Atelier B1

PLACE DES REPRODUCTIONS ET DES CONSTRUCTUCTIONS DANS LES APPRENTISSAGES GÉOMETRIQUES

Annie NOIRFALISE
IREM de Clermont Ferrand
annie.noirfalise@free.fr

Yves MATHERON
UMR-P3- ADEF, INRP, Aix-Marseille Université
yves.matheron@inrp.fr

Résumé
L'atelier s'attache à faire analyser des pratiques géométriques de l'école primaire en utilisant la notion d'organisation praxéologique (tâche, technique, technologie, théorie) issue de la théorie anthropologique du didactique (élaborée par Yves Chevallard).
Après une analyse collective d'exemples, des activités de reproduction de figures, de construction et de reconnaissance de figures sont proposées aux participants. Pour chaque activité, il est demandé de mettre en évidence les techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre pour accomplir la tâche demandée, d'identifier les éléments technologiques et théoriques qui justifient ces techniques et de repérer les implicites utilisés.
Seul le travail des participants sur les deux premières activités de reproduction de figures donne lieu à un compte-rendu.
Pour les activités de construction et de reconnaissance de figures, les auteurs fournissent leurs propres commentaires. Les énoncés des activités soumises aux participants sont fournis.

1 APPORTS PRÉALABLES

1.1 Espace sensible / espace géométrique

Dans une première approche nous avons distingué :

- d'une part l'**espace sensible**, espace contenant des objets qui nous sont accessibles par le biais des sens (vue, toucher, odorat, etc.) et grâce à notre motricité,
- d'autre part l'**espace géométrique**, résultat d'un effort de théorisation et qui rend raison de l'espace sensible,

« […] la géométrie part du monde sensible pour le constituer en monde géométrique, celui des points, des droites, des cercles, des sphères, des courbes, des surfaces et des volumes, etc., de la même façon que, plus largement, la physique part du monde sensible pour le constituer en en monde physique ». « La physique en effet décrit un univers où il est question de “ masses ”, de “ forces ”, de “ quantités de mouvement ”, etc. : toutes choses étrangères à la perception non physicienne de l'espace sensible ». (Chevallard et Jullien, 1991, p. 52)

Dans le monde sensible, pour accomplir des tâches, on recourt à des techniques visuelles, tactiles, olfactives, motrices. Dans le monde géométrique, les tâches relèvent de la manipulation d'énoncés suivant les techniques de la démonstration à l'intérieur d'une théorie.

L'espace géométrique, comme l'espace physique, est un monde construit par les hommes à partir de l'espace sensible, ayant sa propre cohérence interne, et permettant de ***produire des***

connaissances sur l'espace sensible : pas plus que la masse, le point n'appartient à l'espace sensible.
L'existence d'un espace géométrique est avant tout le fruit d'un travail de ***modélisation mathématique de l'espace sensible,*** c'est aussi par un travail de modélisation que l'on produit des connaissances sur l'espace sensible dans l'espace géométrique.

La distinction faite précédemment entre l'espace sensible et l'espace géométrique doit être affinée pour analyser les activités participant à la construction de savoirs géométriques. En effet, même si les objets sur lesquels on s'interroge sont matériels, les techniques que l'on utilise peuvent être partiellement géométriques.
M.-H. Salin et R. Berthelot (Berthelot et Salin 1992) distinguent trois types de techniques : celles relevant des « problématiques géométrique, pratique, et de modélisation ». Toutefois les choses nous paraissent plus complexes et comme dans tout travail de modélisation au service de l'étude d'une question dans un champ donné, un va et vient entre ce champ et la théorie fera partie intégrante de l'étude. Nous souhaitions, à travers des exemples, attirer l'attention des participants sur cette complexité. De plus si actuellement, à l'école primaire, l'étude de l'espace géométrique doit passer par l'interaction avec l'espace sensible[1], celle-ci n'implique pas nécessairement la mobilisation, et encore moins l'acquisition de connaissances de type géométrique.
Au cours de cet atelier, à travers l'analyse de différentes activités, la proposition a été faite aux participants de réfléchir aux rencontres géométriques que les élèves peuvent faire à l'occasion de ces activités.

1.2 Cadre théorique pour l'analyse des activités

Les participants à l'atelier ont été invités à analyser les activités proposées à l'aide des outils fournis par la théorie anthropologique du didactique[2]. Pour les lecteurs non familiers de l'usage de cette théorie, précisons que dans cet atelier, nous n'avons utilisé qu'un nombre très restreint des éléments théoriques qui la constituent. En début d'atelier un rappel rapide a été fait sur la définition d'une organisation praxéologique ponctuelle en termes de type de tâches, technique, technologie et théorie.

2 DESCRIPTION DE L'ATELIER

2.1 Travail prévu a priori

Nous avions prévu de faire travailler les participants à l'analyse d'activités de reproduction, de reconnaissance et de construction de figures. De façon plus ou moins approfondie, ce contrat a été rempli.
Nous souhaitions aussi leur proposer de réfléchir et débattre sur « le soin des reproductions géométriques ». En effet nous pensions attirer l'attention des participants sur la ou les fonctionnalités de la qualité d'exécution d'un dessin. Dans le mouvement de « va et vient entre l'espace sensible et l'espace

---

1 « *L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.* », B. O. n° 3 du 19 juin 2008, page 23.

2 Nous nous référons à la théorie didactique développée par Yves Chevallard et les didacticiens qui se réclament de cette approche. On pourra se reporter à la bibliographie de référence (Chevallard Y. (1998 & 1999), Matheron Y., Noirfalise R. & Combelles C. (2006), Noirfalise A. & Matheron Y. (2009)). On trouvera une présentation succincte des éléments théoriques nécessaires à la compréhension de notre contribution dans l'introduction d'un article des mêmes auteurs, intitulé « *Gérer la résolution des problèmes, non pas seulement pour chercher, mais aussi et avant tout… pour apprendre des mathématiques* », publié dans la revue Grand N n° 82, ou dans leur communication au XXXV[e] colloque de la COPIRELEM, Bordeaux-Bombannes, juin 2008.

géométrique », que nous avons évoqué plus haut et que nous exemplifierons plus loin, le dessin géométrique doit être clairement porteur des informations utiles à l'étude que l'on mène, dans le cadre où on la mène. Les conventions de représentation et de lecture dépendent des institutions dans lesquelles on travaille : par exemple, elles ne sont pas les mêmes en dessin d'architecture, en dessin industriel, en géométrie descriptive, ...
Nous avons manqué de temps pour aborder ce dernier point durant l'atelier.

2.2 Activités de reproduction de figures

2.2.1 Deux exemples, traités collectivement pour percevoir la complexité

Ces activités ont été traitées sous forme d'échanges avec les participants à l'atelier.

✓ **Premier exemple :**
Considérons une figure représentant sur une feuille de papier une pyramide en plastique, de forme un tétraèdre ; cette figure, comme la pyramide elle-même, est un objet matériel. Néanmoins pour passer de l'un à l'autre, on ne reste pas dans le monde sensible. La représentation graphique de la construction dans le système scolaire suppose déjà la modélisation de certains éléments constituant la pyramide : les sommets et les arêtes par exemple, sont modélisés par des points et des segments. La modélisation à laquelle on se livre crée de nouveaux objets liés entre eux par des propriétés géométriques qui, à leur tour, vont guider le tracé et lui donner du sens. Une analyse géométrique de « l'objet matériel pyramide » et un travail dans le monde géométrique sont indispensables pour construire un autre objet matériel, « une pyramide géométrique » ; c'est-à-dire quatre points non coplanaires de l'espace, dans le cas où cette pyramide est un tétraèdre. La figure que l'on a sous les yeux en est une représentation graphique. Ce dernier objet matériel porte la trace de sa construction en tant que représentation du modèle géométrique de l'objet de l'espace sensible qu'il modélise. Ainsi, si la pyramide est un petit jouet en plastique mou, que ses faces sont de ce fait légèrement déformées, la figure ne saurait les représenter puisqu'elle représente non l'objet de l'espace sensible mais l'objet géométrique pour lequel les faces sont nécessairement planes. De même, si les arêtes du jouet possèdent une légère « épaisseur », celle-ci ne peut exister en tant que telle dans la figure, puisqu'elle représente l'objet géométrique dont les arêtes sont des segments ; donc qui sont sans « épaisseur ».

✓ **Deuxième exemple :**
Supposons que l'on veuille remplacer des vitres dont l'encadrement donne à voir des trous du type suivant :

Pour passer commande au vitrier, qui ne se déplace pas, on peut utiliser une des deux techniques, suivantes, parmi d'autres :
- Première technique τ_1 : on peut, en appliquant un papier calque sur chaque hublot, tracer des patrons de chaque vitre, les découper et les apporter au vitrier. La motricité, le contrôle des gestes par la vue, voire le toucher, sont sollicités pour mettre en œuvre au mieux cette technique.
- Deuxième technique τ_2 : on peut « analyser les propriétés de chaque trou ». Faire l'hypothèse que le premier est un losange, le vérifier en mesurant les quatre côtés, puis se tenir le « discours » suivant : « je sais, en géométrie, que deux losanges ayant leur côtés égaux ne sont pas nécessairement

superposables (en géométrie on dirait isométriques), mais que deux losanges ayant par exemple leurs côtés égaux et une diagonale égale sont superposables, je vais donc mesurer la longueur du côté et la distance entre deux sommets opposés du hublot et les communiquer au vitrier. » Pour le second trou, on peut faire l'hypothèse à la vue que c'est un cercle. Mais pour donner des informations numériques au vitrier, il faudra utiliser un petit travail de modélisation afin de déterminer le centre et le diamètre : tracer deux cordes non parallèles et les médiatrices de celles-ci.

En première approche, la première technique ne relève que du monde sensible et aucune incursion n'est faite dans le monde géométrique. La seconde technique implique un va-et-vient entre le monde sensible et le monde géométrique. Dans un premier temps nous pouvons décrire la technique de la façon suivante :

Monde sensible	***Modélisation***	***Monde géométrique***
Le ***hublot*** est observé		
	L'hypothèse est faite que c'est un ***losange***	
		Etude des conditions suffisantes pour que deux losanges soient ***isométriques***
On mesure un côté du hublot et la distance entre deux sommets opposés, afin que le vitrier fasse un objet exactement ***superposable*** au trou.		

Cet exemple montre, de façon modeste, comment le monde géométrique permet « ***de produire des connaissances pour agir dans l'espace sensible*** **».**
Ces connaissances permettent ***de penser, d'élaborer et de décrire la technique*** τ_2 pour accomplir la ***tâche*** évoquée précédemment.
Si on modélise cette activité : « passer commande au vitrier » dans le cadre de la ***théorie anthropologique du didactique***[3], c'est donc au niveau ***technologique*** que les connaissances géométriques sont sollicitées.

Toutefois les éléments technologiques associés aux techniques τ_1 et τ_2 évoquées précédemment peuvent être de nature très différente:

---

[3] Pour une présentation de la notion d'organisation praxéologique on pourra se référer à un des textes suivants :
CHEVALLARD Y. (1999).
CHEVALLARD Y. (1998).
MATHERON Y., NOIRFALISE R. & COMBELLES C. (2006), pp 30-47.
MATHERON Y. et NOIRFALISE A. (2008) pp. 91-113.
NOIRFALISE A. et MATHERON Y. (sept. 2009).

- En ce qui concerne la première technique, τ_1, la conservation de la forme du patron dans le transport, élément fondamental pour justifier la pertinence de la technique, est rarement verbalisée à l'école primaire, on fait comme si « ça allait de soi ». Or, bien sûr, c'est un élément technologique qui relève de l'expérience sensible, perceptive, et qui devient « invisible » car naturalisé par son usage quotidien : on a, en tant qu'adultes et à de nombreuses reprises, pu constater expérimentalement cette conservation… « par isométrie », dirions-nous en mathématiques. Toute personne qui la nierait devrait s'affronter à la désapprobation des autres, majoritaires. Est-elle si naturelle pour des élèves ?

- En ce qui concerne la seconde technique, τ_2, la description précédente fait apparaître deux phases.
La première est repérée par la phrase : « l'hypothèse est faite que c'est un losange ». Cette reconnaissance est-elle due à une grande familiarité avec cette configuration, permettant de la reconnaître, de façon perceptive, « au premier regard », ou cette phase suppose-t-elle un vrai raisonnement hypothético-déductif, du type « si ce trou a la forme d'un losange alors les côtés sont de même mesure, je vérifie s'il en est ainsi pour pouvoir poursuivre » ? Autrement dit, un raisonnement par analyse, ou condition nécessaire (« si c'est un losange, alors nécessairement il possède telle propriété… vérifions si c'est le cas »), qui s'appuie sur l'expérience : celle que l'on a des losanges, celle qu'on peut mener sur celui-ci.
La deuxième phase est repérée par la phrase : « étude des conditions suffisantes pour que deux losanges soient ***isométriques*** » ou synthèse (« pour que ce soit un losange, il suffit que… ; vérifions si c'est bien le cas ») qui s'appuie elle aussi sur les mêmes types d'expériences. Cette assertion suppose que l'on ait à sa disposition de telles conditions ou que l'on soit en mesure de les élaborer : par exemple par les techniques du monde géométrique ou des techniques expérimentales. Suivant le cadre de travail, c'est-à-dire l'institution dans laquelle on se situe, effectivement ou en pensée, la nature des justifications de la manière de faire ne sera pas la même[4].
S'il s'agit d'un hublot de forme rectangulaire, à l'école primaire par exemple, on peut penser que la familiarité avec cette configuration est suffisamment grande pour que la reconnaissance se fasse de façon perceptive, sans être interrogée. On donnera sans doute au vitrier la longueur et la largeur de ce rectangle mesurées sur le trou, sans se poser la question de savoir si c'est suffisant pour qu'il puisse produire une vitre exactement superposable au trou ; un travail dans le monde géométrique permettrait de trancher en la matière, lequel n'est pas possible à l'école élémentaire ; l'artisan, d'expérience dans ses pratiques professionnelles, saura que ces informations lui suffisent pour produire exactement ce qu'il faut. Ne serait-il pas souhaitable d'attirer l'attention des élèves sur le fait que ces informations seraient insuffisantes dans le cas d'un parallélogramme non rectangle ?

2.2.2 Une série de quatre activités étudiées par les participants

Organisation du travail

Les participants ont été invités à analyser des activités de reproduction de figures dont on trouvera la description ci-dessous. Le travail a été mené en groupes de deux à quatre personnes, à partir de la consigne suivante :
« Pour chaque activité de reproduction de figures :
- décrire l'organisation praxéologique correspondante, *essentiellement imaginer des techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre pour accomplir la tâche demandée et les éléments technologiques et théoriques rendant celles-ci intelligibles et permettant de les justifier*
- préciser les propriétés que l'on rend visibles, les manières de faire que l'on considère comme allant de soi, et échappant à une justification géométrique.
- de façon incidente, s'interroger sur ce qui justifie ces choix »

[4] « *Comme tous les autres éléments constitutifs des praxéologies, les technologies migrent dans l'espace social par* transposition *d'institution à institution : toute technologie, toute technique ou toute théorie a donc pour premier mérite d'exister en un cadre institutionnel donné* », citation extraite de Y. Chevallard (2002), page 5.

On trouvera en annexe 4. 1, une reproduction du support de travail utilisé. Il s'agit de la page 121 de l'ouvrage « J'apprends les maths avec Picbille », CP, édition Retz, 2002, reprise dans « J'apprends les maths avec Tchou », même éditeur, 2008, pages 132 et 133.
A partir de ce même support on envisage quatre situations différentes :

1re situation : on donne aux élèves la planche page 121 partie supérieure, du papier calque à la dimension du cadre où sont tracées les trois fusées, une feuille avec, déjà tracé, un cadre analogue, et on leur demande de reproduire le dessin dans le cadre.

2e situation : on donne aux élèves la planche page 121 partie supérieure, le formographe, une feuille avec déjà tracé un cadre analogue à celui qui entoure les trois fusées, on leur demande de reproduire le dessin dans le cadre. Le formographe est un matériel livré avec le livret élève de la collection. Il s'agit d'un rectangle de plastique semi-rigide dans lequel des formes géométriques sont évidées, dont celles qui constituent les éléments des trois fusées en dimensions réelles.

3e situation : on donne aux élèves la planche page 121 partie supérieure, une feuille de papier quadrillé, une règle graduée, on leur demande de reproduire le dessin.

4e situation : on donne aux élèves la planche page 121 partie supérieure, une feuille blanche, une règle non graduée, un compas et un gabarit d'angle droit, on leur demande de reproduire le dessin.

Echanges avec les participants
Dans le temps imparti à l'atelier, seul le travail accompli sur les deux premières activités a pu être restitué au groupe. On trouvera en annexe une description sommaire de techniques et d'éléments technologiques correspondant aux quatre activités proposées.
Au cours de cette restitution, de nombreuses questions ont émergé, que les notes prises par les rapporteurs[5] nous permettent d'évoquer ci-dessous.
A propos de la première activité, les techniques envisagées par les différents groupes diffèrent peu de celle décrite en annexe. Les participants voient dans cette activité un entraînement à une activité motrice de précision, contrôlée par la vision, demandant une attention soutenue importante, compte tenu du nombre de figures à reproduire. Le problème de la validation a été posé : comment l'élève ou le maître sait-il que la tâche est accomplie correctement ? On peut envisager un modèle sur une feuille transparente pour comparer. Mais alors quelles différences va-t-on prendre en compte ? Ceci soulève, d'une part, le problème de la signification des expressions telles que « ***tracer avec soin et précision*** »[6], que l'on trouve dans le programme de 2008 : par exemple, dans le cas de cette activité qui n'est pas finalisée au sein de laquelle rien, en dehors de ce que décide le maître, ne justifie que telle ou telle différence avec le modèle, invalide la façon dont la tâche a été accomplie. Par ailleurs, le repérage des différences renvoie au repérage des différents représentants que l'on utilise en géométrie comme signe des objets du monde géométrique intervenant au niveau théorique[7] : par exemple, dans le dessin à reproduire, une partie de la figure est visuellement perçue rectiligne entre les deux sommets d'un triangle (ou deux points tracés sur la feuille distribuée aux élèves), et à ce titre il représente un segment (objet géométrique), d'extrémités les deux sommets d'un triangle (objet géométrique) ; un tracé non « intentionnellement rectiligne », ne coïncidant par exemple pas avec le bord d'une règle, ne peut être admis comme représentant le même objet géométrique que celui que l'on veut reproduire. Sans expliciter le va-et-vient que nous venons d'évoquer entre le monde sensible et le monde théorique, tout en restant dans un monde empirique, la verbalisation des raisons de l'adéquation ou de la non adéquation d'un tracé est l'occasion de mettre en évidence des outils et des pratiques attachés à un objet

---

[5] Que Bruno Canivenc et Christine Niel soient ici remerciés pour les notes très claires, prises en cours d'atelier, qu'ils ont bien voulu nous laisser.
[6] B. O. hors série n° 3 du 19 juin 2008, page 20.
[7] Nous revenons sur ce point dans le paragraphe suivant, en italique.

géométrique qui, lui, n'est jamais rencontré. C'est un des points que nous souhaitions soumettre au débat dans cet atelier.

Pour préciser ce qui précède, pour faire des mathématiques on utilise des outils : des instruments règles, équerres, etc.), des signes (écritures, tracés, dessins, figures, tableaux, graphiques, etc.). Chacun de ces objets matériels est considéré comme un représentant d'un objet de la théorie qu'il est réputé représenter : C (O, r) représente un cercle, de même qu'un graphisme du type : O. Ces outils sont porteurs de certaines informations pouvant être établies dans la théorie et/ou perçues expérimentalement : par exemple l'écriture (AB) renvoie au fait expérimental, maintes fois constaté par les élèves à l'aide d'une règle, que deux points distincts définissent une droite et une seule ; résultat qu'on prend généralement comme axiome pour des pratiques relevant de la géométrie (théorique) affine euclidienne. La certitude de ce résultat expérimental permet de nommer sans ambiguïté la droite. Dans le cas du trait tracé à la règle et au crayon, il s'agit de pratiques consistant à définir une droite à partir d'un point en lequel on pose la règle et d'une direction, celle prise par la règle.
Les résultats démontrés dans la théorie d'une part, perçus en expérimentant avec les représentants d'autre part, s'enrichissent mutuellement : le cercle, C (O, r), par exemple, peut être perçu comme trace laissée sur la feuille par le crayon situé à une extrémité des branches d'un compas écartées de la distance r, l'autre extrémité étant en O, ou dans la théorie comme lieu des points du plan distant de r d'un point donné O ; l'expérience renseigne par exemple sur ce qui se passe pour les points communs à deux cercles $C(O, r)$ et $C(O', r')$ si $OO' < r + r'$, ce que l'on cherchera à démontrer dans la théorie, et/ou inversement ce que l'on peut obtenir sur le papier connaissant le résultat théorique.
On peut faire l'hypothèse que le travail dans les différents systèmes matériels évoqués précédemment, et la familiarisation avec ce que véhiculent les signes utilisés pour désigner des objets géométriques représentés – C (O, r) ou (AB) pour ne citer que les deux exemples utilisés dans ce texte –, encore absents à l'école primaire, participent à l'entrée des élèves, au Collège, dans un nouveau contrat : pratique démonstrative à l'aide d'énoncés de propriétés admises comme légitimes[8].

2.3 Activité de reconnaissance et activité de construction de figures

2.3.1 Travail prévu

Nous avions prévu de poursuivre le travail de l'atelier par l'analyse d'une situation de construction d'une figure géométrique puis par l'analyse d'une situation de reconnaissance d'une figure géométrique. Compte tenu de la richesse des échanges précédemment évoqués, et faute de temps, nous n'avons pas abordé cette partie avec les participants. On trouvera en annexe les supports à partir desquels l'analyse devait être proposée, et une description sommaire de techniques et d'éléments technologiques correspondant aux deux activités envisagées a priori. Cette description nous semble utile pour comprendre les commentaires qui suivent. Les consignes de travail prévues étaient les mêmes que celles de l'activité décrite ci-dessus.

A partir de ces deux activités nous souhaitions engager une réflexion sur plusieurs points.

2.3.2 A propos de l'activité de construction

Des propriétés géométriques de la figure à construire doivent nécessairement être utilisées pour élaborer une technique de construction ; quelquefois même, il est nécessaire de verbaliser pour justifier la technique de construction utilisée. Celles que l'on doit considérer comme acquises dans le matériau initialement proposé doivent être lues sur la figure sans qu'aucun codage ou texte ne les mentionne : par exemple que M est le milieu de [AB], que $AQOM$ est un rectangle, que O est le milieu de [BD] et Q le milieu de [AD]…,

---

8 Pour approfondir le rôle du travail dans un dispositif dont le support est matériel pour un travail ultérieur dans un dispositif dont le support est langagier, on pourra se référer à Noirfalise R. (1993), Contribution à l'étude didactique de la démonstration, *Recherche en didactique des mathématiques,* Vol 13/3, pp. 229-256.

Afin d'élaborer une technique de construction, il sera nécessaire de prendre en compte, au préalable, certaines des propriétés géométriques que la figure à obtenir devra nécessairement vérifier, en les choisissant de façon à permettre une construction avec les instruments de dessin imposés. Une question importante surgit alors : quelle visibilité donne-t-on à cette ***phase d'analyse*** ? Peut-on imaginer que cette étude soit conduite à partir d'une figure du rectangle à obtenir faite à main levée, intégrant les éléments donnés au départ et leurs propriétés ?
Une autre question, tout aussi importante, en résulte : comment s'assurer que la figure obtenue soit effectivement la représentation d'un rectangle, (***phase de synthèse***), puisqu'à ce niveau les élèves n'ont pas à leur disposition de ***propriétés caractéristiques*** ?

2.3.3 A propos de l'activité de reconnaissance de figures

A ce niveau, si on lui demande comment il reconnaît qu'une figure est ou n'est pas un rectangle, l'élève sait qu'il ne peut pas répondre « parce que ça se voit », et qu'il devra faire appel aux propriétés géométriques du rectangle. La question se pose alors de savoir quel ensemble de propriétés doivent être vérifiées (respectivement infirmées) pour être sûr que la figure est (respectivement n'est pas) un rectangle. Dans les réponses de l'élève A on perçoit la mobilisation de quelques propriétés largement insuffisantes, (côtés parallèles ou une certaine « régularité ») pour justifier sa réponse. Les réponses de l'élève C montrent l'efficacité de la définition du rectangle : « quadrilatère ayant quatre angles droits », pour justifier que les figures A et C ne sont pas des rectangles. Pour la figure B on note la redondance des propriétés choisies pour justifier que c'est un rectangle ; mais quel ensemble de propriétés parmi toutes celles que l'on connaît, à ce niveau, suffit-il de mobiliser pour justifier que c'est un rectangle ?
Les réponses données par les élèves témoignent de leur manque d'aisance dans la description géométrique des figures proposées, ce qui conduit à se demander comment redonner au vocabulaire attendu sa fonctionnalité.

3 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERTHELOT R. et SALIN M. H., (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.

BERTHELOT R. et SALIN M. H. (2001) : Le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive. Analyse critique de démarches préconisées actuellement dans les instructions officielles et dans les manuels. Quelques propositions alternatives à étudier, in *Quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental*, Actes du colloque inter-IREM 1er cycle juin 2001, éditeur IREM de Montpellier.

CHEVALLARD Y. (1999) : L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 19, n° 2, pp. 221-266.

CHEVALLARD Y. (1998) : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, in Actes de l'Université d'été de La Rochelle, pp. 89- 118, édition coordonnée par Noirfalise R., Aubière : Edition IREM de Clermont Ferrand.

CHEVALLARD Y., JULLIEN M., (1991), *Autour de l'enseignement de la géométrie au collège*, Petit *x* n° 27.

MATHERON Y., NOIRFALISE R. & COMBELLES C. (2006), Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques : quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique, *Petit x n° 70*, Université Joseph Fourier et IREM de Grenoble.

NOIRFALISE A. et MATHERON Y. (2009) : *Enseigner les mathématiques à l'école primaire, Les quatre opérations sur les nombres entiers* (tome 1) et *Géométrie, grandeurs et mesures*, (tome 2), Paris, Vuibert.

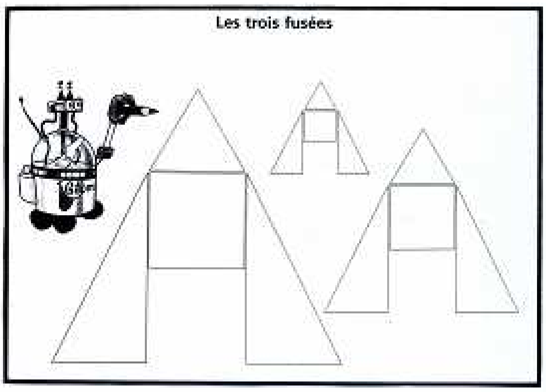
NOIRFALISE R. (1993) : Contribution à l'étude didactique de la démonstration, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 13 n°3, édition La Pensée Sauvage.

4 ANNEXES

4.1 Supports utilisés

4.1.1 Pour les quatre activités de reproduction de figures

Il s'agit de la page 121 de l'ouvrage « J'apprends les maths avec Picbille », CP, édition Retz, 2002, reprise dans « J'apprends les maths avec Tchou », même éditeur, 2008, pages 132 et 133.

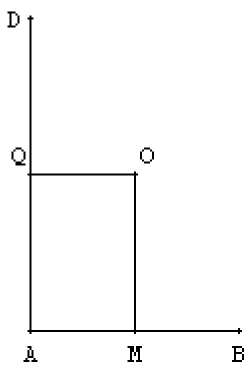


4.1.2 Pour l'activité de construction de figure

Cette situation est extraite de « Travaux Géométriques. Apprendre par la résolution de problèmes, cycle 3 », (CRDP du Nord Pas de Calais, 2000).
Il s'agit de compléter une figure pour obtenir un rectangle *ABCD* de centre *O* (on considère implicitement que *M* est le milieu de [*AB*] et que *AQOM* est un rectangle).
Une des deux mises en œuvre réalisées en CM2 est la suivante :

Consigne :

Complète la figure ci-dessous pour obtenir un ***rectangle*** de centre *O*.
Tu ne peux utiliser que la règle non graduée et le compas

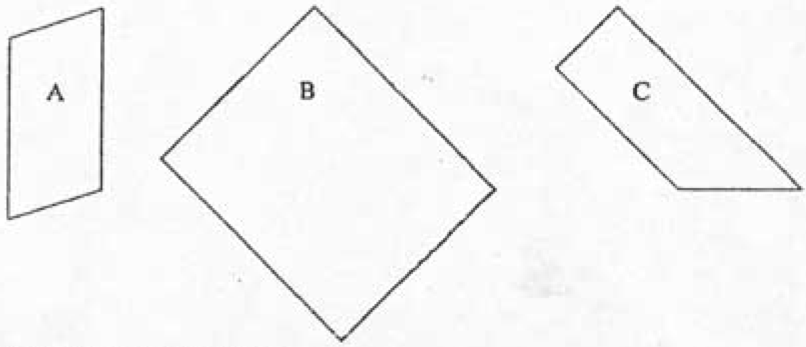


4.1.3 Pour l'activité de reconnaissance de figures géométriques

Il s'agit d'un exercice proposé en début de la classe de 6[e], et les productions de deux élèves.
Pour cet exercice, les élèves avaient à leur disposition une règle graduée, une équerre et un compas.

Texte de l'exercice

Voici trois figures.



Remplis le tableau ci-dessous.

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	OUI NON	
B	OUI NON	
C	OUI NON	

Productions d'élèves

Annexe 1b

ELEVE A

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	OUI NON	C'est un rectangle parce que les côtés sont droites.
B	OUI NON	Parce que il y a 4 sommet et 4 côtés,
C	OUI NON	Parce qu'il y a 1 côtés qu'il est pas comme les autres!

Annexe 1c

ELEVE C

Figure	Est-ce un rectangle ? Entoure la bonne réponse.	Explique comment tu t'en es aperçu.
A	OUI NON	car il n'a pas d'angles droits
B	OUI NON	Oui car il a deux parallèles de 4,2 cm et deux autres de 3,1 cm et il a 4 angles droits
C	OUI NON	car il a que deux angles droits.

4.2 Techniques possibles et éléments technologiques correspondant pour ces activités

4.2.1 Pour les quatre activités de reproduction de figures

Pour accomplir la tâche attendue, la technique qu'un élève peut mettre en œuvre sera différente dans chacune des situations évoquées précédemment. Nous précisons ci-dessous des techniques possibles.

1re activité : les élèves font coïncider le cadre du papier calque et du modèle. Avec leur crayon, ils repassent sur les tracés des trois fusées. Ils peuvent faire ces tracés dans un ordre quelconque ; s'ils en oublient ils pourront replacer le calque sur le modèle pour compléter. Ils retournent le calque et noircissent l'envers des tracés effectués, le retournent une seconde fois et font coïncider le cadre du papier calque et de la feuille blanche, puis repassent sur leurs premiers tracés. Dans ce cas encore, ils peuvent faire ces tracés dans un ordre quelconque ; s'ils en oublient, ils pourront replacer le calque sur la feuille pour compléter.
Ce type de techniques suppose une activité psychomotrice contrôlée par la vision : adaptation du geste pour suivre un trait déjà tracé et pour ne pas percer le calque, contrôle visuel de la mise en coïncidence

de deux tracés. La situation permet de rester dans le monde sensible. Elle suppose aussi que l'on sache que la figure est invariante lorsqu'on la décalque, puis qu'on la déplace sur un papier calque ; autrement dit, qu'il y a conservation des longueurs, des angles, des aires… Et plus sûrement, au niveau du CP, conservation de « la forme », sans plus de précision sur ce dernier terme. Ce qui renvoie aux ***propriétés* « *métriques* »** d'une certaine géométrie « théorique » qui demeure évidemment implicite.

2e activité : les élèves décomposent chaque fusée en quatre morceaux. Ils font correspondre un trou du formographe avec chacun des morceaux. Ils peuvent pour cela faire coïncider les parties évidées du formographe avec les différentes parties de chacune des trois fusées, et ensuite tracer sur la feuille, dans le cadre déjà tracé, les différentes parties de chaque fusée. Ils peuvent par exemple commencer par la pièce la plus à gauche et avancer dans le tracé du dessin en évoluant de gauche à droite ; selon le sens de la lecture qu'ils ont déjà rencontré.
Cette technique suppose la prise en compte de ***propriétés* « *topologiques* »** (morceaux de fusée reconnues par leur frontière, dedans, dehors, frontières qui se touchent, morceaux qui sont d'intersection vide ou non, ...), de ***propriétés* « *projectives* »** (tel morceau est aligné avec tel autre, est à gauche de, à droite de, au-dessus de, au-dessous de, ...) Dans ce cas encore, ces propriétés sont implicites, contenues dans la conception du formographe, et les propriétés « métriques » ou « angulaires » de chaque figure sont prises en charge par les éléments du formographe qui permet de les transporter. Une lecture partiellement modélisée de la figure est effectuée : au-delà du fait que l'on a affaire à des contours fermés, la reconnaissance des formes reste de l'ordre de la perception visuelle (« ça coïncide » ou non avec des patrons), et leur position relative utilise le vocabulaire des géométries topologiques et projectives.

3e activité : les élèves peuvent décomposer chaque fusée en quatre morceaux. Par exemple, tracer sur la feuille les différentes parties de chaque fusée, ce qui suppose la prise en compte de la position de chaque partie de fusée dans la feuille et la prise en compte de la position relative des différentes pièces les unes par rapport aux autres et, de plus, pour chaque pièce, la considération de la position relative des traits la délimitant. Les lignes du quadrillage seront sans doute utilisées pour débuter le tracé de la base du pied de gauche de la grosse fusée, le côté vertical sera tracé en utilisant les lignes du quadrillage. Les élèves devront prendre les dimensions des côtés de chaque pièce, pour les reporter sur la ligne verticale et la ligne horizontale, puis terminer le tracé de la première pièce...
Cette technique suppose la prise en compte de propriétés topologiques (dedans, dehors, franchir la frontière, ...), de propriétés projectives (tel morceau est aligné avec tel autre, de propriétés d'orientation spatiale (tel morceau est à gauche de, à droite de, au-dessus de, au-dessous de, ...), de propriétés métriques (dimension des côtés, le support quadrillé prenant en charge le tracé des angles droits).

4e activité : les élèves peuvent décomposer chaque fusée en quatre morceaux. Par exemple, tracer sur la feuille les différentes parties de chaque fusée, ce qui suppose la prise en compte de la position de chaque partie de fusée dans la feuille et la prise en compte de la position relative des différentes pièces les unes par rapport aux autres et, de plus, pour chaque pièce, la considération de la position relative des traits la délimitant. Ils peuvent commencer par le tracé de la base du pied gauche de la grosse fusée, qui sera sans doute choisi approximativement horizontal. Pour tracer le trait vertical, le recours au gabarit d'angle droit sera nécessaire. Ils devront prendre les dimensions des côtés de chaque pièce, pour les reporter sur la ligne verticale et la ligne horizontale, puis terminer le tracé de la première pièce ; poursuivre ainsi pour les différentes fusées.
Cette technique suppose, même si elle semble transparente, invisible à l'observateur, la lecture, sur le modèle, de propriétés topologiques (dedans, dehors, franchir la frontière, ...), de propriétés projectives (tel morceau est aligné avec tel autre, de propriétés d'orientation spatiale (tel morceau est à gauche de, à droite de, au-dessus de, au-dessous de, ...), de propriétés métriques (dimension des côtés). Dans ce cas, le support ne prend pas en charge le tracé des angles droits : l'hypothèse que l'angle de la ligne horizontale et de la ligne verticale est droit pourrait être vérifiée en appliquant un gabarit d'angle droit sur le modèle, mais il sera sans doute simplement vu en s'appuyant sur la familiarité avec ce type d'objets. La reconnaissance étant établie de façon perceptive, on en déduit que le gabarit permettra de tracer un

angle superposable au modèle. Il y a là un début de modélisation : on remplace l'objet matériel à reproduire par un autre objet matériel réputé représenter, dans la communauté où on travaille, un objet géométrique nommé. L'opération est de même nature que celle qui consiste, dans le domaine numérique, à énumérer le début de la suite numérique en correspondance terme à terme avec les objets d'une collection, et à utiliser ce même début de suite numérique pour créer une collection dont on sait qu'elle aura le même nombre d'éléments que la première. Le dernier nombre que l'on atteint représente le cardinal des deux collections, c'est à travers ce type d'activités, rendant fonctionnel le nombre pour travailler avec une caractéristique commune à toutes les collections équipotentes, que la notion de cardinal se construit.

4.2.2 Pour l'activité de construction de figure

Première technique :
Avec la règle on « prolonge » le segment [*AO*] au-delà de *O* et, sur cette droite, on reporte au compas un segment [*OC*] de longueur *AO*. On joint alors *C* et *D* d'une part, et *B* et *C* d'autre part, pour terminer le tracé du rectangle ainsi obtenu. On a utilisé la propriété, ou encore le résultat technologique, qui énonce que si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu (parallélogramme) et s'il possède un angle droit, alors c'est un rectangle.

Deuxième technique :
La pointe du compas en *D* et l'écartement égal à *AB*, on trace un arc de cercle à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAD}$; la pointe du compas en *B* et l'écartement égal à *AD*, on trace un arc de cercle à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAD}$; ces deux arcs se coupent en *C*, et avec la règle on termine la construction du rectangle.
On a utilisé le théorème qui énonce qu'un quadrilatère non croisé qui a ses côtés opposés égaux deux à deux est un parallélogramme et que si, de plus, il possède un angle droit, alors c'est un rectangle.

Troisième technique :
On « prolonge » les demi-droites [*MO*) et [*QO*) au-delà de *O* et avec le compas on y place respectivement les points *M'* et *Q'* tels que *OM'* = *OM* et *OQ'* = *OQ*. Les droites (*BQ'*) et (*DM'*) se coupent en *C*.
On a utilisé principalement le théorème qui énonce que si un quadrilatère a les médiatrices de ses côtés pour axes de symétrie, alors c'est un rectangle. D'autres théorèmes sont utilisés, de manière implicite, par exemple celui qui énonce que deux perpendiculaires à deux droites perpendiculaires sont perpendiculaires entre elles, qui justifie par exemple que (*QO*) ⊥ (*AD*) et que (*DM'*) ⊥ (*AD*), etc.

4.2.3 Pour l'activité de reconnaissance de figures géométriques

Il s'agit de reconnaître si une figure est un rectangle. Ce type de tâches peut être accompli à l'aide de différentes techniques telles que celles mentionnées dans le programme :

- reconnaître *de manière perceptive* une figure plane. « *L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.* » [9]
- ou « *Reconnaître, décrire, nommer et reproduire, tracer des figures géométriques : carré, rectangle, losange, triangle rectangle. Vérifier la nature d'une figure plane en utilisant la règle graduée et l'équerre.* », en CE2, et « *Vérifier la nature d'une figure plane simple en utilisant la règle graduée, l'équerre, le compas.* », en CM1.[10]

Ces extraits des programmes du cycle des approfondissements mentionnent deux techniques différentes pour accomplir la tâche demandée. La première, qui n'est plus considérée comme suffisante en cours de cycle, suppose que l'on sache reconnaître la forme – carré, losange ou cercle – de façon globale, un peu

[9] B. O. n° 3 du 19 juin 2008, page 23.
[10] B. O. n° 3 du 19 juin 2008, page39.

comme on reconnaît son voisin !… C'est-à-dire sans décomposer les éléments qui la constituent, sans modéliser ces éléments par des objets géométriques et sans étudier les propriétés géométriques de ces objets pris individuellement ou entre eux, donc sans recourir à une observation plus ou moins instrumentée qui permettrait de vérifier les inférences faites sur la nature de l'objet concret que l'on a sous les yeux. La seconde technique, qui autorise des gestes de ce type, est évidemment celle qui est attendue à ce niveau.