Communication D6

SITE MATHÉMATIQUE LOCAL D’UN EXERCICE

Christian SILVY
I.U.F.M. de Guadeloupe
christian.silvy@iufm.univ-ag.fr

Résumé
Cette communication propose d’analyser des énoncés de problèmes scolaires avec la notion de « site mathématique local » d’un exercice pour caractériser le paysage mathématique de la question. L’auteur indique que l’organisation de la connaissance nécessaire à la reconstruction du paysage permet de structurer l’enseignement de la question.

1 INTRODUCTION

Cet exposé se situe dans le cadre d’un travail de thèse (directeurs: A. Mercier & A. Delcroix) sur les restitutions organisées de connaissances (ROC), question novatrice introduite dans les sujets du baccalauréat 2005. La ROC se définit de façon duale comme un exercice sur l’élaboration d’une démonstration et comme une évaluation de la restitution des (traces des) connaissances acquises, souvent organisée par un pré-requis. Les ROC permettent alors une pratique cartésienne minimale pour le résolveur (Castela, 2008), par cette réorganisation des connaissances, selon un processus décrit par (Mercier, 2001).
Pour étudier ces ROC, nous avons développé la notion de site mathématique local (Silvy & Delcroix, 2009(1)) d’une question d’un exercice, d’une notion, d’un théorème à partir de la notion de ”site mathématique” (Duchet & Erdogan, 2006). Nous montrons, à partir d'exemples de construction effective de sites mathématiques locaux, quelques applications de ce concept, notamment à la levée d'implicites dans les composantes de l'énoncé d'un exercice (Silvy & Delcroix. 2009(2)), la structuration des connaissances mathématiques du futur professeur des écoles.
Le premier exemple porte sur l’étude d’une question de l’évaluation de 6^{e} de 2004 reprise dans le sujet deux du CRPE de 2006. La construction du site mathématique local permet de montrer que le « substrat » (Silvy & Delcroix, 2009(1)), terreau de l’exercice, prend une part importante, chargée d’implicite, dans l’élaboration de la solution.
Le deuxième exemple avec un site mathématique local plus complexe est une des questions du brevet 2008 des Antilles et de la Guyane. A partir de ce site mathématique local, qui caractérise le paysage mathématique de la question, une discussion permet de cerner certaines « choses particulières » du substrat. Pour appréhender les effets de la rédaction des énoncés de collège nous avons effectué un travail d’enquête auprès de futurs professeurs des écoles ou de professeurs.
Cette discussion nous mènera aux choix de l’institution de passer sous silence des « vieilleries », objets d’étude avant 1970 qui permettent de redéfinir certains territoires du paysage mathématique de la question. En conséquence, nous discuterons la question suivante : « la nature du travail demandé dans ce brevet est-elle une argumentation ou une démonstration ? ».

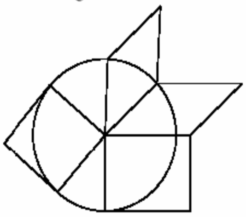
2 EXEMPLE UN

2.1 Remarques introductives

Pour construire le site mathématique de cet exercice, il faut procéder par investigation. Le texte doit être analysé.

Exercice 25

Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.

Figure 1. Evaluation 6° 2004 (Sur le document original la courbe est un

D'une part, la prise d'information est effectuée au niveau de granularité inférieure, en l'occurrence le mot ou le groupe de mots. La recherche des nœuds du texte commence par la lecture de la consigne.
L'article « *''un'' n'est synonyme d'unique qu'autant qu'il est considéré comme qualificatif, et non comme déterminant numéral ou indéfini* »[1], tandis que l'article « du » est défini contracté. Ainsi la phrase du texte de l'énoncé «Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure » peut induire la non-unicité "du" carré demandé. Tandis que la phrase suivante «Repasse, en couleur, les côtés du seul carré de cette figure » énonce l'unicité de la solution. En conséquence, la représentation acquise après lecture du texte en langue vernaculaire ne semble pas être en adéquation avec celle issue de la figure de l'énoncé. Trois productions d'élèves sur quatre données dans le sujet du CRPE (annexe 1) semblent montrer une difficulté dans ce sens (un unique, un parmi plusieurs, plusieurs)[2]. En effet les élèves indiquent deux quadrilatères différents au lieu d'un demandé.
D'autre part, la figure construite semble être, pour beaucoup, une figure de l'espace. L'enfant rencontre dans les jeux vidéo des dessins similaires, l'adulte voit naturellement cette figure dans l'espace comme les participants à l'exposé le mentionnent. En outre, deux quadrilatères seulement présentent des angles droits. Mais un des deux n'est pas dans sa position prototypique scolaire ainsi une rotation de ce seul carré (ou de la tête car l'élève travaille dans un cahier d'évaluation) est nécessaire pour voir la solution. Cette rotation est-elle naturelle ?
En maternelle les élèves manipulent des objets réels. L'objet carré se positionne naturellement dans plusieurs positions sauf si le professeur ne fait pas attention à ses représentations[3]. Dans la réalité des objets réels, par exemple des voitures, prennent des positions différentes, mais alors leur forme est reconstruite : un carré n'apparaît jamais "carré".
Au CP, les élèves sont confrontés au dessin d'objet géométrique, ce passage des objets du monde sensible au premier pas vers le monde géométrique fige la position des objets. La « figure » dessinée par le maître au tableau renforce cette position qui devient alors prototypique scolaire. De plus, la construction d'un carré dans la position demandée demande davantage d'efforts à un élève, ainsi ce renforcement naturel agit sur la représentation du carré/figure au détriment du carré/objet réel.
Enfin, pour pouvoir « repasser, en couleurs, les côtés d'un carré », il est nécessaire que le carré soit déjà tracé.
La consigne indique ainsi à l'élève en position de résolveur le chemin vers la solution. Ce chemin est tracé à partir de l'observation de la figure, une observation fine peut-être aidée par les instruments.

[1] Dictionnaire des synonymes Larousse 1970 Montrouge

[2] Dans le même cahier, l'élève doit faire preuve d'habileté pour gérer les diverses nuances de l'article « un » (voir annexe 1).

[3] Pour lire un exemple : « L'apprentissage des formes géométrique en maternelle : réflexions sur une expérience », Mélaine Sénéchal in Bulletin Vert 482, Mai juin 2009, APMEP.

2.2 Construction du site

Pour nous, le site mathématique local se constitue avec différentes strates dont les deux premières sont issues d'une lecture experte du sujet :

- « Le « **substrat** », *terreau de la question, les « **choses** » sont des implicites, naturalisés, préconstruits, des notions protomathématiques ou paramathématiques pour le niveau étudié ; elles peuvent relever du vocabulaire (non forcément explicité au niveau étudié), de la logique, de la théorie des ensembles ou bien des codages usuels en mathématiques (*Silvy & Delcroix 2009(1)) ; par exemple, dans l'exercice étudié, la consigne et les articles langagiers en font partie ainsi que les notions de « figures » et de « côtés » préconstruites à ce niveau; elles peuvent relever, également, de « process », de méthodes (au sens usuel) ou de stratégies de démonstration. Ainsi le résolveur, pour répondre dans le temps imparti, élimine naturellement les objets triviaux non solutions pour ne garder que ceux supposés répondre à la question. Ce process au sens de savoir-faire est une des méthodes implicites mises en œuvre dans le contexte de l'école.
- Les **objets mathématiques** sont des non-ostensifs ; ainsi, rectangle, losange, parallélogramme, cercle, rayon, carré, instruments forment la deuxième strate.
- « *Les **techniques** viennent ensuite qui sont les manières de faire, permettant d'utiliser les objets comme des outils* » (Silvy & Delcroix 2009(1)), au niveau étudié elles sont des propriétés mathématiques. Dans ce cas particulier, elles sont constituées des composantes de la définition du carré avec les instruments adaptées. L'élève peut aussi utiliser, pour vérifier que deux côtés sont de même longueur, la propriété qui mentionne que tous les rayons du cercle sont de même longueur.
- Les **concepts deux** (ou trois ou…) sont les techniques justificatives des niveaux inférieurs. Dans ce point de vue, un carré est un des premiers polygones réguliers rencontré par les élèves.

2.3 Remarque

Le cercle permet de confirmer, par une voie plus théorique, que l'un des quadrilatères est un rectangle. Pour conclure dans cette voie, le résolveur peut utiliser une des règles du contrat didactique : « l'existence de la solution » afin de donner la seule figure qui reste.
Les mots en gras sont associés à la réponse experte.
Le process indispensable (en gras) à l'obtention de toute réponse dans le temps imparti reste implicite.
Le paysage mathématique de cet exercice comporte un grand nombre de choses ou process particuliers, convoquant des habiletés (Mauss, 1950)4 du résolveur. Ces habiletés sont acquises dans les exercices nécessitant la reconnaissance de carré en géométrie perceptive, elles sont anciennes.
Ainsi la compétence institutionnelle ; « reconnaître un carré dans une figure complexe » est dans ce cas particulier une compétence nécessitant la construction d'un réseau de compétences ou d'habiletés issues de registres différents.
Deux oppositions : longueur et mesure de longueur, figure et dessin nécessitent de la part du résolveur une habileté mathématique implicite.

[4] Habileté au sens du mot latin « habilis » : « *qui ont des habitudes, qui « savent y faire ». C'est la notion anglaise de « craft », de « clever » (adresse et présence d'esprit et habitude), c'est l'habileté à quelque chose. Encore une fois nous sommes bien dans le domaine technique.* » (Mauss, 1950)

Substrat (ensemble de choses singulières et de process singuliers)	Objets particuliers	Concepts (1) Techniques	Concepts (2)
Nombre/grandeur (distance/longueur) Consigne Figure/dessin Articles langagiers Côtés Longueur Distance Figure prototypique scolaire Rectangle Losange Parallélogramme Tangente Carré (rotation) **Élimination des cas particuliers triviaux (tri des quadrilatères dans la géométrie perceptive)** **Logique associée au contrat** Rotation donnant une figure prototypique Vérification à l'aide d'instruments Stratégie	Côtés Carré Cercle **Rayon du cercle** tangente Instruments: règle graduée compas équerre	**Tous les rayons d'un cercle ont même longueur** 4 côtés de même longueur et un angle droit Un rectangle n'est pas un carré. 3 angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur angles droits (équerre) Côtés de même longueur Le rayon perpendiculaire à la tangente	Polygones réguliers Espace euclidien Algèbre des grandeurs Classification des quadrilatères Convexes

Figure 2. Site mathématique local de la question

Cet exemple nous permet de montrer que d'une part, le concept de site peut s'appliquer à des objets des mathématiques élémentaires (du primaire), d'autre part, que le site permet de revisiter les différentes formes de géométrie (instrumentée,…) enfin, qu'il peut interroger l'évidence. En effet, par les éléments du substrat, la construction du site questionne: la stratégie (choix de stratégie parmi trois possibilités), le texte (certains implicites langagiers propres à ce niveau) et les process.

Le professeur des écoles devrait être conscient de la partie implicite de chaque exercice. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'exercice d'évaluation de 6e a été repris dans une question de la partie didactique du concours CRPE de 2006. Les nombreux livres, ayant pour objectif de préparer le concours du CRPE, donnent une correction de cet exercice de concours mais les corrections passent sous silence les diverses "choses singulières" du substrat. Par coutume, l'évaluation aux concours CRPE reste centrée sur les connaissances mathématiques. Nous proposons que le sujet de concours CRPE permette d'évaluer aussi les connaissances des process.

3 EXEMPLE DEUX : ENTRE ARGUMENTATION ET DÉMONSTRATION - LE BREVET DES COLLÈGES

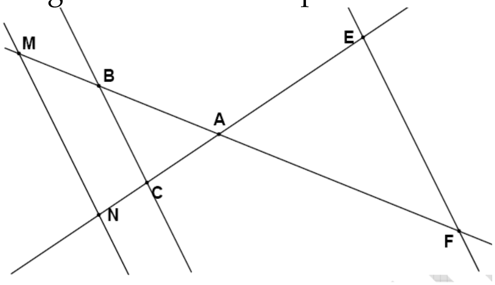
Le brevet des collèges est la première évaluation institutionnelle que rencontre un élève dans le système éducatif français. L'influence de cette évaluation certificative dans la formation de l'élève n'est pas négligeable. L'affirmation selon laquelle « *le baccalauréat pilote l'enseignement du cycle terminal* » (David, 2000) ou bien celle qui stipule que « *le mode d'évaluation aux examens structure les contenus de l'enseignement et organise la scolarité* » (selon une déclaration d'A. Périssol à l'Assemblée Nationale en 2005) illustrent cette affirmation.

Nous nous proposons d'analyser et de caractériser le paysage mathématique d'une question du brevet 2008 des Antilles et de la Guyane, application directe du théorème de Thalès. Les caractéristiques du paysage (épistémologiques, didactiques et mathématiques) sont autant d'outils qui permettront de

reconnaître et de comprendre l'identité du lieu étudié. Ainsi cette étude permettra de cibler certains attendus de l'institution.
Pour fouiller cette application, en un sens archéologique du terme, nous utilisons à nouveau le site mathématique (local) d'une question. A partir de la construction du site mathématique local, qui caractérise le paysage du lieu considéré en diverses strates, nous discutons sur certaines « choses particulières » du substrat, présents dans l'énoncé. Pour appréhender les effets de la rédaction des énoncés de collège, nous avons effectué un travail d'enquête auprès de futurs professeurs des écoles ou de professeurs.
Cette discussion nous questionnera sur les choix de l'institution de passer sous silence des « vieilleries », objets d'étude avant 1970 qui permettraient de redéfinir certains territoires du paysage mathématique de la question.

3.1 Le sujet du brevet 2008 des Antilles et de la Guyane.

La figure suivante n'est pas réalisée en vraie grandeur. Elle n'est pas à reproduire.



Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
On donne : AB = 4,5 cm ; AC = 3 cm ; AN = 4,8 cm et MN = 6,4 cm.
1/ Calculer AM et BC.
2/ On sait de plus que AE = 5 cm et AF = 7,5 cm. Montrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Figure 3. Sujet du brevet 2008 Antilles Guyane

3 Remarque

Nous n'étudions que la question 1, l'élève résolveur doit considérer la sous-figure de gauche pour se retrouver dans l'application directe du théorème de Thalès (compétence du programme : isoler dans une configuration les éléments à prendre en compte pour répondre à une question)[5].

3.2 Discussion sur des choses particulières du substrat, cœur d'implicite

3.2.1 Registre figural/registre langagier

La lecture perceptive (ou instrumentée mais peu probable) du point A comme point d'intersection des droites (MB) et (NC) est dans l'ordre des choses. En effet dans la plupart des textes de brevet l'alignement des points n'est pas mentionné dans le texte du sujet ; de plus, dans le cas de la réciproque du théorème de Thalès de la classe de 3e l'hypothèse « ordre des points » n'est presque jamais explicitée.
Pour les étudiants (PE1) préparant le concours de recrutement des professeurs des écoles (CRPE), le contrat usuel attendu est différent, comme le stipule le jury du CRPE de Lille « *Concernant les questions géométriques, il est encore à signaler qu'une figure géométrique n'est qu'une aide visuelle pour se représenter la situation mais ne prouve rien. Seules les hypothèses, ici bien identifiées dans une rubrique « nous savons que », sont utilisables dans les démonstrations. Toute autre affirmation, même « visible » sur la figure, doit être démontrée* ». Pour vérifier si le changement de paradigme qui consiste à prendre "figure" au sens de

[5] Programme collège introduction générale p 11 B.O. du 19 avril 2007

”dessin et figure technique” mis en œuvre dans cet exercice, nous avons demandé en mars 2009 à 60 étudiants PE1 et 8 professeurs de mathématiques de rédiger la solution de cet exercice ; aucun n’évoque cette légère déformation du contrat dans la rédaction d’une réponse en mentionnant que les hypothèses du raisonnement sont issues de l’observation de la ”figure”. Nous devrions lire, *a minima*, ”d’après la figure...” Cette observation utilise la règle implicite: quelle que soit la taille d’une figure, elle conserve les mêmes propriétés. Cette règle est basée sur le fait que l’espace géométrique est homaloïdal[6]. Par conséquent, même si le sujet n’est pas conforme aux usages de rigueur, ce travail d’enquête montre que le contrat d’évaluation possède une certaine plasticité comme cela est déjà remarqué par C. Castella et A. Mercier(1994) : chacun procède comme s’il n’y avait là aucun problème.
Pourtant, les concours CRPE respectent l’usage d’écrire la position du point A dans le texte en langue vernaculaire. Ainsi, par voie de conséquence cet usage peut permettre le respect de la rigueur au sens de B. Beauzamy (2001) « *La rigueur signifie : connaître le domaine d'application des outils que l'on utilise, savoir distinguer une série convergente d'une série divergente, etc.* »
Dans ce contexte (CRPE), « *le théorème de Thalès ne se réduit pas à l’écriture d’égalités entre fractions*[7]. *Pour pouvoir écrire ces égalités, un certain nombre d’hypothèses doivent être vérifiées* » : les points A, B et M doivent être alignés ; les points A, C et N doivent être alignés ; (BC) doit être parallèle à (MN).
La solution n’explicite pas le cadre de l’alignement des points comme toutes les solutions de la population étudiée. A. Pressiat et I. Bloch (2007) lors d’un cours à la XIV° Ecole d’Eté de Didactique rappellent que l’un des enjeux du collège est d’« *assurer la rupture entre la « géométrie perceptive et instrumentée » d’une part et la « géométrie théorique », d’autre part* ». Ce texte réussit à mélanger les deux géométries sans qu’aucun étudiant ou professeur ne sente la nécessité d’expliciter la « chose ».
Une deuxième habileté implicite apparaît dans les textes : la gestion des deux espaces, grandeur (longueur) et mesure de grandeur *i.e.* algèbre des grandeurs et corps des réels.

3 Site mathématique local

Notre enjeu n’est pas de construire le site mathématique local mais nous allons montrer que la part du substrat et du contrat pèse sur le travail demandé à l’élève.

Substrat : choses singulières	Objets particuliers	Techniques	Concepts (1)	Concepts (2)
Figure Grandeurs Aire Proportion	Nombres décimaux Egalité	Transitivité de l'équivalence	Corps Q	Corps R
Code symbolique distance, droite, longueur	Fractions Longueur Distance	Simplification de fractions		Equivalence, Classe d'équivalence
Contre-règle Equation aux dimensions	Points distincts Droites Droites parallèles	Règle du rapport grandeurs/ nombres	Algèbre des grandeurs Aire (additivité de l'aire)	
Lecture perceptive alignement (instrumentée)	Alignement		Distance entre deux droites parallèles	Théorie de la mesure Espace euclidien
Code graphique Point droite Stratégie	Intersection de droite	Théorème de Thalès		

Figure 4. Site mathématique local de la question

[6] « *Caractère d’un milieu spatial indéfini qui n’a pas de courbure propre et, dans lequel on peut, par conséquent, tracer des figures semblables à n’importe quelle échelle. Appliquée à l’espace à trois dimensions pris dans son ensemble, cette propriété implique le postulat d’Euclide et réciproquement* ». A. Lalande (1983), *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Presse Universitaire de France.
[7] Ici le théorème de Thalès est énoncé dans l’espace euclidien.

3.2.2 Cadre des grandeurs/réels

La solution d'un ou d'une étudiant(e) (voir annexe 2) montre la bascule alternative entre longueur et distance ou entre grandeur et nombre. Cette gestion implicite est une habileté au sens de M. Mauss (1950).
Ainsi la solution part des hypothèses dans le cadre des grandeurs pour passer dans le cadre des réels puis revient dans le cadre des grandeurs. Ces changements de cadres implicites renforcent pour certains (nombreux) l'utilisation abusive des unités. Les unités apparaissent au début et à la fin sans aucune justification. On écrit AM=$\frac{4,5\times4,8}{3} = 7,2cm$.
Dans le primaire des années 1900, les élèves ne pouvaient faire l'amalgame entre les deux espaces les nombres réels et les grandeurs (longueurs) car l'appel à l'expérimentation matérielle (effective ou invoquée) validait leurs règles.
En effet, la règle suivante « *On peut dire par exemple que : le rapport de deux grandeurs est égale au rapport des nombres qui le mesurent, l'unité restant la même* » (Rollet & Foubert, 1903) permet d'expliciter la justification de l'omission[8].
Mais comme l'écrit Henri Lebesgue dès les années 1930, cette présentation cachait la place prépondérante de la notion de nombres réels :
« *Actuellement, on ne parle pas du nombre distance au premier livre de la géométrie ; on n'en parle qu'au troisième… Encore en parle-t-on avec quelque réticence à cause de l'emploi du nombre dans toute sa généralité ; on parle des rapports de distances bien plus que des distances et le nombre distance n'apparaît de façon avouée que lorsque, dans une proportion entre distances, on fait des produits en croix. À ce moment on suppose connus et les nombres distances et les opérations sur les nombres...*
Mais là se place le scandale de l'incommensurabilité ; il fallait tourner la difficulté, éviter le nombre. C'est pourquoi on a parfois fait comme je disais tout à l'heure, posant une définition de ce que l'on appellera l'égalité ou l'inégalité de deux rapports par des moyens qui sont exactement ceux permettant de décider de l'égalité ou de l'inégalité de deux nombres déterminés chacun par une coupure ; mais on a soin de ne pas s'en apercevoir et d'éviter de parler de ces nombres que l'on compare. Alors on prétend que l'on ne s'est pas occupé de nombres, qu'un rapport de longueurs est autre chose que le nombre qui le mesure... Je n'y peux voir que le souci d'écarter un mot et je pense à celui qui dirait : je n'ai pas besoin de la notion de chapeau pour parler de cette chose ronde que vous avez sur la tête, qui a un cuir à l'intérieur et un ruban à l'extérieur. »
Aujourd'hui les nombres sont omniprésents tandis que la notion de grandeurs a du mal à occuper un espace comme le montre l'ensemble des réponses.

3 Remarque

La polysémie de la notation AB signifie selon sa place la longueur d'un segment [AB] et la distance AB *i.e.* la longueur et la mesure de la longueur. Cette polysémie de la notation AB demande une habileté, qui conduit à supprimer "cm"[9] dans le texte pour faire ensuite une adjonction de ce même mot "cm" dans la réponse. Exercice acrobatique dont les conséquences didactiques ont été étudiées par Y. Chevallard et M. Bosch (2001, 2003).
Le jeu "nombre concret" et "nombre abstrait" était joué par le rapport de grandeurs et le nombre abstrait. Aujourd'hui cela relève d'une habileté non mathématique des élèves.
Pour lever le problème il faudrait considérer qu'une figure est adimensionnelle, ce qui est fondée sur une propriété de l'espace euclidien : le rapport de grandeurs est conservé par changement d'échelles.

3.2.3 Un livre de 3e

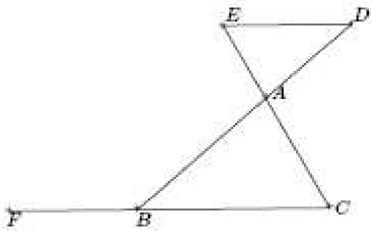
L'étude d'un livre de 3e (voir annexe 4) montre la difficulté de cette gestion implicite.
Dans la solution exposée, la notation ID indique la distance de I à D (la mesure de la longueur) ou la longueur. Aucun livre consulté ne se préoccupe de la polysémie associée à la notation distance. Or la

---

8 Pour une autre façon de voir se conférer à l'annexe 3
9 Ellipse en rhétorique

rigueur en mathématique est l'«*adéquation entre le signifié et le signifiant* » (Rouy, 2007). Ce problème n'est pas évacué par une rédaction de l'énoncé précisant que toutes les mesures sont faites dans la même unité, le centimètre. Une majorité de concepteurs de sujet de brevet utilisent pourtant cet artifice en particulier :

Exercice 1 :
La figure suivante n'est pas réalisée en vraie grandeur.
L'unité de longueur est le centimètre.
On donne : AB= 8 ; BC= 9 ; AC= 6 ; AE= 4.



1) Les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
Calculer AD.

Figure 5. Brevet 2008 Groupement Nord

Nous remarquons que : la figure n'a pas d'échelle, l'unité ne sert à rien, le sujet parle de droites mais les droites ne sont pas tracées. Le professeur et l'élève ne savent pas où se situe cet exercice.
Cependant la question sur la principale technique demeure: le théorème de Thalès est-il énoncé en termes de distances ou en termes de longueur ?
Mais la transposition didactique n'est pas encore achevée, il faudrait peut-être inventer une notation pour la longueur d'un segment. Une proposition possible semble être « Pourquoi ne pas employer L(ID) pour la longueur du segment [ID] et ID pour la distance ? », mais il faut se garder des dérives du « *formulisme* » (Ferrier, 2005). En particulier, dans les autres pays, la notation [AB] n'est pas aussi prégnante. Cependant il semble plus précis d'employer un codage différent pour marquer les étapes de la solution. Mais la France a connu les dérives de la réforme des mathématiques modernes, et l'usage de la rigueur reste encore perturbé.
Un ou une étudiante PE1, en composant le texte nécessaire au passage du dessin à une figure, propose une rédaction de la solution en utilisant la notation (AB) pour la longueur[10]. Ce choix peut paraître original, mais un livre d' « arithmétique ». (Faucheux, 1938) utilise cette écriture[11].
Dans les usages actuels, à ce niveau d'étude le manque d'explicitation de cette différence ne permet pas aux élèves de saisir tout le sens de la rédaction du professeur.
Mais cette discussion sur la rigueur cache le sens réel de l'affrontement entre deux paradigmes celui du concret et celui du monde mathématique, celui des grandeurs concrètes et celui des nombres, c'est le « seuil épistémologique » de N. Rouche (1994). Mathématiquement, le paradoxe de Banach-Tarski[12] démarque une des limites de ce seuil épistémologique entre le monde mathématique et le monde physique en montrant que la notion de découpage n'est pas si naïve. C'est le « diabolus in mathematica » d'Antoine Delcroix.
A ce niveau l'espace des nombres est de niveau 2 (numérique 2), le niveau des différentes collections N, Z, D, Q, R avec des opérations bien assimilées. Le niveau 0 est le niveau naïf de la comptine ou numérotation des pages d'un livre qui précède les définitions mathématiques du texte du savoir.

[10] Voir annexe 5
[11] Voir annexe 6
[12] Nous invitons le lecteur à se reporter à Perrin D. (2005), Mathématiques d' Ecole, Cassini, 2005

Le niveau 1 est celui des tables, du calcul réfléchi. Le niveau 3 est celui du construit, dépassant aujourd'hui celui de la licence.
Le souci du métadiscours explicatif du programme sur l'introduction des grandeurs dans le monde mathématiques atteint ici sa limite. La rédaction de l'école de cette question est un chemin qui passe des « nombres concrets » aux nombres où l'utilisation des mathématiques permet d'élaborer une solution numérique qui donne par retour aux nombres concrets la solution. Ce chemin n'est-il pas l'évacuation de cet affrontement ?
Dans le Brevet supérieur, Nancy 1923 (Faucheux, 1938), on demande dans la première question de « *Montrer que le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport des nombres qui les mesurent quand on les évalue avec la même unité* ». Ce théorème est absent des programmes et interroge ici la transparence du savoir impliqué.
Ainsi, ce texte de manuel, supposé générateur d'exemples de rédaction, montre bien les limites d'une mathématique scolaire qui ne veut pas prendre en compte le saut qualitatif des grandeurs concrètes aux réels. Ce rejet dans l'implicite de cette difficulté d'ordre épistémologique se retrouve avec la notion d'angle qui peu à peu est évacuée du programme scolaire (les triangles semblables re-disparaissent à cet automne en seconde et la notion cocyclicité reste à l'état de trace dans le chapitre des complexes de terminale).
D'autre part, dans les programmes, le théorème de Thalès, donné en termes de longueurs, est justifié en termes de grandeurs à l'aide des aires. Du point de vue mathématique, la propriété de Thalès figurant dans le programme de troisième est une propriété utilisant la notion de longueur, elle est donc à un isomorphisme près une propriété euclidienne. Cependant le théorème de Thalès général ne nécessite pas la notion de distance, c'est ainsi une propriété affine. Or le procédé affine de la démonstration est basé les propriétés du corps des réels.

Pour conclure sur la construction du site pour résoudre ce sujet le résolveur fait preuve de « mètis » (Detienne & Vernant, 1974) :

- la lecture perceptive de l'alignement des points.
- la gestion des grandeurs et des mesures des grandeurs ou « le saut épistémologique ».

Nous espérons avoir montré que l'élaboration du site permet de lever ces implicites et de caractériser le paysage mathématique de la question.

4 CONCLUSION

D'une part, la construction effective du site mathématique local effectue une caractérisation du paysage mathématique de la question. Ce moment d'organisation de la connaissance nécessaire à la reconstruction du paysage, à partir de la question, permet à l'auteur de structurer l'enseignement de la question. Cette caractéristique répond au *principe de Papert* énoncé par M. Minsky : « *certaines étapes les plus cruciales du développement mental sont fondées non pas seulement sur l'acquisition de nouvelles compétences mais sur de nouveaux processus administratifs de ce que nous connaissons déjà* » (Minsky, 1988).
D'autre part, en explicitant à la fois les objets, les techniques ainsi que le substrat, le site caractérise le paysage et indique une partie du sens. « *Ainsi avons-nous également introduit le saut qualitatif accompli lorsque l'on passe du signifiant au signifié et du signifié au sens, à la façon dont le joueur d'échecs va de la structure matérielle du jeu à ses règles, puis de ces règles à la stratégie qui lui sera propre* » (Magen, 2006).
Enfin, nous rappelons que « *le mode d'évaluation aux examens structure les contenus de l'enseignement et organise la scolarité* » (selon une déclaration d'A. Périssol à l'Assemblée Nationale en 2005) et ainsi nous avons montré que la construction du site permet de réinterroger :

- dans l'exemple 1, le concours CRPE. Nous avons proposé que ce concours évalue aussi la connaissance des habiletés requises par l'exercice. On pourrait même relier notre analyse d'une évaluation à l'article de C. Houdement (2009) sur les "problèmes pour chercher" :

« pour certains d'entre eux, d'autres connaissances, autres que mathématiques, sont nécessaires pour avancer dans la résolution (et contrôler la réponse) ».

- dans l'exemple 2, la cohérence de la partie étudiée du curriculum. La construction du site nécessite une clarification des changements de cadre avec, par exemple, la règle du quotient de deux grandeurs de même espèce dans la même unité et l'explicitation des propriétés d'une figure (dessin ou technique). Sans cette clarification, les démonstrations mathématiques effectuées en collège sur le théorème de Thalès restent des argumentations axées pour une large part sur des implicites, des savoirs transparents.

5 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU G. (1989), Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège, *Petit x* **21**, pp. 47-68, IREM de Grenoble.

CASTELA C. (2008), Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes, dans *Perspective en didactique des mathématique, Cours de la XIIIème École d'été de didactique de mathématiques* (Eds Rouchier, Bloch), 89-114, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CASTELLA C. & MERCIER A.(1994), Peut-on enseigner des méthodes ? Comment les élèves apprennent-t-il des méthodes ? *Bulletin de Commission Inter-IREM de didactique des mathématiques* **1**.

CHEVALLARD D. & BOCH M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I et II. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, **53**, pp. 5-32, IREM de Grenoble.

CHEVALLARD D. & BOCH M. (2003). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie III. Une Atlantide oubliée. *Petit x* **59**, pp.43-76, IREM de Grenoble.

DELCROIX A. & SILVY C. (2008), *Fonction constante et dérivée nulle : un résultat si trivial…*, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00318449/fr/

DÉTIENNE M. & VERNANT J.-P. (1974), *Les ruses de l'intelligence – la mètis des Grecs*, Flammarion, Paris.

DUCHET P. & ERDOGAN A. (2006), Pupil's autonomous studying: from an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis, dans *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Ed Bosch), 663-674, Publication électronique.

FAUCHEUX M. (1938) *Arithmétique (Ecoles normales Brevet supérieur)*, Delagrave, Paris

FERRIER J.-P. (2005) *Le formulisme* http://www.iecn.u-nancy.fr/~ferrier/Formul.pdf

HOUDEMENT C. (2009) Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de Didactique et Sciences Cognitives* **14**, pp. 31-59, IREM de Strasbourg

LEBESGUE H. (1975), *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard, Mayenne.

MAGEN G. (2006), *Du radical du sens*, Presses du Lema, Université de Paris 8, Saint-Denis.

MAUSS M. (1950), *Sociologie et anthropologie*, Quadrige/Presse Universitaires de France, Paris (1997 : 7ème édition).

MERCIER A. (2001), Descartes : le temps de la construction du savoir, *L'Ouvert* **103**.

MINSKY M. (1998), *La société de l'esprit*, Inter Editions, Paris.

PERISSOL A. (2005), *Rapport d'information déposé en application de l'article 145 du règlement par la commission des affaires culturelles, familiales et sociales sur la définition des savoirs enseignés à l'école*, enregistré à la Présidence de l'Assemblée nationale le 13 avril 2005

ROLLET P. & FOUBERT E.(1903) *Cours d'arithmétique (Ecole Primaires Supérieures et Professionnelles, préparation aux Ecoles d'Arts et Métiers)* Felix Alcan, Paris

ROUCHE N. (1994) « Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique », Repères –IREM **15,** Topiques éditions, Metz.

ROUY E. (2007) *Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre institution secondaire et institution universitaire. Le cas éclairant du thème des dérivées*. Dissertation en vue d'obtenir le grade de Docteur en Sciences. Université de Liège Académie Universitaire Wallonie Europe

SILVY C. & DELCROIX A. (1), (2009) Site mathématiques d'une ROC, une nouvelle façon d'interroger un exercice, *Annales de Didactique et Sciences Cognitives* **14**, pp.103-122, IREM de Strasbourg.

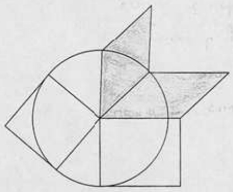
SILVY C. & DELCROIX A. (2) (2009) *Exemple d'étude de l'implicite dans l'évaluation ou la formation d'enseignants de mathématiques* (en cours).

6 ANNEXE 1

Elève A

Exercice 16

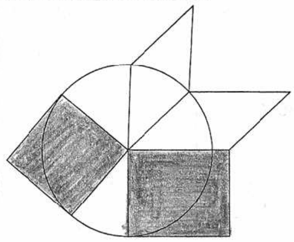
Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un losange de cette figure.

Exercice 25

Observe attentivement la figure suivante.

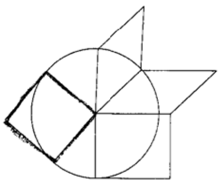


Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.

Elève B

Exercice 16

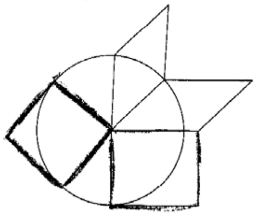
Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un losange de cette figure.

Exercice 25

Observe attentivement la figure suivante.

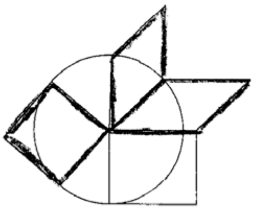


Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.

Elève C

Exercice 16

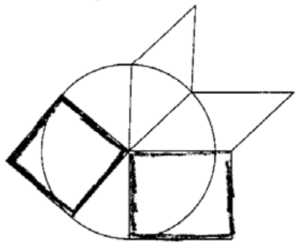
Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un losange de cette figure.

Exercice 25

Observe attentivement la figure suivante.

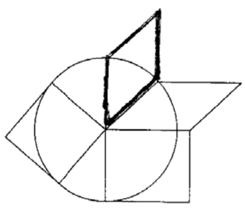


Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.

Elève D

Exercice 16

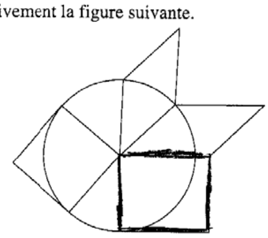
Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un losange de cette figure.

Exercice 25

Observe attentivement la figure suivante.



Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.

7 ANNEXE 2

Exercice :

Hypothèses :

(BC) // (MN)

AB = 4,5 cm

AC = 3 cm

AN = 4,8 cm

MN = 6,4 cm

1) Calcul de AM :

Pour calculer AM, on va utiliser le théorème de Thalès. On sait que (BC) et (MN) sont parallèles et que A, B, M et A, C, N sont respectivement alignés dans le même ordre. On a donc d'après le Théorème de Thalès, dans le triangle AMN :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \quad \text{or} \quad AB = 4{,}5\text{ cm},\ AC = 3\text{ cm},\ AN = 4{,}8\text{ cm}$$

d'où $\frac{4{,}5}{AM} = \frac{3}{4{,}8}$

$AM = \frac{4{,}5 \times 4{,}8}{3}$

$\boxed{AM = 7{,}2\text{ cm}}$

Solution d'un(e) étudiant(e)

8 ANNEXE 3

— 4[illegible] —

CHAPITRE V. *

Rapport numérique de deux droites.
Lignes proportionnelles.

§ 1. — DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS.

93. — **Rapport**. — On appelle *rapport* de deux quantités, le *quotient* que l'on obtient en divisant la première des quantités par la seconde.

94. — Pour trouver le *rapport numérique* de deux droites, le moyen le plus simple et le plus pratique est de les mesurer et de diviser les deux longueurs obtenues l'une par l'autre.

Fig. 63

Supposons qu'une droite AB (fig. 63) mesure $2^m,1$ et une autre droite CD, $0^m,7$; leur rapport numérique sera $\frac{2,1}{0,7} = 3$; et l'on pourra écrire la proposition suivante :

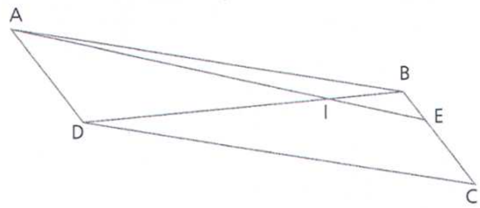
$$\frac{AB}{CD} = \frac{2,1}{0,7}$$

Rapport numérique de deux longueurs. A Leclerc 1908

9 ANNEXE 4

Savoir-faire 1 Déterminer une longueur dans une figure contenant des droites parallèles

Énoncé Le parallélogramme ABCD ci-contre est tel que AD = 6 cm. E est un point du segment [BC] tel que BE = 2 cm. I est le point d'intersection des droites (AE) et (BD) et on donne : BI = 4 cm. Calculer la longueur DB.



Solution

ABCD est un parallélogramme donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles. ← La figure contient des droites parallèles, on peut donc penser à utiliser le théorème de Thalès pour calculer la longueur recherchée.

Les droites (BD) et (AE) sont sécantes en I et les droites (BE) et (AD) sont parallèles. ← On identifie les conditions nécessaires pour appliquer le théorème de Thalès.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on peut écrire les égalités de quotients :

$$\frac{IE}{IA} = \frac{IB}{ID} = \frac{EB}{AD}.$$

← On applique le théorème de Thalès.

Or : AD = 6 cm, BE = 2 cm et IB = 4 cm.
Donc on a : $\frac{IE}{IA} = \frac{4}{ID} = \frac{2}{6}$.

← On utilise les valeurs numériques données dans l'énoncé.

Calcul de ID

On a : $\frac{4}{ID} = \frac{2}{6}$.

← On connaît la longueur IB et on cherche la longueur BD. Le point I appartenant au segment [BD], il suffit de calculer ID. Pour cela, on utilise l'égalité : $\frac{4}{ID} = \frac{2}{6}$.

Donc : $6 \times 4 = 2 \times ID$. ← On écrit l'égalité des produits en croix.

Donc : $ID = \frac{6 \times 4}{2} = 12$.

Calcul de BD ← On peut maintenant calculer BD.

I appartient au segment [BD], donc :
BD = BI + ID = 12 + 4 = 16.

[BD] mesure 16 cm. ← On conclut.

Manuel 3° Prisme (2008)[13]

[13] DESCHAMPS C., CUAZ L., JACOB N., LE BOURGEOIS D., ROULET-DESCOMBES A., SITBON A., VISSIO J., XOUAL I. (2008) *Math programme 2008 3°collection Prisme* , Belin, Tours.

10 ANNEXE 5

Cap A1

1) Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

On donne (AB) = 4,5 cm, (AC) = 3 cm, (AN) = 4,8 cm et (MN) = 6,4 cm

F et E sont deux droites sécantes en A. N et C sont deux points de E distincts de A. M et B sont deux points de F distincts de A

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{AM}{4,5} = \frac{4,8}{3} = \frac{6,4}{BC} \quad \text{donc} \quad \frac{4,5 \times 4,8}{3} = 7,2 \quad \text{et} \quad \frac{3 \times 6,4}{4,8} = 4$$

Nous pouvons donc dire que (AM) = 7,2 cm et (BC) = 4 cm

Résolution par un(e) étudiant(e)

11 ANNEXE 6

= **229.** = En raison de la propriété précédente, il n'y a pas d'inconvénient à admettre que, dans la notation $\frac{AB}{CD}$, AB et CD représentent, soit des grandeurs, soit les nombres qui les mesurent avec une même unité. Quand nous tiendrons à préciser qu'il s'agit des grandeurs elles-mêmes, nous écrirons $\left(\frac{AB}{CD}\right)$.

Livre Faucheux(1938) du programme 1920

12 Exercice 1

Le résolveur pour répondre dans le temps imparti, isole les quadrilatères et élimine naturellement les objets triviaux (sans angle droit ou reconnaissance de ″non carré″) non solutions pour ne garder que ceux supposés répondre à la question.
Le résolveur se trouve alors face à deux quadrilatères qui sont des rectangles qui ressemblent à des carrés.

12 Procédure 1 :

Tous les rayons du cercle sont de même longueur donc le quadrilatère de droite possède deux cotés consécutifs de longueurs différentes donc ce quadrilatère est un rectangle. Or un rectangle n'est pas un carré donc l'autre rectangle de gauche est un carré.
Variante :
On vérifie que le rectangle de gauche est bien un carré avec le compas ou la règle graduée

12 Procédure 2

On vérifie à la règle graduée ou au compas que le quadrilatère de gauche est un carré.

12 Procédure 3

On vérifie à la règle graduée ou au compas que le quadrilatère de droite est un rectangle. Or un rectangle n'est pas un carré donc l'autre rectangle est un carré.
Variante :
On vérifie que c'est bien un carré avec le compas ou la règle graduée.

12 Exercice 2

1) D'après le dessin : Les 3 points A, B et M sont distincts et alignés, ainsi que les points A, C et N.
D'après l'énoncé (BC) et (MN) sont parallèles.
Donc d'après le théorème de Thalès

$$\frac{l(AB)}{l(AM)} = \frac{l(AC)}{l(AN)} = \frac{l(BC)}{l(MN)}.$$

Ainsi $\frac{4{,}5\,cm}{l(AM)} = \frac{3\ cm}{4{,}8\,cm} = \frac{l(BC)}{6{,}4\,cm}$.

Or $\frac{3\ cm}{4{,}8\,cm} = \frac{3 \times 1cm}{4{,}8 \times 1cm} = \frac{3}{4{,}8} \times \frac{1cm}{1cm} = \frac{3}{4{,}8}$ ou $\frac{3\ cm}{4{,}8\,cm} = \frac{3\ cm \times 1cm^{-1}}{4{,}8\,cm \times 1cm^{-1}} = \frac{3}{4{,}8}$.

Donc $\frac{4{,}5\,cm}{l(AM)} = \frac{3}{4{,}8}$, ainsi $l(AM) = 7{,}2$ cm.

De même $\frac{3}{4{,}8} = \frac{l(BC)}{6{,}4\,cm}$, ainsi $l(BC) = 4$ cm.

Les longueurs demandées sont donc 7,2 cm pour le segment [AM] et 4 cm pour [BC].