

UN MEME PROBLÈME, UNE DIVERSITÉ DE PROCÉDURES DE RÉOLUTION : COMMENT LES ANALYSER ?

Lucia Grugnetti

Unité de recherche en didactique des mathématiques,
Université de Parma (Italie)
lucia.grugnetti@unipr.it

François Jaquet

Ancien chercheur à l'Institut romand de recherche et documentation pédagogique (IRDP,
Suisse)
francois.jaquet@aliceadsl.fr

Philippe Skilbecq

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques,
Nivelles (Belgique)
philippes@crem.be

Résumé

Cet article est le compte-rendu d'un atelier proposé lors du colloque COPIRELEM de Auch en juin 2009. Les auteurs présentent le Rallye Mathématique Transalpin (RMT) qui s'adresse à des classes d'élèves de 8 à 15 ans. Au-delà de l'organisation elle-même du concours, le RMT est l'occasion d'un travail de nombreuses équipes : en amont pour choisir les problèmes (analyse a priori) et a posteriori à partir des productions des élèves, en particulier sur les différentes procédures suivies. Un des objectifs est aussi d'insérer ces problèmes dans l'enseignement lui-même. En parallèle, en formation initiale des futurs instituteurs, certains problèmes sont utilisés comme support de travail sur les notions mathématiques en jeu, les procédures, les erreurs, les obstacles, les variables et vers la création de nouveaux problèmes. Plusieurs de ces problèmes sont ensuite présentés et analysés dans ce cadre de formation.

1 INTRODUCTION

Le *Rallye mathématique transalpin (RMT)* est un concours de mathématique organisé depuis plus de 10 ans dans plusieurs pays européens. Chaque année, plusieurs centaines de copies d'élèves ayant résolu les mêmes problèmes sont collectées. Leur analyse est riche d'enseignement, tant pour les enseignants en fonction que pour les futurs enseignants et les chercheurs en didactique des mathématiques. Dans cet article, nous examinons des copies rendues par des groupes d'élèves (niveaux CE2, CM1 et CM2) sélectionnées pour leur intérêt. Nous distinguons les différentes procédures de résolution et les niveaux de construction des concepts mathématiques intervenant dans la résolution du problème. Ce travail s'effectue notamment à partir des erreurs rencontrées, des représentations et des justifications apportées. Pour certains problèmes, les données recueillies auprès de l'ensemble des classes sur les problèmes analysés sont également présentées. Tout au long de cet article, des propositions de travail avec de futurs enseignants (instituteurs ou professeurs de mathématiques) sont également énoncées.

2 LE RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

Le *RMT* est organisé par l'Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT). Ce concours de mathématique s'adresse à des classes entières du CE2 à la 2^e année du lycée ¹(élèves de 8 à 15 ans). Il est proposé dans cinq pays européens : Suisse, Italie, France, Luxembourg et Belgique. Durant l'année scolaire 2008-2009, plus de 3000 classes y ont participé.

2.1 Les objectifs du RMT

Le *RMT* propose aux élèves de faire des mathématiques en résolvant des problèmes, d'apprendre les règles élémentaires du débat scientifique en discutant et défendant les diverses solutions proposées, de développer leurs capacités à travailler en équipe en prenant en charge l'entière responsabilité d'une épreuve et de se confronter avec d'autres camarades, d'autres classes.

Pour les maîtres, le *RMT* permet d'observer des élèves en activité de résolution de problème (les leurs lors de l'épreuve d'essai et ceux d'autres classes durant les épreuves qualificatives), d'évaluer les productions de leurs propres élèves et leurs capacités d'organisation, de discuter des solutions et de les exploiter ultérieurement en classe, d'introduire des éléments de renouvellement dans leur enseignement par des échanges avec d'autres collègues et par l'apport de problèmes stimulants, et de s'engager dans l'équipe des animateurs et de participer ainsi à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions.

Outre le concours, le *RMT* est aussi un outil intéressant et efficace pour nourrir une réflexion en didactique des mathématiques et pour les formations initiale et continue des maîtres. Cette deuxième perspective du *RMT* est rendue possible parce qu'outre l'énoncé de la ou des solutions, il est demandé aux élèves de justifier leur réponse ou d'expliquer leur démarche. À partir de ces récits explicatifs ou justificatifs, une analyse des réponses et des stratégies est possible, de même que la mise en évidence d'obstacles à la résolution d'un problème, à la mobilisation et à l'utilisation d'un objet mathématique ou à la compréhension de celui-ci.

2.2 Des possibilités d'exploitation

Pour chaque épreuve du *RMT* (3 par an), entre 20 et 25 problèmes sont mis au point par l'ensemble des sections² de l'ARMT, soit près de 70 problèmes par an. Pour chacun d'eux, une analyse *a priori* permet de déterminer leur intérêt pour le concours et de régler les variables pour qu'ils soient les mieux adaptés aux classes auxquelles ils sont destinés.

Outre les analyses *a priori*, les sections ou les groupes de travail³ sur les concepts mathématiques mènent aussi des analyses de certains problèmes après les passations des épreuves dans les classes. Ces analyses

¹ Le RMT s'organise en catégories, de la catégorie 3 à la catégorie 10. La catégorie 3 correspond à la troisième année d'étude primaire (CE2) ; la catégorie 4 correspond à la 4^e année d'étude primaire (CM1) ; ainsi de suite jusqu'à la catégorie 10 (2^e année du lycée).

² L'ARMT compte actuellement 23 sections réparties dans les cinq pays européens participant au RMT. Une section peut représenter soit une région (Bourg-en-Bresse, Lyon, Franche-Comté sont les trois sections françaises), soit un pays (Luxembourg et Belgique), soit encore un type d'enseignement (les lycées agricoles français). Chaque section organise le RMT à son niveau en collaboration avec l'association internationale.

³ Les groupes de travail sur les concepts rassemblent des membres francophones et italophones des 23 sections. Ces groupes ont pour objectifs d'analyser les problèmes du RMT dans la double perspective d'en proposer de nouveaux et d'étudier le potentiel de chaque problème pour une utilisation en classe dans le cadre de l'enseignement d'un concept. Les groupes de travail sont au nombre de sept : géométrie plane, géométrie dans l'espace, chiffre et nombre, équation, proportionnalité, fonction, algèbre.

sont réalisées souvent à partir d'une analyse des résultats globalisés sur l'ensemble des sections pour chacun des problèmes. Cela est possible grâce à la collecte des résultats via le site Internet de l'ARMT.

Cependant, les analyses *a posteriori* ne se limitent pas à l'analyse de ces résultats. La lecture des copies des élèves renvoyées après chaque épreuve et leur analyse constituent le véritable travail. C'est à ce niveau que l'on peut observer les procédures utilisées par les élèves et tenter de les comprendre, de les rattacher à des conceptions. C'est aussi à ce niveau que l'on peut relever les erreurs, tenter de les comprendre et de les interpréter en termes d'obstacles à la résolution du problème, et au-delà émettre des hypothèses en termes d'obstacles à l'apprentissage de notions mathématiques.

Ces obstacles peuvent avoir des origines bien différentes : ontogénique, épistémologique, didactique,... Parfois, l'analyse *a posteriori* montre que ce sont les variables du problème qui sont pour l'essentiel à l'origine des difficultés des élèves. Un travail sur ces variables mène alors à la conception de nouveaux problèmes. Ceux-ci sont ensuite utilisés dans les classes et les copies des élèves sont à nouveau analysés, tant pour observer des modifications au niveau des résultats qu'au niveau des procédures investies. L'impact de la modification des variables peut alors être mis en évidence. Au-delà, c'est l'importance des variables didactiques qui est soulignée.

Ainsi, avant de trouver place dans une épreuve, chaque problème est l'objet d'un long travail de mise au point. Le travail sur les variables est sans doute le plus exigeant pour les sections. Plusieurs relectures des problèmes sont organisées avant que ceux-ci ne soient acceptés et insérés dans les épreuves. Chaque problème, produit par les sections ou par les groupes de travail, est analysé par l'ensemble des sections. Ces analyses sont menées à partir de l'expérience acquise par les enseignants qui composent les sections, mais aussi en comparant avec les résultats à des problèmes similaires déjà proposés aux classes les années précédentes. Ces analyses tiennent également compte des travaux réalisés par les groupes de travail sur les concepts. En fonction des remarques émises par ces sections, une équipe composée des membres de deux ou trois sections est chargée d'élaborer la version finale d'une épreuve.

L'examen des copies des problèmes du RMT confirme généralement les prévisions de l'analyse *a priori* en ce qui concerne les procédures de résolution. Pour certains problèmes, les analyses *a posteriori* apportent des informations complémentaires sur les procédures engagées par les élèves. Dans certains cas, ces analyses mettent en évidence des obstacles inattendus, des représentations dominantes non adéquates, des procédures détournées permettant d'obtenir la solution par des voies non prévues. Quoi qu'il en soit, ces analyses peuvent conduire à des exploitations de problèmes en classe ou à des investigations complémentaires. Ces travaux aboutissent souvent à la création de nouveaux problèmes à partir des modifications des variables didactiques ou de contexte.

Ainsi, le RMT ne se propose pas seulement d'organiser un concours. Il tente aussi de mettre au point des problèmes qui, certes servent de base au concours, mais trouvent également une place en classe dans un processus d'enseignement.

De même, pour des formateurs d'enseignants, le RMT est une source de problèmes analysés ou à analyser qui mettent en évidence des stratégies, des erreurs, des obstacles, des variables didactiques, ... Il peut aussi être considéré comme un champ d'investigation et de développement pour la recherche en didactique des mathématiques.

3 ANALYSER DES PROBLÈMES DU RMT

Abordons maintenant deux séries de problèmes qui pourraient être utilisés en formation d'enseignants. Nous avons choisi de travailler à partir de problèmes de géométrie. Notre objectif sera de mettre en évidence la notion d'unité de mesure commune, ainsi que les difficultés des élèves par rapport aux notions d'aire et de périmètre.

3.1 Proposition d'une séquence de travail avec des futurs instituteurs⁴

Dans un premier temps, les étudiants sont invités à résoudre les problèmes. Cette première phase leur permet de prendre contact avec les problèmes, de prendre conscience de leurs propres difficultés et, en fonction de leur expérience, d'émettre des hypothèses quant aux difficultés que les élèves peuvent éprouver et les obstacles auxquels ils peuvent être confrontés.

Dans un deuxième temps, pour chaque série de problèmes, des analyses sont menées à partir de quelques questions. Ces analyses concernent d'abord le travail des étudiants, ensuite celui des élèves à partir de l'analyse de quelques copies :

- Quelles sont les notions « rencontrées » ou « mobilisées » dans ces problèmes?
- Quelles sont les procédures utilisées ?
- Quelles sont les « erreurs » produites, quels sont les « obstacles » à surmonter?
- Quel est le travail à réaliser sur les variables pour aménager ces problèmes si nécessaire... en fonction de quel(s) objectif(s)?

Ces analyses des problèmes et des difficultés des élèves permettent parfois d'ébaucher une première progression dans l'apprentissage des notions mathématiques que sont l'unité de mesure commune, l'aire et le périmètre. La référence à un cadre théorique, en l'occurrence celui présenté par une équipe du CREM [2007]⁵, et l'expérimentation dans des classes peuvent ensuite servir de validation et de structuration des savoirs ébauchés lors des séances de travail avec les étudiants.

3.2 Une première série de trois problèmes

Les trois problèmes que nous proposons sont « Les tables de Tante Marie » et les deux versions du problème « La rosace de Julie ». Ils sont présentés en annexe de cet article.

Après avoir laissé du temps à la résolution individuelle des problèmes, les analyses *a priori* réalisées par les sections sont présentées aux étudiants. Une comparaison entre ces analyses, les procédures des étudiants et celles des élèves initie une première réflexion. Pour le problème « Les tables de Tante Marie » (catégories 3, 4), l'analyse *a priori* mettait en avant différentes procédures, dont :

- Comprendre qu'il faut déterminer une unité de mesure (carré ou triangle)
- Se rendre compte de la relation entre les deux unités de mesure (moitié/double)
- Comprendre que, puisque tante Marie utilise 34 pièces pour chacune des deux tables, elle ne peut pas, pour paver la première table, utiliser uniquement des pièces carrées (il en faudrait alors uniquement 25). Pour l'autre table, il est évident que les formes seront mélangées, mais il faut aussi comprendre qu'il doit y en avoir 34. C'est le point central de la compréhension de l'énoncé...

⁴ Enseignants prenant en charge des élèves de 6 à 12 ans.

⁵ Nous présentons succinctement ce cadre à la section 4. Succinctement, la recherche menée par le CREM met en évidence quelques « stades » dans la construction du concept d'aire : la perception qualitative de l'aire ; la quantification d'une aire ; la numérisation de l'aire ; le calcul de la mesure de l'aire.

Constatons d'emblée que ce problème de pavage ne fait pas appel à une « mesure » d'aire et que le concept d'unité de mesure commune n'est pas nécessaire pour arriver à la solution. Par contre, il est nécessaire de constater « l'équivalence » entre un carré et deux triangles ; ce qui a pour conséquence que le nombre de pièces augmente de un chaque fois que l'on partage un carré en deux triangles. Cette constatation peut être implicite chez les élèves qui procèdent au hasard et adaptent ensuite leurs choix. Elle semble explicite chez ceux qui procèdent de manière progressive pour s'approcher des 34 pièces en remplaçant un carré par deux triangles et faisant ainsi augmenter le nombre des pièces un à un. Elle peut être considérée comme intégrée chez ceux qui calculent d'avance le nombre de carrés à remplacer.

L'analyse *a priori* se poursuivait en indiquant un usage possible de tableaux tels que celui présenté ci-dessous :

- Pour la table carrée, on peut faire successivement plusieurs hypothèses sur le nombre de pièces carrées et sur le nombre correspondant de pièces triangulaires permettant de compléter le pavage, et vérifier s'il y a effectivement 34 pièces, avec un tableau comme celui-ci :

carrés	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
triangles	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
total des pièces	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35

jusqu'à retenir la solution : 16 morceaux carrés et 18 triangulaires.

L'analyse des copies d'élèves montre que ce type de tableau n'a été utilisé par aucune classe. On peut donc s'interroger sur la manière d'introduire cet outil de résolution dans les classes de CE2 et de CM1.

Au niveau de l'analyse statistique des résultats, ce problème obtient 1.5 de moyenne⁶. Pour les classes de CE2 (329), près de 50% de celles-ci ont obtenu 0 point. Au niveau du CM1 (414 classes), 30% des classes obtiennent 0 point et 36% obtiennent 4 points.

Les deux versions du problème « La rosace de Julie » étaient dévolues aux catégories 3,4 (CE2, CM1) et 5,6 (CM2, 6^e). Ce problème, quelle que soit sa version, fait intervenir les décompositions et les recompositions de formes tout comme dans le problème précédent. Cependant, l'utilisation d'une unité de mesure commune est cette fois nécessaire.

⁶ Les problèmes du RMT sont évalués à partir d'un dispositif sur 4 points maximum : 0 correspondant à l'incompréhension du problème, 4 à la réponse correcte avec des explications ou des justifications complètes, 3 à la réponse correcte avec des explications ou justifications incomplètes. Les notes 1 et 2 correspondent souvent à des réponses incomplètes ou à des erreurs de calculs.

Tab. 1 - « La rosace de Julie »

		Copies belges	
cat 3	19	Moyenne	1.83
		Mode	Ind.
		Écart-type	1.57
cat 4	13	Moyenne	1.63
		Mode	0
		Écart-type	1.69
cat 5	18	Moyenne	1.25
		Mode	0
		Écart-type	1.30
cat 6	28	Moyenne	2.89
		Mode	4
		Écart-type	1.59

Lors de la conception du problème, dans la perspective de le complexifier pour les catégories 5 et 6, les segments qui délimitent des triangles ont été supprimés, de telle sorte que l'unité de mesure commune (les petits triangles rectangles isocèles) ne soit plus directement perceptible. L'analyse des résultats indique que ce problème est moins bien réussi en catégorie 4 qu'en catégorie 3 et, à l'inverse, qu'il est moins bien réussi en catégorie 5 qu'en catégorie 6. Plusieurs hypothèses peuvent être avancées pour expliquer ces constats.

Tout d'abord, dans le cursus belge, les notions de périmètre et d'aire sont abordées à partir de la 4^e année (cat 4) et approfondies en 5^e (cat 5) et 6^e primaire (cat 6). L'analyse des copies des élèves montre que c'est particulièrement dans les catégories 4 et 5 que les erreurs sont liées à des obstacles de type épistémologique, c'est-à-dire là où les connaissances liées à ces notions de périmètre et d'aire sont encore mal maîtrisées (figures 1 et 2). En catégorie 3, les élèves ont plutôt tendance à utiliser des procédures de découpage ou d'association, les seules qu'ils ont à leur disposition à ce moment

du cursus.

En catégorie 6, les connaissances sur les formes et sur les notions de périmètre et d'aire étant mieux structurées et maîtrisées, les élèves utilisent des procédures associées à ces notions qui sont plus appropriées à la résolution du problème.

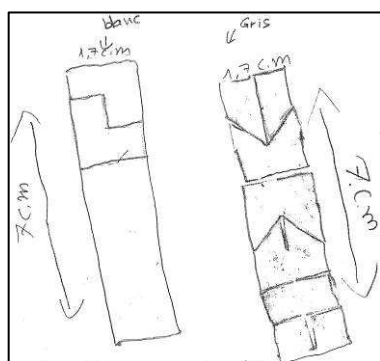


Fig. 3 - Décomposer et recomposer

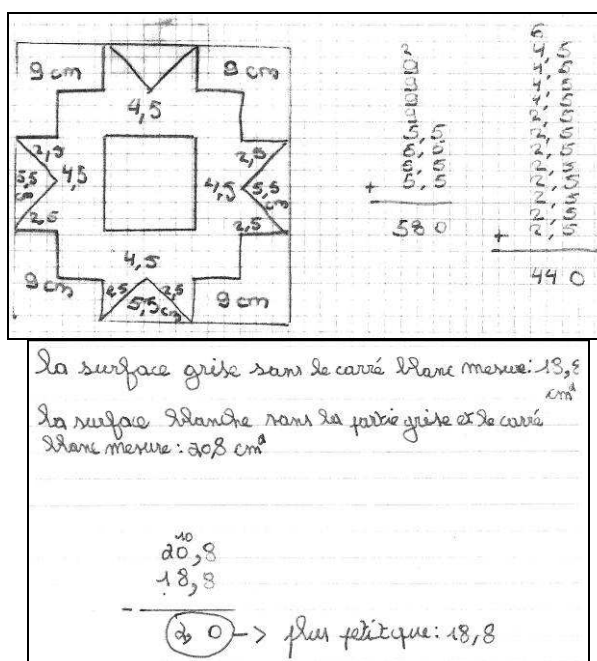


Fig. 1 - Calcul des périmètres

Fig. 2 - Calcul des aires

Enfin, une procédure surprenante (unique sur près de 80 copies) consiste à décomposer la rosace en formes blanches et formes grises, et ensuite à recomposer deux rectangles identiques à l'aide des formes découpées (figure 3).

Notons encore que des erreurs peuvent aussi être expliquées par un obstacle d'ordre ontogénique pour les classes de catégorie 3 notamment. La compréhension de l'association entre la quantité de peinture et la surface à peindre reste problématique pour certains élèves de cet âge (figure 2). Ces élèves associent ainsi un nombre de figures à peindre avec la quantité de peinture, quelle que soit la grandeur de ces figures.

Mais, une autre hypothèse peut aussi être mise en évidence par les étudiants : celle qui consiste à dire que c'est le problème en lui-même qui est plus complexe, que c'est le fait d'avoir introduit les segments délimitant les triangles qui complique la lecture de la figure. De même que ce découpage en triangles induit le comptage de figures non iso-superficielles. À ce jour, nous n'avons pas encore vérifié cette hypothèse.

3.3 Une deuxième série de trois problèmes

Les problèmes précédents ont permis de mettre en évidence la notion d'unité de mesure commune, des procédures différentes pour résoudre des problèmes faisant appel à cette notion (comparaison, correspondance terme à terme, calcul), des erreurs et des obstacles auxquels des élèves des catégories 3 à 6 sont confrontés. La deuxième série de problèmes a pour objet de comprendre en quoi la modification de certaines variables modifie le comportement des élèves. Ainsi, nous proposons trois nouveaux problèmes (voir annexe) faisant également appel à l'unité de mesure commune, mais pour lesquels soit le contexte a été changé (arithmétique) soit des variables ont été modifiées (nombres de figures de base, contexte de la comparaison : géométrie ou arithmétique). Pour cette deuxième série, l'investissement des constats réalisés précédemment permet d'approfondir les savoirs en jeu et d'améliorer la qualité des observations des étudiants.

Deux problèmes peuvent être considérés comme semblables dans la mesure où des procédures semblables peuvent être investies pour les résoudre. Ces problèmes sont « *RMT 2005* » et « *Cartable RMT* ». Des procédures de correspondance terme à terme, de recherche d'unité de mesure commune, de recherche d'éléments communs que l'on peut ne pas prendre en compte, ... peuvent être utilisés par les élèves. Du côté des procédures erronées, des similarités existent également, par exemple compter les éléments sans tenir compte de leur « poids » relatif. Force est cependant de constater que le problème situé dans le contexte numérique est mieux réussi. Différents arguments peuvent être mis en évidence pour expliquer cette différence. Nous en proposons trois.

D'abord, le problème des cartables possède moins d'unités différentes (cahier, livre, farde) que le problème des briques (rectangle, carré, triangle, trapèze). Ensuite, sans doute est-il moins complexe pour les élèves de comparer des nombres plutôt que des figures géométriques. Enfin, dans le problème numérique, les rapports entre les différents éléments sont précisés dans l'énoncé. Cela induit très probablement le comportement des élèves.

Dans le cadre de la formation des étudiants, cette première analyse permet de montrer comment faire varier le contexte d'un problème, mais aussi le domaine mathématique dans lequel il s'inscrit, tout en maintenant des démarches de résolution.

Le travail se poursuit par une comparaison des problèmes « RMT 2005 » et « Les surfaces de Monsieur Minipot ». Ceux-ci présentent des situations géométriques. Pour les résoudre, la détermination d'une unité de mesure commune peut être utile. Mais d'autres procédures peuvent être utilisées. Cependant, si dans « RMT 2005 » la procédure relative à l'unité de mesure commune est induite par le dessin des briques, dans « Les surfaces de Monsieur Minipot », l'unité de mesure doit être construite par l'élève, généralement en prolongeant le quadrillage. À partir de quoi, l'unité de mesure indiquée est le carré. Ce qui n'est pas le cas dans « RMT 2005 »⁷.

Pour « Les surfaces de Monsieur Minipot », les procédures utilisées par les élèves sont les suivantes :

- comptage des carrés unités avec recomposition de carrés unités à partir de l'assemblage de deux triangles et de l'assemblage d'un triangle et d'un trapèze ;
- de même mais avec une procédure d'extension à un rectangle pour la « voile » du bateau, comptage puis division par deux, assemblage de deux triangles pour former un carré (figure 4) ;

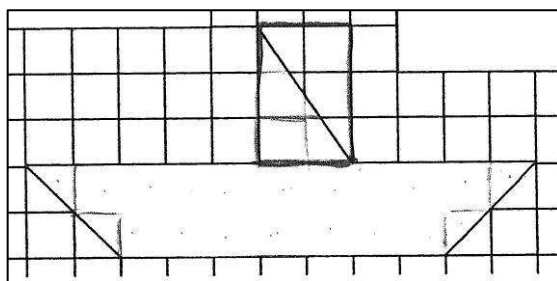


Fig. 4 - Extension à un rectangle

- calcul du périmètre (figure 5).

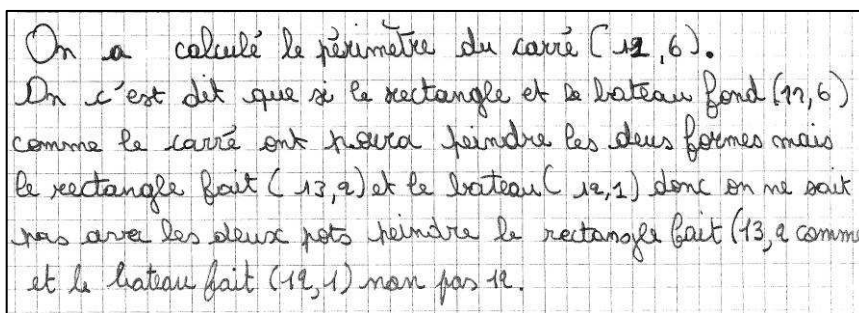


Fig. 5 - Calcul du périmètre

Les procédures d'appariement et de comptage de formes sans tenir compte de leur grandeur ne sont pas apparues dans le problème de « Monsieur Minipot », alors qu'elles représentaient respectivement 45% et 3% des procédures pour le problème « RMT 2005 ».

⁷ Pour plus de détails sur l'analyse de ce problème, nous renvoyons le lecteur vers l'article de Grugnetti L. & Jaquet F., 2005.

Au-delà de l'analyse des procédures, les résultats pour la catégorie 4 (classes belges) semblent indiquer que le problème « RMT 2005 » est moins bien réussi (tableau 2). Cependant, notre échantillon est trop petit pour pouvoir l'affirmer. Par contre, les résultats globalisés pour l'ensemble des sections montrent que ce problème peut être considéré comme difficile. En effet, pour les 300 classes de Suisse, Italie, France, Luxembourg et Belgique, les moyennes se situent entre 0,5 et 1,5 en catégorie 3 et entre 0,9 et 1,7 en catégorie 4, alors que la moyenne globalisée est de 1.9 pour « Monsieur Minipot ».

Points	MINIPOT			RMT 2005	
	Belgique (11 classes)	ARMT (416 classes)		Belgique (22 classes)	
0	5	45%	31.7 %	13	59%
1	2	18%	13.9 %	2	9%
2	1	9%	7.9 %	2	9%
3	0	0%	22.1 %	1	4,5%
4	3	27%	24.3 %	4	18%
Moyenne	1.45		1.9	1.14	

Tab. 2 - « Les surfaces de Monsieur Minipot » et « RMT 2005 ».

4 APPRENDRE À METTRE EN ÉVIDENCE DIFFÉRENTES PROCÉDURES

Ce travail d'analyse comparative permet de montrer l'influence des variables sur les procédures et les résultats des élèves. Il a aussi pour objectif d'apprendre aux étudiants à déterminer et interpréter des procédures utilisées par les élèves.

Le problème « RMT 2005 » nous semble être un bon problème pour atteindre cet objectif avec de futurs enseignants parce que, d'une part, ces procédures sont nombreuses et, d'autre part, elles sont relativement explicites :

- comptage des « pièces » sans tenir de leur grandeur relative,
- comptage des briques entières après recomposition,
- comptage des briques entières uniquement,
- mesure,
- appariement.

Ajoutons que selon les copies, ces procédures sont appliquées soit aux quatre chiffres de 2005, soit uniquement au 2 et au 5 lorsque les élèves ont compris que les 0 ne changeaient pas la réponse puisque pris en charge de la même manière par les deux enfants (figure 6).

Comme les 0 avait le même nombre de briques ont les a supprimer et ont se servir du 2 et du 5.

Fig. 6 - Justification de l'abandon des 0.

Au-delà de la détermination des procédures d'élèves, la compréhension des erreurs et leur mise

en relation avec des obstacles est aussi une activité importante dans la formation des futurs enseignants. Si, dans un premier temps, il est possible de s'appuyer sur les hypothèses des élèves, elles-mêmes énoncées à partir de leurs connaissances, par la suite, pour confirmer certaines hypothèses ou pour compléter celles des étudiants, la référence à un cadre théorique ou à des expérimentations est nécessaire. Un cadre théorique utilisé avec les étudiants est celui établi par une équipe du CREM (2007). Il met en évidence « un fil conducteur relatif aux concepts d'aire et de mesure des aires » constitué de quatre *niveaux* de procédure :

- la perception qualitative de l'aire : comparaisons directe et indirecte d'aires (équidécomposition, équicomplémentarité), rapport entre deux aires ;
- la quantification d'une aire par recouvrement à l'aide d'unités entières ou d'unités entières et de fractions de celle-ci, ou par encadrement ;
- la numérisation de l'aire où la grandeur est remplacée par un nombre ;
- le calcul de la mesure de l'aire à partir de formules s'appuyant sur des longueurs.

Pour les futurs enseignants, en plus de ce fil conducteur, à considérer comme non linéaire, il est essentiel de montrer en quoi la mobilisation conditionnelle de ses composantes est importante. En effet, tout problème relatif à l'aire et à l'unité de mesure commune ne demande pas l'utilisation d'une procédure de calcul à l'aide d'une formule. Celle-ci est par ailleurs parfois plus coûteuse en termes cognitifs qu'une procédure de comparaison simple.

5 PRODUIRE DE NOUVEAUX ÉNONCÉS

Les analyses de problèmes, le retour sur les cadres théoriques et l'observation des procédures investies par les élèves sont autant d'occasions de mettre au point de nouveaux problèmes. Ce travail s'effectue à partir d'hypothèses que les étudiants émettent pour rencontrer une difficulté particulière ou pour vérifier la pertinence ou l'influence d'une variable. Au-delà, c'est la mise au point d'un dispositif d'enseignement de la notion d'aire, associée à celle de périmètre et d'unité de mesure commune qui est questionnée. Par exemple, pour le problème de Monsieur Minipot, plusieurs variantes ont été construites. Nous en présentons quelques-unes ci-dessous.

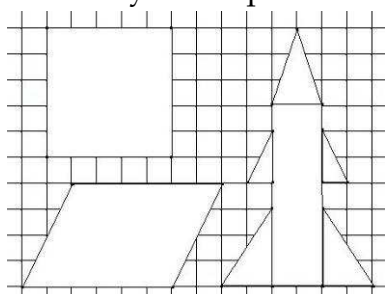


Fig. 7 – Variante 1.

La figure 7 est une variante où les figures (carré, parallélogramme et fusée) à comparer sont composées de formes plus variées que dans le problème initial. La mesure de l'aire de chaque figure ne s'effectue donc plus à partir de carrés et de triangles rectangles isocèles, moitiés de carré. Cependant, comme dans la version initiale, les élèves peuvent mesurer l'aire des trois figures en transformant certaines de leurs parties en rectangle ou en carré, en les décomposant (figure 8), ou en juxtaposant deux (figure 9).

C'est la perception de la décomposition et de la recomposition de carrés unités à partir de formes diverses qui sont en jeu.

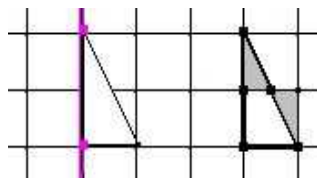


Fig. 8 – Décomposer une forme.

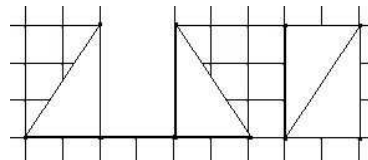


Fig. 9 – Juxtaposer deux formes.

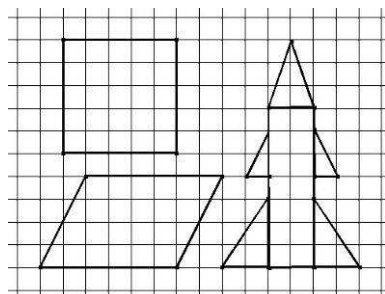


Fig. 10 – Quadrillage

Le problème peut aussi être proposé en montrant le quadrillage (figure 10), faisant apparaître ainsi une des unités de mesure qu'est le carré. Une des hypothèses que l'on peut émettre concernant les procédures investies par les élèves, à l'aune des observations réalisées pour le problème RMT 2005, est que ceux-ci vont plutôt traiter de petites surfaces distinctes plutôt que de juxtaposer des formes comme dans la situation précédente (figure 9). Une des explications est que le quadrillage structure la lecture des figures à partir de petites surfaces isolées et que l'interprétation de la figure, notamment pour la fusée, ne se fait plus à un niveau « globale »

mais plutôt à un niveau que l'on pourrait qualifier d'« atomisé »⁸.

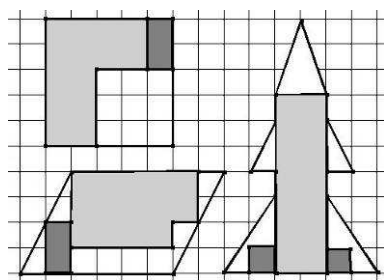


Fig. 12 – Une procédure d'appariement

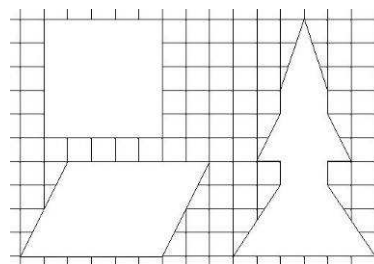


Fig. 11 – La fusée en une seule pièce.

De la même manière, la fusée, plutôt que d'être composée de plusieurs formes, peut apparaître en *une seule pièce* (figure 11). La décomposition de la figure est alors entièrement dévolue aux élèves.

Mais l'énoncé du problème peut aussi être modifié. Ainsi, la notion de proportionnalité, bien que presque implicite dans la version initiale, peut être ôtée du problème : « M. Minipot a peint ces trois surfaces. Il souhaite à présent savoir pour laquelle des trois il a utilisé le plus de peinture ». Ce changement d'énoncé peut ne pas modifier les procédures investies par les élèves. En effet, comme dans « RMT 2005 », il est possible que les élèves mesurent l'aire de chacune des trois figures et ensuite comparent les mesures obtenues.

Par contre, ce changement peut amener les élèves à utiliser d'autres procédures, notamment la correspondance terme à terme. Par exemple, dans un premier temps, les élèves peuvent enlever (ou colorier) dans chaque forme le même nombre de carrés unités (figure 12). Ensuite, poursuivre avec des procédures qui peuvent être mixtes, dont la recombinaison de carrés accompagnée de leur mise en correspondance.

⁸ Nous renvoyons le lecteur intéressé par la problématique de la vision et de la lecture des figures géométriques vers, entre autres, le travail du CREM (2007) et l'article de R. Duval (2005).

Le problème « *Décoration* »⁹ (en annexe) est une autre variante où la notion de proportionnalité apparaît davantage. Comme pour Monsieur Minipot, seules deux unités d'aire sont utilisées (des carrés et des triangles rectangles isocèles). Les procédures relatives à la notion d'aire sont également semblables. D'autres problèmes du RMT proposent également des situations similaires à celle de Monsieur Minipot, tel que « Coupe et découpe »¹⁰ présenté également en annexe.

Ainsi, une autre piste de travail avec de futurs enseignants est de parcourir les différentes épreuves du RMT et de repérer des problèmes qui concernent les notions d'aire, de périmètre et d'unité de mesure commune. Ensuite, de proposer un arrangement de ceux-ci dans le cadre de l'enseignement et de l'apprentissage de ces notions.

6 CONCLUSION

L'utilisation de problèmes du RMT avec des futurs instituteurs permet de rencontrer plusieurs objectifs de leur formation en mathématique, en didactique et en sciences cognitives. Tout d'abord en demandant aux étudiants de résoudre les problèmes, ceux-ci sont confrontés à leurs propres difficultés, notamment au niveau mathématique. Le recours à un cadre théorique mathématique est alors nécessaire et motivé par les difficultés des étudiants.

Ensuite, l'analyse des copies permet aux étudiants de construire une attitude empathique qui consiste à s'intéresser et comprendre ce que l'autre pense, connaît et est capable d'investir. Cette analyse permet aussi d'amener les étudiants à interpréter certaines erreurs en termes d'obstacles à la résolution de problème et au-delà à comprendre des difficultés d'élèves face à l'apprentissage de certaines notions mathématiques. Ce travail d'interprétation nécessite souvent un retour sur des cadres théoriques didactiques et cognitifs.

L'analyse des problèmes permettent également de mettre au point de nouveaux problèmes à partir d'hypothèses que les étudiants émettent pour rencontrer telles difficultés ou pour vérifier la pertinence de telle variable. Ce travail débouche parfois sur la mise au point de dispositifs d'enseignement de telle ou telle notion.

7 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Bisso, C. & Grugnetti, L. [2008]. Il concetto di area in un percorso quinquennale e il ruolo del RMT. *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*. 8. 167-178. Traduction française, 179-182. ARMT.
- Bisso, C. & Grugnetti, L. [2007]. La costruzione a lungo termine del concetto di area. *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*. 7. 199-216. ARMT.
- Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Noël, G. (Dir.). [2007]. *Impact du*

⁹ Voir notamment F. Jaquet (2005), P. Stegen (à paraître) et M. Vernex (2001).

¹⁰ Pour une approche des ces problèmes dans le cadre d'un enseignement de la notion d'aire, nous renvoyons le lecteur, notamment, à l'article de C. Bisso et L. Grugnetti (2008), le concept d'aire avec les problèmes du RMT : un parcours de 5 ans.

logiciel *Apprenti Géomètre* sur certains apprentissages. Nivelles : CREM.

- Duval, R. [2005]. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.

- Grugnetti L. & Jaquet F. [2005]. D'un concours de mathématiques par classes à la formation des maîtres, *Actes de la COPIRELEM*.

- Jaquet, F. [2005]. Successioni proporzionali e variabili didattiche. *L'Educazione matematica*. 3.

- Skilbecq, Ph. [2006]. Un problème de géométrie ! *Livret RMT*. 2. 48-63. Section belge du RMT : Nivelles.

- Stegen, P. [À paraître]. Exploitation d'un problème du RMT : Décoration. *Livret RMT*. 5,6. Section belge du RMT : Nivelles.

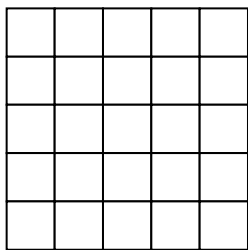
- Vernex, M. [2001]. Analyse et utilisation du problème Décoration du 9e RMT. *Math-Ecole*. 198. 4-18.

8 ANNEXES

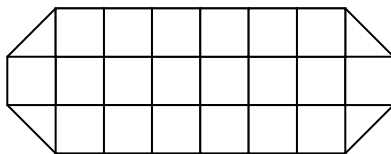
LES TABLES DE TANTE MARIE (Cat. 3, 4 ; problème 4 ; 16^e RMT, épreuve 2)

Tante Marie a deux vieilles tables de jardin dessinées ici,

une table carrée :



et une table allongée :



Elle décide de recouvrir ses tables avec des pièces de papier plastifié adhésif de deux sortes :

- des pièces carrées, rouges, de la même grandeur que les carrés des tables :



- des pièces triangulaires, vertes, qui sont des moitiés de carré :



Son travail fini, tante Marie remarque que les deux tables sont entièrement recouvertes et que les pièces sont placées correctement les unes à côté des autres, sans se chevaucher.

Elle remarque aussi qu'elle a utilisé 34 pièces pour chacune des deux tables, soit 68 pièces en tout.

Combien de carrés rouges et de triangles verts tante Marie a-t-elle utilisés pour recouvrir la table carrée ? Et la table allongée ?

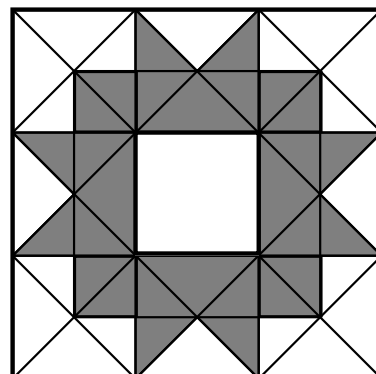
Expliquer comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

LA ROSACE DE JULIE (I) (Cat. 3, 4 ; problème 4 ; 15^e RMT, épreuve 2)

Julie veut repeindre le cadre de ce miroir en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de peinture blanche ou plus de peinture grise. Bien sûr, le miroir (le carré au centre) ne doit pas être repeint et la couche de peinture aura partout la même épaisseur.

Devra-t-elle utiliser plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris ... ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

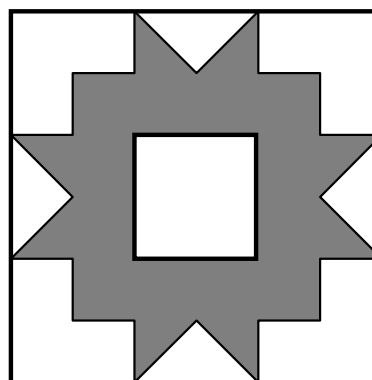


LA ROSACE DE JULIE (II) (Cat. 5, 6 ; problème 7 ; 15^e RMT, épreuve 2)

Julie veut repeindre le cadre de ce miroir en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de peinture blanche ou plus de peinture grise. Bien sûr, le miroir (le carré au centre) ne doit pas être repeint et la couche de peinture aura partout la même épaisseur.

Devra-t-elle utiliser plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris ... ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



LES SURFACES DE M. MINIPOT (Cat. 4, 5 ; problème 6 ; 16^e édition, épreuve 2)

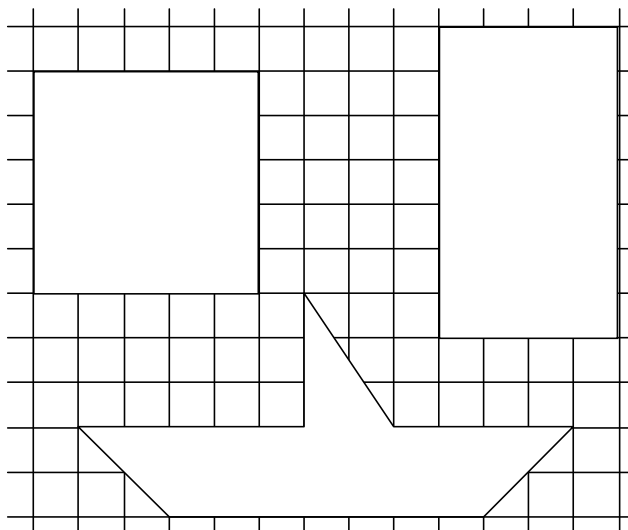
M. Minipot veut peindre les surfaces dessinées ci-contre en mettant toujours la même épaisseur de peinture.

Il possède trois pots de peinture identiques.

Il en utilise un, complètement, pour peindre la surface carrée.

Avec les deux pots qui restent, et en mettant la même épaisseur de peinture partout, pourra-t-il peindre entièrement les deux autres surfaces ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.



CARTABLE RMT (Cat. 4, 5, 6 ; problème 7 ; 16^e RMT, épreuve 2)

Philippe et Pierre ont acheté le même cartable de la marque RMT. Dans son cartable Philippe a mis 2 classeurs, 6 cahiers et 3 livres de classe. Pierre a déposé dans son cartable, 1 classeur, 8 cahiers et 2 livres.

Pierre et Philippe savent que le poids d'un classeur est égal au poids de 4 cahiers mais est aussi égal au poids de 2 livres.

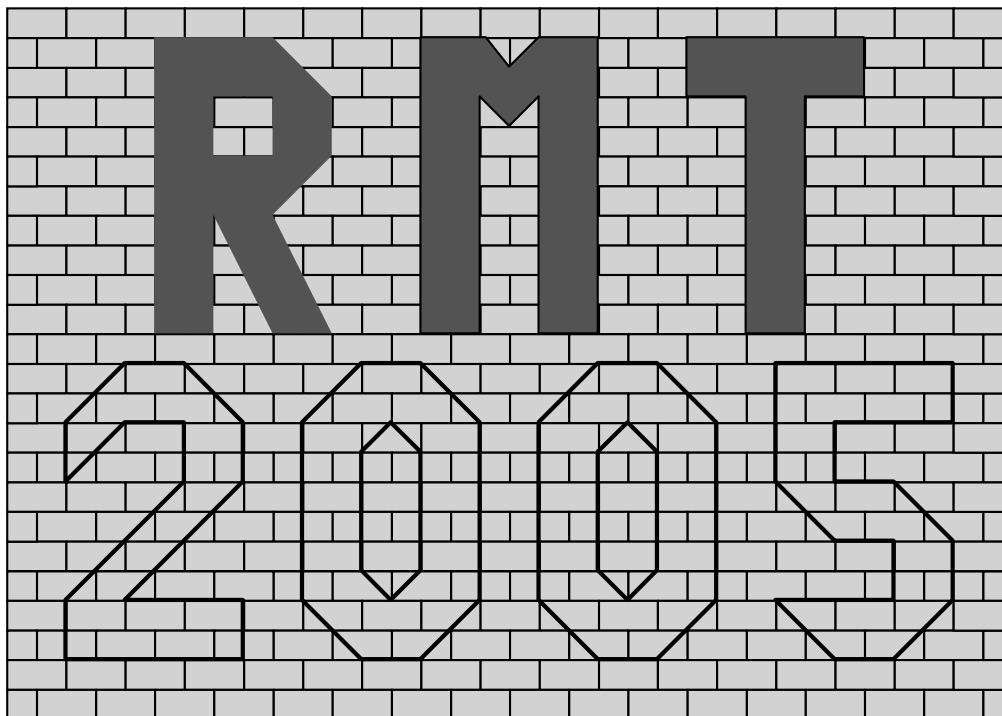
Qui a le cartable le plus lourd ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

**RMT 2005 (Cat. 3, 4 ; problème 2, 13^e RMT, épreuve 1)**

Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005.

Sophie va peindre, le « 2 » et le premier « 0 ». Marc peindra l'autre « 0 » et le « 5 ».

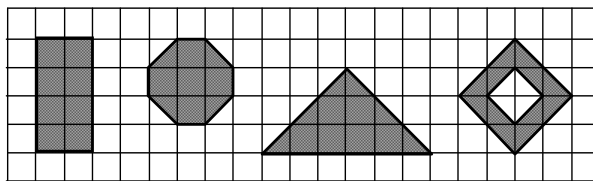


Qui utilisera le plus de peinture ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

DÉCORATION (Cat. 5, 6, 7 ; problème 9 ; 9^e RMT ; épreuve 2)

Un peintre a peint ces quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur :

- 18 pots de rouge pour une des figures
- 21 pots de bleu pour une autre figure,
- 27 pots de jaune pour une autre figure
- des pots de noir pour la figure qui reste.

A la fin de son travail, tous les pots étaient vides.

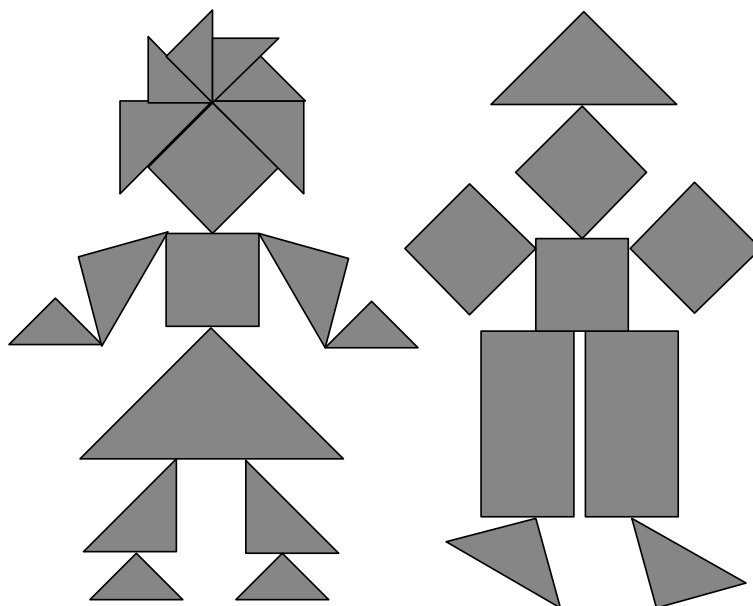
Indiquez la couleur de chaque figure.

Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

10. COUPE ET DÉCOUPE (Cat. 5, 6 ; PROBLÈME 10 ; 15 RMT ; épreuve 2)

En collant des pièces qu'il avait découpées dans du carton, Aldo a fait un tableau qui représente deux personnages : une fillette à gauche et un garçon à droite.



Selon vous, pour faire son tableau, Aldo a-t-il utilisé plus de carton pour la fillette ou pour le garçon ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Pour préparer les pièces de son tableau, Aldo a utilisé plusieurs feuilles de carton, carrées et de même grandeur.

Il les a pliées une, deux ou trois fois, puis découpées en suivant certains des plis obtenus.

Cette figure montre une feuille carrée de carton et les différents pliages qu'Aldo a pu effectuer :

