Atelier A3

L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE : ANALYSE D'UNE PROGRESSION CENTRÉE SUR LES PROBLÈMES SPATIO-GÉOMÉTRIQUES ET LEURS REPRÉSENTATIONS

Isabelle Bloch
IUFM d'Aquitaine
isabelle.bloch@aquitaine.iufm.fr

Charlotte Osel
Laboratoire DAESL
cosel@hotmail.fr

Résumé :
Dans une première partie, nous avons exposé notre cadre théorique de recherche afin de présenter aux participants nos questionnements. En effet, de nombreux travaux ont interrogé le domaine géométrique ou le passage du spatio-graphique au géométrique mais peu ont envisagé l'étude du domaine d'expérience et des situations où pourraient se constituer les références spatiales. Dès lors, l'objet de l'atelier était de sensibiliser les participants aux enjeux de la constitution de ces références. A cette fin, nous avons présenté un début de progression expérimentée dans une classe de CM1. Les participants à l'atelier ont ensuite eu à travailler sur des enchaînements de situations, dans lesquels ils ont dû mettre en évidence le rôle des représentations (schémas relatifs aux différentes situations sur l'alignement, le cercle,…) et leur progression possible.

1 MODALITÉS DE FONCTIONNEMENT DE L'ATELIER

Nous nous sommes appuyées sur des situations expérimentées en classe de CM1 : ces situations étaient reprises de celles décrites par M. Artigue et J. Robinet (Artigue et Robinet, 1982), G. Combier et A. Pressiat (Combier et Pressiat, 2003), I. Bloch et M-H. Salin (Bloch et Salin, 2004) et M-H. Salin et R. Berthelot (Berthelot et Salin, 1992). Les participants ont eu à effectuer une analyse *a priori* des situations et à envisager les modalités de leur mise en place avec des élèves de cycle 3, afin de définir ce que pouvait être un répertoire de représentations et de préciser son fonctionnement.
Tout au long du déroulement de l'atelier, nous avons exposé des exemples de comportements observés dans les classes afin de dégager les différentes stratégies adoptées par les élèves dans la résolution des problèmes des situations expérimentées. De plus, la présentation de séquences vidéo a permis de montrer aux participants les liens qui existent entre les différentes situations de la progression. Ainsi, nous avons pu envisager un questionnement sur le rôle des représentations dans l'enseignement de la géométrie et leur progression possible.

2 INTRODUCTION

L'objet de cet atelier est de s'interroger sur les difficultés liées à la géométrie et à la structuration de l'espace dans l'enseignement primaire. Nous partons de constats institutionnels : à l'école primaire, l'enseignement de la géométrie est un problème reconnu comme difficile. Les stratégies d'évitement des professeurs en témoignent : la géométrie reste en effet souvent comme mission pour les décharges de

direction ou les stagiaires, voire complètement délaissée par les enseignants. En témoigne aussi la non-stabilisation des activités proposées par les manuels, activités qui vont du plus évident au inutilement complexe. Le statut des validations en géométrie au primaire est également flou, ce qui conduit à une fluctuation importante dans le niveau d'expertise demandé.
De plus, les programmes insistent sur l'amélioration de la vision de l'espace (repérage, orientation), sur la familiarisation avec quelques figures planes et quelques solides ; il s'agirait aussi du passage progressif d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par explicitation de propriétés et recours à des instruments. Au cycle III, les connaissances géométriques sont supposées s'articuler autour des quatre activités : reconnaître, décrire, construire, nommer et reproduire, qui sont présentées dans les Instructions Officielles du deuxième palier pour la maîtrise du socle commun comme des outils pour les apprentissages géométriques (Ministère de l'Éducation Nationale, 2008).

Ces constats nous ont amenées à nous interroger dans un premier temps sur la problématique d'enseigner la géométrie et la « structuration de l'espace ». Nous avons cherché des travaux de didactique concernant l'enseignement de la géométrie et de l'espace à l'école primaire et au collège. Les recherches des vingt dernières années ont connu plusieurs étapes, avec une focalisation plus récente et plus réduite sur les spécificités de ce domaine à l'école primaire. En effet, la majorité des recherches sur l'enseignement de la géométrie concernent le collège, les figures, la démonstration en géométrie, les logiciels de géométrie dynamique, les difficultés des élèves avec le passage à la géométrie « théorique ». Ces travaux ont interrogé le domaine spatial et géométrique. Ainsi S. Gobert (Gobert, 2007) s'est interrogée sur le passage du *spatio-graphique* au géométrique : elle a étudié les conditions nécessaires à l'usage des dessins en géométrie déductive, en tentant de dégager des conditions de lecture des dessins utilisés et de formulation des énoncés de problèmes. Elle a ainsi défini ce qu'est le contexte spatio-graphique pour la construction de problèmes de géométrie : c'est l'environnement des dessins, figures… qui permettent de se représenter le problème et de le traiter. Ceci permet de distinguer entre information géométriquement signifiante et propriété géométrique dans une représentation. Dès lors, « les connaissances fondamentales de l'usage des dessins et les différents contrats de lecture peuvent être explicités » (Gobert, 2007, p 55).
Par ailleurs, Offre, Perrin & Verbaere (2007) ont travaillé sur l'usage des instruments, lequel est une condition, au niveau du primaire et du début du secondaire, de la construction de figures permettant ultérieurement la conjecture de propriétés géométriques.

Cependant, à notre connaissance, il n'a été que peu envisagé l'étude du domaine d'expérience et des situations où pourraient se constituer les références spatiales. Peu de recherches incluent le questionnement suivant : comment se constituent les références spatiales ? Ceci nous a amenées à nous demander ce que pouvait être une « bonne situation de constitution de ces références spatiales ». Que doit-elle prendre en compte ? Nous nous interrogeons aussi sur ce qui peut résulter des modes d'enseignement de la géométrie lorsque les élèves abordent le collège. Est-ce que le problème de la constitution des références spatiales est résolu lorsque le lien doit être fait avec la géométrie plus théorique ?
Tenter d'éclaircir les problèmes posés par l'enseignement de la géométrie et de la structuration de l'espace nous a conduit à examiner les questions suivantes :
- A l'école, des objectifs liés à la maîtrise des relations spatiales sont-ils formulés explicitement d'un point de vue institutionnel ?
- Comment pourrait-on formuler ces objectifs, et quelles situations permettraient de les mettre en œuvre ?
- Comment peut-on organiser la découverte de l'espace, l'usage des instruments, et les « énoncés géométriques » pour qu'une progression soit préservée ? En effet, nous avons le sentiment que souvent l'enseignement propose des activités « décousues » et non liées les unes aux autres. Donc nous nous posons également la question du ou des liens dans l'activité et entre les activités ; nous entendons donc proposer des progressions, et les analyser.

- Comment faire en sorte que les élèves puissent considérer les dessins et les représentations plus ou moins symboliques comme des outils du *répertoire de représentation* (Gibel, 2009 ; voir I.5.) qui répondent à des situations (géométriques ou non) ?
- Comment organiser les ruptures nécessaires afin qu'elles soient négociées par l'enseignant et ne soient pas laissées à la seule charge des élèves ?
Dès lors, il s'agit de s'interroger sur la constitution progressive de la géométrie comme outil de maîtrise des relations spatiales, et sur le passage de l'expérience spatiale au fait de pouvoir penser et représenter cette expérience dans un cadre et avec des outils géométriques.

2.1 Les cadres théoriques : la théorie de la schématisation de Gonseth et la théorie des situations didactiques

Dans notre recherche, nous utilisons de manière conjuguée la théorie des situations didactiques et la théorie de la schématisation, respectivement d'un point de vue global pour l'élaboration d'ingénierie et pour l'analyse de situations, et d'un point de vue local pour l'analyse des représentations et de la schématisation.

2.1.1 Quelques définitions selon Gonseth

En ce qui concerne la constitution de la géométrie, de nombreux travaux de recherche portant sur l'évolution des rapports entre géométrie et réalité font référence aux textes de F. Gonseth (Gonseth, 1945-1955). Gonseth étudie la constitution de la géométrie à partir de la réalité et non son enseignement. Il considère que la géométrie « peut être référée à l'espace réel, dans une dimension intuitive ; ou à ce même espace, dans une perspective expérimentale ; ou à une théorie de ces relations, dans un système théorique géométrique » (Gonseth, 1949). Pour Gonseth, l'intuition est la forme *a priori* de la connaissance de l'espace (qui fonctionne sur le mode de l'évidence, dit Gonseth) ; l'expérience s'appuie sur la perception et l'usage des instruments, et le pôle théorique formalise les relations entre les objets.
Selon Gonseth, ces trois aspects de la géométrie (aspects théorique, expérimental et intuitif) ne se disjoignent pas d'eux-mêmes. Ils ne sont pas hiérarchisés car ils fonctionnent en inter-relation, quoique sur des modes différents. L'évidence issue de l'intuition, les renseignements donnés par l'expérimentation, et la déduction issue d'un raisonnement dans un cadre théorique interagissent dans une dialectique[1]. Gonseth ne hiérarchise pas l'intuitif, l'expérimental et le théorique dans la connaissance : ils sont affectés des mêmes valeurs de vérité, mais pas dans le même horizon de réalité (voir ci-dessous).
Le passage de l'intuitif à l'expérimental et au théorique ne peut toutefois s'expliquer que par la médiation de ce que Gonseth appelle un schéma. Selon lui, (Gonseth, 1955, Tome 4), « le travail sur le réel spatial est rendu possible par l'intermédiaire de la schématisation » : un schéma est lui-même « constitué de correspondances symboliques conservant certaines des caractéristiques réelles des objets ».

2.1.2 Les cinq propriétés du schéma

Gonseth tente de cerner la notion de schéma au travers de « la fable de la boule dans la forêt » (voir ci-dessous) et en dégage cinq propriétés :
- certains signes du schéma correspondent à des objets concrets ;
- ces symboles peuvent être eux-mêmes des objets concrets, plus faciles à manipuler ;
- des relations entre les symboles (existantes, ou décidées) répondent à des relations à désigner, distinguer entre les objets réels (pensée et signe étant indissociables) ;
- certaines opérations sont exécutables sur le schéma en tenant compte de sa nature propre (schéma verbal, ou dessin) et sont en correspondance avec certaines opérations réalisables dans la réalité ;
- le schéma est révisable.

[1] Pour un résumé moins succinct des théories de Gonseth, on peut consulter Bloch & Pressiat, 2009

2.1.3 Le schéma et la connaissance

Pour Gonseth, le schéma représente la réalité, certes partiellement et de façon codifiée, mais il vaut pour ce qu'il est : il est authentique et n'est ni antérieur ni postérieur à la connaissance de la signification extérieure, il est l'un des éléments constitutifs de cette connaissance. On peut rapprocher cette déclaration de celle du sémioticien C-S. Peirce qui dit que le signe n'est pas la marque de ce que l'on connaît mais l'action par laquelle on connaît (Peirce, in Tiercelin 1993).

Le schéma est déterminé par ses constituants propres : sa signification extérieure n'est pas une réalité en soi mais un *horizon de réalité*, c'est-à-dire qu'il a vocation à être interprété dans un système déterminé (intuition, expérience, ou géométrie). Il n'est pas à prendre pour lui-même mais pour la signification qu'il porte ; l'existence même du schéma réorganise la vision de la réalité. La signification du schéma est donc extérieure à ce même schéma et définit un travail possible sur le réel, c'est cela que Gonseth appelle un horizon de réalité. Cet horizon de réalité est porteur de connaissances que ne possédait pas la situation première ; le schéma définit par là même un horizon de connaissances.

Ces considérations peuvent déjà nous interroger sur la nécessité où serait l'enseignement de l'espace et de la géométrie d'organiser cette étape de pensée. Cette phase de constitution et d'interprétation d'un schéma n'est pas travaillée du tout à l'école ou au collège où, par exemple, on fournit souvent directement aux élèves une figure déjà bien tracée. De plus, nous ne considérons pas que le schéma ait une composante géométrique prédéterminée. Il permet de travailler non sur le problème physique mais sur un premier horizon de réalité qu'il importe de définir et de connaître. Ce passage du problème physique à un schéma qui le représente est exemplifié par Gonseth par la « fable de la boule dans la forêt » où une boule se trouve au milieu d'une forêt irrégulièrement plantée d'arbres nombreux et plus ou moins serrés. La tâche donnée est de rouler la boule jusqu'à la lisière de la clairière où se trouve la forêt (Gonseth, 1945-1955, p 271).

Un exemple de ce type de travail, transposé dans une classe, est le problème de « la chèvre et du poteau », problème donné en classe de $5^{ème}$:

> « On considère un bâtiment rectangulaire, une chèvre est attachée à un point d'un côté. Suivant la longueur L de la corde, quelle surface peut-elle brouter ? »

L'objectif est d'introduire la surface du disque. Si L est inférieur à la distance du point d'attache au coin le plus proche, la solution est un demi-disque ; sinon, il faut ajouter un quart de disque… ou plus. Les élèves ont le matériel (carton, punaises, ficelle) et expérimentent avant de pouvoir calculer. La situation doit conduire à identifier les éléments pertinents dans le schéma de la surface d'une fraction de disque : son rayon, la valeur de la fraction, un moyen calculatoire de mettre ces deux caractéristiques en relation.

Un schéma n'est pas forcément une *figure* : c'est l'horizon de réalité choisi qui détermine son rapport plus ou moins proche avec le cadre géométrique. Dans Bloch & Pressiat (2009), on trouve des exemples de schémas spontanés produits en classe par des élèves suivant un horizon dynamique ou artistique, lesquels schémas ne peuvent être replacés dans une perspective – un horizon – géométrique. C'est le milieu de la situation qui permettra, ou non, d'inscrire le travail des élèves dans un horizon géométrique où l'on s'acheminera vers l'idée de figure.

2.1.4 La structuration du milieu dans la Théorie des Situations Didactiques

Nous souhaitons construire une progression de situations permettant d'élargir les connaissances des élèves. Rappelons que Berthelot et Salin (1992) ont mis en évidence l'intérêt du méso-espace pour la construction et l'utilisation de connaissances géométriques. Au départ, ils ont précisé ce qui différencie les différentes 'tailles' de l'espace : le micro espace étant constitué de la feuille de papier et des objets manipulables, le macro espace des espaces extérieurs où l'on ne peut pas agir par recoupement de points de vue (ville, campagne…), le méso espace correspond à l'école, la cour de récréation… tout espace où l'on peut manipuler des outils de dimension raisonnable, comme un décamètre. Le méso espace est celui qui permet la mise en œuvre d'une démarche de *modélisation,* c'est-à-dire d'application de connaissances géométriques à l'espace à des fins d'anticipation (cf. Berthelot et Salin, 1993-1994 ; Bloch et Salin, 2004).

Nous faisons l'hypothèse qu'une étape de constitution des références spatiales est nécessaire à l'entrée dans des situations de modélisation dans le méso-espace. Cette première étape serait celle de la constitution du milieu objectif (milieu de recherche), niveau du schéma de la structuration du milieu tel

qu'initié par Brousseau, complété par Margolinas (Margolinas, 1994) et modifié par Bloch (Bloch, 2002). En effet, les observations de situations de classe en géométrie, en cycle3 de l'école primaire, montrent le manque fréquent de ce milieu objectif. Son absence empêche les élèves de puiser dans une réserve d'expériences pour anticiper les figures attendues et donc de pouvoir argumenter sur les solutions géométriques attendues (Osel, 2007). Dans notre analyse, les schématisations peuvent tenir lieu d'éléments constitutifs d'un milieu objectif.
Rappelons que dans la structuration du milieu, le milieu objectif a une dimension heuristique – c'est un milieu d'essais/erreurs - ; le milieu de référence est celui où l'on valide les productions de l'étape précédente (mise en commun) ; enfin le niveau didactique correspond à un milieu d'enseignement, celui où l'on institutionnalise les connaissances et savoirs élaborés. Ceci se résume dans le schéma suivant :

M0 : **M- d'apprentissage : institutionnalisation**	**E0 :** **Elève**	**P0 : Professeur enseignant**
M-1 : M-de référence : **formulation validation**	E-1 : E-apprenant	P-1 : P régulateur, gère le débat, fait confronter les procédures
M-2 : M-objectif : **action**	E-2 : E-agissant	P -2 P-observateur, dévolueur
M-3 : M-matériel	E-3 : E-objectif	

Le milieu matériel est celui qui est préparé par le professeur, mais il n'acquiert de signification pour l'élève que dans la phase d'action, lorsque ce dernier peut tester des procédures. Un milieu matériel est toujours constitué d'objets (matériels ou déjà symboliques, cela dépend du niveau d'enseignement où opère la situation) familiers aux élèves, de façon à ce que ceux-ci puissent s'en saisir et engager des actions.

2.2 Expérimentation d'une progression

Nous proposons donc des situations pour introduire l'étape de schématisation, en examinant avec quels moyens et pour quels bénéfices. Dès lors, nous nous demandons :
- Comment élaborer des ingénieries telles que les schémas apparaissent comme des outils en réponse aux situations proposées ?
- Comment travailler les situations de schématisation avec les élèves ? Et quelles schématisations ?

2.2.1 La place de la schématisation par rapport aux recherches existantes

Les travaux de recherche récents traitent de la constitution de la géométrie (GI, GII, GIII) (Houdement & Kuzniak, 2006), mais ne se sont pas focalisés sur cette étape de schématisation. Par ailleurs, Berthelot et Salin (1992) et Gobert (2001) ont évoqué la schématisation, notamment dans la description du milieu des situations méso spatiales, mais ne l'ont pas étudiée pour elle-même. Le manuel ERMEL de géométrie pour le Cycle 3 passe d'ailleurs très vite sur les représentations spontanées des élèves (si même il les évoque) et insiste bien sur les *figures géométriques* à obtenir dans la résolution des problèmes, et ceci, même s'il propose nombre de situations extrêmement riches du point de vue spatial. Une des raisons en est, à notre avis, la difficulté de gérer en classe des situations dont le professeur verrait mal l'issue en termes de savoir.
Notre hypothèse est que cette étape de schématisation est escamotée dans l'enseignement. Elle semble nécessaire dans les prémisses de l'enseignement et elle participe de la constitution d'un milieu objectif spatial et donc du répertoire de représentation des objets géométriques (répertoire que nous définissons ci-dessous). Les objets qui apparaissent dans les schématisations peuvent alors déboucher plus ou moins sur des savoirs géométriques. Ceci permet à terme la constitution d'un milieu de référence (milieu de validation). Par ailleurs, nous faisons une constatation simple : il est difficile, pour des élèves, de

décrypter des schémas et des figures alors qu'ils n'ont jamais été amenés à en faire eux-mêmes, ou alors des figures directement géométriques imposées. Nous pouvons nous référer à ce sujet au texte de Bloch et Pressiat (2009) avec des exemples de schématisations « inattendues » dans la situation de la porte qui se ferme.

2.2.2 Définition du répertoire de représentation

Un répertoire de représentation est, par définition, un ensemble de *moyens* connus ou donnés pour effectuer la tâche prévue dans la situation. Il sera constitué de signes, schémas, symboles, figures ; nous y mettons également les outils et leur usage ; on peut y mettre également les éléments langagiers permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.
Le répertoire de représentation comporte deux composantes liées à la chronogenèse (pour la première) et au milieu de la situation :

- la composante liée au répertoire antérieur (les différentes formules énoncées et les différents usages liés aux connaissances antérieures) ;
- la composante liée au nouveau répertoire de la situation.

Une question ouverte qui nous intéresse au plus haut point est de nous demander quel est le *système générateur* du répertoire de la situation proposée, lequel va permettre de construire de nouvelles représentations à partir des éléments de représentation déjà connus (Gibel, 2009).
L'élaboration du répertoire constitue à terme une base pour la géométrie visée. Son évolution est ce qui va permettre, au final, de passer des schémas à des propriétés et à des raisonnements géométriques. Les schémas seront décryptés en classe, analysés du point de vue de la réponse au problème posé ; un schéma générique adapté pourra alors être proposé. Ceci constitue une étape cruciale vers un travail géométrique.
Donc, si l'on résume drastiquement les questions auxquelles nous cherchons à apporter une réponse :
- Comment élaborer une progression prenant en considération les connaissances spatiales (antérieures et nouvellement construites), dont les objets soient apparents pour les professeurs et donc rendent tenable le contrat didactique ?
- Comment effectuer ensuite la transition vers un milieu de référence débouchant sur des savoirs théoriques ?

2.2.3 Mise en place d'une progression

Deux raisons essentielles nous ont amenées à choisir cette progression :
- ces situations sont relativement faciles à mettre en œuvre et permettent de travailler dans le micro et le méso espace ;
- les notions de distance, de cercle, s'y imbriquent de façon satisfaisante, donc ces situations permettent aux élèves de créer des liens entre la « technique du compas » utilisée pour la situation des triangles et la méthode de triangulation utilisée pour la situation sur les losanges.
Ajoutons que les situations proposées dans les manuels sur le cercle ne sont pas toujours très convaincantes : elles utilisent le compas de façon exclusive et prématurée à notre sens.
Nos situations permettent également de manipuler des outils (ficelles, bandelettes de longueur donnée, règles, compas) et de verbaliser ou d'envoyer des messages.

Nous avons repris des situations déjà expérimentées (voir fiches descriptives des situations en annexe) :
- ***La situation du cercle (cf. Artigue et Robinet, 1982 ; Combier et Pressiat, 2003) :*** La situation a été donnée en CM1 (9 ans) : « tracer le plus de points à une distance donnée d'un point tracé : a) sur une feuille de papier ; b) au sol dans la cour ».
Il faut remarquer que pour un mathématicien raisonnablement « expert » la consigne donnée dans la situation du cercle est déjà une définition du cercle ; mais ceci ne paraît pas comme un savoir ou une connaissance chez tous les élèves et, on constate qu'ils cherchent tous pour résoudre le problème posé. De plus, cette situation n'est pas mise en place pour donner une définition canonique du cercle mais pour permettre aux élèves de se créer leur répertoire de représentation au sujet des « points à même

distance », d'effectuer des liens entre les situations, et afin de leur proposer un type de raisonnement sur l'objet trouvé en fonction d'une consigne qu'ils ne décodent pas de façon évidente, via la situation.
- ***La situation du triangle (cf. Berthelot et Salin, 1992) :*** « Former un triangle par assemblage de trois segments de longueurs données sur une feuille de papier avec validation au tableau ».
Cette situation permet d'interroger la pertinence des situations micro/méso espaces. Dans un premier temps, le changement d'espace permet aux élèves de se constituer des représentations différentes en fonction de l'espace dans lequel ils travaillent. En ce qui concerne la situation sur les triangles, le passage au tableau incluant une validation avec les baguettes en bois permet l'émergence d'une autre stratégie de résolution en lien avec la situation des cercles. Un autre type de méso espace avait été choisi mais n'a pas fait l'objet d'une présentation à l'atelier. La situation des triangles avait été prévue dans la cour afin de créer d'autres liens avec la situation des cercles en utilisant des cordes à la place des baguettes de bois.
- ***Les situations des losanges (cf. Berthelot et Salin, 1992) (non présentée à l'atelier)****:* Dans une première séance, il s'agit d'« envoyer un message écrit (sans dessin ni figure) à l'autre groupe de son équipe contenant tous les renseignements nécessaires pour que celui-ci puisse réaliser la figure sans la voir. La figure doit être superposable à la figure initiale ». Dans une seconde séance, il est procédé à une analyse détaillée des messages.
Cette progression permet aux les élèves :
1) d'expérimenter des tracés du cercle, avec ficelle puis éventuellement avec compas, et de relier les deux conceptions (points à même distance du centre, 'rond' tracé au compas) ;
2) de réinvestir les problèmes de distance dans la situation des triangles ; éventuellement de faire le lien avec le cercle/le compas ;
3) d'analyser une figure plus complexe (losange) et de la référer aux triangles déjà vus.

2.3 Constitution du répertoire de représentation

Dans la constitution du milieu de la situation expérimentée, la schématisation a pris des formes variées, plus ou moins exploitables directement dans une perspective géométrique.
Dans un premier temps, nous exposons les différentes stratégies adoptées par les élèves dans les situations du cercle et du triangle. Ensuite, nous montrons les liens créés par les élèves via les situations tout au long de la progression, afin de déterminer ce qui peut constituer un répertoire de représentation.

2.3.1 Les stratégies des élèves et la constitution du répertoire de représentation

La situation du cercle
Dans le *micro-espace*, trois stratégies ont été recensées :

- Tracé au compas, puis marquage des points sur le cercle tracé au compas. Vérification de la distance avec la bandelette du centre aux points tracés sur le cercle point par point.
- Tracé avec la bandelette en partant du centre.
- Tracé d'un segment parallèle au segment donné et tracé d'un maximum de points sur le segment parallèle tracé avec la bandelette.

Dans le *méso-espace (la cour de récréation)*, cinq stratégies ont été recensées :

- Tourner avec la corde fixée au point tracé dans la cour et tentative d'utilisation de la règle et des fiches (peut-être comme avec la bandelette en classe).
- Tracé avec la corde bien tendue.
- Tracé point par point, du point tracé dans la cour à la distance de la corde puis tracé du cercle sur les points déjà tracés.
- Tracé du cercle et des points par-dessus (un maximum de points). Chaque élève du groupe trace un maximum de points de son côté.
- Tracé du cercle avec des pointillés et vérification avec la règle de la distance tracée avec la corde. Deux méthodes utilisées : certains élèves vérifient avec la règle point par point et d'autres vérifient avec la corde.

La situation du triangle

Dans le *micro-espace*, quatre stratégies ont été recensées :

- Essais à différents endroits de la feuille et non en se servant de l'essai précédent. L'élève relie les trois segments et se rend compte que le troisième segment n'est pas de même mesure.
- Addition de la mesure de tous les segments et division de la somme en trois pour obtenir trois segments de même longueur (méthode utilisée par un seul élève).
- Tracé en se servant de deux instruments pour « croiser » deux segments. Tâtonnement avec les deux instruments.
- Tâtonnement avec plusieurs essais sur les essais précédents.

Dans le *méso-espace (au tableau)*, deux stratégies ont été recensées :

- Tracé en se servant de la règle et de l'équerre. L'élève trace un premier segment horizontal puis met un des instruments à chacune des extrémités. Il croise la règle et l'équerre par tâtonnement jusqu'à obtenir les bonnes longueurs des deux autres segments par coïncidence. Il doit gérer deux paramètres, deux dimensions d'espace qui influent ensemble.
- Tâtonnement avec plusieurs essais sur les essais précédents. Apparition d'un arc de cercle.

Nous pensons qu'un changement de repère aurait pu être effectué dans la cour afin de réactiver les représentations développées lors de la situation sur le cercle. Nous aurions pu donner des cordes aux élèves en guise de règle. Cette situation avait été prévue dans la progression mais pour des raisons logistiques liées à l'école, cette séance n'avait pas pu être menée.

2.3.2 Les liens entre les situations expérimentées

Pour la situation du cercle, les deux méthodes (« point par point » et « tracé de la ligne ») vont permettre de créer des liens en ce qui concerne le report de longueur et la conservation de la distance. Pour les élèves, « *la corde elle garde toujours la même distance* », « *ça fait comme un compas* […] *la corde* », « *un compas géant* », « *c'est pas un compas, c'est un rayon* », « *c'est pareil, pourquoi ?* », « *le rayon est aussi à la même distance* ».

Dans la situation du triangle, la validation avec les baguettes en bois va permettre d'amener les élèves à adopter une autre méthode de construction avec l'utilisation du compas et de la triangulation. Un élève réactive ses représentations de la situation sur le cercle. Selon lui, il faut « *tracer deux cercles qui se croisent pour obtenir un point* ». Il prend la longueur des segments comme rayon. Il fait allusion aux tracés des cercles dans la cour avec les cordes.

Un autre lien est effectué dans la situation du triangle avec la situation suivante sur les losanges (qui n'a pas fait l'objet d'une présentation à l'atelier par manque de temps). En effet, lorsqu'un élève explique sa méthode avec l'utilisation du compas, il trace deux points symétriques de part et d'autre du premier segment horizontal tracé au tableau. Il identifie la figure obtenue comme étant un losange ; or celle-ci était un cerf -volant. Ce faisant, cet élève élargit son propre répertoire de représentation et également celui de ses camarades de classe : il y a en effet identification du cerf-volant. Cette allusion au losange resservira néanmoins dans la situation de communication prévue. La construction de triangles pourra être réinvestie dans la construction du losange (décomposition du losange et reproduction par triangulation). On observe alors une progression de situations : les situations sur le cercle sont réinvesties dans la situation de construction du triangle, qui elle-même servira dans la situation sur les losanges.

2.3.3 Stratégies et liens : constitution du répertoire de représentation

Nous présentons quelques questions que les élèves se sont posées dans les différentes situations et les moyens mis en œuvre, associés à la constitution du répertoire de représentation.

***Dans la situation du cercle** :*

Les questions que les élèves ont pu se poser sont celles de l'identification d'un ensemble de points à une même distance d'un autre, celles du report de longueur (comment et avec quel(s) outil(s) conserver la mémoire de la distance ?) et celles de la matérialisation des points (un point n'est pas encore pour eux un élément « non visible » d'une ligne). De plus, pour résoudre le problème demandé, les élèves ont remarqué qu'ils pouvaient utiliser la ficelle proposée comme un « compas géant » dans un espace à trois dimensions.

***Dans la situation du triangle** :*
La question principale que les élèves ont pu se poser est celle du report de longueur : comment et avec quel(s) outil(s) conserver la longueur d'un segment et ajuster les segments entre eux ?
En lien avec la situation du cercle, les élèves ont utilisé le compas en référence à ce qu'ils nomment le « compas géant » pour répondre à leurs questionnements. Ceci leur permet de matérialiser ce que peut être un point (intersection de deux cercles) et de se rendre compte qu'ils peuvent obtenir un deuxième point symétrique du premier par rapport à la base du triangle. Ainsi, lors de la verbalisation d'un programme de construction du triangle quelconque et lors de l'obtention de deux triangles symétriques, un lien est effectué avec la situation sur les losanges. D'autre part, la matérialisation du point comme intersection de deux arcs de cercles a été effectuée par glissements successifs des segments.
Enfin, les élèves ont également fait allusion à la notion de rayon lors de l'utilisation des baguettes en bois matérialisant les segments du triangle lors de la phase de validation.

Dans la notion de répertoire nous pouvons distinguer la nature des éléments mis en jeu : actions, traces, symboles… Ces éléments, plus ou moins sophistiqués et d'un symbolisme plus ou moins achevé, montrent que les élèves ont accès à des niveaux différents de conceptualisation, et que tous ne sont pas prêts à passer au caractère générique de l'objet géométrique.
Cette observation des stratégies et des liens nous donne à penser que l'on peut parfois être amené, dans l'enseignement 'ordinaire', à sauter des stades nécessaires. Les élèves ne sont manifestement pas tous prêts à concevoir des représentations « canoniques » du cercle par exemple. En ce sens, la plupart des situations proposées en primaire, qui insistent sur les représentations mathématiques auxquelles le professeur va aboutir, nous paraissent prématurées, comme nous le disions pour l'ouvrage ERMEL Géométrie.
Les objets qui apparaissent dans les schématisations peuvent alors déboucher plus ou moins sur des savoirs géométriques. Ceci permet à terme la constitution d'un milieu de référence. Par exemple, lors de la situation des triangles, un élève vient au tableau exposer sa démarche en nommant ce qu'il définit comme « la technique du compas » comme sa méthode de référence utilisée et élaborée lors de la situation sur le cercle. Cette « technique » est celle de la triangulation en utilisant le compas comme outil.
La prise en considération de la schématisation permet par ailleurs un développement des ostensifs propre à ce niveau de milieu dans les situations : la production d'une multitude de représentations non canoniques permet aux élèves de chercher avec leurs propres moyens. A l'école primaire, il n'est sans doute pas nécessaire de chercher à aller systématiquement plus loin, même si certains élèves en sont manifestement capables.

3 CONCLUSION

Un de nos objectifs de recherche était de mettre en évidence le rôle des représentations et leur progression possible. Ceci a bien été observé lors de la mise en place de la progression car les élèves ont pu créer des liens entre les différentes situations proposées (« technique du compas » utilisée pour la situation des triangles et méthode de triangulation utilisée pour la situation sur les losanges). Un second objectif était de définir ce que peut être un répertoire de représentation et d'en préciser sa fonction. Ce répertoire se confectionne au niveau du milieu objectif (milieu de recherche) et au niveau du milieu de référence (milieu de validation). Il se constitue à travers les expériences pour anticiper les figures attendues et pour argumenter sur les solutions géométriques possibles. Il constituera une base pour la géométrie déductive à un moment donné de la scolarité. Ainsi, les élèves se familiarisent avec un certain nombre de représentations qu'ils vont être amenés à manipuler.

D'après les premiers éléments d'analyse de la progression mise en place, nous pensons que la phase de schématisation nous permet d'établir des constats, d'analyser les signes dans les schémas produits par les élèves, afin de proposer une démarche constructive de connaissances et de savoirs. De plus, nous faisons l'hypothèse que la prise en compte de la schématisation dans l'enseignement de la géométrie à l'école primaire permet aux élèves de proposer des raisonnements basés sur leur schéma. Il est alors possible de voir émerger, dans la situation, un raisonnement sur un objet géométrique : par exemple sur le cercle, sur le nombre de points d'intersection de deux cercles, etc … comme nous avons pu le montrer dans les vidéos.
Enfin nous pensons nécessaire que les élèves s'entraînent à faire des schémas et à les décoder, afin de disposer d'expériences leur permettant plus tard d'interpréter les figures géométriques. Sur cette question de l'expérience en mathématiques, on relira avec profit Briand (2007).

4 BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M., ROBINET (1982) Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *RDM* **3 (1),** 5-60, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BERTHELOT R., SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans le cycle obligatoire,* Université Bordeaux I.

BERTHELOT R., SALIN M.H. (1993-1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, **53**.

BLOCH I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieux dans la Théorie des Situations Didactiques : recherche d'une dialectique scientifique entre analyses théoriques et contingence. *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 125-139, Dorier et al., La Pensée Sauvage, Grenoble.

BLOCH I. & PRESSIAT A. (2009) L'enseignement de la géométrie, de l'école au début du collège : situations et connaissances, *Nouvelles Perspectives en Didactique des Mathématiques,* p. 51-73, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BLOCH I. & SALIN M.H. (2004) Espace et géométrie : géométrie dans le méso-espace à l'école élémentaire et au début du collège. *Actes du XXXème colloque COPIRELEM*, IREM Paris 7.

BRIAND J. (2007) La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe. *Petit x*, **75**.

BROUSSEAU G. (1983) Etude de questions d'enseignement, un exemple de géométrie, *Séminaire des mathématiques et de l'informatique IMAG*, Université de Grenoble.

COMBIER G., PRESSIAT A. (2003) Apprentissages géométriques au début du Collège, *INRP*, *Actes du colloque inter-IREM 1er cycle de Montpellier*, Quelles géométries au collège ? "Geste physique, geste virtuel, geste mental", IREM de Montpellier.

ERMEL (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes.* Paris : Hatier.

GIBEL P. (2009) Analyse des connaissances et des savoirs utilisés par les élèves lors de l'élaboration de raisonnements en situation adidactique à l'école primaire, *Actes du colloque EMF,* Dakar.

GOBERT S. (2001) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire* Thèse, Université Paris 7.

GOBERT S. (2007) Conditions nécessaires à l'usage des dessins en géométrie déductive, *Petit x,* **74**.

GONSETH, F. (1945 à 1955) *La géométrie et le problème de l'espace.* Neuchâtel : Editions du Griffon. (Tome IV : La synthèse dialectique)

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol. **11**, Strasbourg.

MARGOLINAS C. (1994) Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe, *Séminaire didactique et technique, n°158*, Université J. Fourier, Grenoble.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2008) *Programmes et Instructions Officielles,* www.eduscol.education.gouv.fr

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.J., VERBAERE O. (2007) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM 2. *Petit x,* **72**.

OSEL C. (2007) *Le problème de la constitution des références spatiales par le biais des schématisations,* Mémoire de Master, Université Bordeaux2.

TIERCELIN C. (1993) *La pensée signe. Études sur C.S. Peirce.* Nîmes : Jacqueline Chambon

Annexe : Descriptif des situations

SITUATION 1 : LES CERCLES

Cette situation est expérimentée dans une école primaire à Lourdes (65) en CM1 le jeudi 12 mars 2009. Nous reprenons les travaux de M. Artigue et Robinet (Artigue et Robinet, 1982).
La classe de CM1 est constituée de 22 élèves.
Nous donnons une définition des différents espaces dans lesquels se produisent les situations proposées (Brousseau, 1983) :
-le *micro-espace* : c'est l'espace des petits objets que l'on peut déplacer, manipuler. On peut les percevoir de façon exhaustive. Le sujet est à l'extérieur de cet espace.
-le *méso-espace* : c'est l'espace des objets fixes qui ont une taille entre 0,5 et 50 fois la taille de l'enfant. Ces objets peuvent être vus globalement, pratiquement de façon simultanée. Le sujet fait partie de cet espace. C'est par exemple l'espace de la classe, de la cour de récréation,…
-le *macro-espace* : c'est celui de l'espace urbain. Le sujet ne peut en avoir que des visions locales, la vision globale ne peut être qu'une construction intellectuelle. Le sujet est à l'intérieur de cet espace.

<u>Objectif général</u> : Installer le cercle comme lieu des points situés à une distance donnée d'un point fixé.
<u>Objectif secondaire</u> : Installer la propriété caractéristique d'un point du cercle. Préserver la mémoire de la longueur.
<u>Descriptif de la séance</u> : Dans un premier temps, les élèves vont agir dans le micro espace. En classe, ils auront à leur disposition une feuille de papier A3 sur laquelle figurent un rectangle représentant la cour de récréation, un segment et un point. Ils devront schématiser l'ensemble des points situés à la même distance du point tracé. La distance à ce point est matérialisée par le segment. La vérification s'effectuera avec une bande cartonnée à la dimension du segment.

Ensuite, dans le méso-espace de la cour, par groupes de 5-6, les élèves devront trouver à nouveau cet ensemble de points. Ils disposeront de cordes de longueurs et de couleurs différentes, d'une règle de 1 mètre et de craies de couleur (pour éviter les reproductions d'un groupe à l'autre et permettre une différenciation avec les couleurs pour la vérification). La vérification s'effectuera avec une corde sur laquelle il y aura des marques des différentes couleurs correspondant aux différentes longueurs.

<u>Consigne du micro-espace</u> : « Sur cette feuille, la cour est dessinée. Dans la cour, il y a une corde et un point. Vous devez tracer le plus possible de points à la même distance du point tracé sur la feuille. Le segment dessiné représente la corde dont vous disposerez lorsque vous irez travailler dans la cour. Vous pourrez vérifier si tous les points que vous avez tracés sont à la bonne distance avec cette bande cartonnée qui est à la dimension de la corde. Je vous donnerai la bande lorsque vous estimerez avoir résolu le problème ».
<u>Matériel du micro-espace</u> : Feuilles A3 avec la cour représentée, Bande cartonnée à dimension du segment de la feuille A3. Les élèves disposent de règle graduée, équerre et de compas.
<u>Consigne du méso-espace</u> : « A présent, vous êtes dans la cour. Vous allez devoir tracer sur le sol le plus possible de points situés à la même distance du point qui est déjà tracé par terre. Vous avez à votre disposition des craies, une corde par groupe et une règle de 1 mètre. Vous pourrez vérifier si vos points sont à la bonne distance avec la corde qui a des traits de différentes couleurs mais seulement une fois que vous serez certains d'avoir résolu le problème. Chaque groupe aura une couleur attitrée, la corde et la craie de couleurs associées. ».
<u>Matériel du méso-espace</u> : 4 cordes de couleurs et de longueurs différentes (L>1m), 4 règles de 1 mètre non graduées, des craies de couleurs, une corde avec des traits de différentes couleurs tracés sur celle-ci. Ces traits matérialisent les 4 longueurs des cordes de couleur dont les élèves disposent. Cette corde est pour la maîtresse à fin d'effectuer les vérifications. Le fait que la professeur utilise la même corde pour vérifier permet de mieux mettre en évidence la similitude des tâches des quatre groupes.

Etape de justification : Sur une feuille, demander à chaque groupe ce qui leur permet de dire que leur méthode est bonne. Puis, leur demander ce qu'ils pourraient dire de tous les points à égale distance du point tracé au sol.

SITUATION 2 : LES TRIANGLES

Cette situation est expérimentée à l'école primaire du Lapacca à Lourdes (65) en CM1. Nous reprenons les travaux du COREM, école Michelet de M.H.Salin.
La classe de CM1 est constituée de 22 élèves.

Objectifs généraux :
- Construire un triangle à partir de segments donnés et à partir d'un message écrit par un camarade.
- Prendre conscience que le compas est l'instrument de conservation et report d'une longueur.
- Formuler et communiquer sa démarche de construction.

Compétences :
- Construire quelques figures.
- Utiliser des outils usuels tels que papier calque, règle, compas, etc… pour construire une figure plane.

Descriptif de la séance : Les élèves vont agir pendant toute la séance dans le micro espace et seuls. La mise en commun s'effectuera dans le méso espace au tableau en groupe classe.
Dans un premier temps, les élèves ont à leur disposition une feuille A4 sur laquelle sont tracés 3 segments de différentes longueurs et de différentes couleurs (le plus long est en vert, le plus court en bleu et le troisième en rouge). Ils sont en oblique sur la feuille les uns en dessous des autres. Le plus long a une mesure supérieure à 21 cm (largeur d'une feuille A4).
Les élèves pourront construire 4 triangles différents dont les mesures sont les suivantes :
Triangle A: 25 cm, 16 cm, 12 cm
Triangle B: 23 cm, 18 cm, 10 cm
Triangle C: 24 cm, 17 cm, 11 cm
Triangle D: 27 cm, 15 cm, 13 cm

Variables : les longueurs des segments, la feuille de papier, les instruments.
Matériel : Feuilles A4 avec les segments de couleur tracés, feuille A4 pour la construction, stylos feutres bleu, vert, rouge, baguettes en bois pour la validation lors de la mise en commun, craies de couleur, compas, règle, équerre, crayon de papier, gomme.
Consigne du micro-espace : « Chacun d'entre vous va recevoir une feuille blanche sur laquelle sont dessinés trois segments (vous n'aurez pas les mêmes segments) et une feuille blanche pour établir la construction. Vous allez travailler seul. ».
Montrer le matériel en même temps.
« Vous allez devoir construire un triangle par assemblage des trois segments dessinés. Vous devez travailler au feutre et utiliser les mêmes couleurs que sur les segments modèles. Lorsque vous avez terminé, vous m'appelez pour vérifier. Vous avez 10 minutes » (numéroter les essais sur la feuille).
Consigne du méso-espace : Les trois segments sont tracés sur le côté du tableau. Les élèves qui ont tâtonné passent au tableau pour expliquer leur démarche.
Nous gardons le même segment pour base. Avoir beaucoup d'essais sur une même base, sur un même segment afin qu'un arc de cercle se dessine.
Faire décomposer les élèves qui font des économies. Par exemple, la base et un segment sont donnés. L'élève ne trace pas le troisième segment avec la règle et voit que cela ne coïncide pas. Lui demander de tracer le segment pour que tout le monde puisse voir que le triangle ne peut pas se former puisque les deux extrémités des segments ne coïncident pas. Ainsi, apparaissent les essais successifs pour chaque segment.

Devant plusieurs essais pour un segment, demander aux élèves s'ils n'auraient pas pu positionner les points des extrémités du segment sans utiliser la règle (utilisation du compas).

Montrer la simulation au tableau avec les baguettes de couleur en les déplaçant sur les différents essais en gardant une extrémité fixée à un des sommets de la base afin que les élèves puissent constater le déplacement du segment et plus particulièrement de l'extrémité non fixe mais aussi la conservation de la mesure du segment.

Étape de justification : Dans le micro espace avec les triangles dessinés sur papier calque. Et dans le méso espace avec les baguettes de bois représentant les segments au tableau.