Atelier A2

TRANSPOSER EN FORMATION DES RÉSULTATS DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION DE POSITION AU COURS ÉLÉMENTAIRE.

Chambris Christine,
IUFM de l'académie de Versailles, Université de Cergy-Pontoise
Laboratoire de didactique André Revuz (Didirem – LDSP), Université Paris 7
cchambris@free.fr

Résumé
L'atelier s'est donné comme objectifs principaux de diffuser les résultats d'une recherche auprès des formateurs et de réfléchir à la pertinence de leur utilisation dans la formation des enseignants.
Dans un premier temps, en utilisant les résultats issus de la recherche, l'article rappelle le rôle de la « numération en unités » dans l'étude de la numération décimale de position : stable avant la réforme des années 70, quasi inexistant dans les années 70-80 avec un retour progressif mais partiel jusqu'à nos jours.
Pour montrer la place actuelle de la « numération en unités », l'auteure s'appuie sur l'étude de deux extraits de manuels scolaires de CE2 (« Le Nouvel Objectif Calcul » de 95 et « Le Cap Math » de 2007) : dans ces deux ouvrages, la place de la « numération en unités » est minimisée par rapport à l'utilisation des écritures chiffrées des puissances de dix qui en quelque sorte la remplace.
L'auteure montre également que dans les ouvrages récents, la « relation entre les unités » est peu présente et en particulier que les tâches de conversion ont pratiquement disparues pour être remplacées par celles de type « nombre de, chiffre des » de plus en plus diversifiées.
Dans un second temps, l'article aborde les problèmes de la formation, de façon beaucoup plus empirique.
Il énumère les tâches proposées aux différents publics pour étudier l'utilisation de la « numération en unités » et la compréhension des « relations entre unités ».
Le retour sur une formation continuée montre la difficulté de faire pénétrer la dimension « relation entre unités » dans la pratique des enseignants du fait que celle-ci, difficile, n'est pas forcément nécessaire pour réussir les tâches habituellement proposées.
Les apports des participants à l'atelier sont rapidement évoqués pour souligner l'intérêt, porté par certains, à l'aspect « échanges » à travers la monnaie. L'auteure tient à préciser que la dialectique « groupement/échange » ne date que de la réforme et permettait alors d'accompagner les manipulations des différents matériels introduits.

1 PROBLÉMATIQUE

Nous avons conduit une recherche sur l'enseignement de la numération de position des entiers en France, au cours élémentaire, au 20e siècle (Chambris 2008 2009). Dans ce cadre, nous avons établi des résultats relatifs aux évolutions de cet enseignement pendant un siècle. Pour de multiples raisons, la période de la réforme des mathématiques modernes[1] apparaît cruciale dans ces évolutions. Nous parlerons d'ailleurs globalement de l'enseignement d'*hier* (ou *ancien*) pour désigner la période antérieure à la réforme, qui n'est pourtant probablement pas si uniforme.
En quoi l'enseignement de la numération hier est-il différent de celui d'aujourd'hui ? Ces différences se limitent-elles à des modifications dans la conception sous-jacente de l'apprentissage (de façon caricaturale, passage d'une conception transmissive à constructive) ? Peut-on repérer des « objets »

[1] Dans la suite du texte, nous parlerons de « la réforme ».

d'enseignement anciens qui ont disparu mais qui semblent pertinent pour l'enseignement actuel ? Le cas échéant, comment les enseignants actuels peuvent-ils se les approprier, les intégrer dans leur enseignement ? Comment les former ?
L'objet de l'atelier est donc d'une part de diffuser les résultats de notre recherche auprès des formateurs, d'autre part de réfléchir à leur diffusion et à la pertinence de leur utilisation auprès des enseignants en formation, voire des formateurs.

2 DES RÉSULTATS DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION DE POSITION DES ENTIERS

Nous avons étudié l'évolution de l'enseignement de la numération de position des entiers en France au 20e siècle. Notre corpus de données était constitué d'une part de manuels scolaires du 20e siècle (1900 à 2004) (à ces manuels scolaires, nous avons ajouté l'extrait du traité de Reynaud relatif à la numération) (Bezout & Reynaud 1821, traité de Reynaud, §2) ; d'autre part de productions d'élèves de CM2 (en 2006).
Nous avons utilisé le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992). En particulier dans ce texte, nous nous référons explicitement à trois des quatre composantes d'une praxéologie (moyen de décrire une pratique). Dans une praxéologie, on a un *type de tâches*, c'est à dire un ensemble de tâches problématiques qui se ressemblent (en un certains sens). Ce type de tâches peut être traité par un moyen : la *technique*. Il s'agit de répondre à la question : comment fait-on pour traiter les tâches ? Le moyen (la technique) peut être justifié par une *technologie*, répondant donc à la question : pourquoi la technique fonctionne-t-elle ?
Nous présentons ci-après quelques uns de nos résultats. Nous commençons par deux éléments relatifs à la numération avant la réforme : d'une part un objet banal mais essentiel que nous avons appelé la *numération en unités*, d'autre part la théorie de la numération de position telle qu'on peut la trouver avant la réforme et les discours justificatifs, associés à cette théorie, mis à disposition des élèves pour traiter différentes tâches. Nous mettons ensuite ces éléments en correspondance avec l'enseignement actuel. Nous nous intéressons enfin à un objet qui semble fragilisé aujourd'hui : les relations entre les unités.

2.1 À propos de la numération avant la réforme et du rôle de la numération en unités

2.1.1 Un système pour désigner les nombres : la numération en unités

« La numération en unités » est donc un système particulier pour désigner les nombres. Il s'agit de les désigner en utilisant les mots « unités », « dizaines », « centaines », c'est-à-dire les noms des unités de la numération. Ainsi, parlera-t-on du nombre « six centaines trois unités ». Nous ne distinguons pas le fait d'écrire en lettres ou en chiffres le six et le trois. Ce système de désignation a différentes propriétés : il permet notamment de régulariser la numération orale. Ainsi, « trente » devient « 3 dizaines » (et « soixante-dix », « 7 dizaines »). Il n'est pas univoque, en ce sens qu'un nombre donné a plusieurs désignations dans la numération en unités : « 56 centaines » et « 5 milliers 6 centaines » désignent le même nombre. Il est également plus « souple » que la numération orale. Cette souplesse est probablement liée au fait qu'il n'est pas univoque. Ainsi, « dix cents » n'existe pas en numération orale. Quand on compte de cent en cent, après neuf cents, il y a mille, alors qu'en numération en unités, après « 9 centaines », il peut y avoir « 1 millier » et aussi « 10 centaines ». Ce peu de souplesse de la numération orale n'est pas spécifique de la langue française dans laquelle on utilise des mots différents, « cent » et « centaine », pour désigner respectivement le nombre à l'oral et le nom de l'unité. En anglais où on utilise le même mot « hundred », « ten hundreds » ne relève pas de la numération orale (on dit « one thousand ») mais bien de la numération en unités.

2.1.2 La théorie classique : deux parties imbriquées et complémentaires

Que ce soit dans le traité de Reynaud (Op. cité)[2] ou dans les manuels scolaires antérieurs à 1945, l'étude de la numération de position des entiers semble très stable. Nous identifions deux parties qui ont des dimensions mathématiques différentes dans l'exposé de la numération tel qu'il apparaît dans nos documents.

La première partie constitue un algorithme pour construire la suite des nombres. Elle utilise la numération en unités. On construit les nombres en organisant une collection. On trouve d'abord le discours suivant : « Pour former les nombres, on part de l'unité ; l'unité ajoutée à elle-même donne un nombre nommé *deux* (…) » On poursuit ainsi en ajoutant « une unité » à chaque nombre obtenu jusqu'au nombre « dix ». Ensuite, « la collection de dix unités forme un nouvel ordre d'unités, nommé dixaine[3] ». On poursuit en indiquant qu'on compte par dizaines comme on a compté par unités. Cela signifie qu'on compte une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, jusqu'à dix dizaines. À ce moment-là, on a donc construit les nombres de un à dix ainsi que les dix premières dizaines entières. La suite du discours consiste alors à combler les « trous » entre deux dizaines, en ajoutant les nombres de un à neuf. On a donc construit les nombres jusqu'à neuf dizaines neuf unités (et dix dizaines).

On poursuit en fabriquant une nouvelle unité : la centaine qui est à la fois dix dizaines et 9 dizaines 9 unités auxquelles on a ajouté 1 unité. Et on reprend le processus : on compte par centaines comme on compte par unités et dizaines. C'est-à-dire qu'on compte une centaine, deux centaines, jusqu'à dix centaines. On a alors construit les nombres de un à cent et les dix premières centaines entières. Le processus engagé pour les dizaines est poursuivi au niveau des centaines puisqu'on comble les « trous » entre deux centaines en ajoutant les 99 premiers nombres. Par exemple, entre trois et quatre centaines, on a : trois centaines et une unité, trois centaines et deux unités, …, trois centaines et une dizaine, trois centaines une dizaine et une unité, …. C'est-à-dire qu'entre deux centaines, on ajoute les nombres déjà construits. On poursuit ensuite le processus avec les milliers, etc.

Voici maintenant la deuxième partie de la théorie. À la construction algorithmique de l'ensemble des entiers s'ajoute l'élaboration de deux correspondances : l'une entre numération en unités et numération orale, l'autre entre numération en unités et numération de position.

La première consiste en une traduction terme à terme de la numération en unités vers la numération orale : 5 centaines se dit « cinq cents », 3 dizaines se dit « trente » donc 5 centaines 3 dizaines se dit « cinq cent trente ».

La deuxième consiste en l'énoncé d'une correspondance entre les unités de la numération et la place des chiffres dans la numération de position : « On convint que de plusieurs chiffres mis à côté les uns des autres, le premier, à partir de la droite, exprimerait des unités du premier ordre, ou unités simples ; le deuxième, des unités du deuxième ordre, ou dixaines ; le troisième, des unités du troisième ordre, ou centaines ; et ainsi de suite ».

Nous voyons donc la première partie de la théorie de la numération comme une construction de la suite des nombres avec la numération en unités qui utilise deux types de discours fondamentaux :

- Relations entre unités (R) : 1 millier = dix centaines
- Comptage des unités (C) : On compte par centaines comme on a compté par unités.

Les deux autres discours (P et O) relient la numération de position et la numération orale à la numération en unités. Cette dernière apparaît alors comme un pivot.

Numération positionnelle 530

Position (P) : Dans l'écriture d'un nombre, le chiffre des centaines occupe la troisième place à partir de la droite

Numération en unités 5c 3d

Numération orale cinq cents trente

Oral (O) : 5 centaines se dit cinq cents, 3 dizaines se dit trente. 5 centaines 3 dizaines se dit cinq cents trente.

---

[2] Les citations de ce paragraphe en sont extraites.

[3] Orthographe d'époque.

Soulignons que contrairement aux numérations positionnelle et orale, la numération en unités n'est probablement pas une pratique sociale.

2.2 Éléments sur l'enseignement de la numération de position aujourd'hui

Nous avons dit que le moment de la réforme est crucial pour comprendre la situation actuelle qui est en fait le produit d'évolutions continues depuis 40 ans. Pourtant, nous ne donnons pas d'indications précises sur ce qui s'est passé au moment de la réforme. En effet, si la mise à jour de ces éléments est déterminante sur le plan de la méthodologie de notre recherche, elle ne nous semble pas indispensable pour réfléchir à la formation des enseignants actuels.

2.2.1 La place des unités de la numération aujourd'hui, les ECPD

Pour montrer la place des unités de la numération aujourd'hui, nous proposons des extraits de manuels scolaires récents. Il s'agit du Nouvel Objectif Calcul CE2 (1995) et de Cap Maths[4] CE2 (2007).
Dans Le Nouvel Objectif Calcul CE2, nous nous intéressons à la deuxième leçon de numération de l'année (étape 4), elle est intitulée « Numération : groupements » (pp.14-15). Nous observons que la double page destinée aux élèves ne mentionne pas les unités de la numération. À la place, on a : la numération orale, cent et dix, et ce que nous avons appelé les *écritures chiffrées des puissances de dix 1, 10, 100, 1000* (ECPD). Le livre du maître (pp.27-30) (Annexe 1) est « conforme » au livre de l'élève puisqu'il ne mentionne pas davantage les unités de la numération (plus exactement, ces unités y sont utilisées à quelques reprises dans les locutions du type *compléter à la centaine supérieure*).
On observe à l'étape 4, le rôle des ECPD. En particulier, le calcul en ligne 100 +100 + 100 + 100 + 100 +100 +100 + 100 + 100 + 100 = 1000 remplace le discours classique (R) : « 10 centaines = 1 millier » et l'addition *implicitement* posée (ce qui permet à chaque chiffre de conserver sa place), 1000+1000+500 = 2500, remplace le discours classique (P) : « le chiffre des centaines (resp. des milliers) occupe la 3^e^ (resp. la 4^e^) position ».
Signalons que les unités de la numération et les relations entre ces unités apparaissent dans l'aide mémoire de la leçon (p.174). Ajoutons que la première leçon de numération de l'année (étape 2) « Numération : dénombrement » ne fait pas davantage référence aux unités de la numération (à l'exception d'une mention dans le livre du maître pour désigner les chiffres du nombre comme aide dans une tâche relative au repérage d'une règle dans une suite d'écritures chiffrées). Ces unités apparaissent (dans le livre du maître) dans la troisième leçon de numération intitulée « Numération : échanges » (étape 5) dont l'objectif est « grouper et échanger selon la règle « dix contre un », pour comprendre la numération écrite ». Le contexte est celui du boulier où « dix unités [s'« échangent »] contre une dizaine (de la 1re à la 2e tige), 10 dizaines contre 1 centaine (de la 2e tige à la 3e tige) […] ». Dans un exercice de la leçon, des échanges de monnaie apparaissent. Les unités de la numération désignent des positions et aussi des « valeurs » qui s'échangent.
Dans le manuel Cap Maths (2007) (Annexe 2), la première leçon (Unité 7 Séance 1) sur les nombres de 4 chiffres est consacrée au nombre mille. La relation 1 millier = 10 centaines n'y apparaît pas explicitement, le mot millier n'est ni dans le livre de l'élève, ni dans celui du maître.
On observe que les ECPD et la numération orale sont présentes contrairement aux unités de la numération et, même si ce qui permet de justifier que $1000 = 100 \times 10$ reste ambigu, la seule justification explicitement proposée est la « règle des zéros ». Nous considérons qu'elle remplace le discours classique (R). Signalons que le discours (R) apparaît dans le dico maths, Tempier (2009, p.57) conclut « nous n'avons pas trouvé non plus de référence à ces équivalences [les discours (R)] dans le manuel ou le guide du maître, ou d'activités qui pourraient y conduire. ».
La leçon suivante (Unité 7 Séance 2) est consacrée aux nombres supérieurs à 1000. Elle met en place des techniques pour obtenir une écriture chiffrée à partir de sommes proposées en ECPD :

---

[4] Pour cette étude, nous nous référons à Tempier (2009).

> « au début les calculs sont laissés à l'initiative des élèves. Certains peuvent poser des additions du type 10 000 + 10 000 + 10 000 + … (ce qui est assez fréquent), calculer des produits comme 4×10 000 (en prolongeant la règle des 0) ou répondre directement 40 000. On laissera se développer ces différentes pratiques, et ce n'est qu'au cours de la séance qu'est introduit le tableau de numération qui permet de trouver rapidement l'écriture du total des points. Mais il ne serait pas opportun de systématiser son utilisation, ce qui risquerait de conduire les élèves à ne plus réfléchir à la valeur des chiffres dans l'écriture du nombre ». (Cap Maths CE2 2007, livre du maître, p.150).

Tempier (2009, p.56) indique « Cette fois, l'ostensif « numération en unités » apparaît comme un objet de savoir qui permet de nommer les rangs, mais les décompositions » et « recompositions » sont associées aux ECPD et aux ECPDG [ECPD généralisées] ». Ce sont donc des règles de calcul qui permettent de justifier les écritures chiffrées et non des discours de type (P).
D'après notre étude, ces deux exemples sont révélateurs aux évolutions récentes de la place accordée aux unités de la numération : une quasi disparition des unités de la numération dans les années 70-80 avec un retour progressif mais partiel depuis. Cette disparition étant plus nette dans les relations entre les unités que dans la désignation des positions des chiffres, on parle donc souvent du chiffre des centaines sans avoir indiqué qu'une centaine, c'est dix dizaines.
Ces deux exemples montrent que la numération en unités est remplacée, en un certain sens, par les ECPD. Elle avait quasiment disparu et réapparaît avec une fonction différente, pour seconder les ECPD.

2.2.2 Des limites des ECPD

Sur le plan mathématique, les ECPD sont équivalentes aux unités de la numération. Cependant, du point de l'enseignement primaire, des limites apparaissent en particulier lorsqu'il s'agit de justifier certaines techniques. En effet, les ECPD font apparaître des besoins importants en terme de formalisme et de propriétés des opérations. Justifier une retenue dans une addition demande l'utilisation de parenthèses, de factorisations ; de même pour la « règle des zéros » (multiplication d'un nombre d'au moins deux chiffres non nuls par une puissance de dix). La justification de l'algorithme de l'écriture chiffrée avec les ECPD nécessite l'écriture de plusieurs lignes de calcul dont on peut affirmer qu'elles ne sont pas accessibles à la fin du cycle 3. Avec les unités de la numération, un enchaînement de discours permet de justifier toutes ces techniques avec très peu de formalisme.

2.3 Les relations entre les unités

Serfati (2005) écrit à propos de l'interprétation d'un nombre écrit 24579 « comme neuf unités à quoi s'ajouteront sept dizaines, etc. deux dizaines de milliers enfin. Si immédiate qu'elle nous paraisse aujourd'hui, cette interprétation aura cependant requis deux aspects distincts et liés, position et décimalité, dont la conjonction signifiante n'était nullement allée de soi des siècles durant ». Nous nous intéressons maintenant spécifiquement à la décimalité, à savoir donc, le fait que les unités successives de la numération sont liées par une relation de dizaine. À son propos, notre étude de manuels anciens nous a permis d'identifier un type de tâches : les conversions. Il n'existe quasiment plus aujourd'hui en numération, nous y reviendrons.

2.3.1 La structuration du type de tâches classique : les conversions

Pour présenter le type de tâches « conversions », nous nous limitons à une relation entre unités de la numération, nous étudions les tâches autour du discours technologique : un millier c'est dix centaines. Il s'agit donc de convertir des centaines en milliers (ou l'inverse).
Une synthèse de l'étude des manuels anciens nous permet de caractériser une progression dans le type de tâches au fur et à mesure des leçons de numération (et de système métrique) pour l'ordre donné (ici, les milliers) :
- dans la leçon « le millier » : par exemple, « combien faut-il ajouter de centaines à 200 pour faire un millier ? ». Il s'agit de travailler la relation de millier à centaines (ou de millier à dizaines) à un premier niveau de complexité : 10 pour 1 ou 100 ou 1 ;

- dans la leçon « les milliers » : par exemple, « combien 3 milliers font-ils de centaines ? ». Il s'agit de travailler la relation à un deuxième niveau de complexité : autour des relations du type X0 pour X ou X00 pour X.
- dans la leçon « entre deux milliers » : par exemple, « combien y a-t-il de milliers dans 35 centaines ? » (la réponse est 3 milliers 5 centaines ; la technique que nous avons reconstituée consiste à découper la tâche et à utiliser la leçon précédente : « 35 centaines » se décompose en 30 centaines et 5 centaines, qui font 3 milliers et 5 centaines). Il s'agit donc d'un troisième niveau de complexité qui porte simultanément sur plusieurs chiffres significatifs.
- enfin dans l'étude du système métrique : par exemple avec la leçon « le kilomètre », « écrire en hectomètres 3 km 5 hm ». On retrouve la complexité précédente avec un changement de grandeur manifesté par les unités métriques qui indiquent des « milliers » (kilo) et des « centaines » (hecto).
À cette progression dans les difficultés liées strictement à la numération s'ajoutent des variations dans les contextes et les ostensifs (systèmes de désignation). Il ne s'agit pas forcément d'une véritable progression, mais d'éléments qui permettent d'utiliser une même connaissance dans différents contextes. Nous avons retenu les éléments suivants qui nous semblent significatifs :
- Combien de centaines dans 3 milliers ? (décontextualisé, numération en unités)
- Combien d'enveloppes font 30 paquets de cent enveloppes ? (contexte évoqué, numérations de position et orale)
- Au cours d'une promenade, compter les bornes hectométriques entre deux bornes kilométriques (contexte matériel, numération métrique) ;
- Avec 1 kg de graines de betterave, combien un grainetier peut-il faire de sachets de 100 g ? (contexte évoqué, numérations métrique et de position).

2.3.2 Propriété de la troncature

Nous appelons propriété de la troncature, la propriété de la numération de position que nous formulons à l'aide d'un exemple : « le nombre de centaines » s'obtient en prenant tous les chiffres situés à gauche de celui des centaines (inclus).
On ne peut d'ailleurs exclure que cet énoncé soit parfois entendu comme une *définition* du « nombre de centaines ». Plus précisément, on pourrait définir comme suit « le nombre de centaines d'un nombre N » : c'est le nombre obtenu en prenant tous les chiffres situés à gauche de celui des centaines dans le nombre N (chiffre des centaines compris). Énoncé ainsi, le « nombre de centaines » est un objet lié à l'écriture positionnelle décimale et non aux relations entre les unités de la numération.

2.3.3 La faiblesse de la relation entre unités aujourd'hui, le « nombre de »

Parouty (2005) étudie les compétences des élèves actuels du cycle 3 en numération. Elle propose notamment aux élèves (CE2) de traiter la tâche suivante : « Pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ? » La réussite est de 10%.
Nous avons confirmé ou précisé ces résultats dans (Chambris 2008) avec les tâches (et les réussites) suivantes en fin de CM2 :
- Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ? (R = 20%, réponse 85 ou 86 = 39%)
- Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ? (R = 32%)
Ces éléments nous amènent à faire l'hypothèse d'une faiblesse des élèves dans la connaissance des relations entre unités de la numération. Par suite, nous avons voulu mieux comprendre la situation de l'étude de ces relations aujourd'hui.
Comme les unités de la numération sont peu présentes dans les manuels récents, *a fortiori* les relations entre ces unités ne sont pas toujours explicitées dans ces manuels. Elles sont donc absentes de certains manuels actuels du CE1 ou du CE2.
Dans les manuels actuels, nous n'avons pas trouvé de conversion formulée avec les unités (bien que la formulation ne soit pas véritablement celle d'une conversion, nous signalons une exception avec Cap

Maths CE2 2007 et les nombres de 3 chiffres). Il peut y avoir des tâches qui leur ressemblent, elles sont de deux ordres. Il peut s'agir de :
- faire fonctionner la propriété de la troncature, avec le « nombre de »,
- problèmes concrets d'échanges entre billets de 10 et 100 par exemple (très rares).
Ces relations semblent revenir progressivement après une quasi-élimination dans les années 70-80. Toutefois, elles apparaissent en général avec le « nombre de », qui a parfois l'air d'être le représentant exclusif de ces relations.
Tempier (2009) a étudié les pratiques de deux enseignants de CE2 en numération. Il observe que l'aspect décimal de la numération n'est quasiment pas traité par eux. Bien qu'il faille rester prudent sur la représentativité des enseignants étudiés, ces résultats auraient tendance à confirmer que notre étude de manuels postérieurs à la réforme est révélatrice de ce que font les enseignants actuels dans leur classe.

2.3.4 Le « nombre de » aujourd'hui : structuration

Nous nous intéressons aux évolutions des tâches autour du « nombre de ». Avant la réforme, le « couple », « nombre de / chiffre des », n'existe pas. On peut demander dans un exercice quel est le nombre de dizaines dans un nombre de la même façon qu'on demande dans un autre exercice combien de dizaines il faut pour faire le nombre. De même, on demande quel est le chiffre des dizaines comme on peut demander ailleurs quelles sont les plus hautes unités d'un nombre de 4 chiffres ou combien il faut écrire de zéros à droite du chiffre 4 pour que celui-ci représente des dizaines, des mille, des centaines.
En revanche, au début des années 70, on trouve le couple cité précédemment. L'introduction du mot NUMERATION dans MOTS III (APMEP 1976, pp. 2-3) se termine par des « questions d'auto-contrôle » (pour que les lecteurs auto-évaluent leurs connaissances). Parmi elles :

> Voici l'écriture 345 (en base dix). Quel est le chiffre des dizaines ? Quel est le nombre de dizaines du naturel ainsi représenté ?

La réponse est proposée quelques lignes plus loin :

> Chiffre des dizaines : 4. Nombre de dizaines : 34 (trente quatre). La question « Combien d'unités dans 345 ? » est ambiguë ; on devrait répondre : « trois cent quarante cinq » et non pas « Cinq ». (Le nombre des unités est trois cent quarante cinq ; le chiffre des unités est 5).

L'opposition « chiffre des / nombre de » apparaît donc ici comme un moyen de supprimer une ambiguïté, crime de la pire espèce en mathématiques modernes. En réalité, de 1970 à 1995, même le « nombre de » est rare (absent dans certains manuels, existant seulement en « calcul mental » ou dans des « mots croisés » dans d'autres). Les exercices sont stéréotypés puisque si l'on veut voir un type de tâches autour du « nombre de », il semble qu'on puisse dire que ce type de tâches est réduit couple de tâches « nombre de / chiffre des » qui se constitue alors en une sorte de dialectique. Dans certains manuels, on voit à cette époque se développer des discours sur le fait qu'un nombre s'écrit avec des chiffres sur le nombre de ces chiffres : par exemple le nombre 456 s'écrit avec 3 chiffres qui sont 4, 5 et 6. Nous n'excluons pas que l'idée qu'« un nombre, c'est quand il y a plusieurs chiffres » se soit consolidée à cette époque. Cette idée constitue un moyen didactique presque totalement efficace pour *distinguer* « chiffre » et « nombre » dans la dialectique annoncée.
À partir de 1995, dans la 2e édition d'ERMEL, les tâches autour du « nombre de » semblent se diversifier. Les exercices « élèves » du sujet 0 du ministère pour le « nouveau » CRPE (annexe 3) constituent un exemple dans lequel la technique de la « troncature » est mobilisée de façon de plus ou moins approfondie selon les exercices.
D'autres exercices demandent une adaptation de cette technique. Ils ne sont pas très répandus dans les manuels mais semblent être néanmoins de plus en plus fréquents : par exemple « Calcule : 3 centaines 21 dizaines » (Euro maths CE2, Hatier 2004).
Nous interprétons les transformations autour du « nombre de » comme une reconnaissance implicite de la nécessité de faire vivre les relations entre les unités, en numération. Dans quelle mesure ces transformations sont-elles adaptées aux besoins de l'enseignement ?

3 PREMIERS ÉLÉMENTS SUR LA FORMATION

Nous entamons maintenant une discussion sur la formation. Sur le plan méthodologique, précisons que si les résultats relatifs aux manuels scolaires ont été établis dans le cadre d'une recherche, il n'en va pas de même de ce qui concerne la formation. Il s'agit d'une démarche beaucoup plus empirique qui tente de s'appuyer, entre autres, sur nos résultats de recherche.
Dans ce paragraphe nous commençons par évoquer des éléments relatifs à la formation des PE1. Cette réflexion sur les PE1 nous permet de repérer certains raisonnements « d'élèves » et des résistances mais aussi des possibilités d'agir que nous utilisons ensuite comme des balises pour étendre à d'autres contextes de formation.

3.1 En préparation au concours PE

Dans le cadre de la préparation au CRPE, les étudiants sont amenés à étudier la numération de position tant sur le plan théorique que didactique. Sur le plan théorique, une partie du travail consiste à leur enseigner des rudiments sur les « bases », un autre volet consiste à les outiller pour traiter algébriquement des problèmes « théoriques », le plus souvent en base dix. Pour ce qui concerne les bases, outre la nécessité d'apprendre à traiter des tâches spécifiques pour le concours, un autre objectif est d'utiliser les bases pour permettre aux étudiants de prendre un peu de distance par rapport à la base dix. Sur le plan didactique, les étudiants peuvent être amenés à analyser des productions d'élèves ou des documents relatifs à l'enseignement actuel de la numération en base dix.

3.1.1 « Volet » théorique

Pour le travail en bases que nous introduisons souvent avec la situation « des moutons » d'Odette Bassis (1991) nous faisons produire aux étudiants des codes de plus en plus sophistiqués pour désigner le cardinal d'une collection (de moutons) *quand on ne sait pas compter au delà de quatre*. Les étapes sont généralement : écrire la quantité avec des mots, avec des dessins sans mots, avec seulement des chiffres. L'écriture avec les mots amène à se mettre d'accord sur une désignation verbale des différents groupements, par exemple : troupeau (pour un groupe de 4 moutons), bergerie (pour un groupe de 4 troupeaux), surperbergerie (pour un groupe de 4 bergeries). Si le contexte n'est pas celui des ovins, on peut dire : paquet, superpaquet, maxipaquet, etc.
Nous proposons aussi aux PE1 d'effectuer des conversions. Le dispositif que nous avons utilisé à plusieurs reprises relève de l'interrogation rapide (ardoise ou réponse à indiquer sur une petite feuille préparée à l'avance), par exemple « Combien 30 dizaines font-elles de centaines ? » (cf. annexe 6 pour d'autres exemples)
Nous indiquons maintenant des observations récurrentes et des éléments d'évolution du dispositif au fil du temps :
- difficulté de certains étudiants à proposer une réponse à la question, comme si elle ne leur « parlait » pas, comme si elle ne voulait rien dire ;
- une mise en commun rend en général les étudiants capables de répondre à la question.

Nous avons ensuite fait évoluer le dispositif de façon à expliciter les procédures de traitement de cette tâche. Il apparaît que dans leur immense majorité les étudiants mettent en place deux stratégies pour la traiter : une stratégie de type « troncature », ils disent qu'ils visualisent le tableau de numération dans leur tête ; une stratégie de type « multiplication + troncature », 30×10=300 (j'ajoute un zéro), puis troncature ou oral (3 cents, c'est 3 centaines). Il n'est pas rare que, dans un groupe de 30 étudiants, aucun étudiant ne propose de faire référence à la relation 10 dizaines = 1 centaine pour traiter la question. Nous avons tenté d'enseigner aux étudiants la technique classique : 30 dizaines, c'est 3 fois plus que 10 dizaines. Dix dizaines, c'est une centaine donc 30 dizaines, c'est 3 centaines. Il nous semble que beaucoup d'étudiants résistent.
Pour renforcer le lien avec les bases, nous avons souhaité faire évoluer notre dispositif. Le travail en bases n'est en effet pas propice aux conversions : « combien y a-t-il de groupes de quatre dans $(3213)_4$? ». En base 4, la réponse est 321 (elle peut s'obtenir directement en tronquant). Contrairement

aux conversions en base dix, cette connaissance ne nous semble pas prioritaire pour la formation des PE1. Par ailleurs, souvent des étudiants disent qu'ils ne voient pas le lien entre les bases et ce qu'ils savent sur les écritures chiffrées. Nous avons alors aménagé le dispositif de la façon suivante :

- travail en base quatre : les groupements ont des noms (cf. supra) et introduction de l'écriture positionnelle chiffrée ;
- questions sur les relations entre unités de la base 4, mais en base dix. Par exemple, combien de superbergeries avec 16 troupeaux ? etc. Les étudiants n'utilisent pas les propriétés positionnelles pour traiter la question mais les relations entre les groupements ;
- c'est seulement après qu'on les interroge sur la conversion « combien 30 dizaines font-elles de centaines » ?

Quand on le leur suggère, les étudiants font le rapprochement avec le travail fait en bases et il leur semble acceptable de faire référence aux relations entre les unités pour traiter cette dernière tâche. Ils semblent donc renoncer, provisoirement (ce qui est notre but), à la propriété de la troncature. Finalement, le détour par les relations entre unités, en bases, semble permettre une déconstruction de la technique de la troncature en base dix.

Nous réinvestissons aussi la numération en unités dans la relation : $(abc)_{\text{dix}} = 100\,a + 10\,b + c$. Sans que nous ayons réussi à percevoir ce qui pose problème avec elle, nombre d'étudiants ne parviennent absolument pas à se l'approprier. Nous avons utilisé le passage par les unités de la numération puis les conversions :

$(abc)_{\text{dix}} = a$ centaines b dizaines c unités puis convertir en unités « simples » cette expression. Ce qui donne : $(abc)_{\text{dix}} = a \times 100 + b \times 10 + c$ unités.

Certains étudiants sont manifestement sensibles à cette médiation par les unités de la numération.

3.1.2 « Volet » didactique

Sur le plan de la préparation didactique au concours, la situation est pour nous plus délicate. Nous utilisons essentiellement des documents institutionnels, en voici deux. Le premier (Annexe 3) est un extrait d'un « sujet 0 » proposé par le ministère en 2006 (rénovation du concours) ; le second (Annexe 4) date de 2000, c'est une analyse de travaux d'élèves donnée dans l'académie d'Aix-Marseille, nous lui adjoignons un extrait du corrigé proposé par les annales de la COPIRELEM.

Une analyse des exercices du sujet 0 proposés montre que l'ensemble (exercices proposés aux élèves, questions aux candidats) peut être traité en faisant uniquement référence à ce que nous avons appelé propriété de la troncature. Ces exercices et les questions ne sollicitent pas explicitement les relations entre unités.

Nous prenons maintenant l'analyse de travaux d'élèves. Dans la praxéologie classique, les décompositions d'Isabelle ou Claire n'apparaissent pas comme un progrès par rapport à celle de Mickaël. Comme le prouve la praxéologie classique, les ECPD ne sont pas un ostensif nécessaire à l'apprentissage de la numération de position. Il est fort probable que si on ne les enseigne pas aux élèves, ces décompositions n'apparaissent pas. Ces analyses de travaux d'élèves sont susceptibles de constituer un obstacle à la formation à la numération en unités des enseignants débutants.

La question de la place institutionnelle accordée aux ECPD est évidemment centrale du point de vue de la formation à l'enseignement de la numération. Elle est notamment sensible dans la préparation au concours où il s'agit notamment d'apprendre à se conformer aux instructions officielles.

3.2 Des questions pour la transposition en formation

Que faire de ces éléments pour la formation ?

3.2.1 Que faire en PE1 ?

Nous avons vu que les « bases » ne permettent pas *a priori* de revisiter la question des relations entre unités de la numération (pas plus pour les élèves de primaire en 1970 que pour les PE1 des années 2000). Toutefois, certains dispositifs utilisant les bases et les relations entre unités peuvent sans doute y contribuer.

Par ailleurs, le moment de préparation au concours n'est probablement pas un bon moment pour introduire des pratiques qui ne sont pas préconisées par l'institution ! Toutefois, existe-t-il un *bon* moment pour ce faire ?

3.2.2 Les relations entre unités et le « nombre de »

Nous pensons que la résistance des étudiants à faire fonctionner les relations entre unités de la numération pour traiter les conversions mérite d'être remarquée. Il nous semble indispensable de renforcer la maîtrise de ces relations chez les élèves et l'aspect « décimal » de la numération dans l'enseignement.
Les éléments que nous avons sur les connaissances des élèves actuels nous laissent penser que la maîtrise des relations entre unités est complexe. Nous faisons l'hypothèse qu'elle constitue une dimension délicate, difficile, de l'apprentissage de la numération. Nous voyons dans la structuration ancienne du type de tâches « conversions » une organisation temporelle adaptée pour travailler cette complexité et il n'est pas sûr que les évolutions récentes autour du « nombre de » soient pertinentes de ce point de vue. En effet, il nous semble que tant qu'on peut utiliser la propriété de la troncature, on ne travaille pas la spécificité de chacune des relations (relation de dizaine entre millier et centaine, de centaine entre millier et dizaine, etc.). Pour nous, un objectif serait d'importer d'autres techniques que celles de la troncature pour traiter ces tâches.
Par ailleurs, les tâches du type « nombre de » ont pour caractéristique de transformer « certaines quantités d'unités de certains types » en un « nombre » (ou l'inverse) ; les relations entre unités sont plus générales, il s'agit de transformer « certaines quantités d'unités de certains types » en « certaines quantités d'unités d'un ou plusieurs autres types ».
Aussi, en l'absence d'une progression récente convaincante, nous souhaitons privilégier la progression classique qui repose sur les relations en jeu et leur nombre.

3.2.3 Thèmes et variations

Nous commençons par présenter les objets qu'il nous semble nécessaire de valoriser en formation, nous en indiquons des raisons.
La priorité nous semble être la restauration des relations entre les unités (aspect décimal de la numération). L'état de ces relations qui se dissolvent au mieux dans le calcul nous semble particulièrement critique. Il ne nous semble pas abusif d'attribuer tout ou partie des difficultés des élèves repérées par Parouty (2005) à la méconnaissance de ces relations par les élèves. Pour les raisons que nous avons déjà indiquées, le moyen que nous privilégions pour les restaurer est la « réhabilitation » des conversions.
Par suite, il semble nécessaire de revaloriser la numération en unités. Sans elle, il n'y a pas vraiment de conversion possible et l'étude de la numération risque de se réduire à une suite de calculs sur lesquels il est extrêmement difficile de mettre des mots.
Une dernière dimension consiste à réintroduire les explications « classiques » qui impliquent la numération en unités pour les différents types de tâches. Il nous semble en effet que la diversité des contextes dans lesquels la numération en unités est utilisée permet de renforcer son implantation, notamment pour les conversions.
Finalement, tout en prenant en compte les évolutions de l'enseignement des mathématiques en primaire depuis 40 ans, un de nos objectifs en formation consiste à vouloir introduire dans les pratiques des enseignants un certain nombre d'objets anciens qui n'existent plus dans l'enseignement actuel, ces objets nous semblant être pertinents pour une meilleure connaissance de la numération.

4 FORMATION PROFESSIONNELLE : TÂCHES, RÉACTIONS ET RÉSISTANCES

Après les formations en PE1, nous nous proposons maintenant d'évoquer plusieurs situations de formation professionnelles de professeurs d'écoles que nous avons mises en oeuvre. Si ces formations ont des fondements théoriques communs, elles sont cependant pensées en fonction des publics auxquels elles sont destinées : formation initiale en alternance (PE2), néo-titulaires 1ère année (NT1), formation continue (FC). Le but est de montrer à la fois des tâches proposées, des réactions et, le cas échéant, des résistances ou des obstacles que nous avons rencontrés.

4.1 Tâches proposées

Il s'agit donc d'une part de travailler au niveau des explications (technologique) pour renforcer la numération en unités qui est bien davantage présente dans les explications que dans les tâches existant « dans la société » ; d'autre part de proposer des tâches, notamment pour travailler les relations entre unités.

4.1.1 Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

Nous avons utilisé à plusieurs reprises un même dispositif. Nous proposons aux enseignants plusieurs tâches sur le même modèle. Ceci nous permet à la fois d'accéder (un peu) aux pratiques des enseignants et, peut-être, d'agir sur elles. Nous leur demandons de dire quelles explications ils donneraient à leurs élèves pour traiter certaines tâches de numération. Les tâches proposées sont très standard (Annexe 5).
Notre étude de manuels nous incite à faire l'hypothèse que les explications proposées devraient être variées car significatives du moment où les enseignants se sont formés. Par ailleurs, il est bien possible que des enseignants soient démunis pour donner des explications relatives à certaines tâches. Nous donnons quelques exemples de réponses.
Nous avons rencontré des collègues enseignants qui ont affirmé qu'en formation (probablement vers les années 70-80), on leur avait « interdit » d'utiliser ce que nous appelons la numération en unités. Majoritairement, pour *expliquer* le « nombre de », les collègues disent qu'ils « coupent » le nombre dans le tableau de numération. Pour expliquer la retenue dans l'addition, beaucoup d'arguments reposent sur l'utilisation d'un papier quadrillé qui permet de « justifier » d'écrire un seul chiffre par colonne.
Précisons que nous avons repris ce dispositif pour l'atelier de la COPIRELEM. Nous n'avons pas recueilli la diversité observée en formation. Par ailleurs, pour certaines explications, la numération en unités est peut-être bien davantage utilisée par les formateurs que par les enseignants. En revanche, les ECPD semblent être bien davantage utilisées par les enseignants que par les formateurs.
Les réactions des formés aux explications par la numération en unités sont diverses. En effet, ils disposent souvent d'explications, véhiculées par les livres. Par exemple, 100 est plus grand que 90 car « 100 est plus long que 90 »[5]. Avec la numération en unités, on peut : lire 100 comme une centaine, 90 comme 9 dizaines, utiliser la relation entre unités (une centaine, c'est dix dizaines), puis conclure en comparant neuf et dix dizaines. Le gain n'est pas évident *a priori*.
Il semble toutefois que l'évocation des techniques qu'il faudra mettre en place avec les décimaux peut faire évoluer certaines résistances. En effet, beaucoup de ce qui repose sur l'algorithme de l'écriture chiffrée sera mis en défaut avec les décimaux. Si cet argument semble avoir fonctionné auprès de NT1, des PE2 ont semblé plus réticents arguant du fait que « quand nous sommes au CE1 ou au CE2, le CM1 ou le CM2…. C'est loin ! »

4.1.2 Des conversions

Nous proposons aussi aux enseignants des tâches qu'ils pourraient proposer à leurs élèves. Nous leur demandons alors de façon systématique ce qu'on apprend avec ces tâches. Dans ce cadre, nous proposons des conversions. (Annexe 6)
Nous avons introduit du matériel multibase pour travailler les conversions. Nous présentons d'abord les différents groupements et les relations entre les objets. Nous utilisons ensuite une représentation en perspective du matériel imprimée sur un format A4 (Annexe 7). Chaque formé dispose d'un feutre effaçable et d'une pochette plastique transparente pour glisser la feuille A4.
Nous proposons alors par exemple d'entourer une « quantité » dictée : « entourer 41 dizaines (de cubes) ». Signalons que cette tâche n'est pas réussie par tous les PE2.

[5] Cette justification est souvent appuyée par des arguments relatifs à l'algorithme de l'écriture chiffrée.

Nous avons mis en place un petit dispositif matériel avec une règle du jeu : on dispose d'étiquettes « unités » comportant les noms des unités de la numération et d'étiquettes « jetons » comportant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Le matériel à disposition (absence du 0, en particulier) induit assez naturellement une règle du jeu : une unité de la numération est précédée d'un seul chiffre. Les formulations telles que : 4 dizaines 5 unités (ou 5 unités 4 dizaines) sont autorisées mais pas 45 unités.
On peut par exemple demander d'indiquer combien de cubes sont entourés lorsque par exemple, 10 barres de dix, 13, 30, puis 35 sont entourées ce qui donne respectivement 1 centaine, 1 centaine 3 dizaines, 3 centaines, puis 3 centaines 5 dizaines.
Nous avons proposé cette tâche pour le cycle 2 avec deux types de nombres : ceux de la forme X0 dizaines et 1X dizaines. On entoure par exemple 30 (respectivement 16) barres de dix cubes et on demande combien de dizaines de cubes, puis combien de centaines de cubes sont entourées. Elle a été très diversement appréciée, certains collègues disant qu'il s'agit d'un travail pour le cycle 3. En revanche, d'autres ont suggéré pour favoriser l'entrée dans la tâche (CP) d'entourer par exemple 2 barres de dix et 10 cubes isolés. On peut alors demander combien de dizaines de cubes sont entourées. Le fait de réserver cette tâche pour le cycle 3 nous semble problématique : quand et comment travaille-t-on la relation entre dizaine et centaine au cycle 2 ?
Nous avons souvent proposé une adaptation de la tâche « les pirates » (Parouty 2005) : « Dans mon jardin j'ai enterré des pièces d'or. Je veux les transporter ailleurs avec ma brouette. Je peux en prendre 100 000 à chaque tour. J'ai enterré 60 148 020 pièces. Combien de tours de brouette dois-je faire au minimum pour tout transporter ? » On rencontre toujours des étudiants ou stagiaires en plus ou moins grand nombre qui indiquent qu'il faut faire 61 ou 62 voyages. C'est une tâche de type « nombre de » et comme nous l'avons signalé précédemment, les tâches de conversions nous semblent à privilégier dans un premier temps. Toutefois, cette tâche peut être l'occasion de faire une synthèse dans laquelle on fait fonctionner le même type de propriété sur chaque chiffre.

4.1.3 Autres tâches faisant appel à la numération en unités

En utilisant le matériel « jetons » et « unités », nous proposons aussi des tâches qui ne font pas nécessairement fonctionner les relations entre unités mais les relations entre numération orale et numération en unités. Il peut s'agir :
- d'entourer une quantité de cubes donnée en numération orale (trois mille huit cent sept cubes),
- d'écrire avec les étiquettes « jetons » et « unités » un « grand nombre » donné oralement,

Nous demandons aussi d'effectuer des tâches de dénombrement sans qu'il y ait de mise en relation des unités (par exemple, un nombre de cubes est donné en chiffres et il faut entourer les cubes ou l'inverse).
Enfin nous faisons travailler la technique opératoire de l'addition. Pour permettre un détour et éviter tout recours aux écritures chiffrées, nous dictons deux nombres (numération orale) qu'il faut « faire » avec les étiquettes « jetons » et « unités » (nous avons utilisé « cent quatre vingt mille sept cent quatre vingt treize » et « vingt mille quatre cent soixante »). Il faut ensuite les additionner en manipulant les étiquettes. La retenue du rang des dizaines ne pose pas de problème. Ce sont les 11 (ou 12) centaines qui occasionnent les difficultés. Lorsque nous avons proposée cette tâche en formation initiale ou continue, il y a toujours eu des enseignants (ou étudiants) pour faire porter la retenue sur les dizaines de milliers, première unité présente dans les nombres après les centaines. Ils ne voient pas qu'il faudrait introduire une nouvelle étiquette « unités », celle des « milliers ».
Nous considérons que cette tâche est un moyen de consolider la technique opératoire de l'addition et la numération des entiers au CM. Elle est diversement accueillie par les enseignants, certains (peut-être ceux qui ont échoué) estiment qu'il n'est pas nécessaire d'essayer déstabiliser les connaissances des élèves.

4.2 Variations dans les mises en œuvre

Selon les publics ou le contexte de la formation nous n'avons pas toujours organisé les séances de la même façon.

Avec des PE2, nous avons souvent proposé un très petit nombre de tâches : notamment, « Entourer 41 dizaines », « Comment expliquer que 100 est plus grand que 90 ? » Nous avons aussi présenté explicitement le type de tâches conversions qui n'est pas forcément bien distingué du « dénombrement ». En revanche, en formation continue, nous avons plutôt tendance à visiter un grand nombre de tâches et d'explications.

4.3 Retour sur une formation continue

Bien que nous n'ayons pas mis en place de dispositif d'évaluation de nos formations, nous avons eu l'occasion d'avoir un retour sur les effets de l'une d'elles.

4.3.1 Bilan

Nous avons eu accès en fin d'année scolaire aux évaluations mises en place, après leur séquence d'enseignement sur la numération, par une partie des enseignants ayant suivi la formation en début d'année scolaire. Il ressort que si les enseignants ont introduit du dénombrement de multibase – cas simple, sans nécessité de mettre en relation les unités –, l'aspect « relations entre unités » apparaît dans le meilleur des cas sous la forme « nombre de » et n'apparaît pas dans plusieurs des évaluations auxquelles nous avons eu accès…

4.3.2 Proposition de l'atelier

Au cours de l'atelier, ce dernier point a été évoqué. La dimension « relation entre unités » (aspect décimal de la numération) est apparue essentielle à la plupart des participants. Nous avons réfléchi à un moyen de faire « pénétrer » cette dimension dans les pratiques. Il a été proposé d'introduire une tâche dans les formations : « à quoi servent les relations entre unités ? », « pour quelles tâches sont-elles utiles ? »
Les enseignants disent que les relations entre unités, c'est « difficile ». Il nous faut signaler qu'une des raisons des résistances des enseignants nous semble être le fait que la numération en unités n'est pas une pratique sociale. Nous pensons qu'ils ne voient pas alors nécessairement l'utilité de l'enseigner aux élèves. Dans les dispositifs que nous avons proposés, la numération en unités est nécessaire au niveau des « justifications » et mais elle n'est pas forcément nécessaire pour « réussir » les tâches, c'est-à-dire pour les techniques.

4.4 Pour poursuivre, apports de l'atelier de la COPIRELEM

L'utilisation de la monnaie est revenue à plusieurs reprises lors de l'atelier comme un prolongement nécessaire. Par exemple « valoriser l'aspect échange, avec la monnaie ». À ce propos, nous voulons souligner deux éléments.
Notre recherche sur les manuels scolaires nous a permis d'identifier que la dialectique « groupement / échange » est une invention de la réforme. Elle n'existe pas avant. Au moment de la réforme elle permet d'accompagner les diverses manipulations avec les différents types de matériels introduits à l'époque pour faire « manipuler les élèves ».
Avant la réforme, on peut travailler avec la monnaie. Cette grandeur apparaît alors comme une grandeur parmi d'autres : la longueur (on travaille alors souvent le décamètre comme dizaine de mètres, etc.), la capacité, etc. On peut alors évoquer les questions des échanges, comme spécifiques à la monnaie, à cette grandeur. Nous avons identifié deux cadres dans lesquels les « échanges » interviennent : quand il faut faire des sommes inférieures à dix, il s'agit d'apprendre la valeur des pièces et certaines équivalences. Un autre contexte est celui des échanges de matériel : on échange 4 chemises à 35 francs contre… Il s'agit de problèmes portant sur les quatre opérations.
Il est clair qu'on peut travailler la numération avec la monnaie, c'est alors la grandeur « valeur » qui est en jeu. Néanmoins, les questions de conservation nous semblent devoir être travaillées avant celles liées à la numération. Cette question de conservation apparaît d'ailleurs aussi, mais plus discrètement, dans les manipulations liées au multibase : elles sont accessibles à partir du moment où les élèves sont

convaincus qu'il y a autant de cubes dans une barre de dix que dans dix cubes et dans la réversibilité de la transformation, que le fait de grouper les cubes ne modifie pas leur quantité.
Enfin, pour la formation d'adultes analphabètes qui ont une grande pratique de la monnaie, cette pratique pourrait servir d'appui pour construire des connaissances plus « théoriques » en lien avec la numération en unités.

5 CONCLUSION, QUESTIONS OUVERTES

La numération de position a beaucoup évolué depuis 40 ans. L'étude de la situation actuelle montre des faiblesses qui se manifestent clairement au niveau de l'aspect « décimal ». Notre recherche nous donne des pistes pour agir en formation. Nous avons envisagé des modifications assez globales : en particulier au niveau des « explications ».
Un problème qui se pose à nous est celui du « relais ». Nous l'avons évoqué avec la formation à la didactique de nos PE1. Plus généralement, quelle est la pertinence d'une formation de 3 à 6 heures sur un objet aussi gros que la numération de position ? Peut-on former sur ce thème des professeurs, notamment débutants mais pas seulement, alors qu'il n'existe pas de document institutionnel pouvant relayer le discours véhiculé dans la formation ?
En effet, dans quelle mesure, un enseignant peut-il modifier sa pratique en y introduisant des « objets » pour lesquels les relais sont quasiment inexistants tant sur le plan institutionnel – pas d'accompagnement par les programmes des modifications suggérées par exemple –, que sur le plan matériel – absence de supports pour l'enseignement notamment –.
N'y aurait-il pas alors quelque danger à déstabiliser les pratiques d'enseignants. Il est clair que des enseignants, qui souhaitent bien faire, peuvent lorsqu'ils rentrent de formation ne plus oser faire ce qu'ils faisaient avant d'y aller sans savoir véritablement quoi faire à la place. Dans ces conditions, le remède peut être pire que le mal.
Peut-être faut-il chercher à agir beaucoup plus localement que nous ne l'avons fait.

6 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

APMEP (1976) ; *Mots. T. 3 : vocabulaire de l'enseignement des mathématiques ;* Num. 015 ; Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), Paris

Bassis O. (1991) ; *Mathématiques : quand les enfants prennent le pouvoir, des démarches d'auto-socio-construction pour l'Ecole*, G.F.E.N.

Bezout, Reynaud (1821) ; *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, par Bezout ; avec des notes et des tables de logarithmes, par A.A.L.Reynaud. ;* consulté sur Internet le 21/12/2007, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table

Chambris C. (2008) ; *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* ; Thèse de doctorat ; Université Paris-Diderot (Paris 7) http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/fr/

Chambris C. (2009) ; Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2e et 3e années de primaire) ; *Actes du colloque Didirem.*

Chevallard Y. (1992) ; Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique ; *Recherches en didactique des mathématiques* ; 12/1 ; 73-111

Parouty V. (2005) ; Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres* ; IREM de Toulouse

Serfati M. (2005) ; *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, éditions Pétra.

Tempier F. (2009) ; *L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants*, Cahiers de Didirem, n°60, IREM Paris 7

Annexe 1 : extrait du manuel Le nouvel objectif calcul CE2 (Hatier 1995) – livre du maître – pp.28-29 (extrait)

Travailler l'échange « 10 gabarits de 100 carreaux, c'est 1 000 carreaux » en faisant un arbre de calcul ou une addition en ligne.

100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100

200 200 200 200 200

400 400

800

1000

Conclure : « 10 fois 100, c'est 1 000. »
Un gabarit C peut être réalisé en scotchant 10 gabarits B pour obtenir le gabarit 1 000.
Les enfants sont toujours surpris par le nombre important de carreaux obtenus.
25 gabarits de 100, c'est :
10 gabarits de 100 ⟶ 1 0 0 0
10 gabarits de 100 ⟶ 1 0 0 0
5 gabarits de 100 ⟶ 5 0 0
25 gabarits de 100, c'est : 2 5 0 0 carreaux
Cette activité permet le passage au millier pour lequel certains enfants éprouvent encore des difficultés.

Conclure avec les enfants
Les groupements d'objets par 10, 100, 1 000 facilitent le dénombrement : ils évitent de compter un par un et conduisent à un résultat qui donne directement l'écriture du nombre.

EXERCICE 1

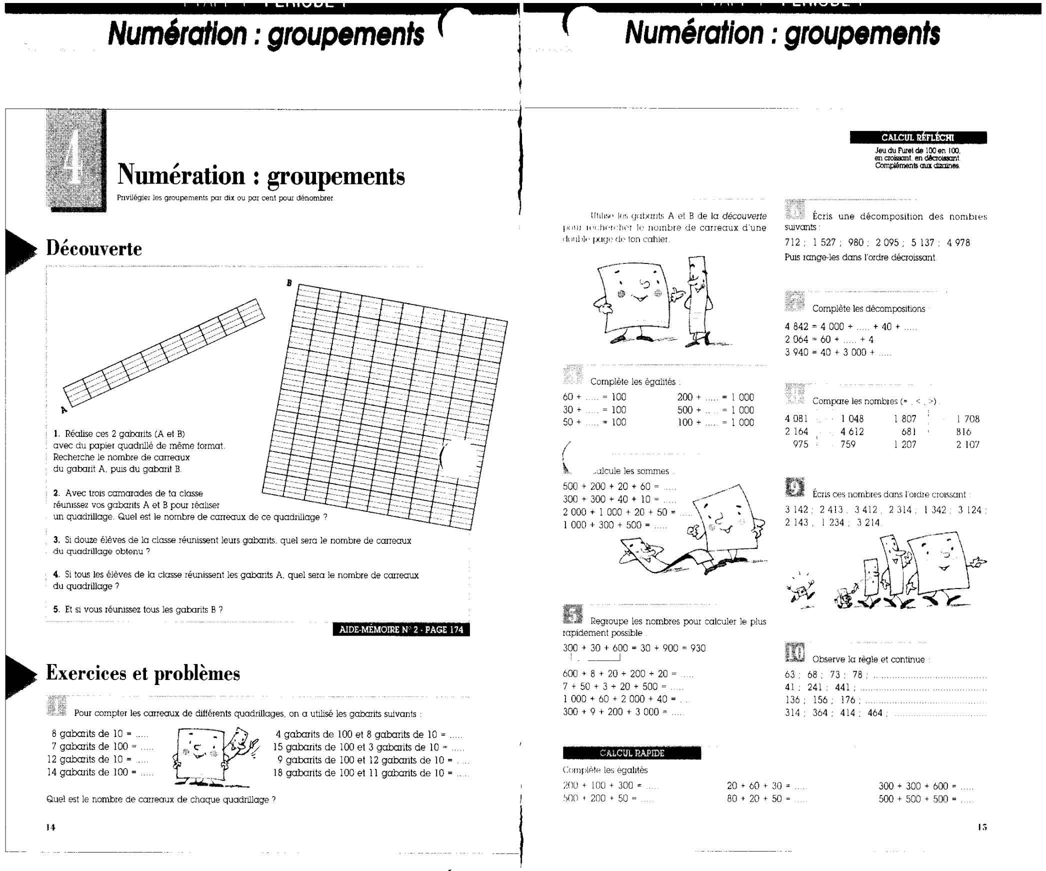
Réinvestir les acquis de la découverte.

- Lecture de la consigne et des informations données par l'exercice

Mettre des gabarits à la disposition des enfants en difficulté.
Conseiller aux enfants de rechercher tout d'abord l'écriture additive avant de donner le nombre de carreaux.
Exemple : 4 gabarits de 100 et 8 gabarits de 10 c'est : 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 400 + 80 = 480

- Travail individuel
- Correction collective

Utiliser le matériel si nécessaire ou les écritures additives.
Certains enfants peuvent proposer des écritures multiplicatives du type (4 x 100) + (8 x 10). Insister sur l'aspect efficace de telles écritures.


Numération : groupements

Numération : groupements

4 Numération : groupements

Privilégier les groupements par dix ou par cent pour dénombrer.

Découverte

B

A

1. Réalise ces 2 gabarits (A et B) avec du papier quadrillé de même format. Recherche le nombre de carreaux du gabarit A, puis du gabarit B.

2. Avec trois camarades de ta classe réunissez vos gabarits A et B pour réaliser un quadrillage. Quel est le nombre de carreaux de ce quadrillage ?

3. Si douze élèves de la classe réunissent leurs gabarits, quel sera le nombre de carreaux du quadrillage obtenu ?

4. Si tous les élèves de la classe réunissent les gabarits A, quel sera le nombre de carreaux du quadrillage ?

5. Et si vous réunissez tous les gabarits B ?

AIDE-MÉMOIRE N° 2 - PAGE 174

Exercices et problèmes

Pour compter les carreaux de différents quadrillages, on a utilisé les gabarits suivants :

8 gabarits de 10 = ...
7 gabarits de 100 = ...
12 gabarits de 10 = ...
14 gabarits de 100 = ...

4 gabarits de 100 et 8 gabarits de 10 = ...
15 gabarits de 100 et 3 gabarits de 10 = ...
9 gabarits de 100 et 12 gabarits de 10 = ...
18 gabarits de 100 et 11 gabarits de 10 = ...

Quel est le nombre de carreaux de chaque quadrillage ?

14

CALCUL RÉFLÉCHI
Jeu du Furet de 100 en 100, en croissant, en décroissant. Compléments aux dizaines.

Utilise les gabarits A et B de la *découverte* pour rechercher le nombre de carreaux d'une double page de ton cahier.

Complète les égalités :

60 + ... = 100
30 + ... = 100
50 + ... = 100

200 + ... = 1 000
500 + ... = 1 000
100 + ... = 1 000

Calcule les sommes :

500 + 200 + 20 + 60 = ...
300 + 300 + 40 + 10 = ...
2 000 + 1 000 + 20 + 50 = ...
1 000 + 300 + 500 = ...

5 Regroupe les nombres pour calculer le plus rapidement possible.

300 + 30 + 600 = 30 + 900 = 930

600 + 8 + 20 + 200 + 20 = ...
7 + 50 + 3 + 20 + 500 = ...
1 000 + 60 + 2 000 + 40 = ...
300 + 9 + 200 + 3 000 = ...

Écris une décomposition des nombres suivants :

712 ; 1 527 ; 980 ; 2 095 ; 5 137 ; 4 978

Puis range-les dans l'ordre décroissant.

Complète les décompositions :

4 842 = 4 000 + ... + 40 + ...
2 064 = 60 + ... + 4
3 940 = 40 + 3 000 + ...

Compare les nombres (= , < , >).

4 081 ... 1 048 1 807 ... 1 708
2 164 ... 4 612 681 ... 816
975 ... 759 1 207 ... 2 107

9 Écris ces nombres dans l'ordre croissant :

3 142 ; 2 413 ; 3 412 ; 2 314 ; 1 342 ; 3 124 ; 2 143 ; 1 234 ; 3 214.

10 Observe la règle et continue :

63 ; 68 ; 73 ; 78 ; ....
41 ; 241 ; 441 ; ....
136 ; 156 ; 176 ; ....
314 ; 364 ; 414 ; 464 ; ....

CALCUL RAPIDE

Complète les égalités

200 + 100 + 300 = ...
500 + 200 + 50 = ...

20 + 60 + 30 = ...
80 + 20 + 50 = ...

300 + 300 + 600 = ...
500 + 500 + 500 = ...

15

- Travail individuel

Cette activité demande des qualités d'organisation et d'adresse manuelle car il est nécessaire de placer des repères qui matérialisent les différents déplacements des gabarits. Le nombre des carreaux de la double page sera noté sous forme additive correspondant aux déplacements successifs des gabarits puis sous la forme canonique.

- Correction individuelle

Mettre du matériel de numération ou des gabarits à la disposition des enfants qui en auraient besoin.

- Correction individuelle

EXERCICE 4 du livre *(3 du fichier)*

Grouper pour calculer.

Annexe 2 : extrait du livre du maître du manuel Cap Maths CE2 (Hatier 2007)

Unité 7, Séance 1

APPRENTISSAGE
Le nombre mille

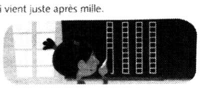
– Connaître le nombre 1 000 et ses relations avec d'autres nombres.

Chercher **manuel p. 62 questions 1 à 5**

Les élèves répondent à différentes questions qui permettent d'envisager l'écriture en chiffres de mille et ses relations avec d'autres nombres, notamment avec 10 et 100 et avec 25, 50, 250 et 500.

Chercher Mille

1. Écris mille en chiffres.
2. Écris en chiffres et en lettres le nombre qui vient juste avant mille.
3. Écris en chiffres et en lettres le nombre qui vient juste après mille.
4. Maïa dessine des colonnes de dix carrés. Combien doit-elle dessiner de colonnes pour obtenir mille carrés ?



5. Sur une grande feuille, trace avec un camarade une ligne brisée de mille millimètres.

INDIVIDUEL / ÉCRIT

1 Mille, son écriture, ses « voisins »

• Demander aux élèves une réponse individuelle et rapide aux **questions 1, 2 et 3**.

• Recenser et faire valider les réponses. Il y a plusieurs manières de trouver les nombres qui précèdent et suivent 1 000 :

– en observant la numérotation des pages d'un livre de plus de 1 000 pages (un dictionnaire par exemple) ;

– en utilisant deux compteurs en carton, mis bout à bout, et en prolongeant aux nombres de 4 chiffres le fonctionnement connu pour les nombres de 3 chiffres ;

– en retranchant ou en ajoutant 1 au nombre 1 000, avec une calculette.

> Comme le nombre 100, **le nombre 1 000** joue un rôle important dans la compréhension du système de numération écrite (découpage en classes de trois chiffres), ainsi que dans celle du système de désignation orale où mille joue un rôle clef. Plusieurs « petites » activités permettent ici une première familiarisation avec le nombre 1 000, avant d'entreprendre une étude plus structurée du système d'écriture des nombres « de plus de 3 chiffres ».

ÉQUIPES DE 2 / ÉCRIT

2 Mille petits carrés

• Demander une réponse, par deux, à la **question 4**.

• Après une mise en commun des procédures, garder une trace écrite collective des procédures les plus caractéristiques :

– 1 000 = 10 × 100 (il faut dessiner 100 rangées de 10 carrés), avec éventuellement utilisation de la règle des 0 ;

– comptage de 10 en 10, puis de 100 en 100…

ÉQUIPES DE 2 / ÉCRIT

3 Une ligne de mille millimètres

• Demander une réponse, par deux, à la **question 5**.

• Recenser les procédures. Certaines peuvent être laborieuses comme par exemple le dénombrement des millimètres du double décimètre avec report ; d'autres peuvent utiliser ce qui a été travaillé précédemment, comme par exemple les équivalences entre 1 cm et 10 mm et entre 1 m et 100 cm.

> On laissera chaque groupe d'élèves choisir sa procédure, sans provoquer de mise en commun trop rapide.
>
> Les erreurs peuvent provenir d'une mauvaise utilisation des équivalences entre unités. Le retour à leur signification sur le double décimètre peut aider certains élèves.

INDIVIDUEL / ÉCRIT

Entraînement **manuel p. 62 exercices 6 à 10**

Exercices

6. Dans une école, lorsque tous les enfants lèvent tous leurs doigts, cela fait mille doigts levés. Combien y a-t-il d'enfants dans l'école ?
7. Un siècle, c'est 100 ans. Combien faut-il de siècles pour faire un millénaire ?
8. Dans mille :
   a. combien de fois y a-t-il 200 ?
   b. combien de fois y a-t-il 50 ?
   c. combien de fois y a-t-il 25 ?
9. Combien faut-il de boîtes pour emballer mille chaussures ?
10. Trouve les calculs qui ont pour résultat le nombre mille. Avec les lettres de ces cases, écris un mot que tu connais.

A 50 x 4	C 100 x 6	M 500 x 2	L 4 x 250
T 250 x 2	E 100 x 10	V 300 x 3	I 5 x 200
B 25 x 20	E 200 x 4	N 10 x 10	P 100 x 0
O 20 x 30	F 25 x 4	L 25 x 40	R 40 x 20

Les élèves traitent certains de ces exercices, soit librement selon le temps dont ils disposent, soit en fonction des indications de l'enseignant.

Exercice 6 Il peut être rapproché de la question 4 et revient à se demander combien il y a de fois 10 dans 1 000.

Exercice 7 Résoudre cet exercice revient à se demander combien il y a de fois 100 dans 1 000 ?

Exercice 8 Certaines procédures peuvent s'appuyer sur des relations connues, comme le fait que 25, 50 et 200 sont respectivement le quart, la moitié et le double de 100.

Exercice 9 On peut faire préciser que, dans chaque boîte, il y a 2 chaussures.

Exercice 10 Le mot « mille » peut être écrit avec les lettres sélectionnées mises en ordre.

APPRENTISSAGE

Nombres supérieurs à 1 000 (1)

– Comprendre les écritures de nombres au-delà de 1 000 et pouvoir les comparer.
– Exprimer ces nombres à l'aide de décompositions du type : 2 540 = 2 × 1 000 + 5 × 100 + 4 × 10.

Chercher **manuel p. 63 question 1 et règle du jeu**

Les élèves doivent essayer de marquer le maximum de points en choisissant un nombre de cartes, fixé par un jet de dé, parmi des cartes rapportant 1 point, 10 points, 100 points, 1 000 points, 10 000 points.

Chercher Au-delà de 1 000

1 Fais une première partie du jeu avec 2 ou 3 de tes camarades. Vous pourrez ensuite faire d'autres parties.

Le plus grand total
3 ou 4 joueurs

Matériel
- 1 paquet de 15 cartes de 1 point
- 1 paquet de 15 cartes de 10 points
- 1 paquet de 15 cartes de 100 points
- 1 paquet de 15 cartes de 1 000 points
- 1 paquet de 15 cartes de 10 000 points
- un dé
- une feuille de jeu par joueur

Jouer
Une partie se joue en 4 tours.
À tour de rôle, les joueurs lancent le dé et prennent dans un paquet autant de cartes qu'il y a de points sur le dé.
Attention, il faut prendre les cartes dans le même paquet.
Le joueur conserve les cartes et complète sa feuille de jeu.

Le gagnant est celui qui a le plus grand total de points.

ÉQUIPES DE 3 OU 4 / ORAL

1 Phase de jeu : première partie

• Demander aux élèves de prendre connaissance de la **question 1** et de la **règle du jeu**.

• Faire reformuler la règle en même temps qu'est mis en place un début de partie avec trois élèves qui remplissent chacun leur feuille de jeu, mais sans aller jusqu'au calcul des points (deux tours par exemple), en précisant bien les éléments de la règle :
– si le dé jeté par le joueur marque 4, celui-ci peut prendre 4 cartes d'une même sorte (il doit donc trouver un paquet dans lequel il y a encore 4 cartes, par exemple 4 cartes marquées « 1 000 points ») ;
– il garde les cartes et remplit alors sa feuille de jeu en inscrivant 4 dans la colonne « dé » et « 1 000 » dans la colonne « carte » ;
– à la fin de la partie, il faudra calculer ce que représente toutes les cartes gagnées, soit à l'aide des cartes, soit à l'aide de la feuille de jeu.

• Demander à chaque équipe de jouer une partie complète en n'oubliant pas de remplir la feuille de jeu. Pendant cette phase, n'intervenir que pour aider dans le déroulement du jeu.

Au cours de cette activité, les élèves vont se familiariser avec les écritures chiffrées de nombres supérieurs à 1 000 et être amenés à les comparer. Pour cela, ils peuvent s'appuyer sur leur connaissance des nombres de 3 chiffres, en prolongeant à ces nouveaux nombres.

Dans un premier temps, pour familiariser les élèves avec le jeu, on peut n'utiliser que les cartons 1, 10, 100 et 1 000 pour rester dans un domaine déjà connu des élèves.

COLLECTIF / ORAL

2 Mise en commun

• À partir de feuilles de jeu d'une même équipe, dont certaines peuvent comporter des erreurs dans l'évaluation du total des points, faire expliciter :

– **les procédés de calcul des points** en les mettant en relation : la valeur de 4 cartes de 1 000 peut être obtenu à l'aide de 4 × 1 000 = 4 000 ou de 1 000 + 1 000 + 1 000 + 1 000 = 4 000, ou encore en considérant que c'est 4 milliers ;

– **les procédés de comparaison des scores**, ce qui peut déboucher sur un rangement de tous les nombres apparus dans la classe : les règles de comparaison déjà énoncées précédemment devraient être mobilisées, en référence à la valeur des chiffres dans l'écriture des nombres (selon leur position) ;

– **les erreurs** : oubli du fait que la valeur de la carte est prise autant de fois qu'il y a de points sur le dé, erreurs dans les types de calcul ou dans les calculs eux-mêmes, confusion entre nombre de points total sur les 4 dés « gagnés » et valeur des cartes gagnées...

COLLECTIF ET ÉQUIPES DE 3 OU 4 / ORAL

3 Synthèse sur les nombres > 1 000

• La synthèse peut prendre la forme d'un tableau de numération proposé par l'enseignant (il est peu probable qu'il soit suggéré par un élève) :

– Écriture

10 000	1 000	100	10	1
dizaine de mille	millier	centaine	dizaine	unité
4	**0**	**5**	**2**	**6**

Ce nombre s'écrit **40 526** (l'espace est destiné à repérer plus facilement le rang de chaque chiffre).
Il contient 4 dizaines de mille, 5 centaines, 2 dizaines et 6 unités.
Il se décompose en 4 × 10 000 + 5 × 100 + 2 × 10 + 6
ou sous forme d'addition du type :
10 000 + 10 000 + 10 000 + 10 000 + 100 + 100 + ...,
ce qui correspond à différentes méthodes de calcul possibles.

– Lecture
40 526 se lit : **quarante mille cinq cent vingt-six.**
Les tranches de 3 chiffres à partir de la droite sont une aide pour la lecture.

– Comparaison
Il faut regarder le nombre de chiffres et, s'il est identique, s'intéresser aux chiffres de plus grande valeur, en partant de la gauche.

• Les élèves sont en particulier invités à consulter leur dico-maths pour y trouver, avec l'aide de l'enseignant, comment s'écrivent, se lisent et se comparent les nombres supérieurs à 1 000.

• À partir de là, de nouvelles parties sont jouées, avec une autre mise en commun (si nécessaire) ou, plutôt, une incitation à s'auto-contrôler dans chaque groupe, avec l'aide éventuelle de l'enseignant.

Au début, les calculs sont laissés à l'initiative des élèves. Certains peuvent poser des additions du type 10 000 + 10 000 + 10 000 + ... (ce qui est assez fréquent), calculer des produits comme 4 × 10 000 (en prolongeant la règle des 0) ou répondre directement 40 000.

On laissera se développer ces différentes pratiques et ce n'est qu'au cours de la séance qu'est introduit le tableau de numération qui permet de trouver rapidement l'écriture du total des points. Mais il ne serait pas opportun de systématiser son utilisation, ce qui risquerait de conduire les élèves à ne plus réfléchir à la valeur des chiffres dans l'écriture du nombre.

INDIVIDUEL / ÉCRIT

Entraînement **manuel p. 63 exercices 2, 3 et 4**

UNITÉ 7

Exercices

DICO-MATHS p. 4
Décomposer les nombres

2 Voici les feuilles de jeu de Tim et Maïa.
Combien chacun a-t-il marqué de points ? Qui a gagné la partie ?

Tim	dé	carte
1er tour	2	1 000
2e tour	4	10
3e tour	1	10 000
4e tour	6	1

Maïa	dé	carte
1er tour	3	100
2e tour	6	1 000
3e tour	5	1
4e tour	6	10

3 Anaïs a marqué 54 023 points.
Combien de cartes de chaque sorte a-t-elle gagnées ?

4 Léo a déjà 40 047 points.
Quelles cartes doit-il gagner pour avoir 43 047 points ?

Exercice 2 Il est très proche de l'activité rencontrée au cours du jeu. Au moment de la correction, le tableau de numération peut être un support utile à condition de ne pas être systématisé.

Exercice 3 C'est la tâche inverse, il faut interpréter la valeur de chaque chiffre en fonction du rang qu'il occupe. Là aussi, le tableau de numération peut être utile à condition de ne pas le systématiser.

Exercice 4 Il suffit de remarquer que seul le chiffre des milliers est modifié.

Réponse : Il doit donc gagner 3 cartes « 1 000 ».

Annexe 3 : Extrait du sujet 0 proposé par le ministère en 2006

Cette question prend appui sur les documents proposés en annexe 1 (exercices proposés à des élèves de cycle 3)

a) Les exercices proposés à l'annexe 1 se présentent sous différentes formes et sont de complexité variable, mais ils sollicitent tous une même connaissance mathématique. Laquelle ?

b) Ranger les exercices par ordre de difficulté croissante. Justifier ce choix.

c) Indiquer trois caractéristiques de l'exercice 4 qui justifient l'intérêt de le proposer à des élèves du cycle 3.

<u>Annexe 1</u>

Exercice 1 : • **Observe l'exemple et complète de même.**

8 621 : 2 est le chiffre des dizaines,
862 est le nombre de dizaines.

7 214 : ...... est le chiffre des centaines,
...... est le nombre de centaines.

5 068 : ...... est le chiffre des unités,
...... est le nombre d'unités.

8 621 : ...... est le chiffre des dizaines,
...... est le nombre de dizaines.

Exercice 2 : • **Retrouve les chiffres masqués.**

3 ■ 8 : le chiffre des dizaines est plus grand que celui des unités.

■ 2 5 : il y a 32 dizaines dans ce nombre.

■ 3 ■ : le chiffre des unités est double de celui des dizaines ;
le chiffre des centaines est égal à la somme des deux autres chiffres.

■ ■ ■ : il y a 23 dizaines dans ce nombre ;
le chiffre des unités est égal à la somme des deux autres chiffres.

Exercice 3 : • Mon nombre de milliers est 572. Mon chiffre des centaines est le même que celui des dizaines de mille et mon chiffre des dizaines est le même que celui des milliers. Mon chiffre des unités est égal au chiffre des centaines de mille plus 1.

Je suis ____________

• Mon nombre de milliers est 86. Si on m'ajoute 1, mon chiffre des milliers augmente de 1.

Je suis ____________

• Je suis un nombre compris entre un millier et un million.
Mon nombre de chiffres est impair et je suis écrit avec les chiffres 4 et 9.
Si l'on m'ajoute 1, tous mes chiffres changent.

Je suis ____________

Exercice 4 : Voici des nombres :

50 267	6 074	20 681	48 607
40 596	1 740 325	740 634	
40 000	320 978	206 000	740 000
520 630	7 206 158	697	20 600

Recopie les nombres qui ont :

- 6 pour chiffre des centaines : ____________
- 206 pour nombre de centaines : ____________
- 0 pour chiffre des milliers : ____________
- 40 pour nombre de milliers : ____________
- 740 pour nombre de milliers : ____________

Annexe 4 : éléments relatifs au sujet du CERPE dans l'Académie d'Aix-Marseille en 2000

Extrait du sujet

Dans cet exercice, vous trouverez en annexe les productions de 9 élèves de CE2[6], en réponse au problème suivant proposé avant tout travail sur la division.

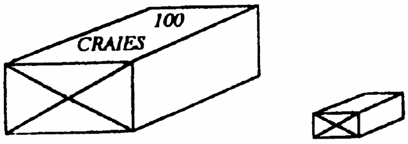
Un fabricant vend des craies par étuis de 10 et par boîtes de 100. Le magasinier doit préparer les boîtes et les étuis pour les livraisons.

Calcule combien d'étuis et combien de boîtes il doit préparer pour chaque client.

- M. Aubin: 800 craies - M. Créon: 254 craies

- M. Elias: 78 craies - M. Béal: 430 craies

- M. Durand: 60 craies - M. Fustie : 305 craies



1) Quelle compétence, en termes de connaissance des nombres, est mise en jeu ?

2) Classez ces productions en fonction de la procédure utilisée, tout en faisant très brièvement les remarques importantes sur chaque production.

3) Six enfants ont trouvé la bonne réponse. Rangez leurs productions de la plus rudimentaire vers la plus experte, en montrant brièvement l'évolution de chaque procédé par rapport au précédent.

M Aubin 8 boites
M Elias 7 étuis et 1 étui =
M Durand 6 étuis
M Créon 2 boites et 6 étuis
M Béal 4 boites et 3 étuis
M Fustier 3 boites et 1 étuis

Mickaël

Alice

c	d	u	
8	0	0	8 boites
	7	8	8 étuis
	6	0	6 étuis
2	5	4	2 boites et 6 étuis
4	3	0	4 boites et 3 étuis
3	0	5	3 boites et 1 étui

Isabelle

Mr Aubin 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 8 boites
Mr Elia 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 8 8 étuis
Mr Durand 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 6 étuis
Mr Créon 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4 2 boites et 6 étuis
Mr Béal 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 4 boites et 3 étuis
Mr Fustier 100 + 100 + 100 + 5 3 boites et 1 étuis

8 × 100 = 800 8 boites
7 × 100 = 70 + 8 8 étuis
6 × 10 = 60 6 étuis
2 × 100 = 200 + 5 × 10 = 250 + 4 2 boites et 5 étuis et 1 étui
4 × 100 = 400 + 3 × 10 4 boites et 3 étuis
3 × 100 = 300 + 5 3 boites et 1 étui

Claire

[6] Nous avons uniquement reproduit (et dans un ordre différent pour des questions de mise en page) les 6 productions qui sont utiles pour la troisième question. Comme on le voit dans l'extrait du corrigé, elles sont représentatives des procédures utilisées qui font l'objet de la deuxième question.

mr Poulin 800=8 boites mr Elias 78=7 étuis et 8 craies danc 8 étuis mr Durand 60=6 étuis mr Créan =254=2 boites 5 étuis et 4 crais danc 2 boites et 0 étuis mr Béal = 430=4 boites et 3 étuis mr Fustier 305 =3 boites et ~~8~~ 1 étuis. odile	Mr Poulin 800 = 8c 8 boites Mr Elias 78 = 7d 8u 7 étuis et 1 étui = 8 Mr Durand 60 = 6d 6 étuis Mr Créan 254 = 2c 5d 4u 2 boites 5 étuis et 1 étui Mr Béal 430 = 4c et 3d 4 boites et 3 étuis. Mr Fustier 305 = 3c et 5u 3 boites et 1 étui Alain

Extraits du corrigé proposé par la COPIRELEM (pp.138–140)

2) Classement des productions en fonction des procédures :
Catégorie n°1 : **Les élèves qui utilisent une schématisation : Benoît et Mickaël.**
Ces deux élèves utilisent une représentation figurative liée au matériel de numération; ils représentent ainsi une décomposition canonique additive (suivant les puissances de dix) des nombres :
| représente 1; ▯ représente 10 et □ représente 100.
On peut penser que ces décompositions ont été obtenues par comptage sur les puissances de 10.
Catégorie n°2 : **Les élèves qui utilisent des décompositions additives ou "hybrides"** (faisant intervenir l'addition et la multiplication) **suivant les puissances de 10.**
Ces décompositions peuvent être obtenues à partir de la valeur positionnelle des chiffres; mais nous faisons ici l'hypothèse que les élèves de cette catégorie ont retrouvé ces décompositions par calcul ou comptage de 100 en 100, puis de 10 en 10 avec ajout final des unités quand elles existent.
On peut distinguer deux sous-catégories :
- Isabelle, Élise et Charles qui produisent des décompositions additives des nombres (additions réitérées de 100 puis de 10);
- Claire qui produit une décomposition hybride faisant intervenir l'addition et la multiplication.

Catégorie n°3 : **Les élèves qui utilisent directement la valeur positionnelle des chiffres : Alice, Alain et Odile.**
On peut éventuellement distinguer Odile d'Alain et d'Alice qui explicitent la décomposition en centaines , dizaines et unités.
(…)
3) Rangement des productions de la plus élémentaire à la plus experte :
Pour effectuer ce rangement on peut prendre pour critères **le degré d'abstraction** (de conceptualisation) et **le principe d'économie** (écritures plus courtes, gain de temps,…) :
- Mickaël : schématisation par juxtaposition de symboles qui évoquent le matériel de numération.
- Isabelle : les symboles sont remplacés par les écritures chiffrées 100 et 10; le signe + remplace la juxtaposition;
- Claire : les sommes réitérées sont remplacées par des écritures multiplicatives (écritures plus économiques).
- Alice : elle explicite la valeur positionnelle des chiffres dans un tableau; il n'y a plus comptage ou calcul pour trouver la décomposition.
- Alain : il procède de la même façon mais sans tableau.
- Odile : elle conclut sans s'aider d'écritures du type c/d/u.

Il faut relativiser le jugement porté ci-dessus sur le caractère plus ou moins expert des productions :
- *la schématisation utilisée par Mickaël est très élaborée et il est difficile de se prononcer quant à l'économie entre les productions de Mickaël et Isabelle.*
- *les procédures d'Alain, Alice et Odile sont assez voisines; elles ne diffèrent que par les explications et justifications apportées à la technique mise en oeuvre.*
- *les deux groupes à distinguer en vue d'une exploitation pédagogique de cette analyse sont le groupe de Mickaël, Isabelle et Claire et celui d'Alain, Alice et Odile : ces derniers extraient l'information contenue dans l'écriture des nombres ; les autres la retrouvent par comptage et/ou calcul.*

Des réponses qui seraient :

1- Mickaël 2- Isabelle 3- Claire 4- Odile 5- Alain 6- Alice	1-Mickaël 2-Isabelle 3-Claire 4-Odile, Alain, Alice sur le même plan

sont tout à fait acceptables.

Annexe 5 : Tâche proposée en formation : « Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour… ? »

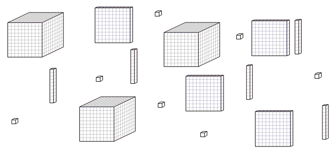
Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- 3406 c'est 3 milliers 4 centaines et 6 unités

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 7

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

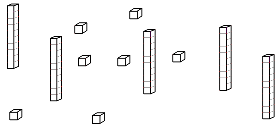
- il y a 3457 cubes sur la feuille



Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 8

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- il y a 57 cubes sur la feuille
- (il y a cinquante sept cubes sur la feuille)



Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 9

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- trois mille quatre cent cinquante six s'écrit 3456

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 10

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- 3406 m c'est 3 km 4 hm 6 m

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 11

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- qu'est-ce que mille ?
- qu'est-ce que 1000 ?
- qu'est-ce qu'un millier ?
- qu'est-ce qu'un million ?

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 12

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- Pourquoi 1000 est-il plus grand que 900 ?
- Pourquoi 56*10=560 ?

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 13

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- compter
  - de cent en cent à partir de 3850 ?
  - de un en un à partir de 48 ?

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 14

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- la retenue :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 2371 \\ +\quad 456 \\ \hline 2827 \end{array}$$

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 15

Quelles explications donnez-vous à vos élèves pour…

- le « nombre de centaines » de 8543 est 85

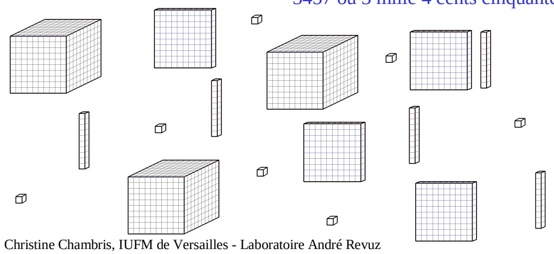
Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 16

La numération en unités pour les différentes explications

Le lien entre le « matériel » et le « symbolique »

C : « on compte par centaines, comme on compte par unités »
3 milliers 4 centaines 5 dizaines 7 unités

P : « le chiffre des milliers occupe la 4e position… » ou O : « 4 milliers se dit quatre mille ».
3457 ou 3 mille 4 cents cinquante sept



Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 25

La numération en unités pour les différentes explications

La possibilité d'expliquer la suite des nombres, les retenues, etc. avec des mots…

À partir de 3 milliers 8 centaines 5 dizaines, compter de centaine en centaine :

- 3m 8c 5d et 1 centaine
- 3m 9c 5d

On compte par centaines… C

- 3m 9c 5d et 1 centaine
- 3m 10c 5d
- 3m 1m 5d
- 4m 5d

On compte par centaines… C

Dix centaines font un millier. R

On compte par milliers… C

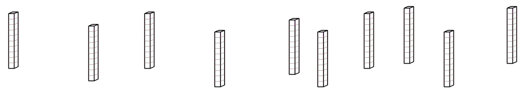
Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 26

La numération en unités pour les différentes explications

Le lien entre le « matériel » et le « symbolique »

- Combien y a-t-il de dizaines de cubes ? (C)
  Combien y a-t-il de centaines de cubes ?* (R1)

R1 : « Dix dizaines font une centaine »

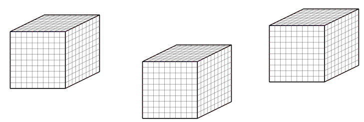


*Quel est le nombre de centaines de cubes ?

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 22

La numération en unités pour les différentes explications

Le lien entre le « matériel » et le « symbolique »



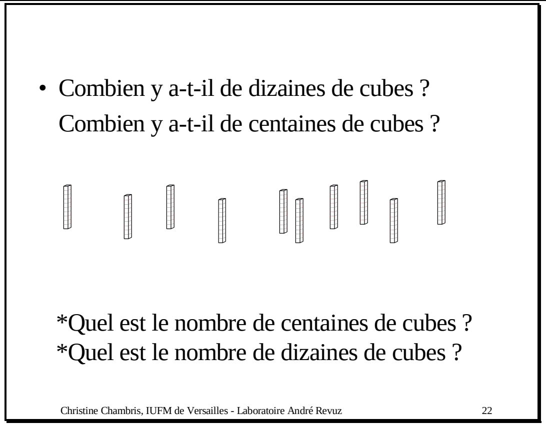
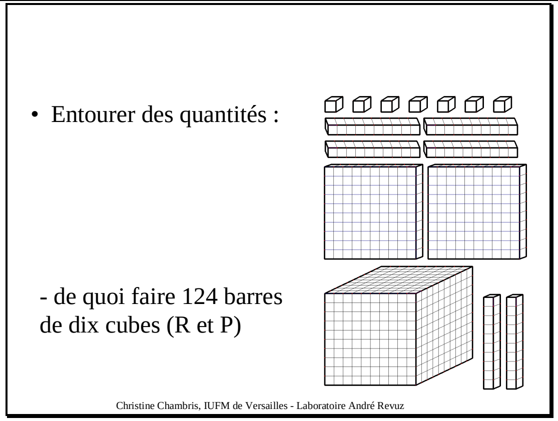
- Combien y a-t-il de milliers ? (C)
  de centaines ? (R2) R2 : « Dix centaines font un millier »

- Combien y a-t-il de dizaines ? (C puis R2 puis R1) ou (C puis R')

R1 : « Dix dizaines font une centaine »
ou R' : « Cent dizaines font un millier »

Christine Chambris, IUFM de Versailles - Laboratoire André Revuz 23

Annexe 6 : Tâche proposée en formation : quelques conversions…

Entourer 41 dizaines de cubes.		
Combien 30 dizaines font-elles de centaines ?	Combien y a-t-il de centaines dans 4 milliers ?	Combien y a-t-il de dizaines dans 1 millier ?
Combien 56 centaines font-elles de dizaines ?	Combien y a-t-il de dizaines dans 4532 ?	Combien y a-t-il de milliers dans un million ?

Annexe 7

Support utilisé en formation (imprimer les deux feuilles A4 en réduction sur un format A4)