Communication C2

LA QUESTION DU SENS DES MATHÉMATIQUES ILLUSTRÉE PAR UNE ÉTUDE DU PARALLÉLISME ET DE LA PROPORTIONNALITÉ DANS LA COUR DE L'ÉCOLE

Eric Laguerre
Laboratoire André Revuz
Université Paris Diderot Paris 7
elaguerre@club-internet.fr

Résumé
Cette communication a été proposée lors du colloque COPIRELEM de Auch en juin 2009.
Elle s'appuie sur un travail en cours sur la question du sens qu'une notion ou qu'une activité mathématique peut prendre au sein de l'enseignement primaire. Le cadre théorique est celui de la Didactique des Domaines d'Expérience.
L'auteur décline d'abord les composantes intérieures et extérieures du sens d'une notion.
Ensuite, un exemple de situation en classe de cycle 3 est développé, en plusieurs séances dont le but est de trouver la hauteur d'un arbre de la cour de l'école. Les difficultés des élèves, de représentation, de modélisation, ou liées à la proportionnalité en jeu sont évoquées.

1 INTRODUCTION

Le but de cette communication qui s'appuie sur un travail en cours est, dans un premier temps, de proposer une réponse à la question du sens qu'une notion ou qu'une activité mathématique peut prendre au sein de l'enseignement primaire. Nous tentons de répondre à la question : en quoi peut consister faire des mathématiques pour des élèves de l'école élémentaire ? Nous choisissons de scruter ce sens multiple tout à la fois à l'extérieur et à l'intérieur des mathématiques en nous plaçant, dans les deux cas, du côté du savoir et de celui de l'élève.
Dans un second temps, il s'agit d'analyser une situation construite et mise en œuvre dont l'objectif est – à partir d'un travail sur l'ombre – d'une part, de faire émerger une relation géométrique, le parallélisme, des propriétés numériques en rapport avec la proportionnalité et, d'autre part, d'apporter une solution à un problème posé à l'extérieur des mathématiques.
Même si nous empruntons ponctuellement certaines notions telles que celles d'obstacle ou de structuration du savoir à d'autres auteurs, notre cadre théorique est celui de la Didactique des Domaines d'Expérience (Boero, 2009 ; Boero & Douek, 2008).

2 CONSTRUCTION DU SENS EN MATHÉMATIQUES

A l'école, la question de la résolution de problèmes est un levier fondamental pour construire ce sens tant du point de vue institutionnel : « *La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages* » (BO n°3 juin 2008).- que du point de vue de la recherche : « *Un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résout pas de problèmes.* » (Brousseau, 1989). D'une façon générale, nous pouvons considérer que ces problèmes peuvent être intra mathématique ou extra mathématique. Dans les deux cas, ils ne correspondent qu'à un élément de la composante intérieure et extérieure du sens d'une notion en mathématiques.

2.1 Composante intérieure aux mathématiques

En ce qui concerne la composante intérieure aux mathématiques du sens d'une notion, il s'agit pour nous de concevoir des points d'appui pour éclairer de l'intérieur des mathématiques un nouveau savoir enseigné à des élèves. Nous nous plaçons donc à la fois du côté de la notion, de l'activité et de l'élève. Nous fondons notre réflexion sur l'idée que c'est en termes de structuration du savoir qu'il est possible de poser le problème du sens d'une notion (Chevallard, 1999). Cette structuration est en rapport avec les liens qui peuvent être tissés entre plusieurs notions d'un même domaine des mathématiques. Ainsi, dans le cadre de notre travail, la mise en relation de la notion de proportionnalité avec celles des échelles et des conversions d'unités qui relèvent toutes du domaine de l'organisation et de la gestion des données participe de leur prise de sens chez les élèves. La structure peut aussi être élaborée en prenant appui sur les liens qui peuvent être établis entre plusieurs domaines des mathématiques. Par exemple, notre texte met en évidence une liaison qu'il est possible d'instaurer entre le domaine des nombres et celui de la géométrie. D'une façon plus attendue, le domaine des grandeurs et mesures constitue une interface entre la géométrie et les nombres.

En second lieu, nous pouvons penser que les mises en fonctionnement logiques peuvent également contribuer à donner du sens aux notions mathématiques. Prenons le principe d'information maximale qui régit nos échanges de la vie de tous les jours. Si une personne dit qu'elle ne porte jamais de cravate bleue, nous en déduirons forcément qu'elle porte des cravates car dans le cas contraire, elle n'aurait pas précisé la couleur. En mathématiques, ce principe n'est plus valable et c'est la raison pour laquelle les élèves éprouvent quelques difficultés à admettre qu'un triangle équilatéral est aussi isocèle et qu'un carré est un rectangle.

En troisième lieu, nous pouvons considérer que certains problèmes intra mathématiques - c'est-à-dire strictement mathématiques et sans habillage - introductifs d'un nouveau savoir peuvent participer de la prise de sens interne aux mathématiques de ce dernier.

En quatrième lieu, en nous plaçant à présent un peu plus du côté de l'élève, c'est en termes d'obstacles (Brousseau, 1983) qu'il est possible de poser le problème du sens du savoir. Ce sens peut être approché grâce au dépassement de conceptions erronées qu'un élève peut avoir *a priori* à son sujet. Par exemple, l'une d'entre elles, très répandue au sujet de l'agrandissement est la suivante : pour agrandir, il faut ajouter. Cela constitue un obstacle à la reconnaissance du modèle proportionnel adapté à la notion d'échelle et parfois appelé « obstacle additif ». Ainsi, le dépassement de l'approche additive de la proportionnalité contribue à l'élaboration du sens de cette notion pour les élèves. De même, ne plus considérer le parallélisme comme une propriété intrinsèque à une droite mais comme une relation entre deux ou plusieurs droites constitue une prise de sens de cette notion. L'idée est de concevoir un enseignement qui favorise, d'une part, la mise en évidence d'éventuelles conceptions et, d'autre part, de permettre aux élèves de les dépasser si nécessaire.

Enfin, le cinquième point est en rapport avec les tâches mathématiques (Chevallard, 1999) qu'une notion permet aux élèves d'accomplir. Faire des mathématiques, dans l'univers scolaire, pour les élèves, revient, d'une part, à établir des procédures personnelles ou expertes efficaces dans la résolution d'un type de problèmes et, d'autre part, à comprendre et à justifier ces procédures. Ainsi, nous pouvons distinguer trois grandes catégories de tâches à l'école résolues à partir de la notion de proportionnalité (Comin, 2001) : la recherche de la quatrième proportionnelle, la comparaison de mélanges comprenant deux composants comme dans l'exemple d'un pot de peinture de couleur orange obtenue en mélangeant du rouge et du jaune, et la double proportionnalité que nous retrouvons dans la situation du nombre de bottes de foin nécessaires pour nourrir un troupeau qui est proportionnel à la fois au nombre de vaches et au nombre de jours.

2.2 Composante extérieure aux mathématiques

Pour ce qui est de cette composante extérieure qui concerne les points d'appui extérieurs aux mathématiques qui favorisent la prise de sens d'une notion, en nous plaçant du point de vue de l'élève, une approche langagière peut contribuer à la construction de ce sens. Ainsi, le connecteur positionnel « et » peut être à une ou à deux places. Si nous disons que « Eric et Nathalie sont amis », il n'y a pas d'ambiguïté car le connecteur est à une place ; Eric et Nathalie sont amis l'un avec l'autre. En revanche, dans la phrase « Eric et Nathalie sont mariés » réside une incertitude car ils peuvent être mariés ensemble ou l'un indépendamment de l'autre. Nous retrouvons cette difficulté en mathématiques chez des élèves dans le cadre de l'étude des droites parallèles, des droites perpendiculaires et de la symétrie axiale. « Les figures F et G sont symétriques » : sont-elles symétriques l'une par rapport à l'autre ou l'une indifféremment de l'autre ? De même, lorsque les élèves considèrent le parallélisme de deux droites (d) et (d') comme une propriété intrinsèque à chacune des droites (d) et (d') et non comme une relation d'équivalence, c'est peut-être parce que le connecteur « et » n'est pas perçu comme étant à une place.
Le sens d'une notion peut être aussi abordé à l'extérieur des mathématiques grâce à un problème extra mathématique posé et vécu par les élèves dans la réalité ou au sein d'une autre discipline. Nous proposons la mise en scène d'un problème en situation qui prend du sens pour les élèves du fait qu'il motive l'enseignement d'une notion mathématique.
Ainsi, dans le but d'introduire les notions de droites parallèles, de proportionnalité et d'échelle, nous proposons à des élèves d'une classe de CM1/CM2 du Val d'Oise le problème de la mesure de distances inaccessibles dans la cour. Comment calculer la hauteur d'un arbre ? L'objectif est de proposer une réponse dans l'espace initial à partir de la mesure des ombres en la modélisant mathématiquement dans un espace plus familier celui de la feuille format A_4.

3 LA DIDACTIQUE DES DOMAINES D'EXPERIENCE (D.D.E.)

Notre démarche de travail dans l'espace dit « réel » nécessite un outil d'analyse pertinent. La D.D.E. (Didactique des Domaines d'Expérience) est un cadre qui permet de traiter de nombreux contextes de façon unitaire. Elle est relative aux relations complexes qui se développent à l'école entre :

- le contexte interne de l'élève – ses conceptions, l'ensemble de ses schèmes, ses représentations, ses émotions, ses analyses –, qui lui permet de faire un repérage des données pertinentes du monde réel, un choix d'hypothèses supplémentaires sur le monde réel si cela est nécessaire, ce qui aboutit à un choix de représentation du monde réel ;
- le contexte interne de l'enseignant – ses conceptions, ses objectifs d'apprentissage, ses représentations, ses émotions, ses attentes – ;
- et le contexte externe – portion de réalité, objet de réflexion, signes, objets, contraintes physiques, discussion, analyse –.

Le fait qu'un modèle puisse constituer une nouvelle réalité nous interroge sur le sens de ce vocable. Comment peut-on concevoir la réalité matérielle et en quoi consiste la modélisation du réel dans ce cas ? Aussi nous proposons à présent une acception du concept de réalité matérielle.
Nous concevons ce concept comme un certain niveau de notre rapport au monde envisagé sous les catégories du contexte et de l'événement. La réalité comprise dans le contexte externe de la D.D.E. est donc perçue selon le binôme contexte/événement. Nous entendons par événement la donnée d'un espace, d'un temps et d'une interprétation de faits observés. Nous comprenons le vocable « contexte » en tant qu'il est décrit par des objets, du matériel et des actions. Modéliser le contexte consiste à modéliser le matériel et l'action initiaux. Modéliser l'événement revient à l'interpréter dans le contexte modélisé ou à faire apparaître de nouveaux événements dans ce contexte qui permettent d'obtenir de nouvelles interprétations de l'événement. La réalité évolue donc au fur et à mesure que le modèle prend forme.
Nous proposons maintenant d'illustrer notre réponse au sens des mathématiques dans le cas particulier d'un problème en situation en rapport avec la mesure de distances inaccessibles (Laguerre, 2008).

4 UN EXEMPLE DE MISE EN SITUATION DANS UNE CLASSE DE CYCLE 3

4.1 Objectifs généraux et progression de la séquence

Nous allons préciser à présent les objectifs généraux des séances et les liens tissés entre elles.
Dans la première séance, les élèves doivent être capables de mettre en évidence une relation entre les mesures des longueurs de bandes de papier collées parallèlement sur des fenêtres et celles de leurs ombres obtenues sur des plans parallèles au sol, ce qui met en œuvre le concept de proportionnalité qui est l'objet de l'étude.
Au cours de la deuxième séance, une situation de réinvestissement de la première doit permettre aux élèves de « trouver une méthode pour calculer la hauteur d'un arbre » en prenant pour référence les mesures des longueurs connues d'un objet, de son ombre et de l'arbre en question. Après la mise au point de cette démarche par les élèves aidés en cela par l'enseignant de la classe et l'expérimentateur, nous nous rendons dans la cour pour procéder aux prises des mesures puis nous revenons en classe pour effectuer les calculs.
La troisième séance permet d'introduire et d'exploiter la notion de droites parallèles en permettant aux élèves de comprendre que les droites, matérialisées à l'aide de morceaux de ficelle, qui joignent un point d'un objet, ici la coupe d'un escalier en carton collée sur une fenêtre, à son ombre projetée sur une feuille de papier sont équidistantes. Le but est d'imaginer que les rayons du soleil sont parallèles pour parvenir à une représentation plane de l'ombre afin d'aboutir, dans la séance qui suit, à une autre démarche de calcul de distances inaccessibles.
La quatrième séance a pour objectif de travailler sur la notion de représentation à l'échelle et de produire une telle représentation pour la situation arbre/objet/ombres. Le but final étant d'effectuer la mesure instrumentée de la hauteur de l'arbre sur le dessin. Un travail sur les conversions d'unités prend place pour obtenir la hauteur réelle de cet arbre. Dans cette situation, la proportionnalité intervient comme un outil pour définir un nouveau concept, celui des représentations à l'échelle et permet la poursuite de la modélisation d'un phénomène physique en l'occurrence « les ombres ».

4.2 Analyse du problème en situation

Nous procédons à une analyse de la situation en termes :
- de contexte interne enseignant pour lequel nous précisons les objectifs d'apprentissage spécifiques visés, le scénario et les tâches,
- de contexte interne élève au regard de leurs conceptions et des connaissances disponibles,
- et de contexte externe lié aux contraintes.

Nous décrivons la réalité selon le couple contexte/événement.

4.2.1 Première séance : « bandes de papier »

Contexte externe

Matériel : le milieu matériel se compose de quatre paires de bandes de papier de 5 centimètres de large numérotées de 1 à 8, une paire regroupant deux bandes superposables. Elles sont placées verticalement et séparément sur des vitres situées dans un même mur, découplées et à différentes hauteurs. Les bandes sont associées de la façon suivante : fenêtre 1 : bandes 50 cm et 10 cm ; fenêtre 2 : bandes 30 cm et 10 cm ; fenêtre 3 : bandes 20 cm et 30 cm ; fenêtre 4 : bandes 50 cm et 20 cm. Les ombres de ces bandes de papier se projettent sur des feuilles fixées sur quatre tables. Les élèves disposent de double-décimètre, de mètres enrouleurs et de crayons à papier. Nous leur remettons une fiche sur laquelle sont inscrites les longueurs de leurs deux bandes de papiers et sur laquelle ils doivent consigner les deux mesures des ombres demandées. Les résultats sont rassemblés au tableau par l'enseignant dans l'ordre croissant des mesures des bandes. Nous pouvons considérer *a priori* et sans l'avoir vérifié que l'organisation des données de la situation sous forme de tableau de nombres peut, d'une part, soulager la mémoire de travail lors du traitement de la situation et, d'autre part, favoriser le développement de procédures heuristiques plus riches. Au moment voulu, pour mettre en évidence la proportionnalité, les élèves ont à leur disposition des calculettes qui représentent alors un support à l'exploration de propriétés numériques.

Environnement : les élèves se répartissent en quatre groupes de six ou sept dans la salle de classe. Chaque groupe se place devant une feuille sur laquelle se projettent les ombres de deux bandes de papier. Il n'y a pas ici d'actions menées par les élèves à modéliser.

Contraintes : les conditions météorologiques doivent être fiables du point de vue de l'ensoleillement, ce qui représente une contrainte plus ou moins forte. Les élèves doivent tenir compte de leur position par rapport au soleil pour tracer correctement les ombres.

Contexte interne enseignant

Objectifs : l'objectif d'apprentissage de cette séance est d'aboutir à une approche scalaire de la proportionnalité. Pour cela, quatre objectifs sont visés. Les élèves doivent constater que :

- plus la bande est « grande » plus son ombre est « grande » ;
- la longueur d'une bande ne dépend ni de sa position sur la fenêtre, ni de sa hauteur ;
- à des bandes de mesures égales correspondent des ombres de mesures égales : la longueur de l'ombre ne dépend pas du choix de la fenêtre (correspondance en égalité) ;
- à la somme de deux mesures de longueurs de bandes correspond la somme des mesures de leurs ombres respectives (conservation en somme).

Les connaissances à mobiliser de la part des élèves lorsqu'ils ont à comparer des mesures concernent la comparaison des nombres entiers et décimaux en particulier la relation d'ordre, la notion de double ou de triple et des relations simples telles que 10 + 20 = 30 ou 20 + 30 = 50.
Tâches : deux binômes de chaque groupe ont pour tâche de tracer les ombres des deux bandes qui se projettent sur une feuille placée sur une table horizontale, de les mesurer au millimètre près - précision plausible dans le cadre de cette situation - et d'inscrire leurs mesures sur une fiche. Une fois les données rassemblées dans un tableau par l'enseignant, l'ensemble de la classe est amené à répondre à la consigne suivante : « *Pouvez-vous faire des remarques au sujet des mesures que vous voyez au tableau ?* ». Les élèves doivent en particulier mettre en relation les mesures des ombres et celles des bandes. Le choix des variables numériques est tel que nous pouvons penser qu'ils peuvent identifier les relations $20 = 10\times2$ et $50 = 20 + 30$ et les relations correspondantes dans la suite des mesures des ombres, au moins de façon approximative, c'est-à-dire en tenant compte des erreurs liées aux mesures et aux calculs effectués à l'aide d'une calculatrice. Les élèves doivent aussi émettre des hypothèses expliquant le fait que certains n'ont pas trouvé exactement les mêmes relations (erreurs, incertitudes de mesures, segments mal tracés etc.). Nous pensons que les erreurs commises à deux ou trois millimètres près seront admises par les élèves et n'empêcheront pas une éventuelle validation d'un résultat qui concernerait les ombres. En effet, le réflexe que nous pouvons retrouver souvent chez de tels enfants est de justement négliger, à tort ou à raison, les chiffres de la partie décimale.

Contexte interne élève

Numéro bande Groupe	1 1	2 1	3 2	4 2	5 3	6 3	7 4	8 4
Longueur bandes	50	10	20	10	30	20	50	30
Ombre sur table	90,8	18	36,4	17,6	55,4	36	91	55

Deux binômes de chaque groupe tracent au préalable les segments représentant les ombres puis la prise des mesures se déroule ensuite sans difficulté. Les données sont consignées dans un tableau visible par tous les élèves. Bien que ces derniers se soient alors retrouvés en classe entière, ils ont continué au début de cette phase à raisonner en groupe. Aussi, aucune remarque n'est apparue chez les élèves des groupes 1, 3 et 4. En revanche, le groupe 2, a émis la remarque suivante : « *La bande 3 est deux fois plus grande que la bande 4* ». Nous l'avons inscrite au tableau et à partir de cet instant, d'autres remarques ont été formulées :

Elève F : « *L'ombre est plus grande à chaque fois, elle est plus grande que la bande.* »
Exp : « *Oui, mais regardez les bandes de papier n'ont pas été prises au hasard* »
Elève A : « *Elles n'étaient pas pareilles* »
Elève F : « *Si, il y en avait qui étaient égales. Deux à chaque fois sont les mêmes et les ombres aussi presque*»
Exp : « *Oui, les bandes de même longueur ont des ombres qui ont la même mesure. Cette mesure de longueur ne dépend pas de la fenêtre ni de la hauteur à laquelle se situe la bande de papier. D'après vous, pourquoi on ne trouve pas exactement les mêmes mesures ?* »
Elève B : « *Parce qu'on n'a pas mesuré pareil.* »
Elève F : « *Ou alors on n'a pas dessiné exactement le même trait.* »
Exp : « *On admet que les mesures des ombres de deux bandes de papier de même longueur sont égales.* ».

L'expérimentateur intervient soit pour relancer les observations émises par les élèves si ces dernières ne correspondent pas exactement à celles attendues (1ère intervention) soit pour reformuler voire compléter leurs remarques (2ème intervention). La question et la conclusion liées à la précision des mesures auraient pu émaner des élèves.

Nous n'avons alors conservé au tableau qu'un exemplaire de chaque couple de mesures et nous avons demandé aux élèves de réfléchir sur la remarque faite par le groupe 2 en leur disant qu'ils pouvaient employer leur calculatrice s'ils le voulaient.

Elève A « *20 et 30 ça fait 50 et les ombres c'est presque pareil…*»
Elève B « *20 c'est 10 fois 2 et pour les ombres on fait fois 2 aussi…* »
Elève A : « *Oui, l'ombre est aussi presque le double* ».

Evolution du contexte interne élève en particulier en termes d'apprentissages : en se fondant sur des ostensifs, les élèves ont mis en évidence les propriétés additives et multiplicatives de la linéarité liée à la proportionnalité des mesures des bandes et de celles de leurs ombres respectives. Les difficultés rencontrées sont en rapport avec les valeurs approchées des mesures. Certains ne pouvaient pas admettre les relations numériques ci-dessus. Pour cela, il a fallu chercher quelques causes des approximations obtenues.

4.2.2 Deuxième séance : « la hauteur de l'arbre »

Contexte externe

Matériel : les élèves disposent de la trace écrite obtenue à la séance précédente à partir de laquelle ils doivent élaborer une méthode de calcul.
Dans un second temps, trois décamètres enrouleurs sont à leur disposition. Des lattes de bois constituent l'objet de référence dont on connaît la longueur (2 m). Trois groupes doivent prendre les mesures des longueurs retenues pour se mettre d'accord, au final, sur ces mesures. Un retour en classe est alors consacré au calcul. Les calculatrices peuvent être autorisées sachant que les élèves doivent malgré tout consigner leurs calculs sur une feuille.

Environnement : la première partie de la séance se déroule dans la classe et la seconde partie dans la cour.

Contraintes : les lattes doivent être placées perpendiculairement au sol. La prise des mesures de longueurs des ombres dans la cour relève de connaissances spatiales particulières en particulier celle du report de l'instrument de mesure.

Contexte interne enseignant

Objectif : l'objectif d'apprentissage visé est de compléter les propriétés de linéarité de la proportionnalité en faisant prendre conscience aux élèves de la nécessité d'un retour à l'unité dans certains cas de calculs d'ombres comme pour 71 cm. En premier lieu, grâce à un réinvestissement des résultats obtenus à la première séance, ils doivent calculer la mesure de la longueur de l'ombre de bandes de papier de 40 cm, 60 cm, 80 cm, 5 cm de long qui auraient été disposées dans les mêmes conditions que les précédentes. Pour cela, les connaissances disponibles attendues de la part des élèves sont liées aux relations de

linéarité. Les trois premiers calculs (40, 60, 80) relèvent d'un tel réinvestissement direct (20×2, 40 + 20, 40×2), le calcul suivant (5) peut être favorisé par la relation $10\div2$. Ce contexte permet de préparer le dernier calcul justement plus délicat (71).
Dans un second temps, cette séance a également pour objectif de mettre en œuvre une méthode de calcul de distance inaccessible déduite des derniers calculs. Si on peut mesurer la hauteur d'un objet vertical et la longueur de son ombre, ainsi que la longueur de l'ombre d'un autre objet vertical trop haut pour être mesuré directement, on peut calculer cette hauteur.

Tâches : il est dit collectivement aux élèves qu'ils doivent s'appuyer sur les résultats précédents pour trouver une méthode aboutissant dans un second temps au calcul de la hauteur cherchée. « *Comment va-t-on pouvoir calculer la hauteur d'un arbre en utilisant les résultats que nous avons obtenus précédemment ?* ». « *Comment va-t-on pouvoir calculer la hauteur d'un arbre en utilisant le fait qu'il y a proportionnalité entre la mesure de la longueur d'un objet, ici une bande de papier, et la mesure de la longueur de son ombre ?* ». Cette tâche constitue un prolongement de celle qui a consisté précédemment à calculer la longueur de l'ombre d'une bande de papier. Mais ces deux tâches se trouvent aussi en rupture du fait du changement du type de longueur inconnue (objet ou son ombre). La seconde consigne qui est donnée aux élèves est de procéder, en trois groupes, à la prise des mesures dans la cour puis d'utiliser ces résultats pour calculer la mesure cherchée.

Contexte interne élève

Evolution du contexte interne élève en particulier en termes d'apprentissages : la situation a fonctionné car les élèves ont rapidement réinvesti la linéarité mise en évidence précédemment en particulier en utilisant ici les relations reliant 20 et 40 ; 40, 20 et 60 ; 40 et 80 ainsi que la relation qui lie les bandes de papier de 20 et 10 cm : $20 = 10\times2$ et $10 = 20\div2$, ce qui leur a donné l'idée de la démarche pour la bande de 5 cm, $5 = 10\div2$. La décomposition de 71 cm en 40 + 30 + 1 a ensuite été produite par les élèves. La difficulté est apparue pour 1 mais le passage par 5 a permis de comprendre la manière dont nous pouvions obtenir 1. Le calcul $10 \div 10$ a émergé après plusieurs échanges entre élèves. La difficulté liée aux calculs sur les nombres décimaux, qui n'étaient pas un objectif d'apprentissage, a été éludée grâce aux calculatrices.

Ces apprentissages ont permis aux élèves de trouver une méthode pour calculer la longueur de l'ombre de n'importe quelle bande toujours en référence au contexte précédent. Lorsque nous sommes revenus sur la question initiale de distances inaccessibles, les élèves, en explicitant le fait que dans la situation ombre/bande en connaissant trois longueurs nous pouvions en calculer une quatrième, ont émis l'idée qui consiste à prendre un objet de référence pour ensuite calculer la hauteur d'un arbre. Ils ont mis en évidence que dans ce cas et contrairement aux bandes de papier, c'est la longueur des deux ombres que l'on connaît.

4.2.3 Troisième séance : « parallélisme des rayons du soleil »

Contexte externe

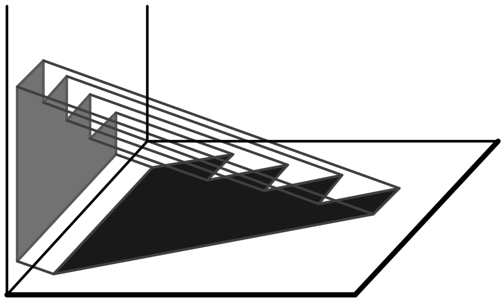
Matériel : le milieu matériel comprend quatre escaliers découpés dans du carton, fixés sur quatre fenêtres et dont les ombres se projettent sur quatre grandes feuilles de papier posées sur deux tables horizontales. Les élèves disposent, par groupe, d'une grande feuille de papier blanc de format 60×85 déjà mise en place, de doubles décimètres, de feutres pour dessiner le contour de l'ombre, de paires de ciseaux, d'un rouleau de ficelle fine, pour relier les points caractéristiques de l'escalier et leurs ombres, et de rouleaux de scotch pour fixer les morceaux de ficelles.

Contraintes : les contraintes « naturelles » de la situation sont, comme tout ce qui concerne les ombres d'objets, la présence du soleil et une bonne exposition de la salle. L'heure à laquelle se déroule l'expérience est également une contrainte puisque, suivant le fait que le soleil soit rasant ou pas, certaines ombres ne seront pas perceptibles. Le tracé de l'ombre doit être rapidement exécuté. Une autre contrainte est liée au fait que les feuilles sur lesquelles se projettent les ombres ne doivent pas bouger, c'est la raison pour laquelle nous les avons fixées au préalable.

Contexte interne enseignant

Objectifs : l'objectif d'apprentissage est de parvenir, grâce à des échanges entre élèves et à l'ostension, à une approche de l'ombre et au parallélisme des rayons du soleil. D'autres conceptions en rapport avec la course du soleil et son effet sur les ombres ont été étudiées par Douek (1999) qui travaille en s'appuyant sur le cadre théorique de la DDE. Aucune connaissance disponible n'est spécifiquement attendue de la part des élèves.
Pour nous, il s'agit, dans un premier temps, de réfléchir avec eux sur la nature de l'ombre d'un objet : « *Qu'est-ce qu'une ombre pour vous ?* » pour réinvestir ces conceptions dans le cadre d'une modélisation du problème initial.
Dans un second temps, le but est de mettre en évidence le parallélisme des rayons du soleil ce qui permet d'aboutir à une définition de deux droites parallèles comme ayant un écart constant. Il est à noter que cette activité est réinvestie lors de la mise en place de la séance suivante relative à une nouvelle méthode de calcul de distances inaccessibles. Enfin, la question qui suit est posée : « *Pourquoi a-t-on demandé de tracer le contour de l'ombre de l'escalier avant de relier les arêtes avec la ficelle et des bandes de papier avant de les mesurer ?* » dans le but de leur faire comprendre que la longueur de l'ombre dépend aussi de l'heure à laquelle elle est mesurée. Même si plusieurs conceptions, sur lesquelles il ne s'agit pas ici de s'appesantir avec les élèves, sont sous-jacentes, il est tout à fait plausible que celle qui est attendue et qui est en rapport avec le fait que le soleil bouge, soit émise par certains d'entre eux.

Tâches : il est tout d'abord demandé aux élèves de nous dire ce qu'ils savent de l'ombre d'un objet en général.



Matérialisation du parallélisme des rayons du soleil

Ils ont alors pour première consigne, qui est donnée collectivement, de tracer à la règle le contour de l'ombre.

La seconde consigne, qui est communiquée à la classe réunie et après que la première soit exécutée afin de bien les distinguer, est de relier une arête de chaque marche à l'arête correspondante sur l'ombre projetée.

La troisième consigne consiste, pour les élèves, à faire un constat sur ce qu'ils obtiennent. Ils doivent constater que les ficelles qui sont censées représenter les rayons du soleil et qui relient un point de l'escalier à son ombre gardent le même écart (les rayons du soleil sont parallèles).

Les élèves ont à leur charge de tracer l'ombre de la coupe de l'escalier, de relier les points avec de la ficelle et de constater le parallélisme ceci afin qu'ils aboutissent au fait que les rayons du soleil peuvent être considérés parallèles.

Contexte interne élève

Certaines de leurs conceptions au sujet de l'ombre sont apparues :

> Elève A : « *Le soleil, par exemple, il est arrêté par moi c'est pour ça qu'il y a de l'ombre.* « *C'est quand y a plus de lumière. La lumière, elle passe pas, c'est pour ça qu'il y a l'ombre.* »
> Exp : « *D'accord, mais pourquoi alors ce n'est pas tout noir si le soleil est arrêté ?* »
> Elève A : « *Mais parce que le soleil il passe là quand même. Là lumière elle passe pas mais là elle passe !!* »

L'élève a fait des gestes avec ses deux bras qu'elle a écartés dans un mouvement d'avant en arrière pour signifier que le soleil « passe sur les côtés ».

Pour ce qui est des constats qu'il y avait à faire au sujet des escaliers et de leur ombre, des remarques ont alors été formulées, nous ne donnons que les plus significatives :

> *« Les ficelles sont placées les unes à côté des autres. »*
> *« L'écart entre les ficelles est tout le temps le même. »*
> *« Les ficelles ne se rencontreraient jamais si on les allongeait. »*
> *« Ah oui, c'est comme parallèle ! »*

Les élèves ont éprouvé quelques difficultés à associer les morceaux de ficelle aux rayons du soleil, ce qui est compréhensible car il s'agit d'une première modélisation qui leur est finalement imposée. Mais une fois cette association faite, ils n'ont pas eu de mal à considérer que deux rayons ont un écart constant.

Les observations que nous avons pu faire et les commentaires que nous avons entendus de leur part nous ont incités, avant de leur demander de faire des commentaires mathématiques sur leur production, à leur demander de formuler les difficultés matérielles qu'ils avaient rencontrées. Les uns nous ont dit qu'à un moment le soleil avait disparu, les autres que l'ombre de l'un de leur camarade les avait parfois gênés et enfin les élèves d'un dernier groupe nous ont fait comprendre qu'après avoir placé la première ficelle, ils avaient prédécoupé deux autres morceaux de la même longueur et qu'ils ont dû recommencer car ils étaient trop courts. Les élèves ont bien compris également la raison pour laquelle il leur a été demandé de tracer des contours avant toute chose : « *Le soleil il bouge…* ».

4.2.4 Quatrième séance : « modélisation à l'échelle »

Contexte interne enseignant

Objectifs : l'objectif d'apprentissage spécifique est de réinvestir la notion de représentation à l'échelle qui a été introduite par l'enseignant pour parvenir à un modèle à l'échelle du problème initial de mesure de la hauteur d'un arbre et de trouver ainsi une seconde méthode de résolution du problème. Les connaissances disponibles attendues de la part des élèves sont celles mises en évidence lors de la troisième séance (ombre et rayons du soleil parallèles) et la notion de représentation à l'échelle qui leur est proposée.

Dans un premier temps, nous attendons de cette séance que les élèves parviennent à schématiser la situation dans le plan grâce à une représentation de l'objet de référence, de l'arbre dont on cherche la mesure de la longueur et de leurs ombres respectives sans se soucier des longueurs exactes pour le moment. Sur ce schéma, les élèves doivent faire apparaître deux rayons du soleil parallèles. Dans un second temps, le but est de proposer une représentation à l'échelle de cette situation permettant d'obtenir la longueur à l'échelle du segment représentant l'objet dont on cherche la hauteur. Il s'agit alors d'une modélisation du problème qui permet d'aboutir à une seconde méthode de résolution de la question initiale de mesure de distances inaccessibles dans le méso-espace réinvestissant la définition des droites parallèles.

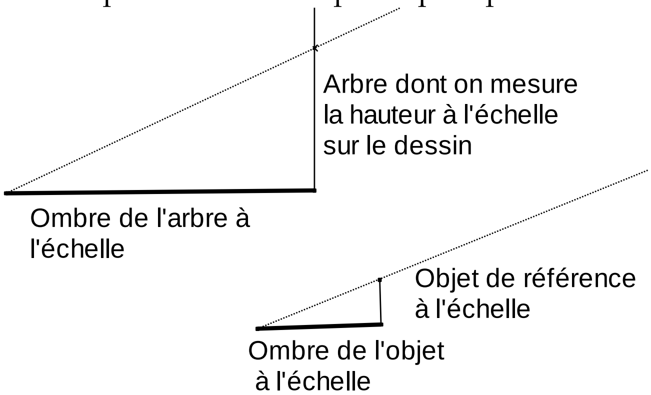
Tâches : premier temps :

Les élèves doivent répondre aux questions suivantes :

- Comment va-t-on représenter de façon simple sur un dessin, l'arbre, l'objet de référence et leur ombres ?
- Que doit-on représenter en plus des ombres et des objets ?
- Décrire le schéma en fonction des représentations de l'arbre, de l'objet et de leurs ombres.
- Proposer des dessins accompagnés de leur programme de construction afin de savoir si le segment représentant l'arbre n'a pas été obtenu après calcul de sa longueur ou s'il a été produit après coup grâce au tracé d'une droite parallèle.

Un ordre de construction possible est le suivant.

Construction à l'échelle de deux segments dont les supports sont perpendiculaires représentant l'objet de référence et son ombre.
Tracé d'un rayon du soleil passant par les extrémités de l'objet et de son ombre.
Construction à l'échelle de l'ombre de l'arbre et d'une demi droite perpendiculaire à l'ombre.
Construction de la parallèle au premier rayon passant par l'extrémité de l'ombre de l'arbre.
Cette droite coupe la demi-droite précédente en un point qui représente le sommet de l'arbre.



Modélisation de la situation

Second temps :
Les élèves doivent calculer les mesures des longueurs à l'échelle à l'aide de calculatrices.

Contexte externe

Nous allons ici nous centrer sur une approche de la réalité en termes de contexte et d'événement à modéliser ce qui n'était pas le cas jusqu'à présent.

Contexte :

environnement : la cour de l'école ; matériel : un arbre et un objet de référence ;
action : le soleil agit et fait apparaître les deux ombres.

Il s'agit, pour les élèves de représenter ce contexte aidé pour cela par l'enseignant, ce qui correspond à la première partie de cette séance.

Evénement :

lieu : dans la cour
instant : après avoir travaillé sur les bandes de papiers et sur une schématisation de la situation ;
interprétation d'un fait : les mesures de longueur d'un objet et de son ombre sont proportionnelles.

A partir de ce constat, les élèves, aidés par l'enseignant, doivent modéliser le contexte précédent à l'échelle pour calculer ensuite la hauteur de l'arbre.

Organisation et matériel :

En ce qui concerne la première partie, le travail est commencé en petits groupes. Chaque groupe doit mettre au point une représentation de la situation qu'il expose à l'ensemble de la classe. La classe entière doit ensuite s'accorder sur le schéma qui peut être retenu. L'enseignant joue le rôle de régulateur. Il peut aussi intervenir en posant des questions sur la forme des schémas proposés par les élèves. La représentation schématique doit faire apparaître le fait que les deux objets sont perpendiculaires au sol et que les rayons du soleil sont parallèles. Les élèves disposent de feuilles de papier, de crayons et de règles.

Pour ce qui est de la seconde partie, les élèves doivent calculer les mesures des longueurs, à l'échelle, de l'objet référentiel, de son ombre ainsi que celle de l'objet dont on cherche la longueur. Pour cela ils disposent de feuilles de papier, de crayon et de calculatrices. Le professeur prend en charge l'exposé de la méthode de construction du dessin à l'échelle 1/100 : 1 cm sur le dessin représente 100 cm dans la cour puis tracé du segment représentant l'objet de référence et de son ombre qui lui est perpendiculaire. Tracé de l'ombre de l'arbre et des deux rayons parallèles. Le premier passant par les extrémités de l'objet et de son ombre et le second, qui est parallèle au premier, passant par l'extrémité de l'ombre de l'arbre.

Contexte interne élève

Evolution du contexte interne élève en particulier en termes d'apprentissages : une étude reste à faire quant aux apprentissages effectués par les élèves à ce niveau de la séquence. En effet, tout le travail a été mené pas l'expérimentateur sans vérifier les acquis qui peuvent en résulter.
Les élèves ont rencontré des difficultés : en particulier, ils n'ont pas pensé à matérialiser les rayons du soleil, ce qui semble compréhensible puisque ce type de représentation modélise un phénomène physique peu perceptible. Nous avons proposé et donc imposé la représentation ce qui constitue une ostension assumée.

Deux types de schémas ont été produits par quelques élèves. L'un faisant apparaître deux triangles dissociés et l'autre les plaçant l'un dans l'autre. Mais le fait que ces triangles allaient être représentés comme étant rectangles a été communiqué par l'expérimentateur sans interaction avec la classe. Aussi, c'est en particulier à ce niveau de notre étude que le contexte interne des élèves devrait être mieux pris en compte car ces derniers ont beaucoup été guidés par l'expérimentateur et l'enseignant.

5 CONCLUSION

Le but de cet article a été de répondre de façon générale puis particulière à travers la conception et la mise en oeuvre d'un problème en situation à la question du sens que peuvent prendre les mathématiques pour les élèves dans le cadre de l'enseignement primaire.
Il s'est agi de proposer des éléments pratiques afin que chacun puisse se forger ses propres représentations des rapports entre les mathématiques et la réalité à ce niveau de la scolarité. Nous avons gardé à l'esprit l'idée directrice qui consiste à penser que ce qui donne du sens aux notions, ce n'est pas uniquement un problème, qu'il soit ou non lié à la réalité mais, d'une part, les questions qu'il suscite chez les élèves et, d'autre part, la modélisation qu'il génère chez eux.

Le concept d'ombre est réinvesti dans une activité qui aboutit à la notion de proportionnalité à partir de constats effectués par les élèves en rapport avec les mesures de longueurs de bandes de papier et de leurs ombres. Le but final consistant, de la part des élèves en premier lieu à savoir calculer la mesure de la longueur de l'ombre d'une bande de papier dont on connaît les dimensions, à l'aide d'une méthode personnelle sans qu'aucune solution experte ne soit attendue de leur part. En second lieu, les élèves doivent trouver une méthode de calcul de la hauteur d'un objet. Enfin, du fait qu'elle ait été menée à l'école primaire, la dernière partie qui consiste à modéliser cette méthode à l'aide d'un schéma à l'échelle a totalement été menée par l'expérimentateur. Un travail reste à faire pour mieux adapter cette tâche à ce niveau de la scolarité.

L'ensemble de ces séances, à partir de la problématique de mesure de distances inaccessibles dans le méso-espace, illustre bien notre approche de la modélisation de la réalité. L'enseignant mène l'explicitation de la démarche mais cette dernière permet malgré tout de donner du sens aux mathématiques enseignées en reliant des domaines disjoints (géométrie/numération) et des disciplines parfois séparées (sciences/mathématiques) et en permettant aux élèves d'anticiper dans le modèle des réponses d'un problème posé dans le réel.

Mais ce travail, au sein de la Didactique des Domaines d'Expérience, mériterait une analyse plus fine du contexte interne des élèves afin de mieux prendre en compte leurs conceptions sans qu'ils soient trop ou même exclusivement guidés dans leurs démarches.
Les limites émergeant de la mise en œuvre de ce problème en situation montrent les difficultés qu'un enseignant peut rencontrer lorsque son questionnement est en rapport avec la prise en compte de la réalité chez les élèves. Ces situations peuvent rapidement devenir très complexes si nous voulons les faire travailler d'une façon la plus autonome possible dans un environnement peu habituel. Malgré tout, ce type de modélisation devrait s'appuyer le plus possible sur les conceptions de la réalité des élèves. Aussi, nous avons pleinement conscience que les notions de rayon de soleil et d'ombre sont d'un accès

de conceptualisation difficile pour de jeunes enfants. Notre travail demanderait une étude complémentaire dont le principal objectif serait de beaucoup moins fonder les séances sur l'ostension.

6 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Boero P. (2009) Les domaines d'expérience : lier le travail scolaire à l'expérience des élèves. *Cours de la 15ème Ecole d'été de didactique des mathématiques. Clermont-Ferrand. ARDM.*

Boero P. & Douek N. (2008) La Didactique des Domaines d'Expérience. *Carrefour de l'Education n° 26.*

Brousseau G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol 4.2. La Pensée Sauvage.*

BROUSSEAU G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Colloque international "obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif." Construction des savoirs. Agence d'Arc inc Cirade.*

Bulletin Officiel (2008) Ministère de l'Education Nationale et du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. Numéro Hors série n°3 19 juin 2008.

Chevallard Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *In Analyse des pratiques des enseignants et didactique des mathématiques. IREM de Clermont-Ferrand.*

Comin E. (2001) Difficultés d'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Séminaire National de Didactique des Mathématiques Université Paris Diderot Paris 7.*

Douek N. (1999) Argumentation and conceptualization in context : a case study on sun shadows in primary school. *Educational Studies in Mathematics 39.*

Laguerre E. (2008) Problèmes dans la cour de l'école. Mathématiques : la question du sens.

Les Cahiers Pédagogiques n°466. CRAP Paris.