOP lorsque M se déplace sur [AB] ? Quelle est sa valeur minimale ? Quand l'obtient-on ?

6.3 : Étudier la boîte noire « sourire » : sourire

PRÉPARER LE CONCOURS DE PROFESSEUR DES ÉCOLES
EN UTILISANT
UN LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

Une séance de recherche avec *Geogebra*

en salle informatique, en demi-groupe.

Exercice 1

Dans Fichier, ouvrez une nouvelle feuille de travail
Enregistrez le fichier sous le nom de « cerf_volant_1_nom »

Cet exercice porte sur l'étude des cerfs-volants

D'après le dictionnaire de l'Académie française*, le mot « cerf-volant, cerfs-volants au pluriel » viendrait de serp-volante mot d'origine méridionale signifiant « serpent volant » et non pas un cerf. Cette appellation serpent-volant ferait allusion aux textes et légendes mentionnant des serpents ailés et des dragons volants et aurait été appliquée par métaphore au cerf-volant artificiel.*

Avant toute chose, il est nécessaire de définir d'une façon univoque cette figure mathématique.

Définition : Un cerf-volant est un quadrilatère admettant une diagonale comme axe de symétrique

1.
   a. Construire un cerf-volant ABCD.
   b. Existe-t-il un quadrilatère EFGH admettant un axe de symétrie mais qui ne soit pas un cerf-volant ?
   c. Quelles sont les propriétés d'un cerf-volant ? Justifiez-les.

Enregistrez le fichier.

Dans Fichier, ouvrez une nouvelle feuille de travail
Enregistrez le fichier sous le nom de « cerf_volant_2_nom »

2. Les trois figures suivantes sont-elles constructibles :
   a. un cerf-volant ayant exactement un angle droit
   b. un cerf-volant ayant exactement deux angles droits
   c. un cerf-volant ABCD tel que AB = 4 cm, BC = 3 cm et l'angle BAD est droit.

Lorsqu'une des figures précédentes est constructible, la construire ci-dessous :

Enregistrez le fichier.

Dans Fichier, ouvrez une nouvelle feuille de travail
Enregistrez le fichier sous le nom de « cerf_volant_3_nom »

On appellera *orthocerf-volant* en A un cerf volant ABCD, d'axe de symétrie (AC) tel que l'angle BAD est droit.

3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.
    a. Les carrés sont des orthocerfs-volants

    b. Les rectangles sont des orthocerfs-volants.

    c. Les orthocerfs-volants dont les diagonales se coupent en leur milieu sont des carrés.

Enregistrez le fichier.

Exercice 2

Soit le cercle de centre A. B et M sont deux points du cercle et N le milieu de [BM].
Quel est le lieu des points N quand M se promène sur le cercle ? Démontrez-le.

Enregistrez le fichier.

Exercice 3

Dans Fichier, ouvrez une nouvelle feuille de travail
Enregistrez le fichier sous le nom de « tangente_nom »

Soit (d) et (d') deux droites sécantes en A.

1. Construire des cercles tangents simultanément aux deux droites.

2. Faire une construction qui résiste aux déplacements des droites (d) et (d') ainsi qu'aux déplacements du point A. Justifiez votre construction.

Exercice 4

Dans Fichier, ouvrez une nouvelle feuille de travail
Enregistrez le fichier sous le nom de « prop_1_nom »

Soit A et B deux points distincts et C le milieu de [AB]. Nous savons que si on place un point D sur le cercle de diamètre [AB], alors le triangle ABD est un triangle rectangle en D. Que pouvez-vous dire de l'angle ADB lorsque le point D est extérieur au cercle ? Démontrez-le.

Enregistrez le fichier.

<u>Exercice 5 (autonomie)</u>

Enregistrez le fichier sous le nom de « varignon_nom »

Ce premier exercice est connu sous le nom du probléme de Varignon.
(Pierre Varignon, mathématicien français né à Caen en 1654 et mort à Paris le 23 décembre 1722. Il enseigna les mathématiques. Physicien, il inventa en 1705 le manomètre, appareil mesurant la pression.)

1.
   a. Construire un quadrilatère quelconque ABCD.
      Placer les points E, F, G et H milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA]
   b. Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ? Démontrer le.

2. a) Construire un quadrilatère ABCD pour que EFGH est un losange.
   b) À quelle condition sur le quadrilatère ABCD, EFGH est-il un losange ?

3. **Autonomie**
   a. Construire un quadrilatère ABCD pour que EFGH soit un rectangle
   b. À quelle condition sur le quadrilatère ABCD, EFGH est-il un rectangle?

4. **Autonomie**
   a. Construire un quadrilatère ABCD pour que EFGH soit un carré
   b. À quelle(s) condition(s) sur le quadrilatère ABCD, EFGH est-il un carré ?

Enregistrez le fichier.

Communication D4

INTÉGRATION D'UN LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE DANS LA PRÉPARATION AU CRPE

Floriane Wozniak
Université Lyon 1, IUFM de Lyon
floriane.wozniak@univ-lyon1.fr

René Thomas
Université Lyon 1, IUFM de Lyon

Mathias Front
Université Lyon 1, IUFM de Lyon

Yves Grégor
Université Lyon 1, IUFM de Lyon

Résumé
L'équipe MATICE (Mathématiques & TICE) de l'IUFM de Lyon présente une expérience de formation initiale en mathématiques intégrant les TICE, avec des étudiants préparant le CRPE. L'objectif est de favoriser par homologie, l'intégration de logiciels de géométrie dynamique dans les pratiques des futurs enseignants de l'école. Cette pratique s'appuie sur le choix de dispositifs qui permettent aux étudiants d'éprouver des changements épistémologiques dans la géométrie pratiquée induit par les TICE.
Après avoir présenté le dispositif de formation, le choix du logiciel, l'auteur met en perspective, dans deux séances, des types de tâches mathématiques et instrumentales. Ces activités sont décrites comme un moment d'initiation-exploration qui se prolonge dans un entrelacement qui vise la construction des connaissances mathématiques.
Ces éléments sont évalués dans le cadre général de la formation et une enquête permet de situer le rapport personnel que les étudiants ont établi avec l'usage du logiciel en mathématique.
Le bilan général est globalement positif sur la pertinence de cette démarche pour préparer à la fois le concours et une évolution dans l'intégration future des logiciels de géométrie dynamique à l'école élémentaire.

1 INTRODUCTION

L'objet de cette présentation est de partager l'expérience de la mise en œuvre d'un module de formation dans le cadre de la préparation au CRPE – concours de recrutement de professeurs des écoles – que nous avons expérimenté durant l'année 2008-2009 à l'IUFM de l'académie de Lyon. Plutôt que d'envisager une formation visant l'intégration des TICE – Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement – fondée seulement sur l'analyse des pratiques de classe ou l'accompagnement voire le développement de séquences d'enseignement, nous avons exploré la possibilité d'aborder cette question aussi sous l'angle de la formation disciplinaire en géométrie.

1.1 Des constats

Concernant le recours aux TICE à l'école, le récent rapport de l'IGEN sur *L'enseignement des mathématiques au cycle 3*, indique page 57 que « l'utilisation des TICE est quasi-inexistante » et que « le recours à l'informatique pour l'enseignement des mathématiques relève de l'exceptionnel » (Durpaire, 2006). Or de récents travaux, dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Wozniak, 2007), ont montré que lorsque le professeur et les élèves se retrouvent autour d'un savoir à enseigner, les

conditions et les contraintes qui prévalent alors ne se limitent pas à celles immédiatement identifiables dans la classe comme la disponibilité de tel matériel, de tel logiciel ou les connaissances du professeur et des élèves, etc. Ainsi, par exemple, Imbert (2008) montre que si les instructions officielles évoquent la possibilité d'utiliser les logiciels de géométrie dynamique – LGD – nulle part ne sont décrits les types de tâches à enseigner. Une enquête qu'il a réalisée auprès des 93 inspecteurs en charge des TICE en France[1] semble montrer qu'elles sont considérées comme adaptées d'abord aux projets transversaux plutôt qu'aux domaines disciplinaires. Et lorsque Jean-Louis Imbert demande quels sont les logiciels qui sont recommandés en mathématiques seulement 3 réponses sur 21 mentionnent un LGD.
Le « message » de l'Institution apparaît donc ambigu : la pertinence des TICE est à chercher du côté des compétences transversales et pourtant l'enseignement des mathématiques doit intégrer les TICE et ceci, en absence (relative) de ressources pour les professeurs. C'est ainsi que l'institution scolaire renvoie la responsabilité aux professeurs eux-mêmes d'imaginer et concevoir les situations d'enseignement qui intègrent les TICE. Ceci explique sans doute, pour partie, pourquoi les formations qui visent à l'intégration des TICE se fondent sur l'analyse des pratiques de classe qu'il s'agisse de formations reposant sur l'homologie et la monstration (Houdement & Kuzniak, 1996) que de formations visant la mutualisation, l'accompagnement voire le développement de séquences d'enseignement. À l'IUFM de l'académie de Lyon, par exemple, la formation visant l'intégration des TICE à l'école en PE2 se base sur la présentation des fonctionnalités de certains logiciels et de leurs potentialités didactiques, parfois – suivant les compétences et expériences propres des formateurs – illustrées par le compte rendu d'activités réalisées dans les classes.

1.2 Le projet MATICE

Au CRPE certaines questions complémentaires peuvent porter sur « des scénarios possibles pour des séances faisant appel aux TICE ». Souhaitant aborder selon un point de vue renouvelé la question de la formation à l'intégration des TICE tout en préparant efficacement les étudiants au CRPE, nous avons expérimenté durant l'année 2008-2009 un enseignement de la géométrie qui intègre un logiciel de géométrie dynamique (LGD). Ce dispositif de formation a été élaboré par le groupe MATICE[2] (**Ma**thématiques & **TICE**) qui s'est constitué suite à un appel à projets de notre institut relatif à l'étude de l'impact de la formation professionnelle initiale ou continue sur les pratiques d'enseignement.
L'objet de notre travail est d'étudier si un enseignement de la géométrie qui intègre un logiciel de géométrie dynamique (LGD) en 1re année de formation des professeurs des écoles (PE1) peut agir comme une condition facilitatrice à l'intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques à l'école. Nous faisons l'hypothèse que l'utilisation d'un LGD pour « apprendre » de la géométrie permet aux futurs professeurs de percevoir *in proprio* comment le recours à un LGD participe de l'acquisition de savoirs géométriques. Ainsi, ayant éprouvé par eux-mêmes les changements épistémologiques que le recours à un LGD induit dans la construction du rapport personnel à la géométrie, nous supposons que les professeurs des écoles seront plus enclins à intégrer cet outil dans leurs pratiques professionnelles. L'aspect novateur de ce projet repose donc sur une ingénierie de formation *disciplinaire* qui intègre les TICE.

1.3 Intégrer un LGD : conditions et contraintes

Certains travaux fondés sur la conception et l'expérimentation d'ingénieries visant l'intégration des LGD dans des classes de collège et lycée (Clarou, Laborde et Capponi, 2001) ou au cycle 3 de l'école primaire

---

[1] Il existe un inspecteur par département en charge des TICE qui coordonne le travail des conseillers pédagogiques et des maîtres animateurs en informatique au sein des circonscriptions.
[2] Ce groupe est constitué de 4 formateurs de l'IUFM de l'académie de Lyon travaillant sur les 3 sites de l'IUFM : Mathias Front (site de Bourg-en-Bresse), Yves Grégor (site de Lyon), René Thomas (site de Saint-Étienne) et Floriane Wozniak (responsable du projet MATICE, site de Lyon).

(Assude & Grugeon, 2003) ont permis de révéler certaines des conditions qui prévalent à leur intégration. Nous pouvons évoquer par exemple la nécessité de prendre en charge les connaissances instrumentales, la gestion de la dialectique entre savoirs géométriques anciens et nouveaux (Assude & Gélis, 2002) – comme l'accomplissement dans un nouvel environnement de types de tâches géométriques déjà maîtrisés – ou les modifications dans les règles de fonctionnement du contrat didactique. Mais ces conditions agissent comme autant de contraintes, notamment sur la gestion du temps (Assude & Grugeon, 2003 ; Assude 2005). Les savoirs liés à la genèse instrumentale (Trouche, 2005) et leur temps d'apprentissage obligent en effet le professeur à prendre en charge la gestion du temps de travail des élèves par rapport à l'avancée du temps didactique (Sensevy, 1996), notamment par l'élaboration d'organisations didactiques et mathématiques spécifiques à ces types de situations d'enseignement. Artigue (1998) a, par ailleurs, identifié deux obstacles importants : la nécessité que l'usage des TICE soit perçu comme justifié et légitime pour l'enseignement des mathématiques – « The 'educationnal legitimacy' of computer technologies » –, d'une part, la prise en charge d'une double transposition didactique – "The underestimation of issues linked to the computer transposition of mathematical knowledge" –, l'une relative aux savoirs mathématiques enseignés, l'autre relative aux savoirs instrumentaux spécifiques aux TICE, d'autre part.

Nourris de ces divers travaux, nous avons ainsi tenté de concevoir un enseignement de la géométrie dans lequel la reprise de l'étude était réalisée à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

2 LE DISPOSITIF DE FORMATION

2.1 Organisation de la formation

Nous avons conçu une formation à la préparation au CRPE en géométrie qui intègre l'usage d'un LGD de sorte que les futurs professeurs soient mis en situation d'***apprendre avec*** un LGD plutôt que seulement ***apprendre à enseigner avec*** un LGD. Le dispositif de formation que nous avons conçu contient deux volets : une formation disciplinaire qui intègre un LGD de sorte que les professeurs des écoles puissent éprouver eux-mêmes les changements épistémologiques que le recours à un LGD induit dans le rapport personnel à la géométrie ; un module de formation didactique sur l'usage d'un LGD pour l'enseignement de la géométrie au cycle 3 qui soit conforme aux attendus du CRPE. Notre dispositif de formation a été expérimenté auprès de 112 étudiants PE1 aux profils divers et répartis sur les 3 sites de formation de l'IUFM de l'académie de Lyon. Il s'est décliné en 2 séances en demi-groupes en salle informatique et en 3 conférences :
Séance 1: genèse instrumentale
Conférence 1: synthèse à l'issue de la 1re séance
Séance 2 : résolution de problèmes en géométrie, la démonstration
Conférence 2 : aspects didactiques de l'utilisation d'un LGD
Conférence 3 : cours sur la géométrie dans l'espace illustrée à l'aide d'un LGD 3D.

Compte tenu des contraintes locales, notre projet initial n'a pu être mis en œuvre de la même façon sur les trois sites de formation. Nous ne présenterons donc ici que les deux séances en salle d'informatique et évoquerons le contenu de la conférence de synthèse suite à la première séance. Notons enfin que le dispositif que nous présentons ici s'est ajouté aux séances d'enseignement du plan de formation de l'IUFM de l'académie de Lyon dans lesquelles les questions didactiques de l'intégration des TICE en général sont habituellement abordées.

Nous savions que les formateurs engagés dans ce projet ne pourraient pas assurer des séances de travaux dirigés de même durée[3], aussi ont-elles été systématiquement conçues comme devant se prolonger par un travail personnel au-delà des séances elles-mêmes. En général, il a été laissé 3 semaines aux étudiants pour terminer le travail et rendre les documents aux formateurs. La conférence 1 s'est tenue un mois après la première séance et la séance 2 de travaux dirigés a eu lieu prés d'un mois plus tard. Ainsi, par exemple, sur le site de Bourg-en-Bresse le calendrier a été le suivant : séance 1 en demi-groupe le 17 septembre 2008 puis conférence de synthèse le 24 octobre 2008 et 2e séance de travaux dirigés le 14 novembre 2008.

Au-delà de la prise en compte des contraintes spécifiques liées au temps imparti pour les séances en demi-groupe, nous avons proposé de poursuivre le travail en classe par un travail personnel afin d'inciter les étudiants à installer le logiciel de géométrie dynamique sur leur ordinateur personnel. Il nous paraissait plus efficace que les étudiants soient incités à installer un LGD chez eux autrement que par une simple recommandation. Nous y avons vu aussi un moyen de prendre en charge la gestion différentielle du temps de travail des élèves et de l'avancée du temps didactique.

Quel choix de logiciel ?

Il était essentiel pour nous que les étudiants puissent utiliser le LGD en dehors des séances d'enseignement. Le recours à un logiciel gratuit et librement téléchargeable sur l'Internet s'est donc imposé. D'autre part, dans une perspective d'utilisation ultérieure dans les classes, nous souhaitions utiliser un logiciel dont la communauté des utilisateurs soit active, ce qui est une condition d'évolution du logiciel. Des fonctionnalités comme la *trace*, le *protocole* ou les possibilités algébriques du logiciel Geogebra[4] ont constitué des éléments décisifs dans notre choix.

2.2 La première séance : une initiation à l'utilisation de Geogebra

Cette première séance avait un double objectif : d'une part elle constituait une reprise de l'étude de la géométrie plane puisqu'il s'agissait de la première séance d'enseignement de l'année en ce domaine et d'autre part elle intégrait la nécessaire prise en charge de l'exploration des fonctionnalités du logiciel. En effet, encore de nos jours les LGD sont assez peu utilisés dans les enseignements de mathématiques au collège et au lycée et de nombreux préparationnaires au CRPE n'ont pas souvent utilisé de tels logiciels durant leur scolarité[5]. La préparation du CRPE représente alors le moment d'une première rencontre avec ce type de logiciel.

Dans le document distribué aux étudiants (voir annexe 1), un petit préambule présentait le logiciel, les conditions de son téléchargement ainsi que son ergonomie générale grâce à des copies d'écran. Cette présentation préliminaire, bien qu'insuffisante pour prendre en charge les savoirs liés à la genèse instrumentale, était conçue pour permettre une utilisation par les étudiants en autonomie, condition indispensable pour que le formateur puisse aider individuellement ceux qui seraient en difficulté. C'est ainsi que toutes les actions à réaliser sont décrites et que pour chaque question posée une place est réservée dans le document pour la réponse. Comme évoqué plus haut, nous avons fait le choix de proposer un ensemble d'activités qui dépasse la durée d'une séance de travaux dirigés et de différer d'un mois la synthèse, il était donc indispensable de laisser une place pour garder la trace des réponses.

Cette première séance était structurée autour de 6 parties.

Une première partie intitulée *Les outils de base, point, droite, cercle* visait à permettre aux étudiants de découvrir les premières fonctionnalités du logiciel et notamment d'appréhender la distinction entre les

---

3 Le temps consacré à la première séance a été de 1 h 45 à 2 h 30 suivant les sites et de 2 à 3 heures pour la séance 2.

4 Ce logiciel est utilisable en ligne ou téléchargeable à l'adresse : http://www.geogebra.org/cms/index.php?lang=fr

5 Dans notre petit échantillon de 112 étudiants, 70 % d'entre eux n'avaient jamais utilisé de LGD au cours de leur scolarité.

points – ou plus généralement, les objets – libres et liés. Cette distinction est évidemment essentielle car elle traduit la construction d'un objet géométrique comme lié à un autre objet géométrique[6].
Dans la deuxième partie, d'autres commandes étaient explorées au travers de l'étude de trois types de problèmes : établir une conjecture à propos de la droite d'Euler, explorer une figure pour déterminer une propriété de la configuration considérée avant de la démontrer et enfin observer la propriété liant arc et angle inscrit. Cette seconde partie visait à amorcer une réflexion autour de la distinction entre construire, conjecturer, expérimenter et prouver et permet de revisiter des savoirs géométriques anciens dans un nouveau milieu qui génère des techniques d'étude des figures spécifique notamment au travers du déplacement des objets géométriques.
La troisième partie était consacrée aux « figures robustes », c'est-à-dire aux figures dont les propriétés sont invariantes par déplacements[7], afin de faire percevoir aux étudiants la distinction entre une figure et un dessin[8]. Pour ce faire, nous avons choisi d'utiliser le carré dont les propriétés sont bien connues des étudiants, même en début de formation.
La quatrième partie portait sur le *protocole* qui a une fonction d'historique au travers de la liste des actions conduites qu'elle fournit. Il était demandé aux étudiants, à partir de la donnée d'un protocole, de déterminer les propriétés utilisées dans la construction d'une figure géométrique et d'en déduire la nature de la figure obtenue. Au-delà du réinvestissement de la distinction rencontrée précédemment entre une figure et un dessin, ceci permet aux étudiants de découvrir une possibilité offerte par l'usage de ce type de logiciel qui n'existe pas dans un environnement « papier/crayon ». La fonction protocole apparaît alors comme un outil didactique spécifique qui permet d'effectuer des activités géométriques d'un type de nouveau.
La cinquième partie donnait aussi l'occasion d'explorer un nouveau type de tâche : l'étude de « boîtes noires ». En ce cas, les étudiants sont amenés à utiliser la propriété dynamique du logiciel pour déterminer une relation entre deux objets (ici, un point et un triangle) donnés.
Enfin, la sixième et dernière partie était constituée de trois problèmes. Dans le premier problème une construction en environnement papier/crayon laisse supposer qu'il y a un alignement, alors que dans un environnement LGD, la fonction de zoom permet de percevoir que ce n'est pas le cas. Ce problème a donc été proposé pour amener les étudiants à dépasser l'observation et aller vers la recherche d'une preuve et passer ainsi d'une posture du « vu et du perçu » vers une posture du « su ». Le second problème portait sur l'étude du maximum d'une fonction alors que le dernier problème revenait sur l'étude d'une boîte noire.

2.3 La conférence « faire de la géométrie avec Geogebra »

L'objet de cette conférence était triple : revenir sur la correction des exercices, faire une synthèse sur les fonctionnalités du logiciel et enfin aborder 4 types de problèmes de la géométrie euclidienne telle qu'elle se pratique à l'école : Construire, conjecturer, expérimenter et prouver. Nous avons ainsi explicité la dialectique entre la géométrie comme science physique des faits spatiaux et la géométrie euclidienne comme théorie déductive[9]. En particulier, nous sommes revenus sur la dualité entre l'expérience (graphique) et la notion de preuve en géométrie euclidienne : l'expérience n'y a pas valeur de preuve et les faits spatiaux y sont démontrés à partir des théorèmes, car seul un discours déduit de l'axiomatique et des théorèmes est reconnu valide. Le changement de statut de la preuve par un glissement des

---

[6] Un point peut être visuellement sur une droite sans avoir été défini comme lui appartenant, auquel cas le déplacement de la droite n'induira pas le déplacement du point.

[7] La figure conserve les mêmes propriétés quand on déplace les points qui servent à sa construction. Nous avons parlé indifféremment de figures « robustes » ou « résistantes ».

[8] La figure est l'objet géométrique idéalisé sur lequel on effectue les raisonnements alors que le dessin n'est que sa représentation « physique » matérialisée par le tracé du crayon sur la feuille de papier par exemple.

[9] La géométrie euclidienne est ainsi fondée sur des assertions tenues pour vraies – les axiomes, comme par exemple « par deux points passent une unique droite » –, les théorèmes se déduisant alors des axiomes premiers.

raisonnements inductifs vers les raisonnements déductifs[10] est une question vive dans un environnement avec un LGD car les étudiants ont une propension à faire état de l'usage de la fonction dynamique du logiciel comme moyen de validation d'une conjecture. L'étude du problème autour de la droite d'Euler nous a paru de nature à rendre explicite ces aspects. Il s'agit de construire l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit à un triangle quelconque. L'observation conduit à conjecturer l'alignement de ces trois points. Cette conjecture est alors éprouvée expérimentalement par la mesure de l'angle formé par ces 3 points ce qui conforte les étudiants dans leur observation première mais reste insuffisant du point de vue de la géométrie déductive euclidienne. Les étudiants doivent encore en rédiger la démonstration. Au-delà de la simple correction des activités, la conférence a permis de faire le point sur les changements épistémologiques dans le rapport à la géométrie comme la prise en compte de la décharge des difficultés liées à la maîtrise des instruments de construction (règle, équerre, compas, etc.) et des problèmes de précision des tracés ; la fonction dynamique du LGD qui facilite l'exploration des propriétés d'une figure en permettant à moindres coûts le recours à des « essais » successifs ce qui aide à « sortir » du cas particulier de la figure initiale pour en identifier les invariants; les problèmes relatifs aux lieux géométriques de points qui sont ainsi revisités, sans oublier de citer comment le problème de la « robustesse » des figures permet une évolution du dessin à la figure.
Cependant, la question de la validation et de la preuve reste un point d'achoppement : d'une part il est aisé de déplacer des points pour ajuster le dessin obtenu à ce qui est attendu sans mettre en œuvre les propriétés géométriques[11] et d'autre part parce que ce qui se « voit » sur le dessin y est encore plus prégnant. Ceci explique que nous ayons proposé une seconde séance pour permettre aux étudiants de dépasser le stade de la simple conjecture et de l'expérimentation graphique afin d'aller vers l'élaboration de démonstrations pour prouver.

2.4 La deuxième séance : Construction-exploration-conjecture-vérification-preuve

Cette deuxième séance s'est organisée autour de l'étude de quatre problèmes (voir annexe 2). Comme dans le cas de la première séance, un dernier problème était à l'étude en autonomie afin de réguler les différences de rythme de travail des étudiants durant la séance mais aussi de les conduire à poursuivre leur travail avec le LGD en dehors des séances à l'IUFM. Le premier problème était relatif aux propriétés du « cerf-volant », quadrilatère admettant une diagonale comme axe de symétrique. Diverses constructions de cerfs-volants particuliers ont été ainsi demandées. Les fonctions du LGD aidaient les étudiants à explorer les propriétés des figures, ce qui leur permettait de trouver les réponses mais il était aussi demandé les constructions « papier-crayon » lorsque c'était possible. Il est clair que le contrat en PE1 est de préparer les étudiants à réussir le CRPE, nous n'avons donc jamais envisagé l'usage d'un LGD dans la formation comme exclusif du travail dans un environnement papier/crayon qui est d'ailleurs le seul environnement dans lequel les candidats ont à travailler le jour du concours. Les démonstrations étaient ainsi explicitement attendues au travers de la demande de la justification des réponses. Le deuxième problème portait sur la recherche de lieux géométriques de points. Il est clair que des fonctions comme la *trace* ou le *lieu géométrique de points* du LGD modifient l'étude de ce genre de problèmes. Dans le contexte d'utilisation d'un LGD demander de déterminer voire de construire le lieu géométrique des points n'a plus d'intérêt car le logiciel fournit immédiatement la réponse attendue. Ainsi déchargé de ces recherches préliminaires, l'étudiant peut se consacrer à l'étude des propriétés de la configuration afin de justifier pourquoi le lieu des points est ce qu'il est. Un troisième problème était ensuite proposé dans lequel l'exigence de construire une figure « robuste » invariante par déplacements forçait le recours aux propriétés : il s'agissait de construire plusieurs cercles tangents à deux droites sécantes. Le même type de construction dans l'environnement papier-crayon ne contraint pas à recourir aux propriétés de la configuration, car un ajustement graphique à l'aide du compas permet à l'élève de trouver le lieu du centre d'un tel cercle. Si la connaissance de la propriété des bissectrices comme lieu

---

10 L'induction est un type de raisonnement qui consiste à tirer des conclusions générales de cas particulier alors que la déduction repose sur le lien de cause à effets entre hypothèse et conclusion.

11 ce qui se produit lorsque la condition de « robustesse » de la figure n'est pas demandée.

géométrique des centres des cercles tangents à deux droites sécantes suffit à réaliser la tâche dans un environnement papier-crayon, ce n'est pas le cas dans l'environnement LGD où les cercles doivent rester tangents lorsque les droites sont déplacées ; il faut encore utiliser la propriété de perpendicularité de la tangente avec le rayon issu du point de tangence. On mesure ici combien le milieu LGD influe sur la tâche à accomplir. Le quatrième problème à étudier était un prolongement de l'exercice 2.3 sur l'arc et l'angle inscrit travaillé au cours de la 1re séance. Il portait sur la propriété relative à la mesure d'un des angles d'un triangle lorsque le sommet de cet angle (3e sommet du triangle) est à l'extérieur du cercle de diamètre le côté du triangle qui ne porte pas l'angle : le LGD permet de conjecturer cette propriété en considérant les mesures d'un angle dans différentes configurations. Enfin, le problème qu'il restait à étudier en autonomie était le classique problème de Varignon.

3 QUELQUES OBSERVATIONS & ÉLÉMENTS DE RÉFLEXION

Sur le site de Bourg-en-Bresse, un seul groupe de 29 étudiants a été concerné. Aucun des ces étudiants n'étaient de formation initiale scientifique, leurs compétences en mathématiques étaient assez réduites. Parmi eux, 24 possédaient un ordinateur et 20 d'entre eux ont déclaré avoir utilisé un LGD durant leur scolarité.
Sur le site de Lyon, le groupe était formé de 18 étudiants seulement qui avaient reçu une formation initiale plutôt scientifique[12] mais seulement 5 d'entre eux ont déclaré avoir déjà utilisé un LGD.
Sur Saint-Étienne, deux groupes – soit 65 étudiants – étaient concernés, l'un à profil scientifique et l'autre non. Environ un tiers utilisaient un ordinateur personnel et 5 disaient avoir utilisé un LGD au cours de leur scolarité.

Il est impossible actuellement de tirer un bilan précis de cette formation, en particulier du point de vue de son impact sur les pratiques futures des professeurs des écoles. Cependant nous avons quelques indices sur la façon dont les étudiants ont appréhendé à l'issue de cette formation l'apport d'un LGD pour l'enseignement de la géométrie.

3.1 Un questionnaire en fin de formation

Nous avons fait passer un rapide questionnaire en fin de formation (voir annexe 3) afin de mieux connaître les impressions des étudiants sur le recours à un LGD dans le cadre de leur préparation au concours. Un premier constat s'impose : la quasi-totalité des étudiants disposant d'un ordinateur personnel a installé le logiciel *Geogebra*. En revanche son utilisation effective semble liée au niveau d'expertise en mathématique des étudiants : ceux qui ne sont pas à l'aise dans cette discipline semblent avoir été plus enclins à utiliser le LGD, c'est en tous cas ce que laissent supposer les réponses obtenues à Bourg-en-Bresse et Lyon. Les étudiants de ces deux groupes sont en effet de profils assez différents : les premiers sont de formation initiale en sciences humaines et sociales, certains éprouvant de réelles difficultés en mathématiques, ils ont déclaré majoritairement avoir utilisé le LGD pour résoudre des exercices (19/26 soit 73 % des réponses). Les seconds en revanche sont de formation initiale scientifique et la moitié avait déjà présenté le concours avec des notes supérieures à 10 en mathématiques : plus de 93 % (14/15) ont déclaré ne pas avoir utilisé le LGD pour travailler les exercices de géométrie.
Il reste cependant à noter que la formulation de la question « avez-vous utilisé un logiciel de géométrie dynamique pour vos exercices ? » était maladroite car elle ne précisait pas s'il s'agissait des exercices de géométrie autres que ceux liés aux séances en salle informatique. Ainsi, nous ne sommes pas en mesure de préciser si les étudiants ont utilisé le logiciel seulement pour finir le travail commencé en salle informatique ou pour étudier d'autres exercices. Notons encore que nous n'avons pas vraiment été surpris de lire des réponses du type « non mais c'est une bonne idée » tant il apparaît que les LGD ne

[12] 14 étudiants sur 18 ont obtenu un baccalauréat ES ou S et 5 avait fait des études scientifiques (dont un doctorat de Biologie), 4 avaient un master en STAPS. Parmi ces étudiants, 9 avaient déjà présenté le CRPE dont 7 d'entre eux avaient obtenu une note en mathématiques supérieure à 10.

sont pas des outils naturalisés – c'est-à-dire mobilisables sans questionnement – en mathématiques. Enfin, signalons une réponse prometteuse pour les pratiques futures d'enseignant de l'étudiant qui déclare : « Non mais utilisé pour travailler avec un élève en difficultés en mathématiques ».

3.2 Une épreuve de concours blanc

Sur le site de Saint-Étienne l'épreuve de concours blanc du 25 février 2009 contenait une question relative à l'usage d'un LGD dans une activité de reproduction de figure (voir annexe 4). Il s'agissait de déterminer les intérêts de son usage comparativement à un environnement papier-crayon pour une tâche de reproduction de figures et de proposer des dispositifs d'aide dans un tel environnement. Les réponses fournies par les étudiants sont un indice de la façon dont ils ont perçu l'apport didactique de l'environnement informatique. Malheureusement il ne nous a pas été possible de disposer de l'ensemble des réponses des étudiants ce qui nous aurait permis de faire l'inventaire des arguments les plus significatifs pour les étudiants. Nous n'avons pu recueillir qu'un échantillon aléatoire de 9 réponses soient 27 arguments en faveur de l'usage de l'environnement LGD. Sur cet échantillon réduit on peut néanmoins dégager 4 types d'arguments.
Le premier argument, cité 8 fois sur 9 réponses est spécifique du support LGD : il s'agit de l'aspect dynamique du logiciel qui permet d'explorer les figures pour en dégager les propriétés invariantes par déplacements. Le second argument développé (présent dans 7 des 9 réponses) est lié à la spécificité de la tâche – reproduction d'une figure donnée. Cet argument porte en effet sur la facilité et la précision des tracés qui permet d'obtenir « des dessins propres » en dépit d'éventuelles difficultés à manipuler les outils géométriques (règle, équerre, compas). Le troisième argument avancé porte sur la facilité à faire des essais, de rectifier ses erreurs. Enfin, quelques étudiants évoquent le « côté ludique » de l'informatique qui motiverait les élèves. Un seul étudiant sur les neuf de notre très faible échantillon cite un des aspects pourtant présent lors des séances que nous avons proposées en formation, la dimension expérimentale, voici ce qu'il écrit : « les initier à une démarche scientifique : les élèves seront ici amenés à formuler des hypothèses puis à les valider ou les rejeter selon les configurations du rectangle ». En guise d'illustration, on trouvera en annexe 5 trois exemples significatifs des réponses obtenues.

4 UN LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE EN PE1: UN PARI RISQUÉ ?

Ce qui a motivé notre projet est la recherche des conditions d'intégration d'un logiciel de géométrie dynamique dans les classes à l'école. Nous faisons le pari qu'une utilisation par les professeurs d'un LGD pour apprendre des mathématiques pourrait agir comme condition facilitatrice : les futurs professeurs des écoles percevant *in proprio* les changements qu'apportent le recours à un tel type de logiciel pour les apprentissages, seraient plus enclins à utiliser cet outil pour enseigner les mathématiques. Mais le contrat moral qui lie un professeur d'IUFM et ses étudiants est qu'il les prépare au mieux au CRPE. Il est donc impératif de se poser cette question d'ordre éthique lorsqu'on expérimente un nouveau dispositif de formation comme celui que nous venons de décrire.

4.1 Le sentiment des étudiants PE1

En fin de formation, nous avons interrogé les étudiants sur la façon dont ils avaient perçu l'intérêt des séances en salle informatique avec le LGD dans la perspective de leur préparation au concours. Aucun des 25 étudiants de Bourg-en-Bresse n'exprime un jugement négatif sur ces séances d'enseignement, la seule réponse mitigée exprime d'abord une difficulté : « assez compliqué car je ne maîtrise pas trop la géométrie mais efficace ». En revanche ces séances sont qualifiées d'« intéressantes » (cité 10 fois), « utiles » (cité 3 fois) ou « bien » (cité 2 fois) voire même « enrichissantes » et par 3 fois elles ont constitué une « aide » pour « comprendre les caractéristiques d'une figure » ou pour découvrir le logiciel. Le premier centre d'intérêt avancé est relatif à la maîtrise du logiciel « ce qui aurait été plus compliqué seul » car « il faut un peu d'entraînement pour la manipulation » et « comprendre le fonctionnement du

logiciel » puisqu'« il est nécessaire de le pratiquer afin de mieux le maîtriser ». En effet, il semble que pour ces étudiants il est nécessaire « d'avoir une première approche d'une méthode qui pourra être développée dans les écoles avec l'essor de l'informatique en classe ». Cet intérêt didactique pour ce type de logiciel vient de ce qu'il permettrait « d'utiliser/d'étudier la géométrie plus facilement », notamment pour « comprendre et assimiler certaines propriétés » car « il permettait de mieux "voir" les figures » parce qu'on peut « faire des constructions plus facilement et de modifier les mesures sans reconstruire une autre figure ». Un étudiant reste cependant insatisfait considérant qu'« il aurait peut-être fallu plus d'explications plus simples sur l'utilisation du logiciel et l'intérêt de cette utilisation ».
Du point de vue de l'intérêt de telles séances dans la perspective d'une préparation au CRPE, 16 étudiants[13] répondent de façon affirmative considérant que « les manipulations rendent plus claires les tracés et certaines propriétés apparaissent plus clairement », ou que « les exercices d'entraînement sont plus faciles à réaliser ». Le poids de la culture scolaire pèse encore fortement chez certains étudiants, comme pour celui qui n'hésite pas à déclarer : « il m'a aidé à éclaircir certaines propriétés mais je préfère travailler sur papier ». Trois réponses font état de l'intérêt de ces séances pour les questions complémentaires qui sont des questions didactiques. Cependant 5 étudiants ont « un avis mitigé » considérant que « peut-être que ça a aidé à la compréhension et éventuellement ça donne des billes pour l'oral : TICE, aide à la compréhension ». En revanche 3 étudiants répondent négativement à cette question sans donner d'explication. Notons toutefois que nous retrouvons des différences d'appréciation suivant le niveau de compétences mathématiques. Les étudiants lyonnais de formation scientifique ont estimé quant à eux que les séances en salle informatique n'ont pas été utiles dans le cadre de la préparation au concours (13 réponses négatives sur 15). Les étudiants du site de Saint-Étienne sont satisfaits à 70 % de ces séances et 75 % considèrent qu'elles les ont aidés dans leur préparation.

4.2 L'épreuve de mathématiques au CRPE 2009

Nous avons consulté sur le site du ministère de l'éducation nationale[14], les sujets de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2009 afin de dégager si la formation que nous avons proposée était pertinente pour préparer le CRPE. Parmi les sujets des 6 groupements académiques, nous avons dénombré 3 sujets complémentaires qui portaient sur la géométrie. Dans le sujet du 1er groupement, les questions complémentaires de l'exercice 1 (sur 5 points) portent sur l'écriture de programme de construction et sur la reconnaissance des propriétés d'un carré. La question 1 c demande au candidat de « proposer un exercice qui permettrait à l'enseignante de s'assurer que l'élève B a acquis ou non la compétence "reconnaître un carré" ». Dans le sujet du groupement 2 les questions complémentaires à l'exercice 3 (sur 5 points) sont relatives à la description d'une figure après que celle-ci ait été reproduite. Enfin, dans le sujet du groupement 5, les questions complémentaires à l'exercice 1 (sur 4 points) concernent la reproduction d'une figure. Dans ces exercices, les types de tâches sont à réaliser par les élèves dans un environnement papier-crayon. Il nous semble, cependant, que nous avons illustré dans les paragraphes qui précèdent combien le « pas de côté » que réalisent les étudiants lorsqu'ils travaillent ces types de tâches dans un environnement LGD contribue à les « dénaturaliser » et facilite ainsi la nécessaire prise de distance constitutive d'une analyse didactique.
Si nous considérons à présent la partie proprement mathématique, dans chaque sujet des 5 premiers groupements académiques se trouve un exercice de géométrie (sur 4 ou 5 points). C'est ainsi que pour trois des six sujets du CRPE 2009, la part de géométrie a représenté entre 8 et 10 points sur les 20 attribués à l'épreuve de mathématiques.
L'exercice 1 du sujet du 1er groupement porte sur les lieux géométriques de points C tels que BC = 2AC, les points A et B étant donnés. Dans le sujet du groupement 2 il s'agit de déterminer le rayon et le centre d'un cercle au sein d'une configuration. Dans le sujet du groupement 3 le candidat doit déterminer le lieu de deux points sur un segment tels qu'ils forment le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle

[13] 24 étudiants ont répondu à cette question.
[14] à l'adresse : http://www.education.gouv.fr/cid24831/sujets-des-epreuves-ecrites.html

dont les 2 autres sommets sont fixés[15]. Dans le sujet du groupement 4 il s'agit de vérifier le parallélisme de deux droites (grâce à la réciproque du théorème de Thalès) et de faire des calculs d'aire. Dans le sujet du groupement 5 l'exercice 1 est très proche de celui que nous avons travaillé au cours d'une de nos séances et porte sur « les propriétés de Varignon ». Si dans le sujet du groupement 6, il n'y a pas d'exercice qui porte sur la géométrie, on constate que l'exercice 3 est relatif au calcul de l'aire d'un triangle dont un des sommets est mobile sur un segment donné.

Au-delà de l'exercice portant sur le problème classique des propriétés de Varignon, nous pouvons constater que trois des exercices évoqués ci-dessous portent sur des questions relatives à des lieux géométriques de points pour lesquelles on peut raisonnablement penser qu'un usage des LGD facilite l'abord. Les étudiants engagés dans la formation que nous avons proposée ont été mis en situation d'utiliser la fonctionnalité dynamique du LGD pour explorer des questions du type « pour quelle position du point M a-t-on … ? » contribuant ainsi à la construction d'images mentales qui donnent du sens à ce type de problème.

5 CONCLUSION

Nous avons souhaité présenter la formation que nous avons expérimentée durant l'année 2008-2009 comme un premier essai pour mieux intégrer l'usage des TICE dans la formation des professeurs des écoles.

Nous avons bien conscience que la formation expérimentée ne peut suffire, à elle seule, à dépasser le système de conditions et de contraintes qui prévalent pour modifier les pratiques futures de ces professeurs. Ainsi, par exemple tous les professeurs des écoles stagiaires ne préparent pas le concours de recrutement dans un IUFM[16]. Cependant, le simple examen du contenu des épreuves de mathématiques de mai 2009 semble attester de la pertinence d'une telle démarche pour la préparation au concours. Nous avons dès lors montré la faisabilité d'une formation ayant les modalités exposées, pour préparer nos étudiants au CRPE et initier une approche complémentaire à celle jusqu'alors existante.

[15] Dans cet exercice le lieu des deux points est déterminé par le calcul d'une distance à une des deux extrémités du segment sur lequel les points cherchés doivent rester. Pour ce faire, il est proposé d'utiliser un tableur afin de calculer une valeur approchée des racines d'un polynôme du second degré.

[16] Un des auteurs de ce texte avait en charge la formation de 3 groupes de professeurs stagiaires PE2 sur le site de Lyon cette année-là et un peu plus du tiers n'avaient pas préparé le concours du CRPE en IUFM (respectivement 7/25 ; 7/26 et 14/20) et seulement 40 % d'entre eux avaient déjà vu un logiciel de géométrie dynamique (respectivement 7/25 ; 17/26 et 4/20).

1 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Artigue, M. (1998). Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies. In Tinsley, D & Johnson, D. C. (Eds), *Information and communications technologies in school mathematics*. IFIP 98, Chapman and Hall. p. 121-129.

Assude, T. & Gélis, J.-M (2002). Dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabrigéomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 50, 259-287.

Assude, T. & Grugeon, B. (2003). Intégration de logiciels de géométrie dynamique dans les classes de l'école primaire. *Actes du XXIXe Colloque de la COPIRELEM*, IREM des Pays de la Loire. p. 227-253.

Assude, T (2005). Time Management in the Work Economy of a Class. A Case Study : Integration of Cabri in Primary School Mathematics Teaching. *Educational Studies in Mathematics*, vol.59.1, 183-203.

Clarou, P., Laborde, C., Capponi, B. (2001). *Géométrie avec Cabri. Scénarios pour le Lycée*. CRDP de l'académie de Grenoble.

Durpaire, J.-L. (rap.). (2006). *L'enseignement des mathématiques au cycle 3*. Rapport IGEN 2006-034. Paris : MENESR.

Imbert, J.-L. (2008). *Influences institutionnelles sur l'intégration des TICE en mathématiques*. Actes du XXXIVe colloque de la COPIRELEM. IUFM Champagne-Ardenne.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16.3, 289-322.

Sensevy, G. (1996). Le temps didactique et la durée de l'élève. Étude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16.1, 7-46.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en didactique des mathématiques*, 25.1, 91-138.

Wozniak, F. (2007). Conditions and constraints in the teaching of statistics : the scale of levels of determination. In Pitta-Pantazi, D. & Philippou, G. (Eds.), *Proceedings of the European Society for Research in Mathematics Education. CERME 5. Larnaca, 22-26 february 2007*. (pp. 1808-1818). University of Cyprius. Disponible sur l'Internet:
http://ermeweb.free.fr/CERME%205/CERME5%20Proceedings%20Book.pdf

2 ANNEXES

Annexe 1 : La 1re séance en salle informatique

Annexe 2 : La 2e séance en salle informatique

Annexe 3 : Un questionnaire en fin de formation

	Questionnaire	
1	Avez-vous installé un logiciel de géométrie dynamique sur votre ordinateur personnel ?	Oui □ Non □
2	Avez-vous utilisé un logiciel de géométrie dynamique pour vos exercices ?	Oui □ Non □
3	Comment avez-vous perçu les séances en salle informatique ? ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………	
4	Pensez-vous que les séances en informatique vous ont aidé à préparer le concours en géométrie ? ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………	

Annexe 4 : Question complémentaire du concours blanc du 24 février 2009 sur le site de Saint-Etienne

Question complémentaire 2 (4 points)

Les documents proposés en **annexes 3 (3.A et 3.B)** sont extraits des manuels suivants : **Mille maths CP** (Editions Nathan), fichier de l'élève (annexe 3.A). **Euromaths CM1** (Editions Hatier), livre de l'élève (annexe 3.B).

1. On s'intéresse dans un premier temps à l'extrait du fichier de l'élève « Mille maths CP » (annexe 3.A). Comment un élève peut-il s'y prendre pour réussir l'activité ? (On décrira deux manières différentes).

1-

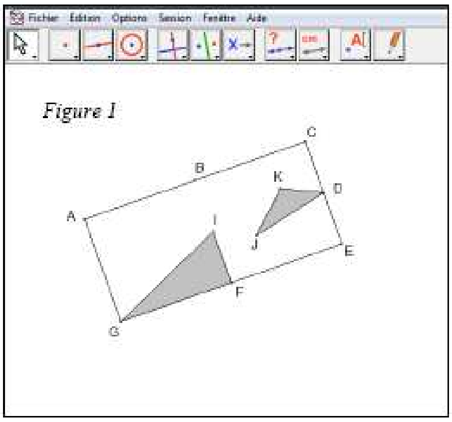
2. On s'intéresse à présent à l'extrait du livre de l'élève « Euromaths CM1 » (annexe 3.B).

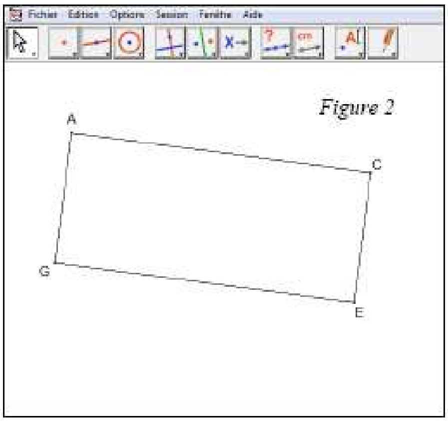
a. **a)** Quel est le rôle des questions 1 à 3 dans l'activité proposée ?
b. **b)** Pourquoi, dans cette activité, les concepteurs ont-ils choisi une figure à compléter qui soit d'une taille différente de celle du modèle initial ?
c. **c)** Quelles sont les difficultés qu'un élève peut rencontrer dans la question 4 ?

3. Un enseignant décide de remplacer cette activité « papier crayon » par une séance sur ordinateur avec un logiciel de géométrie dynamique. Les élèves ont déjà utilisé ce logiciel. Les consignes sont : « Ouvre le fichier *figure 1*, observe et manipule cette figure en déplaçant les points A, G ou E. Puis ouvre le fichier *figure 2* : il faut y reproduire la figure que tu as observée. Tu peux si besoin la manipuler de nouveau mais tu n'as pas le droit d'aller voir l'historique, ni les objets cachés. Si tu éprouves des difficultés, des aides sont possibles ».

Ci-dessous, les copies d'écran des fichiers *figure 1*et *figure 2* à leur ouverture.

5





6

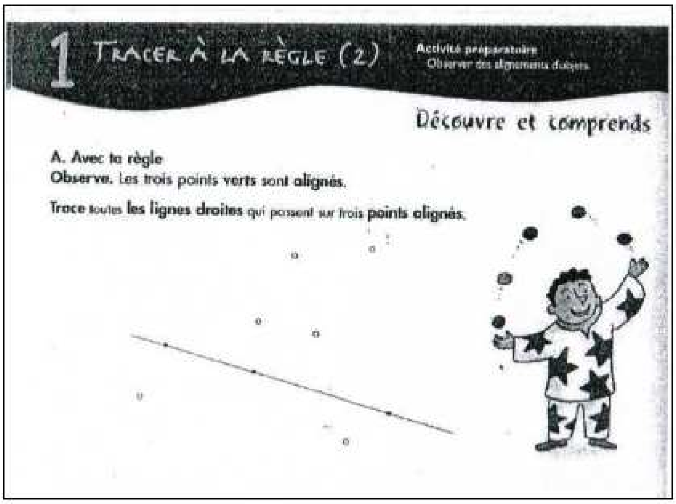
a) Pour cette activité (reproduire la figure 1), décrire trois avantages que peut apporter l'utilisation du support informatique par rapport à un travail sur feuille tel qu'il a été décrit à la question 2.

b) L'enseignant fait référence à un dispositif d'aide, donner un exemple de ce qu'il a pu prévoir.

Annexe 4 : Question complémentaire du concours blanc du 24 février 2009 sur le site de Saint-Etienne

Annexe 3

Annexe 3.A : Mille maths CP (Editions Nathan)



1 TRACER À LA RÈGLE (2)

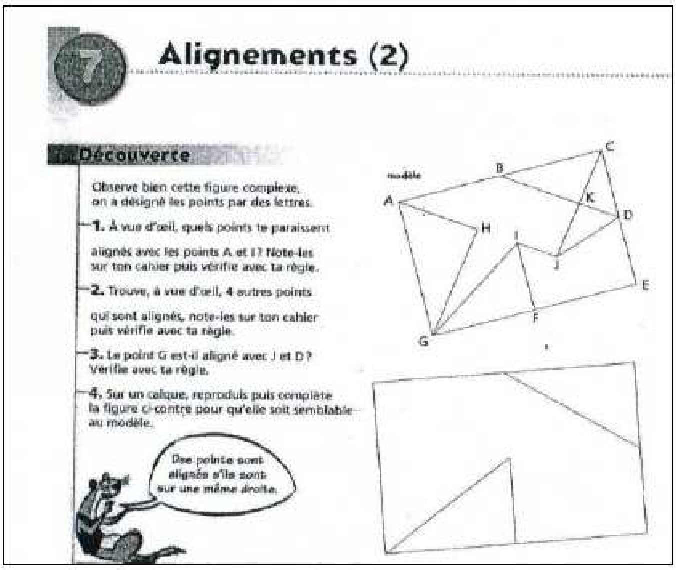
Activité préparatoire
Observer des alignements d'objets

Découvre et comprends

A. Avec ta règle
Observe. Les trois points verts sont **alignés**.

Trace toutes **les lignes droites** qui passent sur trois **points alignés**.

Annexe 3.B : Euromaths CM1 (Editions Hatier)



7 **Alignements (2)**

Découverte

Observe bien cette figure complexe, on a désigné les points par des lettres.

1. À vue d'œil, quels points te paraissent alignés avec les points A et I ? Note-les sur ton cahier puis vérifie avec ta règle.

2. Trouve, à vue d'œil, 4 autres points qui sont alignés, note-les sur ton cahier puis vérifie avec ta règle.

3. Le point G est-il aligné avec J et D ? Vérifie avec ta règle.

4. Sur un calque, reproduis puis complète la figure ci-contre pour qu'elle soit semblable au modèle.

Annexe 5 : Trois réponses à la question complémentaire d'un concours blanc du site de Saint-Étienne

Étudiant 1

a) avantages liés à l'utilisation de l'outil informatique :

- pas de difficultés liées à la manipulation des outils habituels de géométrie (règle, équerre)
- possibilité de faire varier la taille de la figure à loisir dans le but de mieux comprendre le fait que la taille du rectangle initial n'intervient pas (utilisation de points fixes et de points liés)
- gain de temps relatif à la construction papier (figure sale ou illisible à refaire) pour se consacrer à la compréhension de la notion mise en jeu dans l'activité

b) l'enseignant a pu proposer de faire apparaître sur la figure les caractéristiques spécifiques, le marquage (perpendicularité) entre (GE) et (FI), équidistance de J et C par rapport à K). Cela permettra de guider les élèves dans le choix du « bouton » à utiliser pour reproduire la figure.

Étudiant 2

a) l'utilisation du support informatique augmente la précision de la construction. C'est-à-dire que les traits seront parfaitement droits contrairement au travail sur feuille.

L'outil informatique permet à l'élève de se tromper et de recommencer plus souvent car la manipulation informatique est plus rapide que celle d'une règle, d'un crayon et d'une gomme

Le fait de pouvoir déplacer les points permet de mettre en évidence les propriétés des figures. C'est-à-dire que les propriétés comme le parallélisme, la perpendicularité résistent aux déplacements des points

b) L'aide que l'enseignant a pu prévoir est la mise en évidence des traits de construction d'un point. Ainsi l'élève comprendre ce que l'enseignant a fait et le reproduira par d'autres points.

Même si les élèves ont déjà utilisés un logiciel, l'enseignant a pu réaliser une fiche de rappel sur les constructions que l'on peut faire avec ce logiciel et comment les faire, quel menu, quel outil utiliser.

Étudiant 3

a) l'avantage premier du logiciel est qu'il met en évidence ce qui est résistant sur la figure et qui doit donc être reproduit. Deuxièmement il permet de tracer facilement des droites et en même temps de vérifier un alignement. Troisièmement il permet à l'élève de valider son travail seul, s'il parvient lui aussi à une figure résistante aux déformations

b) il a pu prévoir de laisser apparents certains traits de construction, des droites qui montrent donc l'alignement des points à utiliser pour construire la figure.

Communication D5

LE MANUEL SCOLAIRE : CARREFOUR DE TENSIONS MAIS AUSSI OUTIL PRIVILÉGIÉ DE VULGARISATION DES RECHERCHES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Joël Briand
DAESL
Université Bordeaux 2
`briandjoel@free.fr`

Marie-Lise Peltier
Équipe DIDIREM
IUFM de Rouen, Université de Rouen
`mlpeltier@yahoo.fr`

Le titre auquel vous avez échappé :
« Peut-on être raisonnablement chercheur en didactique et auteur de manuels scolaires ?»

Résumé
Le manuel scolaire est une interface entre plusieurs institutions : ministère comme donneur d'ordre de programmes, éditeurs comme vendeurs, enseignants décideurs d'achat, donc vus comme « clients » par l'éditeur et comme professionnels par les auteurs, IUFM et circonscriptions comme institutions d'analyse, et enfin parents souvent lecteurs.
En tant que tel, il est donc au carrefour d'injonctions et d'attentes souvent contradictoires.
S'appliquer, en tant que didacticien, à la conception d'un tel ouvrage relève donc d'un défi.
Dans un premier temps, nous exposerons rapidement les différentes contraintes auxquelles sont soumis les auteurs de manuels.
Puis, après avoir précisé nos propres objectifs pour la conception d'un manuel scolaire pour le premier degré et du livre du professeur qui lui est associé, nous présenterons les outils théoriques dans le champ de la didactique qui nous ont permis de les concrétiser.
Mais un livre ne fait pas tout : à partir d'une même page de manuel, nous présenterons trois scénarios possibles de mise en oeuvre dans lesquels l'activité mathématique des élèves, la prise en compte des savoirs, le travail de l'enseignant et son rôle sont néanmoins radicalement différents.
Nous conclurons en justifiant pourquoi la conception et l'écriture de manuels scolaires nous semblent être un maillon déterminant dans la transposition des savoirs mathématiques à enseigner et à ce titre sont une « niche » privilégiée pour les didacticiens dans le nécessaire travail de vulgarisation des résultats de recherches en didactique des mathématiques.

Nous ferons appel à des exemples issus de nos manuels parce qu'ils sont une œuvre collective qui nous engage. Ce texte figure aussi sur le portail des IREM.

1 INTRODUCTION

Il en est du manuel scolaire comme de tout ouvrage qui vise la transmission d'un contenu à l'aide d'une mise en scène. Dans tous les cas, on peut s'interroger sur les conditions de réception de ce contenu et sur l'usage effectif qu'en fait le lecteur, que ce soit le livre du professeur lu bien souvent sans tutorat, ou le manuel de l'élève dont la lecture est elle-même

le résultat d'une mise en scène organisée par le professeur. Comme dans toute communication, la réception du message délivré n'est pas toujours, loin s'en faut, celle présumée par les auteurs.
Pour autant, cet outil est actuellement incontournable dans l'enseignement obligatoire en France. Qu'on le veuille ou non, il est le vecteur de principes pédagogiques et didactiques[1]. Nous allons donc tenter de justifier le titre auquel vous avez échappé.

1.1 Quels sont les rôles habituellement assignés à un manuel scolaire de l'école élémentaire ?

Le manuel scolaire doit s'adresser à des enseignants polyvalents (d'où certaines différences avec les manuels destinés au second degré), faciliter leur travail, contribuer à leur formation, être un outil de référence pour l'élève, être un livre que l'élève souhaite ouvrir. Mais nous savons aussi que le manuel, étant conçu pour « tout le monde », n'est en fait réellement adapté à personne !

1.2 Le vilain manuel

Freinet (1928) disait à propos des manuels scolaires : *« ils servent bassement les programmes officiels »…« ils préparent la plupart du temps l'asservissement de l'enfant à l'adulte ». « Tout manuel, distribué en autant d'exemplaires que d'élèves, est un carcan et un outil totalitaire. »* On comprend cette position surtout en face des manuels scolaires de l'époque qui, le plus souvent, affichaient le savoir, mais nous retiendrons plutôt une critique d'un autre ordre : le manuel scolaire peut contribuer à l'idée que les savoirs sont *« choses sûres ».* La question décisive, à cet égard, est celle de la *problématicité* des savoirs. Reprenons ce que déclare Yves Chevallard : *« tout savoir n'est d'abord qu'une hypostase, une entité supposée, une idée de substance, dont nous faisons l'hypothèse en certains contextes institutionnels, en supposant que tel ou tel agit comme si ses gestes procédaient d'un certain corps de connaissances, que nous croyons deviner à travers son faire. Il faut ici, avec le didacticien, passer de l'autre côté du miroir : ce savoir réputé sûr parce qu'il est censé assurer nos gestes n'est en fait lui-même jamais assuré. »*
« Toujours le savoir fait problème. Au-delà d'un faire observable, un savoir supposé renvoie, plus globalement, à ce que je nomme une organisation praxéologique, ou praxéologie. À l'origine d'une praxéologie se trouvent une ou plusieurs questions qui, génétiquement, apparaissent comme les raisons d'être de l'organisation praxéologique, parce que celle-ci est censée leur apporter réponse. » (Chevallard, 1994). Comment concilier une organisation linéaire de fait d'un manuel scolaire et une approche qui concilie fréquentation avec des situations a-didactique et une organisation praxéologique acceptable ?

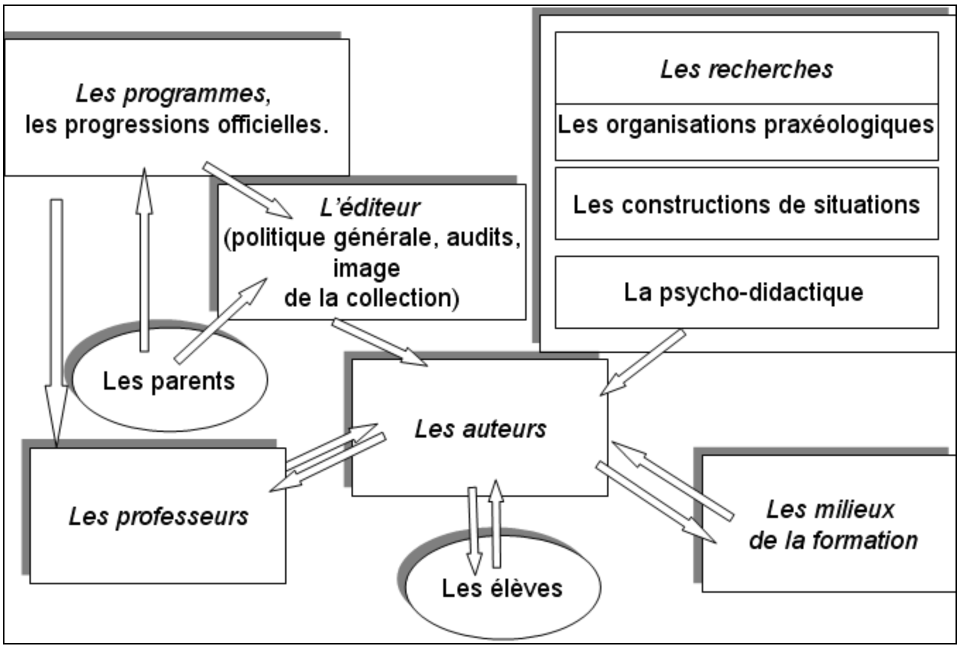
1.3 Quelques points de réflexion

Le « manuel » est un objet didactique qui réunit deux dimensions constitutives de toute approche didactique : *une dimension transpositive* d'une part, puisqu'il propose une réorganisation des savoirs en vue de leur enseignement, et *une dimension situationnelle* d'autre part, puisqu'il est censé réunir un ensemble de conditions spécifiques, qui, bien que non suffisantes, doivent permettre de donner un sens aux connaissances visées (B. Sarrazy, 1997).
Mais le manuel ne peut a priori contrôler les aménagements artisanaux du professeur :
- soit il est didactiquement fiable et efficace et devrait alors s'imposer à tous, mais avec le risque de paraître être un carcan limitant la liberté pédagogique ressentie du professeur ;

[1] Les manuels sont de plus en plus pris comme objet d'étude dans la recherche en didactique des disciplines. Citons comme exemple R. Goigoux (sous presse).

- soit il est conçu pour se mettre au service du « bricolage didactique » du professeur et dans ce cas, les auteurs renoncent à se donner comme objectif de contrôler *a minima* ces aménagements artisanaux.

Les auteurs se trouvent au centre d'un réseau d'attentes et de demandes parfois cohérentes, parfois contradictoires :



Réseau des tensions qui influent sur la réalisation d'un manuel scolaire

Les programmes sont faussement exigeants, les contenus sont de plus en plus soumis aux influences de la noosphère (la « règle de trois ») et leur rédaction est confuse (par exemple, les programmes de mathématiques du cycle trois sont rédigés tantôt « à la mode des capacités », tantôt « à la mode des contenus »). Suivre les progressions officielles peut conduire hélas à des absurdités, comme c'est le cas dans les propositions de progressions liées aux programmes 2008 de mathématiques du cycle 3 en France. L'addition des nombres décimaux se trouve programmée au CM1 tandis que l'addition des fractions décimales, nécessaire pour donner du sens à la technique d'addition des décimaux, se trouve programmée en CM2.

Pour les éditeurs, le manuel est un produit à vendre. L'auteur doit donc comprendre cette logique tout en ne renonçant pas à ses projets didactiques. Donnons un exemple : les auteurs peuvent être amenés à construire, dans le cadre des programmes qui sont rédigés par cycle, des progressions conformes à l'organisation didactique des savoirs, même si cela nécessite quelques « entorses » aux repères proposés dans le texte officiel par niveau de classe. Faire accepter ce point de vue par l'éditeur n'est pas toujours facile puisque, dans l'édition scolaire française, c'est l'éditeur qui se porte garant de la conformité aux programmes : il est donc très vigilant sur ce point.

La tendance actuelle des éditeurs est de vouloir qu'un manuel scolaire se rapproche d'un cahier de vacances : « un peu de tout chaque jour », parce que le choix du manuel se fera souvent en feuilletant quelques pages. Considérer comme « vieux jeu » de faire une semaine plutôt dédiée au démarrage de la construction de l'algorithme de la division est très tendance. Ce qui crée un obstacle de nature didactique à l'idée d'ouvrir des « chantiers ». La conséquence se mesure dans les classes : c'est le papillonnage.

Les éditeurs font appel à un panel (ou plutôt un groupe constitué plus ou moins par relations avec l'aide de quelques délégués pédagogiques) de 15 enseignants consommateurs qui vont, en une matinée, pouvoir critiquer un travail qui a été validé par des recherches connues… et qui vont être attirés par la facilité (au sens de « céder à la facilité ») à mettre en œuvre dans la

classe, par des trucs pédagogiques, ou par une curiosité, un inattendu, une numération génétiquement modifiée, l'existence de produits dérivés : fichiers, livrets bilans, CD-Rom. L'enseignant professionnel cède ainsi le pas à l'enseignant consommateur.
Les parents sont pris en compte à la fois par l'institution et l'édition. Les programmes doivent être lisibles par les parents (ce fait est un objectif ministériel depuis de nombreuses années ; souvenons nous du petit livre de Chevènement à destination des parents). L'édition doit rappeler les auteurs à l'ordre si le manuel propose des situations, des procédés de calcul, etc. que les parents auraient des difficultés à comprendre.
Les élèves doivent aimer feuilleter le manuel. La scénarisation de séquences doit être attractive. Les auteurs doivent proposer des exercices qui sont proches des centres d'intérêts des enfants. Mais nos sociétés changent : les enfants ne manient plus beaucoup la monnaie, mesurent rarement, effectuent des pesées avec des instruments qui affichent du nombre, sont plus dans des jeux virtuels que dans des activités de travail manuel.
Les professeurs en exercice, prescripteurs potentiels des manuels, doivent pouvoir s'appuyer sur le manuel sans avoir à faire trop de travail d'appropriation, d'adaptation, d'approfondissement car une journée n'a que 24 h et ils doivent enseigner au moins 9 matières.
Les milieux de formation (en centre IUFM, en circonscription) sont également des demandeurs d'outils et de matériels pour la formation initiale ou continue. À ce titre, les manuels et surtout les livres du professeur peuvent devenir des vecteurs de transmission des recherches en didactique.
Les recherches en didactique des mathématiques des vingt dernières années, fondées sur des travaux effectués dans des écoles, ont permis des observations fines et outillées de nombreuses situations. Des séquences de classes sur plusieurs thèmes ont été prises comme objet d'étude. Ces travaux ont permis à des équipes de produire des articles ou à des étudiants de conduire des recherches qualifiantes. Ils ont été diffusés lors de colloques ou de séminaires mais sont souvent restés assez confidentiels. Les auteurs qui ont participé à ces travaux souhaitent faire partager ces avancées didactiques.

2 NOTRE POSITION PARMI LES AUTEURS DE MANUELS SCOLAIRES

2.1 Plusieurs postures chez les auteurs de manuels

Sans être exhaustifs, nous pouvons repérer les postures suivantes. Les auteurs sont

- porte-parole de leur propre pratique,
- porte-parole d'une équipe d'enseignants ayant rédigé des « expériences locales»,
- porteurs d'une méthode originale,
- porte-parole d'une équipe de recherche-action,
- membres de la communauté des chercheurs en didactique ou du moins influencés par elle.

2.2 Nos objectifs de rédaction

Les objectifs principaux que nous nous sommes fixés pour la construction des progressions, le choix des situations et la rédaction du manuel de l'élève et du guide pour le professeur sont les suivants :
- mettre en évidence différentes facettes des mathématiques (outil pour la vie quotidienne, pour d'autres disciplines, objet d'étude qui peut être fascinant, ludique), ainsi que la variété des champs étudiés (géométrie, nombres, mesure) ;

- maintenir une problématisation des savoirs, éviter l'ostension[2] déguisée (est-ce possible ?), et si l'on ne peut l'éviter, du moins trouver des moyens pour qu'elle ne fasse pas obstacle au travail de recherche et d'appropriation personnelle des questions ;
- ponctuer la vie scolaire mathématique en organisant dans une planification annuelle les situations et activités de découverte, les consolidations, les phases d'institutionnalisation, les entraînements, les évaluations ;
- permettre à l'enseignant de pouvoir effectuer un pas de côté pour réfléchir sur sa pratique.

En cela, le livre du professeur peut aller au-delà du simple « cahier des réponses » et être un vecteur de réflexion didactique. (Là aussi, nous sommes tiraillés entre réaliser un ouvrage de didactique et sensibiliser à…)

En nous plaçant parmi les formateurs qui font partie de la communauté des chercheurs en didactique, nous sommes donc conduits à nous poser la question de la transposition des savoirs.

C. Orange (2008) affirme : « *Le chercheur en didactique doit renoncer au prescriptif* ». La question n'est pas d'être ou non d'accord avec cette affirmation. Pour nous, le chercheur ne peut pas ne pas être d'une façon ou d'une autre être prescriptif (ou alors il renonce à publier). Qui plus est, lorsque le didacticien rédige un manuel (ou bien lorsqu'il est formateur), il n'est plus un chercheur qui « s'intéresse aux conditions dans lesquelles des apprentissages peuvent se réaliser » : il devient prescripteur assumé même s'il prend des précautions.

G. Vergnaud (2008) écrit : « *Chercheurs, professeurs, deux communautés qui n'en font qu'une : dans les deux, on pointe : quels savoirs à enseigner? quelles difficultés ? quels moyens pour y remédier ?* » et il ajoute : « *la vulgarisation n'est pas un vilain défaut* ». Nous dirons que les deux communautés n'ont pas les mêmes contraintes de temps : le chercheur met parfois plusieurs années pour pouvoir répondre à des difficultés d'enseignement ; le professeur doit travailler à l'échelle de la séquence de classe.

3 LES ÉCUEILS

C'est donc un travail pratique de transposition que le chercheur en didactique conduit lorsqu'il rédige un manuel scolaire. Mais de nombreux écueils l'attendent.

Les situations a-didactiques lorsqu'elles sont évoquées dans le manuel de l'élève ont dû être construites par le professeur, invité qu'il est en cela par le livre du professeur. Le manuel scolaire, en scénarisant des situations, ne fait que les évoquer. Or rien ne garantit les auteurs d'une utilisation *a minima* de leur manuel. Dans ce cas, même si les auteurs s'en défendent, l'élève fait des mathématiques comme le téléspectateur fait du football et les réponses des élèves sont évaluées et non pas validées ou invalidées (au sens de la théorie des situations).

D'un point de vue déontologique : peut-on affirmer que l'on « s'appuie sur les résultats récents de la recherche » ? G. Brousseau mettait, il y a déjà longtemps, en garde les formateurs sur ce qu'il nommait la « perméabilité didactique » : cette vocation du formateur à montrer des séquences « laboratoire » (sans doute pour justifier sa raison d'être) sans se préoccuper des inévitables questions de transposition non évoquées qui allaient être immanquablement à la charge du futur enseignant formé. Nous avons nous-mêmes réfléchi à cette question dans un article intitulé « l'amère leçon du lendemain » (Briand et Peltier,

---

[2] L'ostension comme pratique pédagogique tente de baser le développement des connaissances sur l'observation et suppose les élèves capables d'en étendre l'emploi à d'autres situations. La présentation ostensive dite « ostension assumée » consiste en « *la donnée par l'enseignant de tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée* » (Ratsimba-Rajohn, 1977). Dans sa forme appelée « ostension déguisée » (Berthelot et Salin, 1992), l'enseignant cherche à s'appuyer sur l'observation « active » d'une réalité sensible ou d'une de ses représentations pour amener les élèves à y découvrir le savoir visé.

2000).

4 QUELS OUTILS THÉORIQUES DANS LE CHAMP DE LA DIDACTIQUE POUR LA CONCEPTION D'UN MANUEL ?

La tâche de conception et d'organisation nous donne ainsi la possibilité de tenter une vulgarisation des résultats de recherche en didactique sur l'apprentissage et l'enseignement des notions au programme : en ce sens, il s'agit pour nous d'un véritable travail didactique de transposition.
Cette transposition concerne à la fois les organisations mathématiques et didactiques et là nous utilisons des outils issus de la théorie anthropologique du didactique[3].
L'élaboration de situations d'apprentissage prend largement en compte les concepts de situations didactiques et de milieu développés dans le cadre de la théorie des situations.
Les travaux développés par Gérard Vergnaud sur la notion de champ conceptuel nous ont permis de construire des organisations didactiques nouvelles sur les structures additives et multiplicatives en découpant le savoir différemment.

4.1 Organisations mathématiques et didactiques régionales spiralaires

Un manuel de l'école élémentaire ne peut plus se réduire à une présentation thématique des savoirs par chapitre. Il se doit de proposer une présentation dynamique des apprentissages. Pour les auteurs, il s'agit alors d'organiser de façon linéaire, articulée et imbriquée la construction et la consolidation des différents savoirs tout au long de l'année.
Ceci présente plusieurs avantages :
- la possibilité de mettre en œuvre un enseignement spiralaire des notions (le manuel peut revenir sur certaines notions et les approfondir au cours de la même année scolaire mais aussi sur plusieurs années) ;
- la mise en réseau des connaissances (il est possible de faire des ponts entre des « leçons » issues de champs différents mais relevant d'un même concept, par exemple la proportionnalité dans le domaine numérique et dans le domaine géométrique, ou entre des « leçons » portant sur des notions différentes mais pouvant être liées, par exemple aire et fraction) ;
- la prise en charge de tous les moments de l'étude de chaque notion (rencontre, soutien, entraînement, évaluation).
En nous plaçant au niveau 4 des niveaux de détermination d'une organisation didactique d'Yves Chevallard, il s'agit de décider comment linéariser à la fois l'étude de chacune des notions mais aussi des notions entre elles. Cet aspect nous conduit à faire une étude en termes « d'écologie » des savoirs : comment proposer un « parcours » dans les mathématiques à étudier au cours de l'année, que faut-il pour pouvoir faire vivre une notion suffisamment longtemps, pour pouvoir la reprendre après avoir étudié autre chose afin de la voir sous un nouvel aspect et de l'approfondir ?

4.2 Organisations « départementales » et locales

D'un point de vue plus local, oserions-nous dire « départemental » il s'agit d'organiser mathématiquement et didactiquement l'étude. Prenons l'exemple des figures planes en CM2 : dans quel ordre étudier les différentes figures ? Pour notre part nous avons fait le choix de construire la progression à partir du concept de distance. Le cercle est donc

[3] On désigne par « Théorie anthropologique du didactique » les travaux développés par Y. Chevallard.

introduit en premier comme ensemble de points situés à une distance fixée d'un point donné (le centre). Vient alors l'étude des triangles, comme figures entièrement caractérisées par la donnée de trois nombres (longueurs des côtés) sous certaines conditions.
Les quadrilatères sont étudiés ensuite comme figures déformables et donc non caractérisées par la longueur de leurs côtés : d'où la nécessité de penser un autre élément pour les caractériser : diagonale, angle, etc. Enfin les polygones peuvent être reproduits par triangulation…
Sur le plan local au sens strict, il s'agit de choisir une ou plusieurs situations (en fait, d'organiser les déclinaisons d'une situation fondamentale) permettant un apprentissage d'un aspect ou d'un élément d'une notion.
C'est ici que se pose naturellement la question des conditions de reproductibilité des situations didactiques expérimentées par des chercheurs, et particulièrement la question de l'ostension déguisée car le manuel « stricto sensu » ne peut maintenir « l'incertitude » nécessaire à une réelle situation d'action.
À ce niveau local se pose également la question de la manière de faire émerger les éléments à officialiser : la mise en mots des savoirs dans un vocabulaire à la fois précis, rigoureux et accessible à de jeunes enfants, proposée dans le livre du professeur, nous conduit à prendre en compte les travaux sur le développement langagier des élèves. Il s'agit ensuite de construire un cheminement pour que ces différentes « officialisations » (« conclure avec les élèves ») concourent à la constitution progressive d'un aide-mémoire (« institutionnalisation stricto sensu »).

4.3 Comment choisir les situations ?

Les mathématiques de la vie de tous les jours ne sont pas facilement repérables pour un élève de l'école primaire (nous avons déjà évoqué le faible écho des activités de mesurage, de l'usage de la monnaie, du bricolage, etc.). Ceci nous a conduit à limiter le nombre de situations « parlantes » par évocation souvent désignées par l'expression: « proches du vécu des élèves ». Peut-on parler d'un vécu commun à l'ensemble des élèves d'une classe ? Le professeur peut-il avoir accès à ce « vécu » notamment dans des écoles des quartiers dits sensibles où les vécus des élèves peuvent être très éloignés de l'image qu'un enseignant débutant peut en avoir.
La proximité avec des situations réelles renforce de plus le risque de résolution pragmatique de la question, résolution pouvant éviter complètement l'utilisation du concept dont l'apprentissage est visé.
Nous avons proposé des situations ayant le plus possible les caractéristiques de situations fondamentales et que nous appelons des situations « hors sol ». Nous désignons par cette expression des situations construites par le professeur spécifiquement pour travailler une notion, et qui vont enrichir l'histoire commune des élèves. Ces situations peuvent être concrètes ou non, elles peuvent donner lieu à des manipulations effectives de matériels, elles peuvent consister en des jeux, des défis, des histoires fictives, des prévisions, mais elles n'ont pas d'ancrage particulier dans le réel quotidien. Ces situations donnent lieu généralement à des activités dites « préparatoires » qui sont signalées dans le manuel de l'élève, qui sont décrites dans le livre pour le professeur et qui sont reprises sous forme d'un énoncé de problème le plus souvent accompagné d'une illustration qui les évoque.

5 POUR QUE LE PROFESSEUR ADHÈRE À CE CHOIX, LE MANUEL DE L'ÉLÈVE NE SUFFIT PAS

C'est dans le livre du professeur que nous donnons des éléments pour que celui-ci s'approprie le concept de situation fondamentale et qu'il puisse organiser l'ingénierie qui y est associée et faire évoluer le milieu. Dans ce guide, nous accompagnons le professeur dans ce qui peut être une démarche inhabituelle, notamment pour l'aider à maintenir l'a-didacticité d'une situation, ainsi que pour « tirer » les élèves vers des expérimentations qui « s'aventurent » dans le domaine des signes. Il s'agit de maintenir la curiosité et l'intérêt et de faire partager la genèse de vrais théorèmes qui risqueraient d'être perçus comme de simples remarques.

5.1 Le livre du professeur pour redonner tout son rôle au professeur

Nous prendrons un exemple pris au début du cycle deux : une enseignante fait lancer un dé par chaque élève. À chaque lancé, elle écrit le résultat au tableau et met, en même temps dans une tirelire, un nombre correspondant de jetons. Au bout de 9 jeux (par exemple), est écrit : 5+4+2+4+1+6+4+4+5. Elle pose alors la question suivante : « Quand j'ouvrirai la tirelire, à chaque fois qu'il y aura 10 jetons, on les échangera contre un bonbon *(on peut contester le choix de ces bonbons)*. D'après vous, combien de bonbons va-t-on pouvoir avoir ? ». Dès cet instant, plusieurs élèves, en montrant le texte au tableau, affirment « il n'y en aura pas dix, tu vois bien [en montrant ce qui est écrit], il n'y a que 6, maximum ». Dans cette première phase, le professeur a constitué un premier milieu de référence (le dé, la tirelire, une règle du jeu, des joueurs, une production écrite) à partir duquel il installe un milieu d'apprentissage en ajoutant la question relative aux bonbons. Il s'agit de tenter d'anticiper des faits expérimentaux (il y aura (ou non) possibilité d'avoir des bonbons), de les vérifier d'abord de façon empirique (« on n'a qu'à ouvrir la boîte »), passage obligé pour que s'installe un milieu propice à une autre activité : celle d'une construction théorique faite de langage essentiellement écrit qui permettra l'élaboration d'un processus de vérification d'une autre nature, devenant autonome, allant jusqu'à négliger l'ouverture de la tirelire.
Qui d'autre que le professeur peut organiser cette mise en scène qui va créer le désir « d'en savoir plus » sans ouvrir la boîte ? Qui fera comprendre aux élèves qu'au-delà de la règle du jeu, cet interdit de l'ouverture de la boîte est une invitation à d'autres découvertes ?

5.2 Le livre du professeur comme outil de réexamen de situations

Nous avons souhaité montrer l'influence que peuvent avoir des choix didactiques différents sur la façon dont les élèves s'approprient les mathématiques et sur le sens que celles-ci prennent pour eux. Pour cela, nous proposons dans le livre du professeur une réflexion sur quatre scenarii en CM1 « presque pareils » mais pourtant différents que nous décrivons ici brièvement.
Les écritures à virgule ont été introduites à partir des fractions décimales.
Le professeur écrit un énoncé au tableau : « *Pour construire une grande frise chronologique, des enfants mettent bout à bout deux bandes de carton. La première mesure 1,45 m et la seconde mesure 2,7 m. Quelle est la longueur de la bande ainsi obtenue ?* ».
Scénario 1 : Élaboration collective de la solution à partir des écritures fractionnaires.
Scénario 2 : Consigne : « Prévoyez par le calcul la longueur de la bande obtenue lorsque l'on mettra les deux bandes bout à bout ». Travail par groupes. Écriture des démarches sur une

grande feuille. Affichage des prévisions. Synthèse collective par le professeur (cf. scénario1)
Scénario 3 : Par groupe : deux bandes : 1,45 m et 2,7 m.
Les élèves manipulent et mesurent pour trouver la longueur totale. Recensement des mesures trouvées et synthèse collective (cf. scénario1)
Scénario 4 : Dans la classe, deux bandes : 1,45 m et 2,7 m.
Consigne : « *Vous devez prévoir par le calcul la longueur de la bande obtenue lorsque l'on mettra ces deux bandes bout à bout. Une fois les prévisions effectuées, nous vérifierons en mesurant puis nous étudierons comment vous avez procédé pour faire votre prévision* ». Recensement des prévisions. Organisation en collectif du mesurage effectif en mettant les bandes bout à bout. Rejet des solutions manifestement fausses. Recherche des raisons qui conduisent au résultat juste.
Une étude détaillée et comparative de ces quatre scénarii nous fait espérer que les professeurs seront plus sensibles à l'influence des conditions initiales (au « milieu ») qu'ils créent dans leur classe sur la nature de l'activité de leurs élèves.

5.3 Le livre du professeur comme outil d'aide à l'analyse préalable

Du fait que les professeurs d'école sont des enseignants polyvalents, les situations ou activités proposées sont justifiées par une *analyse a priori* rapide permettant à l'enseignant de jouer sur certaines variables, d'envisager certaines réponses d'élèves, de prévoir certaines erreurs.
Nous proposons dans le livre pour le professeur des aides pouvant être données à certains élèves en fonction des difficultés prévisibles, permettant à ceux-ci de s'approprier la situation sans pour autant supprimer leur activité et sans « tuer » la recherche (aides de « bas niveaux », en utilisant la classification de Coulange, 2008). Nous proposons également des aides pour le professeur, notamment des aides à la formulation et à la synthèse de l'activité.

5.4 Complémentarité du livre du professeur et du manuel

Comment passer des écrits de travail produits par les élèves aux nécessaires phases de synthèse, puis d'institutionnalisation ? Cette question est difficile. Il nous semble important que le livre pour le professeur accompagne celui-ci dans cette démarche de décontextualisation. Le rôle des phases de consolidation et d'entraînement dans le processus de décontextualisation-recontextualisation, nécessaire à une bonne maîtrise des savoirs, nous semble devoir être mis en avant dans ce guide pédagogique. Il nous semble également nécessaire de sensibiliser les enseignants à l'existence de connaissances que l'école n'enseigne pas et qui sont pourtant nécessaires dans certaines situations (donnons ici l'exemple de l'énumération (Briand, 1994), non enseignée, dans l'activité de dénombrement d'une collection).
Enfin, le manuel propose d'autres formes de dévolution que celles des situations fondamentales (défis, jeux construits et matériels fonctionnant en auto-suffisance, mises en scène, problèmes) car toutes les leçons ne se prêtent pas aux mêmes formes de travail.

6 L'OSTENSION (ASSUMÉE, OBLIGÉE)

Dans un certain nombre de cas nous utilisons une forme d'ostension assumée avec précautions : « ni court circuit, ni institutionnalisation ». Prenons l'exemple de l'enseignement des techniques de calcul de la soustraction : nous avons fait le choix de présenter (par le biais d'élèves fictifs) plusieurs techniques s'appuyant sur des propriétés de la soustraction et de la numération de position. Il s'agit bien sûr d'une forme d'ostension, mais il reste un enjeu pour l'élève : relever un défi conduisant à un travail possible pour

comprendre comment et pourquoi « cela marche ». La difficulté que peuvent rencontrer certains élèves à entrer dans la méthode d'un autre est à prendre en compte, mais c'est aussi le « prix à payer » pour entrer dans la méthode usuelle.
Nous suggérons ensuite, en fonction des nombres concernés, un entraînement faible sur chacune des techniques proposées et une appropriation plus systématique des techniques usuelles. Mais des écueils sont possibles : le maître peut montrer toutes les techniques et les expliquer ou bien il peut exiger l'appropriation de toutes par les élèves…
Il est des cas où nous sommes contraints de pratiquer l'« ostension obligée ». Cette démarche se rencontre à chaque fois qu'il faut, par exemple, transmettre une convention d'écriture, une présentation socialement admise d'un algorithme. Nous appelons « ostension obligée » la présentation ostensive d'un savoir qui relève plus d'une convention sociale que d'une construction mathématique même si elle en est toujours issue. L'ostension obligée résulte d'une trop grande difficulté (coût en temps excessif par rapport à l'enjeu de savoir) à construire un milieu qui permettrait de recréer les conditions historiques de la construction du savoir visé. C'est par une « ostension obligée » que nous introduisons l'écriture à virgule pour les nombres décimaux. Pour cette convention d'écriture, nous encourageons toutefois l'enseignant à faire un rapide détour par l'histoire en s'appuyant sur le texte de Stevin de Bruges afin que cette nouvelle écriture prenne du sens. Une justification de cette convention (raisons typographiques, transposition des savoirs opératoires des entiers aux décimaux) peut alors s'effectuer dans un cadre historico-mathématique.

7 L' INSTITUTIONNALISATION

Dans le livre du professeur, l'institutionnalisation est envisagée en termes de processus sur plusieurs leçons.
Dans le manuel de l'élève, un « médiateur », représenté par un furet, donne parfois des explications, rappelle des savoirs antérieurs, définit certains termes, indique ce qu'il faut retenir.
Les savoirs « officiels » ne sont pas présentés sous forme d'un « cours » dans chaque chapitre, ils font l'objet d'un aide-mémoire, soit en fin de manuel, soit par périodes, qui correspond aux différents éléments qui ont été institutionnalisés progressivement au cours des leçons.

8 LES LIMITES

Les auteurs peuvent difficilement anticiper tout ce qui relève du groupe classe, même s'ils peuvent préparer des activités de soutien et de consolidation. En proposant des activités de consolidation préalables à l'introduction d'une notion importante, le manuel s'inscrit dans son rôle d'organisateur du cursus.
Nous avons déjà mis en évidence le risque de situations a-didactiques évoquées si elles ne sont pas les reprises de situations d'action (paradoxe de la dévolution-effet Topaze)[4].

---

[4] Par exemple, une attitude naturelle d'élève en classe de mathématiques est de chercher à comprendre le plus possible le contrat qui régit les rapports entre le professeur, l'activité et lui-même. Cette attitude permet l'activité enseignante, mais ne garantit en aucun cas une réelle activité mathématique :
- parce que l'élève cherche à découvrir l'intention de l'enseignant et non à comprendre le problème qu'on lui propose ;
- parce qu'il fonde ses stratégies sur une demande habituelle de l'enseignant.
De son côté, le professeur peut être tenté de vouloir faire réussir les élèves "à tout prix". Pour parvenir à la production d'une réponse conforme, le professeur finit par réunir des conditions qui permettent la

Le manuel scolaire ne peut pas prendre en compte complètement l'évaluation. Celle-ci ne peut être raisonnablement bien pensée que pour des élèves réels après un enseignement effectif. Le rôle d'un manuel ne peut être finalement que de donner des pistes pour que les professeurs puissent mettre en lien finement des compétences à tester chez les élèves et des exercices. Les propositions d'évaluation que nous faisons se fondent donc sur des hypothèses de travail dont nous ne sommes pas certains et sur une activité potentielle que nous n'avons pas maîtrisée. Elles ne peuvent pas tenir compte de la spécificité d'un élève, d'une classe, d'un professeur. Ce sont des évaluations de produits finis écrits, ce qui limite leur potentiel d'analyse. Elles sont présentes dans le livre de l'élève (ce que je dois savoir faire seul) et dans le livre du professeur (banques d'exercices, fiches autocorrectives). Enfin, certaines évaluations ne peuvent se réaliser qu'au travers d'observations de situations d'actions, ce que le manuel du professeur ne peut que suggérer.

9 CONCLUSION

Pour reprendre l'expression de J-M. Zakhartchouk (1998), nous avons décidé à une époque de nous « salir les mains » en acceptant de devenir auteurs de manuels. Nous l'avons fait parce que notre expérience de formateurs nous avait montré que ce type d'ouvrage constituait un des médias essentiels dans la formation des maîtres, que ce soit pour le passage de témoin lorsqu'un enseignant laisse sa classe à un stagiaire pour un stage en responsabilité ou pour conduire l'activité en classe elle-même. Vouloir faire partager ce que nous vivons dans des activités de recherche, en prenant l'indispensable précaution de ne pas commettre l'erreur de nous appuyer sans discernement « sur les résultats récents de la recherche » comme il est fréquent de le lire ci et là, a été notre principale préoccupation. Ce faisant, il nous fallait ne pas confondre notre travail de chercheurs et celui d'auteurs de manuels. Cet article, non encore tout à fait abouti, voulait montrer l'ensemble des questions auxquelles nous avons été confrontés et un aperçu des décisions que nous avons été conduits à prendre en tant qu'auteurs.

réponse attendue sans que l'élève n'ait eu à investir le moindre sens. On parlera alors « d'effet Topaze » (voir Brousseau, 1998, p. 52-53).

10 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Collection Euromaths (2007-2009) CP CE1 CE2 CM1 CM2. Hatier.

Berthelot Y. & Salin M.-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l'enseignement obligatoire*. Thèse de l'Université Bordeaux 1, Talence.

Briand J. et Peltier ML. (2000) L'amère leçon du lendemain. In *Les cahiers du formateur tome 4*, pp. 103-113, COPIRELEM.

Brousseau G. (1997) consulter :
http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage Éditions.

Chevallard Y. (1971-2010) consulter : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/

Chevallard Y. (1994) *Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission : un point de vue didactique,* cours pour PLC1 sur le site de Y. Chevallard.

Coulange L. (2008) Étude des pratiques de professeurs débutants dans des collèges ZEP. Didirem Paris 7.

Freinet (1928) Plus de manuels scolaires, St. Paul, Éditions de l'Imprimerie à l'École.

Goigoux R. (sous presse) Étude didactique de genèses instrumentales dans l'enseignement de la lecture. *Actes du colloque de didactique comparée Genève, Janvier 2009.*

Orange C. (2008) Table ronde dans le colloque Bordeaux 2 IUFM d'Aquitaine « *Les didactiques et leurs rapports à l'enseignement et à la formation : Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats ?* ».

Ratsimba-Rajohn H. (1977) Étude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques ». DEA Université Bordeaux 1.

Sarrazy B. (1997) Formation des professeurs et usage idéologique de la recherche. *Cahiers pédagogiques*, n° 350-351.

Vergnaud G. (2008) Table ronde dans le colloque Bordeaux 2 IUFM d'Aquitaine « Les didactiques et leurs rapports à l'enseignement et à la formation : Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats ? »

Zakhartchouk J-M. (1998) Ni ange ni démon. *Cahiers pédagogiques,* n° 369.

Communication D6

SITE MATHÉMATIQUE LOCAL D'UN EXERCICE

Christian SILVY
I.U.F.M. de Guadeloupe
christian.silvy@iufm.univ-ag.fr

Résumé
Cette communication propose d'analyser des énoncés de problèmes scolaires avec la notion de « site mathématique local » d'un exercice pour caractériser le paysage mathématique de la question. L'auteur indique que l'organisation de la connaissance nécessaire à la reconstruction du paysage permet de structurer l'enseignement de la question.

1 INTRODUCTION

Cet exposé se situe dans le cadre d'un travail de thèse (directeurs: A. Mercier & A. Delcroix) sur les restitutions organisées de connaissances (ROC), question novatrice introduite dans les sujets du baccalauréat 2005. La ROC se définit de façon duale comme un exercice sur l'élaboration d'une démonstration et comme une évaluation de la restitution des (traces des) connaissances acquises, souvent organisée par un pré-requis. Les ROC permettent alors une pratique cartésienne minimale pour le résolveur (Castela, 2008), par cette réorganisation des connaissances, selon un processus décrit par (Mercier, 2001).
Pour étudier ces ROC, nous avons développé la notion de site mathématique local (Silvy & Delcroix, 2009(1)) d'une question d'un exercice, d'une notion, d'un théorème à partir de la notion de "site mathématique" (Duchet & Erdogan, 2006). Nous montrons, à partir d'exemples de construction effective de sites mathématiques locaux, quelques applications de ce concept, notamment à la levée d'implicites dans les composantes de l'énoncé d'un exercice (Silvy & Delcroix. 2009(2)), la structuration des connaissances mathématiques du futur professeur des écoles.
Le premier exemple porte sur l'étude d'une question de l'évaluation de 6^{e} de 2004 reprise dans le sujet deux du CRPE de 2006. La construction du site mathématique local permet de montrer que le « substrat » (Silvy & Delcroix, 2009(1)), terreau de l'exercice, prend une part importante, chargée d'implicite, dans l'élaboration de la solution.
Le deuxième exemple avec un site mathématique local plus complexe est une des questions du brevet 2008 des Antilles et de la Guyane. A partir de ce site mathématique local, qui caractérise le paysage mathématique de la question, une discussion permet de cerner certaines « choses particulières » du substrat. Pour appréhender les effets de la rédaction des énoncés de collège nous avons effectué un travail d'enquête auprès de futurs professeurs des écoles ou de professeurs.
Cette discussion nous mènera aux choix de l'institution de passer sous silence des « vieilleries », objets d'étude avant 1970 qui permettent de redéfinir certains territoires du paysage mathématique de la question. En conséquence, nous discuterons la question suivante : « la nature du travail demandé dans ce brevet est-elle une argumentation ou une démonstration ? ».

2 EXEMPLE UN

2.1 Remarques introductives

Pour construire le site mathématique de cet exercice, il faut procéder par investigation. Le texte doit être analysé.

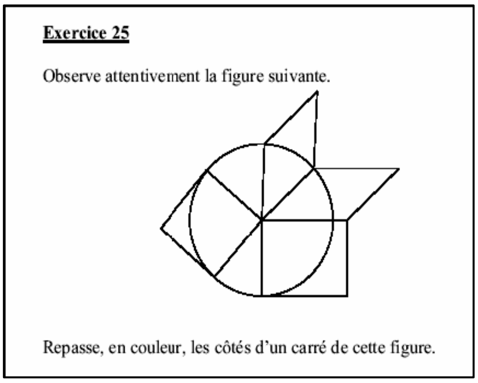


Figure 1. Evaluation 6° 2004 (Sur le document original la courbe est un

D'une part, la prise d'information est effectuée au niveau de granularité inférieure, en l'occurrence le mot ou le groupe de mots. La recherche des nœuds du texte commence par la lecture de la consigne.
L'article « *''un'' n'est synonyme d'unique qu'autant qu'il est considéré comme qualificatif, et non comme déterminant numéral ou indéfini* »[1], tandis que l'article « du » est défini contracté. Ainsi la phrase du texte de l'énoncé «Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure » peut induire la non-unicité "du" carré demandé. Tandis que la phrase suivante «Repasse, en couleur, les côtés du seul carré de cette figure » énonce l'unicité de la solution. En conséquence, la représentation acquise après lecture du texte en langue vernaculaire ne semble pas être en adéquation avec celle issue de la figure de l'énoncé. Trois productions d'élèves sur quatre données dans le sujet du CRPE (annexe 1) semblent montrer une difficulté dans ce sens (un unique, un parmi plusieurs, plusieurs)[2]. En effet les élèves indiquent deux quadrilatères différents au lieu d'un demandé.
D'autre part, la figure construite semble être, pour beaucoup, une figure de l'espace. L'enfant rencontre dans les jeux vidéo des dessins similaires, l'adulte voit naturellement cette figure dans l'espace comme les participants à l'exposé le mentionnent. En outre, deux quadrilatères seulement présentent des angles droits. Mais un des deux n'est pas dans sa position prototypique scolaire ainsi une rotation de ce seul carré (ou de la tête car l'élève travaille dans un cahier d'évaluation) est nécessaire pour voir la solution. Cette rotation est-elle naturelle ?
En maternelle les élèves manipulent des objets réels. L'objet carré se positionne naturellement dans plusieurs positions sauf si le professeur ne fait pas attention à ses représentations[3]. Dans la réalité des objets réels, par exemple des voitures, prennent des positions différentes, mais alors leur forme est reconstruite : un carré n'apparaît jamais "carré".
Au CP, les élèves sont confrontés au dessin d'objet géométrique, ce passage des objets du monde sensible au premier pas vers le monde géométrique fige la position des objets. La « figure » dessinée par le maître au tableau renforce cette position qui devient alors prototypique scolaire. De plus, la construction d'un carré dans la position demandée demande davantage d'efforts à un élève, ainsi ce renforcement naturel agit sur la représentation du carré/figure au détriment du carré/objet réel.
Enfin, pour pouvoir « repasser, en couleurs, les côtés d'un carré », il est nécessaire que le carré soit déjà tracé.
La consigne indique ainsi à l'élève en position de résolveur le chemin vers la solution. Ce chemin est tracé à partir de l'observation de la figure, une observation fine peut-être aidée par les instruments.

1 Dictionnaire des synonymes Larousse 1970 Montrouge
2 Dans le même cahier, l'élève doit faire preuve d'habileté pour gérer les diverses nuances de l'article « un » (voir annexe 1).
3 Pour lire un exemple : « L'apprentissage des formes géométrique en maternelle : réflexions sur une expérience », Mélaine Sénéchal in Bulletin Vert 482, Mai juin 2009, APMEP.

2.2 Construction du site

Pour nous, le site mathématique local se constitue avec différentes strates dont les deux premières sont issues d'une lecture experte du sujet :

- « Le « **substrat** », *terreau de la question, les « **choses** » sont des implicites, naturalisés, préconstruits, des notions protomathématiques ou paramathématiques pour le niveau étudié ; elles peuvent relever du vocabulaire (non forcément explicité au niveau étudié), de la logique, de la théorie des ensembles ou bien des codages usuels en mathématiques (*Silvy & Delcroix 2009(1)) ; par exemple, dans l'exercice étudié, la consigne et les articles langagiers en font partie ainsi que les notions de « figures » et de « côtés » préconstruites à ce niveau; elles peuvent relever, également, de « process », de méthodes (au sens usuel) ou de stratégies de démonstration. Ainsi le résolveur, pour répondre dans le temps imparti, élimine naturellement les objets triviaux non solutions pour ne garder que ceux supposés répondre à la question. Ce process au sens de savoir-faire est une des méthodes implicites mises en œuvre dans le contexte de l'école.
- Les **objets mathématiques** sont des non-ostensifs ; ainsi, rectangle, losange, parallélogramme, cercle, rayon, carré, instruments forment la deuxième strate.
- « *Les **techniques** viennent ensuite qui sont les manières de faire, permettant d'utiliser les objets comme des outils* » (Silvy & Delcroix 2009(1)), au niveau étudié elles sont des propriétés mathématiques. Dans ce cas particulier, elles sont constituées des composantes de la définition du carré avec les instruments adaptées. L'élève peut aussi utiliser, pour vérifier que deux côtés sont de même longueur, la propriété qui mentionne que tous les rayons du cercle sont de même longueur.
- Les **concepts deux** (ou trois ou…) sont les techniques justificatives des niveaux inférieurs. Dans ce point de vue, un carré est un des premiers polygones réguliers rencontré par les élèves.

2.3 Remarque

Le cercle permet de confirmer, par une voie plus théorique, que l'un des quadrilatères est un rectangle. Pour conclure dans cette voie, le résolveur peut utiliser une des règles du contrat didactique : « l'existence de la solution » afin de donner la seule figure qui reste.
Les mots en gras sont associés à la réponse experte.
Le process indispensable (en gras) à l'obtention de toute réponse dans le temps imparti reste implicite.
Le paysage mathématique de cet exercice comporte un grand nombre de choses ou process particuliers, convoquant des habiletés (Mauss, 1950)4 du résolveur. Ces habiletés sont acquises dans les exercices nécessitant la reconnaissance de carré en géométrie perceptive, elles sont anciennes.
Ainsi la compétence institutionnelle ; « reconnaître un carré dans une figure complexe » est dans ce cas particulier une compétence nécessitant la construction d'un réseau de compétences ou d'habiletés issues de registres différents.
Deux oppositions : longueur et mesure de longueur, figure et dessin nécessitent de la part du résolveur une habileté mathématique implicite.

---

[4] Habileté au sens du mot latin « habilis » : « *qui ont des habitudes, qui « savent y faire ». C'est la notion anglaise de « craft », de « clever » (adresse et présence d'esprit et habitude), c'est l'habileté à quelque chose. Encore une fois nous sommes bien dans le domaine technique.* » (Mauss, 1950)

Substrat (ensemble de choses singulières et de process singuliers)	Objets particuliers	Concepts (1) Techniques	Concepts (2)
Nombre/grandeur (distance/longueur) Consigne Figure/dessin Articles langagiers Côtés Longueur Distance Figure prototypique scolaire Rectangle Losange Parallélogramme Tangente Carré (rotation) **Élimination des cas particuliers triviaux (tri des quadrilatères dans la géométrie perceptive)** **Logique associée au contrat** Rotation donnant une figure prototypique Vérification à l'aide d'instruments Stratégie	Côtés Carré Cercle **Rayon du cercle** tangente Instruments: règle graduée compas équerre	**Tous les rayons d'un cercle ont même longueur** 4 côtés de même longueur et un angle droit Un rectangle n'est pas un carré. 3 angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur angles droits (équerre) Côtés de même longueur Le rayon perpendiculaire à la tangente	Polygones réguliers Espace euclidien Algèbre des grandeurs Classification des quadrilatères Convexes

Figure 2. Site mathématique local de la question

Cet exemple nous permet de montrer que d'une part, le concept de site peut s'appliquer à des objets des mathématiques élémentaires (du primaire), d'autre part, que le site permet de revisiter les différentes formes de géométrie (instrumentée,…) enfin, qu'il peut interroger l'évidence. En effet, par les éléments du substrat, la construction du site questionne: la stratégie (choix de stratégie parmi trois possibilités), le texte (certains implicites langagiers propres à ce niveau) et les process.

Le professeur des écoles devrait être conscient de la partie implicite de chaque exercice. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'exercice d'évaluation de 6e a été repris dans une question de la partie didactique du concours CRPE de 2006. Les nombreux livres, ayant pour objectif de préparer le concours du CRPE, donnent une correction de cet exercice de concours mais les corrections passent sous silence les diverses "choses singulières" du substrat. Par coutume, l'évaluation aux concours CRPE reste centrée sur les connaissances mathématiques. Nous proposons que le sujet de concours CRPE permette d'évaluer aussi les connaissances des process.

3 EXEMPLE DEUX : ENTRE ARGUMENTATION ET DÉMONSTRATION - LE BREVET DES COLLÈGES

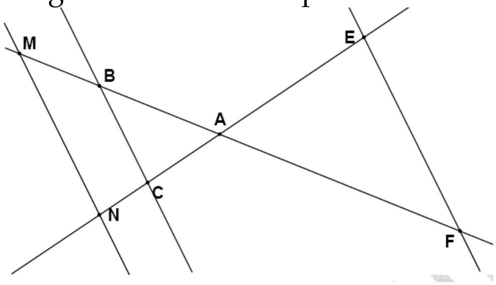
Le brevet des collèges est la première évaluation institutionnelle que rencontre un élève dans le système éducatif français. L'influence de cette évaluation certificative dans la formation de l'élève n'est pas négligeable. L'affirmation selon laquelle « *le baccalauréat pilote l'enseignement du cycle terminal* » (David, 2000) ou bien celle qui stipule que « *le mode d'évaluation aux examens structure les contenus de l'enseignement et organise la scolarité* » (selon une déclaration d'A. Périssol à l'Assemblée Nationale en 2005) illustrent cette affirmation.

Nous nous proposons d'analyser et de caractériser le paysage mathématique d'une question du brevet 2008 des Antilles et de la Guyane, application directe du théorème de Thalès. Les caractéristiques du paysage (épistémologiques, didactiques et mathématiques) sont autant d'outils qui permettront de

reconnaître et de comprendre l'identité du lieu étudié. Ainsi cette étude permettra de cibler certains attendus de l'institution.
Pour fouiller cette application, en un sens archéologique du terme, nous utilisons à nouveau le site mathématique (local) d'une question. A partir de la construction du site mathématique local, qui caractérise le paysage du lieu considéré en diverses strates, nous discutons sur certaines « choses particulières » du substrat, présents dans l'énoncé. Pour appréhender les effets de la rédaction des énoncés de collège, nous avons effectué un travail d'enquête auprès de futurs professeurs des écoles ou de professeurs.
Cette discussion nous questionnera sur les choix de l'institution de passer sous silence des « vieilleries », objets d'étude avant 1970 qui permettraient de redéfinir certains territoires du paysage mathématique de la question.

3.1 Le sujet du brevet 2008 des Antilles et de la Guyane.

La figure suivante n'est pas réalisée en vraie grandeur. Elle n'est pas à reproduire.



Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
On donne : AB = 4,5 cm ; AC = 3 cm ; AN = 4,8 cm et MN = 6,4 cm.
1/ Calculer AM et BC.
2/ On sait de plus que AE = 5 cm et AF = 7,5 cm. Montrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Figure 3. Sujet du brevet 2008 Antilles Guyane

3 Remarque

Nous n'étudions que la question 1, l'élève résolveur doit considérer la sous-figure de gauche pour se retrouver dans l'application directe du théorème de Thalès (compétence du programme : isoler dans une configuration les éléments à prendre en compte pour répondre à une question)[5].

3.2 Discussion sur des choses particulières du substrat, cœur d'implicite

3.2.1 Registre figural/registre langagier

La lecture perceptive (ou instrumentée mais peu probable) du point A comme point d'intersection des droites (MB) et (NC) est dans l'ordre des choses. En effet dans la plupart des textes de brevet l'alignement des points n'est pas mentionné dans le texte du sujet ; de plus, dans le cas de la réciproque du théorème de Thalès de la classe de 3e l'hypothèse « ordre des points » n'est presque jamais explicitée.
Pour les étudiants (PE1) préparant le concours de recrutement des professeurs des écoles (CRPE), le contrat usuel attendu est différent, comme le stipule le jury du CRPE de Lille « *Concernant les questions géométriques, il est encore à signaler qu'une figure géométrique n'est qu'une aide visuelle pour se représenter la situation mais ne prouve rien. Seules les hypothèses, ici bien identifiées dans une rubrique « nous savons que », sont utilisables dans les démonstrations. Toute autre affirmation, même « visible » sur la figure, doit être démontrée* ». Pour vérifier si le changement de paradigme qui consiste à prendre "figure" au sens de

[5] Programme collège introduction générale p 11 B.O. du 19 avril 2007

"dessin et figure technique" mis en œuvre dans cet exercice, nous avons demandé en mars 2009 à 60 étudiants PE1 et 8 professeurs de mathématiques de rédiger la solution de cet exercice ; aucun n'évoque cette légère déformation du contrat dans la rédaction d'une réponse en mentionnant que les hypothèses du raisonnement sont issues de l'observation de la "figure". Nous devrions lire, *a minima*, "d'après la figure..." Cette observation utilise la règle implicite: quelle que soit la taille d'une figure, elle conserve les mêmes propriétés. Cette règle est basée sur le fait que l'espace géométrique est homaloïdal[6]. Par conséquent, même si le sujet n'est pas conforme aux usages de rigueur, ce travail d'enquête montre que le contrat d'évaluation possède une certaine plasticité comme cela est déjà remarqué par C. Castella et A. Mercier(1994) : chacun procède comme s'il n'y avait là aucun problème.
Pourtant, les concours CRPE respectent l'usage d'écrire la position du point A dans le texte en langue vernaculaire. Ainsi, par voie de conséquence cet usage peut permettre le respect de la rigueur au sens de B. Beauzamy (2001) « *La rigueur signifie : connaître le domaine d'application des outils que l'on utilise, savoir distinguer une série convergente d'une série divergente, etc.* »
Dans ce contexte (CRPE), « *le théorème de Thalès ne se réduit pas à l'écriture d'égalités entre fractions*[7]*. Pour pouvoir écrire ces égalités, un certain nombre d'hypothèses doivent être vérifiées* » : les points A, B et M doivent être alignés ; les points A, C et N doivent être alignés ; (BC) doit être parallèle à (MN).
La solution n'explicite pas le cadre de l'alignement des points comme toutes les solutions de la population étudiée. A. Pressiat et I. Bloch (2007) lors d'un cours à la XIV° Ecole d'Eté de Didactique rappellent que l'un des enjeux du collège est d'« *assurer la rupture entre la « géométrie perceptive et instrumentée » d'une part et la « géométrie théorique », d'autre part* ». Ce texte réussit à mélanger les deux géométries sans qu'aucun étudiant ou professeur ne sente la nécessité d'expliciter la « chose ».
Une deuxième habileté implicite apparaît dans les textes : la gestion des deux espaces, grandeur (longueur) et mesure de grandeur *i.e.* algèbre des grandeurs et corps des réels.

3 Site mathématique local

Notre enjeu n'est pas de construire le site mathématique local mais nous allons montrer que la part du substrat et du contrat pèse sur le travail demandé à l'élève.

Substrat : choses singulières	Objets particuliers	Techniques	Concepts (1)	Concepts (2)
Figure Grandeurs Aire Proportion	Nombres décimaux Egalité	Transitivité de l'équivalence	Corps Q	Corps R
Code symbolique distance, droite, longueur	Fractions Longueur Distance	Simplification de fractions		Equivalence, Classe d'équivalence
Contre-règle Equation aux dimensions	Points distincts Droites Droites parallèles	Règle du rapport grandeurs/ nombres	Algèbre des grandeurs Aire (additivité de l'aire)	
Lecture perceptive alignement (instrumentée)	Alignement		Distance entre deux droites parallèles	Théorie de la mesure Espace euclidien
Code graphique Point droite Stratégie	Intersection de droite	Théorème de Thalès		

Figure 4. Site mathématique local de la question

[6] « *Caractère d'un milieu spatial indéfini qui n'a pas de courbure propre et, dans lequel on peut, par conséquent, tracer des figures semblables à n'importe quelle échelle. Appliquée à l'espace à trois dimensions pris dans son ensemble, cette propriété implique le postulat d'Euclide et réciproquement* ». A. Lalande (1983), *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Presse Universitaire de France.
[7] Ici le théorème de Thalès est énoncé dans l'espace euclidien.

3.2.2 Cadre des grandeurs/réels

La solution d'un ou d'une étudiant(e) (voir annexe 2) montre la bascule alternative entre longueur et distance ou entre grandeur et nombre. Cette gestion implicite est une habileté au sens de M. Mauss (1950).
Ainsi la solution part des hypothèses dans le cadre des grandeurs pour passer dans le cadre des réels puis revient dans le cadre des grandeurs. Ces changements de cadres implicites renforcent pour certains (nombreux) l'utilisation abusive des unités. Les unités apparaissent au début et à la fin sans aucune justification. On écrit AM=$\frac{4{,}5\times 4{,}8}{3} = 7{,}2cm$.
Dans le primaire des années 1900, les élèves ne pouvaient faire l'amalgame entre les deux espaces les nombres réels et les grandeurs (longueurs) car l'appel à l'expérimentation matérielle (effective ou invoquée) validait leurs règles.
En effet, la règle suivante « *On peut dire par exemple que : le rapport de deux grandeurs est égale au rapport des nombres qui le mesurent, l'unité restant la même* » (Rollet & Foubert, 1903) permet d'expliciter la justification de l'omission[8].
Mais comme l'écrit Henri Lebesgue dès les années 1930, cette présentation cachait la place prépondérante de la notion de nombres réels :
« *Actuellement, on ne parle pas du nombre distance au premier livre de la géométrie ; on n'en parle qu'au troisième… Encore en parle-t-on avec quelque réticence à cause de l'emploi du nombre dans toute sa généralité ; on parle des rapports de distances bien plus que des distances et le nombre distance n'apparaît de façon avouée que lorsque, dans une proportion entre distances, on fait des produits en croix. À ce moment on suppose connus et les nombres distances et les opérations sur les nombres...*
Mais là se place le scandale de l'incommensurabilité ; il fallait tourner la difficulté, éviter le nombre. C'est pourquoi on a parfois fait comme je disais tout à l'heure, posant une définition de ce que l'on appellera l'égalité ou l'inégalité de deux rapports par des moyens qui sont exactement ceux permettant de décider de l'égalité ou de l'inégalité de deux nombres déterminés chacun par une coupure ; mais on a soin de ne pas s'en apercevoir et d'éviter de parler de ces nombres que l'on compare. Alors on prétend que l'on ne s'est pas occupé de nombres, qu'un rapport de longueurs est autre chose que le nombre qui le mesure... Je n'y peux voir que le souci d'écarter un mot et je pense à celui qui dirait : je n'ai pas besoin de la notion de chapeau pour parler de cette chose ronde que vous avez sur la tête, qui a un cuir à l'intérieur et un ruban à l'extérieur. »
Aujourd'hui les nombres sont omniprésents tandis que la notion de grandeurs a du mal à occuper un espace comme le montre l'ensemble des réponses.

3 Remarque

La polysémie de la notation AB signifie selon sa place la longueur d'un segment [AB] et la distance AB *i.e.* la longueur et la mesure de la longueur. Cette polysémie de la notation AB demande une habileté, qui conduit à supprimer "cm"[9] dans le texte pour faire ensuite une adjonction de ce même mot "cm" dans la réponse. Exercice acrobatique dont les conséquences didactiques ont été étudiées par Y. Chevallard et M. Bosch (2001, 2003).
Le jeu "nombre concret" et "nombre abstrait" était joué par le rapport de grandeurs et le nombre abstrait. Aujourd'hui cela relève d'une habileté non mathématique des élèves.
Pour lever le problème il faudrait considérer qu'une figure est adimensionnelle, ce qui est fondée sur une propriété de l'espace euclidien : le rapport de grandeurs est conservé par changement d'échelles.

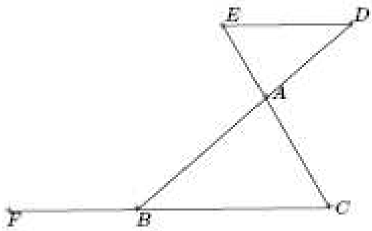
3.2.3 Un livre de 3e

L'étude d'un livre de 3e (voir annexe 4) montre la difficulté de cette gestion implicite.
Dans la solution exposée, la notation ID indique la distance de I à D (la mesure de la longueur) ou la longueur. Aucun livre consulté ne se préoccupe de la polysémie associée à la notation distance. Or la

[8] Pour une autre façon de voir se conférer à l'annexe 3
[9] Ellipse en rhétorique

rigueur en mathématique est l'«*adéquation entre le signifié et le signifiant* » (Rouy, 2007). Ce problème n'est pas évacué par une rédaction de l'énoncé précisant que toutes les mesures sont faites dans la même unité, le centimètre. Une majorité de concepteurs de sujet de brevet utilisent pourtant cet artifice en particulier :

Exercice 1 :
La figure suivante n'est pas réalisée en vraie grandeur.
L'unité de longueur est le centimètre.
On donne : AB= 8 ; BC= 9 ; AC= 6 ; AE= 4.



1) Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
Calculer AD.

Figure 5. Brevet 2008 Groupement Nord

Nous remarquons que : la figure n'a pas d'échelle, l'unité ne sert à rien, le sujet parle de droites mais les droites ne sont pas tracées. Le professeur et l'élève ne savent pas où se situe cet exercice.
Cependant la question sur la principale technique demeure: le théorème de Thalès est-il énoncé en termes de distances ou en termes de longueur ?
Mais la transposition didactique n'est pas encore achevée, il faudrait peut-être inventer une notation pour la longueur d'un segment. Une proposition possible semble être « Pourquoi ne pas employer L(ID) pour la longueur du segment [ID] et ID pour la distance ? », mais il faut se garder des dérives du « *formulisme* » (Ferrier, 2005). En particulier, dans les autres pays, la notation [AB] n'est pas aussi prégnante. Cependant il semble plus précis d'employer un codage différent pour marquer les étapes de la solution. Mais la France a connu les dérives de la réforme des mathématiques modernes, et l'usage de la rigueur reste encore perturbé.
Un ou une étudiante PE1, en composant le texte nécessaire au passage du dessin à une figure, propose une rédaction de la solution en utilisant la notation (AB) pour la longueur[10]. Ce choix peut paraître original, mais un livre d' « arithmétique ». (Faucheux, 1938) utilise cette écriture[11].
Dans les usages actuels, à ce niveau d'étude le manque d'explicitation de cette différence ne permet pas aux élèves de saisir tout le sens de la rédaction du professeur.
Mais cette discussion sur la rigueur cache le sens réel de l'affrontement entre deux paradigmes celui du concret et celui du monde mathématique, celui des grandeurs concrètes et celui des nombres, c'est le « seuil épistémologique » de N. Rouche (1994). Mathématiquement, le paradoxe de Banach-Tarski[12] démarque une des limites de ce seuil épistémologique entre le monde mathématique et le monde physique en montrant que la notion de découpage n'est pas si naïve. C'est le « diabolus in mathematica » d'Antoine Delcroix.
A ce niveau l'espace des nombres est de niveau 2 (numérique 2), le niveau des différentes collections N, Z, D, Q, R avec des opérations bien assimilées. Le niveau 0 est le niveau naïf de la comptine ou numérotation des pages d'un livre qui précède les définitions mathématiques du texte du savoir.

[10] Voir annexe 5
[11] Voir annexe 6
[12] Nous invitons le lecteur à se reporter à Perrin D. (2005), Mathématiques d' Ecole, Cassini, 2005

Le niveau 1 est celui des tables, du calcul réfléchi. Le niveau 3 est celui du construit, dépassant aujourd'hui celui de la licence.

Le souci du métadiscours explicatif du programme sur l'introduction des grandeurs dans le monde mathématiques atteint ici sa limite. La rédaction de l'école de cette question est un chemin qui passe des « nombres concrets » aux nombres où l'utilisation des mathématiques permet d'élaborer une solution numérique qui donne par retour aux nombres concrets la solution. Ce chemin n'est-il pas l'évacuation de cet affrontement ?

Dans le Brevet supérieur, Nancy 1923 (Faucheux, 1938), on demande dans la première question de « *Montrer que le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport des nombres qui les mesurent quand on les évalue avec la même unité* ». Ce théorème est absent des programmes et interroge ici la transparence du savoir impliqué.

Ainsi, ce texte de manuel, supposé générateur d'exemples de rédaction, montre bien les limites d'une mathématique scolaire qui ne veut pas prendre en compte le saut qualitatif des grandeurs concrètes aux réels. Ce rejet dans l'implicite de cette difficulté d'ordre épistémologique se retrouve avec la notion d'angle qui peu à peu est évacuée du programme scolaire (les triangles semblables re-disparaissent à cet automne en seconde et la notion cocyclicité reste à l'état de trace dans le chapitre des complexes de terminale).

D'autre part, dans les programmes, le théorème de Thalès, donné en termes de longueurs, est justifié en termes de grandeurs à l'aide des aires. Du point de vue mathématique, la propriété de Thalès figurant dans le programme de troisième est une propriété utilisant la notion de longueur, elle est donc à un isomorphisme près une propriété euclidienne. Cependant le théorème de Thalès général ne nécessite pas la notion de distance, c'est ainsi une propriété affine. Or le procédé affine de la démonstration est basé les propriétés du corps des réels.

Pour conclure sur la construction du site pour résoudre ce sujet le résolveur fait preuve de « mètis » (Detienne & Vernant, 1974) :

- la lecture perceptive de l'alignement des points.
- la gestion des grandeurs et des mesures des grandeurs ou « le saut épistémologique ».

Nous espérons avoir montré que l'élaboration du site permet de lever ces implicites et de caractériser le paysage mathématique de la question.

4 CONCLUSION

D'une part, la construction effective du site mathématique local effectue une caractérisation du paysage mathématique de la question. Ce moment d'organisation de la connaissance nécessaire à la reconstruction du paysage, à partir de la question, permet à l'auteur de structurer l'enseignement de la question. Cette caractéristique répond au *principe de Papert* énoncé par M. Minsky : « *certaines étapes les plus cruciales du développement mental sont fondées non pas seulement sur l'acquisition de nouvelles compétences mais sur de nouveaux processus administratifs de ce que nous connaissons déjà* » (Minsky, 1988).

D'autre part, en explicitant à la fois les objets, les techniques ainsi que le substrat, le site caractérise le paysage et indique une partie du sens. « *Ainsi avons-nous également introduit le saut qualitatif accompli lorsque l'on passe du signifiant au signifié et du signifié au sens, à la façon dont le joueur d'échecs va de la structure matérielle du jeu à ses règles, puis de ces règles à la stratégie qui lui sera propre* » (Magen, 2006).

Enfin, nous rappelons que « *le mode d'évaluation aux examens structure les contenus de l'enseignement et organise la scolarité* » (selon une déclaration d'A. Périssol à l'Assemblée Nationale en 2005) et ainsi nous avons montré que la construction du site permet de réinterroger :

- dans l'exemple 1, le concours CRPE. Nous avons proposé que ce concours évalue aussi la connaissance des habiletés requises par l'exercice. On pourrait même relier notre analyse d'une évaluation à l'article de C. Houdement (2009) sur les "problèmes pour chercher" :

« pour certains d'entre eux, d'autres connaissances, autres que mathématiques, sont nécessaires pour avancer dans la résolution (et contrôler la réponse) ».

- dans l'exemple 2, la cohérence de la partie étudiée du curriculum. La construction du site nécessite une clarification des changements de cadre avec, par exemple, la règle du quotient de deux grandeurs de même espèce dans la même unité et l'explicitation des propriétés d'une figure (dessin ou technique). Sans cette clarification, les démonstrations mathématiques effectuées en collège sur le théorème de Thalès restent des argumentations axées pour une large part sur des implicites, des savoirs transparents.

5 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU G. (1989), Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège, *Petit x* **21**, pp. 47-68, IREM de Grenoble.

CASTELA C. (2008), Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes, dans *Perspective en didactique des mathématique, Cours de la XIIIème École d'été de didactique de mathématiques* (Eds Rouchier, Bloch), 89-114, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CASTELLA C. & MERCIER A.(1994), Peut-on enseigner des méthodes ? Comment les élèves apprennent-t-il des méthodes ? *Bulletin de Commission Inter-IREM de didactique des mathématiques* **1**.

CHEVALLARD D. & BOCH M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I et II. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, **53**, pp. 5-32, IREM de Grenoble.

CHEVALLARD D. & BOCH M. (2003). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie III. Une Atlantide oubliée. *Petit x* **59**, pp.43-76, IREM de Grenoble.

DELCROIX A. & SILVY C. (2008), *Fonction constante et dérivée nulle : un résultat si trivial…*, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00318449/fr/

DÉTIENNE M. & VERNANT J.-P. (1974), *Les ruses de l'intelligence – la mètis des Grecs*, Flammarion, Paris.

DUCHET P. & ERDOGAN A. (2006), Pupil's autonomous studying: from an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis, dans *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Ed Bosch), 663-674, Publication électronique.

FAUCHEUX M. (1938) *Arithmétique (Ecoles normales Brevet supérieur)*, Delagrave, Paris

FERRIER J.-P. (2005) *Le formulisme* http://www.iecn.u-nancy.fr/~ferrier/Formul.pdf

HOUDEMENT C. (2009) Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de Didactique et Sciences Cognitives* **14**, pp. 31-59, IREM de Strasbourg

LEBESGUE H. (1975), *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard, Mayenne.

MAGEN G. (2006), *Du radical du sens*, Presses du Lema, Université de Paris 8, Saint-Denis.

MAUSS M. (1950), *Sociologie et anthropologie*, Quadrige/Presse Universitaires de France, Paris (1997 : 7ème édition).

MERCIER A. (2001), Descartes : le temps de la construction du savoir, *L'Ouvert* **103**.

MINSKY M. (1998), *La société de l'esprit*, Inter Editions, Paris.

PERISSOL A. (2005), *Rapport d'information déposé en application de l'article 145 du règlement par la commission des affaires culturelles, familiales et sociales sur la définition des savoirs enseignés à l'école*, enregistré à la Présidence de l'Assemblée nationale le 13 avril 2005

ROLLET P. & FOUBERT E.(1903) *Cours d'arithmétique (Ecole Primaires Supérieures et Professionnelles, préparation aux Ecoles d'Arts et Métiers)* Felix Alcan, Paris

ROUCHE N. (1994) « Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique », Repères –IREM **15,** Topiques éditions, Metz.

ROUY E. (2007) *Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre institution secondaire et institution universitaire. Le cas éclairant du thème des dérivées*. Dissertation en vue d'obtenir le grade de Docteur en Sciences. Université de Liège Académie Universitaire Wallonie Europe

SILVY C. & DELCROIX A. (1), (2009) Site mathématiques d'une ROC, une nouvelle façon d'interroger un exercice, *Annales de Didactique et Sciences Cognitives* **14**, pp.103-122, IREM de Strasbourg.

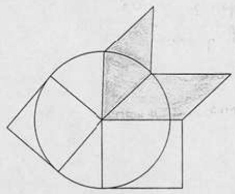
SILVY C. & DELCROIX A. (2) (2009) *Exemple d'étude de l'implicite dans l'évaluation ou la formation d'enseignants de mathématiques* (en cours).

6 ANNEXE 1

Elève A

Exercice 16

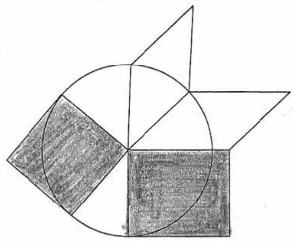
Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un losange de cette figure.

Exercice 25

Observe attentivement la figure suivante.

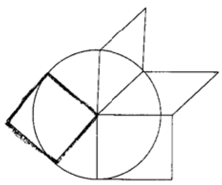


Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.

Elève B

Exercice 16

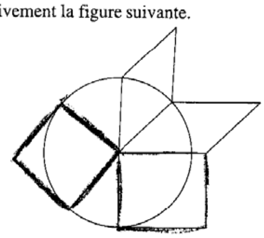
Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un losange de cette figure.

Exercice 25

Observe attentivement la figure suivante.

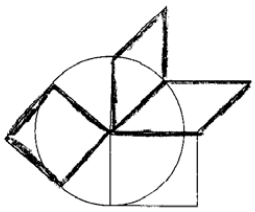


Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.

Elève C

Exercice 16

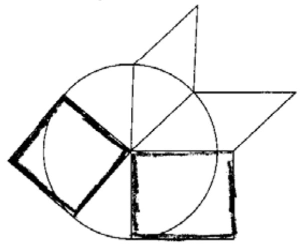
Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un losange de cette figure.

Exercice 25

Observe attentivement la figure suivante.

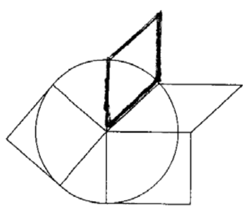


Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.

Elève D

Exercice 16

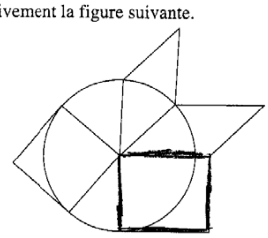
Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un losange de cette figure.

Exercice 25

Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.

7 ANNEXE 2

Exercice :

Hypothèses :

(BC) // (MN)

AB = 4,5 cm

AC = 3 cm

AN = 4,8 cm

MN = 6,4 cm

1) Calcul de AM :

Pour calculer AM, on va utiliser le théorème de Thalès. On sait que (BC) et (MN) sont parallèles et que A, B, M et A, C, N sont respectivement alignés dans le même ordre. On a donc d'après le Théorème de Thalès, dans le triangle AMN :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$$ or AB = 4,5 cm, AC = 3 cm, AN = 4,8 cm

d'où $\frac{4,5}{AM} = \frac{3}{4,8}$

$$AM = \frac{4,5 \times 4,8}{3}$$

$$\boxed{AM = 7,2 \text{ cm}}$$

Solution d'un(e) étudiant(e)

— [illegible] —

CHAPITRE V. *

Rapport numérique de deux droites. Lignes proportionnelles.

§ 1. — DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS.

93. — **Rapport.** — On appelle *rapport* de deux quantités, le *quotient* que l'on obtient en divisant la première des quantités par la seconde.

94. — Pour trouver le *rapport numérique* de deux droites, le moyen le plus simple et le plus pratique est de les mesurer et de diviser les deux longueurs obtenues l'une par l'autre.

Fig. 63

Supposons qu'une droite AB (fig. 63) mesure $2^m,1$ et une autre droite CD, $0^m,7$; leur rapport numérique sera $\frac{2,1}{0,7} = 3$; et l'on pourra écrire la proposition suivante :

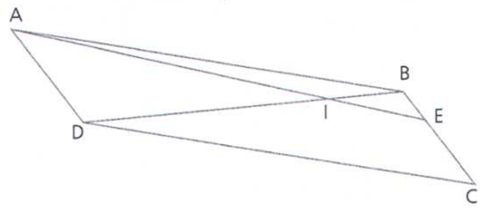
$$\frac{AB}{CD} = \frac{2,1}{0,7}$$

Rapport numérique de deux longueurs. A Leclerc 1908

9 ANNEXE 4

Savoir-faire 1 Déterminer une longueur dans une figure contenant des droites parallèles

Énoncé **Le parallélogramme ABCD ci-contre est tel que AD = 6 cm. E est un point du segment [BC] tel que BE = 2 cm. I est le point d'intersection des droites (AE) et (BD) et on donne : BI = 4 cm. Calculer la longueur DB.**



Solution

ABCD est un parallélogramme donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles. ← La figure contient des droites parallèles, on peut donc penser à utiliser le théorème de Thalès pour calculer la longueur recherchée.

Les droites (BD) et (AE) sont sécantes en I et les droites (BE) et (AD) sont parallèles. ← On identifie les conditions nécessaires pour appliquer le théorème de Thalès.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on peut écrire les égalités de quotients :

$$\frac{IE}{IA} = \frac{IB}{ID} = \frac{EB}{AD}.$$

← On applique le théorème de Thalès.

Or : AD = 6 cm, BE = 2 cm et IB = 4 cm.
Donc on a : $\frac{IE}{IA} = \frac{4}{ID} = \frac{2}{6}$. ← On utilise les valeurs numériques données dans l'énoncé.

Calcul de ID

On a : $\frac{4}{ID} = \frac{2}{6}$. ← On connaît la longueur IB et on cherche la longueur BD. Le point I appartenant au segment [BD], il suffit de calculer ID. Pour cela, on utilise l'égalité : $\frac{4}{ID} = \frac{2}{6}$.

Donc : $6 \times 4 = 2 \times ID$. ← On écrit l'égalité des produits en croix.

Donc : $ID = \frac{6 \times 4}{2} = 12$.

Calcul de BD ← On peut maintenant calculer BD.

I appartient au segment [BD], donc :
BD = BI + ID = 12 + 4 = 16.

[BD] mesure 16 cm. ← On conclut.

Manuel 3° Prisme (2008)[13]

[13] DESCHAMPS C., CUAZ L., JACOB N., LE BOURGEOIS D., ROULET-DESCOMBES A., SITBON A., VISSIO J., XOUAL I. (2008) *Math programme 2008 3°collection Prisme* , Belin, Tours.

10 ANNEXE 5

Exp A1

1) Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

On donne (AB) = 4,5 cm, (AC) = 3 cm, (AN) = 4,8 cm et (MN) = 6,4 cm

F et E sont deux droites sécantes en A. N et C sont deux points de E distincts de A ; M et B sont deux points de F distincts de A

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{AM}{4,5} = \frac{4,8}{3} = \frac{6,4}{BC} \quad \text{donc} \quad \frac{4,5 \times 4,8}{3} = 7,2 \quad \text{et} \quad \frac{3 \times 6,4}{4,8} = 4$$

Nous pouvons donc dire que (AM) = 7,2 cm et (BC) = 4 cm

Résolution par un(e) étudiant(e)

11 ANNEXE 6

= 229. = En raison de la propriété précédente, il n'y a pas d'inconvénient à admettre que, dans la notation $\frac{AB}{CD}$, AB et CD représentent, soit des grandeurs, soit les nombres qui les mesurent avec une même unité. Quand nous tiendrons à préciser qu'il s'agit des grandeurs elles-mêmes, nous écrirons $\left(\frac{AB}{CD}\right)$.

Livre Faucheux(1938) du programme 1920

12 Exercice 1

Le résolveur pour répondre dans le temps imparti, isole les quadrilatères et élimine naturellement les objets triviaux (sans angle droit ou reconnaissance de "non carré") non solutions pour ne garder que ceux supposés répondre à la question.
Le résolveur se trouve alors face à deux quadrilatères qui sont des rectangles qui ressemblent à des carrés.

12 Procédure 1 :

Tous les rayons du cercle sont de même longueur donc le quadrilatère de droite possède deux cotés consécutifs de longueurs différentes donc ce quadrilatère est un rectangle. Or un rectangle n'est pas un carré donc l'autre rectangle de gauche est un carré.
Variante :
On vérifie que le rectangle de gauche est bien un carré avec le compas ou la règle graduée

12 Procédure 2

On vérifie à la règle graduée ou au compas que le quadrilatère de gauche est un carré.

12 Procédure 3

On vérifie à la règle graduée ou au compas que le quadrilatère de droite est un rectangle. Or un rectangle n'est pas un carré donc l'autre rectangle est un carré.
Variante :
On vérifie que c'est bien un carré avec le compas ou la règle graduée.

12 Exercice 2

1) D'après le dessin : Les 3 points A, B et M sont distincts et alignés, ainsi que les points A, C et N.
D'après l'énoncé (BC) et (MN) sont parallèles.
Donc d'après le théorème de Thalès

$$\frac{l(AB)}{l(AM)} = \frac{l(AC)}{l(AN)} = \frac{l(BC)}{l(MN)}.$$

Ainsi $\frac{4{,}5\,cm}{l(AM)} = \frac{3\ cm}{4{,}8\,cm} = \frac{l(BC)}{6{,}4\,cm}$.

Or $\frac{3\ cm}{4{,}8\,cm} = \frac{3\times 1cm}{4{,}8\times 1cm} = \frac{3}{4{,}8}\times\frac{1cm}{1cm} = \frac{3}{4{,}8}$ ou $\frac{3\ cm}{4{,}8\,cm} = \frac{3\ cm\times 1cm^{-1}}{4{,}8\,cm\times 1cm^{-1}} = \frac{3}{4{,}8}$.

Donc $\frac{4{,}5\,cm}{l(AM)} = \frac{3}{4{,}8}$, ainsi $l(AM) = 7{,}2$ cm.

De même $\frac{3}{4{,}8} = \frac{l(BC)}{6{,}4\,cm}$, ainsi $l(BC) = 4$ cm.

Les longueurs demandées sont donc 7,2 cm pour le segment [AM] et 4 cm pour [BC].