« Enseigner les mathématiques à l'école : où est le problème ? »

BORDEAUX-BOMBANNES
2, 3 et 4 juin 2008

Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

(COPIRELEM)

XXXV^{e} COLLOQUE NATIONAL DES FORMATEURS DE PROFESSEURS DES ECOLES EN MATHEMATIQUES

« Enseigner les mathématiques à l'école : où est le problème ? »

BORDEAUX-BOMBANNES

2, 3 et 4 juin 2008


Actes

UNIVERSITÉ MONTESQUIEU BORDEAUX IV

QUELS SAVOIRS MATHEMATIQUES DANS LES PROBLEMES POUR CHERCHER A L'ECOLE ELEMENTAIRE ? LE CAS DES PROBLEMES D'OPTIMISATION AU CYCLE 3.

Magali HERSANT
IUFM des Pays de Loire, CREN, Université de Nantes
Yves THOMAS
IUFM des Pays de la Loire, Université de Nantes

Résumé

Notre atelier s'est appuyé sur les travaux du groupe « Des problèmes pour chercher à l'école primaire » (Groupe PPC, 2006 et Thomas, 2008). L'objectif était d'amener les participants à une réflexion sur les savoirs mathématiques qui peuvent être en jeu dans la résolution de ces problèmes. Pour cela, après un bref rappel du cadre officiel (MEN, 2005), nous avons d'abord invité les participants à résoudre des problèmes d'optimisation élaborés au sein de notre groupe de travail et destinés à des élèves de cycle 3. Puis, le travail a concerné les savoirs mathématiques en jeu dans ces problèmes : nous avons demandé aux participants quels savoirs mathématiques ils identifiaient dans ces problèmes et avons précisé notre point de vue sur cette question, en l'illustrant par des observations que nous avons effectuées dans des classes.

Dans ce compte-rendu, nous présentons les problèmes étudiés lors de l'atelier et les savoirs mathématiques que nous y identifions.

Introduction

Depuis quatre années, nous élaborons des « problèmes pour chercher » (PPC dans la suite du texte) et des scénarii pour ces problèmes au sein au sein du groupe « Problèmes pour chercher » composé d'enseignants du premier degré, de formateurs et d'enseignants chercheurs[1]. L'évolution de notre questionnement nous a conduit à travailler ces deux dernières années sur des problèmes (discrets) d'optimisation pour le cycle 3 qui mettent en jeu à la fois :

- des savoirs mathématiques relatifs à la recherche et à la résolution de problème ;

[1] Ce groupe, dont la responsable est Magali Hersant, rassemble en 2007-2008 Catherine Argant, Valérie Aubry, Marie Boudeau, Denis Butlen, Geneviève Dron, Yves Thomas, Raymond Torrent. Ses travaux s'inscrivent dans la recherche INRP dirigée par Christian Orange « Pratiques et mises en textes des savoirs ».

• des savoirs que nous nommons curriculaires plus clairement identifiables dans l'une des rubriques du programme de mathématiques à l'école élémentaire (par exemple : sur l'alignement, sur l'aire…).

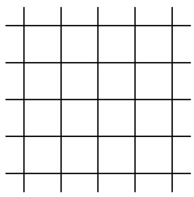
L'identification des savoirs en jeu dans ces problèmes n'est pas toujours évidente et notre objectif, dans cet atelier, était d'amener les participants à réfléchir sur cette question. Pour cela nous nous sommes appuyés sur quatre problèmes. Nous avons demandé aux participants d'abord de les résoudre puis d'indiquer les savoirs mathématiques qu'ils y identifiaient comme enjeu d'apprentissage pour des élèves de cycle 3. Lors de l'échange qui a suivi ce travail, prenant en particulier appui sur des observations réalisées en classes, nous avons précisé les savoirs que nous considérons comme enjeu d'apprentissage dans ces problèmes soit parce que les élèves doivent les mobiliser, soit parce qu'ils doivent les construire ou soit parce qu'ils doivent les modifier. Ce texte reprend ces éléments après une présentation des problèmes et des commentaires sur ces problèmes, relatifs aux conclusions auxquelles on peut aboutir avec les élèves et aux mathématiques.

1. Présentation des problèmes

Les formulations des problèmes sont les mêmes que celles utilisées avec des élèves de cycle 3. Nous encourageons vivement les lecteurs à les résoudre avant de poursuivre leur lecture.

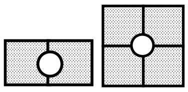
Pas trois points alignés.

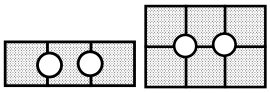
Placez le plus possible de points sur les intersections de cette grille sans former aucun alignement de trois points.



Gommettes

On dispose d'un grand nombre de carrés en carton et de gommettes rondes collantes avec lesquelles on assemble ces carrés.

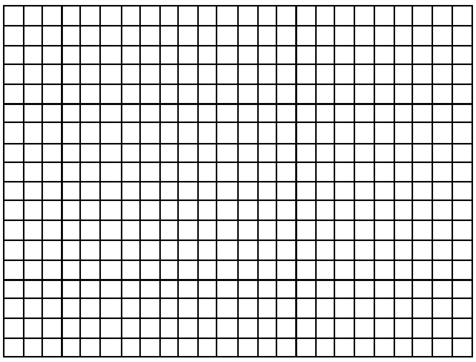
Voici deux assemblages possibles avec une seule gommette : 

Voici deux assemblages possibles avec 2 gommettes : 

Vous disposez de 6 gommettes, assemblez le plus possible de cartons en un seul bloc avec ces 6 gommettes.

Etiquettes

Dans cette grille 18×24, découpez le plus possible d'étiquettes 5×7.



Neuf nombres.

On écrit une suite de 9 nombres entiers différents supérieurs à 1, respectant la contrainte suivante : quand deux nombres sont voisins, l'un des deux est multiple de l'autre.

Le but est que le plus grand nombre de la liste ne soit pas trop grand.

Les formulations des énoncés orientent volontairement d'abord vers l'action, la réalisation d'essais, c'est-à-dire vers une sorte de « bricolage ». Toutefois, *in fine*, la résolution de ces problèmes repose sur une articulation et des allers-retours entre des essais effectifs pour proposer ou améliorer une solution et un raisonnement en partie détaché de l'action qui permet d'envisager des raisons intellectuelles et une preuve. Pour résumer cette dynamique, nous parlons d'articulation entre démarche empirique et démarche déductive. Ce caractère commun des problèmes permet d'envisager un scénario en trois temps pour leur réalisation en classe :

1. une recherche empirique (individuelle, en petits groupes puis en groupe classe) permet d'obtenir une ou des meilleure(s) solution(s) de la classe ;
2. lorsque l'amélioration empirique de la ou des solutions s'essouffle, il s'agit de savoir si « ça vaut la peine de chercher encore » pour basculer vers la recherche de raisons et le raisonnement déductif, au besoin articulé avec la recherche empirique précédente ;
3. la conclusion permet de faire la synthèse sur l'état de résolution du problème, selon les problèmes et les travaux des élèves, elle permet de clore ou pas le problème.

2. Conclusions possibles au cycle 3 et remarques mathématiques

Certains de ces problèmes appellent des commentaires soit par rapport à l'état des recherches en mathématiques à leur sujet, soit par rapport à leur passation en classe, ce que nous faisons dans ce paragraphe. Nous indiquons aussi les conclusions auxquelles peut parvenir une classe de cycle 3, en une ou deux séances. Cela ne signifie pas que chaque élève est capable de produire cette conclusion sur le problème, mais qu'elle est élaborée collectivement par la classe. La rédaction de la conclusion proposée ici ne respecte pas la chronologie de résolution du problème en classe et d'élaboration des différents éléments de la solution. Cette conclusion sur le problème correspond le plus souvent à une preuve mais pas toujours, comme nous le verrons pour *Etiquettes*.

Pour les problèmes *Gommettes* et *Etiquettes*, nous invitons aussi le lecteur à consulter l'article de Thomas (Thomas, 2007) dans la revue *Grand N*.

Pas trois points alignés

Conclusion. Sur chacune des lignes, on peut placer au plus deux points. Donc on peut placer au plus $2 \times 5 = 10$ points sur la grille 5×5. De plus, comme, on peut effectivement placer 10 points, par exemple de la façon suivante (figure 1), la solution du problème est 10.

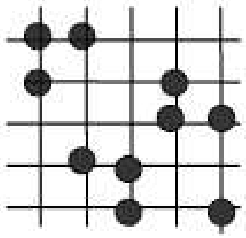


Figure 1

Commentaires. Ce problème, sous sa forme générique (*i.e.* avec une grille $n \times n$) est connu des mathématiciens sous le nom de *No Three in line.* Il n'est pas résolu pour n grand ; on dispose seulement d'une conjecture (voir par exemple le site : http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/no3in/readme.html).
Pour les classes de CE2, on peut proposer d'abord une grille 4×4 où il est plus facile de trouver une disposition qui correspond à la solution optimale.

Gommettes

Conclusion. Avec chaque gommette on peut assembler au plus 4 carrés. Ainsi, la première gommette permet d'assembler 4 carrés. Avec la deuxième, puisqu'il faut que les nouveaux carrés tiennent ensemble et soient reliés au bloc déjà constitué, on ne peut ajouter que trois nouvelles gommettes et ainsi de suite. Donc avec 6 gommettes, on peut assembler au plus 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 soit 19 gommettes, par exemple de l'une des façons suivantes (figure 2).

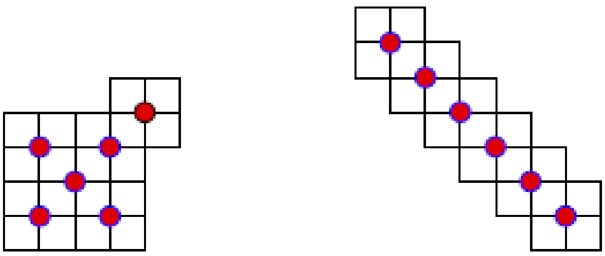


Figure 2

Commentaires. Dans ce problème, la taille relative des gommettes et des cartons joue un rôle essentiel (Thomas, 2007) et détermine d'une certaine façon un axiome de base sur lequel il faudra se mettre d'accord avec les élèves : avec une gommette on peut associer au plus 4 carrés.

On peut modifier le nombre de gommettes dont on dispose mais cela n'est pas très intéressant puisqu'une généralisation du problème est possible.

Etiquettes

Conclusion. On peut placer 11 étiquettes de la façon suivante (figure 3). On ne sait pas si on peut en placer 12. En effet, le nombre de carreaux de la grille est 432 et pour placer 12 étiquettes, 420 carreaux sont nécessaires, mais cela ne suffit pas pour dire qu'on peut effectivement placer 12 étiquettes. Par exemple, on ne peut placer aucune étiquette sur une grille de 4 carreaux sur 100 alors qu'il y a 400 carreaux.

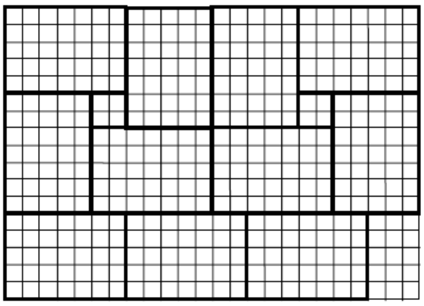


Figure 3

Commentaires. Nous avons toujours renoncé à fournir une preuve de l'impossibilité de placer 12 étiquettes dans les classes. Pour les élèves, le problème 18×24 reste donc ouvert tandis que le problème 17×24 (avec les mêmes étiquettes) est clos. La preuve réside dans l'impossibilité d'obtenir 18 comme somme de 5 et de 7. Chaque rangée de 18 carreaux comporte donc (du moins si on convient que les étiquettes sont découpées en suivant le quadrillage) au maximum 17 carreaux occupés par les étiquettes. Le nombre de carreaux occupé par les étiquettes est donc inférieur ou égal à 17 × 24, ce qui ne permet pas d'en placer 12.

Plus généralement, les problèmes de ce type, avec une grille de taille $n \times n'$ et des étiquettes de taille $p \times p'$ (avec n, n', p et p' entiers et p (resp. p') inférieur à n (resp. n')), sont connus sous le nom de « rectangles packing ». Ils sont classés comme des problèmes Non déterministes Polynomiaux Durs (NP durs) c'est-à-dire qu'ils sont résolubles (en théorie) en un temps polynomial si l'on dispose d'une infinité d'ordinateurs qui travaillent en parallèle ! Cependant, pour certaines valeurs numériques, la résolution à la main est possible, comme nous venons de le voir.

Neuf nombres

Conclusion. Il y a 11 entiers compris entre 2 et 12. 7 et 11 n'ont ni multiple ni diviseur parmi ces entiers, il reste donc 9 entiers possibles : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 et 12. Par ailleurs, la suite 5, 10, 2, 8, 4, 12, 6, 3, 9 convient. La solution du problème est donc 12.

3. Pourquoi avoir choisi ces problèmes ?

Les solutions de ces problèmes reposent principalement sur une articulation entre des arguments du registre (au sens de Orange, 2005) empirique et des arguments du registre déductif. Ceci provient d'une part de la formulation des consignes qui favorise une approche expérimentale des problèmes et d'autre part de la nature même des problèmes qui permet un encadrement progressif dans N de la valeur numérique maximale qui répond au problème. Ces caractéristiques ont été déterminantes dans notre choix de ces problèmes pour deux types de raisons.

Nous souhaitons permettre à tous les élèves de s'engager dans la résolution du problème et de faire des mathématiques un peu différentes de celles qu'ils fréquentent le plus souvent (c'est à dire la plupart du temps dans une classe) pour contribuer à réassurer certains élèves « modestes » en mathématiques et, plus généralement, à élargir la représentation que les élèves ont des mathématiques.

Ces problèmes discrets d'optimisation permettent de répondre à ces objectifs d'abord car ils ne ressemblent pas tous à des problèmes d'arithmétique ou de géométrie et risquent donc, moins que certains autres PPC (comme par exemple celui où connaissant le nombre de têtes et de pattes, il faut trouver le nombre de poules et de lapin, cité dans les documents d'accompagnement), d'être rejetés par des élèves « modestes » en mathématiques. Mais surtout, ces problèmes peuvent être initialement formulés de façon à inciter les élèves à « bricoler », expérimenter, manipuler… comme nous l'avons fait, ce qui leur permet de proposer une solution au problème. Dans les classes, nous avons en effet observé que tous les élèves proposent une « solution » et que la majeure partie d'entre-eux s'autorise à parler lors des phases collectives. Enfin, par leur nature et leur formulation, ces problèmes permettent de dépasser l'opposition juste / faux pour entrer dans une démarche de problématisation qui articule trois possibilités : pertinent au regard des contraintes du problème, non pertinent et optimal (meilleure solution possible).

Nous avons aussi choisi ces problèmes car ils permettent de travailler au cycle 3 sur l'argumentation et la preuve en accord avec notre représentation de l'activité de recherche en mathématiques. Il nous semble en effet essentiel que les élèves rencontrent dès l'école primaire, puis en 6ème et 5ème, des situations de mathématiques où ils sont amenés à argumenter, sans quoi leur idée de la preuve mathématique risque de se réduire à celle de démonstration formelle. Pour nous, l'activité de recherche d'un problème de mathématiques est une articulation entre « expériences mathématiques » (au sens de Chevallard, 1992), conjectures et preuves, qui situe la résolution de problèmes mathématiques comme une activité expérimentale complémentaire de la maîtrise d'un certain nombre de savoirs plus techniques (Perrin, 2007).

Pour autant, nous sommes réservés quant aux possibilités de développer chez les élèves de cycle 3 des compétences méthodologiques, valables pour tous les problèmes de mathématiques à partir d'un travail sur des problèmes assez différents. C'est pourquoi, nous nous sommes restreints à un seul champ, celui des problèmes discrets d'optimisation, qui permet de travailler plus spécifiquement certains savoirs liés à la résolution d'un problème de mathématiques.

4. Quels savoirs dans ces problèmes ?

La recherche de ces problèmes nécessite de mettre en œuvre, d'une part des savoirs relatifs à la résolution d'un problème mathématique communs aux quatre problèmes et, d'autre part, des savoirs curriculaires plus spécifiques à chacun des problèmes.

Savoirs sur la recherche et la résolution d'un problème de mathématiques

• *Dépasser sa conviction, son intuition, pour établir et formuler une conjecture qu'on cherchera à prouver*

Ces problèmes sont choisis pour que les élèves « expérimentent » dans un premier temps pour poser le « vrai » problème et se faire une idée de la solution. Par exemple, dans *Pas trois* *points alignés*, cela consiste à placer le plus possible de points sur la grille, à vérifier qu'il n'y a pas d'alignements de trois points, et à recommencer ou essayer de placer encore plus de points sur la grille. Après un temps de recherche plus ou moins long, des élèves pensent que sur la grille 5 × 5 distribuée, on ne peut pas disposer plus de 10 points sans en aligner 3. Cela permet de formuler une conjecture. Nous souhaitons que les élèves ressentent l'intérêt et les limites de leurs expériences empiriques.

• *Comprendre que l'impossibilité mathématique est autre chose que l'impossibilité empirique.*

Il s'agit plus précisément de savoir que l'argument « c'est impossible car j'ai beaucoup cherché et je n'ai pas trouvé » n'est pas recevable comme une preuve mathématique, ce qui n'est pas si évident pour des élèves de cycle 3, en particulier au début du cycle. Là encore, nous souhaitons que les élèves ressentent les limites de leur démarche empirique et la nécessité de passer à un raisonnement déductif.

• *Une preuve mathématique ne correspond pas toujours à un raisonnement hypothético-déductif*

Il s'agit d'éviter que les élèves aient une idée stéréotypée de la preuve en mathématiques en les faisant travailler sur des problèmes différents de ce point de vue.

Certaines preuves demandent d'articuler les registres empirique et déductif. Par exemple, la preuve de *Pas trois points alignés* repose d'une part, sur le fait qu'il est impossible de placer plus de 10 points sur une grille 5×5 (résultat d'un raisonnement hypothético-décuctif) et d'autre part, sur le fait qu'on dispose effectivement d'une solution à 10 (résultat empirique). Cela est étroitement lié aux problèmes d'optimisation. Dans le problème *Gommettes,* cette articulation n'est pas aussi évidente car la démarche de résolution peut être plus axiomatisée, comme on l'observe chez certains élèves. Il est convenu avec les élèves qu'avec une gommette on peut associer au plus 4 cartons. Certains élèves en déduisent le corollaire suivant (plus ou moins explicité par les élèves) « avec chaque nouvelle gommette on peut ajouter 3 cartons à l'assemblage existant ». La preuve repose alors entièrement sur un raisonnement hypothético-déductif.

• *Distinguer le possible, l'impossible et l'indéterminé.*

Les problèmes *Etiquettes* et *Pas trois points alignés* peuvent rester non résolus à la fin de la séquence avec les élèves de cycle 3. C'est le cas pour *Pas trois points alignés* si les élèves n'ont pas réussi à positionner 10 points sur la grille. Nous pensons qu'il n'est pas alors souhaitable de leur livrer immédiatement la solution et préférons les laisser chercher encore quelques jours avant de la donner. Par ailleurs, nous précisons aussi aux élèves que ce problème est encore non résolu par les mathématiciens pour les grandes grilles. Pour *Etiquettes* (grille 18 × 24), nous indiquons aux élèves trois choses : on est sûr qu'on peut découper 11 étiquettes (on a trouvé une disposition qui le permet), on est sûr qu'on ne peut pas en découper 13 (13×7×5 = 455 et 18×24 = 432), on ne sait pas si on peut placer 12 étiquettes. Cette distinction entre le possible (mathématiquement prouvé), l'impossible (mathématiquement prouvé) et l'indéterminé, pour une durée plus ou moins longue, qui est très liée à la nature du problème, permet de montrer aux élèves :

- que résoudre un problème ne se résume pas à effectuer un calcul (on le voit en particulier avec *Etiquettes*) ;
- qu'un problème mathématique n'a pas toujours de solution connue ;
- qu'il est autorisé de dire qu'on n'a pas résolu le problème (c'est même préférable à dire n'importe quoi) ;
- que lorsqu'on cherche un problème, il est important de bien distinguer ce dont on est sûr (le possible, l'impossible qu'on a réussi à prouver) et ce dont on doute (la part indéterminée du problème) d'une part car cela permet d'organiser la recherche, et, d'autre part, car cette distinction constitue, du point de vue des mathématiques, une étape de la résolution du problème.

Ces aspects sont fondamentaux dans l'activité mathématique.

- *A propos d'heuristique*

Du point de vue de l'heuristique, ces problèmes sont assez différents. Nous ne donnerons ici que quelques éléments pour permettre une première réflexion.

Dans *Gommettes*, la première disposition qui vient à l'esprit joue un rôle déterminant dans la résolution du problème, à la fois pour l'aspect empirique et pour l'aspect déductif. Ainsi, quand un élève dispose d'emblée les cartons en escalier (ce que nous avons observé chez certains élèves), cela rend plus facile la preuve qui « colle » alors à la démarche empirique : avec la première gommette, j'associe 4 cartons, avec la deuxième, j'en ajoute 3, ….. Au contraire, certains élèves s'enferment dans des dispositions linéaires qui limitent la recherche. Un point à retenir peut être que, lors de la recherche empirique, il est souvent fécond d'avoir des exemples assez différents, de regarder les fonctionnements aux limites.

Pour *Neuf nombres*, les élèves pensent souvent à débuter la suite par un petit nombre et à la multiplier par un petit nombre. C'est une idée intéressante qu'il faut savoir dépasser pour arriver à la solution optimale. Pour *Pas trois points alignés*, le travail préalable sur une grille 4 × 4 n'aide en rien la recherche d'une disposition optimale pour une grille 5 × 5. Cette idée, qui n'est pas aberrante en soi, est une véritable impasse. En effet, si on ajoute une ligne et une colonne à une grille 4×4, on ne peut placer qu'un seul nouveau point sans avoir d'alignement de trois points. Par ailleurs, il est parfois impossible de compléter une grille 5 × 5 à neuf points en une grille à 10 points.

Est-ce que « savoir renoncer à son idée de départ », y compris si elle est heuristiquement fondée, est un savoir sur la résolution de problèmes ? Est-ce que les élèves peuvent apprendre cela avec nos problèmes ?

Savoirs sur des notions mathématiques bien identifiées dans les programmes

Nous venons de le voir, ces problèmes permettent de travailler des savoirs communs sur la résolution de problème. Cependant, ils ne présentent toutefois pas le même intérêt quant aux apprentissages potentiels des élèves en termes de savoirs curriculaires. En effet, comme nous allons le voir, certains d'entre eux permettent, en plus des savoirs sur la recherche et la résolution d'un problème, de revisiter des savoirs curriculaires ou de préparer certains apprentissages futurs. Ces problèmes sont de notre point de vue, et pour les raisons développées en introduction, plus intéressants à réaliser en classe.

Supprimé : -

- *Des savoirs sur l'alignement et la notion de pente dans* Pas trois points alignés

Pour s'engager dans la résolution du problème, il est nécessaire de savoir ce que sont des points alignés ou du moins d'en avoir une première idée. Les échanges entre les élèves amènent le plus souvent à rappeler que deux points sont toujours alignés, même si l'un est sur la Terre et l'autre sur Mars. Nos observations en classe montrent de plus que, pour certains élèves de cycle 3, l'alignement des points correspond à l'alignement selon les lignes, les colonnes ou les diagonales des petits carrés du quadrillage (conception 1). Cette conception de l'alignement est probablement liée à la prégnance des lignes et des colonnes sur un quadrillage, ajoutée au fait que les élèves associent aussi la situation au jeu « puissance 4 ».

Elle émerge souvent au cours du débat entre les élèves sur la validité des propositions et est modifiée (au moins dans le temps de la séance) en « trois points sont alignés s'ils sont sur un même bord d'une règle » (conception 2). Dans une classe, nous avons observé un débat entre deux élèves de conceptions différentes (1 et 2) à ce sujet, qui a clairement amené l'un deux à passer de la conception 1 à la conception 2. Par ailleurs, dans plusieurs classes, des élèves ont posé la question : « a-t-on le droit d'aligner deux points ? ». C'est une autre occasion d'enrichir leurs connaissances sur l'alignement. Ainsi ce problème permet de revisiter une connaissance ancienne et de modifier une conception erronée.

Pour trouver des dispositions de points sur les grilles et vérifier si une production est correcte, il est nécessaire de déterminer, de nombreuses fois, si des points sont alignés. Cela amène les élèves à développer des connaissances nouvelles sur l'alignement. Par exemple, dans une classe où l'enseignante avait rappelé comment vérifier un alignement avec une règle, nous avons observé que, petit à petit, les élèves ont abandonné la règle pour vérifier perceptivement, et de façon correcte, les alignements lors du travail individuel ou en petits groupes. De plus, le travail en groupe classe sur des productions affichées au tableau amène aussi certains élèves à une connaissance « vectorielle » implicite de l'alignement. Nommons A, B, C les trois points qui font l'objet de la vérification et qui sont, par exemple disposés de la façon suivante (figure 5). Les élèves repèrent si les triangles rectangles d'hypoténuse [AB] et [BC] sont superposables et utilisent ainsi implicitement la notion de pente d'une droite pour repérer des alignements.

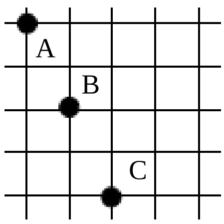


Figure 4

- *Des savoirs algébriques dans Gommettes*

Ce problème, moins riche que les autres du point de vue des savoirs curriculaires qu'il met en jeu, permet toutefois de (re)mettre en relation l'addition itérée et la multiplication. En effet, il est intéressant, et certains élèves le font spontanément, de transformer l'écriture additive 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 en une écriture multiplicative du type $4 + 5 \times 3$ ou encore $4 + (6 – 1)\times 3$. Avec ces écritures, la récurrence qui permet de résoudre le problème et le caractère algébrique du problème apparaissent. Cela permet d'envisager une résolution du problème en général.

- *Des savoirs sur pavage et aire dans* Etiquettes

Lorsqu'ils cherchent empiriquement à disposer le plus possible d'étiquettes sur la grille, la plupart du temps, les élèves disposent ou représentent les étiquettes en utilisant les mesures des côtés d'une étiquette, mais leur activité consiste à essayer de paver une surface (grandeur) avec une autre surface (grandeur). Un pavage cesse lorsqu'on ne peut plus disposer de nouvelle étiquette sur la grille sans débordement. Ainsi, dans cette étape du travail, des propriétés de comparaison d'aires apparaissent peu et de façon très implicite dans le cadre des grandeurs (Douady, 1986).

Ensuite, lorsqu'il s'agit de savoir si les solutions obtenues empiriquement peuvent être améliorées, le travail bascule vers le cadre numérique. L'aire est alors une mesure obtenue par multiplication et pour savoir combien au plus on pourrait placer d'étiquettes, on effectue soit une suite de multiplications, soit une division euclidienne pour trouver la borne supérieure de l'ensemble des pavages possibles. Mais cela ne donne pas toujours la garantie que l'on puisse effectivement paver la grille avec le quotient obtenu d'étiquettes. En particulier, ce n'est pas parce que l'aire de la grille est de 432 u² et que, par additivité, l'aire de 12 étiquettes est de 420 u² que l'on pourra paver la grille avec 12 étiquettes. Ce problème est donc une occasion de mettre en œuvre l'additivité de l'aire et de montrer que :

- le pavage d'une surface S1 avec une surface S2 n'est pas toujours possible même si l'aire de S2 est inférieure à celle de S1 ;
- si le quotient de la division euclidienne de l'aire de S2 par l'aire de S1 est *n*, il n'est pas sûr que l'on puisse paver S1 avec *n* fois la surface S2.

Cette dernière propriété est particulièrement importante car elle distingue l'aire de la longueur (pour les segments) qui est la première grandeur étudiée en mathématiques.

- *Des savoirs sur les multiples et les nombres premiers dans* 9 nombres

Ce problème demande bien entendu de disposer d'une première définition du mot « multiple ». Nous avons observé que les élèves de cycle 3 interprètent le plus souvent la consigne « quand deux nombres sont voisins, l'un des deux nombres est multiple de l'autre » comme « tous les nombres sont dans la même table » et ne raisonnent pas nombre par nombre. Ainsi, ils arrivent alors à des suites comme 24, 12, 6, 2, 10, 20, 4, 8, 16 où tous les nombres de la liste sont dans la table de 2 et où la liste est composées de trois sous-listes de multiples « pas trop grands » d'un même nombre : d'abord trois multiples de 6, puis trois multiples de 2, puis trois multiples de 4. Pour améliorer la solution, il faut envisager l'énoncé de la façon suivante : « quand deux nombres sont voisins, l'un des deux est dans la table de l'autre », ce qui permet d'envisager chaque voisin d'un nombre soit comme un diviseur, soit comme un multiple de ce nombre et de produire, par exemple la suite : 4, 12, 6, 2, 10, 5, 15, 3, 9. L'amélioration des solutions passe souvent par la décomposition multiplicative de nombres et ce faisant, le constat que certains nombres comme 2, 3, 5, 7, 11… ne sont dans aucune table de multiplication autre que la leur. Les élèves découvrent ou redécouvrent alors des nombres aux propriétés particulières. Pour justifier que 12 est bien le plus petit des plus grands nombres des suites possibles, il faut expliciter cette propriété qui a pu fonctionner de façon implicite lors de la recherche empirique.

Conclusion

L'analyse précédente montre qu'il y a une certaine richesse dans ces problèmes quant aux savoirs curriculaires qu'ils permettent de revisiter, richesse à laquelle nous tenons tant que la question des possibilités d'apprentissages généraux sur la résolution de problèmes n'est pas tranchée (voir les articles de Sarrazy, 1997 et Robert, 1996), sur ce point). Ces problèmes sont aussi riches du point de vue des savoirs sur la recherche et la résolution de problèmes en mathématiques. Cependant, cette double richesse est aussi source de difficultés et de questions, en particulier en ce qui concerne la clôture des séances et les institutionnalisations. Quels savoirs institutionnaliser ? Quels choix faire ? Comment hiérarchiser ces savoirs ? Par ailleurs, les savoirs sur la recherche et la résolution d'un problème mathématique sont peut-être moins faciles à institutionnaliser à l'école primaire, en particulier car ils ne sont pas forcément très familiers des professeurs des écoles.

Références bibliographiques

Chevallard Y., 1992, Le caractère expérimental de l'activité mathématique, *Petit x. 30.* p. 5-15

Douady, 1986, Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherche en didactique des mathématiques, 7.2,* p. 5-31

Groupe PPC, 2006, *Des problèmes pour chercher à l'école primaire*, IUFM des Pays de la Loire et IREM de Nantes

MEN, 2005, Les problèmes pour chercher, *Documents d'accompagnement des programmes*

Orange C., 2005, Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques, Les Sciences de l'éducation. Pour l'ère nouvelle. Vol. 38, n° 3, 2005, p69-94.

Perrin D., 2007, L'expérimentation en mathématiques : quelques exemples, *Actes du XXXIIIème colloque sur la formation des maîtres*, p. 37-72.

Robert A., 1996, Prise en compte du méta en didactique des maths, *Recherches en didactique des mathématiques*, 16. 2, p. 145-175

Sarrazy B., Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques, 17. 2, p. 135-166

Thomas Y., 2007, Gommettes et étiquettes, des problèmes pour chercher, *Grand N* 80, p. 29-41

DE LA RESTAURATION DE FIGURES A LA REDACTION D'UN PROGRAMME DE CONSTRUCTION. LE PROBLEME DE L'ELEVE, LE PROBLEME DU MAITRE

Marc GODIN

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN

IUFM Nord - Pas-de-Calais[1]

Résumé
Au cours de cet atelier, après une brève présentation de la problématique et de ce que nous appelons restauration de figure, les participants ont été invités à restaurer des figures pour analyser les variables didactiques d'une telle activité, ses potentialités en termes d'apprentissage des élèves et les choix qui s'offrent au maître pour l'organiser. Les questions ont été discutées à partir de quelques exemples étudiés dans notre groupe de recherche et mis en œuvre au cycle 3.

INTRODUCTION

A propos des figures planes, les programmes d'avril 2007[2] de l'école élémentaire énoncent, en référence au socle commun, les connaissances et « capacités » suivantes à atteindre au cours du cycle 3.

[1] L'atelier présenté ici doit beaucoup au travail d'un groupe de recherche soutenu par l'IUFM Nord - Pas-de-Calais et auquel participent ou ont participé Frédéric Brechenmacher, Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Bachir Keskessa, Anne-Cécile Mathé, Odile Verbaere ainsi que des maîtres formateurs et conseillers pédagogiques.

[2] Les programmes de 2002 ou de 2007 étaient en vigueur au moment de la réalisation des séances en classe. Les programmes de 2008 ne diffèrent pas beaucoup dans le domaine des figures planes : ils reprennent, sans les détailler, les rubriques des programmes de 2002 en ajoutant le parallélogramme à la liste des figures. Dépourvus de commentaires, ils donnent comme objectif de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 « de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure », phrase extraite presque mot pour mot des documents d'application de 2002. La résolution de problèmes n'étant plus une rubrique à part, ils indiquent aussi des problèmes dans le domaine de la géométrie : « Les problèmes de reproduction ou de construction de configurations géométriques diverses mobilisent la connaissance des figures usuelles. Ils sont l'occasion d'utiliser à bon escient le vocabulaire spécifique et les démarches de mesurage et de tracé. »

5.3 Figures planes : triangle (et cas particuliers), carré, rectangle, losange, cercle	
- connaître et savoir utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : triangle, triangle rectangle, *triangle isocèle, triangle équilatéral*, carré, rectangle, losange, cercle ; sommet, côté ; centre, rayon et *diamètre* pour le cercle.	- reconnaître de manière perceptive une figure plane (en particulier dans une configuration plus complexe), en donner le nom, vérifier son existence en ayant recours aux propriétés et aux instruments ; - décomposer une figure en figures plus simples ; - tracer une figure (sur papier uni, quadrillé ou pointé), soit à partir d'un modèle, soit à partir d'une description, d'un programme de construction ou d'un dessin à main levée ; - tracer un cercle dont on connaît le centre et le rayon ; - *décrire une figure en vue de l'identifier dans un lot de figures ou de la faire reproduire sans équivoque.*

Les activités habituellement proposées aux élèves pour atteindre ces capacités comprennent la reproduction de figures à partir d'un modèle, la rédaction d'un programme de construction à partir d'une figure et la réalisation d'un programme de construction, éventuellement dans un jeu d'échanges entre émetteur et récepteur, le tout en utilisant la règle graduée, l'équerre et le compas[3]. En général, la taille de la figure à obtenir est fixée par la donnée de mesures à moins que la figure ne soit à reproduire à l'identique. Qu'est-ce qui change dans l'activité des élèves et du maître si, au lieu de donner des mesures, on fournit des éléments de la figure cible et qu'au lieu de fournir une règle graduée, on fournit aux élèves une règle non graduée « informable » (i.e. sur laquelle on peut écrire et effacer pour reporter des longueurs) ? Cette activité relève de ce que nous appelons « restauration de figure ».

Quel est le travail de l'élève pour restaurer une figure ? Pour écrire un message permettant à un autre élève de le faire ? Comment peut-on jouer sur les variables didactiques pour amener les élèves à mettre en oeuvre les connaissances géométriques du programme ?

Quel est le travail du maître pour mettre en œuvre et gérer une telle activité dans sa classe ? Comment « piloter » ses choix (au niveau de la préparation et la gestion de sa classe) pour aider ses élèves à acquérir les connaissances et capacités du programme et à développer un rapport opératoire aux figures géométriques ? Quelles connaissances géométriques lui sont utiles, nécessaires pour cela ?

Notre recherche part de l'hypothèse qu'il est possible d'utiliser l'étude, la production ou la reproduction de figures géométriques comme un milieu ou un domaine de travail où peuvent se construire les connaissances attendues à l'école élémentaire mais aussi un rapport à la géométrie et à l'usage des instruments plus conforme à ce qui est attendu au collège ; la restauration de figures, par le jeu sur les variables didactiques qu'elle permet, est un moyen de mise en œuvre de cette hypothèse.

[3] La gomme n'est pas reconnue comme un instrument de géométrie, mais effacer des lignes déjà tracées joue un rôle fondamental pour l'analyse des situations de reproduction ou de restauration. Les dépassements de lignes sont-ils ou ne sont-ils pas acceptés ? La gomme est une variable didactique méconnue.

Après une brève présentation de la problématique et de ce que nous appelons restauration de figure, les participants de l'atelier ont été invités à restaurer des figures pour analyser les variables didactiques d'une telle activité, ses potentialités en termes d'apprentissage des élèves et les choix qui s'offrent au maître pour l'organiser. Les questions ci-dessus ont été ensuite discutées à partir de quelques exemples étudiés dans notre groupe de recherche et mis en œuvre au cycle 3.

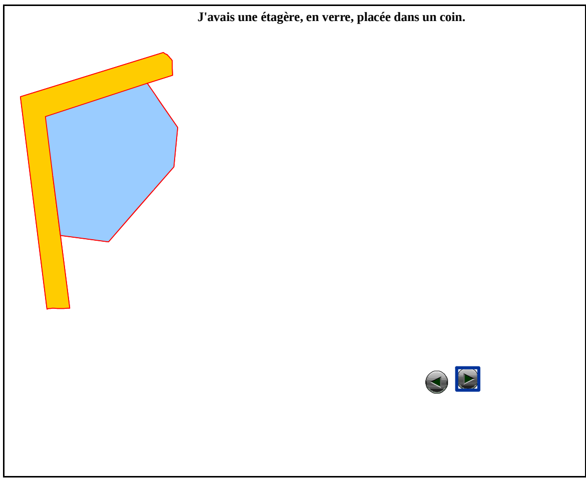
I - LA RESTAURATION DE FIGURE

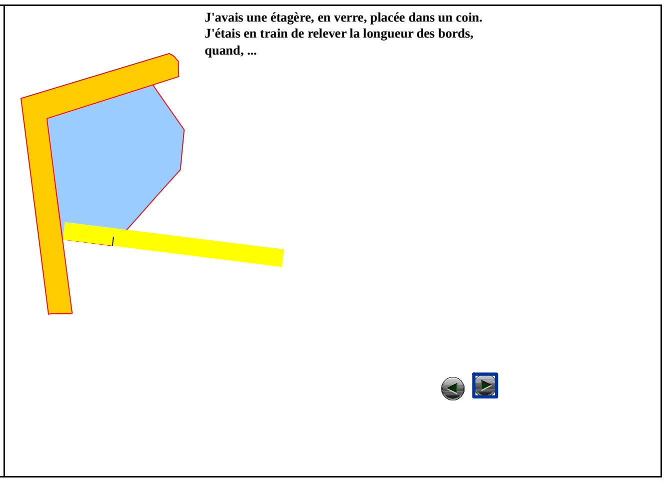
La restauration de figures planes consiste à reproduire une figure modèle à partir d'une amorce à l'aide d'instruments. Il s'agit donc de travailler, non pas sur une figure, mais sur la différence entre deux figures : le modèle et l'amorce (éventuellement en plusieurs morceaux). La reproduction de figure correspond au cas où l'amorce est vide et où les instruments autorisés sont la règle et le compas. Nous parlons de restauration si l'amorce n'est pas vide ou réduite à un point et plus particulièrement si elle est 2D (donc comprend plus qu'un segment) ou si un instrument est 2D (gabarit, morceau de surface voire équerre). Le cas des figures sur papier quadrillé n'est pas considéré ici.

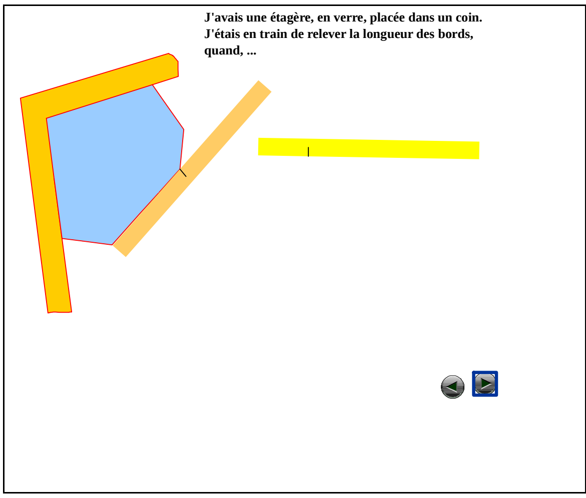
I. 1. Activités proposées aux participants pour entrer dans la restauration de figure

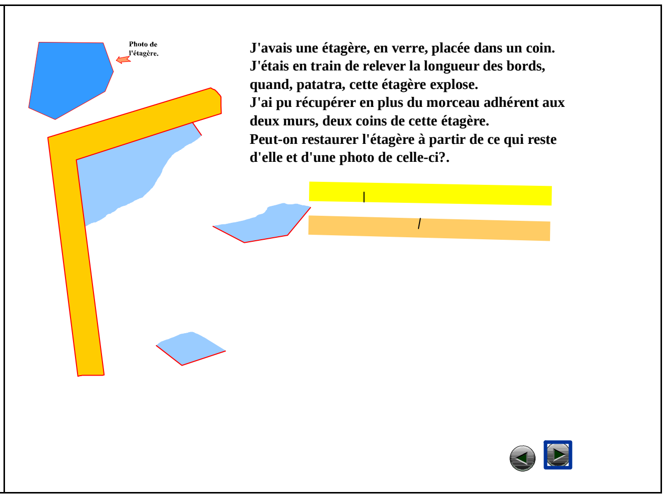
I.1.1. L'étagère

J'avais une étagère en verre placée dans un coin. J'étais en train de relever la longueur des bords quand, patatras, cette étagère explose. J'ai pu récupérer, en plus du morceau adhérent aux deux murs, deux coins de cette étagère. Peut-on restaurer l'étagère à partir des morceaux qui restent et d'une photo ?





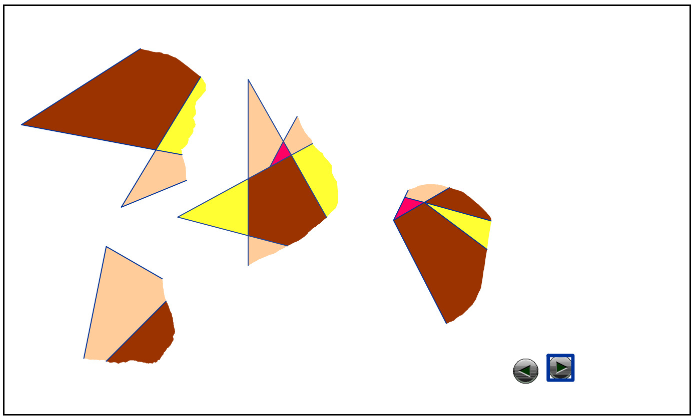




Barème à considérer : tout trait[4] tracé est gratuit, tout trait effacé avec une gomme est gratuit, toute utilisation d'instrument coûte une fortune sauf un instrument qui permette de reporter une longueur.
Bref, qui fera le moins de reports pour restaurer l'étagère ?

I.1.2. Le puzzle par superposition

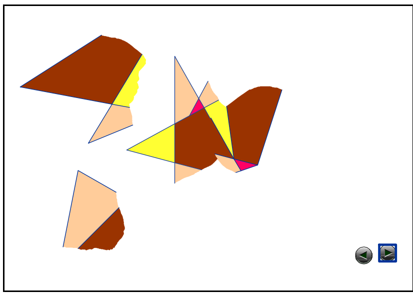
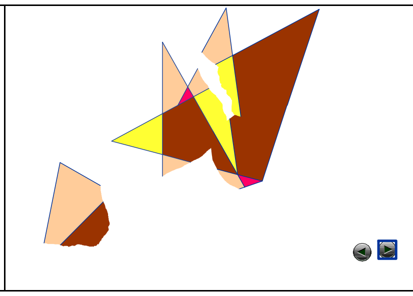
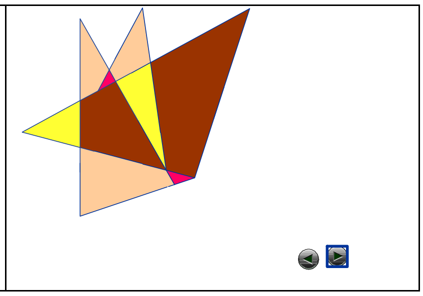
Reproduire une figure (surface) à partir de plusieurs exemplaires déchirés de cette figure.



Les exemples traités nous ont fourni deux cas de restauration de figure.

- Le second cas concerne les puzzles par superposition. La restauration se fait par superposition en utilisant des morceaux qui ne proviennent pas d'un unique modèle. On peut cependant être amené à compléter en traçant des traits à la règle.

[4] Dans tout ce texte, « trait » est à considérer comme synonyme de « trait droit ».

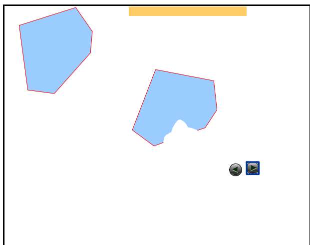
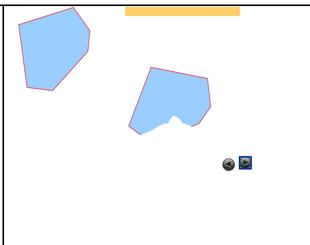
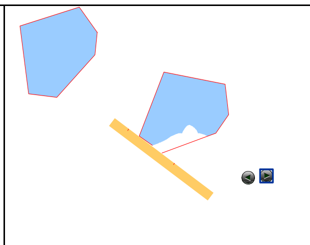
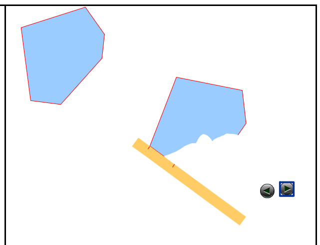
- Le premier cas concerne les puzzles par juxtaposition dont on a perdu un morceau (ou plusieurs) comme pour l'étagère. C'est le cas que nous développerons dans la suite.

I. 2. Les variables des situations de restauration

I.2.1. L'activité de restauration dépend des instruments disponibles et de leur coût

L'introduction d'un coût à l'utilisation des instruments permet la réussite par des procédures diverses, qui demandent plus ou moins de connaissances géométriques, mais incite à utiliser certains instruments plutôt que d'autres et donc à développer des connaissances géométriques, pour obtenir les effets graphiques voulus, avec des instruments dont l'utilisation est moins immédiate, à partir des connaissances anciennes des élèves. En modifiant le barème relatif aux utilisations des instruments de tracé ou d'effacement de tracé, on peut donc agir sur les procédures de tracé des élèves. De même, suivant l'amorce, il y a plus ou moins de connaissances à mettre en jeu pour restaurer la figure.

I.2.2. L'activité de restauration dépend de l'amorce

			
Un trait est nécessaire.	Deux traits sont nécessaires et ça déborde.	Deux traits et un report de longueur.	Trois traits et deux reports de longueur.

Nous reviendrons sur l'analyse des relations entre amorce et figure.

I.2.3. L'activité de restauration dépend du choix de la figure

Pour créer un support, un maître pourrait en plus considérer une figure dans laquelle une relation est cachée et indépendante du choix de l'amorce. Nous verrons, plus loin, des exemples de figures symétriques qui, bien entendu, ont des propriétés cachées.

Les variables, pour une activité de restauration, concernent essentiellement : la figure, l'amorce, les instruments, le barème associé aux instruments pour estimer le coût de la restauration et les exigences d'écriture.

I.3. Analyse des relations amorce - figure

La reconnaissance d'un problème de restauration commence par la reconnaissance d'une figure comme sous-figure d'une autre. La reconnaissance de l'amorce comme une partie de la figure, peut, selon la consigne donnée et selon les procédures mises en œuvre par les élèves, être une reconnaissance visuelle, être acceptée comme une donnée, être vérifiée en utilisant un transparent (par exemple : le transparent de la figure qui servira pour valider l'activité de restauration), être vérifiée en utilisant des instruments. Le choix par le maître de donner à la figure et à l'amorce des orientations différentes écarte la possibilité d’une démarche visuelle par translation.

Les relations entre la figure à restaurer et son amorce orientent l'analyse de la restauration. La détermination de ce que l'on cherche à construire en fonction de ce que l'on a, pose le problème de la restauration qui est fonction non de la figure seule mais de la différence entre l'amorce et la figure, ce que nous appellerons la figure-différence. C'est l'analyse de cette différence qui importe pour choisir une restauration relative à un niveau d'enseignement donné. Évidemment, si l'amorce est insignifiante, les propriétés géométriques de la figure constituent l'essentiel des propriétés à restaurer.

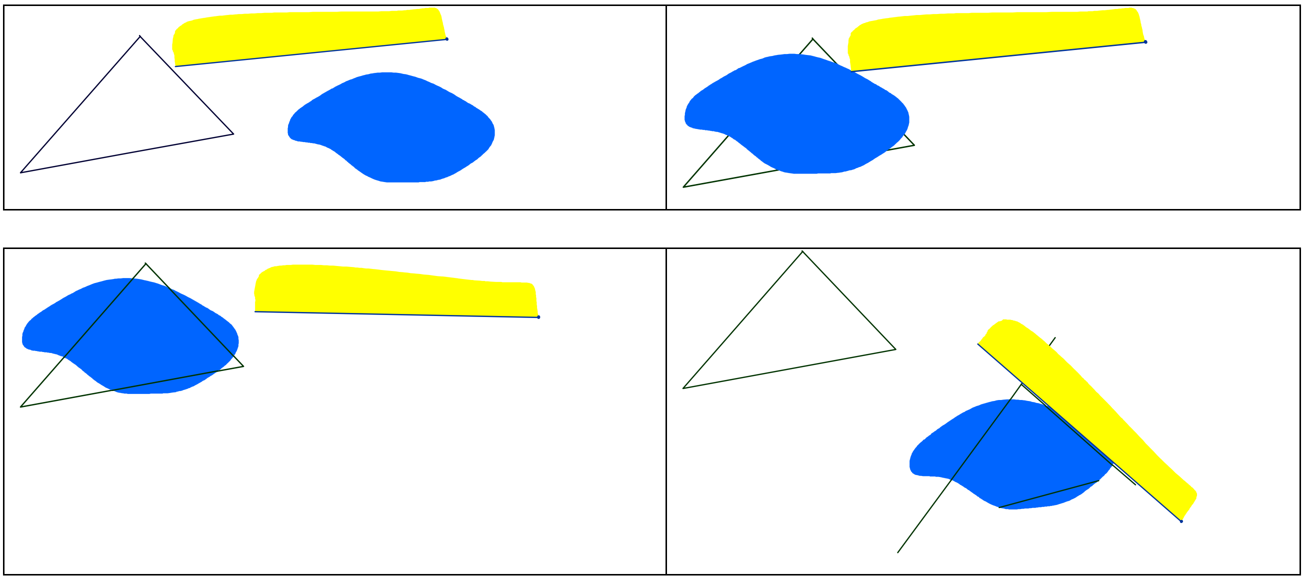
I.4. Réflexion sur les instruments permettant une restauration de figure

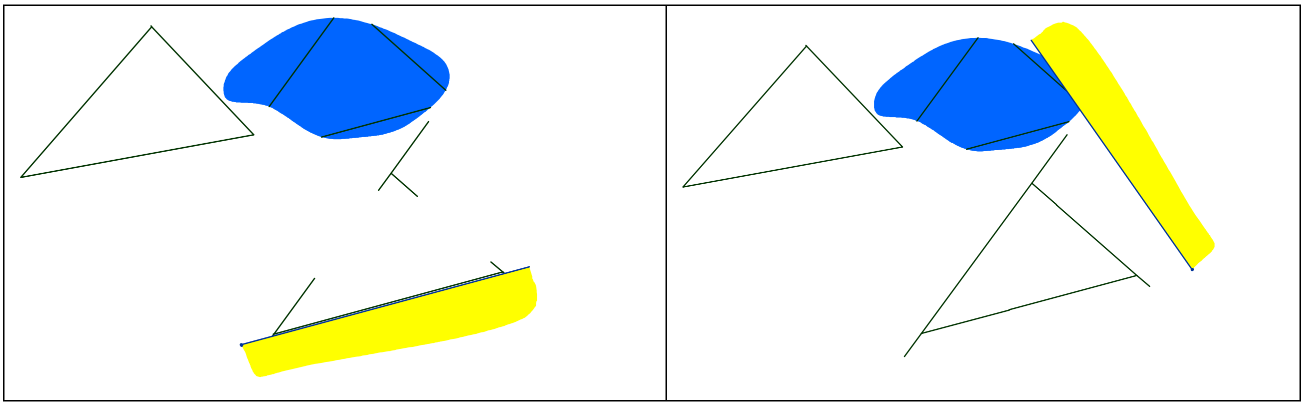
Quand nous parlons d’instrument, nous pensons aux instruments usuels : règle non graduée, équerre, compas, mais aussi aux gabarits, pochoirs, calque, morceau de papier ayant ou non des bords droits, quadrillage. Nous ne mentionnons pas les instruments de mesure car les activités que nous considérons ne nécessitent que des reports de longueurs, sans passer par les nombres. En principe la règle graduée n’est pas disponible. Le report de longueur peut se faire avec une règle informable (sur laquelle on peut écrire). Nous parlons de report de longueur si ce report se fait sur une droite déjà tracée sinon ce report ne peut se faire qu'en traçant un arc de cercle, donc une ligne, avec un compas.

Duval (1995) a pointé l’importance de la notion de dimension dans l’appréhension perceptive des figures : les surfaces, unités visuelles 2D apparaissent plus directement au premier coup d’œil ; l’appréhension des unités visuelles 1D (lignes) ou 0D (points) nécessite une déconstruction de la figure. Cette sensibilité aux dimensions se retrouve dans l'utilisation des instruments.

Le gabarit et le pochoir permettent de reproduire une surface, nous dirons que ce sont des instruments 2D. La règle et le compas sont des instruments qui permettent de tracer des lignes (1D) ; un point, unité visuelle sans dimension (0D), est obtenu par l'intersection de deux lignes. L'équerre est plus ambiguë : elle permet de contrôler et de produire des angles droits (coins de carrés ou de rectangles, unités visuelles 2D) mais aussi de tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné, soit la production d'un élément 1D avec 2 contraintes, l'une portant sur un élément 1D (alignement à contrôler), l'autre sur un élément 0D (point qui doit se trouver sur l'autre côté de l'angle droit). Remarquons d'ailleurs que le compas est lui aussi un instrument multiple : il permet de tracer des lignes (1D) et, quand on ferme le tracé, de produire un cercle, unité visuelle 2D, et aussi de reporter des longueurs donc de placer des points (0D) sur une ligne déjà tracée. Ces différents usages des instruments sont à construire chez les élèves. On peut envisager une progression de situations de restauration pour aider les élèves à passer des instruments 2D aux instruments 1D.

Pour illustrer ce propos, nous donnons ci-dessous un exemple d'états montrant l'évolution d'une procédure de reproduction d'un triangle, unité visuelle 2D déconstruite en trois unités visuelles 1D et reconstruite à partir de ces trois unités visuelles. Pour plus d'informations, on pourra se reporter à Duval et Godin (2006) et Duval, Godin et Perrin (2005).





Un objectif de l'école primaire est d'amener les élèves à décomposer une figure en unités visuelles de dimensions 1 et 0, et cet objectif peut être atteint par la donnée des « instruments de tracé » qui permettent de tracer des lignes et d'en obtenir des intersections.

II - LE TRAVAIL DU MAITRE

Le travail du maître qui met en œuvre une activité de restauration, en tenant compte des capacités des élèves, pour les aider à construire des connaissances géométriques est multiple. Regardons dans quelques directions :

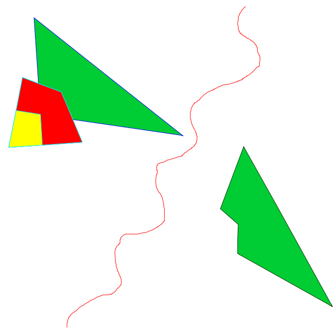
- le choix de l'activité de restauration : la figure, l'amorce, les instruments, les consignes, …
- la gestion de l'analyse de la restauration par les élèves (collective ou non),
- la gestion des écritures additives du coût de fabrication d'une figure restaurée (comparaison ou non),
- la gestion des demandes d'écrits relatifs à une restauration et des exigences relatives à ces écrits : rédaction d'un programme de restauration, de reproduction ou de construction (rédaction d'un algorithme de tracé, et ou, rédaction d'une description).

II. 1. Préparation par le maître de l'analyse d'une restauration

Avant de regarder la gestion de l'analyse d'une restauration menée par un élève, il faut regarder l'analyse à mener pour générer une restauration, pour choisir une restauration ou pour modifier une restauration. Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que l'analyse d'une restauration suppose l'analyse de la figure, l'analyse des relations amorce-figure et l'analyse des relations figure-amorce-instruments. Le maître a besoin de ces analyses pour choisir une restauration et se préparer à aider certains élèves (ceux qui seraient en difficulté) à analyser la restauration sans le faire à leur place. Aux choix guidés par l'analyse purement didactique que nous avons menée, il pourra ajouter des éléments matériels pour aider les élèves à respecter les consignes de la restauration ; par exemple, la séparation entre la figure modèle et la figure à restaurer peut être matérialisée par une frontière et les activités de chaque côté de cette frontière ne seront pas les mêmes, des couleurs peuvent aider à repérer les éléments qui se correspondent sur le modèle et l'amorce, etc.

II. 2. Gestion de l'analyse d'une restauration par les élèves. Exemple en CE2

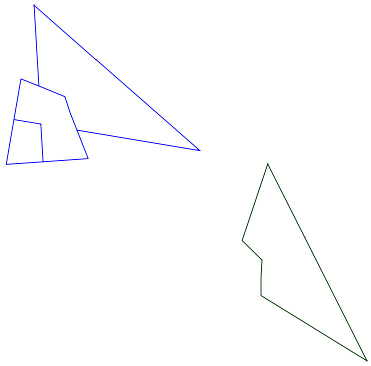
Ici la figure modèle et la figure à restaurer sont séparées par une frontière.



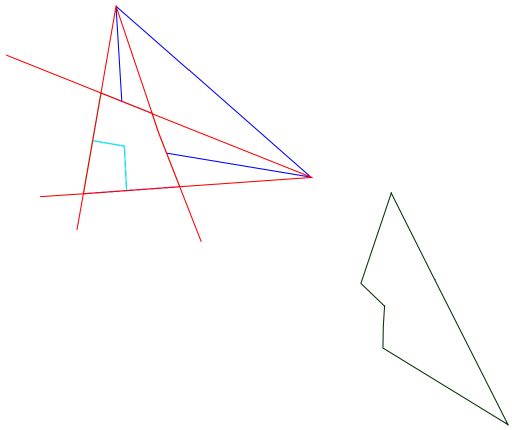
Comment un enseignant peut-il aider un élève dans sa tâche d'analyse de la restauration ? Le premier problème est d'amener un élève, ayant deux figures devant lui, à comprendre la consigne (donc à distinguer figure-modèle, figure-amorce, figure-différence). Un moyen d'aider les élèves, mis en place dans cette classe, est l'utilisation de couleurs : les élèves cherchent les éléments qui se correspondent sur l'amorce et la figure modèle et les tracent de la même couleur. Les segments sont portés par des droites, les élèves ont l'habitude de prolonger les segments pour voir les droites. Les aides apportées (questionnement), comme la mise en commun, portent sur l'explicitation de la différence : identification des droites qui manquent sur l'amorce puis, sur les moyens de les obtenir (sur le modèle) à partir d'éléments déjà présents sur l'amorce (décomposition de la différence) avant de les construire (recomposition de la différence). La décomposition de la différence en vue de sa recomposition est orientée par les instruments disponibles qui imposent une déconstruction dimensionnelle.

Quelques étapes sur un exemple de restauration :

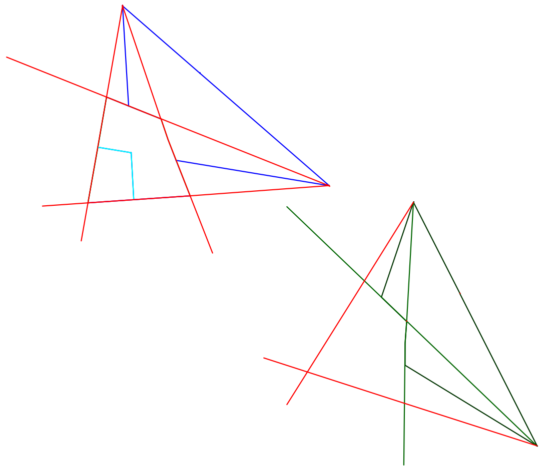
- Décompositions de la figure-différence (orientées par la présence des instruments disponibles et d’un coût d’utilisation de ces instruments, *exemple : 1 euro pour une règle permettant de tracer un trait, 5 euros pour un report de longueur,…*)



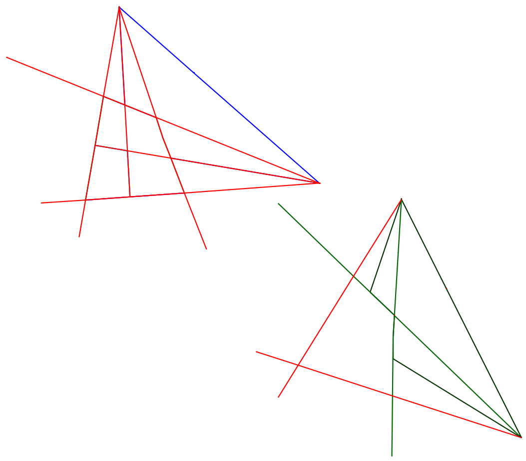
- Détermination de relations entre la figure-différence et les deux autres figures.



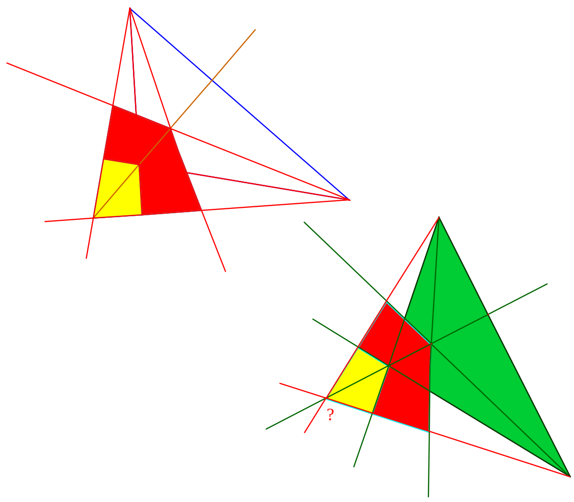
- Déconstruction, de ces relations et des figures, en unités visuelles (ou en propriétés géométriques) compatibles avec les instruments disponibles (ou avec les théorèmes disponibles).



- Reconstruction de cette figure-différence (enrichissement de la figure-amorce) à l'aide des instruments disponibles.



- Validation en utilisant un transparent conçu par le maître et mis à disposition de l'élève au moment opportun.



- Coût qui s'exprime par une écriture additive générée au fur et à mesure de l'enrichissement de l'amorce.

1 + 1 + 5 + …

- Moindre coût, il est question d'envisager un gain du coût en mettant en cause une première procédure.

1 + 1 + 1 + …

- Écriture d'un algorithme de restauration, à partir d'une écriture additive du coût, élaborer un récit des tracés réalisés.

J'ai tracé la droite… puis …

La dernière étape correspond à la formulation qui prépare l'écriture d'un programme de construction en utilisant le vocabulaire de la géométrie. Si la capacité de restaurer une figure montre une capacité à décomposer une figure en unités visuelles de dimension 1, cette capacité doit en effet être complétée par une expression d'un algorithme de restauration, l'expression du coût en termes d'instruments joue un rôle d'intermédiaire pour l'expression en termes géométriques.

II.3. la gestion des écritures additives du coût de fabrication d'une figure

Demander aux élèves d'évaluer le coût de leur production permet de :

- produire l'ossature d'un algorithme,
- déterminer un algorithme de moindre coût,
- modifier l'algorithme par modification du coût des instruments.

L'activité d'évaluation du coût d'une procédure est particulièrement intéressante dans la gestion d'un groupe d'élèves, chacun cherchant un minimum. Mais l'activité de rédaction ne va pas de soi. Quand rédiger ? Pendant ou après les actions de tracé ? Il y a nécessité dans l'autocontrôle de cette rédaction d'une réflexion sur un algorithme mis en jeu. Les activités de notre groupe de recherche sont insuffisantes pour affirmer d'autres propos.

Nous présentons maintenant un exemple de l'effet que peut avoir le calcul du coût : il s'agit d'une séquence menée sur la symétrie en CM2 en mai 2008.

III - UN EXEMPLE AU CM2

Avant la séquence relative aux figures symétriques

Le maître de cette classe a, entre autres, développé plusieurs activités de restauration :

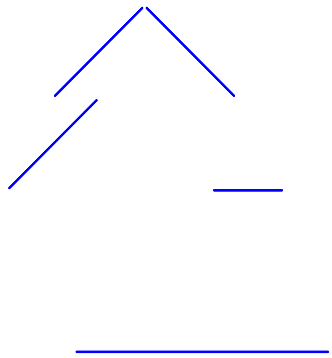
- d'un polygone à la règle et à l'équerre,
- de patrons à la règle et au compas : patron de l'octaèdre régulier,
- d'une figure composée de cercles : le yin et le yang qui, pour certains élèves, amène à la construction du milieu au compas.

Quelques éléments sur la séquence

La notion de figure symétrique a été introduite avec un calque et avec un pliage à la première séance. Les figures proposées sont triées : il y a celles qui, dessinées sur un calque, sont superposables à elles-mêmes, à l'endroit comme à l'envers du calque, ces figures peuvent être aussi pliées en deux parties qui viennent l'une sur l'autre.

Pour la deuxième séance de trois quarts d'heure en demi groupe, le maître a prévu deux activités :

- la première pour rappeler la séance précédente : un élève est envoyé au rétroprojecteur avec un stylo et un transparent pour compléter la figure ci contre et la rendre symétrique ;

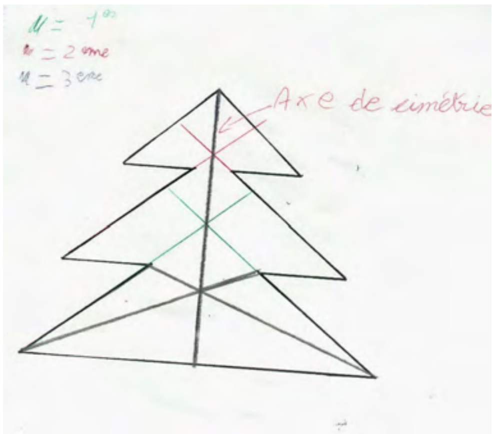


- la seconde sur la construction de l'axe de symétrie d'une figure symétrique : on vérifie que la figure (le sapin) est symétrique en retournant le calque. Dans la classe on sait que cette figure possède un axe de symétrie. Il est question de tracer cet axe avec le barème ci-contre.

Instruments	**Coûts en euros**
transparent	700
trait passant par deux points de la figure	0
trait obtenu par prolongement d'un trait de la figure	1
report de longueur	5
Equerre	700

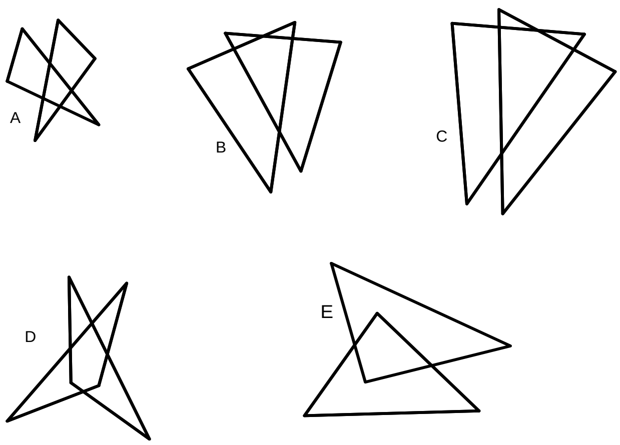
Après quelques essais, beaucoup d'élèves réussissent à faire passer le coût de la restauration de 700 à 0 euros.

Voici un écrit de synthèse :



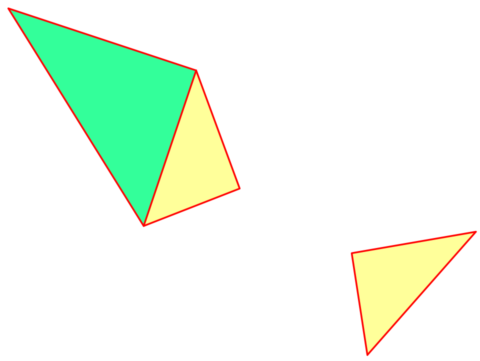
Pour la troisième séance, les élèves ont réalisé deux activités sur le tri de figures symétriques (dans l'une d'elles, il s'agit de voir si des papillons stylisés obtenus par assemblage de triangles sont symétriques ou non).

L'objectif est ici de voir si certaines lignes se croisent bien sur une droite qui serait un axe de symétrie si la figure est symétrique.



Deux figures en forme de papillon ne sont pas symétriques, lesquelles?

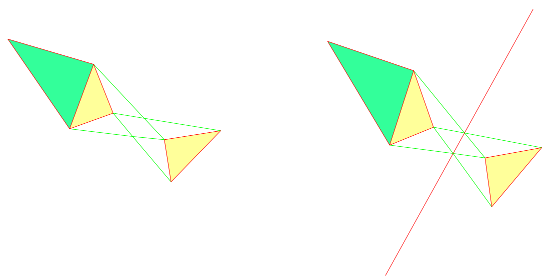
La quatrième séance reprend la restauration d'une figure symétrique mais avec une présentation surface de la figure (voir figure ci-contre). Le barème est le suivant :



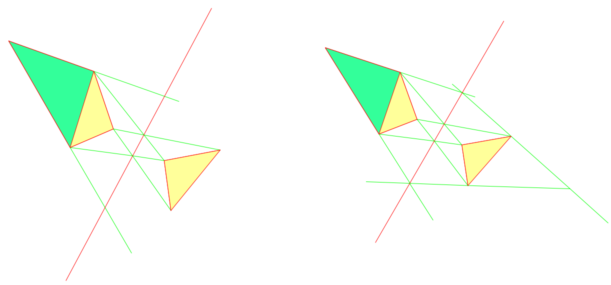
- pliage, calque, équerre : 200 points
- prolongement d'un segment existant : 1 point
- tracé d'un nouveau trait : 0 point
- report de longueur : 5 points

Ici la procédure la plus économique coûte 2 points :

On peut obtenir l'axe de symétrie gratuitement en faisant apparaître les points d'intersection avec leur symétrique de deux segments qui joignent des sommets des petits triangles (un sur l'amorce, un sur le modèle) qui ne se correspondent pas dans la symétrie.



Ensuite le prolongement des deux côtés du grand triangle donne deux points de l'axe qu'il suffit de joindre aux points convenables du petit triangle de l'amorce.



Pour cette restauration de la figure symétrique, signalons la procédure utilisée par une jeune roumaine, très peu scolarisée, (non francophone, le problème lui est montré par geste à l'aide du calque de validation), qui, exceptionnellement présente dans la classe, découpe dans du papier l'assemblage des deux triangles, fait glisser cet assemblage en essayant de superposer les deux triangles jaunes ; n'y arrivant pas, découpe l'assemblage selon le côté commun, se sert du gabarit du triangle vert non retourné pour achever le travail, constate que cela ne convient pas et regarde ce que font les autres.

Dans le premier groupe, la difficulté principale est d'imaginer la position approximative de l'axe de symétrie avant de pouvoir commencer à le construire ; pour le deuxième groupe, le problème est surtout de construire cet axe de symétrie en se remémorant la séance précédente.

Un élève venant d'une école sénégalaise, ayant acquis des pratiques du travail sur les figures symétriques sur quadrillage, trace l'axe de symétrie en construisant des points équidistants de deux points symétriques (remarque : c'est correct mais la résolution du problème en construisant l'axe de cette manière n'est pas la plus économique).

Pendant la mise en commun, trois regards sur la figure à restaurer sont présents : le maître privilégie les points et non les lignes de la figure (pour des raisons de désignation des objets géométriques : c'est en se servant du nom des points qu'il nomme les lignes) alors que la préoccupation des élèves (sauf de la petite roumaine qui cherchait à poser des surfaces) était de construire des lignes. La confrontation de ces trois regards n'est pas explicitée ; il semble bien que personne n'ait perçu le problème comme réduit à la construction d'un point, et la procédure utilisant la construction de l'axe de symétrie semble, pour le maître, la procédure la moins coûteuse pour le barème proposé.

IV - RETOUR SUR LES HYPOTHESES DE LA RECHERCHE

Notre recherche part de l'hypothèse qu'il est possible d'utiliser l'étude, la production ou la reproduction de figures géométriques comme un milieu ou un domaine de travail où peuvent se construire les connaissances attendues à l'école élémentaire mais aussi un rapport à la géométrie et à l'usage des instruments plus conforme à ce qui est attendu au collège.

Dans l'analyse des difficultés des élèves de collège, on oppose souvent la perception à la déduction à partir d'axiomes et de théorèmes. Cependant, l'usage des instruments, peu valorisé au collège, ne relève pas que de la perception : les instruments sont utilisés pour guider, outiller la perception, et leur usage nécessite la mise en œuvre de propriétés géométriques. En effet, les instruments géométriques usuels permettent de produire et de contrôler des propriétés visuelles dans l'espace graphique, propriétés visuelles qui se traduisent par des propriétés géométriques dans le modèle théorique.

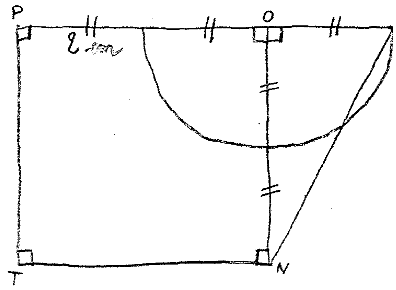
Un autre élément nous a paru important à identifier dans le regard qu'on porte sur les figures, c'est celui de dimension : dans la géométrie pratiquée habituellement à l'école primaire, les figures peuvent le plus souvent être vues comme des assemblages de surfaces, donc composées d'unités visuelles 2D ; les lignes qui interviennent sont le plus souvent des bords de ces surfaces et les points, des sommets. Dans la géométrie du collège, appuyée sur des définitions et théorèmes, avec une axiomatique sous-jacente, la vision en termes de lignes et de points sera essentielle et il faudra être capable de changer de regard sur la figure et, à travers une surface, être capable de voir non seulement les lignes éventuellement infinies (droites, cercles) qui supportent ses bords, mais aussi des lignes qui ne sont pas tracées et sont définies par certains de ses points ou des points non visibles qu'on pourrait obtenir par intersection de telles lignes.

Nous retenons ainsi deux points importants pour l'entrée dans la géométrie et pour faire progresser les connaissances des élèves en primaire et au début du collège : **d'une part, un jeu de cadres entre espace graphique des tracés avec des instruments matériels et espace géométrique des objets et propriétés du modèle théorique de l'espace réel** (comme le décrivent, par exemple, Berthelot et Salin (1992) dans la problématique spatio-géométrique) ; d'autre part, **une éducation au changement de regard et en particulier au changement de dimensions sur les figures**. Le premier terme correspond à des conditions ou contraintes repérées depuis longtemps et appréhendées de différentes manières ; le second a été identifié par notre équipe. Ces deux éléments peuvent être mis en œuvre dans des activités pour les élèves à travers le tracé de figures avec des instruments car les instruments permettent à la fois de jouer entre les cadres de l'espace graphique et de l'espace géométrique et de jouer sur les dimensions des unités visuelles à prendre en compte. Un troisième point important est la place accordée aux mesures : dans l'enseignement usuel, on fixe la taille des figures et il y a un recours massif aux mesures de longueur et donc aux nombres. Nous faisons de plus l'hypothèse que **le travail sur les grandeurs géométriques sans recours à la mesure** (nous distinguons donc le report de longueur avec un instrument de report, de la mesure d'une longueur avec une règle graduée) **amène à conceptualiser les objets géométriques ainsi que les opérations sur les grandeurs.** Nous pensons donc qu’un tel travail aura des effets positifs sur la résolution de problèmes mettant en jeu les mesures de ces grandeurs. Les problèmes et les instruments proposés aux élèves mettent en jeu des reports de longueur plutôt que des mesures.

V - LES QUESTIONS ET PERSPECTIVES POUR LA FORMATION DES MAITRES

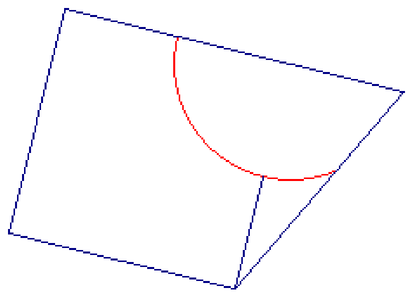
V. 1. Distance avec les pratiques ordinaires

Les observations que nous avons menées montrent que le jeu sur les variables a bien l’effet attendu sur les élèves mais que l’usage de telles situations amène d’une part, un changement du contrat didactique qui nécessite un temps d’adaptation, d’autre part, l’identification par les maîtres des moyens de gestion des situations permettant notamment de faire le lien avec le vocabulaire géométrique et l’usage des instruments usuels. Le travail des élèves est modifié : nous avons pu constater à plusieurs reprises que l'introduction de ce type de tâche, même dans un cas simple, produit une rupture du contrat didactique habituel dans la classe. Par exemple, nous avons préparé avec des PE2 dans le cadre d’Ateliers de Développement de Pratiques Pédagogiques en juin 2006 des séances qu’ils ont mises en œuvre dans une classe de CM2 avec une bonne expertise en géométrie.



Nous avons pu vérifier cette expertise lors de la première séance, menée par le maître formateur titulaire de la classe. Il s’agissait de construire aux instruments, des figures données par un dessin à main levée, codées et portant des indications de mesure « après avoir repéré certaines propriétés selon les indications fournies par les codages et les mesures ». Huit figures étaient proposées ; nous reproduisons ci-contre la figure 7.

L’utilisation de la gomme est découragée dans les habitudes de la classe et le maître, en donnant la consigne, rappelle que normalement elle ne sert à rien. Les connaissances géométriques des élèves se manifestent dans le choix de l'ordre des tracés et l’utilisation experte des instruments. Chaque groupe d’élèves a deux figures à reproduire mais la majorité des élèves de la classe ont traité correctement 3 voire 4 figures de ce type pendant la séance.



Pour la séance suivante les stagiaires ont proposé des restaurations de figures[5]. La première avait été obtenue en apportant une légère modification à une figure trouvée dans un manuel, et qui se trouvait très proche de la figure 7 du maître (non traitée à la première séance). Un côté du carré était fourni en guise d’amorce.

Cette figure, considérée comme simple par les stagiaires, avait été proposée à toute la classe, pour servir d’introduction avant des activités différenciées selon les élèves ; mais elle a pourtant posé des problèmes aux élèves qui se sont trouvés désorientés. Plusieurs éléments de leurs habitudes devaient être remis en question : les propriétés à utiliser n’étaient pas fournies, il fallait les identifier sur la figure et, pour cela, tracer des lignes supplémentaires sur le modèle ; ces lignes devraient aussi être reproduites sur l’amorce et donc, il devenait presque

[5] Nous conservons le terme « restauration », même avec une amorce de dimension 1 comme ici.

nécessaire[6] d'utiliser la gomme puisque, sur la figure finale, il manque une partie du carré qu'on aura tracé pendant la construction. De plus, aucune mesure n'était fournie ; c'est l'identification de rapports et le report de longueurs qui devaient être utilisés pour reproduire la figure. Une des différences fondamentales avec le contrat usuel est donc que l'analyse de la figure en vue de sa reproduction nécessite d'une part, le tracé de lignes définies par les points de la figure donnée mais non visibles sur le modèle, d'autre part, la recherche de rapports de longueurs. Les lignes ajoutées le sont pour permettre la construction de points nécessaires à la réalisation d'une succession de tracés avec les instruments à partir de l'amorce pour obtenir la figure modèle. C'est la mise en évidence de ces lignes, de ces points et de ces rapports qui oblige à un changement de regard sur la figure modèle.

On voit ici qu'un petit changement, apporté à un exercice proposé dans un manuel, peut changer assez nettement la tâche des élèves. Même si l'on n'attend pas que le maître puisse produire lui-même les figures, les amorces ou les règles de coût, il doit avoir une connaissance suffisante de leur effet possible sur les connaissances mises en œuvre par les élèves pour interpréter correctement leurs procédures et gérer la classe dans le sens du progrès de leurs connaissances géométriques. Il doit, en particulier, avoir des connaissances géométriques suffisamment sûres et flexibles pour reconnaître les savoirs géométriques à l'œuvre dans les procédures et productions des élèves, dans leurs formulations incomplètes et maladroites, de façon à pouvoir les faire évoluer sans glisser vers l'obtention d'un résultat final satisfaisant mais non relié aux connaissances initiales des élèves.

V.2. Leviers pour faire évoluer les pratiques des enseignants et points de résistance

V.2.1. Attrait pour la résolution de problèmes et difficulté à repérer les savoirs géométriques en jeu

Les situations proposées en formation continue ou en formation initiale ont en général rencontré beaucoup de succès parce que les maîtres ont été séduits par l'aspect résolution de problèmes : il y a beaucoup de ressources de résolution de problèmes dans le domaine numérique, mais les maîtres sont souvent démunis pour trouver des situations problématiques en géométrie.

[6] Ne pas l'utiliser reste possible mais c'est beaucoup plus complexe au niveau de l'ordre des tracés à réaliser et de la conception des tracés eux-mêmes : il ne s'agit plus de figures (carré, triangle, demi-cercle) et de leur disposition spatiale mais de segments liés par des relations.

Cependant, au-delà du premier enthousiasme, les maîtres s'interrogent sur les contenus des programmes qu'ils peuvent travailler de cette façon. Ils ont du mal à identifier des savoirs à formuler avec les élèves, à écrire dans le cahier et à réinvestir.

V.2.2. Difficulté à distinguer la grandeur géométrique « longueur » de sa mesure

Cette difficulté peut se manifester de deux manières, par une confusion et par une pratique.

Une confusion fréquente entre reporter une longueur et mesurer une longueur

Alors qu'un maître fait disparaître volontairement, dans sa classe, les règles graduées, celui-ci pourra utiliser inconsciemment l'expression « mesure de longueur » pour « report de longueur ».

Hypothèse pour comprendre ce lapsus persistant : certes, la règle graduée peut être utilisée pour reporter une longueur, celle-ci portant suffisamment d'inscriptions peut se substituer à une règle sur laquelle on devra porter des inscriptions pour reporter une longueur. Mais, il y a un risque de confusion pour des élèves de Cycle 2 car ils ont souvent une pratique limitée de la mesure : une pratique non pas comme un rapport de longueur (un segment de 3 cm est trois fois plus grand qu'un segment de 1 cm, ce qui implique des reports de longueur) mais comme un repérage d'un trait par un nombre d'une graduation (ici 3 sur une règle graduée en cm).

Une pratique banalisée : accepter la construction du milieu d'un segment en utilisant la mesure

Si les élèves vérifient qu'un point partage un segment en deux segments de même longueur, la construction d'un milieu est le plus souvent obtenue par une procédure non géométrique de type mesure-calcul-mesure et bien que des textes officiels de 2002 ou 2007 indiquent des procédures géométriques possibles, ces pratiques non géométriques persistent et sont même souvent les seules présentes.

V.2.3. Une première piste : introduire de petites modifications dans les pratiques usuelles

Nous avons d'abord pris en compte les contraintes de la formation, tant initiale que continue, qui ne donne que des durées très courtes de formation. Nous avons ainsi pensé que l'introduction d'une petite modification dans les pratiques usuelles, telles qu'on peut les observer dans les manuels, pouvait amener les maîtres à s'interroger sur leurs pratiques et à les faire évoluer. Cette piste a été tentée en formation initiale et en formation continue (voir ci-dessus). Même si nos résultats sont trop ponctuels pour qu'on puisse en tirer des conclusions générales, il nous semble que l'étude peut être poursuivie en formation initiale mais que c'est sans doute tout à fait insuffisant en formation continue pour faire évoluer des pratiques installées : une déstabilisation des pratiques usuelles ne peut être profitable que si elle contient les moyens de rééquilibrer assez vite sur une nouvelle pratique stable.

V.2.4. Perspective : mettre en place et étudier des modules reliés explicitement aux programmes du primaire

Cette année, le travail avec les maîtres d'une école d'application nous a permis de mieux cerner les besoins des maîtres et les possibilités d'évolution des pratiques. Cela nous amène à considérer la nécessité d'étudier la mise en œuvre de progressions sur quelques sujets comme nous avons commencé à le faire avec la symétrie orthogonale.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Berthelot R. et Salin M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne : Peter Lang.

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* n° 10, 5-53.

Duval R. & Godin M. (2006). Les changements de regard nécessaires sur les figures *Grand N* n° 76.

Duval R., Godin M. & Perrin-Glorian M.-J. (2005). Reproduction de figures à l'école élémentaire in Castela et Houdement (éds) *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, 5-89, ARDM, IREM Paris 7.

Keskessa B., Perrin-Glorian M.J. & Delplace J.R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N,* n° 79, 33-60.

Offre B., Perrin-Glorian M.J. & Verbaere O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N* n° 77, 7-34, et Petit x n° 72, 6-39.

Eugène COMIN
Lycée Arnault Daniel
DAESL Bordeaux 2

Proportionnalité et fonction linéaire

Effets didactiques des dépendances entre école, collège et lycée

Introduction et problématique

Proportionnalité et fonction linéaire sont deux approches de la linéarité qui se réfèrent à deux cultures différentes : l'arithmétique des grandeurs enseignée à l'école et au collège, l'algèbre initiée au collège puis au lycée. Or il semble que l'enseignement secondaire peine à construire une clôture des savoirs arithmétiques élémentaires tout en préparant les apprentissages futurs de l'algèbre. Dans ces conditions, les connaissances développées par l'enseignement secondaire permettent-elles aux futurs professeurs des écoles d'avoir un contrôle sur ce qu'ils ont à enseigner à l'école primaire ? En particulier, l'enseignement des fonctions apporte-t-il des connaissances algébriques aux élèves qui reformulent et prolongent les savoirs arithmétiques de la proportionnalité ?

Dans cet atelier, nous avons repris des questions et des exercices ayant fait l'objet d'enquêtes auprès de professeurs des écoles et d'élèves de seconde pour alimenter une réflexion sur les questions suivantes :

1) Peut-on enseigner la proportionnalité sans les grandeurs, sans la notion de rapport ?
2) Les connaissances des élèves de seconde sur les fonctions linéaires et affines peuvent-elles pallier la disparition de tout un pan de culture de l'arithmétique des grandeurs ?
3) Une introduction des fonctions en seconde qui clôture les connaissances sur la proportionnalité est-elle possible ?

Sans reprendre les discussions qui ont eu lieu lors de l'atelier, cet article explicite les éléments sur lesquels nous nous sommes appuyés, à savoir les résultats de ces enquêtes et leur analyse.

1 Peut-on enseigner la proportionnalité sans les grandeurs ? sans la notion de rapport ?

Au collège, la réforme des « mathématiques modernes » avait exclu des programmes les notions de grandeur, de rapport et de proportionnalité. La linéarité, réduite à l'étude de relations numériques, n'avait pas suppléé à cette disparition comme le montre les résultats d'une enquête (Comin 2000-2002) que nous reprenons partiellement ci-après.

1 - 1 Les conceptions des professeurs

Les questions construites autour des concepts de rapport, de nombre et de proportionnalité ont été soumises, au mois de février 1997, à des instituteurs et professeurs des écoles en activité qui ont remis 38 questionnaires complétés.

Dans cet atelier nous avons analysé certaines de ces questions et commenté les réponses obtenues lors de l'enquête. Les fréquences de réponses aux différents items sont données en pourcentages calculés sur les 38 réponses. Nous ne reproduisons ici que quelques résultats accompagnés de quelques commentaires.

1 – 1 - 1 Rapports et nombres

Les déclarations suivantes sont-elles acceptables pour le professeur ?	
"6 est la règle qui permet de passer de 9 à 54. "	OUI **32** NON **58**
"6 est le coefficient de proportionnalité des nombres 9 et 54."	OUI **66** NON **21**
"Un rapport peut toujours être représenté par une fraction."	OUI **79** NON **11**

Les maîtres qui ne disposent pas du terme « rapport »[1] utilisent soit un terme trop général : « règle » soit un terme trop spécifique : « fraction, coefficient de proportionnalité ».

La confusion entre « rapport » et « fraction » (confortée par l'expression « écriture fractionnaire » qui figure dans les programmes de collège depuis 1985) a une incidence sur la compréhension des structures numériques comme le montrent les questions suivantes :

Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case de votre choix :			
$\frac{5}{7}$ est un nombre rationnel.	VRAI **42**	FAUX **11**	JE NE SAIS PAS **45**
$\frac{5}{7}$ est un nombre décimal.	VRAI **50**	FAUX **37**	JE NE SAIS PAS **11**
Tout rationnel est décimal.	VRAI **11**	FAUX **47**	JE NE SAIS PAS **39**
Tout décimal est rationnel.	VRAI **39**	FAUX **18**	JE NE SAIS PAS **39**

Comment expliquer qu'un nombre est rationnel ou ne l'est pas, qu'un rapport est décimal ou ne l'est pas si l'on ne dispose pas du concept de fraction et de pratiques opératoires pour écrire ces nombres sous différentes formes : fraction irréductible, fraction décimale, écriture de position, etc.,

De même, la confusion entre « rapport » et « coefficient de proportionnalité » ne permet pas de discriminer les différentes fonctions des nombres dans un tableau de proportionnalité :

Cochez les cases de votre choix:

8	12	16
24	36	48

Dans le tableau ci-contre, chacun des nombres suivants est :	3	2	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
un coefficient de proportionnalité	**79**	**18**	**11**	**37**	**8**	**11**
un rapport	**11**	**3**	**0**	**50**	**18**	**16**
un quotient	**29**	**5**	**3**	**16**	**8**	**5**

[1] Dans les manuels scolaires du siècle dernier, les définitions de rapport ressemblent à la suivante : « Le rapport de deux éléments d'une même grandeur est le nombre qui mesure l'une d'elles quand on prend l'autre pour unité ». Par conséquent un rapport n'est pas nécessairement rationnel. Or une fraction est une écriture où figurent deux entiers séparés par un trait appelé « barre de fraction ». Un nombre est rationnel s'il admet une telle écriture.

Rapport : 47% des maîtres interrogés n'ont jamais choisi le mot « rapport », ce mot tend à disparaître de leur vocabulaire. 11% des maîtres interrogés ont appelé à tort « coefficient de proportionnalité » le nombre « 6 » mais aucun d'eux ne lui attribue le nom de « rapport ».

Coefficient de proportionnalité : 79% des maîtres interrogés disent que 3 est un coefficient de proportionnalité alors que seulement 37% disent que $\frac{1}{3}$ en est un ; par conséquent au moins 42% ne voient de coefficient de proportionnalité dans une application linéaire que si celui-ci est un entier naturel.
21% des maîtres interrogés appellent « coefficient de proportionnalité » au moins un des quatre nombres : $2; 6; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}$, qui n'en sont pas.

Il est difficile de discriminer une situation de proportionnalité d'une situation de non proportionnalité en utilisant le vocabulaire de la proportionnalité. Ce sont les situations qui fixent le vocabulaire ; un rapport peut s'appeler : « coefficient de proportionnalité », « opérateur », « quotient », « multiplicateur », « mesure », etc. …, en fonction du rôle qu'il joue dans la situation.

Conclusion :

Le concept de rapport devient déliquescent. La disparition du mot « rapport » rend difficiles les explications qui permettent de différencier la nature des nombres et leurs fonctions dans différentes situations.
On va voir que ce vide va être en partie comblé par un usage inadéquat du vocabulaire de la proportionnalité, ce qui va engendrer des conceptions fausses de la proportionnalité[2].

1 – 1 – 2 Proportionnalité et fonction linéaire

Voici un exercice qui a été proposé à des élèves de CM2 : "Pour obtenir 10 kilogrammes de sel marin, il faut faire évaporer 310 litres d'eau de mer. Quelle quantité d'eau de mer faut-il faire évaporer pour obtenir 15 kilogrammes de sel marin ? "	
Les déclarations suivantes sont-elles acceptables pour le professeur ?	
"Le nombre de kilogrammes de sel marin est proportionnel au nombre de litres d'eau de mer."	OUI **74** NON **8**
"La proportion de sel dans l'eau est 1 pour 31."	OUI **63** NON **13**
"La situation est de proportionnalité : car on peut trouver la réponse avec une règle de trois. car on peut faire un tableau de proportionnalité. car on décide qu'il en est ainsi. "	 OUI **68** NON **11** OUI **74** NON **5** OUI **11** NON **47**
Si vous aviez à rédiger une solution de l'exercice, que proposeriez-vous à vos élèves ? proportion : **0** ; retour à l'unité : **21** ; fonction linéaire : **0** ; tableau de proportionnalité : **34**	

[2] La proportionnalité décrit une relation entre grandeurs. Une grandeur est tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Une grandeur est mesurable si le rapport entre deux de ses éléments a du sens (est numérisable). La température n'est pas une grandeur mesurable alors que masse et volume le sont. Deux grandeurs mesurables sont proportionnelles si tout rapport entre deux éléments de l'une d'elles est égal au rapport des deux éléments homologues de l'autre.

Les maîtres ont du mal à justifier le choix du modèle proportionnel. La méthode de réduction à l'unité porte en elle sa propre justification par les calculs qu'elle conduit à effectuer sur les grandeurs accompagnées de leurs unités. Le tableau de proportionnalité n'est pas directement constructible sans un repérage des grandeurs. La compréhension d'une situation de proportionnalité nécessite un raisonnement sur les grandeurs et dans une vérification, le tableau sert à rejeter mais pas à valider le choix de la proportionnalité.

Aucun maître ne propose une stratégie qui fasse appel à la notion de fonction linéaire pour résoudre l'exercice. Les différents systèmes d'ostensifs ne sont pas interchangeables mais attachés aux situations qui les ont fait naître comme le montre aussi l'exemple suivant.

3	7
f(3)	f(7)

Si f désigne une fonction linéaire alors le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité. VRAI **47** FAUX **11** JE NE SAIS PAS **32**

La reconnaissance d'un tableau de proportionnalité dans le tableau d'une fonction linéaire quand les valeurs numériques n'y figurent pas explicitement, nécessite l'interprétation du mot linéaire sans avoir recours aux nombres. Pour certains maîtres un tableau de proportionnalité ne doit contenir que des valeurs numériques explicites. (13% des maîtres interrogés estiment même que dans un tableau de proportionnalité ne peuvent figurer que des nombres entiers.)

D'autres résultats montrent la nécessité d'une transposition didactique entre les différents modèles.

Les déclarations suivantes sont-elles acceptables **:**

"$\frac{4}{6}, \frac{18}{27}$ et $\frac{14}{21}$ déterminent la même proportion." OUI **76** NON **13** JE NE SAIS PAS **11**

"Les suites (4, 18, 14) et (6, 27, 21) sont proportionnelles." OUI **53** NON **24** JE NE SAIS PAS **21**

"$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ est une proportion". VRAI **47** FAUX **11** JE NE SAIS PAS **29**

L'analyse des réponses montre qu'au moins un tiers des maîtres interrogés connaissent les deux acceptions du mot « proportion » mais ils attribuent néanmoins à ce mot le sens courant de rapport dans un contexte mathématique.

Remarque : dans les programmes actuels (de collège ou de STG), le mot « proportion » désigne le rapport de l'effectif d'une sous population A de E à l'effectif de la population E ($p = \frac{n_A}{n_E}$) nommé aussi fréquence (nombre qui résulte de ce rapport).

Conclusion :

La disparition des grandeurs comme objet d'enseignement en mathématiques limite la proportionnalité à l'étude des relations entre nombres. Mais, les analyses montrent l'indépendance du modèle « fonction linéaire » et des modèles issus de « l'arithmétique élémentaire ». La fonction linéaire n'a pas permis de reformuler les savoirs sur la proportionnalité contrairement à ce que laissaient espérer les programmes de 1968.

1 – 1 - 3 Nombres et proportionnalité

Les déclarations suivantes sont-elles acceptables pour le professeur ?	
"Le quotient de 54 par 9 est 6."	OUI **92** NON **3**
"54 est un multiple de 9. "	OUI **97** NON **0**
"54 et 9 sont proportionnels. "	OUI **55** NON **29**
"6 est le coefficient de proportionnalité des nombres 9 et 54."	OUI **66** NON **21**
"Quand le reste de la division euclidienne de deux nombres naturels est nul, ces deux nombres sont proportionnels."	OUI **63** NON **26**
"Un coefficient de proportionnalité est un entier."	OUI **16** NON **76**

Si une fraction représente un entier alors :			
le numérateur est un multiple du dénominateur.	VRAI **95**	FAUX **3**	JE NE SAIS PAS **3**
le numérateur est un diviseur du dénominateur.	VRAI **13**	FAUX **82**	JE NE SAIS PAS **5**
le numérateur et le dénominateur sont proportionnels.	VRAI **63**	FAUX **18**	JE NE SAIS PAS **13**

Nombres proportionnels

Les notions de multiple et diviseur perdurent mais le vocabulaire de la proportionnalité vient se superposer à celui spécifique de ces notions pour décrire les relations entre familles de nombres entiers. Il s'ensuit une confusion d'où émerge une conception fausse de « nombres proportionnels » qui cohabite avec les concepts de multiples et diviseurs.

Seulement 18% des maîtres rejettent clairement l'idée que deux nombres puissent être proportionnels. A une exception près, les maîtres qui répondent « VRAI » à « le numérateur et le dénominateur sont proportionnels », ont répondu « VRAI » à « le numérateur est un multiple du dénominateur ». Ces deux formulations ne s'excluent pas. Certains maîtres acceptent d'utiliser le vocabulaire de la proportionnalité pour dire que deux nombres sont dans un rapport multiple alors qu'ils connaissent les mots « diviseur » et « multiple ». Les différents vocabulaires cohabitent et s'interpénètrent.

Coefficient de proportionnalité

Une utilisation erronée de l'expression « coefficient de proportionnalité » s'inscrit dans cette conception fausse de l'idée de proportionnalité. Les réponses aux questions précédentes sont corrélées entre elles ; leur groupement caractérise cette conception de proportionnalité entre entiers.

Il est important de remarquer que les questions ne séparent pas les individus. En particulier, on ne peut pas isoler une sous population qui utiliserait systématiquement le vocabulaire de manière correcte. Les difficultés observées ne caractérisent pas les maîtres.

L'absence d'une culture précise conduit chacun d'eux à faire un usage inapproprié de termes sur une question ou sur une autre.

Conclusion :

La proportionnalité a son origine dans l'étude des grandeurs. L'expression très ancienne « nombres proportionnels » faisait référence à des mesures de grandeurs[3] mais lue par des gens qui ne connaissent pas l'arithmétique des grandeurs elle peut être perçue comme signifiant une relation particulière entre nombres abstraits. En particulier, le primaire étant le lieu privilégié de l'étude des entiers et de la proportionnalité, il s'ensuit l'idée que la proportionnalité doit décrire une relation particulière entre entiers.

1 - 2 Bilan et explications

Les professeurs ne disposent plus de mots précis pour décrire les notions de rapport, de proportionnalité et les pratiques qui les incluent. Il en résulte une grande ambiguïté dans l'usage qu'ils font de certains termes comme « proportion, rapport, proportionnalité, coefficient de proportionnalité, fraction, … » allant jusqu'à des confusions dans les concepts.

On voit apparaître l'interpénétration des vocabulaires de l'arithmétique actuelle d'une part (multiple, diviseur, quotient, reste, fraction, …) et ce qui reste de l'arithmétique ancienne d'autre part (proportion, proportionnel, …). Or le vocabulaire de l'arithmétique ancienne qui traitait des grandeurs ne peut pas être repris dans le vocabulaire moderne puisque la notion de grandeur a disparu des mathématiques modernes. Le vocabulaire de substitution aurait dû être celui des fonctions linéaires (application, image, antécédent, coefficient de linéarité, …), mais les insuffisances de la transposition didactique des mathématiques dites modernes et les réactions qu'elles ont provoquées, ont fait disparaître du vocabulaire de l'école primaire, les termes qui lui seraient nécessaires : élément, classe, couple, graphe, etc.

Les difficultés observées ne sont pas des caractéristiques de professeurs mais un fait culturel. Pour l'expliquer, nous avons étudié l'évolution des conditions d'enseignement de la proportionnalité.

a) Evolution de l'histoire de la proportionnalité
La construction moderne des nombres et des fonctions ignore totalement la proportionnalité et les grandeurs. Les mathématiciens définissent les nombres par les structures algébriques. La définition formelle de fonction privilégie l'idée de correspondance terme à terme entre éléments de deux ensembles. La fonction linéaire résume toutes les relations de proportionnalité ; elle n'est qu'un exemple banal de fonction. L'algèbre rend caduque l'usage et le vocabulaire de la proportionnalité.

b) Evolution des programmes

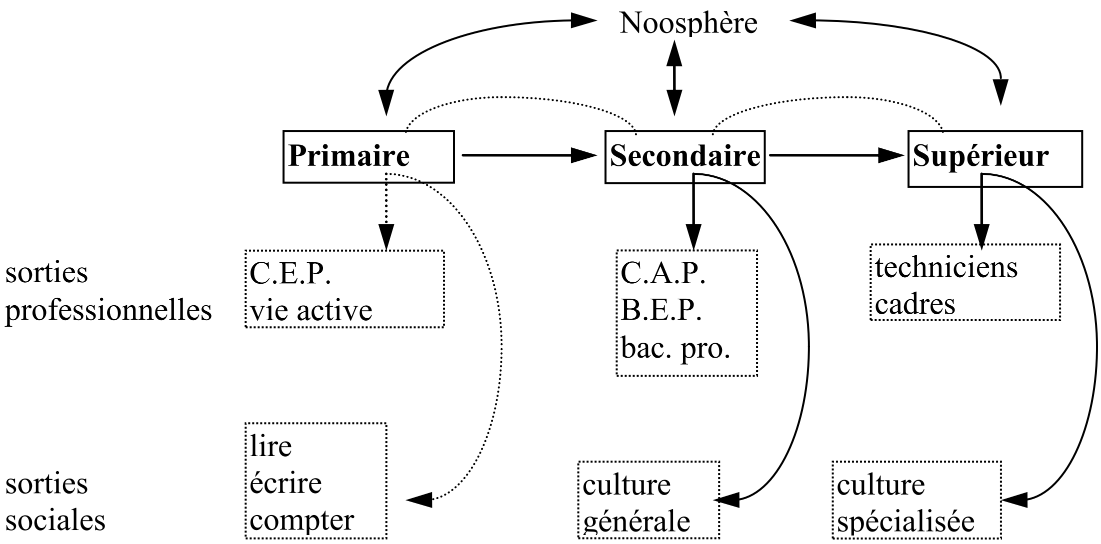
[3] Deux grandeurs mesurables sont proportionnelles si la correspondance entre leurs mesures est une fonction linéaire. Le coefficient de cette fonction linéaire est aussi appelé « coefficient de proportionnalité » ; il dépend des unités de mesures.

Les mathématiques modernes s'imposent à la noosphère et à l'école avec les réformes des années 1970. La noosphère, sous l'influence de la sphère savante n'est plus en mesure d'assurer son rôle de régulateur. Les connaissances de la proportionnalité n'ont plus fait l'objet de transpositions et ont ainsi disparu des contenus de l'enseignement du secondaire.
Les changements de contenus à enseigner auraient nécessité l'explication des réformes correspondantes pour une transposition d'une genèse axiomatique en une genèse didactique avertie.
c) Evolution des contraintes interinstitutionnelles
Chaque institution adapte ses instruments mathématiques aux problèmes qu'elle traite et aux conditions dans lesquelles elle le fait. L'école essaie d'adapter ses pratiques et ses conceptions de la proportionnalité à la nouvelle organisation des savoirs savants tout en assurant la pérennité des connaissances anciennes sous le contrôle de la noosphère.
Les dysfonctionnements que nous avons observés sont l'indice d'une évolution non régulée des rapports entre l'institution savante, l'institution scolaire et la noosphère.
Les changements curriculaires se sont faits sur la base de convictions idéologiques générées par une réorganisation des savoirs savants au détriment d'une réflexion sur ce qui est nécessaire à la culture, à la société, à la genèse des premiers savoirs mathématiques.

d) Pourquoi le système scolaire est-il resté aveugle aux conséquences de ce choix épistémologique ?

L'enseignement de la proportionnalité est conditionné par les attentes des différentes institutions scolaires et sociétales.

Le schéma suivant illustre l'évolution de l'environnement institutionnel de l'école primaire :



Primaire :

Avant la scolarité obligatoire jusqu'à 16 ans, l'école primaire préparait les élèves à la vie active. Les connaissances de l'arithmétique élémentaire et de la proportionnalité étaient adaptées aux différentes professions auxquelles se destinaient ces élèves.

Cette mission conférait à l'école primaire une identité, un statut social, une importance reconnue par la société toute entière. De ce fait les autres institutions scolaires portaient un regard attentif sur les pratiques et les contenus de l'enseignement élémentaire.

Secondaire :
Le secondaire devait assurer la formation des futurs instituteurs et donc tenir compte des contenus d'enseignement du primaire. L'arithmétique avait une place importante dans l'enseignement secondaire. La théorie des rapports et proportions a été maintenue dans les écoles normales jusqu'en 1970. En même temps le secondaire préparait les élèves à l'enseignement supérieur, lieu privilégié de l'algèbre. Ainsi arithmétique et algèbre devaient «cohabiter » dans le secondaire. (Certains manuels scolaires traitaient le même problème séparément par l'arithmétique puis par l'algèbre.)

La société a changé. Tous les élèves entrent en classe de sixième et 80% d'une classe d'âge doit atteindre le niveau du baccalauréat.
La seule sortie du primaire est le collège. L'école primaire n'est plus que la propédeutique du collège ; ce qu'elle fait ou ce qu'elle devrait faire « va de soi » pour les autres institutions scolaires qui de ce fait l'ignorent. Or le primaire ne peut traiter correctement la proportionnalité que si elle est présente dans le secondaire car les connaissances des professeurs des écoles dépendent de ce qu'ils apprennent dans le secondaire.

Mais le secondaire, principalement orienté vers les études longues, est lui-même assujetti au supérieur et n'a aucune raison d'enseigner l'arithmétique élémentaire. Il ne prépare plus les futurs professeurs des écoles.

Cet assujettissement de chaque niveau d'enseignement au niveau supérieur a des conséquences sur le fonctionnement des institutions scolaires. Il contribue à leur isolement et les oblige à un fonctionnement autonome. Or c'est l'usage effectif d'une connaissance à travers des pratiques communes à différentes institutions qui assure sa pérennité et sa diffusion dans la société.

Conclusion
Les changements curriculaires résultent de l'évolution des savoirs savants mais aussi des attentes des différentes institutions scolaires et sociétales. Il en résulte une évolution rapide des contenus d'enseignement qui nécessite une analyse périodique des pratiques des élèves et des professeurs.
En particulier, nous nous demandons si les connaissances actuelles des élèves de seconde sur les fonctions linéaires et affines peuvent suppléer celles de l'arithmétique des grandeurs et de la proportionnalité ?

2 La fonction linéaire reformule-t-elle les connaissances de la proportionnalité?

Il semble qu'on assiste ces dernières années à une résurgence de la proportionnalité dans l'enseignement obligatoire. Sa timide réapparition dans les programmes de collège s'accompagne-t-elle d'une prise en charge des grandeurs par l'enseignement de l'algèbre ?

Pour tester les connaissances des élèves entrant en seconde et plus précisément pour voir s'ils mobilisent des registres spécifiques à l'arithmétique ou à l'algèbre et avec quel succès, l'exercice standard suivant a été soumis à une classe de seconde pendant deux années scolaires consécutives : 2005-06 et 2006-07.

« *Pendant les soldes un magasin accorde 16% de remise sur les prix affichés.*

1) *Un article est affiché 35 €, quel sera le prix payé ? Justifier en écrivant vos calculs.*
2) *Un article est payé 21 €, quel était le prix affiché ? Justifier en écrivant vos calculs.*
3) *Le commerçant a accordé 7,2 € de remise sur un article. Quel était le prix affiché de cet article ? Justifier en écrivant vos calculs.* »

Les participants à l'atelier étaient invités à analyser cet exercice et à commenter les techniques résolutoires des élèves.

2 – 1 Stabilité dans les réponses des élèves

Les fréquences de réussite à chacune des trois questions sont très proches pour les deux années scolaires comme le montre l'histogramme suivant :

Comparaison des réussites aux 3 questions de l'exercice

	Q1	Q2	Q3
Année 2005-2006	0,93	0,32	0,61
Année 2006-2007	0,94	0,32	0,82

Réussites des élèves

Seule la question 3 fait apparaître une différence entre les fréquences de réussites des deux années. Un test avec la variable normale donne une probabilité de 0,0574 de dépasser cette différence entre deux échantillons indépendants.[4]

Par contre, on pouvait s'attendre aux écarts de réussite entre les trois questions :

La question 1 peut se résoudre par un calcul direct du prix payé ou par un calcul intermédiaire du montant de la remise.

La question 2 nécessite la mise en œuvre d'une fonction réciproque (l'erreur classique consiste à calculer la remise sur le prix payé) et de ce fait on pourrait penser que les élèves ayant une approche algébrique du problème sont mieux armés pour donner une réponse juste.

[4] Cf. annexe 1 pour détails des résultats statistiques.

La question 3 nécessite aussi la mise en œuvre d'une fonction réciproque mais qui peut-être déterminée directement à partir du pourcentage de remise donné dans la consigne.

2 - 2 Analyse des réponses des élèves de l'année 2006-07

Les réponses des 34 élèves font apparaître une grande diversité de formulations (d'écritures) mais les méthodes de résolution peuvent être groupées autour de quatre techniques :

Fonction linéaire de coefficient 0,84 : (FLP, FLPI)

On peut penser que les élèves qui ont une approche algébrique du problème utilisent la fonction linéaire de coefficient 0,84 (FLP) à la question 1 et sa réciproque (FLPI) à la question 2. Or une seule élève utilise cet opérateur avec succès à la question 1 mais échoue à la question 2. Deux autres élèves prennent conscience de l'intérêt de cette fonction à la question 2 et utilisent directement sa réciproque (FLPI) avec succès.

Fonction linéaire de coefficient 0,16 : (FLR, FLRI)

28 élèves utilisent la fonction linéaire de coefficient 0,16 (FLR) et 17 d'entre eux utilisent la réciproque de cette fonction (FLRI).

Parmi les 28 élèves, 26 réussissent la question 1 en calculant le montant de la remise puis le montant à payer par différence.

Parmi les 17 élèves, 16 réussissent la question 3 ; 15 échouent à la question 2 car presque tous calculent la remise sur le prix payé (c'est-à-dire 16% de 21€).

Fonction linéaire et équation : (FLR et EQ)

Neuf élèves font une mise en équation (EQ) en utilisant la fonction linéaire de coefficient 0,16 (FLR) ; mais six d'entre eux échouent à la question 2 et trois d'entre eux échouent à la question 3.

Proportion et équation : (P et EQ)

Sept élèves écrivent une proportion (P) où figure une inconnue et réalisent ainsi une mise en équation (EQ) pour chacune des trois questions. Ces sept élèves réussissent la question 1 et la question 3 ; mais deux d'entre eux échouent à la question 2 car ils calculent la remise sur le prix payé.

Pour résumer, reprenons les techniques et réussites question par question :

A la question 1, tous les élèves, sauf 2, calculent le montant de la remise, soit avec la fonction de coefficient 0,16 (FLR), soit avec une mise en équation proportionnelle (P et EQ).

La question 2 est réussie soit par ceux qui utilisent la réciproque de la fonction de coefficient 0,84 (FLPI) soit par ceux qui font une mise en équation proportionnelle (P et EQ).

Les élèves qui réussissent la question 3 utilisent soit la réciproque de la fonction de coefficient 0,16 (FLRI), soit la fonction directe de coefficient 0,16 mais avec une mise en équation (FLR et EQ), soit une mise en équation avec une proportion (P et EQ).

La question 3 est mieux réussie que la question 2, probablement parce qu'elle peut être résolue en utilisant la réciproque d'une fonction linéaire donnée dans la consigne.

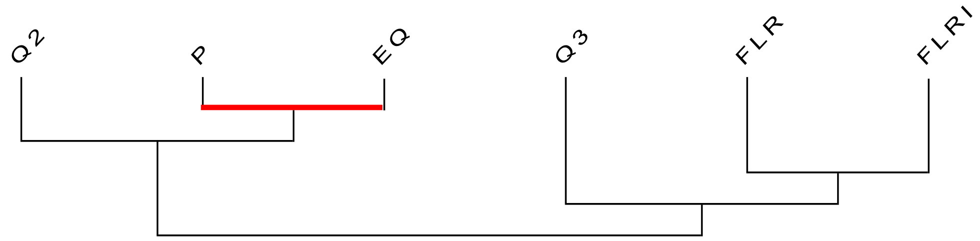
On pourrait espérer, de la part d'élèves de seconde, des techniques utilisant la fonction linéaire :

Question 1 : $35\times0{,}84=29{,}4$ (1 seul élève utilise cette technique)

Question 2 : $21\div0{,}84=25$ (2 élèves utilisent cette technique)

Question 3 : 7,2÷0,16=45 (17 élèves utilisent cette technique)
En fait, peu d'élèves (moins de la moitié) utilisent la fonctionnalité de la réciproque d'une fonction linéaire.

L'arbre de similarité suivant montre une proximité des caractères P et EQ avec la question 2, et une proximité des caractères FLR et FLRI avec la question 3. Ces proximités confirment les remarques précédentes : la question 2 est principalement réussie par les élèves qui font une mise en équation proportionnelle alors que la question 3 est aussi réussie par ceux qui utilisent la fonction de coefficient 0,16 ou sa réciproque.



Arbre des similarités : C:\Documents and Settings\xxxx\Mes documents\test-seconde-2006-chic.csv

L'écriture d'une proportion relève bien d'une technique propre à l'arithmétique, mais l'usage d'une inconnue pour la mise en équation proportionnelle s'apparente davantage à une résolution algébrique car elle utilise le signe « = » et une lettre « x ». Les élèves qui ont un « pied dans l'algèbre » ont plus de facilités à faire cette mise en équation proportionnelle que ceux qui sont restés dans une conception arithmétique des mathématiques. Peut-être cette mise en équation proportionnelle pourrait-elle être un outil de transposition entre l'arithmétique et l'algèbre.

Le concept de fonction n'est pas spécifique à l'algèbre. Il peut s'élaborer dans le cadre arithmétique avec les notions de dépendance et de correspondance entre grandeurs. Les élèves utilisent le coefficient de proportionnalité (0,16), sans parler de fonction linéaire, mais de manière adaptée à la question 3.

Nous retiendrons que ces deux objets de savoir que sont « la mise en équation proportionnelle » et « la fonction linéaire » présentent, de par la diversité de leurs praxéologies, une grande adaptabilité autant au cadre arithmétique qu'au cadre algébrique. Ils apparaissent comme des maillons dans la chaîne des connaissances des élèves, suffisamment maniables pour faciliter la dialectique nécessaire au passage de l'arithmétique à l'algèbre.

2 - 3 Conclusion

Ces observations tendent à montrer que ce que l'enseignement de l'algèbre fait gagner en généralité n'améliore pas l'extension du champ d'utilisation de la proportionnalité : les connaissances relatives à la proportionnalité semblent attachées à certaines situations culturellement reconnues, et les techniques utilisées par les élèves semblent dépendantes des problèmes qui les ont vu naître.

Les élèves ne peuvent pas transférer d'eux-mêmes leurs connaissances d'un cadre à un autre.

Si la linéarité se limite à l'étude de relations numériques, elle ne peut pas reformuler les connaissances de la proportionnalité. Il incombe donc aux professeurs d'organiser un travail de transposition pour que la fonction linéaire apparaisse comme un objet de savoir qui résume, unifie et réfléchit la diversité des connaissances des élèves sur la notion de proportionnalité.

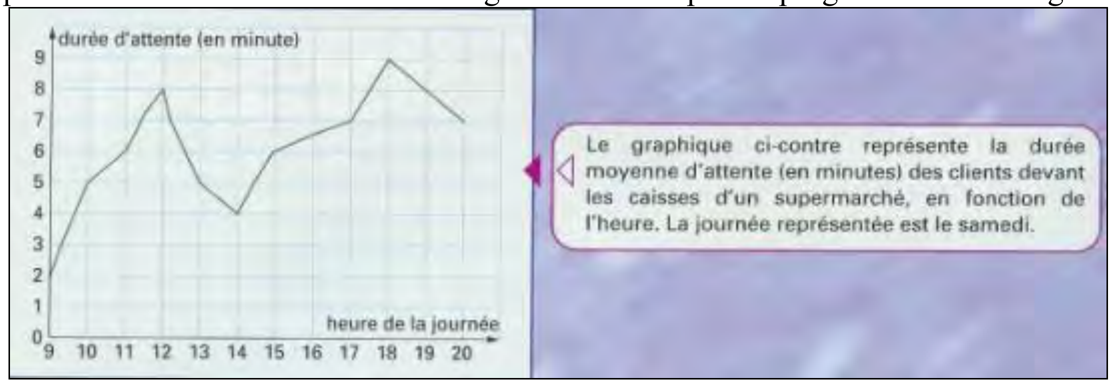
3 Un enseignement des fonctions en seconde qui clôture les connaissances de la proportionnalité est-il possible ?

Nous avons comparé deux introductions de la notion de fonction en seconde qui révèlent des choix épistémologiques différents ; les pratiques d'enseignement qui en découlent, peuvent générer chez les élèves des connaissances différentes pour un même objet de savoir.

3 - 1 Présentation formelle et institutionnalisation dans le cadre numérique

Le premier exemple est extrait du manuel « Repère, math 2[de], Hachette Education, 2004 ».
La présentation de deux activités introductives au chapitre « Généralités sur les fonctions » est caractéristique d'une triple classification suivant le cadre, la nature des fonctions et leurs représentations.

Sur la page de gauche figure une activité intitulée « Etude d'une fonction sans calculatrice ». Il s'agit en fait d'un relevé statistique représenté par une courbe où figurent les unités de grandeurs. Il est accompagné d'un commentaire utilisant le vocabulaire des grandeurs et l'expression « en fonction de » dont l'usage est conseillé par les programmes de collège.



La situation est ensuite retraduite en utilisant les ostensifs propres à l'algèbre : $f, t, f(t)$;
puis les questions sont étiquetées avec de nouvelles expressions : ensemble de définition, image, antécédent, etc. Il est probable qu'un élève novice aura des difficultés à les mettre en relation avec les formulations en termes de grandeurs.

> Le superviseur d'un supermarché affiche des renseignements à l'entrée de son magasin, notamment le graphique d'une fonction f qui à chaque instant t de la journée, associe le temps d'attente $f(t)$ aux caisses.
>
> **1 • Ensemble de définition**
> Quels sont les horaires d'ouverture du magasin ?
>
> **2 • Image par f**
> Quel est le temps d'attente à 14 h 00 ?
> Quelle est l'image de 10 par f ?
> Indiquer la valeur de $f(19)$.
>
> **3 • Antécédents par f**
> À quelle heure attend-on 5 minutes ?
> Ces heures sont les antécédents de 5.
> Quels sont les antécédents de 7 ? de 1 ? de 9 ?

L'introduction du lexique spécifique de l'algèbre n'est pas nécessitée par cette situation puisque les élèves disposent déjà du vocabulaire des grandeurs pour formuler.
L'activité n'est qu'un alibi pour institutionnaliser les éléments de savoir mentionnés dans le programme : *f*, *f(t)*, *ensemble de définition, image, antécédent, équation, inéquation, sens de variation, tableau de variations, min, max*. Ils ne sont pas utiles à l'élève qui peut répondre aux questions en termes de grandeurs, mais ils vont permettre au professeur de décrire, dans le cadre numérique, l'activité suivante qui est en vis-à-vis de la première sur la page de droite.

Cette deuxième activité est intitulée : « Etude d'une fonction avec calculatrice ». Les auteurs y proposent deux exercices sur les fonctions définies par des formules algébriques : $f(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}$ et $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{2}{x})$. Ces formules désignent le type de fonctions (fonctions rationnelles) en même temps qu'elles décrivent l'algorithme qui permet la mise en correspondance des nombres. Les auteurs placent ces exercices dans le cadre numérique (x et $f(x)$ sont des variables réelles) en utilisant le vocabulaire introduit dans l'activité précédente. Reprenons le premier exercice :

> **A.** On considère la fonction f définie sur $[-3\,;\,3]$ par $f(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}$.
>
> **1 •** Calculer $f(x)$ pour les valeurs de x suivantes :
> $0\,;\ 1\,;\ -2$ et 3.
>
> **2 •** En déduire si les points suivants sont situés sur la représentation graphique de f :
> $O(0\,;0)\,;\quad A\left(1\,;-\frac{1}{6}\right);\quad B\left(-2\,;\frac{-6}{5}\right);\quad C(3\,;-0{,}6)$.
>
> **3 •** Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

> **4 •** Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $f(x)=1$?

La formule $f(x) = \frac{-2x}{x^2+1}$ établit formellement le graphe de la fonction, c'est-à-dire l'ensemble des couples ($x; \frac{-2x}{x^2+1}$) lorsque x parcourt **R**. Elle ne résume pas la structure d'une situation ; elle dit à l'élève, qui connaît les règles du calcul algébrique, quelle procédure il doit suivre pour déterminer le correspondant de n'importe quel nombre réel. L'essentiel des tâches consiste à faire ces calculs puis à encadrer et déterminer un minimum.
Cette activité de découverte ne diffère pas des exercices d'application qui suivent le cours.

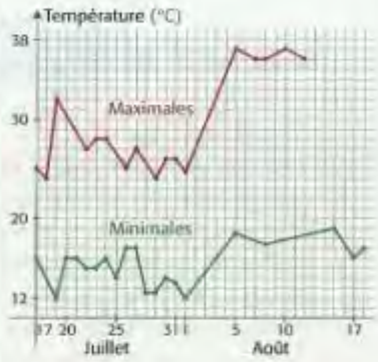
En résumé, dans ce manuel, le passage du cadre arithmétique au cadre numérique, d'une relation entre grandeurs à une relation entre nombres abstraits n'est pas organisé. La première activité institutionnalise d'emblée les objets et le vocabulaire qui vont permettre au professeur de faire fonctionner les algorithmes de la deuxième, mais la signification que l'élève peut donner à cette deuxième activité, qui se limite à un jeu de calcul formel sur les nombres, ne se nourrit pas de la relation entre grandeurs décrite dans la première activité.

3 - 2 Du modèle implicite d'action dans le cadre des grandeurs à l'usage canonique d'une formule algébrique

Le deuxième exemple est extrait du manuel « Maths seconde ; édition 2004 ; collection Indice ; Bordas ». Les deux premières activités qui introduisent le chapitre « Généralités sur les fonctions », marquent la différence d'approche didactique de ce manuel par rapport au précédent.

L'activité 1 intitulée « Canicule », décrit, dans le cadre des grandeurs (dates et températures), une fonction du hasard (des observations), avec des courbes de températures.

Le graphique fournit l'évolution, en un lieu donné, des températures maximales et minimales en degrés Celsius au cours de la période du 17 juillet au 17 août 2003.



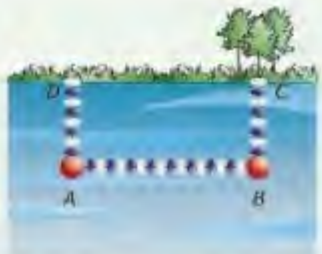
1.a. Quelles sont ces températures et leur écart le 1er août ?
b. Durant quelle période les maximales ont-elles dépassé 30 °C ?
c. Quelle est la température la plus élevée observée ? À quelle date a-t-elle été relevée ? Quelle fut, ce jour-là, la température minimale ?

2. Le 5 août, la température maximale a été de 37 °C et la température minimale de 19 °C. L'écart de température était donc de 18 °C.
a. Calculer l'écart de température le 15 août.
b. Quel jour l'écart de température a-t-il été le plus faible ? Le plus important ?

L'élève doit faire des lectures graphiques de valeurs, d'extrema, d'écarts …
Les questions sont formulées avec le vocabulaire des grandeurs et les réponses attendues sont des grandeurs mesurées. L'idée de variation est sous-jacente. Les auteurs ne cherchent pas à introduire le vocabulaire des fonctions mais restent dans le cadre des grandeurs.

L'activité 2, intitulée « Aire de la baignade », décrit dans le cadre des grandeurs (longueurs et aires) une fonction déterministe (performative). Les questions introduisent progressivement les quatre représentants d'une fonction : programme, formule, tableau, représentation graphique.

Le responsable d'un parc municipal, situé au bord d'une large rivière, veut aménager une aire de baignade surveillée de forme rectangulaire. Il dispose d'un cordon flottant de 160 m de longueur et de deux bouées A et B. On se propose de déterminer comment placer les bouées A et B pour que l'aire de baignade soit maximale.



1. Si la distance de la bouée A à la rive est de 25 m, quelle est la longueur de la zone de baignade ? Quelle est alors son aire ?

2.a. Montrer que la distance x (en m) de la bouée A à la rive varie entre 0 et 80 m.
b. Expliquer pourquoi la longueur de la zone de baignade est égale à $160 - 2x$.
On désigne par $A(x)$ l'aire, en m², de cette zone. Cette aire est donnée en fonction de x. Vérifier que $A(x) = x(160 - 2x)$.

3. Calculer $A(x)$ pour x variant de 0 à 80, de 10 en 10.

4. Dessiner la représentation graphique correspondante.
On choisira, sur l'axe des abscisses, 1 cm pour représenter 10 m et, sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour représenter 400 m².

La première question est formulée en termes de grandeurs. Elle conduit l'élève à construire un **programme** pour calculer une aire en fonction d'une longueur dont la mesure est donnée et accompagnée de son unité (25*m*).
La deuxième question est une reprise de la première mais ici la distance inconnue est désignée par la lettre *x* accompagnée de l'unité de grandeur entre parenthèses (*en m*). Les questions intermédiaires conduisent l'élève à **résumer le programme de calcul par une formule arithmétique** : $A(x) = x(160 - x)$.
Dans la question 3, cette formule peut aussi être comprise comme **une formule algébrique** qui résume un algorithme de calcul (on peut oublier les unités de grandeurs) et qui permet de construire un **tableau de valeurs numériques** indépendamment des grandeurs.
La question 4 invite l'élève à récupérer les valeurs numériques de la question précédente pour construire une **représentation graphique**.
On repère bien, dans cette activité, les quatre représentants d'une fonction : programme, formule, tableau de valeurs, courbe représentative. Le passage des grandeurs aux nombres (d'un cadre à l'autre) se fait via la formule en oubliant les unités. On voit que les auteurs tentent d'abstraire une relation numérique d'une relation entre grandeurs en faisant glisser le vocabulaire du cadre des grandeurs vers le cadre numérique.

<u>Commentaires</u>
Ces deux manuels nous semblent caractériser deux approches didactiques différentes de la notion de fonction.

Dans le premier, les auteurs institutionnalisent, dans la première activité, les objets qui permettent de mettre en œuvre le concept numérique de fonction dans la deuxième activité.

Dans le deuxième manuel, les auteurs n'établissent pas de lien entre l'activité 1 et l'activité 2. Dans l'activité 1, ils proposent un recueil de données statistiques représentées par un graphique. Les températures relevées chaque jour sont le fait du hasard ; il n'y a pas de relation de cause à effet entre la date et la température. On ne peut pas prévoir la température qu'il fera tel jour. La représentation d'une telle situation peut se faire a posteriori avec un tableau de valeurs où figurent les unités ou avec une représentation graphique de ces valeurs ; mais une telle situation ne peut pas se résumer par une formule. Il n'y a pas de raison de « passer à l'algèbre » ; l'élève ne peut décrire cette correspondance fortuite avec le vocabulaire des fonctions que s'il a préalablement conceptualisé la notion de fonction. Les situations qui résultent du hasard ne sont pas propices à une dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre.

Dans les situations déterministes, cette dialectique est facilitée par les différents rôles que peut jouer la formule. Dans le cadre des grandeurs, elle peut résumer le programme de calcul d'une mesure en fonction d'une autre comme dans l'activité intitulée « aire de la baignade ». Elle peut aussi modéliser une classe de situations, et ainsi, d'outil de calcul devenir un objet de savoir institutionnel ; par exemple la formule qui donne l'aire d'un triangle renvoie à plusieurs situations et questions de géométrie élémentaire. Dans le cadre algébrique, la formule peut décrire une relation numérique particulière en résumant l'algorithme de calcul correspondant ou modéliser une classe de situations (par exemple, la relation $y=ax$ regroupe toutes les situations de proportionnalité). Elle peut aussi être considérée comme l'élément d'un ensemble structuré (par exemple ax est un élément de l'anneau des polynômes).

Ainsi la formule est un outil-objet constitutif de l'organisation mathématique du cadre des grandeurs mais aussi un outil-objet du cadre de l'algèbre. De plus elle permet d'établir un pont entre ces deux cadres. D'outil résolutoire dans le cadre des grandeurs, elle devient un objet de l'algèbre comme dans l'activité « aire de la baignade ». Réciproquement, chaque formule algébrique renvoie à une classe de situations arithmétiques ; par exemple, la fonction linéaire renvoie à toutes les situations de proportionnalité propres au cadre des grandeurs.
La formule est donc un maillon réversible dans des chaînes de connaissances qui permet à l'élève d'entretenir une dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre. Elle fonctionne comme un « transposon » qui résume, modélise et « réfléchit » (au sens piagétien d'abstraction réfléchissante) les savoirs sur les grandeurs.

Conclusion

Une analyse succincte des activités des manuels semble confirmer que le passage des grandeurs à l'algèbre est facilité par le recours aux fonctions déterministes, mieux qu'avec des fonctions du hasard. Mais nous avons vu aussi que l'action du professeur est limitée par la culture de l'institution à laquelle il appartient. Ce qu'il peut faire dépend de ses connaissances mais aussi des contraintes institutionnelles.
Il incombe donc à la noosphère d'organiser un curriculum qui permette d'« homogénéiser» les connaissances de la linéarité en arithmétique et en algèbre au collège afin que les futurs professeurs des écoles disposent de moyens de contrôler ce qu'ils ont à enseigner aux niveaux élémentaires.

Bibliographie

Comin E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : Université de Bordeaux 1.

Comin E. (2002). *L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 22, n°2-3, p.141.

Comin E. (2005). *Variables et fonctions, du collège au lycée*. Petit x n°67.

Comin E. (2008). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions*. Non encore publié.

Annexe : Les résultats des élèves de seconde aux questions sur les pourcentages

Le tableau suivant donne les nombres de réussites en 2005-06 et 2006-07 :

	Réussites	Echecs	Total
2005-06	17	11	28
2006-07	28	6	34

Si P_1 et P_2 désignent les fréquences de réussites des deux années, alors les effectifs permettent de supposer que ces deux variables aléatoires suivent une loi normale de moyenne estimée

$p_0 = \frac{17+28}{28+34} \approx 0{,}726$. Alors D=P_1-P_2 suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type

$\sigma(D) = \sqrt{\frac{0{,}726 \times 0{,}274}{28} + \frac{0{,}726 \times 0{,}274}{34}} \approx 0{,}114$, donc $\frac{\mathrm{d}}{\sigma(\mathrm{D})}$ suit une loi normale centrée réduite. Or $\frac{d}{\sigma(D)} \approx \frac{\frac{17}{28} - \frac{28}{34}}{0{,}114} \approx 1{,}898$

La probabilité que la valeur absolue de la variable normale centrée et réduite dépasse 1,9 est 0,0574.

PENSER LA RÉGULATION D'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES, À L'ÉCOLE PRIMAIRE ET AU DÉBUT DU COLLÈGE

Florence ESMENJAUD-GENESTOUX
DAESL Université Bordeaux 2
florencegenestoux@free.fr

1 INTRODUCTION

L'atelier a été l'occasion[1] pour les participants d'exprimer certaines difficultés récurrentes du côté des élèves comme de celui des enseignants, à propos du calcul et des répertoires numériques. Ces constats de difficulté ont ensuite été reformulés pour mieux rendre compte du caractère transactionnel de la régulation didactique[2] : elle se négocie entre les protagonistes concernés (même dans le cas où beaucoup d'éléments demeurent implicites). De ce point de vue, les difficultés des élèves et du professeur pointent des entraves aux délégations de responsabilités programmées par l'enseignant. On peut considérer en effet, que conjointement, chacun à sa mesure et sous l'effet de son bon vouloir, le professeur et chaque élève partagent des responsabilités de nature mathématique (pour contrôler une résolution dans certaines conditions) et des responsabilités de nature didactique (pour conduire l'évolution des connaissances). Ainsi, lorsqu'un élève ne porte pas ce dont le professeur voudrait le charger (soit que l'état de ses connaissances ne le lui permette pas, soit qu'il refuse d'assumer le rôle qui est attendu de lui), le processus de transmission des savoirs butte contre une répartition non satisfaisante de ces responsabilités. Il arrive alors que l'apprentissage des mathématiques ne soit pas au rendez-vous du soutien. Il arrive aussi que la relation didactique se rompe brutalement par un rejet global sur autrui de la responsabilité de l'échec : « lacunes trop importantes », « manque de motivation », « milieu culturel inadapté », etc. ; mais aussi « ce prof est nul », « l'établissement n'est pas à la hauteur », etc. Ces critiques généralisantes sans appel, souvent injustes car seulement ponctuellement vérifiées, surgissent lorsque les difficultés persistent malgré les multiples tentatives, lorsque les moyens d'aider viennent à manquer. Approcher les difficultés d'apprentissage et d'enseignement au plus près des connaissances et plus particulièrement sous l'angle d'un partage de responsabilités (ce qui est l'objet de cette présentation), présente l'intérêt (pour l'enseignant ou pour le formateur qui constate des difficultés) d'entretenir l'espoir d'amélioration en intégrant aux perspectives d'interventions didactiques des prises d'information sur les comportements (qui d'ordinaire sont analysés indépendamment des savoirs et de manière exogène aux questions didactiques, par référence à la pédagogie, psychologie, psychanalyse, etc.).

---

[1] Notamment par un questionnaire reproduit en annexe.

[2] La dimension didactique précise d'autres éléments que la dimension relationnelle, pédagogique ou cognitive, même si elle est étroitement associée avec ces dimensions. L'interaction est didactique dans la mesure où elle est relative à la fois à des savoirs mathématiques et à une intention de modifier des connaissances mathématiques.

L’article s’organise en trois parties.

La première souligne des effets négatifs sur les pratiques d’enseignement de certaines représentations, elle propose des alternatives pour réhabiliter ce qui dans le rôle du professeur a été dénigré au fil du temps dans l’environnement professionnel et au delà.

La seconde décline une diversité de rapports au savoir, et pour chacun d’eux, replace les difficultés les plus fréquentes en les réinterprétant comme une résistance à porter certaines responsabilités didactiques.

La dernière partie examine le rôle émancipateur des devoirs du soir, en listant plusieurs enjeux de dévolution.

2 PENSER LES REGULATIONS DIDACTIQUES

2- 1 Enseigner le sens et les routines

La mise en avant de l’apprentissage par résolution de problèmes a introduit une dissymétrie dans les discours et dans les pratiques. L’entraînement en a perdu de sa dignité, il a été dévalué par rapport au travail sur la compréhension. Perçue comme un antagonisme, la dualité sens / algorithme a négativement influé sur la répartition des rôles entre les enseignants, les élèves et les accompagnateurs de l’étude personnelle (Esmenjaud-Genestoux, 2000). Lorsque certaines interventions peuvent « s’externaliser » (hors du fonctionnement principal), les acteurs les mieux placés se préoccupent du noble ouvrage, les déclassés s’attèlent aux tâches ingrates et néanmoins indispensables (par exemple rendre les produits élémentaires très familiers). Remettre à l’honneur les performances techniques des élèves en s’appuyant tout autant sur une modalité binaire[3] provoquerait un effet analogue : une dépréciation d’un autre pan du rôle du professeur. Car la transmission de l’usage des savoirs (et non seulement de leur texte), est une affaire d’équilibre.

En effet, routine et réflexion traduisent deux formes de rapport au savoir également utiles et respectables. Pour celui qui maîtrise un domaine mathématique, elles se complètent en fonction des situations rencontrées :

- l’automatisme soulage partiellement une réalisation complexe : une stricte application détachée du sens mais rapportée à des conditions générales bien identifiées, produit avec sûreté un résultat relativement prévisible;

- le raisonnement assure une utilisation vigilante dans les circonstances périlleuses, en interrogeant localement les singularités.

L’enseignement doit donc combiner des apprentissages qui ne requièrent ni la même durée, ni les mêmes aménagements, ni les mêmes arguments pour négocier les efforts des élèves. L’ignorance ou la confusion de ces différences provoquent bien des

[3] En opposant par exemple, le normal / le pathologique ou le mérite / la déviance, etc.

malentendus. En revanche, en distinguant les connaissances des savoirs, il est possible de souligner les particularités, tout en resituant l'ensemble dans un même processus de transmission.

2-2 Convertir les observations de difficulté en décisions didactiques

L'idée que l'on se fait des difficultés des élèves s'est aujourd'hui considérablement enrichie : elles ne sont pas systématiquement explicables comme un manque qui se comble par supplément d'informations. La manière de concevoir les régulations s'en est trouvée complexifiée. Comment intégrer, dans le cadre d'un enseignement, la prise en considération de dispositions très personnelles (voire intimes), sans perdre en compétence et en légitimité d'intervention ? Comment penser les adhésions au changement, lorsque désirs, curiosités ou motivations sont si subtiles que ni les proches, ni les thérapeutes ne prétendent qu'il est aisé de les susciter ? Comment l'enseignant qui perçoit un malaise, des craintes, des réticences, un comportement fuyant, etc. chez les élèves peut-il coordonner ses décisions didactiques avec ce qu'il observe finement dans des registres très éloignés ?

Les convergences psychopédagogiques semblent plus accessibles à l'occasion d'une « situation pour apprendre », car des enjeux variés y imbriquent le cognitif et le conatif. L'émulation qui en résulte finira, on peut l'espérer, par gagner les timides, les introvertis ou les plus défensifs. Voilà que surgit encore une dissymétrie professionnelle: le cas de ceux qui hésitent à se lancer dans la recherche d'une solution originale a été pris en considération par la Recherche et par les praticiens, mais quelle étude de ceux qui traînent des pieds devant le travail personnel ?

2-3 Rapporter les comportements aux situations

Bien souvent, le premier travail mathématique qui est confié en autonomie à l'initiative des élèves consiste à « apprendre les tables ». Une fois que la signification des produits a été construite en classe, une fois que les résultats ont été établis et officiellement validés, une fois qu'ils ont été réordonnés et répartis dans plusieurs listes, aux élèves de prendre le relais. Il est devenu fréquent[4] en effet de faire principalement reposer la fiabilité du répertoire multiplicatif sur des capacités individuelles de mémorisation[5] et sur la ténacité familiale devant ce type d'effort (supposé accessible à tous, adapté aux moins instruits). En rendant la teneur mathématique de cette activité de moins en moins perceptible[6], une large participation de l'entourage a été sollicitée. Mais

---

[4] Autrefois, une grande part de l'entraînement était collectivement aménagé en classe et par le truchement d'exercices fréquents répartis sur une longue durée. Le nombre d'exercices dans les manuels anciens témoigne de cette préoccupation institutionnelle. La mise en mémoire n'était pas autant séparée de l'usage.

[5] Les recherches pléthoriques sur la mémoire et les métaphores informatiques maintenant vulgarisées renforce cette représentation dichotomique : d'un côté des données enregistrées presque indépendamment des futures utilisations (« comme une poésie », entent-on souvent) et de l'autre une pratique de calcul qui les utiliserait en toute neutralité.

[6] Dans les années 80, l'espoir d'une transversalité des apprentissages et d'un stockage mnésique d'informations inertes et détachables a conduit les programmes de 1985 à sortir l'apprentissage des tables

qu'est ce qui est attendu de la part des accompagnateurs domestiques de l'étude ? Faire répéter à l'identique de nombreuses fois les tables dans l'ordre ?

La table de multiplication est un bon paradigme pour aborder des questions didactiques importantes et relativement généralisables. Ce modeste répertoire de théorèmes (avec réciproque) est facilement identifiable et se trouve au cœur des négociations relatives à la scolarité obligatoire (une institution dans laquelle le professeur porte un grand nombre de responsabilités didactiques).

Les gens de métier accrochent les performances ou les attentes à des catégories d'exercices ; ils identifient ainsi plusieurs manières de bien connaître un même savoir. Des questions peuvent se regrouper parce qu'elles sollicitent toutes (pour le professeur) le même produit 5 x 8, tout en ne mobilisant pas (chez les élèves) le même degré de familiarité avec la compréhension ou le maniement de cette formule :

- 8 fois 5 = ? ;

- récite la table (pour un débutant, décliner les multiples de 5 est bien plus facile que ceux de 8) ;

- « Combien de sièges dans le hall d'attente, s'il y a 5 rangées de 8 fauteuils ? » ;

- effectue 542 divisé par 5, etc.

Chaque situation diffère selon la durée qui est laissée à l'élève pour répondre, selon qu'il existe (ou non) à portée de main une calculatrice, une collection intermédiaire d'objets ou de signes tracés sur une feuille de papier, etc. Mais le recours au matériel disponible dépend aussi fortement de l'état des connaissances de l'élève (il peut ne pas établir de lien entre la question et ce qu'il pourrait établir avec ce qui est à sa disposition ; l'usage du matériel peut lui paraître une régression inutile, etc.).

Les erreurs prévisibles sont aussi différentes d'une situation à l'autre : une « erreur de 1 » dans le cas d'un dénombrement (5 x 8 = 41), une « erreur de proximité » relative à une configuration en table (5 x 8 = 32), etc. En cas de réponse correcte, la confiance accordée à sa production (par l'enseignant et par l'élève) dépend aussi de la situation : réciter sur commande n'est pas l'équivalent de citer à bon escient de son propre chef ; réitérer des doubles (10, 20, 40) n'est pas l'équivalent d'énoncer directement une formule ; attendre le verdict de celui qui sait n'est pas l'équivalent de vérifier soi-même par un étayage (huit fois, c'est dix fois moins deux fois) …

2-4 Une familiarité avec le savoir qui s'intensifie

Il faut souvent plusieurs années pour construire les connaissances qui soutiennent la compréhension d'un savoir, pour l'institutionnaliser sous une forme savante et opératoire, pour rôder des techniques qui seront contrôlables par l'entendement (savoirs et connaissances s'agrègent dans un répertoire cohérent de résolution). Lorsque des difficultés apparaissent, il n'est pas aisé de conserver une vue

de multiplication du chapitre des mathématiques. De nouveaux textes officiels organisaient dans le même temps un essor rapide du secteur périscolaire (Esmenjaud-Genestoux, 2000).

d'ensemble sur un long processus de transmission au cours duquel les formes de connaissances évoluent et la familiarité de l'élève s'intensifie.

Aussi, pour penser les régulations sans cassure ni oscillation, j'ai replacé dans un continuum les intentions didactiques relatives à un savoir donné auquel j'ajoute les connaissances qui lui sont rattachées. Le lent déroulement de l'enseignement de ce savoir est alors balisé par des indicateurs didactiques qui différencient sept étapes[7] dans la familiarité avec ce savoir. Souvent, les *niveaux de familiarité* ne seront pas tous visés durant la même année scolaire, ni même tous programmés dans un cursus scolaire (chaque filière décide d'un certain degré d'approfondissement avec les savoirs). Mais en ce qui concerne les produits élémentaires (tout comme les principaux savoirs de base), il est attendu en fin de collège un usage rapide et fiable.

3 PARTAGER DES RESPONSABILITES DIDACTIQUES AVEC LES ELEVES

En théorie des situations, le modèle de base pour analyser l'interaction entre professeur et élève comporte un *milieu* et un *contrat didactique* qui légitiment et contraignent la relation d'enseignement/apprentissage. Ce « contrat »[8] répartit les connaissances mathématiques nécessaires à la résolution d'une question plus ou moins problématique entre les trois protagonistes conceptuels que sont les acteurs (le professeur et les élèves dans des rôles asymétriques) et ce milieu[9]. On peut considérer que lors de l'interaction effective, chaque partenaire accepte ce contrat ou « tire » dessus pour tenter de porter moins que prévu. Les difficultés des élèves, en bloquant certaines négociations du contrat initial, créent des difficultés pour l'enseignant. On peut alors penser les régulations didactiques comme des réaménagements du milieu et du contrat, en fonction de ce que l'enseignant observe et interprète des comportements des élèves.

Il semble raisonnable de présupposer[10] que porter des responsabilités engage des connaissances, tout en considérant qu'une prise de responsabilité (ou une délégation)

[7] Le modèle est construit en faisant glisser, une à une, six responsabilités didactiques des mains du professeur vers celle de l'élève. Les niveaux de familiarités sont détaillés dans Esmenjaud-Genestoux, 2000 ; les responsabilités didactiques dans Esmenjaud-Genestoux, 2008. Une liste des responsabilités figure en annexe. Les noms des différents niveaux sont à considérer comme un simple étiquetage au sein de la modélisation. Chaque terme (aptitude, exécution, etc.) ne manque pas de faire écho au langage courant ou à d'autres usages professionnels, ce qui a créé dans l'atelier quelques malentendus momentanés.

[8] Il ne s'agit pas d'un contrat au sens habituel du terme, où les éléments seraient explicités et consignés avant acceptation mutuelle. J'adopte ici le point de vue du professeur qui suit ses objectifs et décide a priori de ce qu'il va porter et de ce qu'il va déléguer ou « dévoluer » (s'il ménage des conditions favorables à la prise de responsabilité par les élèves pour soutenir ce qui serait sinon une simple injonction, soit verbale, soit contrainte par les conditions).

[9] En effet, tout se passe comme si l'enseignant incorporait certaines de ses connaissances mathématiques dans les conditions de la résolution, de manière à canaliser la mobilisation des connaissances des élèves.

[10] Ce point de vue n'est pas universellement partagé : dans de très nombreuses interactions sociales actuelles, l'expression « prends tes responsabilités » est synonyme de « je me décharge des conséquences, c'est toi le responsable des éventuels ennuis ».

s’inscrit dans une marge de transaction. Il arrive qu’un élève refuse une responsabilité, bien qu’il dispose des connaissances permettant d’en assumer les conséquences ; il arrive aussi qu’un professeur (ou un parent) charge un élève d’une responsabilité mathématique ou didactique qu’il n’est pourtant pas en mesure de porter sans prendre de risques.

Mes modélisations cherchent à rendre compte des dépendances qui existent entre le niveau de familiarité qu’entretient un élève avec le savoir visé et sa manière de négocier le contrat didactique, autrement dit à rapprocher la manière de connaître un savoir avec les responsabilités didactiques qui sont ou non acceptables de porter relativement à l’usage et à l’étude de ce savoir. Je déclinerais ici des difficultés relativement fréquentes chez les élèves du primaire et du collège, en les plaçant par rapport aux deux modèles que sont, d’une part les 7 niveaux de familiarité et d’autre part les 6 responsabilités didactiques (joints en annexe).

3-1 Collaboration au projet didactique (première responsabilité didactique de l’élève, niveau 2 de familiarité)

Il arrive qu’un élève se contente de résoudre dans l’immédiateté (comme dans un jeu où l’important est de participer et si possible de gagner, sans anticiper à moyen terme d’autres parties). Or le professeur a besoin de recueillir une adhésion de nature didactique. En effet, l’engagement de l’élève dans la seule dimension mathématique ne suffit pas pour négocier une étude : établir « 8 fois 5 » peut-être perçu comme un exercice qui ne constitue pas un événement à retenir (de la même manière que celui qui effectue le produit de 51 par 17 ne cherche pas en général à en conserver longtemps le résultat).

Plus difficile encore pour un professeur de déléguer un apprentissage personnel si l’élève n’envisage de la relation avec son enseignant que la dimension interindividuelle (le contenu mathématique passant au plan secondaire). Les modes d’opposition des élèves sont variés et leurs résistances plus ou moins discrètes. Une réponse à la question posée par l’enseignant peut être fournie par l’élève, mais si elle est établie par son voisin de table ou par un parent, elle ne satisfait qu’en apparence au contrat scolaire. Avec la banalisation des aides qui désinhibent la difficulté, de nouvelles stratégies d’évitement se développent. Par exemple : amadouer les adultes (ou les élèves tuteurs) en les flattant dans leur rôle et négocier une « aide générale » (un discours) pour mieux les détourner d’un objectif spécifique (une situation précise) qui les impliqueraient en tant qu’apprenant.

Il arrive qu’un élève préfère se retrancher dans un rôle de victime vulnérable[11]. S’il devient plus facile d’afficher des troubles d’apprentissage que d’assumer ce qui a été transmis, il est alors en effet plus rentable de renforcer le diagnostic généraliste en minimisant ses petites réussites locales (sur tel ou tel savoir) qui sinon engageraient à reconduire le succès sur ces domaines. Cette forme extrême de négociation à la baisse du contrat didactique se rencontre assez fréquemment dans les dispositifs d’aide (soit à l’extérieur de l’établissement scolaire, soit en classe lors des phases de différenciation).

[11] Actuellement, la victimisation provoque des effets importants dans toutes sortes d’institutions, y compris dans l’univers judiciaire. L’institution scolaire n’est pas épargnée par ce large phénomène social.

Malheureusement la revendication de la victime (ou de sa famille) à l'inaptitude désarme complètement la relation didactique : celui qui est en position de réguler ne peut compter sur aucune coopération didactique de la part de son partenaire (de plus, s'il se laisse passivement porter sur le plan didactique, celui-ci est souvent dans le même temps très actif pour interagir sur d'autres plans).

3-2 Complicité didactique (2ème responsabilité, niveau 3)

Il arrive qu'un élève ne conçoive son rôle que comme devant répondre à des questions non prévisibles, dont seul l'enseignant a le secret. N'anticipant pas le contenu des futures évaluations, il s'y prépare mal.

Pour fabriquer ses tours de main, l'élève gagne à se décentrer de la seule production de réponse pour s'intéresser aux conditions de résolution et reconnaître les situations qui appellent telle ou telle procédure, en particulier les questions-types. Par exemple, pour établir un produit par 5, la parité du multiplicateur renseigne sur la terminaison du résultat, car dans une somme réitérée de 5, il est commode de grouper les termes deux à deux ; 8 fois est le double d'une formule peut-être déjà connue : 4 fois. Si c'est 5 fois 8 qui est demandé, il peut donc être plus commode de penser 8 fois 5. Par contre, en référence à une procédure additive, le choix d'un petit opérateur est généralement préférable (3 fois 7, plutôt que 7 fois 3). Choisir l'ordre des facteurs peut renouveler le questionnement en faisant vivre la propriété de commutativité (c'est une variable didactique qui peut être « sentie » par un élève).

Pour l'enseignant, il est clair que s'il a déjà posé les « mêmes » questions de nombreuses fois dans la classe, c'est un indicateur de priorité pour conduire l'étude personnelle (ces questions sont importantes pour l'institution). C'est par l'intermédiaire de nombreux exercices de même catégorie[12] qu'un élève peut distinguer le variable de l'invariant, sentir des fréquences d'occurrence et esquisser des domaines d'application. Le choix des assortiments de questions[13] est donc pour l'enseignant un levier de dévolution. Lorsque les conditions sont réunies (une familiarité avec le savoir suffisante, un intérêt pour les questions-types et un assortiment qui met en scène ce qui est identifiable par l'élève), une certaine complicité didactique peut alors s'établir entre professeur et élèves.

3-3 « Utiliser seul en présence de » (3ème responsabilité, niveau 4)

Les mathématiques offrent des occasions précoces de vérifier soi-même la validité d'une réponse. Parfois les élèves ignorent ce pouvoir ; certains apprécient vivement qu'on le leur montre, d'autres semblent s'en désintéresser.

---

[12] Dans les manuels actuels, l'éventail des exercices peut être si large, que les élèves ne rencontrent que rarement les questions pourtant considérées comme primordiales. La sélection de ce qui est donné le soir soulève aussi des questions de priorité : par manque de temps, tout ne peut être étudié selon le même régime. Quelques fils rouges sur de moyennes durées peuvent être plus avantageux qu'un émiettement exhaustif au quotidien.

[13] Un *assortiment didactique* est une collection de questions « semblables », réunies sous une même intention didactique, ordonnée en vue d'un effet didactique, et réalisable dans une unité de temps didactique (Esmenjaud-Genestoux, 2000).

Il arrive qu'un élève quémande activement l'approbation de celui qui sait, comme en témoigne cette réaction devant l'attitude de neutralité affichée par un enseignant : « *mais si tu me regardes comme ça, je ne peux pas savoir si j'ai juste !* ». Cette élève, rompue aux dispositifs de soutien[14], s'autorise dans la révolte à apostropher l'adulte pourtant investi du pouvoir institutionnel. Mais elle ne s'aventure pas à contrôler sa réponse par elle-même, comme si elle estimait trop grand le risque de se fourvoyer. Un risque d'ailleurs tout à fait réaliste, car elle se trompe encore souvent dans une vérification (sa familiarité avec les connaissances nécessaires est encore insuffisante pour porter cette responsabilité).

Apprendre à se comporter comme si on était seul, y compris en présence d'autrui est une étape nécessaire au développement de l'autonomie[15]. Une plus grande familiarité avec un répertoire d'action développe localement la confiance en soi. En effet, pouvoir remplacer une résolution par une autre (généralement plus économique), ouvre à un nouveau rapport au savoir : celui de l'usage éclairé. Le gain d'efficacité apporté par la formalisation (l'usage direct du savoir comme d'un outil) se paye d'une perte de signification locale (la compréhension passe alors en arrière plan). L'application d'un théorème amenuise donc momentanément le contrôle de l'acteur sur la situation. Mais s'il dispose en outre dans son propre répertoire des moyens d'étayer ses prises de décision en cas de besoin, il dépend beaucoup moins des aléas d'une résolution.

3-4 Acceptation d'une acculturation (4ème responsabilité, niveau 5)

Les exigences scolaires relatives au calcul ne sont pas toujours perçues dans la société comme légitimes. Pourquoi enseigner encore des pratiques qui peuvent être mécaniquement remplacées ou soulagées ? « *Moi j'arrive à compter très vite sur mes doigts, j'ai pas besoin d'apprendre les tables !* ». Il arrive qu'un élève rechigne à lâcher le confort d'une habitude (égrener rapidement de 5 en 5 en contrôlant des doigts le multiplicateur). Pourquoi l'astreindre à une association directe[16] du nombre 40 aux produits 8 x 5 et 5 x 8 ? La tâche est longue, fastidieuse, peu gratifiante pour le professeur comme pour les élèves. Sans parler du désagrément de se frotter à nouveau au risque d'erreur (prendre ou être pris en défaut, alors qu'il existe déjà un autre moyen commode de se tirer d'affaire).

Pourtant pour se dérouler, l'enseignement a besoin d'estomper les particularités des connaissances locales (les multiples de 5, les multiples de 2, etc.) et les astuces personnelles (« *moi je connais par cœur 4 fois 8 : c'est l'âge de ma mère !* ») pour les

---

[14] Il s'agit d'une élève de CE2, longuement suivie par les maîtres E du RASED.

[15] Winicott (1975), ou Cyrulnick (2006) par exemple, ont étudié les paradoxes de l'accompagnement à l'autonomie.

[16] L'ergonomie des méthodes n'est d'ailleurs pas toujours localement flagrante ; les « premières » tables de 2, 5 et 10 ne sont pas les meilleurs choix didactiques pour mettre en évidence la puissance d'une formulation directe.

remplacer officiellement par un savoir unifié. Un jour dans la classe, la Table de Pythagore devient exigible en tant que référence[17] plus universelle et plus exportable.

Il arrive que ce changement de statut (c'est le savoir qui doit être désormais cité directement) soit interprété à tort par les élèves comme une demande de formulation publique un peu empesée (qui satisferait le professeur), tandis que l'établissement en privé du résultat pourrait demeurer ce qu'il a toujours été (les élèves continueront d'agiter leurs doigts, même si l'idée est intégrée qu'il faut maintenant le faire en secret). Or même pour un théorème aussi rudimentaire qu'un résultat numérique, une mise en mémoire du texte ne suffit pas pour en user en toute indépendance lors d'un raisonnement ardu ou pour exécuter un algorithme complexe. De plus, chaque équivalence doit pouvoir être pensée avec un recul conceptuel suffisant, permettant de décomposer[18] 40 en un produit de 5 par 8 (même si au début du processus, la formule n'a d'abord été perçue qu'en privilégiant une seule direction de lecture).

Il arrive que des réactions de méfiance vis-à-vis de ces nouvelles exigences soient confortées hors de l'école par des déclarations prestigieuses. La psychanalyse défendait ardemment le jeu et la notion de plaisir, les neurosciences provoquent en annonçant que le cerveau humain n'est pas adapté au calcul. La tentation est donc grande de ne s'intéresser que médiocrement aux formes convenues de rédaction, a fortiori si l'on est déjà dépisté comme étant d'intelligence précoce. Pourtant, la communauté savante reconnaît l'intérêt d'une standardisation pour la diffusion des mathématiques[19], elle n'a pas à être confondue avec des manies professorales.

Ce ne sont pas les premières découvertes, mais l'étude approfondie des savoirs qui ouvre la voie de la spéculation intellectuelle : exploration des possibilités de l'outil, connaissance fine des frontières de validité et des cas limites (par exemple les facteurs un ou zéro). Cette étude n'a pas la même visée pratique et individuelle que l'apprentissage des connaissances nécessaires à l'action. Les savoirs ont aussi leur utilité sociale : ils sont les instruments culturels d'une plus large communication, d'une acculturation qui passe par l'acceptation individuelle d'un certain standard. Des méthodes déclarées comme expertes au sein d'un groupe rendent leur utilisation plus anonyme, ce qui facilite qu'un contrôle collectif s'exerce sur des missions endossables par des praticiens interchangeables.

---

[17] Cette Table s'insère dans un vaste répertoire de savoirs : l'addition réitérée et le produit cartésien renvoient à une même opération qui s'appelle la multiplication ; le « fois » qui distingue multiplicateur et multiplicande peut se remplacer avantageusement par un nouveau symbole et une symétrie de facteurs garantie par la commutativité, etc.

[18] Un autre choix didactique consiste à accroître au contraire le nombre de « formules à mémoriser » de manière à les simplifier (un seul sens de lecture) : tables de soustraction, identités pour développer ou pour factoriser, formules pour déterminer la vitesse ou la durée ou la distance parcourue, etc. Ce choix de la taille des répertoires de théorèmes dépend aussi du choix des méthodes de résolution qui seront enseignées (application arithmétique ou équation algébrique, algorithme de multiplication usuel ou à la russe, etc.).

[19] Nordon (1993), pp 60-62.

3-5 Conquête d'une expertise (5ème responsabilité, niveau 6)

L'érudit préfère parfois demeurer dans le cercle moins contraignant de l'amateurisme. La compétition ne séduit pas tout le monde. La promesse d'un plus grand pouvoir peut effrayer, jusqu'à encourager la fuite des responsabilités. Il arrive qu'un élève, tout en reconnaissant l'intérêt d'un formalisme culturellement éprouvé, ne s'astreigne pas de lui-même à la performance. Confortablement installé dans le giron didactique, il mise alors sur une bienveillance éternelle pour ses hésitations.

3-6 Entretien des connaissances (6ème responsabilité, niveau 7)

La quasi-totalité des élèves sortent de la scolarité obligatoire en sachant manier la formule 2 x 5 = 10 (même s'il ne maîtrisent pas tout, et de loin, des significations de la multiplication). Mais un très grand nombre d'adultes instruits et parfaitement intégrés socialement hésitent pour énoncer le produit de 7 par 8. Pour l'enseignant comme pour l'élève, la présentation en tables est un instrument trompeur, car elle uniformise le contenu (tous les produits ne s'apprennent pourtant pas au même rythme) et dilue les questions sur un grand nombre de résultats[20]. S'émanciper temporairement de l'organisation canonique permet de focaliser plus longuement les efforts sur quelques cibles à conquérir. C'est ainsi que l'enseignant peut contribuer à soulager l'étude personnelle (il partage encore avec les élèves des responsabilités didactiques). Un accompagnement spécifique, sur le long terme, sollicite régulièrement et sans relâche ce qui est le plus ardu, jusqu'à ce qu'il devienne une évidence pour les élèves.

4 LES DEVOIRS DU SOIR : DES ENJEUX D'AFFRANCHISSEMENT DIDACTIQUE

Ce que l'élève réalise ici et maintenant trouve sa finalité dans la prévision d'autres résolutions futures et potentielles qui s'effectueront en dehors de toute protection didactique. Le travail personnel est un bon instrument pour émanciper progressivement en déclinant différentes formes de contrats, encore faut-il harmoniser le contenu du devoir prescrit avec les délégations de responsabilités et le niveau de familiarité entretenu par les élèves.

Le rituel scolaire du travail du soir comporte aussi ses enjeux didactiques. Il ne s'agit pas de prolonger simplement ce qui s'est déroulé en classe sous la conduite de

[20] Le chapitre 7 de ma thèse (Esmenjaud-Genestoux, 2000) détaille ces différents aspects relatifs à la taille du répertoire qui joue un rôle très important dans les négociations du travail personnel. La réorganisation et la compilation apportent une aide en fin de processus, lorsque la quasi-totalité du répertoire est intégré. Dresser un inventaire de ce qui sera su un jour, présente aussi un encouragement : l'étude à venir semble fructueuse. Par contre, durant la période entre les niveaux 2 et 5 de familiarité, c'est une réduction du répertoire qui soulage l'apprenant. Dans un autre domaine, certains professeurs de collège en vue de réduire le temps de copie, fournissent aux élèves de 5ème des polycopiés écrit serrés, pour qu'ils disposent d'un coup de la liste exhaustive des propriétés des quadrilatères qui deviendront exigibles. L'effet d'accumulation est alors rédhibitoire pour les collégiens qui n'ont qu'une faible autonomie d'étude personnelle : ils se démobilisent par découragement et n'apprennent finalement aucune propriété (même ceux qui d'ordinaire placent tous leurs efforts dans la mémorisation).

l'enseignant[21]. L'étude personnelle rend compte d'une dimension auto-didactique qui nécessite des prises de responsabilités[22].

Pour s'approprier ce qui lui a été enseigné, l'élève doit pouvoir mobiliser ses connaissances hors du contrôle direct de l'enseignant. Comme il n'est pas réaliste d'espérer une autonomie immédiate sur tout support, et pour maintenir une certaine équité sociale, les instructions officielles ont restreint ce qui pouvait être prescrit aux jeunes écoliers du primaire. Depuis 1956, la généralisation des études surveillées, puis de dispositifs de plus en plus diversifiés a créé des écarts considérables entre les directives et les pratiques effectives ; écarts bien délicats à négocier avec les familles, d'autant que les justifications fournies de part et d'autre sont souvent incompatibles.

Le plaisir est fréquemment présenté comme adjuvant de l'apprentissage[23]. Il arrive que les « activités de découverte» intégrées dans les manuels en début de chapitre soient données aux collégiens au titre de préparation du cours, pour économiser le temps de face à face pédagogique et sous couvert (slogan bien polysémique) d'un « travail de recherche ». L'équilibre est délicat à trouver entre ce qui n'est faisable qu'avec l'intervention d'un professionnel et ce qui va faire progresser l'autonomie de l'élève. Les propriétés didactiques du milieu qui transite entre la classe et son domicile jouent alors un rôle essentiel.

Datant de l'époque où le calcul humain était incontournable, certains exercices d'entraînement recèlent des richesses didactiques que les pratiques enseignantes ont perdues sous l'effet de phénomènes multiples (Esmenjaud-Genestoux, 2000). Or, sur le domaine restreint du répertoire multiplicatif, une culture didactique partagée[24] avec les élèves et les accompagnateurs domestiques pourrait à nouveau se déployer : indépendance de chaque produit élémentaire, pratique de l'étayage mathématique, supports plus adaptés que des tables (un matériel auto-correctif permettant des tris selon plusieurs critères et des variations de taille et donc de durée), etc.

En reprenant une à une les responsabilités didactiques qu'un étudiant aguerri devra un jour porter seul, on peut lister plusieurs enjeux de l'étude personnelle (à chaque type d'enjeu correspond un type de contrat et une adaptation de milieu ; tous les enjeux ne sont pas d'emblée cumulables).

---

[21] Il s'agit encore moins de le remplacer, en demandant aux élèves de terminer ailleurs ce qui n'a pas pu être fait en classe : les devoirs deviendrait alors d'autant plus lourds que les élèves sont lents ou faibles et la professionnalité du rôle du professeur n'apparaîtrait plus aux yeux des protagonistes.

[22] Beaucoup d'élèves se défaussent de leurs obligations d'étude dès lors qu'ils peuvent rapporter en classe la preuve qu'ils ont « fait » l'exercice prescrit (éventuellement, « fait faire » par autrui), comme si l'enseignant n'attendait qu'une résolution de plus.

[23] Le ton des négociations est facilement enjoué, mais les conditions effectives sont plus rarement à la hauteur de ce qui était promis (Esmenjaud-Genestoux, 2000).

[24] (Esmenjaud-Genestoux, 2006).

4-1 Essayer de se débrouiller seul (1ère responsabilité didactique)

Avoir tenté une réponse, ce n'est pas forcément « avoir juste ». Parents et enseignants rivalisent parfois pour traquer la moindre erreur dans le cahier du soir, quitte à perdre l'authenticité de l'initiative et à masquer les difficultés réelles d'apprentissage.

4-2 Devenir capable de (2ème responsabilité)

L'objectif des devoirs n'est pas la réalisation supplémentaire de tel ou tel exercice, mais l'acquisition des connaissances qui permettront de résoudre désormais toute une catégorie de questions. L'élève qui fournit une réponse se sent peut-être quitte, mais l'essentiel est ailleurs (par exemple une résolution erronée pourra être plus profitable qu'une réponse juste lorsque la correction amène une prise de conscience).

L'élève qui étudie seul transporte avec lui des connaissances didactiques (d'autres connaissances didactiques plus sophistiquées seront cristallisées dans le milieu) : il a d'abord besoin de se montrer bienveillant vis-à-vis de ses premières tentatives, puis sa curiosité intellectuelle se déplacera vers l'appréciation des assortiments qui lui sont proposés, vers l'identification de « bruits » dissonants et de questions « semblables » qui sont les représentants d'une catégorie de questions.

4-3 Se sentir sûr (3ème responsabilité)

A l'occasion d'abord de la correction, puis au cours de son travail personnel, les rétroactions négatives sont utilisées pour, progressivement, devenir plus exigeant avec soi-même. Une certaine mémoire didactique renseigne celui qui étudie : il identifie plusieurs types d'erreurs, il traque celles qu'il produit encore trop fréquemment bien qu'elles soient significatives de ce qui est à comprendre. Il est à remarquer que disposer de ces critères d'appréciation des réponses fabrique plus sûrement la confiance en soi qu'une suite de rétroactions positives[25].

4-4 Fournir la réponse standard (4ème responsabilité)

Il arrive un moment où l'institution scolaire ne se contente plus d'un résultat juste : la réponse doit satisfaire aux canons officiels. L'entraînement personnel inclut alors la capacité à répondre dans les formes convenues.

4-5 Organiser son propre entraînement (5ème responsabilité)

Le travail individuel présente l'avantage de s'adapter au rythme de chacun. Sous une conduite responsable, l'étude peut se prolonger si besoin au-delà de la prescription du professeur (ou la réduire dans certains cas). Encore faut-il disposer de critères d'arrêt

---

[25] Il y aurait beaucoup à dire sur le rôle que l'on fait jouer aux réussites chez les élèves stigmatisés comme étant en grande difficulté. Une méconnaissance des conditions locales (des généralisations) et l'absence de coordination entre des savoirs psychologiques et didactiques peuvent conduire, même avec la meilleure compassion du monde, à des catastrophes, car la soi-disant réparation du problème ne fait souvent qu'entretenir ce problème.

et distinguer des cibles particulières : ces connaissances font partie intégrante du répertoire de résolution.

4-6 Veiller à l'état de fonctionnement (6ème responsabilité)

Bien qu'un objectif d'apprentissage à court terme soit officiellement attaché au devoir (le chapitre en cours), chaque exercice sollicite en réalité de nombreuses connaissances plus ou moins anciennes. Maintenir une fiabilité à long terme devient alors un enjeu personnel. A l'occasion d'une hésitation, un travail ciblé de révision peut se décider dans l'intimité de l'étude.

5 CONCLUSION

Dans de nombreux cas, les difficultés des enseignants et des élèves peuvent s'expliquer comme un décalage de décisions. Des décisions qui isolément sont souvent légitimes, mais qui se révèlent inadaptées aux circonstances du moment. N'est-il pas paradoxal de reprocher à un élève d'être « trop scolaire » ? L'expression désigne celui qui applique stricto sensu les consignes explicites, mais qui semble ne jamais devoir s'affranchir de sa tutelle. En s'accrochant à un « métier d'élève » figé, il conserve des attitudes qui jusqu'alors avaient fait leur preuves, alors qu'il serait temps de porter de nouvelles responsabilités didactiques (qui étaient au début du processus à la seule charge du professeur).

L'idée que l'aide aux élèves faibles et que l'organisation de l'entraînement ou du travail à la maison nécessitent moins de compétences didactiques que l'élaboration des leçons est malheureusement répandue. La mise en place d'une aide à l'étude ne rencontre pas seulement la question vive des effectifs (il n'est d'ailleurs pas si aisé d'aider un seul élève à la fois), même s'il reste vrai qu'un trop grand nombre d'élèves avec des difficultés inévitablement variées complique (voire compromet) la réalisation. Dans « l'institution » d'un soutien scolaire, l'ordre des priorités didactiques est modifié par rapport à ce qui est habituel dans le fonctionnement principal (par exemple l'erreur change totalement de statut ; une aide ponctuelle à la réponse juste ne peut se transformer en moyen d'aider l'apprentissage ; etc.). Aussi, généraliser les dispositifs de soutien sans qu'une réflexion ne soit menée sur la nature didactique de ces interventions, risque non seulement de décevoir, mais aussi de bouleverser l'équilibre précaire des négociations permettant l'enseignement ordinaire.

<u>Bibliographie</u> :

Brousseau G. (1985), *La multiplication au CE1*, IREM de Bordeaux.

Cyrulnick B. (2006), *De chair et d'âme*, Odile Jacob.

Esmenjaud-Genestoux F. (2000), *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques*, thèse, Univ Bordeaux 1.

Esmenjaud-Genestoux F.(2001), Médiation entre la classe et le travail à la maison : le rôle des assortiments , in *Actes du Séminaire national de Didactique des Mathématiques*, DIDIREM.

Esmenjaud-Genestoux F. (2004), « 7 fois 8 ? $(a + b)^2$? La mémorisation des réponses relève-t-elle de la responsabilité des professeurs ? », *Le bulletin vert*, n° 454, sept-oct 2004, APMEP.

Esmenjaud-Genestoux F. (2005), "Le travail personnel au collège ou le partage des responsabilités didactiques – partie 1 : La partie " privée " du travail des élèves et de l'accompagnement aux devoirs", *Petit x*, n°69.

Esmenjaud-Genestoux F. (2006), "Le travail personnel au collège ou le partage des responsabilités didactiques – partie 2 : le professeur accompagne le travail personnel des élèves", *Petit x*, n°70.

Esmenjaud-Genestoux F. (2008), « Les responsabilités de l'élève et sa conquête de l'autonomie dans l'étude des mathématiques. Approche didactique d'un cas de rééducation mathématiques », *Les Sciences de l'éducation : Pour l'Ere Nouvelle*, vol. 41, n°1, CERSE-université de Caen.

Nordon D. (1993), *Les mathématiques pures n'existent* pas, Actes Sud.

Winnicott D.W. (1975), *Jeu et réalité*, Gallimard.

Annexes

Coopération entre professeur et élève(s) pour résoudre une situation

6 responsabilités relatives au contrôle du Milieu

1 Déterminer/reconnaître un « contexte » mathématique dans le milieu de l'interaction (« mathématiser » une situation).
2 Adapter sa décision à ces conditions : choisir dans son répertoire (parmi plusieurs possibles) une « réponse » à la « question » posée (une vacuité dans le milieu de E).
3 Contrôler la validité (pertinence, adéquation, degré de véracité) de sa décision à l'aide d'un raisonnement, d'une technique, etc.
4 Algorithmiser la production de ce type de décisions (futures, potentielles) à l'aide d'un théorème, qui étiquette en quelques sortes le triplet (conditions, décision, contrôles).
5 Contrôler l'emploi de ce savoir (en utilisant d'autres savoirs).
6 Maintenir en état de fonctionnement les moyens de convertir ce savoir en moyens de décisions dans un répertoire (qui rapproche les connaissances et savoirs entretenant entre eux des filiations ou liens logiques) qui permet de résoudre les mêmes types de problèmes.

6 responsabilités didactiques à se répartir entre professeur et élève

R1 : l'intention de modifier un/son propre répertoire

R2 : l'intérêt pour les moyens de l'étude

R3 : le contrôle de ses décisions

R4 : l'acculturation

R5 : l'usage personnel des savoirs

R6 : l'entretien du répertoire

7 niveaux de familiarité avec un savoir mathématique

1 niveau de l'**exécution**

2 niveau de la **construction**

3 niveau de la **production**

4 niveau de la **production auto-contrôlée**

5 niveau de l'**aptitude**

6 niveau de l'**expertise**

7 niveau de la **maîtrise**

Un savoir scolaire apparaît comme :
- la solution d'un exercice au niveau 2 ;
- une connaissance locale au niveau 3 ;
- un savoir à étudier au niveau 4 ;
- un savoir exigible au niveau 5 ;
- un savoir utilisable au niveau 6.

Questionnaire

Quel est l'intérêt de **donner du sens** *à ce qu'on utilise ? de disposer d'un* ***algorithme*** *?*

Etre en mesure d'utiliser « dans la vie quotidienne, dans sa vie privée comme dans son travail » les produits élémentaires ;
« mémoriser les tables de multiplication » ;
« être capables de restituer et d'utiliser les tables de multiplication »
des différences de formulation significatives ?

Concernant l'apprentissage du répertoire multiplicatif :
- les difficultés rencontrées par les enseignants sont-elles de même nature pour automatiser et pour donner du sens ?
- quelles difficultés côté élèves ?
- contre quelles réactions extérieures à l'école se heurte l'enseignement ?
- qu'est ce qui peut être ou non attendu de la part des familles ?
- qu'est ce qui peut être attendu de la part d'un élève « seul » (en primaire, au collège) ?

Réactions en vrac :
l'expression « table(s) de multiplication » :
les objets « tables de multiplication », « Table de Pythagore » et autres :
l'usage des doigts :

INFLUENCE DE LA NATURE DE LA SITUATION SUR L'APPARITION, LE TRAITEMENT ET L'USAGE PAR L'ENSEIGNANT DES RAISONNEMENTS PRODUITS PAR LES ELEVES

ATELIER PROPOSE PAR

P. GIBEL, IUFM d'Aquitaine, LACES équipe DAESL

1. INTRODUCTION

Cet atelier a été proposé suite à une recherche sur les fonctions des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique, en mathématiques, à l'école primaire.

Nous commencerons par préciser ce que nous entendons par le terme « raisonnement » (§2). Bien que très employé par les enseignants de toutes les disciplines et par les chercheurs, il reçoit des acceptions très variées. De sorte que nous avons préféré définir directement notre objet et notre méthode d'étude pour classer les différentes formes de « raisonnements » qui nous intéressent. D'autant plus que nous définissons et classons les raisonnements suivant *leur fonction* dans la relation didactique, ce qui n'a pas été fait systématiquement jusqu'à présent. Nous définirons dans le (§3) la notion de situation-problème et nous justifierons le contexte et les raisons de cette étude.

Nous nous sommes limités dans cet atelier à l'analyse clinique d'une partie d'une leçon basée sur la mise en œuvre d'une situation-problème en arithmétique, que nous exposerons (§4) et dont nous décrirons le déroulement d'ensemble. Dans le (§5) nous analyserons les formes des raisonnements qui apparaissent lors des phases de recherche et de mise en commun. Nous étudierons alors (§6) les questions suivantes : la situation-problème proposée a-t-elle privilégié la production de raisonnements chez les élèves ? Quelle est la valeur de ces raisonnements ? Sont-ils associés à des apprentissages et à des acquisitions utiles ? Quels sont les choix didactiques de l'enseignant qui déterminent très fortement la présence, le sens et les possibilités réelles de traitements et d'utilisations des raisonnements des élèves ?

2. LES RAISONNEMENTS EN CLASSE

2. 1. La détermination d'un raisonnement produit par un sujet : notion de « situation »

Le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. Pour cette raison nous avons pris comme définition de base celle proposée par P. Oléron :

> « Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but ». (Le raisonnement, 1977, p. 9)

Par conséquent, pour affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement dont les éléments sont en (grande) partie implicites, il est nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être accepté comme « effectif ».

Souvent le professeur accepte des indices et les interprète davantage en fonction de leur utilité pour le déroulement de la leçon que de leur authenticité du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. L'observateur doit donc suivre une autre voie. Il convient qu'il montre que tel raisonnement complet dont il n'aperçoit qu'une partie ou que des indices est bien celui qu'il faut attribuer à son auteur.

Pour cela il convient de montrer que le supposé raisonnement
- pourrait être énoncé par le sujet ou, qu'au moins, la règle est connue de lui, le fait A est perçu par lui de telle ou telle façon ;
- est utile (il réduit une incertitude, par exemple, s'il y a doute car une autre règle aurait pu être appliquée) ; le lien ne doit pas être l'effet d'une cause, par un mécanisme qui échapperait au jugement et à la volonté du sujet ;
- est motivé par un avantage qu'il procure au sujet ; il est l'instrument d'une modification de son environnement qui lui parait favorable ;
- est motivé par des raisons « objectives », propres : arguments de pertinence, de cohérence, d'adéquation, d'adaptation, qui justifient ce raisonnement là (et pas un autre) par opposition à l'idonéité (la conformité aux attentes du professeur).

Parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques unes seulement – le moins possible - peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent que nous appelons « situation ». La situation est une partie seulement du « contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du professeur et elle comprend (mais pas seulement) une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet, ni à la connaissance qui la motive mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet.

Ce point de vue est un peu différent de celui qui prévaut légitimement chez les professeurs où les seuls raisonnements vraiment utilisables sont les raisonnements entièrement corrects. Un raisonnement faux n'est qu'assez exceptionnellement un objet d'étude.

La théorie des situations a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.

2.2. Les raisonnements effectifs

Les raisonnements que nous étudierons seront essentiellement modélisables par des inférences c'est-à-dire des relations de la forme « Si la condition A est réalisée, alors la condition B l'est (ou le sera) aussi »[1]. Mais cette définition doit être complétée car nous voulons pouvoir
- distinguer les raisonnements effectifs des citations,
- intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités aussi bien que par des déclarations,
- traiter les productions métamathématiques ou didactiques aussi bien que mathématiques,
- distinguer le sens d'un même raisonnement selon qu'il est produit pas un élève ou par un enseignant.

a) Un *raisonnement* est donc une relation R entre deux éléments A et B tel que :
- A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;
- B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;
- R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

[1] Bien que très utilisé dans le discours mathématique, le mot n'appartient ni à un langage mathématique, ni à la métamathématique proprement dite. En théorie des situations, la définition précise la fonction de ce type d'inférences suivant la « logique effective » initiée par P. Lorenzen (Metamathematik Institut AG Manheim 1962)

b) Un *raisonnement effectif* comprend de plus :
- un agent E (élève ou professeur) qui utilise la relation R,
- un projet déterminé par une situation $\mathbb{S}$ dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

On peut dire que pour réaliser le projet déterminé par la situation $\mathbb{S}$, le sujet utilise la relation R qui permet d'inférer B de la condition A. Ce projet peut être convenu et explicité par 'agent ou il peut lui être prêté par l'observateur à partir d'indices.
La définition devra à son tour être complétée pour permettre de distinguer les raisons de l'élève, celles du professeur et celles de l'observateur, et si on veut discuter formellement les modalités de l'analyse effectuée.

2.3. Première classification d'après la fonction et le type de situation
En conclusion du paragraphe précédent, un raisonnement est identifié par sa fonction dans une situation, par le rôle qu'il y joue. Cependant un raisonnement peut avoir des fonctions différentes, décider, informer, convaincre, expliquer. Elles sont différenciées par des modèles de situations mathématiques (d'action, de formulation, de preuve[2]…) généraux mais différents.

D'après ce qui précède, nous nous attendons à distinguer des formes – que nous appelons niveaux - plus ou moins dégénérées d'inférences, adaptées aux différents types de situations :
- raisonnements formels complets comportant une suite d'inférences correctement articulées et implicitement ou explicitement référées à la situation ou à un des répertoires admis par la classe (valides ou non) ; ce type de manifestation est caractéristique des situations de validation (<u>niveau 3 : N3</u>) ;
- raisonnements formellement incomplets, mais dont les parties manquantes peuvent être raisonnablement imputées à l'actant comme implicites, les conditions effectives ne justifiant pas la formulation complète ; ce type de raisonnement se manifeste principalement dans les situations de communication (<u>niveau 2 : N2</u>) ;
- raisonnements n'apparaissant pas formellement, mais qui peuvent être inférés à partir des décisions et des actions du sujet par l'observateur (ou par le professeur) comme modèles implicites d'action (théorèmes en actes) (<u>niveau 1 : N1</u>).

2. 4. Les fonctions didactiques des raisonnements selon les types de situations
De plus, à un moment donné du déroulement d'une leçon, on peut identifier, suivant les intentions des participants, un très grand nombre de situations plus ou moins « emboîtées ». Celles qui nous intéressent plus précisément sont celles qui émergent et qui influencent *le processus collectif* commun dont le professeur veut faire usage.

Le raisonnement effectif de l'élève dans la résolution d'un problème classique
Mais le raisonnement effectivement utilisé par l'élève est le résultat d'une activité mentale différente de la solution standard, et il répond à une situation S dont l'énoncé du problème n'est qu'une composante. L'élève agit pour trouver la solution demandée mais n'a pas à rendre compte de ses tentatives. Donc l'observateur, tout comme le professeur, doit interpréter ce qu'ont produit les élèves dans un système plus large et plus complexe, s'il veut avoir une chance d'interroger ou d'expliquer pourquoi ils ont produit tel ou tel raisonnement, qu'il soit correct et adéquat ou non. Aussi, pour analyser avec eux leurs productions, le professeur doit considérer, au moins implicitement, qu'ils sont confrontés à des conditions réelles plus ouvertes que le texte du problème (i. e. une Situation d'action dont le milieu est la situation objective). C'est à ce niveau qu'appartiennent les justifications tactiques, stratégiques, ou

[2] Brousseau 1997 Theory of Didactical Situations in Mathematics, p. 8 – 18

ergonomiques à propos du bien fondé, de l'adéquation, du choix des inférences ou de leur enchaînement qui ne figurent pas dans la solution standard.
On peut distinguer plusieurs cas suivant les possibilités effectives qui s'offrent à l'enseignant de justifier auprès de ses élèves la mise en œuvre de la solution standard (et de discréditer les solutions erronées).
Dans le premier cas, le professeur peut effectivement *justifier* la construction de la solution du problème par

- la mise en œuvre des connaissances acquises par les élèves (enseignées et supposées acquises),
- et par la considération des informations contenues dans la situation objective.

Dans le deuxième cas, il lui faut faire appel à un raisonnement original, mais logiquement réductible aux données et aux connaissances des élèves comme le cas précédent. Il a fait, volontairement ou non, un pari (gagné avec certains, perdus avec d'autres) sur leurs capacités heuristiques.
Dans le troisième cas, la solution fait appel à des conditions qui ne figuraient pas dans les connaissances acquises et qui n'étaient pas logiquement déductibles des données. Ce cas ne se produit guère avec les problèmes classiques, mais il peut survenir dans des situations « ouvertes ». La solution standard n'est pas constructible par les élèves seuls et le professeur doit à un moment ou à un autre intervenir pour la faire apparaître. Mais de plus, le professeur ne peut pas la faire apparaître comme une conséquence « raisonnée » de l'articulation des données du problème basée sur les connaissances (supposées) des élèves.
Dans les deux premiers cas, les conditions de la « situation objective » suffisent à expliquer et justifier chacune des productions, le projet correspondant peut alors être communiqué à l'ensemble des élèves. Le raisonnement est produit par l'élève comme une action « raisonnée » à partir des conditions qui définissent la situation objective à laquelle il est confronté[3]. Le raisonnement apparaît comme une *« raison de savoir » :* les raisonnements produits permettent de justifier la validité des connaissances par leurs rapports logiques avec d'autres, autrement dit par des raisons « internes » au savoir.
Dans le troisième cas, l'élève ne peut « admettre » la solution que sur la foi de l'autorité du professeur et en tout cas il ne peut pas y avoir d'apprentissage en situation autonome.

Le raisonnement comme cause et moyen d'apprentissage autonome,

Dans les deux premiers cas, le raisonnement peut être produit par les élèves, pour les besoins de la résolution, sans intervention, ni recours à l'enseignant :

- comme un moyen pour un ou plusieurs élèves d'établir leurs décisions dans des situations dites[4] « situations d'action » autonomes,
- comme un moyen d'appui un peu formel, pour préciser une information dans une simple communication,
- comme moyen de convaincre un ou des condisciples de la validité d'une déclaration, plus généralement pour justifier la validité d'une déclaration.

L'apprentissage d'un nouveau raisonnement est le résultat de sa promotion du statut de moyen particulier au problème donné à celui de moyen « universel » pour résoudre une famille de nouveaux problèmes et de son intégration dans le répertoire du sujet. En situation autonome, il s'agit d'une induction, mais elle est appuyée par une chaîne explicitable d'inférences.

---

[3] Le sujet (e) par l'usage de la règle R justifie que dans les conditions A, la conclusion ou la décision B s'impose à lui pour satisfaire la situation $\mathbb{S}$.
[4] en Théorie des Situations didactiques en Mathématiques

Dans le troisième cas, l'apprentissage autonome ne peut pas étayer cette intégration. Elle ne peut être que le résultat d'un enseignement.

3. LES SITUATIONS-PROBLEMES

Le développement des mathématiques et de leur enseignement a produit un nombre incalculable de problèmes propres à solliciter toutes sortes de formes de raisonnements. Mais l'enseignement direct des solutions et plus tard des méthodes de résolutions (*problem solving method*) tend à refermer ce que la notion même de problème tente d'ouvrir. L'ingénierie didactique (notamment celle issue de la TSDM) a produit de nombreuses situations complexes spécifiques des connaissances à enseigner en définissant les conditions propres à maintenir l'ouverture (l'incertitude nécessaire au raisonnement) du côté des élèves, tout en étant finalement assez certaines pour le professeur. Elles contiennent un ou plusieurs problèmes classiques mais les mettent en scène de façon à mobiliser d'autres causes et raisons de résolution et d'apprentissage que la seule validité mathématique. D'autres idées sont apparues allant dans le même sens : a) proposer des problèmes ouverts (dont le professeur ignore la solution) b) produire des situations à partir des problèmes classiques, à l'aide de dispositifs automatiques : habillages divers (*words problems*), mises en scène (*story problems*), évocations d'un environnement (*embeded context problems*), données absentes ou surabondantes, suppression des questions ou questions « absurdes », mise en débat des résolutions, mise en groupes des élèves… En même temps est apparu sous le nom de *« situations-problèmes »* une activité didactique globale dans laquelle les phases didactiques et les phases d'activité et d'apprentissage autonome ou quasi autonome s'entrelacent. Ce terme peut englober tous les autres. Mais il tend à diluer les possibilités de contrôler les vertus didactiques de chacune des phases. Une situation-problème peut ménager dans ses diverses étapes, des situations d'apprentissage autonome - ou supposées telles - nombreuses et inattendues. Mais le bon déroulement de ces phases d'apprentissage apparemment autonome dépend en principe des qualités réelles de la situation laissée aux élèves.
Nous cherchons à savoir dans quelle mesure des situations qui théoriquement ne peuvent pas être dévolues permettent néanmoins la production de raisonnements par les élèves. Les situations problèmes offrent des conditions de ce type.

3.1. Présentation des situations-problèmes

3.1.1. Origine

L'usage des situations problèmes, c'est-à-dire des problèmes ouverts s'est fortement répandu, en France, ces dernières années dans les classes de l'école primaire. Les raisons avancées sont bien connues :

- offrir aux élèves des « modèles » de situations de recherche ou de fonctionnement naturel des connaissances,
- stimuler le travail autonome, améliorer la motivation des élèves
- lutter contre l'apprentissage formel d'algorithmes appropriés à un champ limité d'exercices convenus, faire raisonner au lieu de simplement calculer.

L'utilisation des situations problèmes est susceptible de créer des conditions favorables à diverses sortes d'activités mathématiques qui paraissent difficiles à obtenir dans les situations classiques : poser des questions, rechercher des informations, en vérifier la pertinence et la plausibilité, organiser une suite d'activités…
Le problème classique et sa solution sont ainsi enchâssés dans un « contexte » en relation complexe avec la connaissance, objet de l'enseignement.
Les conditions effectives créées dans les situations-problèmes peuvent être très diverses : interactions autonomes avec un milieu matériel (par ex. figures géométriques) ou des

systèmes (par ex. informatique), interactions autonomes avec d'autres élèves (en groupes, petits ou grands), interactions didactiques avec le professeur…
Une situation-problème est un conglomérat de conditions décomposables en éléments plus simples qui correspondent aux divers types proposés dans la théorie des situations : situations d'*actions,* de *communication*, de *validation,* d'*institutionnalisation* ou de *dévolution*. Mais ces situations composantes peuvent apparaître de façon inopinée, sur une initiative inattendue d'un élève ou du professeur. Ce caractère potentiellement erratique des situations-problèmes contribue à donner au professeur une impression de grande liberté, de spontanéité, de naturel… Cette impression n'est probablement pas étrangère au succès de ces méthodes. Le savoir apparaît d'une façon qui ne semble pas intentionnelle, pas préparée…

3.1.3. Caractères, conditions, résultats.
Les conditions d'utilisation de ces situations problèmes sont très souples. Elles permettent une large gamme de choix didactiques qui stimulent aussi les professeurs, entre la dévolution radicale, la recherche dirigée et l'exposé magistral d'une maïeutique imaginaire.

3.1.4. Les raisons de la présente étude
En revanche on peut s'interroger sur les résultats de l'usage des situations-problèmes. Malgré la variété des méthodes didactiques qui peuvent accompagner cet usage, y a-t-il des caractères communs ? Quelle est l'activité réelle des élèves ? Quels bénéfices en tirent les élèves et les professeurs ? De quels outils dispose l'enseignant pour évaluer les acquis de l'élève ? Quels inconvénients ou quels risques présente cet usage ?
On peut en particulier s'interroger sur les avantages annoncés. Y a-t-il une augmentation qualitative et quantitative des raisonnements produits ?

3.2 Le contexte de la leçon observée
3.2.1. Le professeur, les élèves, et la formation des professeurs
L'enseignant a élaboré et proposé à ses élèves cet énoncé pour montrer aux enseignants en formation :
1) la richesse, l'originalité et la variété des raisonnements produits par les élèves par confrontation à la situation-problème ; il souhaite ainsi mettre en évidence les capacités réelles de ses élèves à produire des raisonnements dans des situations nouvelles ;
2) les capacités des élèves à formuler et à expliciter leurs raisonnements lorsqu'ils viennent présenter leur production lors de la phase de mise en commun ;
3) les arguments et les raisonnements logiques qu'il utilise afin de traiter les raisonnements des élèves ;
4) les moyens qu'il met en œuvre pour faire en sorte que les élèves réagissent aux raisonnements présentés par leurs camarades, et débattent de la validité et de la pertinence des raisonnements qui sous-tendent les productions.
Son objectif est donc de faire prendre conscience aux professeurs stagiaires de l'intérêt des situations-problèmes pour l'apprentissage et plus précisément l'usage du raisonnement.

3.2.2 Présentation – et défense obligatoire - des diverses stratégies didactiques

Cet enseignant a coutume de faire dévolution aux élèves de situations d'action, basées sur des ingénieries préalablement expérimentées, ayant fait l'objet de publications à destination des enseignants. Il justifie le choix de ce type de situation par le fait qu'elles permettent aux élèves :

- d'élaborer une ou plusieurs procédures, basées sur leur répertoire de connaissances,
- d'éprouver leur(s) procédure(s),
- de prendre conscience des décisions qui sous-tendent leur raisonnement.

En effet ces situations se caractérisent ainsi :

1. l'élève dispose du répertoire nécessaire pour concevoir les stratégies de base,
2. les connaissances nécessaires pour élaborer les stratégies de résolution ne sont pas trop éloignées du répertoire des élèves,
3. l'élève peut obtenir en réponse à son action les informations nécessaires à la résolution du problème,
4. l'élève peut déterminer par lui-même si le résultat obtenu est correct ou non,
5. l'élève peut faire plusieurs tentatives.

La phase de mise en commun des procédures permet alors aux élèves de revenir sur leurs procédures et d'analyser les décisions qui sous-tendent leur raisonnement. Notre étude permet d'établir que les élèves parviennent à utiliser les raisonnements, produits en situation d'action, comme arguments permettant de justifier la validité ou la non validité des productions.

Les intentions du professeur dans la conduite de la leçon observée sont d'une part de ne pas intervenir lors de la phase de recherche de manière à ce que le déroulement de cette phase soit semblable à celui d'une situation d'action, d'autre part d'intervenir à minima lors de la phase de présentation des productions, espérant ainsi amener les élèves à débattre de la validité et de la pertinence des raisonnements qui sous-tendent les productions.

4. LA LEÇON OBSERVEE

4.1 Les composantes de la situation

4.1.1. Le problème (la situation objective)

L'énoncé de la situation problème distribué par le maître en début de séance était rédigé ainsi :

> *« Une journée de ski à Gourette est organisée samedi pour les élèves du canton d'Oloron. Le Conseil Général décide pour cet événement exceptionnel de leur offrir les forfaits pour la journée.*
>
> *La station de Gourette propose les tarifs suivants :*
>
> | | |
> |---|---|
> | *216 forfaits :* | *1275€* |
> | *36 forfaits :* | *325€* |
> | *6 forfaits :* | *85€* |
>
> *979 enfants sont inscrits, mais au moment du départ, il y a 12 absents, malades bien sûr…*
>
> *Le comptable du Conseil Général se dit « Dommage pour ces petits, mais ce n'est pas grave ; et puis la dépense sera moins élevée. »*
>
> *Qu'en penses-tu ? »*

Le déroulement de la séquence, choisi par l'enseignant, suit un plan devenu très usuel en France : présentation de l'activité de recherche (phase 1), lecture de l'énoncé (phase 2), informations complémentaires, explication des termes de l'énoncé, discussion et explicitation de la question relative à l'énoncé (phase 3), recherche individuelle (phase 4) d'une durée de 10 minutes environ, constitution de groupes (phase 5), recherche en groupes et élaboration d'une production écrite (phase 6) d'une durée de 25 minutes environ, mise en commun des productions : chaque groupe vient tour à tour au tableau présenter sa production (phase 7).

<u>La situation objective</u>
C'est celle qui est décrite dans l'énoncé d'un problème, et dont l'élève doit s'occuper sans remettre en question la réalité de ce qui lui est ainsi présenté comme « objectif ».
Le texte proposé n'est pas un énoncé de problème au sens habituel puisqu'il ne comporte pas de question explicite. Ce procédé est parfois utilisé pour inciter les élèves à formuler eux-mêmes des questions et des conjectures, et ne pas se contenter de répondre à des questions déjà posées et parfois même déjà enseignées, ou à résoudre de façon standard des problèmes rituels. Mais ne pas poser de questions après l'exposé d'une certaine situation n'est justifiable, sur le plan des apprentissages, que

- si plusieurs questions *intéressantes* pour les élèves sont raisonnablement suggérées par la collection de déclarations qui fixent la situation objective,
- si le professeur accepte d'intervenir au cours de la détermination du problème et donc de la résolution, qui de ce fait ne peut plus autonome.

Alors que l'objectif affiché de cette méthode est d'ouvrir l'élève à des questions nouvelles et personnelles, ce dernier devient en fait plus dépendant de l'activité et des interventions du professeur qu'il ne l'aurait été dans un problème donné sous forme d'un énoncé classique.

Les élèves auront donc à comprendre que les renseignements fournis permettent de calculer la dépense totale sous deux hypothèses distinctes, que ces deux dépenses ne sont peut être pas égales et qu'il s'agit de les comparer. La seule question intéressante est la suivante « La dépense sera-t-elle plus élevée pour 979 élèves que pour 967 élèves (comme le suppose le comptable)? »

- Le cœur de la situation mathématique proposée est un problème d'optimisation et de programmation linéaire. Calculer le prix des forfaits nécessaires revient à calculer le minimum d'une fonctionnelle linéaire, correspondant au coût de la dépense pour un nombre d'enfants N fixé.

Si la fonctionnelle est notée $J(n_1,n_2,n_3)$ où n_1 désigne le nombre de groupements de 216 forfaits achetés, n_2 désigne le nombre de groupements de 36 forfaits achetés et n_3 désigne le nombre de groupements de 6 forfaits achetés, le coût de la dépense correspondante peut s'écrire sous la forme

$$J(n_1, n_2, n_3) = 1275 \times n_1 + 325 \times n_2 + 85 \times n_3$$

La contrainte, où N désigne le nombre d'enfants, est une « contrainte inégalité »

$$n_1 \times 216 + n_2 x 36 + n_3 \times 6 \geq N$$

traduisant le fait que le nombre de forfaits achetés doit être supérieur au nombre d'élèves N.

Il s'agit alors de calculer le minimum de $J(n_1, n_2, n_3)$ pour N donné donc de résoudre le problème d'optimisation linéaire avec contrainte suivant :

$$\begin{cases} \underset{n_1,n_2,n_3}{Min} \; J(n_1, n_2, n_3) = \underset{n_1,n_2,n_3}{Min} \; (1275 \times n_1 + 325 \times n_2 + 85 \times n_3) \\ N - n_1 \times 216 - n_2 \times 36 - n_3 \times 6 \leq 0 \end{cases}$$

La résolution de ce problème d'optimisation n'a évidemment de sens que pour n_1,n_2,n_3 entiers naturels. Le fait d'identifier le problème comme relevant de l'optimisation nous permet de repérer les alternatives ouvertes aux conceptions habituelles des élèves et les connaissances qui vont implicitement ou explicitement être mises en œuvre par les élèves dans la résolution.

- L'analyse mathématique de la situation montre l'influence de plusieurs variables didactiques. Pour chacune le professeur choisit des valeurs qui augmentent la complexité : le nombre de paramètres (8) et d'indéterminés (3) est très élevé et leur désignation verbale n'est ni simple ni familière aux élèves. De plus les valeurs des paramètres ne facilitent pas la compréhension ni la résolution :

- Considérons tout d'abord le nombre de forfaits correspondant à chacun des groupements. Le choix des valeurs 1, 10, 100 se serait traduit par un travail sur la numération décimale, le choix des valeurs 6, 36, 216, c'est-à-dire d'une base 6, rend la tâche de l'élève beaucoup plus complexe. D'autant plus qu'une logique de la vente en gros exclut la vente de forfaits à l'unité.

- Le nombre d'enfants présents le jour du départ (967) est très grand pour « justifier » l'usage de 3 types de forfaits. Il n'est pas divisible par 216, ni par 36, ni même par 6 ce qui rend la tâche de l'élève plus complexe.

- Le nombre total d'enfants (979) justifie la remarque du Conseiller général mais double le nombre de calculs à effectuer.

4.1.2 La situation de recherche (la situation d'action autonome) Actions possibles et actions attendues

La solution « standard » attendue par l'enseignant est très complexe. Si nous considérons que chaque étape de la résolution « arithmétique scolaire » du problème constitue un « module », la solution se décompose en 5 modules, chacun d'eux exigeant plusieurs opérations :

<u>Module 1</u> : Calcul du nombre d'enfants présents le jour du départ noté N_p, le nombre total d'enfants est noté N_t.

<u>Module 2</u> : Comparaison des trois tarifs proposés en vue de les ordonner.

<u>Module 3</u> : Recherche d'une organisation, manière de concevoir l'achat de N forfaits, $N \geq N_p$, en combinant les différents tarifs, permettant de minimiser la dépense.

<u>Module 4</u> : Recherche d'une organisation, manière de concevoir l'achat de N forfaits, $N \geq N_t$, en combinant les différents tarifs, permettant de minimiser la dépense.

<u>Module 5</u> : Calcul du montant de l'économie réalisée par le comptable : calcul de la différence.

La <u>complexité</u> des modules 3 présenté et 4 est particulièrement élevée comparée à celle des problèmes présentés habituellement en situations autonomes. On peut supposer que les modules 1 et 2, beaucoup plus simples sont destinés à permettre à des enfants faibles de faire quelque chose…

4.1.3. Les situations d'apprentissages autonomes

La situation des forfaits n'est pas une situation d'action autonome à cause de l'impossibilité théorique pour les élèves d'obtenir de façon autonome la solution du problème qui leur est proposé par le simple jeu de raisonnements légitimes. Ils n'ont ni le temps ni même la possibilité de s'y adapter. Aucune des justifications, en référence au milieu, ne pourra être valide.

Ce que l'enseignant ou l'élève prétendra légitimer par la situation ne le sera pas vraiment puisque la situation n'offre pas cette possibilité. Les élèves ne possèdent pas d'autres ressources que leurs connaissances ou leur imagination car ils ne recevront aucune information ni aucun contrôle « objectif ». Seules leur mémoire ou les interventions du professeur pourront leur faire voir que leurs hypothèses, leurs méthodes ou leurs conclusions ne sont pas valides. De plus la situation proposée n'offrant pas à l'élève de rétroactions, ce dernier ne sera pas en mesure, lors de la mise en commun, de déterminer la « valeur » de sa production. Cette condition augmente la complexité de la situation. On peut en conclure que cette situation ne pourra pas fonctionner de façon autonome.

Par conséquent tout va reposer sur l'enseignant lui-même, sur ses choix, sur ses décisions didactiques et finalement sur des arguments rhétoriques didactiques dans le cas où les élèves ne disposeraient pas d'une représentation correcte de « la situation objective » qui sert de milieu à leur action.

4.1.4. Les situations didactiques (phase par phase)

La complexité de la situation objective analysée ci-dessus fait apparaître celle de la situation didactique, permettant ainsi de prévoir les difficultés de l'enseignant relatives à la gestion de chacune des phases de la leçon durant lesquelles il devra nécessairement intervenir. Dans les conditions énoncées précédemment, un très grand nombre de responsabilités restent à la charge du professeur et ne sont pas effectivement partageables. Le professeur devra donc intervenir pour:

1) présenter aux élèves l'activité (phase 1),
2) expliciter certains termes si nécessaire (phase 3),
3) institutionnaliser la question (phase 3) de manière à déterminer complètement le problème objet de la recherche des élèves,
4) gérer la phase de mise en commun au cours de laquelle les élèves viendront exposer leur procédure (phase 7). Compte tenu de sa stratégie didactique, il devra faire émerger un plan de résolution avec les bribes de solutions qu'il peut espérer trouver comme productions des groupes. Il lui faudra, lors de la présentation des différents groupes, deviner les intentions et les interprétations parfois erronées de la situation pour les corriger au moment opportun.

   Le temps imparti à la réalisation de la tâche indiquée laissera peu de place pour une identification et une étude des connaissances nécessaires, pour un enseignement de la solution, ni pour aucun exercice réellement autonome.

   En conclusion nous nous attendons à voir apparaître dans les productions des élèves, de nombreuses questions et de nombreux éléments de « raisonnements », soit pour la conception de diverses composantes de la solution, soit pour l'organisation de la résolution, mais aucun qui entre dans un processus d'enseignement.

4.2. Le déroulement de la leçon :

4.2.1. La recherche et les écrits qui en résultent

L'activité de recherche est basée, dans la leçon observée, sur la recherche et l'explicitation de la question qui détermine complètement l'énoncé du problème (au sens classique du terme). Or les élèves n'ont pas été en mesure de percevoir l'enjeu (mathématique) de la situation problème et c'est l'enseignant qui a lui-même formulé la question « pensez-vous que cela coûte plus cher s'il y a 979 élèves ou 967 élèves ? ».

Les élèves ont produit des procédures, dans lesquelles apparaissent des calculs, nous essaierons de déterminer s'ils ont produit des raisonnements, et si oui de quels types ?

4.2.2 La phase de mise en commun

Notre analyse a priori nous avait fait supposer que le déroulement aurait du être catastrophique : la gestion de la phase didactique de mise en commun apparaissait d'autant

plus délicate que la réduction de la complexité reposait essentiellement sur le professeur : sur ses choix, sur ses décisions, sur ses interventions « opportunes ».
Or en visionnant l'enregistrement que nous n'avions pas vu avant l'analyse, nous avons dû constater que l'enseignant était parvenu à conduire sa classe sans se heurter à des difficultés « insurmontables ».

4.2.3 L'étonnement des observateurs
Un observateur extérieur, et en particulier les élèves professeurs qui pouvaient visionner le film ne trouvaient rien d'anormal. Cette divergence nous a conduit à examiner de plus près les connaissances et surtout les raisonnements qui apparaissent au cours de cette leçon. Qui les produit ? A quoi servent-ils? Quelles utilisations l'enseignant en fait-il ? A quels types d'arguments l'enseignant a-t-il recours pour gérer les raisonnements ? Les élèves sont-ils capables d'utiliser leurs raisonnements comme moyens de justification ? Qu'apprennent les élèves ?

5. LES RAISONNEMENTS OBSERVES, LEUR FONCTION ET LEUR USAGE

5.1 LES RAISONNEMENTS DANS LES PRODUCTIONS ECRITES

Le tableau ci dessous indique les formes de raisonnements qui sous-tendent les productions écrites, élaborées par chacun des groupes. Les raisonnements sont analysés en regard des différents modules qui constituent la solution attendue par l'enseignant.

Pour chaque groupe sont explicitées, dans le tableau 1, les procédures mises en œuvre en relation avec les modules correspondants.

Pour chaque production nous avons indiqué le modèle implicite d'action qui lui est associé.

Module	GROUPE 1 : XAVIER, SYLVAIN, YANNICK	GROUPE2 : MARINE, DEBORAH	GROUPE 3 : ALEXANDRE	GROUPE 4 : JULIEN
Mod. 1	Raisonnement N1 Non explicité	Raisonnement N2	Raisonnement N2	Raisonnement N2
Mod. 2				
Mod. 3		Raisonnement N2 Calcul, par excès, du nombre de forfaits achetés au tarif moyen (par lots de 36).	Raisonnement N3 Calcul, par excès, du nombre de forfaits achetés au tarif faible (par lots de 216). Procédure 3.3. Annexe 2	
Mod. 4	Raisonnement N2 Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.		Résultat déduit du module précédent, par analogie (l'achat est en fait identique à celui réalisé dans le module 3)	Raisonnement N2 Calcul du prix unitaire pour chacun des groupements. Il est obtenu en divisant le prix du lot par le nombre de forfaits correspondants. Le calcul, pour chacun des prix unitaires, de la dépense totale est obtenu par la proportionnalité.

Mod. 5	Raisonnement N3 Le calcul de l'économie réalisée est effectué en calculant le prix de 2 lots de 6.	Raisonnement N2 Le calcul de l'économie réalisée est effectué en calculant le prix de 2 lots de 6.	L'économie réalisée est nulle.	
Modèle implicite d'action	Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.	Les élèves utilisent le modèle de vente en gros. Pas de tentatives visant à minimiser la dépense.	L'élève utilise le modèle de vente en gros. Pas de tentatives visant à minimiser cette dépense.	L'élève utilise le modèle de la vente classique à l'unité pour chacune des propositions de vente. Il utilise le modèle de la proportionnalité.

Module	GROUPE 5	GROUPE 6	GROUPE 7	GROUPE 8
Mod. 1	Raisonnement N1 Non explicité	Raisonnement N2	Raisonnement N2	Raisonnement N2
Mod. 2	Raisonnement			
Mod. 3	Raisonnement Calcul par défaut du nombre, de forfaits au tarif faible (par lots de 216), puis par excès du nombre de forfaits restants au tarif moyen (par lots de 36).	Recherche des nombres de lots de 216 (par défaut), de 36 (par défaut) et de 6 (par excès) nécessaires pour les 967 élèves. Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.	(1) Calcul, par défaut, du nombre de forfaits achetés au tarif fort (par lots de 6), reste 1 élève. (2) Calcul par défaut du nombre de forfaits au tarif moyen (par lots de 36), et pour les restants calcul du nombre, par défaut, achetés au tarif fort, reste 1 élève. (3) Comparaison.	Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.
Mod. 4	Le résultat est déduit de celui obtenu au module 3.			.
Mod. 5	Raisonnement N_3		.	
Modèle implicite d'action	Les élèves utilisent le modèle de la vente en gros et parviennent à effectuer une combinaison des tarifs proposés.	Les élèves utilisent le modèle de vente à l'unité pour calculer la dépense totale alors qu'ils ont raisonné en terme de lots.	Les élèves utilisent le modèle de vente en gros. Tentatives de différentes organisations visant à minimiser la dépense.	Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.

Tableau 1

En conclusion il apparaît qu'une majorité d'élèves utilisent le *modèle de la situation commerciale classique* : l'acheteur achète la quantité de forfaits qu'il veut, à tarif constant.

Les prix par quantités différentes ne peuvent être par conséquent dans leur esprit que des prix proposés par des commerçants différents. Les quantités différentes leur apparaissent, à ce moment là, comme un artifice didactique pour leur faire calculer différents prix à l'unité. Même si certains d'entre eux pouvaient avoir une connaissance effective de la pratique de la vente en gros avec tarif dégressif, vraisemblablement les mots vont leur manquer pour exprimer « le prix – théorique - à l'unité, pour un achat groupé par tant ».

Dans le *modèle de la vente en gros avec tarif dégressif*, presque tous les « raisonnements » importés du modèle classique sont contredits : par exemple le prix effectif d'un objet ne sera pas le prix total divisé par le nombre d'objets, le nombre d'objets à acheter n'est peut être pas celui dont on a besoin etc. De sorte que les questions posées par le professeur lors de la mise en commun ne peuvent aboutir à une élucidation des difficultés.

L'analyse des différentes formes de raisonnements apparaissant dans les productions des élèves montre que l'enjeu réel de la situation problème, à savoir minimiser le coût de la dépense, n'a pas été perçu par une majorité d'entre eux.

Dans cette séquence, il apparaît clairement que la dévolution de la situation n'a pas fonctionné, les élèves n'ont pas été en mesure de prendre à leur charge la situation proposée. En effet lors de la mise en situation il apparaît que :

- les élèves ne disposent pas du répertoire de base pour concevoir les stratégies de base ;
- les élèves ne peuvent pas obtenir, en réponse à leurs actions, les informations nécessaires à la résolution du problème ;
- les élèves ne disposent pas des moyens en temps leur permettant de produire une solution compte tenu de la complexité de la solution standard ;
- les élèves ne peuvent déterminer par eux-mêmes si le résultat obtenu est ou non correct.

De plus

- l'énoncé ne fixe pas convenablement la situation objective et par conséquent conduit un grand nombre d'élèves à élaborer des modèles implicites erronés.

5.2. La transcription des interactions (phase de « mise en commun »)

Nous avons choisi de réaliser, au cours de cet atelier, l'analyse, en théorie didactique des situations mathématiques, d'un extrait de la transcription relative à la phase de présentation des productions des élèves (phase 7).

Nous avons analysé les interactions relatives à la présentation de la production d'un élève, Julien, ayant fait le choix de travailler seul.

La première colonne du tableau 2 indique le numéro de l'intervention, le premier nombre (4) indique qu'il s'agit du quatrième « groupe » venu présenter sa production, pour certaines interventions le minutage est précisé (avec pour origine le début de la phase de mise en commun). Dans la deuxième colonne figure le script. La troisième colonne concerne l'analyse de l'intervention en regard du projet du locuteur. La quatrième colonne tend à préciser la nature et la fonction de l'intervention.

N° Min.	**Texte**	**Commentaires**	**Analyse**	**Nature et fonction de l'intervention**
4.1 12'35	Julien : Bon j'ai commencé par faire… (1) j'ai fait 85 divisé par 6 (2) ça m'a donné 14,166 ; j'ai pris le 14 et puis j'ai vu… (3) j'ai fait pareil avec 325, enfin j'ai fait pareil, (4)	Un élève, Julien, vient présenter sa production. Julien décrit son calcul, sans définition, sans annonce de la variable calculée.		(1)Description directe d'une action (calcul) (2)Formulation d'un résultat (3)Evocation indirecte d'une action – par analogie - (4)Organisation de calcul Raisonnement d'organisation, local, oralisé.

	j’ai fait pareil avec les trois opérations			
4.2	M : (1) les trois propositions, (2) les groupements de forfaits.	L’enseignant reformule une partie de la déclaration pour mettre en place le vocabulaire.	L’E souhaite établir un lien entre les calculs effectués et la situation objective.	(1)Rectification de terminologie (2)Proposition de terminologie et Dénomination d’un résultat
4.3	Julien : (1) 325 divisé par 36 et 1275 divisé par 216 (2) puis alors, après j’ai fait…	Julien continue à dénoter ses calculs.		(1) Description directe d’une action (2) Organisation de calcul Raisonnement d’organisation, De l’élève, local, oralisé.
4.4	M : (1) Première conclusion après ces trois calculs ? Le maître s’adressant à la classe : Vous avez entendu les opérations qu’il a faites ? (2) Dans les trois conditions proposées quel est le prix d’un forfait c’est bien ça ?	L’enseignant interroge Julien pour savoir ce qu’il retire des calculs effectués. L’enseignant intervient pour apporter des explications visant à interpréter les calculs. Il indique la nature des résultats obtenus, « prix d’un forfait dans les trois conditions ».	L’E donne une interprétation de chacun des calculs effectués par Julien. Intention didactique : L’E souhaite s’appuyer sur les calculs de Julien pour « mettre en scène »les étapes du raisonnement qui sous-tendent la procédure 2-1 (Module 2).	(1) Evocation et dénomination de la position « en conclusion » d’un énoncé dans un raisonnement. Invitation à commenter ses résultats et à les placer par rapport à l’action. (2) Moyen rhétorique didactique : élément d’un raisonnement local explicite de l’E qui vise à replacer les calculs dans la perspective du module 2.
4.5	Julien : Ouais !			Agrément, approbation, accord
4.6	M :(1) Bon première conclusion après ça ?	L’enseignant interroge Julien sur ce qu’il retire des calculs effectués.	.	(1)Demande d’une inférence. L’E attend que l’élève continue son raisonnement et formule la conclusion.
4.7	Julien : Après j’ai fait...	Pas de réponse, Julien semble vouloir poursuivre sur le mode de la dénotation des calculs.		
4.8	M : Non, ta première conclusion après ça ? Quand tu as fait ces calculs tu t’es dis quoi ?	L’E réitère sa question.	L’E effectue une deuxième tentative, la finalité est identique à 4.4. La formulation est cependant plus précise.	Evocation de ce qu’est une conclusion invitation à commenter son résultat
4.9	Un élève : Lequel était le moins cher.	Un élève formule explicitement la	Un élève indique à Julien ce qui peut	Question sur une relation d’ordre.

		question de l'enseignant posée précédemment de façon implicite.	être tiré de ses calculs à savoir une comparaison de prix	Projet
4.10	Julien : Ouais ! Lequel était le moins cher…enfin non je ne pouvais pas voir…			Mais « lequel » ne désigne pas un objet défini. Explication passive. Impossibilité de réaliser un projet
4.11	Un élève : Mais si tu peux voir !	Un élève indique à Julien qu'il dispose de toutes les informations pour répondre.	L'élève le pousse à produire un raisonnement en lui indiquant qu'il dispose de tous les éléments pour conclure (i.e. comparer les prix)	Possibilité de réaliser un projet
4.12	Julien : (1) Oui c'était 1275, (2) (3) parce qu'il valait 5€ le forfait à peu près et puis (4) alors après j'ai essayé, enfin j'ai fait 979 moins 12, ça m'a fait 967 et puis après j'ai multiplié 967 par tous les, par tous les résultats des divisions	Julien donne la réponse attendue et poursuit la dénotation de ses calculs.	Julien formule la conclusion attendue dans la procédure 2-2. Il revient immédiatement à son raisonnement initial en dénotant ses calculs.	(1)Implicitement, la conclusion (2)Explication. (3)Estimation (4)Description directe d'une suite d'actions et organisation Raisonnement d'organisation, local, oralisé.
4.13	M : Pour trouver ?	Le maître interroge Julien sur la finalité de ses calculs.	L'E l'interroge sur la finalité de ses calculs.	Projet, demande de dénomination d'un résultat. Demande d'explication.
4.14	Julien : Pour trouver le prix de combien ça allait valoir.	Julien indique la finalité de ces calculs : calcule la dépense totale (pour les élèves présents).	Julien indique la finalité : calculer pour chacune des propositions le coût global.	Dénomination d'un résultat. Il indique la finalité de sa procédure.
4.15	M : Oui le prix…pour trouver lequel valait le moins cher.	Analyse P. part de la formulation de l'élève et la transforme : Julien a annoncé son intention de calculer le coût global (pour chacune des propositions), P se centre sur la comparaison des tarifs. Le modèle implicite d'action développé par Julien n'est pas conforme à l'attente de l'enseignant. Ce dernier va établir que les calculs effectués ne sont d'aucune utilité pour la comparaison des tarifs. Intention didactique : Faire rejeter les calculs en les faisant apparaître comme inutiles, redondants par rapport à la conclusion précédemment établie (procédure 2-2)		Moyen rhétorique didactique**. :** Elément d'un raisonnement local explicite de l'E qui vise à replacer les calculs dans la perspective du module 2. Rappel de subordination d'un résultat dans une tâche
4.16	Julien : Oui.			Accord
4.17	M : Et-tu as fait les trois calculs ?	L'enseignant souhaite faire		Effectivité d'une action

		prendre conscience à Julien que les calculs n'étaient pas nécessaires, un raisonnement aurait pu éviter de faire les calculs.		
4.18	Julien : Oui.			
4.19	M : C'était nécessaire ?			Appel à un jugement de valeur sur la pertinence ou l'adéquation d'un calcul.
4.20	Julien: Ben…ouais…			Accord
4.21	Un autre élève : Pour voir quel était le moins cher.			Rappel de subordination
4.22	M : Tu le savais pas avant ?	L'enseignant formule sa question afin que Julien revienne sur les raisons d'effectuer les calculs.	Le sens serait : « pouvais-tu le savoir à l'avance, sans avoir recours au calcul »c'est donc appel à un raisonnement direct.	Appel à l'anticipation du rôle d'un résultat dans une résolution. Appel à la formulation d'un raisonnement local (direct)
4.23	Julien : Oui je le savais…mais…	L'élève ne peut pas distinguer son opinion de la justification demandée par le professeur		
4.24	M : Bon et alors, résultat ?	L'enseignant redemande à Julien de formuler sa conclusion.		
4.25	Julien : Alors j'ai vu lequel était le moins cher et puis…			Modalité de validité : certitude mais subjectivité
4.26	M : Ca donne combien ?			
4.27	Julien : A mon avis c'est 967 fois 5 égal 4335.			Enoncé de la valeur subjective Formulation d'un résultat
4.28	M : Hum ! Pourquoi 4300 ? 5 fois 900 ?	L'enseignant interroge Julien sur l'ordre de grandeur du résultat de la multiplication. *		Mise en cause du résultat (mais pas de sa pertinence). Indication sur la nature et du lieu de l'erreur : le 3. Indication sur la cause de l'erreur. Demande de justification.
4.29	Julien : 36 000…euh ! 3600.			Mode de calcul mental, erreur de table, règle des zéro
4.30	Un élève : 5000…4500.			Indice que 9 fois 5 est calculé comme 10 fois 5 moins 5 : étayage

4.31	Julien : Oui 4500.			Accord
4.32	M : Et 5 fois 967, 4300…Il y a comme un petit défaut !	L'enseignant contrarie le résultat annoncé par Julien. Il a relevé l'erreur sans cependant la corriger.		
4.33	Julien : Oui 4500.			
4.34	M : En tous cas, le moins cher serait le prix d'un forfait vendu par 216 multiplié par le nombre d'élèves, le nombre d'enfants, 967, qu'est-ce que vous en dites ?	Le maître reformule la procédure de Julien en la synthétisant. Il souhaite mettre en débat la procédure de Julien, il souhaite l'éprouver. Il essaie de « replacer » le problème, il utilise un conditionnel.	Le professeur se heurte ainsi au mur d'un changement de modèle : les mots « vendus par 216 n'ont pas le sens qui serait nécessaire pour comprendre. Le renvoi aux élèves est voué à l'échec	Réinterprétation du calcul de l'enfant Replacement dans la perspective de la résolution du problème et de la mise en débat. Répétition de la donnée « fautive » Demande de commentaire qui indique que le calcul n'est pas satisfaisant. Moyen rhétorique didactique Raisonnement global d'organisation conditionnel. Mise en débat.
4.35	Les élèves : inaudible			
4.36	M : C'est sans doute vrai, mais quoi ?			Raisonnement conditionnel : admettons (que ce que nous disons est vrai) Appel à réexaminer la méthode de calcul. Justifie la méthode, le calcul Demande de justifications**.**
4.37	Mélanie : A condition…			*Repérage d'une condition*
4.38	M : Oui Mélanie…	Encouragement de l'enseignant plein d'espoir		
4.39	Mélanie : Tu as calculé les autres pour savoir si c'était…Pourquoi tu as de suite pris celui-là ? Tu as essayé les autres ?	Il s'agit là d'une objection formaliste, la division n'est pas comprise.	Mais Mélanie croit que la justification doit porter sur le choix des valeurs non sur la méthode de calcul.	Demande de justification Demande d'explication
4.40	Julien : J'ai fait 85 parce que c'était le premier.			
4.41	M : Oui…			
4.42	Julien : Je ne sais pas moi…			
4.43	M : Tu comprends que c'était le moins cher mais tu n'as pas essayé les autres.	Intervention injustifiée.	Le professeur voudrait faire passer les élèves du « modèle de la vente à l'unité	

			(vente ordinaire) à celui de la vente en gros avec tarifs dégressifs, mais ne sait pas comment susciter ce passage.	
4.44	Julien : Si j'ai tout essayé, si j'ai essayé 85 divisé par 6 et les autres, et sur les trois j'ai vu que c'était 1275 divisé par 216 qui marchait.			Explication active. Explication visant à justifier sa procédure. Déclaration d'exhaustivité des calculs possibles (dans le modèle de la vente ordinaire)
4.45	M : 1275 divisé par 216 puis ensuite multiplié par 979, bon…et Alexandre qu'est-ce que tu en dis par rapport à ta proposition ?	L'enseignant reformule la procédure et interroge Alexandre (qui a correctement interprété les données de l'énoncé) afin qu'il réagisse au modèle implicite développé par Julien.	Appel	Moyen rhétorique didactique. : extraction de la partie douteuse du raisonnement.
4.46	Alexandre : J'en dis que c'est vrai…		Alexandre reste dans le cadre de l'hypothèse « vente ordinaire »	Assertion (dans le cadre d'un modèle implicite).
4.47	M : Donc on achète, on va à la caisse de la station et on demande, on demande 967 forfaits au prix de 1275 divisé par 216, bon c'est bien ça ?	Troisième formulation de l'enseignant, tentative de mise en débat.		Confrontation à un milieu (supposé suffisamment familier pour « imposer » des contradictions.
4.48	Les élèves : Oui.			Agrément
4.49	M : Bon… et bien voilà.	Renoncement provisoire de l'enseignant, Julien retourne à sa place.	L'échec de la tentative est avéré	Le milieu n'envoie aucune des rétroactions espérées.

TABLEAU 2

5.3. Discussion

Les raisonnements qui apparaissent dans la production écrite de Julien (Annexe 1) sont des raisonnements de niveau 2 : les justifications et les explications relatives aux calculs effectués (posés) ne sont pas fournies par son auteur. Cependant l'analyse du modèle implicite d'action correspondant (tableau 1) nous permet d'identifier le modèle mathématique et la représentation que Julien a de la situation objective. Son modèle est celui de la situation commerciale classique, basé sur la vente de forfaits à l'unité, correspondant au modèle mathématique de la proportionnalité.

La transcription (tableau 2) montre que Julien, lors de la phase de présentation, procède à une dénotation de ses calculs, sans fournir à la classe davantage d'explication sur la finalité des opérations posées. De ce fait son projet n'est pas accessible à l'ensemble des élèves, rendant nécessaire une intervention de l'enseignant. En procédant ainsi il offre à l'enseignant la possibilité de proposer une interprétation de ses calculs qui ne correspond pas nécessairement à son projet initial. Notre analyse établit que l'enseignant utilise à de multiples reprises des moyens rhétoriques didactiques, tels que nous les avons définis (§2). Ainsi il réussit à détourner le projet initial de Julien au profit du sien qui vise à élaborer, à partir des calculs posés, le raisonnement qui sous-tend le module 2 de la solution standard.
De plus cette analyse met en évidence le fait que l'enseignant essaye de mettre en débat, à plusieurs reprises, la validité des procédures présentées, plus précisément la validité des décisions sur lesquelles reposent les raisonnements des élèves. Cependant ses tentatives échouent les unes après les autres. Bien qu'il choisisse d'interroger des élèves, dont la représentation de la situation objective est conforme à ses attentes, afin de faire invalider les représentations erronées inhérentes aux productions présentées, ceux-ci ne mettent pas en défaut les décisions erronées sur lesquelles reposent les productions. Par exemple dans l'analyse de la présentation de Julien, l'enseignant interroge Alexandre, dont le modèle implicite d'action est correct (tableau 1), cependant celui-ci ne met nullement en défaut la représentation que Julien a du milieu objectif.
Par conséquent l'analyse de la transcription permet de mettre en lumière :

- d'une part les moyens rhétoriques utilisés par l'enseignant pour détourner habilement les raisonnements de Julien afin de produire les éléments correspondant aux modules de la solution attendue,
- d'autre part les difficultés auxquelles se trouve confronté l'enseignant lorsqu'il souhaite amener les élèves à débattre de la validité des décisions qui sous-tendent les raisonnements des élèves.

Nous avons choisi de travailler, lors de cet atelier, cette partie de la transcription car elle est représentative des moyens didactiques mis en œuvre par l'enseignant pour traiter les raisonnements des élèves.

6. CONCLUSIONS ET CONJECTURES

6.1. Les raisonnements produits

L'objet de l'analyse est l'étude de l'influence de certains caractères de la situation proposée aux élèves sur l'élaboration des différents raisonnements, leurs usages et les possibilités de leurs traitements qui s'offrent à l'enseignant lors de la phase de présentation des productions.

L'identification des différents "niveaux" de raisonnements apparaissant dans les productions des élèves (tableau 1) montre que les raisonnements élaborés par les élèves ne sont pas très nombreux, ne relèvent pas d'une grande complexité si l'on se réfère au nombre de calculs produits et au nombre d'étapes du raisonnement global, et sont pour la plupart de niveau 2. De plus l'identification des modèles implicites d'action, raisonnement de niveau 1 qui sous-tendent chacune des productions, n'est pas une tâche particulièrement difficile pour les observateurs ni même pour l'enseignant. Cependant cette reconnaissance des modèles utilisés par les élèves nécessite d'avoir effectué au préalable une analyse a priori des comportements, des difficultés et des procédures susceptibles d'apparaître lors des différentes phases du déroulement de la leçon[5].

[5] Dans les situations d'actions ayant fait l'objet de publications destinées aux professeurs, figure nécessairement une analyse didactique de la situation qui comporte d'une part une analyse a priori, des comportements, des

L'analyse détaillée de la phase de mise en commun[6], dont le tableau 2, est une partie représentative des différents types et des différentes formes d'interactions, vise à relever les différents types d'arguments utilisés par l'enseignant pour essayer de prendre en compte et de traiter les raisonnements des élèves. Cette analyse montre que l'enseignant se trouve démuni en ce qui concerne le traitement effectif des raisonnements produits, c'est à dire l'utilisation de raisonnements logiques en relation directe avec la situation objective pour répondre aux raisonnements des élèves. En effet il ne parvient à prendre en compte les raisonnements produits et à les faire partager à l'ensemble de la classe, de plus les tentatives de mises en débat de la validité des productions se révèlent à chaque fois infructueuses.
Ce qui nous conduit à une première conjecture : ce qui limite l'enseignant dans les possibilités qui s'offrent à lui de prendre en compte, de faire expliciter et de traiter les raisonnements des élèves, ce n'est pas tant leur complexité mais un autre caractère lié à la nature même de la situation proposée aux élèves.

6.2. Les effets de la leçon sur les comportements et les apprentissages des élèves

6.2.1. Sur la validité des raisonnements et sur la conviction des élèves

Il apparaît à de nombreuses reprises, dans l'analyse complète de la transcription, que les élèves ayant produit un raisonnement basé sur une représentation conforme aux attentes de l'enseignant, n'ont pas pris conscience des conditions qui définissent le milieu objectif. En effet ils ne parviennent pas lors de la phase de présentation de leur production à formuler les raisons qui les ont conduit à élaborer celle-ci, ni même à réagir aux raisonnements de leurs camarades lorsque ces derniers sont basés sur des représentations erronées de la situation objective.
Ceci peut en partie apparaître comme résultant du fait que la situation n'offre pas aux élèves la possibilité d'éprouver leurs décisions : le milieu objectif ne renvoie à l'élève aucune rétroaction, par conséquent ce dernier n'est pas en mesure de valider ou d'invalider son raisonnement, et donc de revenir sur les décisions qui sous-tendent son modèle implicite d'action, ni sur sa représentation du milieu objectif.

6.2.3. Sur les répertoires des élèves : action, langage, opinions

L'élève n'étant pas en mesure de porter un jugement sur sa « production », il ne peut pas utiliser le raisonnement qu'il a produit, comme un argument, en situation de débat. Le débat entre pairs, souhaité par l'enseignant, est ici hors de portée des élèves.

6.3. Les effets sur le processus didactique

6.3.1. La dévolution

Les décisions qui sous-tendent l'élaboration de chacun de ces modèles sont étroitement liées à la représentation que l'élève se fait du milieu objectif. Or la situation objective proposée est telle que l'élève est confronté à un milieu dont il doit imaginer les règles de fonctionnement.
Le milieu objectif n'étant pas clairement défini, ceci a pour conséquence de conduire les élèves à des représentations différentes de la situation objective et donc à l'élaboration de modèles implicites d'action différents.
Par conséquent la situation objective ne peut pas être dévolue aux élèves, i.e. ceux-ci ne peuvent pas remettre en cause leur modèle commercial de la vente à l'unité adopté par une majorité d'entre eux, ni même calculer les résultats des différents choix possibles.

---

difficultés et des raisonnements susceptibles d'apparaître lors du déroulement de la leçon, d'autre part une analyse détaillée des comportements et des productions lors des différentes phases.

[6] L'analyse complète de la phase de mise en commun est proposée dans la thèse de P. Gibel « Fonctions et statuts des raisonnements dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire » (2004)

6.3.2. Les corrections didactiques

L'analyse complète montre que l'enseignant ne parvient pas à faire expliciter aux élèves, venus présenter leur production, les raisons sur lesquelles repose leur modèle implicite d'action. Aussi l'enseignant, pour éviter une situation de blocage, liée au fait que les élèves ne comprennent pas les décisions prises par leurs pairs, est contraint d'utiliser des procédés rhétoriques, linguistiques, sémiologiques, désignés dans notre analyse, comme des « moyens rhétoriques didactiques » tels que nous les avons identifiés, à de multiples reprises, dans l'analyse présentée (tableau 2). Ces moyens permettent à l'enseignant de détourner le projet initial de l'élève au profit du sien, c'est-à-dire l'établissement de certains modules de la solution attendue. Cependant les raisons effectives qui justifient l'élaboration du module ne sont pas données à voir aux élèves : celles qui sous-tendent et qui justifient la mise en relation des données de l'énoncé dans la réalisation du module sont cachées.

De plus les élèves qui ont produit le raisonnement initial n'ont aucun retour sur les choix qu'ils ont effectués et ne peuvent donc prendre conscience du caractère erroné de leur représentation et de leurs décisions.

6.3.3. L'évaluation

La situation objective ne peut être dévolue aux élèves, par conséquent l'enseignant ne peut évaluer les capacités des élèves à mobiliser et à utiliser leurs connaissances pour produire le raisonnement attendu.

6.3.4. L'institutionnalisation des apprentissages

Le professeur ne peut pas faire apparaître l'élaboration de chacun des modules de la solution standard comme une conséquence raisonnée de l'articulation des données de la situation objective basée sur les connaissances supposées des élèves. En conséquence d'une part il est contraint d'utiliser des moyens rhétoriques didactiques pour répondre aux raisonnements des élèves, d'autre part il ne peut institutionnaliser les connaissances utilisées par les élèves, inhérentes aux calculs posés par les élèves (multiplication, division euclidienne, quotient décimal) puisqu'il ne peut pas les extraire de la situation proposée aux élèves.

L'analyse complète de la transcription met en lumière l'impossibilité pour l'enseignant de relever et de faire partager les différentes organisations (c'est-à-dire les différents moyens de concevoir l'achat des forfaits conformément à la vente en gros), conformes à ses attentes, qui apparaissent dans certaines productions.

Par conséquent si la prise en compte et le traitement des raisonnements pose des difficultés à l'enseignant pour parvenir à élaborer la solution standard, ce n'est pas tant par la complexité des raisonnements produits, mais essentiellement parce que son projet n'est pas visible par l'ensemble des élèves.

De plus une des conséquences de la pratique de l'enseignant, plus précisément du recours à l'usage de moyens rhétoriques, est que les élèves n'ont pas eu, lors de la phase de mise en commun, de retour sur les raisonnements qu'ils ont produits, ils n'ont pas non plus pris conscience du projet d'apprentissage ni même de la manière d'élaborer la solution attendue.

Par conséquent cette situation-problème n'a pas permis aux élèves de progresser dans leur pratique du raisonnement.

Il n'apparaît aucun savoir mathématique nouveau susceptible d'être institutionnalisé, d'ailleurs aucun temps n'est réservé par le professeur pour « extraire » ce qui peut être retenu de cette « leçon ». Par contre elle présente l'avantage, de soumettre à l'étude, des utilisations originales de relations commerciales.

7. CONCLUSION

L'étude montre que les élèves, confrontés à la situation-problème élaborée et conduite par le maître, ont certes produit des raisonnements, cependant la plupart d'entre eux n'ont pas progressé dans la pratique du raisonnement. En effet ils n'ont pas eu de retour sur leur raisonnement, du point de vue de sa validité, de sa pertinence ou de son adéquation puisque l'enseignant n'a pas été en mesure de le traiter. En effet pour répondre aux raisonnements qui sous-tendent une majorité des productions présentées lors de la mise en commun, l'enseignant n'a pu utiliser de raisonnements logiques s'appuyant sur la situation objective, il a été contraint d'avoir recours à des moyens rhétoriques.

Or ce n'est pas la complexité des raisonnements produits qui contraint l'enseignant à utiliser ce type de moyens pour traiter les raisonnements, mais le fait que la situation-problème ne puisse pas être dévolue aux élèves. Il en résulte que ce n'est pas la gestion de l'enseignant qui est remise en cause par cette étude, c'est la nature de la situation, élaborée par l'enseignant, qui limite très fortement les possibilités de prendre réellement en compte les raisonnements des élèves.

La situation objective proposée ne permet pas à l'enseignant

- de faire partager à l'ensemble des élèves les raisons effectives qui ont conduit chacun d'eux à élaborer des modèles implicites d'actions et à prendre certaines décisions dans le cadre des modèles correspondants,
- de faire percevoir aux élèves les justifications de l'élaboration des modules, correspondant aux principales étapes de la solution standard c'est-à-dire l'organisation de la solution en différents modules,
- de faire partager aux élèves le raisonnement qui sous-tend chacun des modules de la solution.

Dans le cas où la situation est telle que l'enseignant a la possibilité de faire dévolution à ses élèves d'une situation d'action « autonome » (*self content situation*) alors la Théorie des Situations Didactiques en Mathématique permet de prévoir, pour l'enseignant la possibilité de se référer, lors de l'analyse des productions des élèves, à la situation objective. En effet ces derniers peuvent développer leurs stratégies personnelles et leurs propres raisonnements en fonction des situations auxquelles ils se sont confrontés. Cela permet à l'enseignant de ne pas être contraint d'avoir recours à des moyens didactiques rhétoriques pour effectuer un traitement des raisonnements produits par les élèves

Dans le cas contraire, l'enseignant est tenu d'apporter des informations, des feed-back sur les raisonnements des élèves sur la base d'un projet qui n'est pas visible par l'ensemble d'entre eux, et c'est là que le professeur va être contraint d'utiliser des moyens rhétoriques didactiques. En effet les arguments développés par l'enseignant et les élèves ne pourront se référer à la situation objective.

BIBLIOGRAPHIE

BALACHEFF, N., «Processus de preuve en situation de validation », dans *Educational Studies in Mathematics* 18(2), pp 147-176.

BROIN D.: 2002, «Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires », Thèse soutenue à l'Université Bordeaux I.

BROUSSEAU, G.: 1986, « Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques », dans *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Volume 7(2), Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, pp 33-115.

BROUSSEAU, G.: 1988 «La relation didactique : le milieu », dans *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Volume 9(3), Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, pp 309-336

BROUSSEAU, G.:1989, «Le contrat didactique : le milieu», dans *Recherches en Didactique des Mathématiques* Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.

G. BROUSSEAU, P.GIBEL (2005), "*Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations* ", vol 59, p13-58, Educational Studies in Mathematics, KLUWER.

BROUSSEAU G.:1997 "Theory of Didactical Situations in Mathematics", *Mathematics Education Library* Kluwer academic publishers.

COULTARD, SINCLAIR :1975 , « Towards an analysis of discourse, the english used by teachers », Oxford University Press.

GIBEL P. (2008) « Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques à l'école primaire », Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg.

GIBEL P. (2006) " Raisonnement et argumentation. Analyse des différentes formes et fonctions des raisonnements des élèves en situation de débat à l'école primaire ", Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone 2006, Université de Sherbrooke, Canada.

GRIZE, J.B.:1974, « Recherches sur le discours et l'argumentation », Droz.

GRIZE J.B.:1982 , « De la logique à l'argumentation », Droz.

GRIZE J.B., PIERAUT-LE-BONNIEC G., « La contradiction. Essai sur les opérations de la pensée », Paris, Presses Universitaires de France.

MARGOLINAS C. :1993 « De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques », La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS, C. et STEINBRING, H.: 1994, « Double analyse d'un épisode : cercle épistémologique et structuration du milieu », dans *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp 240-257.

MOPONDI, B. :1995, « Les explications en classe de mathématiques »,*dans Recherches en Didactique des Mathématiques*, Volume 1(3), Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, pp7-52.

MOREIRA, M., «Le traitement de la vérité mathématique à l'école», Thèse Université Bordeaux I.

OLERON P.:1977, «Le raisonnement», dans Presses Universitaires de France.

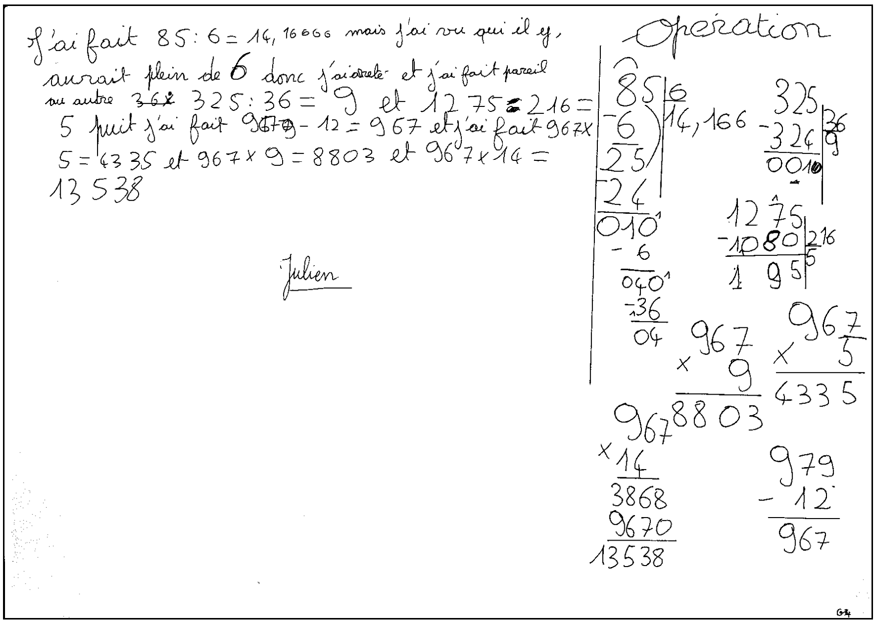
PERELMAN C. :1970, « Le champ de l'argumentation», dans Presses Universitaires de France.

PERELMAN C., OLBRECHTS-TYTECA L :1976, « Traité de l'argumentation », Institut de Sociologie, 3° éd..

ROBRIEUX J.J. :1993 « Eléments de Rhétorique et d'Argumentation », Dunod

8. ANNEXES

ANNEXE 1 Production de Julien



CONCEPTION DE SCENARIOS DE FORMATION AUTOUR DES CALCULATRICES

Teresa Assude
Université de Provence (IUFM)
Pierre Eysseric
Université de Provence (IUFM)

Résumé : Les calculatrices existent dans les programmes depuis très longtemps et il existe actuellement des ressources telles que le document d'accompagnement des programmes sur les calculatrices qui montrent un certain nombre d'activités qu'on peut faire autour de cette technologie numérique. A la suite d'enquêtes faites localement, nous nous sommes aperçus que ces documents sont peu utilisés et que les calculatrices sont peu présentes dans les classes. Comment faire pour inverser cette tendance ? Un des moyens consiste à développer des formations autour des usages des calculatrices. Dans cet atelier, nous aborderons ce problème à partir de ressources publiées et de ressources produites dans le cadre d'un groupe de développement de l'IUFM d'Aix-Marseille, notamment des vidéos faites à partir d'observations de classes

Les programmes font référence aux calculatrices depuis très longtemps et il existe actuellement des ressources comme le document d'accompagnement des programmes 2002 « Utiliser les calculatrices en classe » qui présentent un certain nombre d'activités que l'on peut faire autour de cette technologie numérique. A la suite d'enquêtes réalisées localement, nous nous sommes aperçus que ces documents sont peu utilisés et que les calculatrices sont peu présentes dans les classes.

Pourquoi cet état de fait ? Comment faire pour inverser cette tendance ? Nous partons de l'hypothèse que la formation (initiale et continue) a un rôle à jouer et que l'état actuel est dû (en partie) au fait que dans la formation on n'insiste pas assez sur les résistances des enseignants vis-à-vis des calculatrices et sur les usages de ces technologies avec les élèves. C'est pourquoi nous avons voulu travailler ce sujet à partir d'une problématique de conception de scénarios de formation.

Plusieurs questions sont au cœur de cet atelier : quelles variables prendre en compte pour concevoir des scénarios de formation à partir de ressources existantes ? Quels types de dispositifs mettre en place dans la formation pour que les enseignants s'approprient des ressources existantes ? Quel rôle peut jouer dans ces scénarios la production de ressources telles que des films et des observations de classe ? Comment utiliser des vidéos de classe pour bâtir des dispositifs de formation ?

Nous présentons tout d'abord l'organisation de l'atelier, puis le scénario de base de l'IUFM de Marseille soumis à la discussion des participants, et enfin quelques-unes des productions individuelles ou collectives relevées, ainsi que quelques points de la discussion générale à propos des scénarios de formation.

I – ORGANISATION DE L'ATELIER

L'atelier était organisé pour articuler une phase individuelle, une phase en petits groupes et une phase en collectif.

Le but de l'atelier étant d'apporter quelques éléments de réponse aux questions indiquées plus haut, nous avons commencé par leur présentation, suivie d'un travail individuel pendant un quart d'heure, important pour rentrer dans la problématique de l'atelier. Ce travail consistait à répondre au questionnaire suivant :

Questionnaire sur la formation des maîtres aux usages des calculatrices

1 – Indiquez votre catégorie professionnelle

2 – Avez-vous en charge la formation mathématique des PE2 ?

3 – Consacrez-vous du temps dans cette formation aux usages des calculatrices ? Combien de temps ?

4 – Depuis combien d'années faites-vous cette formation aux calculatrices ?

5 – Décrivez rapidement cette formation (étapes, contenus)

6 – Quelles sont les ressources que vous utilisez dans cette formation ?

7 – Qu'est-ce que vous voulez que les stagiaires retiennent de cette formation ?

8 – Comment estimez-vous les effets de cette formation ? (par exemple des stagiaires vous ont dit qu'ils avaient utilisé ce que vous avez fait en formation,…)

Après ce moment individuel de l'activité, les participants ont travaillé par petits groupes. Il s'agissait, non pas de confronter toutes les réponses au questionnaire précédent, mais de partir de ces réponses individuelles pour répondre à deux des questions posées dans les préliminaires :

- quelles variables prendre en compte pour concevoir des scénarios de formation sur les usages des calculatrices ?
- quels types de dispositifs mettre en place dans la formation pour que les enseignants s'approprient les ressources existantes ?

Les réponses ont été inscrites sur une affiche puis présentées au groupe entier.

La troisième phase, collective, a consisté à rendre compte des travaux en petits groupes et de ceux des animateurs. Ceux-ci ont présenté le scénario de base du groupe de développement de l'IUFM d'Aix-Marseille, et un exemple de production en classe.

La discussion finale a eu pour but la comparaison de différents scénarios pour mettre en évidence des choix possibles concernant les variables, les types de dispositifs et le rôle de la production de ressources pour le changement des pratiques (à la fois de formation et de classe).

II – LE SCENARIO DE BASE POUR LA DISCUSSION

Nous présentons ici les différents éléments qui nous semblent importants à prendre en compte pour concevoir un scénario de formation. Ceci ne veut pas dire que ces éléments sont les seuls, et qu'un scénario de formation doive nécessairement prendre en compte tous ces éléments. Nous ne rentrerons pas ici dans la justification de ces choix mais nous renvoyons le lecteur à Assude (2009).

QUELQUES ELEMENTS POUR CONCEVOIR UN SCENARIO DE FORMATION SUR LES CALCULATRICES

Ces moments ne sont pas chronologiques car on peut en changer l'ordre. Ces moments sont modulables car on peut les choisir en fonction du public et de la durée de la formation.

Premier moment : la dimension personnelle

Quelles représentations les stagiaires ont-ils sur les calculatrices et sur leur usage à l'école primaire ? Commencer par travailler sur ces représentations nous apparaît comme un élément important car un certain nombre de stagiaires ont beaucoup de résistance à utiliser les calculatrices en classe. Ce travail peut être fait à partir du questionnaire (voir annexe 1)

Une phase collective est conseillée pour mettre en évidence les arguments pour ou contre l'utilisation de la calculatrice.

Deuxième moment : la dimension instrumentale

Certains travaux de recherche ont montré que la dimension instrumentale n'est pas assez prise en compte lors de l'intégration des technologies numériques à l'école. Ainsi il nous semble important de faire prendre conscience aux stagiaires que la genèse instrumentale (Rabardel 1999, Trouche 2005) peut être complexe et que l'enseignant doit organiser cette genèse.

Le problème des différences entre les artefacts peut être posé à partir de l'existence de deux mots : calculette et calculatrice, quelles différences ?

Un travail de manipulation avec les calculatrices comportant des touches que les stagiaires ne connaissent pas forcément semble important pour cette prise de conscience.

Exemples de touches : division euclidienne, mémoire, opérateur constant

Exemple de situation : Aujourd'hui nous sommes mercredi 19 octobre 2005, quelle sera la date dans 5000 jours ? (Voir Doc COPIRELEM, tome IV, pages 13 et 14)

Cette situation peut permettre de travailler sur différentes touches et de présenter la touche « division euclidienne » comme celle qui est la plus économique.

Plusieurs stratégies peuvent être utilisées pour prendre en compte cette dimension instrumentale (Assude, 2007) : initiation instrumentale, exploration instrumentale, renforcement instrumental, symbiose instrumentale.

Nous donnons par la suite quelques exemples inspirés ou pris dans le document d'accompagnement sur les calculatrices.

1) **Une ou plusieurs séances de découverte et familiarisation**

- Comment l'allumer et l'éteindre
- Faire l'inventaire des touches : les touches « chiffres », les touches « opérations » (÷ correspond à : , le point *qui* correspond à la virgule) et les autres...... dont on apprendra l'usage plus tard ;
- Quel est le plus grand nombre affichable ? (le lire). Que se passe-t-il si on fait +1 ? Quel est le plus petit nombre affichable ? (si les nombres décimaux ont déjà été abordés)
- Que se passe t-il si je frappe : 16 - 26 ?
- Que se passe t-il si je frappe: 5 + 3 = = (opérateur constant à droite pour l'addition), faire de même pour les autres opérations
- Que doit afficher la calculatrice si je frappe 5 x 2 + 6 = ? Et si je frappe 6+5x2=?
- On peut donner un aperçu des fonctions des touches C (ou CE ou AC) qui permettent de corriger un nombre en cours de calcul ; et de la touche M qui permet de stocker un nombre en mémoire.
- Ne pas oublier d'éveiller la méfiance des élèves envers les erreurs de frappe, en proposant une suite (suffisamment complexe) de calculs à l'oral ou à l'écrit et en faisant confronter les résultats de la classe.

2) Trace écrite

L'ensemble des constatations de la classe peut donner lieu à une trace écrite recopiée sur affiche ou sur les cahiers du style :
MODE D'EMPLOI DE MA CALCULATRICE
La touche ON sert à allumer la calculatrice.
La touche OFF sert à éteindre la calculatrice

Si je frappe	La calculatrice affiche	Remarques
5 + 3 = 5 + 3 = =	8 11	La calculatrice effectue le calcul C'est comme si j'avais frappé 5+3+3= ....

Troisième moment : la dimension institutionnelle

La dimension institutionnelle permet de placer ce qu'on fait avec les élèves par rapport aux attentes de l'institution. Le travail sur les textes officiels, les programmes, et les documents d'application et d'accompagnement apparaît comme nécessaire.

Ce travail peut être fait par groupes à partir des textes cités précédemment, et plus particulièrement du document d'accompagnement intitulé « la calculatrice à l'école ». Les stagiaires doivent répondre aux questions suivantes :

<u>Question commune aux deux cycles</u>
Le document valide-t-il ? invalide- t- il ? complète - t- il ? les réponses préalablement fournies lors de la première étape.
Première mise en commun rapide. Aboutir à la liste des fonctions possibles de la calculatrice à l'école.

<u>Questions pour le cycle 2 :</u>
- Quand et comment introduire la calculatrice ?

- La calculatrice a- t-elle sa place dans toutes les activités de résolution de problème ? Justifiez
- Comment faire de la calculatrice un outil d'aide à l'apprentissage du calcul ?
- En quoi la calculatrice peut-être un outil pour bien comprendre le caractère positionnel de la numération décimale ?

Questions pour le cycle 3 :
- Quels types de calcul permettent aux élèves de mettre en œuvre certaines propriétés des opérations grâce à l'utilisation de la calculatrice ?
- Quels types de problèmes se prêtent bien à l'utilisation de la calculatrice par les élèves ?
- Pourquoi est–il indiqué page 7 : « il s'agit de travailler au bon usage simultané de la calculatrice et de la feuille de papier »
- Quelles activités permettent aux élèves de comprendre ce que veut dire en acte : « utiliser la calculatrice à bon escient »

Chaque groupe réalise une affiche.
Mise en commun. On commence par le cycle 2, puis le cycle 3.

L'objectif est qu'à la fin de l'activité les stagiaires aient le sentiment d'avoir découvert des facettes insoupçonnées de la calculatrice et voient dans celle-ci une alliée pour l'ensemble des apprentissages numériques (connaissance des nombres, calcul et résolution de problème).

Quatrième moment : la dimension praxéologique

Cette dimension est au cœur de l'ingénierie de formation puisque l'organisation du travail mathématique de l'élève est un besoin pour l'enseignant. Comment satisfaire ce besoin ? Nous avons adopté une approche fonctionnelle, ainsi nous allons mettre en évidence les différentes fonctions que la calculatrice peut avoir dans le travail de l'élève dans le domaine numérique et présenter des praxéologies complètes ou incomplètes qui permettent d'illustrer ces fonctions. Dans le cas des calculatrices, le document d'accompagnement des programmes de 2002 sur les calculatrices est organisé dans ce sens. Là encore, un travail peut être fait à partir de cette ressource institutionnelle, qui exemplifie les différentes fonctions de la calculatrice.

Exemples

1) La calculatrice comme aide à l'apprentissage du calcul mental

- Pour l'entraînement au calcul mémorisé : par exemple, les élèves sont par deux, l'élève A a une calculatrice et frappe en annonçant un calcul (7 x 4), l'élève B doit annoncer le résultat, l'élève A appuie alors sur = , si les deux résultats correspondent, B marque un point. Les élèves se passent la calculatrice et inversent les rôles. Autre exemple pour travailler les compléments à 10, 100 ou 1000 : L'élève A frappe 87 + , l'élève B doit alors dire le nombre nécessaire pour que la calculatrice affiche 100 comme résultat.
- Pour l'entraînement au calcul réfléchi : une calculatrice par élève (ou pour deux) et une ardoise.

Le maître écrit le nombre de départ et le nombre d'arrivée, à charge aux élèves de trouver comment passer de l'un à l'autre, sans effacer ni éteindre, et de noter les actions réalisées sur l'ardoise. Le maître recueille au tableau les différentes propositions et peut faire évoluer le travail en fixant des contraintes : en une seule étape, sans appuyer sur telle ou telle touche , que ce soit des touches opérations ou chiffres.

- En cours ou en fin d'apprentissage, le maître peut proposer des jeux « plus vite que la calculette » : par exemple un élève vient au bureau et doit frapper sur la calculette un calcul dicté par le maître à l'ensemble de la classe, les élèves qui ont réussi à donner le résultat avant l'élève qui a la calculette marquent un point, ou un point pour leur équipe.

2) La calculatrice comme aide à l'apprentissage de la numération

- Même dispositif que dans le paragraphe précédent : si le nombre de départ est 689, le nombre d'arrivée est 789 et la contrainte est « en une seule étape », l'élève doit frapper + 100 ; si le nombre de départ est 275 et le nombre d'arrivée est 265, il doit frapper -10........ ; si le nombre de départ est 1628, celui d'arrivée 1268, et la contrainte « en deux étapes »l'élève doit frapper - 400 + 40 ou + 40 – 400.
- L'enseignant(e) propose une dictée de nombres sous forme non conventionnelle : exemple 3 comme chiffre des dizaines « simples », 6 comme chiffre des unités de mille, 7 comme chiffre des centaines « simples », 1 comme chiffre des unités simples correspond au calcul 30 + 6000 + 700 + 1 = 6731.

3) La calculatrice comme aide à l'apprentissage du calcul posé

En séance d'entraînement, comme outil de vérification.

Modalité possible : 10 calculs en ligne sont proposés au tableau. Au bureau ou sur une table où peut s'asseoir l'enseignant(e).

Les élèves choisissent un des calculs, le posent sur leur cahier de brouillon et le calculent puis viennent vérifier leur résultat avec la calculatrice. S'il est juste, ils peuvent en choisir un autre, sinon ils vont le recommencer. L'enseignant(e) se décharge ainsi du travail fastidieux de la correction et peut aider ponctuellement ceux qui en ont besoin.

4) Lors de la résolution de problèmes « classiques »

- Pour alléger la tâche des élèves, pour qu'ils se focalisent sur la démarche à utiliser, sur les nombres et les opérations à mettre en jeu plutôt que sur les calculs : la calculatrice peut être à disposition de chaque élève, ou de certains élèves (différenciation possible), ou d'un petit groupe d'élèves (2 ou 3 maximum) qui effectuent les calculs demandés sous forme écrite par leur camarade[1]. Cette dernière modalité va obliger les élèves à présenter clairement les calculs à effectuer.
- Pour permettre aux élèves de résoudre certains problèmes qui mettent en jeu des opérations dont ils ne maîtrisent pas encore la technique opératoire mais dont ils perçoivent le sens (soustraction en CE2 par exemple).

5) Comme outil dans des situations-problèmes, ou problèmes pour apprendre

- Pour introduire (ou revisiter) l'addition des nombres décimaux :

3,12 + 6,4 = 9,42 et non pas 9,16 comme les élèves s'y attendent. Pourquoi ?

- Comment calculer 387 × 204 sans appuyer sur la touche × ?
- Comment calculer des sommes, des différences ou des produits dont le résultat dépasse le milliard (capacité de la calculette) ?
- Comment trouver le quotient et le reste d'une division euclidienne, de 2748 par 45 ? (On peut poser le problème : un chocolatier fabrique 2 748 chocolats, son employé doit les placer dans des boîtes de 45. Combien de boîtes remplira-t-il ? Restera-t-il des chocolats, si oui combien ?) Si on repose le même problème avec 2754, on risque d'obtenir 61 avec reste 2, car la calculatrice donne 61,2 comme résultat. Comment le vérifier ?

La venue de la division décimale apporte d'autres opportunités.

6) Comme outil lors de « problèmes pour chercher »

[1] Cette idée a été proposée par S.Gairin-Calvo dans les aides pédagogiques APMEP avec les « centres de calcul » où l'organisation des calculs à effectuer était une tâche séparée de la réalisation effective de ces calculs.

- Trouver 3 nombres qui se suivent dont la somme est égale à 63 (au CM, poser ensuite la question : peut-on trouver trois nombres entiers qui se suivent dont la somme est égale à 62 ? La réponse est non, pourquoi ?)
- Trouver 2 nombres dont la somme est égale à 82 et la différence à 18
- Trouver 3 nombres qui se suivent dont le produit est 91 080

8) Comme outil de différenciation

- Dans les activités et les modalités proposées, la calculatrice est souvent un moyen de différenciation, par les aides ou par les rôles qu'elle permet de faire coexister dans la classe.

Ici il peut être intéressant de choisir deux ou trois activités où on mettra en évidence d'une manière explicite par une synthèse :

- l'articulation entre les différents types de calcul ;
- l'articulation entre le travail avec la calculatrice et le travail en papier-crayon (différentes techniques pour un même type de tâche par exemple) ;
- le besoin de justifier et de théoriser (l'aspect technologico-théorique au sens de Chevallard) ;
- la relation entre calcul et raisonnement ;
- le besoin de traces écrites lors du travail avec les calculatrices (on peut par exemple organiser le travail de l'élève de manière qu'il écrive les différents calculs à faire, par exemple à travers la situation du robot qui fait les calculs).

Cinquième moment : la dimension épistémologique

Pour cette dimension, nous nous posons des questions autour de la nature du savoir numérique instrumenté. Une réflexion sur le calcul et les instruments, sur les nombres, leur écriture et les instruments nous semble incontournable. Cette réflexion peut être appuyée sur des ressources existantes, telles que celle publiée par la CREM, pilotée par Jean-Pierre Kahane (2002). Par exemple, la relation entre calcul et raisonnement nous paraît un point à mettre en valeur. Souvent on oppose calcul et raisonnement en mettant le calcul du côté des algorithmes et des automatismes. Or les activités de calcul (et en particulier de calcul instrumenté) peuvent être l'occasion d'un apprentissage du raisonnement.

En mettant l'accent sur cette dimension, nous voulons aussi créer un espace où les enseignants prennent de la distance par rapport aux besoins des élèves et s'intéressent au savoir mathématique plus largement que dans leur institution « classe ».

Selon le public, on peut présenter plus ou moins rapidement le fait que le travail des calculatrices est inclus dans une perspective plus large, celle du calcul et des instruments.

Sixième moment : analyse et production de ressources

Un premier travail proposé est celui de l'analyse des ressources existantes et notamment des manuels : quels sont les types de tâches utilisant des calculatrices proposés dans les manuels ? Quelles sont les fonctions que cet outil assume dans le travail ?

Un deuxième type de travail est celui de la production de ressources pour l'enseignant. Cette production de ressources a deux fonctions : la première est de combler le manque de ressources pour l'enseignement ; la deuxième est celle de favoriser l'engagement des acteurs dans cette intégration. Cette production de ressources est aussi valable pour les formateurs, comme nous l'avons fait dans le cadre du groupe de développement de l'IUFM d'Aix-Marseille.

C'est dans ce cadre que nous avons produit un DVD avec des situations de classe où les formateurs et les enseignants étaient engagés ensemble dans cette production. Nous avons présenté quelques-unes de ces situations dans l'atelier.

III – PRODUCTIONS ET DISCUSSION DANS L'ATELIER

Dans cette partie, nous donnons quelques exemples de productions individuelles (questionnaire de départ) et collectives (travail en petit groupe), et présentons quelques points de la discussion générale.

1 – Variations individuelles

Nous ne rendons pas compte ici de toutes les réponses individuelles mais nous voulons signaler quelques points.

1) Il y a des formateurs qui ont en charge la formation des PE2 (ou PE1) mais ne font pas de formation spécifique aux calculatrices. Étant donnée notre hypothèse de base sur le rôle de la formation comme condition (non suffisante) pour faire évoluer les pratiques concernant la calculatrice, il nous paraît difficile de ne rien faire en formation si on veut que les enseignants puissent par la suite s'investir dans cette intégration. Ceci dit, ce n'est parce qu'on fait une formation aux calculatrices qu'ensuite ceux-ci l'utilisent en classe. Certaines réponses indiquent que les effets estimés de la formation semblent faibles, et d'autres réponses qu'ils n'ont pas été mesurés. L'un des participants note le rôle du C2I2e pour faire évoluer les positions des stagiaires : « Les stagiaires utilisent ce qu'on a fait en cours pour la validation du C2I2e depuis 2 ans. Avant, ils l'utilisaient très peu. Les arguments avancés sont : pas de calculatrice en classe ; pas assez de temps pour traiter le programme. »

2) Le temps alloué à la formation aux calculatrices varie entre une demi-heure et six heures (en excluant les formateurs qui ne font rien). Là encore il y a une différence importante entre les formateurs. L'accent n'est pas mis sur les mêmes variables.

3) Beaucoup de formateurs utilisent les mêmes ressources, notamment le document d'accompagnement sur les calculatrices des programmes de 2002. Nous pensons que le rôle des ressources est vraiment important. De ce point de vue, l'analyse des manuels montre des manques en ce qui concerne les usages des calculatrices, ce qui n'est pas sans conséquence sur les pratiques des enseignants, vu leur usage des manuels.

4) L'institutionnalisation : Qu'est-ce que les formateurs veulent que les stagiaires retiennent de cette formation ? Prenons quelques exemples de réponses :

« Qu'il est possible d'utiliser la calculatrice avec les élèves, que son utilisation doit être pensée et préparée ; que la calculatrice n'empêchera pas leurs élèves d'apprendre à calculer mais qu'elle peut être au contraire un apport dans cet apprentissage. »

ou encore

« Que la calculatrice est un bon outil pour apprendre à calculer et pour mieux comprendre la signification des chiffres dans l'écriture d'un nombre ; qu'un usage régulier et bien encadré de l'outil permet aux élèves de bien s'en approprier les fonctions. »

ou encore

« L'usage à bon escient (pas de confiance aveugle). »

5) La description des différentes étapes des formations aux calculatrices. Là aussi, il y a des variations individuelles mais certaines étapes apparaissent dans plusieurs de ces formations.
Voici quelques exemples :

« - *Présenter le document d'accompagnement ;*
- *rechercher avec les stagiaires les moments d'utilisation possible de la calculatrice avec leurs élèves ;*
- *leur faire vivre quelques situations d'utilisation de la calculatrice et faire avec eux une analyse a priori ;*
- *leur demander de construire des scénarios pour utiliser la calculatrice et les faire vivre dans les classes en atelier professionnel ;*
- *analyse a posteriori des séances réalisées.* »

Un autre participant indique qu'il considère deux parties dans sa formation :
« Deux parties A et B
Dans la partie A :
1) *diagnostique : à quoi sert la calculatrice ? Listing des réponses*
2) *utilisation du document d'accompagnement pour enrichir 1)*
3) *recherche d'exemples d'activités pour chacune des fonctions repérées*

Dans la partie B :
1) *problèmes utilisant le support de la calculatrice du genre : calcul de 78581312 × 9861942 pour mettre en évidence d'emblée que l'utilisation de la calculatrice n'est pas qu'un exécutant ;*
2) *…*
3) … »[2]

Nous retrouvons ici le rôle des ressources (le document d'accompagnement) pour travailler les différentes fonctions de la calculatrice, l'importance de faire vivre des situations aux stagiaires et de les engager dans la conception de situations de classe, leur observation et leur analyse.

2 – Variables et dispositifs

Le travail en groupe a permis de revenir sur les deux questions posées : les variables et les types de dispositifs. Voici les productions des trois groupes :

Question 1
- Variables matérielles :
- *calculatrices (présence ou non dans la classe, modèle unique ou pas)*
- *nombre de PE2 dans le groupe*
- *temps imparti*

- Variables humaines :
- *niveau de connaissance de l'outil calculatrice*
- *représentation des PE : « l'utilisation de la calculatrice est un frein à l'apprentissage du calcul »*
- *crainte de ne pas gérer la diversité des calculatrices apportées par les élèves*

- Variables relatives aux choix didactiques :
- *les objectifs visés : ceux du programme*

[2] Le participant n'a pas eu le temps de finir cette description mais la partie B correspond aux activités des élèves.

- *utilisation raisonnée de la calculatrice (côté élèves)*
- *utilisation de la calculatrice comme générateur de problèmes (côté enseignant)*

Question 2
- *test diagnostique : que savent les PE2 de leur calculatrice ?*
- *pour certains, l'initiation aux fonctions de base peut être un préalable à l'utilisation pédagogique*
- *intégrer davantage cet outil dans les autres séances didactiques : challenge calcul mental/calculatrice, en analogie avec les pratiques de classe préconisées*
- *analyse de séances en formation (analyse a priori), suivies d'élaboration de séances par les PE2 et expérimentation en stage avec analyse a posteriori.*

Un deuxième groupe a mis l'accent d'abord sur les « *éléments à prendre en compte* » comme :
- *type de public*
- *a priori (représentation initiale)*
- *quel cycle ? Référence aux programmes*
- *niveau d'utilisation*
- *type de calculatrice*

Dans les dispositifs, ce groupe précise :
- *mise en situation des formés*
- *vidéo en classe*
- *mise en œuvre de situations proposées par le formateur*

Le troisième groupe a identifié les variables suivantes :
- *choix de la calculatrice pour les élèves*
- *apprentissage de l'utilisation (fonctionnement) de la calculatrice*
- *utilisation encadrée ? mise à disposition permanente ?*
- *place du papier-crayon*

et les dispositifs suivants :
- *partir des représentations des PE2 sur les fonctions de la calculatrice ; enrichir ces représentations grâce au document d'accompagnement*
- *construction d'activités pour les cycles 2 et 3*
- *proposer des problèmes à résoudre qui utilisent la calculatrice comme support (exemple : produit de deux grands nombres)*

Les productions de ces trois groupes mettent l'accent sur la dimension personnelle, notamment sur les représentations initiales des stagiaires. Cette dimension apparaît ainsi incontournable car les résistances peuvent être grandes et constituer un obstacle pour la suite. Ainsi s'appuyer sur ces représentations apparaît comme un moyen de faire évoluer les pratiques. La dimension institutionnelle est aussi présente explicitement dans deux des groupes, ainsi que les dimensions instrumentale et la dimension praxéologique. Par contre la dimension épistémologique n'est pas présente.

Nous voulons souligner aussi l'importance de la conception de situations de classes par les stagiaires dans les types de dispositifs présentés.

3 – Discussion et conclusion

L'existence de ressources apparaît déterminante dans les différents scénarios de formation et même dans le fait que certains formateurs aient commencé à concevoir des séances de formation. Par exemple le document d'accompagnement aux programmes de 2002 sur les calculatrices a joué un rôle important pour que certains formateurs s'y engagent.

Il peut y avoir plusieurs types de rapports aux ressources : un rapport d'application directe lorsqu'on utilise la ressource telle quelle ; un rapport d'adaptation lorsqu'on utilise la ressource en l'adaptant en fonction d'un certain nombre de variables (par exemple le public ou la durée de la formation) ; un rapport de production de nouvelles ressources à partir d'autres existantes. C'est ce dernier rapport que nous avons essayé de mettre en œuvre dans le cadre d'un groupe de développement de l'IUFM d'Aix-Marseille. Nous avons décidé de produire des ressources pour la formation en lien avec le travail dans les classes. Nous avons choisi de concevoir des séances en mettant en évidence une des fonctions de la calculatrice. Par exemple, la calculatrice comme outil pour la résolution de problèmes, la calculatrice et le calcul mental, etc. Pour chaque mise en œuvre dans une classe, nous avons analysé la séance du point de vue des compétences et des procédures des élèves, du rôle de l'enseignant, et nous avons élaboré un diaporama avec ces analyses et des extraits de films ou des images. Ce travail de production a été pour nous (et pour les enseignants) une manière de nous approprier les enjeux et les possibilités des usages des calculatrices en classe (voir en annexe 2, un des diaporamas du DVD : travail sur la dimension instrumentale au CM2, apprendre à utiliser efficacement la calculatrice, rôle de l'organisation des calculs, gestions des erreurs de frappe, …).

BIBLIOGRAPHIE

Assude T & Grugeon (2006), Développement d'ingénieries de formation des enseignants pour l'intégration des TICE, *revue Quadrante*, Vol.XIII, n°2, 2004, 31-50.

Assude T. (2007). Changements et résistances à propos de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques au primaire. *Informations, Savoirs, Décisions et Médiations (ISDM)*, n°29, revue en ligne, isdm.univ-tln.fr/articles/num_encours.htm.

Assude T (2007), Modes et degré d'intégration de Cabri dans des classes du primaire. In Floris R et Conne F (ed), *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*. (pp.119-134). Bruxelles : De Boeck.

Assude T (2009), *Une approche systémique et fonctionnelle de la conception de parcours de formation*. Communication acceptée au colloque EMF 2009, Dakar, Sénégal.

Emprin F., (2007), *Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique,* Thèse de didactique des disciplines, Université Paris VII – Denis Diderot.

Favre J-M. & Tièche Christinat C. (2007.). La calculette : un outil médiateur de la relation ternaire dans l'enseignement spécialisé. In Floris R & Conne F, *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques* (pp.95-118). Bruxelles : De Boeck.

Gueudet G., Trouche L. (2008), Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques, in I. Bloch, F. Conne (dir.), *Actes de la 14ème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, La pensée sauvage.

Kahane J.P. (2002) (sous la direction), *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris : Odile Jacob.

Lagrange J.-B., Artigue M., Laborde C., Trouche L. (2003), Technology and Mathematics Education: a Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation, in A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (dir.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (239-271). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

MEN (2002), Documents d'accompagnement aux programmes de 2002, Utiliser les calculatrices en classe, www.snuipp.fr/IMG/pdf/Utliser_la_calculatrice_C2_et_C3.pdf.

Rabardel P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul (Ed.), *Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 202-213). Houlgate: IUFM de Caen.

Trouche L. (2005), Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en didactique des mathématiques 25*(1), 91-138.

ANNEXE 1

Questionnaire sur les calculatrices

1 – Entourez le *oui* si vous êtes d'accord avec l'affirmation, entourez le *non* si vous êtes en désaccord avec l'affirmation

a) Il est important pour l'élève d'utiliser les calculatrices à l'école primaire : Oui Non
b) Il est nécessaire d'introduire les calculatrices à l'école primaire : Oui Non
c) Ce serait mieux d'introduire les calculatrices au collège : Oui Non
d) La calculatrice est un obstacle pour que l'élève apprenne à calculer : Oui Non
e) La calculatrice est un bon moyen de calcul dans la vie de tous les jours mais pas à l'école : Oui Non
f) Il faut utiliser la calculatrice à l'école de la même manière qu'on l'utilise dans la vie : Oui Non
g) L'usage des calculatrices constitue un obstacle important au calcul mental : Oui Non
h) Il ne faut pas utiliser une calculatrice durant l'apprentissage initial des techniques opératoires : Oui Non
i) Les élèves apprennent à utiliser la calculatrice en dehors de l'école : Oui Non
j) Les enseignants doivent apprendre aux élèves à se servir d'une calculatrice : Oui Non
k) J'ai utilisé la calculatrice pendant ma pratique professionnelle (stages) : Oui Non
l) J'ai observé l'utilisation de la calculatrice dans l'un des stages : Oui Non
Si oui, combien de fois ?

2 - A partir de quelle classe faut-il utiliser les calculatrices ?

3 – Donnez tous les arguments qui vous semblent importants pour justifier l'utilisation de la calculatrice à l'école primaire

4 – Donnez tous les arguments qui vous semblent importants contre l'utilisation de la calculatrice à l'école primaire

5 – Si vous avez déjà utilisé la calculatrice dans votre pratique professionnelle, donnez quelques exemples de ce que vous avez fait. Combien de fois l'avez-vous utilisé ?

6 – Pensez-vous utiliser la calculatrice dans votre future pratique professionnelle ? Comment allez-vous l'utiliser ? Pour faire quoi ? Donnez des exemples précis en choisissant une classe

ANNEXE 2

Description rapide
Objectifs Commentaires
Matériels Commentaires
Déroulement Commentaires

Le ticket de caisse

Classe de Dominique BERNASCHI
CM2 – octobre 2007
Ecole Sextius AIX en PROVENCE

Description rapide
Objectifs Commentaires
Matériels Commentaires
Déroulement Commentaires

Le ticket de caisse
Classe de Dominique BERNASCHI
Ecole Sextius AIX en PROVENCE

Cette activité est issue d'une séquence sur le calcul proposée dans « Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM2 », ERMEL, Hatier.

Dans cet ouvrage, la séance avec la calculatrice se situe après deux séances sur le calcul rapide approché utilisant comme support des tickets de caisse. Nous l'avons ici utilisée de façon isolée dans une classe de CM2 en début d'année (octobre) avec comme objectifs de:

- confronter les élèves à une situation de calcul dans laquelle l'utilisation de la calculatrice s'impose;
- conduire les élèves à s'interroger sur les précautions à prendre pour réaliser efficacement un calcul avec une calculatrice.

En se limitant aux entiers naturels, on peut facilement adapter cette situation à une classe de début de cycle 3.

Le ticket de caisse
Description rapide

Description rapide

Objectifs Commentaires

Matériels Commentaires

Déroulement Commentaires

Les élèves doivent calculer rapidement la valeur exacte du total d'un ticket de caisse.

Pour réaliser cette tâche, ils sont placés dans un premier temps dans des conditions « très inconfortables »:

- Travail individuel
- Agrandissement du ticket affiché au tableau
- Temps limité à peine suffisant pour permettre à un adulte de réaliser la même tâche.

Il s'agit de « forcer » la prise de conscience du fait qu'il n'est pas aussi simple qu'ils le pensent d'utiliser une calculatrice.

La même tâche sera ensuite reprise dans des conditions « plus agréables » avant de conclure sur un « appel à la vigilance » dans l'utilisation de cet instrument.

6,04
9,45
7,77
7,77
14,46
12,85
10,31
10,37
10,37
10,37
7,53
6,30
4,91
12,35

Le ticket de caisse
Objectifs et compétences

Description rapide

Objectifs Commentaires

Matériels Commentaires

Déroulement Commentaires

Objectifs

- confronter les élèves à une situation de calcul dans laquelle l'utilisation de la calculatrice s'impose;
- conduire les élèves à s'interroger sur les précautions à prendre pour réaliser efficacement un calcul avec une calculatrice;
- dégager quelques techniques pour utiliser efficacement la calculatrice.

Compétences visées en ce qui concerne la calculatrice

- utiliser efficacement cet instrument pour effectuer un calcul;
- éviter les erreurs de frappe et celles liées à une mauvaise organisation du calcul;
- corriger une erreur de frappe en cours de calcul sans tout recommencer.

Compétences visées en ce qui concerne le calcul

- organiser son calcul pour éviter les erreurs;
- contrôler le résultat même dans le cadre d'un calcul instrumenté.

Le ticket de caisse
Objectifs… commentaires

Choix

Cette situation est décrite dans l'ouvrage CM2 de l'équipe ERMEL. Il nous semble important de montrer la mise en œuvre de ce type de situation afin d'insister sur l'importance de l'apprentissage à l'école d'un usage raisonné de la calculatrice.

On peut adapter cette séance pour une autre classe du cycle 3 avec pour support, une « longue » addition d'entiers naturels.

Le ticket de caisse
Matériel

Description rapide

Objectifs Commentaires

Matériels Commentaires

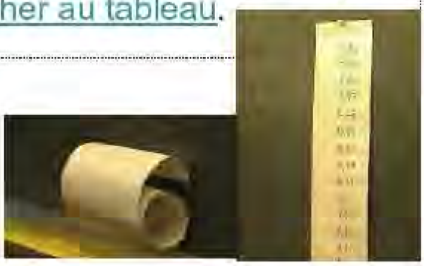
Déroulement Commentaires

Matériel pour l'élève :

- Calculatrice
- Une feuille
- Une photocopie du ticket de caisse pour la deuxième phase.

Matériel pour l'enseignant :

Une reproduction grand format du ticket de caisse pour l'afficher au tableau.



Exemples de tickets de caisse utilisables (d'après ERMEL, Hatier)

6,04
9,45
7,77
7,77
14,46
12,85
10,31
10,37
10,37
10,37
7,53
6,30
4,91
12,35

Le ticket de caisse
Déroulement: phase « conditions très inconfortables »

[Description rapide](#)

[Objectifs Commentaires](#)

[Matériels Commentaires](#)

[Déroulement Commentaires](#)

Consigne:
« Je vous propose une mission impossible. (…) Calculer très vite le résultat d'une grande addition à l'aide d'une calculatrice. »

Travail individuel:
- chaque élève avec une calculatrice,
- seul le résultat final doit être noté sur la feuille,
- durée: 2 min.

Collecte des résultats:
L'enseignant note les différents résultats au tableau (pour ceux qui ont fini).

Discussion collective sur les difficultés rencontrées.

Le ticket de caisse
Déroulement: phase « conditions plus agréables »

[Description rapide](#)

[Objectifs Commentaires](#)

[Matériels Commentaires](#)

[Déroulement Commentaires](#)

Même consigne que dans la phase précédente, avec le même ticket.

Travail à deux:
- une photocopie du ticket de caisse pour chaque élève,
- durée: 3 min.

Collecte des résultats:
L'enseignant note au tableau les résultats obtenus par ceux qui ont fini.

Discussion collective à propos des solutions apportées.

Synthèse: se donner les moyens de contrôler ce qu'on fait.

Le ticket de caisse
Déroulement … commentaires

Description rapide
Objectifs Commentaires
Matériels Commentaires
Déroulement Commentaires

Des difficultés prévisibles
pour la phase « conditions très inconfortables »

Existence d'une grande diversité dans les résultats obtenus.

Manque de temps pour finir à cause de:
- contrainte de la durée prévue,
- non organisation des calculs,
- erreurs obligeant à tout recommencer.

Erreurs d'oubli ou de répétition de certains nombres.

Erreurs de frappe: une touche à la place d'une autre, le doigt qui rebondit sur la touche, …

Le ticket de caisse
Déroulement … commentaires

Description rapide
Objectifs Commentaires
Matériels Commentaires
Déroulement Commentaires

Des changements attendus
lors de la phase « conditions plus agréables »

Existence de résultats moins disparates à cause :
- de la durée prévue,
- du contrôle des calculs facilité par le travail à deux et la présence du ticket sur les tables,

Moins d'erreurs de frappe, d'oubli ou de répétition de certains nombres.

Des solutions possibles:

Organiser les calculs:
- en cochant,
- en réorganisant l'ordre des calculs,
- en notant des résultats intermédiaires.

Gérer les erreurs de frappe:
- recommencer si on est au début des calculs,
- corriger en effaçant le dernier chiffre saisi,
- compenser un ajout par un retrait.

Le ticket de caisse
Déroulement: discussion collective

Description rapide

Objectifs Commentaires

Matériels Commentaires

Déroulement Commentaires

Les difficultés observées:

On n'est pas sûr d'avoir tapé ce qu'il fallait.

Certains nombres sont répétés dans l'addition: on ne sait plus où on en est.

Oublier un nombre.

Taper sur une mauvaise touche … et il faut recommencer.

Répétition de la frappe d'un chiffre (rebond du doigt).

Il est difficile de vérifier au fur à mesure.

Certains n'ont pas eu le temps de finir et n'ont pas proposé de résultat.

Le ticket de caisse
Déroulement: synthèse

Description rapide

Objectifs Commentaires

Matériels Commentaires

Déroulement Commentaires

Les solutions apportées par les élèves:

Cocher chaque nombre et aller doucement pour ne pas oublier la virgule.

Contrôler à chaque fois l'affichage.

Utilité d'être à deux.

Compenser un ajout par un retrait.

Le ticket de caisse
Déroulement … commentaires

Description rapide

Objectifs Commentaires

Matériels Commentaires

Déroulement Commentaires

Rôle du maître :

Ne pas intervenir dans les phases de calcul;

Faire respecter strictement le temps prévu pour les calculs dans chaque phase;

Ne pas donner la bonne réponse entre les phases;

Gérer les discussions collectives de façon à ce que les élèves prennent conscience de la vigilance indispensable dans l'utilisation de la calculatrice.

Situations et assortiments d’exercices pour l’enseignement des mathématiques aux élèves de 5ème et 6ème SEGPA

Marie-Hélène Salin DAESL

Depuis 3 ans, je travaille avec un enseignant de SEGPA, J.Y. Jongboët, pour préparer des suites de séances de mathématiques, relatives à un thème précis, comportant des « situations de recherche » de préférence issues de manuels du primaire, dans lesquelles les élèves puissent rentrer facilement et les plus simples possibles à gérer par l’enseignant, et des situations plus classiques, permettant la mise en fonctionnement répétée, sous forme d’exercices, des connaissances mises en œuvre dans les situations de type précédent, en vue de l’appropriation progressive de ces connaissances.
L’atelier a comporté une première partie présentant les raisons de ce travail et deux exemples de « situations de recherche » sur lesquelles nous travaillons. Dans une deuxième partie, les participants ont été sollicités pour s’interroger sur les « situations intermédiaires » favorables à la mise en fonctionnement des connaissances rencontrées dans les situations présentées.
Une dernière partie a permis un bilan des propositions et des échanges avec J.Y Jongbloet.

PREMIERE PARTIE

Introduction

Assurant pendant de longues années, la formation des enseignants préparant l’option F de ce qui s’appelle maintenant le CAPASH, je m’étais rendu compte de l’absence de documents (manuels, livres pour les professeurs) les aidant dans leur enseignement. Mon projet de début de retraite était donc d’élaborer des documents utiles aux enseignants de SEGPA, tenant compte de mes acquis de chercheur en didactique des mathématiques, mais sans engager une recherche aux normes universitaires. Pour réaliser ce projet, il me fallait commencer par trouver des enseignants acceptant de mettre à l’épreuve certaines de mes propositions ainsi que ma présence dans leurs classes. Cela n’a pas été très facile et je remercie D. Houdart et J.Y. Jongboët qui ont bien voulu s’engager dans cette démarche.

L’objectif de l’atelier était double : décrire une démarche d’enseignement des mathématiques pour les classes de 6ème et 5ème de SEGPA et inciter des collègues à s’investir sur ce créneau.

I) Le contexte de l’enseignement des mathématiques en SEGPA

Dans un tiers environ des collèges, une SEGPA accueille les élèves, qui : « à l'issue de la scolarité élémentaire, cumulent des retards importants dans les apprentissages scolaires et des perturbations de l'efficience intellectuelle, sans toutefois présenter un retard mental. Les

SEGPA ont pour objectif de permettre à ces élèves d'accéder, à l'issue de la formation en collège, à une formation professionnelle qualifiante.»

L'enseignement dispensé se veut le plus proche possible de celui destiné aux autres élèves de collège : « Les finalités qui y sont poursuivies sont celles des enseignements du collège même si les programmes n'y sont pas applicables à l'identique. » et plus précisément : « La classe de 6e a pour objectif de permettre à l'élève accueilli en SEGPA de s'approprier ou se réapproprier des savoirs en re-dynamisant les apprentissages. Pour ce faire, et avec toute la souplesse requise dans une démarche d'adaptation, les enseignants organisent leur action à partir des programmes de la classe de 6e du collège en prenant en compte les difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves. » (Circulaire juin 98).

Ces directives ont eu un effet bénéfique sur les attentes des enseignants vis-à-vis de leurs élèves et sur les plans d'étude, plus exigeants qu'auparavant. Mais, il y a une facette négative : il se développe dans ces classes un enseignement dont les contenus et les formes peuvent sembler proches de ceux en vigueur dans les classes ordinaires, conformément aux instructions, alors que deux caractéristiques des populations concernées (élèves et professeurs) les différencient :

- les niveaux en mathématiques des élèves, à l'entrée en 6ème, s'étendent entre celui visé à la fin du cycle 2 (et encore !) et celui de la deuxième année du cycle 3.
- les enseignants de SEGPA sont des enseignants du premier degré, dont la plupart n'ont pas de formation mathématique, même s'ils font l'essentiel de leur service dans cet enseignement.

Le divorce entre le niveau de connaissances des élèves et les objectifs assignés aux professeurs, en conduit beaucoup à privilégier un enseignement très formel, où les élèves peuvent obtenir des réussites, alors qu'ils sont incapables d'associer des connaissances aux techniques qu'on leur enseigne.

Ainsi, dans un manuel[1] de 6ème spécialement destiné à ces élèves (annexe 1), la première leçon sur les nombres décimaux comporte un premier encadré qui énumère sur quoi porte l'apprentissage des décimaux :

> « Je vais apprendre à :
> - identifier la partie entière et la partie décimale d'un nombre
> - identifier le chiffre des dixièmes, des centièmes des millièmes…,
> - écrire un nombre décimal compris entre deux nombres. »

[1] Augendre et Serrèque) (2002) maths 6ème

et propose un découpage en « technique » : l'usage du tableau de numération, et « sens » ainsi précisé : « il existe une infinité de nombres entre deux entiers ; la partie décimale permet de les exprimer ». L'enseignement consiste donc à fournir aux élèves une suite d'algorithmes leur permettant de développer quelques connaissances sur les décimaux (voir les exercices en annexe 2) mais en aucun cas, de comprendre à quels problèmes répondent ces nombres, ni comment ils sont construits.

Voici, en contrepoint, les réponses de groupes de deux élèves de 5ème dans une activité permettant de prendre des informations sur le sens que les élèves donnent aux nombres décimaux : il s'agit pour chaque groupe, d'indiquer à l'enseignant la longueur d'une bande de carton à l'aide d'une unité de papier (pliable), pour que ce dernier puisse découper une bande de même longueur que celle dont dispose le groupe.

Après un certain nombre d'échanges avec le professeur, non concluants pour la plupart, la mise en commun finale fait apparaître trois types de messages :

> « 2 u et un petit bout d'unité » (2 groupes)
>
> « 2,0 u, 2,2 u ou 2,3 u ou 2,5 u » (6 groupes) mais aucun élève ne sait montrer à la professeure comment construire un segment de cette longueur,
>
> « 2 u + ¼ u », (2 groupes, un peu aidés par l'enseignant quant à la formulation du message) qui a permis de construire une bande de la bonne taille.

Ainsi, plus de la moitié des groupes pensent bien à utiliser un nombre décimal pour indiquer une longueur comprise entre 2 entiers mais aucun ne sait attribuer un sens précis au chiffre décimal. Personne n'a parlé de dixième, la partie décimale correspond sans doute à « un petit bout en plus ».

Ces résultats sont représentatifs de l'état de savoir des élèves de SEGPA : ils disposent de connaissances « culturelles » dont ne disposent pas les élèves plus jeunes qui rencontrent pour la première fois ces notions mais ces connaissances ne sont pas efficientes.

On ne peut évoquer le contexte de l'enseignement en SEGPA sans aborder la question du « climat de classe ». Les problèmes sociaux de beaucoup d'élèves, les difficultés psychologiques de certains d'entre eux, contribuent à rendre difficile et souvent imprévisible la gestion des rapports entre les différents éléments de la classe, professeur et/ou élèves. Ces difficultés s'ajoutent à celles que rencontre le professeur d'un point de vue proprement didactique. Ceci peut expliquer pourquoi les enseignants avec lesquels j'ai travaillé choisissent un enseignement collectif (le même sujet pour tous au même moment) avec des temps de soutien différenciés quand ils en ont la possibilité. Je pense que ce choix est celui de la majorité des enseignants de SEGPA en ce qui concerne les mathématiques.

En conclusion, on peut formuler ainsi le problème didactique majeur auquel sont confrontés les enseignants : Comment travailler un domaine des mathématiques qui a déjà été enseigné, sans que les élèves aient l'impression de rabâcher, et en visant un double objectif : leur permettre de donner du sens aux concepts en jeu et les guider jusqu'à la maîtrise d'outils décontextualisés ?

II) Lignes directrices pour un enseignement des mathématiques en SEGPA

Les propositions faites aux enseignants s'appuient sur la théorie des situations didactiques en essayant de mettre en œuvre ses développements récents, en particulier sur les champs ouverts par la thèse de F. Genestoux.

Rappel : les étapes d'un processus d'enseignement

Tout processus d'enseignement d'une notion mathématique (dans le cadre de la théorie des situations didactiques) comporte une suite de « moments forts », correspondant aux situations–clés adidactiques. En général, l'entrée dans la situation « n » suppose des connaissances construites dans des situations antérieures. Ces connaissances doivent être suffisamment maîtrisées par les élèves, même si elles n'ont pas besoin de l'être complètement parce que à terme elles vont être remplacées par d'autres, plus simples, plus efficaces etc.. Des situations didactiques que j'appelle intermédiaires, qui permettent de retravailler certaines de ces connaissances « naissantes » sont nécessaires[2].

Quelques « principes » pour une adaptation aux classes de 6ème-5ème SEGPA

1) Il est nécessaire, et possible sous certaines conditions, de confronter les élèves de SEGPA à des situations, « à dimension adidactique[3] », dans lesquelles ils aient la possibilité de saisir l'enjeu des apprentissages en terme de prise de pouvoir sur le milieu, c'est-à-dire au cours desquelles ils aient la possibilité d'éprouver l'efficacité des connaissances dont ils disposent déjà ou des notions qui leur sont enseignées. Comment choisir un milieu pertinent ? Il est nécessaire de respecter la condition exigeante suivante : « *le savoir visé doit être représenté convenablement par les situations choisies* ». Ainsi, par exemple, l'entrée dans les décimaux par les problèmes de monnaie, très fréquente dans ces classes, n'est pas adéquate. J'ai choisi d'introduire les décimaux comme moyen d'exprimer une mesure sous la forme de la somme d'un nombre entier d'unités et d'une fraction décimale d'unité inférieure à 1, pour 2 raisons :

- c'est une démarche compatible avec les connaissances dont les élèves avaient fait preuve lors de la situation évoquée ci-dessus. Mais il ne s'agit pas de leur expliquer ensuite très vite que « quand ils proposent 2,2 u pour une longueur, cela veut dire qu'on a découpé l'unité en

---

[2] Voir des exemples dans Brousseau G. et N. (1987) Rationnels et décimaux

[3] Voir Mercier (1995) L'emploi de l'expression « à dimension adidactique » est justifié dans Salin (2006).)

dix parties égales et qu'on en prend deux morceaux » ! Ce qui est visé est de permettre, par un processus d'enseignement s'étalant sur plusieurs séances, de découvrir le sens de cette écriture et de pouvoir l'utiliser convenablement[4].

- D'autre part, commencer par travailler sur des fractions non décimales permet de revenir sur le sens de moitié, demi, tiers, « ième » et de ne pas isoler les fractions décimales des autres fractions.Des situations intermédiaires plus classiques, s'appuyant sur des exercices calibrés, sont nécessaires pour la mise en fonctionnement de ces connaissances, en vue de leur appropriation progressive et de leur institutionnalisation. En SEGPA, plus encore que dans l'enseignement ordinaire, ce travail, qui contribue à la transformation des connaissances en savoirs, est essentiel mais la conception en est difficile, car il faut trouver un équilibre entre le sous et le sur-apprentissage

3) Ces deux types de situations doivent être gérables à un coût pas trop élevé par les professeurs, sinon ils renoncent à les utiliser.

III) Quelles situations « à dimension adidactique »?

1) Les situations de « prévision »

Le problème posé concerne un milieu matériel effectif, sur lequel un « acteur » doit opérer. Il s'agit de prévoir le résultat de cette action, à partir d'un certain nombre d'informations données ou prises préalablement et non de lire le résultat, une fois l'action effectuée.

La vérification du résultat de la prévision est un moteur pour le retour sur la démarche qui a servi à la prévision.

Un exemple

- Matériel : 2 bandes de longueur 7/10 u et 5/10 u ; une règle graduée en dixièmes

P a préparé les 2 bandes qu'il montre rapidement, en indiquant leurs longueurs au tableau. Il rappelle ce que veut dire « mettre bout à bout », et le réalise derrière le tableau. Les élèves doivent prévoir la longueur totale [et découper une bande de cette longueur][5].Une fois les prévisions effectuées et, dans la mesure du possible, justifiées, la vérification effective donne l'occasion aux élèves, pour ceux qui ont réussi, d'augmenter leur confiance dans leurs raisonnements, pour ceux qui n'ont pas réussi, de revenir, avec l'aide de l'enseignant le plus souvent, sur le sens des écritures proposées et leurs transformations possibles, en l'occurrence pourquoi la longueur de la bande ne peut pas être 12/20 u (réponse fournie le plus fréquemment). **2) les situations « retournées » (Bloch 2004)**

---

[4] Je me suis appuyée sur l'introduction des fractions de CAP MATHS CM1

[5] Le professeur peut ou non laisser le découpage sous la responsabilité des élèves.

Dans une situation d'apprentissage par adaptation, le milieu doit être facteur de déséquilibres donc d'adaptation pour l'élève. Ceci peut être mis en œuvre à travers des modifications des tâches usuelles qui correspondent à un *retournement de la situation.* La situation est organisée de façon à ce que l'élève se trouve forcé à questionner les liens existants entre un milieu matériel sur lequel réaliser une action, et un résultat à obtenir

Un exemple[6]

A la première séance sur les fractions, nous avions prévu de reprendre la mesure de la longueur d'une bande par report de l'unité (tous les élèves se sont accordés sur 3u après une mise au point sur le soin à apporter au report), puis en utilisant une échelle graduée mais non numérotée. L'enseignante a ensuite demandé de numéroter les traits intermédiaires de l'échelle pour qu'on puisse mesurer très rapidement la bande : 11 élèves sur 14 ont commencé par 1 ! Quelle n'a pas été leur surprise de découvrir que la longueur de leur bande fournie par l'échelle était alors de 4 unités ! La discussion qui a suivi a permis d'expliquer le phénomène, de mettre en relation la solution avec l'attention à la position du zéro, pourtant rappelée constamment par l'enseignante dans les activités antérieures de mesurage. Il semble que ce mini-événement ait produit une espèce de choc puisque dans les exercices à faire à la maison, reprenant cet item, il y a eu très peu d'erreurs.

Si ce type de situation dite « retournée » n'est pas absent de l'enseignement destiné aux classes ordinaires, il est peu fréquent, alors que nous faisons l'hypothèse qu'il permet au professeur de diversifier les situations à proposer aux élèves pour les aider à se placer dans une position réflexive par rapport au savoir en jeu. **3) Remarques à propos de ces situations**

De nombreuses questions se posent, qui n'ont pas été développées au cours de l'atelier, mais dont certaines sont abordées dans Salin (2006). Je n'explicite ici que celles liées à la suite.

- Suffit-il de proposer une seule fois ces situations, en faisant le pari que la plupart des élèves auront saisi le lien entre le problème posé et la solution ébauchée par l'un d'entre eux ou proposée par l'enseignant ? La réponse est évidemment négative, il est donc nécessaire de confronter les élèves plusieurs fois au même problème, en modifiant certaines variables.
- Mais aussitôt, se pose la question : comment alléger le dispositif matériel pour rendre l'enseignement compatible avec les contraintes de ces classes ?

IV La construction de situations « intermédiaires »

Ces situations sont construites autour de séries d'exercices, de manière à fonctionner comme le font le plus souvent les enseignants de ces classes. Ces exercices sont cherchés individuellement, éventuellement avec l'aide du professeur, puis corrigés ensuite au tableau,

[6] dont la simplicité montre l'étendue du travail à mener !

suivant un mode assez strict. C'est à cette occasion que le professeur aide à repérer les erreurs, insiste sur ce qui est important etc.

La validation effective est réalisée au tableau tant qu'elle s'avère nécessaire. Une difficulté importante est de déterminer à quel moment les élèves n'ont plus besoin de vérification effective parce qu'ils disposent de critères de validité (Margolinas 1993) efficaces et donc combien de fois le même type de situation doit leur être proposé, et avec quelles variations sur les valeurs des variables. Dans les faits, il est nécessaire d'accepter une assez grande hétérogénéité des résultats des élèves et donc d'avancer dans le travail même si certains n'ont pas encore bien réussi.

C'est la « qualité » de ces exercices qui rend ce travail plus ou moins fructueux. Encore faut-il pouvoir définir des critères pour la qualifier. Les travaux de F. Genestoux (2000), qui, dans le cadre de la théorie des situations, a consacré une partie de sa thèse à l'étude de l'enseignement des savoirs destinés à être sus par cœur, comme la table de multiplication, paraissent susceptibles d'être étendus à l'étude d'apprentissages longs, se développant par étapes.

Assortiment didactique

La notion d'« assortiment didactique », qui modélise les séries d'exercices, en permet l'étude a priori. Un assortiment didactique est « une suite ordonnée de questions réunies autour d'une même intention didactique et réalisable dans une unité de temps didactique » dont on peut étudier les variables didactiques.

F. Genestoux distingue différents types d'assortiments suivant leurs finalités : pour apprendre du nouveau, pour l'entraînement du « déjà appris », pour l'évaluation. Ces 3 types d'assortiments sont nécessaires pour les élèves de SEGPA, mais le travail en cours présenté ici ne porte que sur les assortiments « pour apprendre du nouveau ».

Caractères des assortiments pour apprendre du nouveau : (Genestoux APM)…)

- forte redondance ;
- pas trop de nouveauté à la fois ;
- Pas de standardisation précoce d'écriture ou de présentation. C'est la vigilance cognitive de l'élève qui doit être sollicitée ;
- un plongement du nouveau dans du déjà connu (non problématique).

« En effet, si l'élève rencontre les nouvelles connaissances trop rarement par rapport à celles qu'il connaît déjà, il n'apprend pas. S'il les rencontre trop fréquemment (et donc si les occasions de les rattacher à ce qu'il connaît déjà se raréfient), il apprend mais ne saura pas réorganiser ses anciennes connaissances. Les apprentissages seront morcelés, indépendants et difficilement réinvestis. D'autre part, pour construire du nouveau, il faut le faire fonctionner sur du déjà familier ».

V) Les limites de ce travail

Elles sont la conséquence d'une situation de bricolage méthodologique : je n'ai pas les moyens (ni la motivation) de recueillir les données nécessaires à un minimum de validation de la démarche présentée. Je ne peux que me fier aux observations que je réalise chaque semaine et aux échanges avec l'enseignant de la classe. Ces observations m'incitent à penser que la voie que nous explorons peut permettre des avancées pour les élèves, concernant leurs connaissances et leurs rapports aux mathématiques. Chaque nouvelle situation leur demande un temps d'adaptation important, mais nous n'observons pas les phénomènes de découragement et de rejet, fréquents dans ces classes. Les « situations intermédiaires » sont particulièrement nécessaires pour que les élèves s'engagent dans l'élaboration de critères de validité pertinents.

REFERENCES CITEES

BLOCH, I. (2005). Dimension adidactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' d'une situation. In Salin M.H., Clanché P. & Sarrazy B. (Eds) *Sur la théorie des situations didactiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage Editions

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage

BROUSSEAU, G. & BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire,* Talence : IREM de Bordeaux.

GENESTOUX, F. (2002) Les assortiments didactiques In Dorier J. L. (Ed). *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématique.* (CD-rom Thème2-TD2)Grenoble : La Pensée Sauvage.

MERCIER A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. In Margolinas (ed), *Les débats de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage

SALIN Marie-Hélène (2007) Situations et assortiments d'exercices pour l'enseignement des mathématiques destiné aux élèves de collège en grande difficulté scolaire in Bednarz, N., Mary, C. (dir.) (2007) "*L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*". Actes du colloque EMF 2006 (cédérom). Sherbrooke: Éditions du CRP

DEUXIEME PARTIE : TRAVAIL EN ATELIER

Deux thèmes très différents ont été proposés, l'un sur les fractions, l'autre sur l'alignement.
- dans l'un, il s'agit de redonner du sens et d'aider à la structuration de connaissances déjà rencontrées par certains élèves mais dont ils maîtrisent très peu l'utilisation dans des situations autres que purement formelle ;.
- dans l'autre, il s'agit de connaissances réellement nouvelles dans un domaine, l'espace, très mal maîtrisé, dont les élèves auront un besoin important plus tard et qui ne relève pas des programmes du collège. D'où le rôle important d'interactions avec le milieu spatial.

Dans les deux cas, il s'agit de s'interroger sur les « situations intermédiaires » favorables à la mise en fonctionnement des connaissances rencontrées une première fois.Après une présentation rapide des deux premières séances du thème « fractions », et le la première du thème « alignement », deux groupes ont été constituées avec comme consigne : « Comment retravailler les connaissances rencontrées dans cette leçon, sous la forme d'une suite d'exercices, sans introduire de franchement nouveau, mais sans que ce soit répétitif ? »

Une mise en commun trop rapide a permis de pointer les différences entre les 2 thèmes et la difficulté à différencier le « nouveau » du « pas nouveau ».

Ce compte-rendu comprend la fiche didactique de la deuxième séquence sur les fractions, la liste des proposition des collègues et quelques exercices proposés aux élèves. Le travail sur l'alignement n'a pu être qu'effleuré par les participants. il n'a pas donné lieu à un compte-rendu exploitable par écrit.

Annexes

Annexe 1

Fiches de préparation des deux premières séances sur les fractions

SEGPA 5ème Fractions *Extrait de la séance 1*

Objectifs de la séance :

- revenir rapidement sur le mesurage des longueurs, et le vocabulaire associé : unité, report

- coder par des entiers une échelle fournie aux élèves, l'utiliser pour mesurer des longueurs de bandes et des segments

- poser le problème de la mesure d'un segment dont la longueur n'est pas égale à un nombre entier d'unités (la question est posée à la fin de la phase 3. Il s'agit seulement de conclure sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un nombre entier).

Phase 3

Vous allez maintenant utiliser votre instrument pour mesurer des segments, tracés sur cette feuille et en tracer vous-même deux de la longueur indiquée

Correction rapide : pour les longueurs à mesurer, par mise en commun, pour les segments à tracer à l'aide d'un calque sur lequel sont tracés les segments, réalisé par le professeur.

Pas d'erreurs notoires, la correction se fait rapidement

Que se passe-t-il pour les 2 derniers, KL et MN ? Examen des réponses proposées par les élèves J'ai noté à la volée : 5 et demi, ou 5, 2 ou 5,5

Conclusion : *la prochaine fois, c'est sur cette question-là que l'on va travailler : comment indiquer des longueurs plus petites que l'unité ?*

SEGPA 5ème Fractions Séance 2

Communiquer une longueur avec pliage de l'unité[7]

Objectifs :

- reposer le problème de la désignation d'une longueur qui n'est pas égale à un nombre entier d'unités (ou le poser s'il n'a pas été abordé à la séance 1)
- introduire les fractions d'unités : ½ u, ¼ u et ¾ u et l'écriture 2 u+ ½ u, etc…
- relations entre ¼ u + ¼ u, ½ u et 2/4 u

Matériel

- des bandes de carton ayant comme longueur 2 v + ¼ v, 3 v + ½ v et. v + ¾ v

[7] Les résultats de cette séance sont évoqués dans la partie I

- des unités papier (facilement pliables), (longueur v : 6 cm)
- « l'instrument » pour unité de 6 cm, sur transparent
- une fiche d'exercices

Déroulement

Phase 1 : Essai de formulation par quelques élèves de ce qui a été fait à la séance précédente et correction des exercices. […]

Phase 2 : Examen des réponses pour KL et MN, longueurs des segments de la séance 1. Formuler le problème, relever les réponses, montrer que tout le monde n'est pas d'accord, et introduire la suite en disant : *je ne vais pas vous dire qui a tort, qui a raison, mais nous allons faire la chose suivante : je vais vous donner par groupes de 2 une bande et vous allez m'indiquer sa longueur sur ce papier, comme si vous étiez mes clients et moi, le marchand de bande (évoquer peut-être les magasins de bricolage). Ensuite, devant vous, je prendrai vos indications et j'essaierai de découper une bande de la même longueur que la vôtre. Pour cela, je vous donne la nouvelle unité, une bande graduée avec cette nouvelle unité, et la bande dont vous devez me donner la longueur. L'unité que je vous donne est en papier, vous pouvez la plier mais pas la découper. Nous verrons quelles sont les indications qui permettent de découper ma bande pour qu'elle soit de la même longueur que la votre.*

Phase 3 : Le professeur distribue le matériel à chaque groupe de deux.
Temps de recherche (5 min ?) puis temps collectif
P définit les règles du jeu : le groupe dont on examine les indications au début ne dit rien. Il regarde ce que fait et dit le P au tableau. Il s'explique ensuite, s'il le demande.
Propositions possibles et arguments :
- 2v et cette longueur (représentée sur le papier, par exemple un petit segment) : renvoyer à l'usage social des mesures et au fait qu'il faut trouver un moyen utilisant des nombres
- 2v et demi ou 2 et la moitié : P plie suivant les indications, cela ne va pas.
- 2v et un petit bout : P prend un petit bout différent du ¼
- 2,2v ou même 2,5v : comment est-ce que je fais pour mesurer ? avec cette unité, je n'ai pas de règle.
- 2v et quelque chose qui exprime qu'on plie en 2 et en 2, ou un quart, si cela apparaît : réalisation de la bande et réussite. Si aucun groupe ne l'a proposé, c'est P qui le propose comme une solution au problème posé

Moment d'introduction de l'écriture ¼ v, mise en relation avec d'autres rencontres avec ¼ si déjà faites.

La longueur de la bande est 2v + ¼ v . Commentaire sur l'écriture : pourquoi utilise-t-on le signe + ?

Phase 4 Retour aux segments KL et MN : quelle est leur longueur (avec l'unité u) ?
On peut penser que certains vont hésiter pour1/2. Les trois écritures peuvent être proposées pour KL : 4u + ¼ u + ¼ u ou 4 u + ½ u ou 4u + 2/4 u. Faire écrire l'égalité : ¼ u + ¼ u = ½ u = 2/4 u

Annexe 2

Propositions des collègues pour une suite à cette séance (en supposant que la séance se soit relativement bien déroulée, c'est-à-dire que le professeur ait pu aller jusqu'aux conclusions énoncées) :

- reprendre les activités décrites en changeant le matériau
    - Bande graduée en unités et en quarts (réglure Siéyès en vertical)
    - Bande graduée, mais pas à partir du début (analogue des instruments incomplets)
    - Exploration du ruban de couturière, en particulier le côté recto-verso (les graduations d'un côté et de l'autre sont en situation complémentaire)
    - Exploration de la règle anglaise; la difficulté est de la justifier par un contexte (quoique certains jeux de rôles se mesurent en pouces)
    - faire fabriquer la graduation
- travailler sur la « motivation » des activités
    - Mesures d'objets (type jardin avec ficelle)
    - comparaison de circonférences de prismes à base convexe (tuyaux, boîtes de conserve, tétrabrick)
    - comparaison de rectangles
    - comparaison directe vs objet intermédiaire
- questions que s'est posé le groupe
    - comment passer de la manipulation à l'abstraction.
    - L'unité de mesure doit-elle être la plus petite?
    - comment faire le lien entre la mesure et l'étalonnage de la règle ?

Remarques sur ces propositions :
Dans l'ensemble, elles dépassent l'objectif proposé : par exemple, modifier le matériau en utilisant les réglures seyès est une idée intéressante mais qui , à mon avis, ne peut venir à la séance suivant la séance étudiée. Il faut d'abord que les élèves aient l'occasion de faire fonctionner sous leur propre responsabilité les connaissances rencontrées dans la séance, sans que le milieu soit modifié. Ce n'est que peu à peu que celui-ci peut bouger.

L'annexe 3 donne une idée des exercices proposés dans la séance suivante, chaque exercice est un prototype d'une série dont le titre indique la caractéristique.

Annexe 3

Série 1 : refaire plusieurs fois l'activité, objet de la séance 2, comme par exemple :

1) Indique à ton voisin la longueur du segment MN avec l'unité u

M N

2) Trace sur (D) un segment PQ de la longueur indiquée par ton voisin
(D)

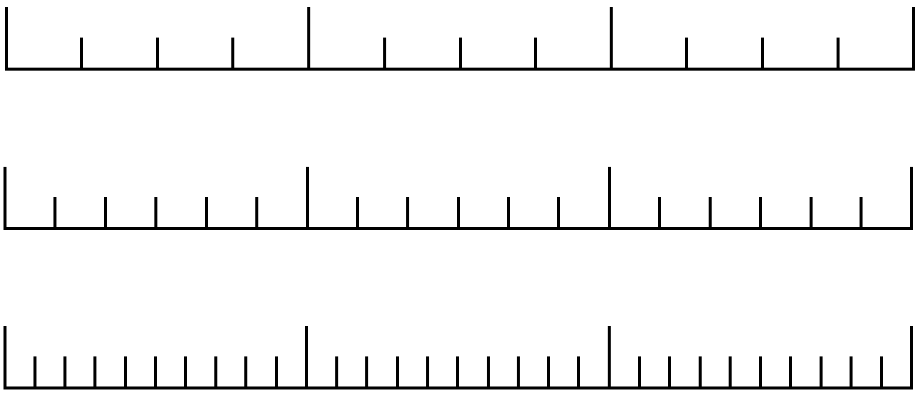
Comparez vos segments en vous aidant de la bande beige *(une bande sur laquelle les élèves peuvent repérer la longueur des segments)*

Série 2 : introduire un petit peu de nouveau
3) Plie ton unité en 2 puis encore en 2 et encore une fois en 2. Quelle est la longueur de la petite bande que tu obtiens ?

4) Comment construire un segment qui mesure 3/8 u ? Traces-en un

Série 3 : il faut décider ![8]
Matériel
Un matériel nouveau est proposé : des règles graduées avec des fractions de l'unité, pour pouvoir mesurer les longueurs de segments de manière rapide

3 règles de découpages différents dont une règle décimale



[8] Les longueurs des segments sont exactes pour au moins une des règles, ce qui bien sûr, est artificiel !

Exercices :

1) Choisis la bonne règle pour mesurer la longueur de ces trois segments

A B

AB =

C D

CD =

E F

EF =

LES DESSOUS DU NUMERIQUE

Claire Margolinas
IUFM d'Auvergne & Université Blaise Pascal
de Clermont-Ferrand, Equipe Démathé, INRP, France
claire.margolinas@univ-bpclermont.fr

Olivier Rivière
IUFM d'Auvergne & Université Blaise Pascal
de Clermont-Ferrand, Equipe Démathé, INRP, France
olivier.riviere@univ-bpclermont.fr

RESUME

L'objectif de l'atelier était double :

- (a) de réfléchir aux difficultés des élèves qui ont été mises en évidence par l'équipe Démathé « Développement des mathématiques à l'école » INRP, en partenariat avec l'IUFM d'Auvergne à partir notamment de documents vidéos réalisés,

- (b) d'envisager des possibilités d'usages du cédérom en formation d'enseignants.

Les difficultés concernent « les dessous du numérique » c'est-à-dire « en deçà des connaissances numériques bien identifiées par les professeurs » ? C'est en particulier celles liées à l'énumération, en référence aux travaux de Joël Briand (Briand, 1999 et 1993) qui ont été travaillées. Pour mieux comprendre les difficultés liées à l'énumération, une situation d'observation (de la moyenne section au CM2) où l'énumération intervient seule, ou principalement, a été présentée.

L'équipe Démathé « Développement des mathématiques à l'école » est une équipe de l'INRP, en partenariat avec l'IUFM d'Auvergne. Depuis 2003, nous avons notamment développé un document (cédérom, Hatier 2009) destiné aux professeurs de l'école primaire, qui concerne « Les dessous du numérique » c'est-à-dire, en deçà des connaissances numériques bien identifiées par les professeurs, les connaissances qui posent problème aux élèves dans la résolution de problèmes du domaine numérique ou d'autres. Nous nous sommes appuyés sur des recherches existantes (Briand, 1999; Briand, Loubet, & Salin, 2004), que nous avons complétées sur certains points. Nous avons proposé aux participants (a) de réfléchir aux difficultés des élèves telles que nous les mettons en évidence, à partir notamment de documents vidéos que nous avons réalisés ; (b) d'envisager des possibilités d'usages du cédérom en formation d'enseignants.

1. Une démarche de développement

1.1. Différents points de vue sur la recherche et le développement

Selon les pays et selon les disciplines, les traditions de recherche dans les différentes didactiques entretiennent des relations plus ou moins étroites avec le développement et l'innovation. En France et en mathématiques, il est courant de distinguer assez nettement des recherches fondamentales qui, en didactique comme dans d'autres disciplines, cherchent à augmenter nos connaissances sur les phénomènes qui se produisent dans l'enseignement des mathématiques, de recherches appliquées qui cherchent à produire des développements dans les pratiques d'enseignement (Margolinas, 2005).

Ces distinctions ne règlent pas la question des relations entre la recherche fondamentale et la recherche de développement. En effet, la recherche fondamentale a souvent recours à l'ingénierie pour produire des résultats, situation qui conduit nécessairement à affronter la réalité des classes et à construire, pour ces classes, des séquences qui sont parfois interprétées comme des « propositions didactiques » susceptibles, avec certaines adaptations, d'être proposées pour être mises en application dans les classes ordinaires, en contradiction même avec les intentions de leurs auteurs (Brousseau, 1998).

C'est sans doute à cause de cette apparente proximité entre ingénierie et pratique de classe qu'un schéma classique pour décrire les relations entre recherche fondamentale et développement peut se résumer ainsi (Margolinas, Mercier, & René de Cotret, 2007) : on imagine – idéalement – une sorte de chaîne descendante de la recherche fondamentale à l'ingénierie, au développement et à l'enseignement qui, pour sa part, fournit en retour une partie des questions pour la recherche fondamentale. Sans que ce schéma ne se trouve jamais écrit tel quel, il semble sous-jacent à certaines conceptions des relations entre recherche et enseignement, il n'y a qu'à penser aux discours sur la « théorie », la « pratique » et « l'articulation théorie-pratique » pour s'en convaincre.

Notre démarche1 est assez différente. En effet, nous faisons l'hypothèse que suffisamment de documents destinés à la classe (manuels, livres du maître, fichiers etc.) sont disponibles à l'heure actuelle, mais que les professeurs peuvent avoir, sur certains sujets, des difficultés à

[1] Groupe Développement des Mathématiques à l'Ecole (Démathé), INRP, dont la composition est variable depuis sa création en 2003.

nourrir des choix didactiques cohérents dans les situations variées dans lesquelles ils se trouvent : compréhension de stratégies des élèves dans certaines situations, réponses directes à des questions d'élèves, choix dans les situations proposées par les manuels, planification et organisation de l'enseignement, etc. Une telle démarche nous conduit à rechercher, dans les travaux de recherche fondamentale, les éléments épistémologiques de compréhension des savoirs mathématiques qui, le plus souvent, n'ont fait l'objet d'aucune diffusion en direction des professeurs et à nous demander comment une telle diffusion pourrait être possible.
C'est le résultat d'une telle démarche que nous esquissons ici.

1.2. L'énumération

Le premier sujet que nous avons décidé de traiter concerne l'énumération, nous nous référons donc à (Briand, 1999), dont la thèse sous la direction de Guy Brousseau (Briand, 1993) a exploré ce concept :

> « […] pour contrôler une situation de comptage, l'enfant doit faire fonctionner une connaissance (l'énumération) qui se réfère à l'exploration de la collection et qui conditionne complètement le bon déroulement de l'activité » (p. 52)

Il décrit alors le cas d'un élève qui doit compter le nombre d'éléments (des arbres dessinés sur une feuille de papier) et qui n'y parvient pas, alors qu'il connaît la comptine. Voici comment l'auteur analyse cette difficulté :

> « Quelle est la nature du problème qui se pose à cet élève ? Ce ne sont pas les connaissances relatives au nombre qui sont en cause. L'enfant échoue alors qu'il dispose de la suite numérique et d'un procédé d'exploration relativement bien organisé (deux chemins). Il s'agit donc d'une absence de connaissance (l'énumération) qui se manifeste par une absence de synchronisation effective entre une connaissance numérique et une organisation conjointe de la collection et qui empêche l'inventaire de la collection. » (p. 53)

Briand donne alors une description de l'activité :

> « Pour compter le nombre d'éléments d'une collection finie montrée, l'élève doit nécessairement :
>
> - *Etre capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.*
> - *Choisir un élément d'une collection*
> - *Enoncer un mot nombre (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mot-nombres).*
> - *Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.*
> - *Concevoir la collection des objets non encore choisis.*
> - *Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.*
> - *Savoir que l'on a choisi le dernier élément.*

- *Enoncer le dernier mot-nombre. » (p. 53)*

Les étapes en italiques caractérisent une connaissance non enseignée que Briand appelle énumération. Cette mise en évidence utilisée par l'auteur montre l'importance de ces étapes souvent ignorées par rapport à celles qui font intervenir les « mot-nombres » (seulement 3 et 8).

On retiendra que l'énumération est l'action d'organisation d'une collection qui permet de la parcourir d'une façon systématique et donc ordonnée.

L'énumération est nécessaire au comptage, mais ne dépend pas de la connaissance de la comptine. Briand a montré qu'il existait des situations d'énumération sans comptage et que l'énumération était enseignable (Briand et al., 2004). C'est dans le cadre de ces situations d'énumération « pures » qu'il a raffiné l'analyse des variables concernant l'énumération.

Son analyse permet notamment de comprendre les difficultés en jeu dans des items d'évaluation désormais classiques, tels que ceux que l'on peut trouver sur le site du ministère de l'éducation nationale en France2. Les élèves qui doivent « compter les ronds » placés en ligne (14 ronds) ou en désordre (8 ronds) présentent des difficultés d'énumération : ils sautent des ronds ou comptent le même plusieurs fois, le plus souvent sans difficulté dans l'énoncé de la comptine numérique. On remarque au passage que les concepteurs de cette évaluation ont choisi un nombre de ronds à compter « dans le désordre » (variable qui complique l'énumération) presque la moitié du nombre de ronds « en ligne ». Dans ces conditions, on obtient les mêmes résultats dans les deux configurations.

1.3. Une question de forme… et de fond

Notre démarche consiste à produire des documents pour le professeur, or les descriptions comme celles ci-dessus ne nous semblent pas nécessairement appropriées, pour plusieurs raisons. Tout d'abord il n'est pas facile de se représenter précisément ce qu'implique chacune des étapes de l'énumération. Ensuite le professeur ne s'intéresse à cette question qu'au travers de difficultés constatées chez des élèves, or dans cette description, même si ces difficultés sont évoquées, il faut tout de même les reconstruire.

C'est pourquoi, sans que cela relève d'une « mode » ou d'une intention au départ, nous avons décidé d'opter pour une forme de CD-Rom pour notre document. En effet, il est très facile, à l'aide d'un clip vidéo, de montrer les actions effectives des élèves dans des tâches d'énumération, là où la description est malaisée (Margolinas, Wozniak, De Redon, & Rivière,

---

2 http://www.banqoutils.education.gouv.fr/fic/ECPCAB01.pdf (Consulté le 13 avril 2008).

2007). De plus, l'insertion de clips vidéo permet au professeur de se trouver, comme dans la classe, en situation d'observation des actions des élèves, ainsi, ce qu'il pourra mieux comprendre au travers de notre document pourra sans doute plus facilement être réinvesti en classe en situation.

C'est bien parce que cette dimension d'observation nous semble au cœur du travail du professeur (Margolinas, 2002) que nous avons opté pour cette forme. En effet, nous pensons que l'observation des difficultés des élèves est un moteur de développement des pratiques des professeurs, ce que nous a confirmé une enquête (Margolinas & Wozniak, accepté) que nous avons réalisée.

Rendre compte de ce travail dans un texte n'est pas aisé, tant la forme adoptée est importante dans le cadre de notre travail ; dans la suite de ce texte, nous en donnerons néanmoins quelques éléments.

2. L'importance de l'énumération dans les apprentissages

2.1. L'énumération et les autres disciplines

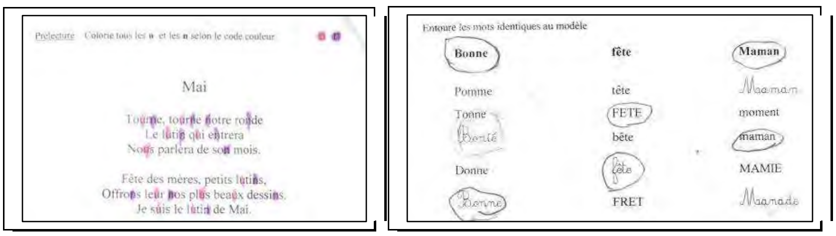


Figure 1 – L'énumération en prélecture

L'énumération intervient rarement isolée d'une autre activité, dans un premier temps, nous l'avons rencontrée dans le cadre du dénombrement. En fait, elle n'est pas réservée au domaine des mathématiques. Il y a de très nombreuses activités durant lesquelles il faut parcourir une collection de façon ordonnée et contrôlée.

Voici deux exemples très typiques en prélecture, que nous avons recueillis en grande section de maternelle (élèves de 5-6 ans), au mois de mai. Dans le premier il faut retrouver des lettres suivant un modèle. Il faut donc parcourir toute la collection des lettres pour retrouver les lettres u et n du modèle. Dans le second, il faut parcourir toute la collection des mots pour retrouver le mot du modèle. Cette deuxième fiche cache en fait une autre activité d'énumération, car les enfants ne savent pas lire. Quand ils considèrent un mot, ils doivent comparer les lettres de ce mot avec les lettres du modèle, une par une, dans l'ordre.

Dans nos observations en maternelle, nous avons remarqué que, pour les élèves les plus faibles, pour lesquels la reconnaissance de la lettre ou du mot est déjà difficile, le parcours de la collection des lettres ou des mots ne va pas de soi non plus. Ils sont confrontés à une double difficulté : celle de la lecture, qui est repérée par le professeur, et celle de l'énumération, qui n'est souvent pas considérée.

Avec cette clé d'observation, il est possible de voir de l'énumération partout… effectivement, énumérer est une activité très courante, combinée avec toute sorte d'autres activités, qu'elles soient ou non mathématiques.

2.2. Recherche d'une situation

Pour mieux comprendre les difficultés liées à l'énumération, il peut être important de les observer dans des situations où l'énumération intervient seule (ou principalement), alors que nous venons de voir que l'énumération intervient dans de nombreuses situations où elle est liée à d'autres connaissances et, de ce fait, souvent mal identifiée. Nous avons conçu une telle situation, destinée à l'observation.

Une situation d'énumération nécessite la construction d'un parcours ordonné et contrôlé. La difficulté, surtout si on cherche une situation sans dénombrement, c'est de trouver un moyen de valider ce parcours. Notre solution (le lecteur pourra en trouver d'autres, nous n'en doutons pas !) consiste à disposer de petits objets (des morceaux de sucres, dans le CD-Rom) sur une table et à les cacher sous de petits « chapeaux » de papiers (voir figure 2).

Figure 2- Une situation d'énumération

L'élève doit récupérer tous les sucres cachés sous les chapeaux, pour cela, il doit soulever un seul chapeau, prendre le sucre, le déposer dans la boîte et replacer le chapeau au même endroit (l'emplacement est marqué par une croix sur la feuille). S'il soulève un chapeau et ne trouve pas de sucre, il a perdu. Quand l'élève annonce qu'il a terminé, on enlève tous les chapeaux, si tous les sucres ont bien été trouvés, l'élève a gagné.

2.3. Observation d'une situation d'énumération

Nous avons observé des élèves hors classe dans cette situation de la moyenne section de maternelle (élèves de 4-5 ans) au CM2 (élèves de 10-11 ans). Notons tout d'abord qu'il y a une très grande diversité des réussites et des échecs (des élèves jeunes réussissent, des élèves âgés échouent), ce qui est caractéristique d’une connaissance qui, n’étant pas enseignée, évolue peu. Par ailleurs, les stratégies des élèves montrent bien une organisation plus ou moins efficace.

Certains élèves (comme Olivia, 8 ans) soulèvent des chapeaux dans l’ensemble de la feuille sans organisation visible. Leur échec est prévisible.

La plupart des élèves qui réussissent traitent séparément deux sous-collections : une sous-collection composée des cinq éléments à gauche sur la figure 2 et une sous-collection composée des dix éléments restants. La sous-collection de gauche, peu nombreuse, est énumérée assez simplement. Par contre, beaucoup d’élèves ont des difficultés avec la sous-collection de droite de dix éléments.

Ceux qui réussissent parcourent cette sous-collection en ayant recours aux deux organisations sous-jacentes à la raison graphique (Goody, 1977/1979) : les lignes et les colonnes. La reconnaissance de ces organisations permet de comprendre que l’énumération n’est pas « naturelle », mais qu’elle se construit : c’est une connaissance. Elle permet aussi de considérer l’agencement des points à énumérer comme un jeu de variables : plus cet agencement est proche d’une organisation facile à identifier, comme celle des lignes ou des colonnes, plus l’énumération est simple.

Cette analyse nous semble importante pour le professeur. Elle permet, dans une tâche où l’énumération intervient (pas nécessairement isolément) de repérer les difficultés qui lui sont spécifiques, ce qui permet au professeur de prendre des décisions. En effet, si l’objet du travail n’est pas l’énumération et qu’elle n’intervient que comme une gêne, le professeur peut modifier l’exercice à l’avance pour simplifier l’énumération. Au contraire, quand il souhaite que les élèves travaillent les connaissances d’énumération, il peut laisser celle-ci à leur charge pour qu’ils s’y essayent. Il peut aussi, quand il le juge opportun, montrer aux élèves qu’il est possible d’organiser l’énumération en s’appuyant sur des formes de base (comme ligne et colonne). En effet, même s’il est possible d’enseigner l’énumération, comme l’a montré Briand, il est possible aussi d’être attentif, comme pour les autres connaissances, à permettre son apprentissage, même dans des situations non spécifiques. Les situations ordinairement vécues à l’école maternelle en donnent de très fréquentes occasions.

Ce qui est important ici, c’est que nous montrons, dans le cas de l’énumération, que la « capacité à s’organiser », qui est souvent décrite par les professeurs comme une « propriété de l’élève » (celui-ci s’organise mal !), est en fait une connaissance, qui peut être travaillée.

Ce qui nous semble important également, c'est que cette analyse ne préjuge pas d'une forme d'enseignement, celle-ci est à la charge du professeur. Notre travail cherche à donner des clés d'observation des difficultés des élèves pour les professeurs, qui puissent les conduire à prendre des décisions qui prennent mieux en compte les connaissances en jeu, telles qu'elles ont été mises en évidence par les recherches en didactique des mathématiques. Par contre, nous ne cherchons pas à intervenir sur les formes d'enseignement, qui ont bien entendu aussi leur importance. Nous pensons en effet qu'il peut être important d'aider les professeurs à trouver des formes d'enseignement plus efficaces, mais qu'il est aussi essentiel de leur fournir de meilleurs instruments de choix pour nourrir leur pratique.

3. Les gestes de l'activité mathématique

Le travail que nous présentons ici peut sembler trivial ; en effet, l'organisation des collections est parfois considérée comme une activité qui va de soi, une « simple » difficulté à organiser ses actions. Pour comprendre ces difficultés, il faut en effet s'intéresser de façon précise à ce que l'élève fait avec ses mains, où il dépose les objets qu'il a à traiter. On est bien loin de la preuve, de l'argumentation, encore moins de la démonstration, qui donnent aux mathématiques ses lettres de noblesse !

Notre intérêt ne s'exerce pourtant pas au hasard, puisque Guy Brousseau (1998, résumé des travaux entrepris depuis les années 60) a montré l'importance des modèles implicites d'action qui sont les générateurs des connaissances.

Pourtant, d'une façon plus générale, les gestes de l'activité mathématique, dans leur dimension matérielle, ne sont souvent pas considérés comme relevant d'apprentissages et encore moins d'un enseignement. On constate ainsi que trop souvent le maniement d'instruments aussi simples que la règle, pour ne pas parler des ciseaux, est négligé dans le cadre scolaire, le professeur déplorant leur mauvais usage, sans pour autant entreprendre d'action effective pour en améliorer l'efficacité.

Tout se passe comme si l'élève aurait du apprendre ailleurs, dans l'environnement social et principalement la famille, certains gestes nécessaires pour sa réussite dans l'accomplissement des tâches scolaires. Et pourtant, nous montrons que ce n'est pas le cas. Il y a là une source de malentendu, voire de méfiance, entre l'école et les familles, dont les origines sont sans doute multiples, l'une d'elle pouvant être recherchée dans les interactions entre les modifications des pratiques sociales et les impératifs scolaires (Margolinas, René de Cotret, & Giroux, 2006). Le cas de l'organisation des collections nous paraît assez emblématique de ces tensions, en effet, si la famille implique les enfants par exemple dans certaines tâches ménagères, comme cela a pu être le cas plus fréquemment autrefois, non pas pour apprendre quoi que ce soit aux enfants, mais pour partager certains travaux fastidieux, il est possible que ces situations fournissent aux enfants des occasions d'organiser des collections complexes (le tri des pierre dans les paquets de lentilles, par exemple), l'école n'a alors pas la charge spécifique d'organiser cette rencontre entre l'élève et ces types de situations.

Ainsi, l'impression de « trivialité » des connaissances liées à l'organisation des collections et à l'énumération est peut-être à mettre en relation avec une non légitimité historique de ces connaissances dans le cadre scolaire, que les transformations sociales obligent à reconsidérer.

4. Conclusion

Le CD-Rom que nous avons présenté est conçu *a priori* comme le premier élément d'une collection dont nous espérons qu'elle pourra un jour s'enrichir (sachant que malheureusement chaque élaboration prend beaucoup de temps). La difficulté de notre travail est que ce document, qui développe des éléments d'analyses épistémologique et didactique du travail de l'élève, est destiné à l'auto-formation des professeurs des écoles. L'ambition est modeste, puisque nous ne traitons qu'un tout petit aspect des mathématiques à l'école.

Néanmoins, les interactions avec les participants de l'atelier permettent d'envisager que d'autres aspects du métier de professeur, voire du rapport aux mathématiques pourraient être également visés.

En effet, nous montrons d'une part qu'il faut douter du caractère purement personnel de certaines qualités (savoir s'organiser) ce qui peut conduire à considérer différemment certaines difficultés récurrentes des élèves. Nous montrons d'autre part la nécessité de développer des mécanismes d'observation et des éléments d'analyse de ces difficultés.

Références bibliographiques

BRIAND, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

BRIAND, J. (1999). *Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(1), 41-76.

BRIAND, J., LOUBET, M., & SALIN, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris, Hatier.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

GOODY, J. (1977/1979). *La raison graphique* (J. Bazin & A. Bensa, Trans.). Paris, Les éditions de minuit.

MARGOLINAS, C. (2002). *Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur*. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (pp. 141-156).* Grenoble, La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS, C. (2005). *Essai de généalogie en didactique des mathématiques.* Revue suisse des sciences de l'éducation, 27(3), 343-360.

MARGOLINAS, C., MERCIER, A., & RENE DE COTRET, S. (2007). *Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire*. In L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas & A. Mercier (Eds.), *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques? Actes des journées mathématiques INRP 14 et 15 juin 2006 (pp. 25-36).* Lyon, INRP.

MARGOLINAS, C., RENE DE COTRET, S., & GIROUX, J. (2006). *Transformation de situations sociales et leurs conséquences sur certaines connaissances en jeu en contexte scolaire.* Paper presented at the L'école, lieu de tensions et de médiations : Quels effets sur les pratiques scolaires ? Actes du colloque international de l'AFEC, Lille.

MARGOLINAS, C., & WOZNIAK, F. (accepté). *Usage des manuels dans le travail du professeur : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire*. *Revue des sciences de l'éducation.* Numéro spécial: Les manuels scolaires : réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissages des élèves.

MARGOLINAS, C., WOZNIAK, F., DE REDON, M.-C., & RIVIERE, O. (2007). *Les mathématiques à l'école ? Plus complexe qu'il n'y paraît ! Le cas de l'énumération de la maternelle... au lycée.* Bulletin de l'APMEP, 471, 483-496

UTILISER DES ALBUMS NUMERIQUES POUR ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES A L'ECOLE

Annie CAMENISCH
Maître de Conférences Sciences du langage, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
annie.camenisch@alsace.iufm.fr

Serge PETIT
Formateur en mathématiques, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
serge.petit@alsace.iufm.fr

RESUME

L'objectif de l'atelier était de produire des outils pour utiliser les albums numériques (ou albums à compter) en vue d'apprentissages ciblés en mathématiques, en mettant en œuvre des démarches de lecture et d'écriture appropriées.
A partir d'une analyse tant linguistique et littéraire que mathématique d'un certain nombre d'albums numériques, plusieurs pistes d'exploitation en cycle 1 ou cycle 2 ont été proposées aux participants réunis en petits groupes. Il s'agissait d'une part de réfléchir à la manière d'exploiter certains albums en levant des obstacles à certains apprentissages mathématiques, d'autre part de prendre appui sur des albums pour élaborer des énoncés de problèmes (cycle 2).
Par ailleurs, un groupe a testé proposé une démarche de production d'écrit permettant aux élèves de fabriquer des albums numériques en vue d'une meilleure compréhension des implicites mathématiques.

Les albums numériques ont pour point commun d'utiliser des nombres à des fins plus ou moins pédagogiques. Certains peuvent être de purs produits documentaires sans visée artistique, mais la plupart sont de véritables albums de littérature de jeunesse qui méritent donc une approche adaptée.
L'utilisation des albums numériques dans les classes nécessite alors la mise en place de dispositifs didactiques mettant en valeur toutes leurs spécificités.

1. Lecture et analyse d'albums

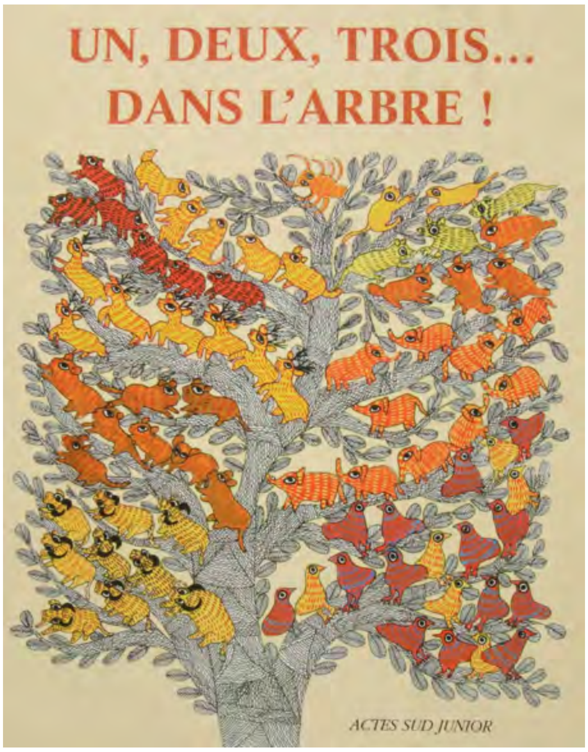
La lecture magistrale est souvent un préalable incontournable de la découverte d'un album, surtout pour les élèves les plus jeunes qui ne sont pas encore autonomes dans leur approche de l'écrit. Une « mise en scène » favorise l'adhésion des élèves au contenu d'albums numériques qui présentent souvent un aspect répétitif.

Ce sont les qualités littéraires et la richesse de la langue qui vont servir de tremplin, mais parfois aussi d'obstacle, à la compréhension des contenus mathématiques de l'album.

1.1. *Un deux trois dans l'arbre*[1]

L'atelier a donc débuté par la lecture magistrale et l'analyse de l'album *Un deux trois dans l'arbre*, traduit de l'anglais (Inde) *One, Two, Tree !*[2] La situation décrite par l'album est apparemment très classique : des animaux en nombre croissant (de 1 à 10) grimpent dans le même arbre, leur nombre étant aussi spécifié par le texte d'accompagnement très répétitif.

Mise en scène de lecture magistrale



La lecture du texte de l'album s'accompagne d'un travail actif sur l'illustration. En effet, un album est un type de livre où l'image et le texte interagissent en permanence. Le nombre est donc relié à une collection, ici d'animaux, dont on peut vérifier le nombre. Or, dans cet album, les animaux grimpent dans un arbre et se retrouvent avec ceux qui y sont montés précédemment.

Au fur et à mesure que l'arbre se remplit, il s'agit de compter les animaux qui viennent de se rajouter, clairement visibles par leur couleur, mais aussi de retrouver, de nommer et de compter les autres qui se camouflent en grisé dans l'arbre.

Analyse linguistique

L'album fonctionne selon une structure récurrente complexe. A chaque nombre correspondent deux double pages. La première comprend toujours le nom de l'animal dans un groupe nominal avec une expansion adjectivale (comprenant un ou plusieurs adjectifs qualificatifs) :

> « 1 pou un peu fou », « 5 gros chiens grognons »…

[1] Toutes les références complètes des albums se trouvent en annexe.
[2] Dans la langue d'origine, ce titre joue donc sur la prononciation proche de « three » (trois) et de « tree » (arbre).

La seconde double page reprend le même groupe nominal inséré dans une phrase simple. Le nombre est dans ce cas exprimé en lettres (déterminant numéral) :

> « Un pou un peu fou saute dans l'arbre », « Cinq gros chien ronchons se sont perdus ».

Les verbes sont au présent ou au passé composé.

Cette répétition de structure se rompt à la fin de l'album, pour le nombre dix qui laisse la phrase inachevée, remplacée par une phrase interrogative au futur :

> « Dix éléphants balourds… Pourront-ils aussi se percher ? »

Au niveau de l'orthographe grammaticale, on peut relever une opposition entre un groupe nominal au singulier (« un pou… ») et les autres qui sont tous au pluriel. Il est donc possible de relever la variation du nom en fonction du nombre (que ce soit le chiffre, la quantité d'animaux dans l'illustration ou le déterminant écrit en toutes lettres) et la manière de la marquer par la lettre « s » à la fin du nom. La chaîne des accords dans le groupe nominal, toujours marquée par la lettre « s », ainsi que sa relation avec le nombre au sens mathématique, est mise en évidence sur la page qui ne comprend que le groupe nominal :

> « <u>6</u> cochon<u>s</u> glouton<u>s</u> ».

L'étendue de cette chaîne d'accord au verbe avec une autre marque de pluriel « -nt » apparaît à la page suivante, lorsque le groupe nominal se poursuit par une phrase :

> « Six cochons gloutons grignotent les feuilles ».

<u>Analyse littéraire</u>

Plusieurs aspects peuvent révéler les qualités littéraires de l'album.

Les personnages : les protagonistes ne sont pas explicites. S'agit-il de l'histoire des animaux et de leur cohabitation pacifique dans l'arbre ou de l'histoire de l'arbre, colonisé par différents animaux ?

Les animaux ont tous leur personnalité, commune selon leur espèce : les lapins sont farceurs, les hyènes moqueuses, les cochons gloutons… Leurs actions sont d'ailleurs en relation avec ces caractéristiques marquées par les adjectifs. Ainsi, les lapins farceurs « jouent », les hyènes moqueuses « bousculent tout le monde », les cochons gloutons « grignotent les feuilles »… L'illustration montre aussi que les animaux s'éparpillent dans l'arbre, ils ne restent pas groupés, mais se mêlent aux autres. Ce n'est que dans l'image finale qu'ils se regroupent à nouveau par espèce. Cette dispersion peut se justifier par le repérage et le comptage des animaux ainsi rendus plus difficiles.

Le nombre des animaux semble aller de pair avec leur volume, lui aussi croissant (sauf peut-être pour les hyènes, plus petites que des rennes, mais plus féroces…) : 1 pou, 2 lézards, 3 rats, 4 lapins, 5 chiens, 6 cochons, 7 rennes, 8 hyènes, 9 vaches, 10 éléphants.

L'histoire : aucune histoire n'est explicitement racontée. En effet, l'album égraine l'arrivée de différents animaux qui montent successivement dans un arbre. Aucun enjeu ne semble *a priori* dépendre du succès de l'entreprise puisqu'on ignore pourquoi les animaux grimpent dans l'arbre.

Pourtant on peut déceler une chronologie, marquée par l'illustration. Des animaux différents se rajoutent à l'arbre se mêlant à ceux qui s'y perchent déjà. Ils n'occupent jamais la même place dans l'arbre, ce qui indique qu'ils se déplacent. Par ailleurs, l'arbre n'est jamais le même : il n'est pas vu du même angle, il a des branches de plus en plus nombreuses, son tronc se modifie. Certains verbes marquent aussi la succession des événements lorsque les lézards « suivent » ou que les hyènes « bousculent tout le monde ».

L'histoire implicitement racontée est donc celle de la cohabitation d'animaux de différentes espèces sur le même arbre. Le changement de structure avec l'introduction de la phrase interrogative pour la page du « dix » est caractéristique d'une « chute », qui indiquerait alors la « conclusion » à tirer de l'histoire :

> « Dix éléphants balourds… Pourront-ils aussi se percher ? »

L'univers représenté est assez particulier. Comme l'explique une notice à la fin du livre, l'illustratrice de l'album est originaire de la tribu Gond en Inde. Elle s'inspire de la tradition gond où « les murs des maisons sont décorés de peinture mettant en scène la vie quotidienne et le labeur, des animaux, particulièrement des oiseaux, et l'harmonie entre l'homme et la nature »[3]. Les oiseaux ne font pas partie des personnages se présentant au fur et à mesure, mais ils apparaissent sur plusieurs pages, notamment à la fin du livre, au nombre de vingt. Sur l'avant-dernière page, ils ne sont pas encore perchés sur l'arbre mais semblent attendre que les autres animaux leur laissent la place, et la page finale les montre tous perchés.

Le système des valeurs et l'interprétation : une œuvre littéraire se distingue aussi par la richesse des interprétations qu'elle suscite. Dans cet album, on peut s'interroger sur le rôle de l'accroissement des animaux, tant du point de vue de leur nombre que de leur volume. L'arbre doit supporter non seulement un nombre de plus en plus grand d'animaux, mais aussi des animaux plus volumineux, rendant ainsi la charge plus lourde à porter. Mais l'arbre ne semble pas en souffrir, puisqu'il croît lui aussi en volume et en taille.

La question finale « Pourront-ils aussi se percher ? » montre l'enjeu de l'histoire racontée. En effet, peu importent les raisons pour lesquelles les animaux souhaitent se percher dans l'arbre, la question essentielle porte sur la capacité d'accueil de l'arbre et sur la volonté de cohabitation des animaux. Image et texte se répondent de manière croisée. En effet, sur la

[3] Citation tirée de la notice dans *Un, deux, trois… dans l'arbre !*

page posant la question relativement aux éléphants, on les voit pourtant déjà tous perchés dans l'arbre sur l'illustration qui anticipe la réponse. La page suivante donne la réponse explicitement :

> « Oui ! Si chacun laisse une place à l'autre »

Mais l'illustration montre les vingt oiseaux qui attendent. La dernière page, qui montre les oiseaux perchés, semble apporter une réponse plus définitive et plus universelle. La démultiplication des oiseaux semble ainsi indiquer que d'autres animaux chercheront à se percher et seront accueillis de la même manière.

Ainsi, cette histoire semble montrer qu'il peut exister une harmonie entre différentes espèces à condition que chacun y prenne part.

Cette entente entre les espèces doit cependant s'accompagner d'une harmonie entre l'arbre et ses occupants dans la mesure où leur nombre respecte la capacité d'accueil de l'arbre au fur et à mesure de sa croissance. Cette harmonie-là est totalement implicite dans l'album et uniquement perceptible par la mise en relation entre l'illustration et les nombres. Cette recherche de l'harmonie est une des caractéristiques de l'art gond et donc de l'univers représenté par l'illustration.

Dans une interprétation plus métaphorique, cette histoire pourrait aussi signifier l'harmonie possible entre l'homme et la nature, l'arbre pouvant représenter la nature à respecter, ou le monde, qui progressivement se remplit avec l'accroissement de la population, mais où néanmoins, dans le respect de la nature, l'entente peut faire place à la concurrence.

Par les interprétations qu'il suscite, et le rôle signifiant de la croissance numérique dans la construction d'une interprétation, cet album renferme donc d'indéniables qualités littéraires.

Analyse mathématique

L'analyse des aspects mathématiques se révèle toute aussi riche et présente les aspects suivants :

- Il s'agit d'une suite croissante de raison 1 (entiers naturels).
- On compte de 1 jusqu'à 10.
- Il y a une représentation figurale avec le dénombrement d'animaux sur chaque page.
- Pour chaque nouveau nombre, les objets comptés sont de même nature, mais lorsqu'ils se retrouvent dans l'arbre, les objets sont hétérogènes. Il est donc nécessaire d'utiliser un hyperonyme (animaux) pour les nommer.

- Les nombres sont écrits en chiffre dans la première occurrence (groupe nominal), puis ils sont écrits en toutes lettres sur la page suivante (dans la phrase) : articulation de registres sémiotiques.
- La lecture d'images permet de faire des additions puisque les animaux se rajoutent dans l'arbre. Il est donc possible de fabriquer des énoncés de problèmes additifs.
- Le 10 n'est pas construit mais arrive dans la succession des nombres, ouvrant un espace de débat sur la pertinence d'écrire « 1 0 » au lieu de « dix ».

Si une telle analyse n'est nullement à mettre en œuvre devant les élèves, elle est cependant nécessaire pour les enseignants qui peuvent ainsi, en toute connaissance de cause, exploiter le contenu tant linguistique que littéraire pour susciter une interprétation de l'histoire et favoriser une meilleure utilisation mathématique de l'album.

1.2. Autres albums

Les participants se sont répartis dans sept groupes et se sont livrés à l'analyse d'un album différent qui leur a été remis.

Consigne : Préparez la lecture de l'album ou de quelques extraits s'il est long. Proposez une rapide analyse littéraire et linguistique réalisez une affiche répertoriant les aspects mathématiques en identifiant les éventuelles questions que pose cet album du point de vue de l'enseignement des mathématiques.

1.2.1. *Un pour l'escargot, dix pour le crabe*[4]

Il s'agit de compter les pieds de personnages qui profitent de la plage…

Aspects littéraire et linguistique[5]	Aspects mathématiques
- Pas d'histoire, même si l'univers représenté est une plage. - Association nombre de pieds et de pattes	- Ecriture chiffrée, figurative (nombre de flèches) - On compte les pieds - Nombres impairs : pair et un (pied de l'escargot sert d'ajustement) - Au début comptage de 1 en 1 jusqu'à 10, puis comptage e 10 en 10 jusqu'à 100. - A partir de 10, différentes décompositions des nombres : 30 pour 3 crabes et 30 pour 10 enfants, et un crabe - Calcul : 60 : commutativité 6x10 et 10x6 - On arrive à 100

4 Les références complètes des albums se trouvent en annexe.
5 Les tableaux grisés sont issues des productions des groupes.

1.2.2. 365 pingouins

Un jour un paquet arrive par la poste contenant… un pingouin, et chaque jour, un nouveau pingouin se rajoute… Pour sauver les pingouins du pôle sud, Emile-Victor les envoie momentanément dans une famille d'accueil, afin ensuite de les implanter au pôle nord. Après les pingouins, il reste les ours à sauver (et tout le reste de la nature ?).

Aspects littéraire et linguistique	Aspects mathématiques
- L'histoire est une énigme avec une chute écologique, une histoire sans fin quand il s'agit de préserver la nature - Accumulation de pingouins qui posent un problème de communication. - Phrases élaborées. - Jeux de mots. - Expression scientifique : 'sachant que'	- Aspect ordinal 'n°2' le 'deuxième'… - Aspect cardinal associé - Ecriture chiffrée, lettrée, figurative - Addition codée 31+28 - Problèmes posés : Calcul du prix de la nourriture pour 100 pingouins, déduction pour 101. - Ranger par paquets de 15, de 12… - Organisation spatiale sous forme de cubes - Ordre de grandeur : un de plus, un de moins, on n'est plus à ça près… - Les nombres ne sont pas choisis au hasard
Il s'agit d'un véritable cauchemar écologique et numérique…	

1.2.3. J'apprends à compter

Différentes situations quotidiennes constituent des prétextes à compter des animaux personnifiés…

Aspects littéraire et linguistique	Aspects mathématiques
- pas d'histoire mais des « clip » - personnages animaux qui ont des qualités humaines - rimes - vocabulaire complexe - phrases de commentaire ou de description	- Suite itérée de 0 à 19 - Pas d'écriture lettrée du nombre désigné - Suite de 0 à 10 : personnages différents, puis suite stable de 10 à 19. - Puis saut de 10 en 10 à partir de 20 : 2 et 2 dizaines : même animal utilisé… - Différentes configurations du dix - Décomposition additive
Problèmes : - Pas toujours de cohérence dans les regroupements des animaux en « paquets » (notamment la page des singes). - Zéro c'est rien.	

1.2.4. Grigri compte

Le chat Grigri va au bord de mer avec ses parents et compte tout ce qu'il voit…

Aspects littéraire et linguistique	Aspects mathématiques
- Personnage : Grigri et sa famille en vacances au bord de la mer	- Situation de dénombrement : aspect cardinal

- Des phrases interrogatives au début avec réponse par un nombre - Puis des phrases déclaratives qui incite à compter. - Champ lexical : la mer, les vacances - Hyperonyme : bateau	- Ecriture chiffrée, figurale et littérale - Aspect ordinal : animal intrus sur la page de gauche (1er intrus, 2ème intrus, 3ème intrus)
Problèmes possibles : Correspondance terme à terme entre un personnage/glace, entre marins/sacs et personnages / cerf volants (6 cerf-volants mais 5 personnages) ?	

1.2.5. Au fil des nombres

Un couturier rêve et refait le monde avec son aiguille…

Aspects littéraire et linguistique	Aspects mathématiques
- Création et cycle de vie. - Personnage : Asa (artiste qui brode) - Représentation du monde : référence à la paix, à la patience, au temps… - Ecriture très poétique. - Présence de compléments circonstanciels	- Ecriture chiffrée de 0 à 10 (suite numérique croissante) - Ecriture additive avec des signes opératoires (+, =) - Accumulation de 1 de plus à chaque page - Le successeur est le précédent plus 1 - Suite de Peano
Question : Un souvenir est associé au chiffre 0 au début, sera retrouvé en dernière page dans l'écriture du 10 (1 souvenir) Problème du 'un' article indéfini et article numéral ; contrairement à l'anglais par exemple : 'a' et 'one'.	

1.2.6. Comptes tout ronds

Un crocodile invite des oiseaux à venir se nourrir dans sa gueule…

Aspects littéraire et linguistique	Aspects mathématiques
- Titre au pluriel, sous-titre énigmatique « petit boulier à plumes » - L'histoire n'est pas racontée, elle se construit à rebours quand on découvre la phrase de conclusion - Beaucoup d'implicite : très peu de texte, écrit très petit - Univers des animaux (crocodile, oiseaux) - Jeu de mots humoristique sur une expression : « Compter sur quelqu'un ». - Onomatopées.	- Compter de 1 à 11 (structure croissante) - Trois registres de Duval : chiffres, lettres, représentations - Dénombrements et regroupements - Décomposition additive - Représentation spatiale (Piaget)
Problèmes posés en mathématiques : - La même représentation figurale est utilisée pour le 2 et le 11 - Proposition : représenter le croco avec un œil et (10 oiseaux mangés) et un autre oiseau - Pas de situation problème sauf peut-être pour CP (11)	

1.2.7. Dix petites graines

Dix petites graines sont plantées par une main d'enfant…

Aspects littéraire et linguistique	Aspects mathématiques

- Deux histoires entrecroisées - Histoire cyclique : graines qui évoluent (racines se développent, plante, fleur qui fait des graines) - Histoire mathématique : à chaque page disparaît une graine. - Univers des sciences : vocabulaire scientifique, spatialisation (dessous, dessus) - Personnages : difficultés de la plante de grandir à cause de prédateurs - Déterminant et nom	- Album à décompter de 10 à 1. - Ecriture uniquement en lettres. - Transformation négative : page N : passage de n à n+1 (transformation évoquée par l'animal qui arrive)
Problème : pas d'écriture chiffrée.	

2. Production d'outils à partir d'une mise en réseau

A partir d'un réseau d'albums, chaque groupe était chargé d'élaborer des pistes de travail en classe, autour de quelques thèmes. Cependant, la réflexion n'a guère été qu'amorcée dans certains groupes et aurait demandé davantage de temps.

2.1. Produire des énoncés de problèmes

Consigne : Produire des énoncés de problèmes variés comportant des calculs à partir des albums fournis. Comment faire produire de tels énoncés aux élèves à partir des albums ?

Deux groupes ont élaboré quelques problèmes à partir de trois albums.

Production de groupe

Problèmes de structure additive à partir de *Un, deux, trois… dans l'arbre !*

Recherche de l'état final : Combien y aura-t-il d'animaux dans l'arbre après l'installation des chiens ronchons ?
Recherche de l'état initial : Il y a 10 animaux dans l'arbre, 4 lapins farceurs viennent d'arriver, combien y avait-il d'animaux au départ ?
Recherche de la transformation : Après l'arrivée des lapins il y avait 10 animaux dans l'arbre. Maintenant, il y en a 15. Que s'est-il passé ?

Problèmes multiplicatifs à partir de *Un pour l'escargot, dix pour le crabe*

+1 associé au nombre suivant
doubles : 8=4x2
diverses décompositions d'un nombre :
40=4d=4x10=10x4=2x20
50=5x10=3d+2d=10x4+1d

Problèmes non rédigés, sans doute par manque de temps

<u>Production de groupe</u>

Les 4 énoncés suivants suivent une progression et s'appuient sur cette page de 365 Pingoins :

Problème 1 : le dimanche, nous avons 7 pingouins. Le premier pingouin est arrivé le 1^{er} de l'an. Quel jour de la semaine était le premier de l'an de cette année ?

Problème 2 : chaque jour, le facteur amène un pingouin de plus. Le premier pingouin est arrivé le lundi 1er janvier. Quel jour du mois de janvier aura-t-on 17 pingouins ?

Problème 3 : Combien de pingouins aura reçus la famille le 14 mars de la même année ?

Problème 4 : quel jour, de quel mois, ma famille aura-t-elle reçu 150 pingouins ?

Le problème suivant s'appuie sur cette deuxième page.

Problème 5 : quel jour et quel mois de l'année atteint-on 5 pyramides de 15 pingouins ?

S'il peut être intéressant de demander aux élèves de résoudre ces problèmes, il est d'autant plus stimulant pour eux d'en imaginer d'autres à partir des situations décrites dans les albums. En effet, non seulement le support est motivant, mais il donne aux élèves un point de départ inscrit dans une histoire, et donc soulage la tâche qui consiste à créer de toutes pièces un univers qui sert d'habillage aux problèmes. Les situations deviennent aussi plus originales. Cela facilite aussi la représentation du problème pour les autres élèves qui auront à les résoudre.

2.2. Le zéro et le rien

Consigne : Trouver un maximum d'expressions permettant de dire le *zéro*, le *rien*, les comparer. Comment les mettre en œuvre en classe ? Fabriquer des énoncés de problèmes pour faire dire *zéro* et le distinguer du *rien*.

Quelques albums[6] favorisaient l'inventaire et pouvait servir d'inducteurs pour les problèmes :

J'apprends à compter

Un petit cadeau de rien du tout

Compter

Toujours rien

Moi et rien

Alors

<u>Production du groupe</u>

Problèmes sur zéro et rien

Sur une page d'album on peut compter plusieurs collections avec l'une d'entre elles qui ne comporte pas d'élément.
Rituel du matin : compter le nombre d'absents ; s'il n'y en a pas… zéro absent !
Pierre a 3 bonbons, il mange les trois ; combien lui en reste –t-il ?
La boite de bonbons est vide ; il n'y a pas de bonbons (ou plus) donc zéro !

On pouvait aussi relever un certain nombre d'expressions suivantes dans les albums et les interpréter en fonction du contexte :

- « Zéro ce n'est pas rien ».
- « Alors ? – rien ! - toujours rien ! – rien du tout ».
- « Il n'y avait rien à voir, l'oiseau ne répondit rien ».
- « Rien n'est important », « Il n'y a rien à faire ».

2.3. Les désignations du « zéro »

Consigne : Trouver un maximum de situations à partir des albums permettant de dire le *zéro*. Fabriquer des énoncés de problèmes pour faire dire *zéro*.

Quelques albums[7] favorisaient l'inventaire et pouvait servir d'inducteur pour les problèmes :

Les dix petits harengs

Les bons comptes font les bons amis

Compter

Grigri compte

[6] Voir références complètes en annexe.
[7] Voir références complètes en annexe.

<u>Production du groupe</u>
Les 10 petits harengs : le zéro c'est ce qu'il reste quand on a tout enlevé.
Les bons comptes : le zéro permet de dire l'absence dans une liste (« ils ont oublié les olives ») ; c'est aussi ce qui se dit après « un » quand on récite la comptine « à l'envers ».
Compter : le zéro est un signe qu'on appelle « chiffre » mais cela ne fait pas sens dans cet album.
Grigri compte : le zéro c'est la réponse à la question « combien y-a-t-il de nuages ? »
Dire le zéro est difficile, on ne dit pas dans le langage courant « il y a 0… », on dit « il n'y en a pas ».
Écrire le zéro.
Reprise de la liste de course finale de *Les bons comptes*
Si on n'écrit rien en face d'« olives », on ne sait pas s'il s'agit d'un oubli (on a oublié d'écrire ici combien on doit acheter) ou s'il n'y avait pas d'olives :
…. olives
4 pommes
5 oranges

2.4. Construction de 10, 11, 12

Consigne : Quels problèmes posent ces albums concernant la construction du 10 ? Comment les utiliser pour éviter ces problèmes ?

Quelques albums[8] étaient proposés comme supports :

Comptes tout ronds

Au fil des nombres

Chiffres en friches

Petit 1

<u>Production du groupe</u>

Comptes tout ronds
Aucun sens, ni pour le 10 ni pour le 11 qui n'apparaissent que comme numérotation de la page ; confusion entre une unité et une dizaine ; suggestion éviter la page 11 ; pour le 10, on ne peut plus compter les ronds qui ont disparus d'où le zéro.
Au fil des nombres
10 = 9+1 ; 10 c'est le successeur de 9 rien de plus
Chiffres en friche
Imagier sans histoire, le dix est présent sans lien avec les autres nombres ; beaucoup de référents culturels non accessibles en maternelle ; signalons différentes écritures des nombres (chiffres arabes, romain, chinois, japonais)
Petit 1
1 et un cerceau, cela fait dix ; ici on reste au niveau de la désignation, au niveau de l'écriture avec un sens cardinal suggéré par l'image mais qui n'est pas construit

Il conviendrait d'approfondir la réflexion pour résoudre ces problèmes non en les ignorant mais en proposant un dispositif susceptible de les lever.

[8] Voir références complètes en annexe.

2.5. Une démarche d'écriture

Consigne : Comment mettre en œuvre une démarche de projet pour écrire des albums à décompter atteignant le zéro ?

Le groupe a réfléchi aux différentes variables de la situation d'écriture qui leur a été présentée. Le temps a manqué pour la mettre en œuvre dans une production concrète.

La création d'un album numérique passe ainsi par une démarche d'écriture permettant aux élèves d'utiliser leurs connaissances mathématiques tout en réalisant des apprentissages langagiers.

Cette démarche est connue en didactique du français sous le nom de « projet d'écriture ». Elle prend ici comme support des albums numériques qui serviront d'inducteurs à l'écriture.

Pour l'enseignant, il s'agit d'abord de définir les objectifs d'apprentissages en mathématiques puis les contraintes de la situation d'écriture. En effet, plus les contraintes sont fortes, plus facile sera l'écriture. Elles seront donc variables en fonction de l'âge et des compétences des élèves. Au cycle 1, la contrainte sera maximale, alors que les élèves plus autonomes du cycle 2 devront faire un certain nombre de choix. Sinon, c'est à l'enseignant de faire ces choix :

Les apprentissages mathématiques

L'enseignant doit d'abord définir l'objectif d'apprentissage ou de réinvestissement souhaité pour l'album. Par exemple :

- réinvestissement : écrire les chiffres dans différents registres (lettres, chiffres…)
- apprentissage : donner un sens à « zéro »

En fonction de ces apprentissages mathématiques, parmi les albums numériques distribués, ceux mettant en œuvre un compte à rebours avec une structure numérique décroissante aboutissant à zéro, sont les plus appropriés.

Les albums inducteurs

Dix petits doigts

Dix petites graines

Dix petits poussins

Le point d'eau

La mise en réseau s'appuyant sur plusieurs lectures magistrales met en évidence le fonctionnement commun des albums. Cependant aucun ne se termine explicitement par zéro. Celui-ci reste donc à verbaliser lors d'une analyse plus approfondie des albums.

La situation d'écriture contrainte

Les élèves vont créer un album « à la manière de » en s'inspirant de la structure décroissante mais en y intégrant explicitement le zéro. Les personnages et l'histoire peuvent être choisis ou imposés selon le degré d'autonomie des élèves. Une nouvelle mise en réseau des *Dix Petits poussins* avec l'album *Un bel œuf* de Marie WABBES (Archimède, 1999) impose des « œufs » comme personnages, tirés d'une boite de six, dix ou douze, selon le niveau des élèves. On peut les personnifier comme les personnages des *Dix petits doigts*.

Il est alors possible, par petits groupes d'élèves d'imaginer ce que chaque œuf va devenir en vidant la boite au fur et à mesure. Le retour à une lecture plus fine de certains albums permet de réutiliser une structure linguistique et de trouver des idées pour la transformation des œufs (omelette, gâteau, œuf de Pâques, poussin…).

L'appui sur les albums tant pour la structure linguistique que pour la recherche d'idées s'avère donc être une piste fructueuse.

Evaluation

La reconstitution de l'album avec adjonction des chiffres pourra servir de situation d'évaluation. Les élèves doivent mettre les illustrations avec leur texte dans le bon ordre, puis ajouter les écritures chiffrées qui correspondent. Il est essentiel d'y faire figurer le zéro 0.

Conclusion

Si le temps a manqué pour produire des outils achevés, l'atelier a néanmoins permis de révéler la richesse mathématique des albums numériques. Cette richesse ne se situe pas tant dans la qualité mathématique ou didactique des savoirs, mais bien davantage dans la grande variété des questionnements auxquels elle ouvre la voie. Bon nombre de ces questionnements pourront trouver une issue par le biais de productions (prolongements d'albums, albums…) nécessitant d'articuler aux mathématiques tous les aspects littéraires, particulièrement motivants, et les aspects linguistiques qui structurent la pensée.

ANNEXE : Albums numériques utilisés

Pour travailler le zéro

Grigri compte de Lionel KOECHLIN, Hatier, 1991.

Compter de Claude DELAFOSSE et Donald GRANT, Gallimard (Mes premières découvertes), 1993.

Les dix petits harengs de Wolf ERLBRUCH, La joie de Lire, 1997.

Dix petits amis déménagent de Mitsumasa ANNO, L'école des loisirs, 1982.

Compter de Claude DELAFOSSE et Donald GRANT, Gallimard (Mes premières découvertes), 1993.

Les bons comptes font les bons amis de Suzanne BUKIET et May ANGELI, Editions de l'observatoire, 1987.

Alors ? de Kitty CROWTHER, Pastel, 2005.

Un petit cadeau de rien du tout de Patrick McDONNEL, Panama, 2007.

Moi et Rien de Kitty CROWTHER, Pastel, 2000.

Toujours rien ? de Christian VOLTZ, Editions du Rouergue, 1997.

Pour construire le 10

Au Fil des nombres de Laura ROSANO, Bilboquet (l'art en page), 2002. ③

Chiffres en fiches d'Agnès ROSENSTHIEL, Larousse, 1979.

Un et ses amis de Lionel KOECHLIN, Mango, 1995.

Comptes tout ronds d'Olivier DOUZOU, Editions du Rouergue, 1997.

J'apprends à compter d'Elisabet BALLART, Roser CAPDEVILA, Casterman, 1992.

Petit 1 de Ann et Paul RAND, Circonflexe, 1992.

Pour fabriquer des énoncés de problèmes pour calculer

Un pour l'escargot, dix pour le crabe d'April P. SAYRE et Jeff SAYRE, Kaléidoscope, 2003.

Et si on comptait… Photographies de l'agence Magnum, Marie HOUBLON, Tourbillon, 2003.

Un, deux, trois… dans l'arbre ! d'Anushka RAVISHANKAR, Sirish RAO, Durga BAI, Actes Sud Junior, 2006.

365 pingouins de Jean-Luc FROMENTAL et Joëlle JOLIVET, Naïve, 2006.

Pour fabriquer des albums numériques

Dix petits doigts de Didier MOUNIE et Anne LETUFFE, Le Rouergue, 2002.

Dix petites graines de Ruth BROWN, Gallimard jeunesse, 2001.

Dix petits poussins de Christine NAUMANN et Elsa ORIOL, Kaléidoscope, 2008.

Le point d'eau de Greame BASE, Gallimard Jeunesse, 2001.

Les dix petits harengs de Wolf ERLBRUCH, La joie de lire, 1997.

Références bibliographiques

VALENTIN D. (1992-1993) *Livres à compter*, Grand N, 52.

EYSSERIC P. (2001) *Albums, contes et mathématiques,* in Actes du XXVII^{e} colloque COPIRELEM, Chamonix.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2007) *Des albums à compter pour apprendre à compter et à développer la maîtrise de la langue*, Bulletin APMEP, 471, 574-580.

CAMENISCH A. (2007) *Les livres à compter au cœur du langage*, Éducation Enfantine, 6, 15.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2007) *Produire un album à compter*, Éducation Enfantine, 6, 62-64.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2008) *Des albums numériques : pour quels apprentissages en français et en mathématiques ?* in Actes du XXIV^{e} colloque COPIRELEM, Troyes.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2007), *Des projets d'écriture en mathématiques*, in XXIII^{e} colloque COPIRELEM, Dourdan.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2006), *Lire et écrire des énoncés de problème (2)* in XXXII^{e} colloque COPIRELEM, Strasbourg.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2005), *Lire et écrire des énoncés de problème*, in XXXI^{e} colloque COPIRELEM, Foix.

COMMENT EXPLOITER LES PROBLEMES DE PAVAGES DU PLAN POUR LA FORMATION DES PE ET PLC EN GEOMETRIE ?

Jean-Claude RAUSCHER
Maître de conférence (retraité)
Groupe Apprentissages en Contextes Didactiques, IUFM d'Alsace
jc.rauscher@wanadoo.fr

Claude MAURIN
PIUFM, IUFM Aix-Marseille, site d'Avignon
Maurinsdesmaures@wanadoo.fr

Résumé
Que ce soit pour des élèves ou des professeurs en formation, la question de l'élaboration de pavages du plan à l'aide de polygones (réguliers ou pas) débouche rapidement sur des problèmes qui engagent les connaissances en géométrie et permettent de réfléchir aux modes de validation dans ce domaine. A partir de quelques uns de ces problèmes utilisés à l'origine par Christine De Block Dock (1994) dans une expérimentation avec des élèves de douze ans, l'atelier visait à procéder à l'analyse des enjeux de la formation des enseignants en géométrie que ces situations permettent d'aborder en fonction des publics visés (PE1, PE2, PLC, formation initiale ou continue…). Au préalable les participants ont amorcé la résolution de ces problèmes afin d'en reconnaître les contours mathématiques. Comme promis aux participants, le compte rendu de cet atelier est complété par la présentation d'une activité présentée par Claude Maurin à des PE2 et destinée à des élèves de cycle 3 (« Les triangles jumeaux ») et par la description des modalités utilisées par Jean-Claude Rauscher avec des étudiants (licence ou PE1) se destinant à l'enseignement et par les observations qui ont pu être faites dans ce cadre.

Genèse de la proposition d'atelier et contenu du compte rendu (Jean-Claude Rauscher).

La présentation et l'analyse d'un enseignement expérimental qui a été conçu et mis en œuvre à Bruxelles avec des élèves de douze ans (De Blok Dock, 1994) m'ont inspiré dans la conception et la réalisation d'une formation proposée principalement (1998 à 2007) dans le cadre d'un cours avec des étudiants d'une licence pluridisciplinaire, mais aussi avec des PE1 (Professeur des Ecoles, première année) dans le cadre de la préparation du concours CERPE. Les problèmes de création de pavages du plan à l'aide de polygones qui sont au cœur de cet enseignement expérimental sont proposés aux étudiants. La résolution de ces problèmes engage rapidement les connaissances en géométrie et permet de réfléchir aux modes de validation dans ce domaine. En fait il s'agit d'une situation d'homologie (au sens d'Houdement-Kuzniak, 1993) qui, au-delà des contenus mathématiques en jeu, permet d'aborder avec les étudiants des questions d'enseignement et d'apprentissage en géométrie à l'école et au collège. L'activité mathématique que déploient alors les étudiants leur permet non seulement de s'interroger sur leurs propres connaissances et modes de validation mais aussi de comprendre les modalités de pensée d'élèves analysées finement par Christine de Block Dock.

Après une présentation de cette formation dans le cadre d'un atelier mené avec mon collègue Claude Maurin au séminaire de formation des nouveaux formateurs organisé par la COPIRELEM à Istres en novembre 2007, nous avons à nouveau proposé un atelier au colloque de Bombannes 2008. Mais Claude m'a proposé d'en redéfinir entièrement le canevas (partie I) afin de laisser plus d'initiatives aux participants comme il se doit dans le cadre d'un atelier. Les problèmes de pavages considérés constituaient en effet un support riche pour permettre aux participants de développer et de partager leurs propres réflexions et suggestions quant à son intérêt pour la formation des enseignants en mathématiques, PE (Professeur des Ecoles) et PLC (Professeur des Lycées et Collèges) confondus. Le résultat est très riche en apports que nous essayerons de synthétiser et de restituer au mieux dans ce compte rendu (partie II). Il sera complété par la description d'une activité conçue par Claude Maurin prévue pour des élèves de cycle 3 et présentée à des stagiaires PE2, « Les triangles jumeaux », inspirée par les problèmes de pavages du plan (partie III). Par ailleurs comme cela était un peu prévisible, le temps a manqué pour communiquer aux participants mon expérience de formation avec des étudiants à l'ULP et l'IUFM de Strasbourg, ce qui était pourtant prévu dans la proposition d'atelier. Ce manque sera réparé ici dans la partie IV. Nous finirons enfin ce compte rendu en ouvrant vers quelques questions de formation (Partie V).

Le compte rendu de l'atelier comporte donc successivement :
- I) Le canevas de l'atelier
- II) Le compte rendu du travail des groupes
- III) Une proposition d'activité en cycle 3 : « Les triangles jumeaux » (C Maurin)
- IV) La présentation de la formation proposée à des étudiants de licence pluridisciplinaire à l'ULP de Strasbourg et les principales observations liées (JC Rauscher)
- V) Une conclusion qui ouvre sur quelques questions de formation.

I – LE CANEVAS DE L'ATELIER

1^er^ temps : présentation de l'objet de l'atelier.

2^ème^ temps : présentation des problèmes de pavage et du matériel.

Présentation du matériel mis à disposition :

Pour les problèmes 1 et 2, des jeux de polygones réguliers en carton de 3, 4, 5, 6 et 8 côtés. Les côtés des différents polygones ont même mesure de façon à permettre des pavages en juxtaposant les côtés. Pour le problème 3, un jeu de triangles en carton est à disposition. Les triangles sont isométriques mais quelconques et de façon semblable un jeu correspondant à un quadrilatère quelconque est aussi à disposition.

Les problèmes proposés :

Problème 1. *Donner la liste de tous les polygones réguliers qui permettent de paver le plan (il s'agit de trouver tous les pavages réguliers possibles, c'est-à-dire ne*

comportant qu'une seule sorte de polygone et en ne se limitant pas aux exemples de polygones réguliers pour lesquels ils disposent de gabarits en carton).
Problème 2. *Pavages semi-réguliers (constitués de plusieurs sortes de polygones réguliers, tous les nœuds étant entourés de manière identique) : trouver des exemples de pavages semi-réguliers ; un pavage constitué autour de ses nœuds par un octogone, un hexagone et un pentagone est-il possible ?*
Problème 3. *Paver avec des polygones non-réguliers isométriques : est-ce possible ? Prospecter. Formuler des conditions. On pourra rapidement se centrer sur le cas des quadrilatères quelconques, puis des triangles. Autre question qui surgit lorsqu'on a répondu à la précédente : de combien de façons différentes peut-on paver le plan avec un triangle quelconque ?*

3ème temps : temps de résolution en petits groupes des problèmes puis mise en commun et synthèse des démarches mathématiques qui permettent d'y répondre.

4ème temps : les groupes constitués autour des trois questions précédentes se remettent au travail sur les questions orientées vers la formation : *avec quel public envisagez-vous de pouvoir utiliser ces situations ? avec quels objectifs ? de quelles manières ?*

5ème temps : amorce d'une synthèse menée par les animateurs (à propos des questions orientées vers la formation) prenant en compte : les propositions des groupes ; les apports théoriques (nature des géométries en jeu, appréhension des modes de pensée des élèves et des étudiants) ; les expériences des animateurs. *Remarque : ce dernier temps se réalisera en fait essentiellement dans le compte rendu présent destiné aux actes du colloque.*

II –COMPTE RENDU DU TRAVAIL DES GROUPES

II – 1 Approches des contours mathématiques des problèmes posés.

Une remarque préalable : il est clair que les problèmes de pavages soulèvent des développements mathématiques théoriques susceptibles de passionner les participants indépendamment de toute considération de leur utilisation dans le cadre des formations initiales ou continues à l'IUFM. Ces questions justifieraient à elles seules peut-être plus qu'une séance unique de travail. Mais le temps consacré à cet atelier étant assez court pour des questions d'organisation du planning du colloque, nous n'avons pu leur consacrer qu'un moment de travail assez bref. Ce moment était destiné surtout à prendre ou reprendre conscience des contours mathématiques de ces problèmes de pavage avant de s'attaquer à l'exploration et à l'analyse du potentiel de formation qu'ils recèlent. Pour explorer les trois questions proposées, les groupes ont commencé par quelques essais à l'aide du matériel qui était à leur disposition (polygones en carton, possibilité de dessiner). Dans les trois cas, ce travail de recherche a été guidé et s'est ensuite rapidement formalisé par les connaissances mathématiques des participants. Comme on le verra, certaines questions posées dans le cadre de ces problèmes ont été complètement résolues alors que pour d'autres, le temps a manqué pour dépasser un stade exploratoire (néanmoins avancé).

II – 1.1 Le problème de l'existence de pavages réguliers (problème 1)

Le fait que l'on puisse paver le plan avec un triangle équilatéral, un carré et un hexagone ne fait pas débat. La question est de savoir si on peut réaliser un pavage avec un autre polygone régulier. Pour répondre à cette question, les participants ont présenté à peu de choses près, un raisonnement qui déplace le problème dans un cadre numérique prenant en compte les contraintes géométriques :
Pour qu'un pavage soit possible, il faut pouvoir placer un nombre entier de fois un angle au sommet de ce polygone. Or la formule qui donne la valeur d'un angle d'un polygone régulier de n côtés (rapidement retrouvée évidemment par les formateurs) est $(n-2)\pi/n$. Autour d'un nœud, il faut donc pouvoir juxtaposer un nombre entier de fois un tel angle pour couvrir exactement 2π radians. $2n/(n-2)$ doit donc être un nombre entier, qui correspond en l'occurrence au nombre de polygones réguliers de n côtés placés autour d'un nœud. Comme $(2n/n-2) = 2 + 4/(n - 2)$, cela n'est possible, en dehors du cas $n = 0$, qu'avec $n = 3$, $n = 4$ et $n = 6$ qui sont les seules valeurs de n permettant à $(n - 2)$ d'être un diviseur de 4 : au-delà de $n =6$, $2n/(n-2)$ reste supérieur à 2, mais inférieur à 3.

II – 1.2 Le problème de la création de pavages semi-réguliers (problème 2)

Au-delà du pavage 8-8-4 sur lequel on tombe quasi immédiatement, le problème se prête à une exploration des combinaisons possibles des polygones réguliers : les essais utilisant les polygones en carton furent naturellement nombreux. La question de l'existence d'un pavage juxtaposant un hexagone, un pentagone et un octogone réguliers fut immédiatement résolue par le calcul de la somme des angles respectifs. Mais au-delà de ces exemples ou contre-exemples trouvés par manipulations s'ouvre aussi la question d'une recherche plus systématique et finalement, là aussi, exhaustive des pavages semi-réguliers. Cette question posée par les participants a été abordée dans les groupes par la transposition de la recherche des combinaisons possibles dans le cadre arithmétique en mettant le problème en équations du type $n2\pi/6 + m2\pi/4 + p2\pi/3 = 2\pi$ ou plus systématiquement en posant la question de la juxtaposition de k polygones autour d'un nœud sous la forme d'une équation générale : Σ *(de i=1 à k) des* $\alpha_i = 2\pi$, où α_i est la mesure en radian de l'angle du polygone i. En remplaçant α_i par sa valeur en fonction du nombre n_i de côtés du polygone i, s'esquisse alors une recherche dans le cadre arithmétique, recherche qui n'a pas été menée à son terme lors de l'atelier. En fait en allant jusqu'au bout de cette démarche, il s'avère qu'il existe exactement 8 pavages semi-réguliers (théorème de Kepler en 1619 à propos des pavages appelés « archimédiens »). Une indication et une référence pour le lecteur à ce sujet : dans ses diverses prospections de problèmes innovants, le groupe EXPRIME (2008) a eu l'occasion de développer une démonstration de ce théorème à partir du problème dit des « fractions égyptiennes ».

II – 1.3 Le problème des pavages à partir d'un polygone non-régulier (problème 3)

La recherche d'exemples qui cette fois ci se manifestait par des croquis fut abondante. Elle s'est aussi enrichie ici par la considération du groupe des isométries du plan. En particulier ce fut le cas pour la recherche des différentes façons de paver le plan avec un triangle quelconque. Mais là aussi, le temps disponible n'a pas permis de dépasser le stade de l'amorce d'une exploration.

II – 2 Analyse du potentiel de formation que recèlent les problèmes posés.

Dans la phase précédente on a pris la mesure de la richesse des questions mathématiques que suscitent les problèmes de pavages considérés. Dans la phase suivante, il s'agissait de considérer le potentiel de formation que recèle ce support. Quelles connaissances permet-il de développer chez les enseignants et de quelles manières ? Pour répondre à ces questions les participants ont été amenés à distinguer les différents publics auxquels les formations s'adressent (professeurs d'école ou de lycée-collège) et les différents moments de formation jalonnant leurs formations (formation initiale ou continue). Pour rendre compte des nombreuses propositions (qui figureront en italique) et des discussions animées qu'elles suscitèrent, nous indiquerons ces précisions mais proposons essentiellement un classement qui distingue les différents objets de développement que l'on peut considérer dans une formation professionnelle d'enseignants de mathématiques :

- connaissance des contenus mathématiques
- connaissance des démarches en mathématique
- connaissance des enjeux et des obstacles dans les apprentissages chez les élèves
- connaissances permettant d'élaborer des modalités d'enseignement en adéquation avec les apprentissages visés.

Ces points esquissent en gros une gradation qui part des conditions au départ nécessaires (mais non suffisantes) pour enseigner les mathématiques pour préciser ensuite les conditions d'une formation professionnelle plus complète.

II – 2.1 *Connaissances des contenus mathématiques.*

Les étudiants PE qui viennent de différentes filières universitaires et qui se destinent au professorat d'école ont tout particulièrement besoin de se réapproprier (ou de découvrir) certains contenus mathématiques. A un degré différent, il en est de même pour les étudiants PLC qui par manque de pratiques récentes ont parfois oublié quelques rudiments, en géométrie en particulier. Pour cela les problèmes de pavages sont aux yeux des participants une occasion propice pour *« revoir divers objets mathématiques usuels »*. Quelques aspects plus précis sont brièvement évoqués sur les transparents écrits par les participants : *« propriétés des polygones » « angles » « notion de plan » « divers quadrilatères » « réactiver les transformations » « mobilisation de certains théorèmes en géométrie ».* La notion d'aire est aussi évoquée parce que le matériel considéré peut donner lieu à des problèmes basés sur le « *théorème de Jonas Bolyai, 1830 : soit A et B deux polygones de même aire ; alors A et B sont équivalent par découpage et recollement ».* On peut consulter à ce sujet un article de JP Friedelmeyer (2008).

II – 2.2 *Connaissances des démarches en mathématique.*

Si les participants n'ont pas davantage détaillé les contenus mathématiques en jeu dans les problèmes de pavages, ils ont en revanche surtout mis en avant le fait que ces problèmes s'appuyant sur des gabarits de polygones en carton permettaient de s'interroger sur la nature des mathématiques : *«Démarche expérimentale en math : qu'est-ce que faire des maths ? » ; « Proposition pour les licences pluridisciplinaires : sujet de mémoire, laisser se poser des questions à partir du matériel. Avez vous fait des maths en vous posant ces questions ? »* Il est alors souligné que ce support permet d'appréhender avec les formés des aspects importants de l'activité mathématique que nous classerons en trois points comme suit :

- la nature des validations :

Ce support met en jeu un *« aller-retour entre monde physique et mathématique »* et pose la question de *« la place de la manipulation ». « Les gestes physiques et intellectuels deviennent de plus en plus proches »* et dans le cadre d'une formation initiale de PE non expert en mathématique ce jeu fait ainsi *« comprendre le rôle de la démonstration avec sa force de conviction qui permet de valider, d'anticiper, qui permet d'éviter le retour à l'expérience ».* Il est souligné à partir d'observations en formation que la question de la place de la manipulation dans les procédures de validation se pose peut être différemment dans le cadre de PLC de mathématiques : *« Pourquoi les PLC ne manipulent pas : refus, mépris pour l'expérimental, reniement de leur connaissance ? Alors que la manipulation va donner des pistes pour la démonstration et qu'on arrive ainsi à réconcilier expérimental et démonstration ».* Il y a alors l'occasion de mettre en lumière ce qui se joue dans une géométrie experte entre *« dessin et figure ».* Dans un cas comme dans l'autre (PE ou PLC) le support permet ainsi de mettre en évidence un cheminement qui mène de *« l'expérimentation vers la preuve ».* Ce cheminement pour les PE est plus précisément décrit par les participants : devant les limites de leurs explorations, les étudiants ou stagiaires sont acculés à passer d'un *« ce n'est pas possible car je n'ai pas réussi »* à un *« ce n'est pas parce que je n'ai pas réussi que ce n'est pas possible »* ou encore recourir à l'approche mathématique, non familière au départ, de chercher une *« méthode pour montrer que ce n'est pas possible de… ».*
Un tel cheminement est aussi envisageable dans le cadre de la formation continue du premier degré : *« Une question à poser serait : avec quel type de quadrilatères peut-on paver le plan ? Cela permet de revisiter les quadrilatères et favorise un aller-retour constant entre le monde physique et le monde mathématique, entre le comment et le pourquoi. En FC le parcours part des carrés puis se particularisera avec les rectangles, les parallélogrammes, les trapèzes, avant d'assumer le saut vers les quadrilatères quelconques (les certitudes s'effaceront) les gestes physiques et intellectuels de plus en plus proches, le comment est associé au pourquoi (somme des angles = 360°). »*

- la logique :

En concomitance avec la question des sources de validation et grâce encore à la dimension expérimentale des activités, les problèmes de pavages permettent de centrer l'attention sur la logique en œuvre dans les raisonnements et la logique présidant aux classements des objets en mathématiques. Par l'expérimentation les étudiants effectuent une *« exploration des possibles »* qui ouvre la voie à la recherche d'exemples et de contre-exemples ainsi qu'à *« la formulation de conditions »* dont il faudra examiner le statut : *« nécessité ou… ».* D'autre part, dans la recherche des possibilités de paver le plan avec des quadrilatères par exemple, les étudiants peuvent procéder à un *« balayage des quadrilatères particuliers avec abandon successif de propriétés ».*

- l'aspect heuristique :

Ce qui transparaît dans toute l'analyse du potentiel de formation du support considéré est que toutes ces découvertes et ces cheminements se font grâce à la dimension heuristique qui sous-tend les activités. En effet, cette dimension est constamment soulignée à travers les mots comme *« balayage » « exploration » « expérimentation » « force de conviction » « validation »*. Cette dimension est bien sûr un moyen qui permet le développement des connaissances mais elle est aussi évoquée comme un aspect essentiel du travail en mathématique en offrant potentiellement aux étudiants *« la joie intellectuelle d'avoir trouvé quelque chose »*.

II – 2.3 Connaissance des enjeux d'apprentissages chez les élèves.

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré le développement des connaissances des étudiants eux mêmes, développement qui est une première condition nécessaire pour enseigner les mathématiques. Maintenant, nous allons envisager le support de formation du point de vue de son potentiel de sensibilisation aux apprentissages en jeu chez les élèves. Une grande partie des éléments qu'on peut relever à ce sujet ont déjà été cités précédemment : les apprentissages que font les étudiants sont souvent des apprentissages auxquels seront confrontés les élèves. Ils ont souvent été évoqués par les participants comme faisant partie des apprentissages des élèves à pointer avec les stagiaires PE2 ou PLC2. Il en va ainsi de l'approche des objets usuels en géométrie ou de notions concernant les grandeurs (aire) mais aussi de l'initiation aux modes de validations, aux démarches de modélisation et à la logique.
Il a en outre été souligné par les participants que *« l'activité qui consiste à paver le plan avec des triangles en carton puis de faire un dessin de ce pavage (prolonger les lignes, repérer les alignements) est une activité de modélisation »*. On peut à ce sujet diriger le lecteur vers un article de Grand N (Duval & Gaudin, 2005) qui fait état de l'importance de prendre en compte des apprentissages sur l'appréhension visuelle des figures en géométrie (avec des jeux entre les surfaces (d2), les lignes (d1) et les points (d0)).

II – 2.4 Connaissances permettant d'élaborer des modalités d'enseignement en adéquation avec les apprentissages visés.

Après nous être centrés sur les connaissances des apprentissages en jeu chez les élèves, nous en venons maintenant au potentiel de sensibilisation aux questions d'enseignement qu'offre le support de formation considéré. Ces questions sont autant d'outils destinés à servir aux enseignants ou futurs enseignants pour élaborer leur travail avec les élèves. La revue de ces questions est complétée par plusieurs suggestions d'activités à proposer aux élèves en adéquation avec les apprentissages repérés précédemment.

Une première question est celle des démarches d'apprentissage induites par les situations qu'on propose aux élèves. Ici les étudiants sont confrontés à la résolution de problèmes qui leur permet de développer des connaissances. Les étudiants peuvent alors comprendre que ce genre de situation qu'ils ont vécu peut se transférer aux élèves. En l'occurrence les participants ont souligné que les PE2 seraient amenés à analyser la *« part de la situation qui serait transférable en classe »*. En particulier dans ces situations l'attention peut être portée sur *« les ruptures et déstabilisations (passage des polygones particuliers aux polygones quelconques) »* qu'elles provoquent et qui sont des moteurs pour faire avancer le travail des élèves.

Dans ce cadre la question de *« l'importance du rôle de la manipulation »* dans les activités des élèves paraît abordable dans les formations pour dépasser les conceptions naïves à ce sujet. Rappelons, qu'il a déjà été souligné à partir d'observations en formation que la question de la place de la manipulation dans les procédures de validation se pose peut être différemment dans le cadre des PE2 qui auraient tendance à faire une confiance aveugle à la manipulation et les PLC de mathématique qui au contraire auraient tendance à la brider.

En relation avec les points précédents l'organisation du travail de la classe peut-être posée *: « Avec des PE2 ou des PLC2 c'est l'occasion d'aborder la question de l'intérêt du travail en groupes ».*

Une autre question qui a été évoquée est la question du choix du matériel : matériel découpé par les élèves eux-mêmes (ou étudiants eux-mêmes), matériel construit par les élèves eux-mêmes (ou étudiants eux-mêmes), matériel prédécoupé par les formateurs, polydrons en plastique, ou logiciel de géométrie dynamique ? On peut alors sensibiliser les stagiaires au fait que les questions qui surgiront de la situation varieront en fonction du matériel proposé. *« Avec les cartons découpés qui ne s'ajustent pas bien ou les polydrons qui ne s'emboîtent pas bien est-ce que cela signifie qu'on ne peut pas faire un pavage ? »* Ou encore : *« Avec un logiciel de géométrie tel que « apprenti-géomètre » de Nicolas Rouche certaines questions risquent d'être tuées : par exemple le logiciel ne permettra pas de juxtaposer en un point un hexagone, un octogone et un pentagone réguliers. Tout dépend de la question qu'on pose pour aller de l'expérimentation vers la preuve. »*

Les pavages du plan paraissent aussi être une occasion d'évoquer l'aspect multidisciplinaire que peuvent revêtir les activités proposées aux élèves : *« En FC 1er degré : lien avec les arts plastiques, frises du type Escher».* Mais à part cet aspect, remarquons que ni la notion d'interdisciplinarité (activités mathématiques permettant d'étayer les apprentissages dans d'autres disciplines comme en français par exemple) ni la notion de transdisciplinarité (apprentissages qui seraient généraux) n'ont été évoquées par cet atelier qui, certainement sans les ignorer, est resté centré sur la question de l'enseignement des mathématiques.

En relation avec ces connaissances relatives aux pratiques d'enseignement et avec le repérage des enjeux d'apprentissages, les participants à l'atelier ont eu l'occasion d'évoquer quelques activités pour les élèves qu'on peut proposer selon le cas, dans le cadre de formations PE2, PLC2 ou en FC. Dans le paragraphe suivant nous en faisons le tour, qui sera prolongé par la partie III concernant *« les triangles jumeaux »* proposée par Claude Maurin.

II – 2.5 *Suggestions d'activités à proposer aux élèves.*

La plupart des problèmes de pavage proposés au départ aux participants pour qu'ils en analysent le potentiel de formation, sont bien sûr transférables, selon les cas, à l'école ou au collège. Rappelons-en deux exemples formulés par les participants :

- Au collège, le problème qui consiste à examiner la possibilité de réaliser un pavage semi-régulier avec des hexagones, des octogones et des pentagones réguliers *« oblige à dépasser la manipulation »* et débouche avec les élèves sur la recherche d'une démonstration.
- *« L'activité qui consiste à paver le plan avec des triangles en carton puis de faire un dessin de ce pavage (prolonger les lignes, repérer les alignements) est une activité de modélisation »* qu'on peut proposer à l'école primaire. Rappelons l'article déjà signalé de Duval & Gaudin, (2005) : il propose des activités que l'on peut développer avec les élèves à ce propos.

Mais le cadre initial proposé a aussi généré chez les participants de nouvelles idées d'activités. En voici trois exemples.

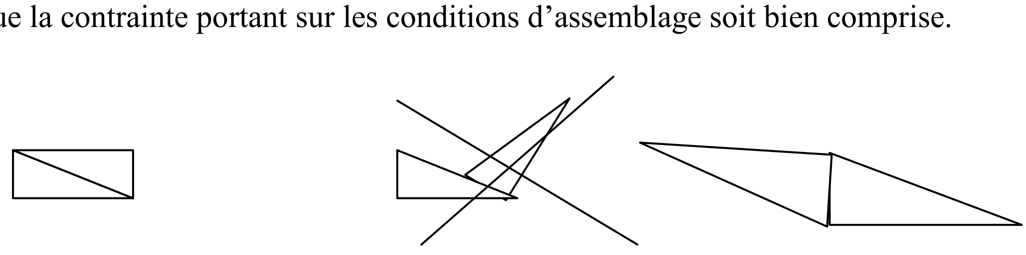
- Premier exemple. Un groupe de participants s'adressant virtuellement à des PE2 a cherché à voir comment ces stagiaires pourraient transposer, au niveau des élèves, le problème complexe de la recherche des combinaisons possibles pour juxtaposer des angles autour d'un nœud pour constituer un pavage semi-régulier *: « Cycle 2 : problèmes du type comment décomposer un nombre en somme d'entiers. Comment faire 28€ avec des pièces de 1€, de 2€ et des billets de 5€ ? ».* Ils voient dans ce problème l'analogie entre les deux situations : *« C'est une résolution de problème qui met en jeu les mathématiques et qui amène une démarche de modélisation »*

- Deuxième exemple. Des activités de recomposition de surfaces par découpage, déplacement et recollement permettent d'aborder la notion d'aire à l'école et au collège. Ces activités sont basées sur *le « théorème de Jonas Bolyai, 1830 : soit A et B deux polygones de même aire ; alors A et B sont équivalent par découpage et recollement ».* L'article déjà cité de JP Friedelemeyer (2008) pourra donner des idées à ce sujet.
- Troisième exemple proposé. Problème de la duplication du carré : comment découper 2 carrés identiques pour les réassembler en un seul carré. Il s'agit de découper chaque carré en 2 triangles isocèle et recoller, mais comment être sûr d'avoir obtenu un carré ? Selon le niveau scolaire concerné la validation peut se faire de façon instrumentée ou par une démonstration (en collège ou PE1). Voir à ce sujet un développement plus complet dans l'article de Claude Maurin (2008).

III – UNE PROPOSITION D'ACTIVITE EN CYCLE 3 : « LES TRIANGLES JUMEAUX » (CLAUDE MAURIN).

Cette activité élaborée à l'intention d'un groupe de PE2, a été vécue par les PE2, puis analysée pour être mise en œuvre dans des classes de cycle 3. Elle a comme point de départ la prise en compte des difficultés des élèves à percevoir les particularités d'une figure (ici les triangles particuliers) fondée sur l'analyse de certaines de ses propriétés.
En faisant le pari que les particularités manipulatoires ont un caractère plus accessible aux élèves que les propriétés qui les justifient, la proposition consiste à utiliser un matériel qui va permettre de faire apparaître certaines particularités et de susciter un questionnement à ce sujet.

Le matériel proposé, appelé « triangles jumeaux », est formé de deux triangles isométriques découpés dans du carton. Une de leur face (la même pour les deux triangles) est hachurée pour la distinguer de l'autre face.
La consigne qui est donnée avec ce matériel est de chercher à faire le plus grand nombre de figures différentes possibles en accolant les deux triangles jumeaux par un de leurs côtés de même longueur et en faisant coïncider leurs sommets, mais sans superposer les deux formes cartonnées (chacune se trouvant dans un des deux demi-plans ayant pour frontière la droite qui porte leur côté commun).
Des exemples d'assemblages acceptables et non acceptables sont fournis aux élèves afin que la contrainte portant sur les conditions d'assemblage soit bien comprise.



<u>Première phase exploratoire</u> : Les élèves travaillent par groupes de deux, chaque groupe reçoit la même paire de triangles jumeaux quelconques et dispose d'une grande feuille

sur laquelle il doit dessiner au marqueur les contours d'un assemblage chaque fois qu'il obtient une forme nouvelle.

Après un temps de recherche suffisant une mise en commun est organisée pour savoir qui a trouvé le plus grand nombre de formes possibles.

Analyse géométrique des possibles : Les deux triangles jumeaux quelconques peuvent être assemblés par chacun de leurs trois côtés, pour un côté donné l'assemblage peut se faire soit en faisant implicitement intervenir une symétrie centrale, on obtient alors un parallélogramme, soit en faisant implicitement intervenir une symétrie orthogonale (retournement), on obtient alors un « cerf-volant ». Chacun de ces deux assemblages peut à son tour subir un retournement, pour les parallélogrammes le contour de la figure retournée ne coïncide pas avec le contour de la figure initiale car le parallélogramme quelconque ne possède pas d'axe de symétrie, par contre, pour les « cerfs-volants » qui possèdent un axe de symétrie, le contour de la figure retournée coïncide avec le contour de la figure initiale.
Cela pose un inévitable problème de dénombrement : faut-il considérer qu'on obtient neuf contours différents ou seulement six contours différents en considérant que le retournement d'une forme plane ne modifie pas la forme de cette figure ? Tout dépend de la façon dont il sera répondu à cette question.
Le but de la mise en commun n'est pas forcément de parvenir à la liste exhaustive de tous les assemblages possibles. On se contentera de vérifier que tous les assemblages proposés sont bien différents, en ayant éventuellement recours à du papier calque, et de remarquer que tous les assemblages obtenus sont des quadrilatères.
On peut tout de même s'attendre à ce que surgisse la question pointée précédemment. C'est la classe avec l'aide du maître qui choisira sa façon d'y répondre. Une fois la convention fixée on s'efforcera de s'y tenir. On peut toutefois avoir une préférence pour choisir de distinguer une forme de son retournement quand celui-ci ne coïncide pas avec la forme initiale car cette distinction permet de particulariser les figures qui possèdent au moins un axe de symétrie (comme le cerf-volant).
Un affichage rassemblant les assemblages obtenus par l'ensemble de la classe pourra être conservé pour établir des comparaisons avec la deuxième phase.

Deuxième phase : Découverte de certains triangles particuliers

Le maître peut choisir de ne travailler qu'avec un seul et même type de triangle particulier pour tous les groupes de la classe, ce qui semble préférable, ou bien de proposer des triangles particuliers différents simultanément aux différents groupes de la classe.

Découverte des particularités des triangles rectangles : Les élèves qui reçoivent des triangles rectangles jumeaux découvrent qu'avec ce type de triangles ils peuvent obtenir par assemblage des rectangles (ce qui justifiera le nom de ces triangles particuliers quand on les nommera), des cerfs-volants mais aussi de nouveaux triangles, ce qui ne produisait pas avec les triangles jumeaux quelconques. Le maître va souligner cette particularité manipulatoire au moment de la mise en commun et le débat sera lancé sur les raisons qui la provoquent.
Les élèves pourront dire avec leurs propres mots ce qu'ils pensent avoir découvert.
A l'issue du débat le maître proposera à chaque groupe de fabriquer une paire de triangles jumeaux permettant d'obtenir un nouveau triangle par assemblage.
Un bilan sera fait sur les réussites et les échecs des différents groupes et le maître pourra institutionnaliser la notion d'angle droit et de triangle rectangle. La recherche d'un

moyen fiable permettant d'obtenir des angles droits débouchera sur l'équerre en papier dont la construction (partage de l'angle plat en deux angles superposables) permet de justifier les assemblages des triangles rectangles. Le lien sera établi avec les équerres du commerce qui sont toutes des triangles rectangles comme on pourra le vérifier par association avec leur jumeau après retournement et observation des contours.

Découverte des particularités des triangles isocèles : C'est par le nombre réduit d'assemblages différents que ces triangles vont se particulariser. En effet quand on les assemble par leur base on obtient un losange, que l'assemblage se fasse par symétrie centrale ou par symétrie axiale, de plus ce losange se retourne dans son contour. Quand on les assemble par un de leurs côtés de même longueur, on obtient soit un parallélogramme (avec une face hachurée et une face non hachurée), soit un cerf-volant (avec les deux faces hachurées ou non hachurées). Ce dernier assemblage se retourne dans son contour, par contre le parallélogramme pose un problème d'orientation et ne se retourne pas dans son contour. On ne peut donc pas trouver plus de quatre assemblages différents. La comparaison avec l'affichage des assemblages obtenus lors de la phase exploratoire permettra de souligner leur particularité.
Le maître pourra interroger les élèves sur les raisons qui font que le nombre de formes différentes obtenues par assemblage des deux triangles isocèles est moins important qu'avec deux triangles jumeaux quelconques. On pourra comparer les assemblages par la base des triangles isocèles avec les assemblages obtenus avec deux triangles quelconques : le premier (losange) se retourne dans son contour l'autre (parallélogramme quelconque) ne se retourne pas dans son contour. De la même façon on pourra observer que les « cerfs-volants » obtenus en assemblant les deux triangles isocèles par un de leurs deux côtés de même longueur sont directement superposables quel que soit le côté choisi. Ces différents constats amèneront les élèves à émettre des hypothèses sur les particularités des triangles isocèles, et l'égalité des longueurs de deux de leurs côtés devrait apparaître.
Pour tenter de valider l'hypothèse émise, le maître proposera de construire deux nouveaux triangles jumeaux ayant deux côtés de même longueur afin d'expérimenter leurs assemblages et les comparer aux assemblages précédents.
Le problème de construction soulevé : « Comment construire un triangle ayant deux côtés de même longueur ? » pourra être résolu collectivement et chaque groupe pourra construire sa propre paire de triangles jumeaux isocèles pour expérimenter ses propres assemblages.
Cette nouvelle phase expérimentale confirmera l'hypothèse émise puisque les assemblages obtenus par chaque groupe auront les mêmes particularités que celles constatées au départ. Les triangles construits dans les différents groupes n'ayant pas tous la même forme, on pourra conclure que les particularités des assemblages reposent sur une propriété commune à tous les triangles, celle d'avoir deux côtés de même longueur.
Le maître pourra alors institutionnaliser la notion de triangle isocèle.
Cette institutionnalisation pourra être accompagnée d'une autre découverte manipulatoire : chacun des triangles isocèles se retourne dans son propre contour. Le maître pourra associer cette propriété à l'existence d'un axe de symétrie dans chaque triangle isocèle que les élèves pourront faire apparaître par pliage.
Il pourra éventuellement faire le choix de travailler de façon plus large sur les figures ayant un axe de symétrie et tester leur retournement dans leur contour de façon expérimentale, mais ce faisant, s'il accroît l'approche expérimentale que ses élèves auront de la géométrie plane, il dépasse les programmes de géométrie en vigueur au

cycle 3 (BO n°3 du 19 juin 2008) qui ne préconisent, au CE2, que le recours au pliage ou au papier calque pour vérifier qu'une figure possède un ou plusieurs axe de symétrie.

Découverte des particularités des triangles équilatéraux : Les triangles jumeaux équilatéraux possèdent une particularité encore plus étonnante, puisque quel que soit l'assemblage réalisé on obtient toujours le même losange. Il n'y a donc qu'un seul assemblage possible !
Le débat fera sans doute surgir le fait que les trois côtés du triangle équilatéral sont de même longueur, mais sa fabrication par pliage est compliquée et difficile à justifier, sa construction de type règle/compas, bien que compatible avec les programmes de géométrie du CM2 - *« savoir reproduire un triangle à l'aide d'instruments »* (BO n°3 du 19 juin 2008) - devient un vrai problème de géométrie pour des élèves de cycle 3, encore peu aguerris à l'utilisation du compas pour résoudre de tels problèmes. Toutefois la motivation des élèves pour obtenir de tels triangles pourra sans doute leur permettre de surmonter la difficulté de leur construction. Le même protocole d'expérimentation que celui utilisé dans le cas des triangles isocèles pourra être suivi, chaque groupe construisant sa propre paire de triangles jumeaux équilatéraux avec laquelle il vérifie qu'il n'obtient qu'une seule forme d'assemblage.

Le maître pourra institutionnaliser la notion de triangle équilatéral et faire constater aux élèves que chaque triangle équilatéral se retourne dans son contour et possède trois axes de symétrie. On pourra constater que, contrairement aux triangles rectangles ou aux triangles isocèles qui pouvaient avoir des formes différentes, tous les triangles équilatéraux ont « la même forme », ils sont seulement de tailles différentes. Chacun est un agrandissement ou une réduction d'un autre, plusieurs observations pouvant être faites dans cette direction qui éveilleront les élèves aux propriétés de parallélisme et d'égalité d'angles.

Le travail sur les triangles particuliers peut se prolonger avec la découverte des triangles rectangles isocèles qui peuvent apparaître à partir du découpage d'un carré suivant sa diagonale, les élèves pourront aussi découvrir l'impossibilité de rendre un triangle à la fois rectangle et équilatéral.

Conclusion :

Cette activité centrée sur les triangles jumeaux permet évidemment d'établir des liens entres les différents quadrilatères obtenus par assemblage des deux triangles et les particularités de ces triangles : rectangles et triangles rectangles, losange et triangles isocèles ou équilatéraux, carrés et triangles rectangles isocèles.
Elle est construite sur un socle expérimental dont on peut penser qu'il interpelle davantage les élèves que des analyses de propriétés de figures qu'ils n'associent pas toujours à une particularité observable au moment où ils les étudient.
Cette approche manipulatoire ne vaut que par le questionnement qu'elle suscite à propos de ce que certaines figurent permettent alors que d'autres ne le permettent pas. Si les élèves parviennent, à propos des particularités qu'ils constatent, à se poser la question du pourquoi, nous faisons avec eux un pas vers une démarche mathématique qui leur ouvre la voie vers une approche raisonnée de la géométrie.

IV – DESCRIPTION ET ANALYSE DE LA FORMATION PROPOSEE A DES ETUDIANTS DE LICENCE PLURIDISCIPLINAIRE A L'ULP DE STRASBOURG ET PRINCIPALES OBSERVATIONS (JEAN-CLAUDE RAUSCHER).

Remarque préalable :
Cette formation initiale basée sur la résolution de problèmes de pavages s'adosse en grande partie sur un travail mené par Christine De Blok Dock. Elle présente ce travail dans un article du numéro 27 de la revue « Educational Studies in Mathematics », (De Block Dock, 1994). Pour l'information du lecteur et pour la compréhension de ce paragraphe IV nous avons jugé utile de lui proposer un compte rendu de l'essentiel de la richesse du travail de Christine De Block Dock. En nous référant le plus fidèlement possible à son article nous y décrivons l'enseignement qu'elle a proposé aux élèves de douze ans et nous y rappelons les éléments essentiels de ses observations conduisant à l'analyse des modalités de pensée en mathématique des élèves concernés. Le lecteur intéressé trouvera ce compte rendu dans l'annexe II.

Après cette remarque préalable nous pouvons maintenant aborder la description et l'analyse de la formation proposée aux étudiants à Strasbourg. Le travail se répartit environ sur quatre ou cinq séances. Tout comme dans l'expérience avec les élèves rapportée par Christine De Block Dock, il s'agit d'une petite aventure, d'un fil rouge assez souple, avec ses rebondissements.
Après une séance consacrée à la présentation du projet, le contenu des séances s'inspire essentiellement du cheminement des activités proposées aux élèves par Christine de Block Dock. A chaque séance les étudiants sont confrontés à des problèmes liés aux questions de pavage du plan. Mais parallèlement il sera chaque fois demandé aux étudiants d'une part de faire le bilan des notions de géométrie en jeu et d'autre part de prendre du recul par rapport à leurs activités pour analyser et comparer les procédures qu'ils développent. Ce travail permet aussi aux étudiants de réfléchir aux problèmes d'apprentissages des élèves en prenant connaissance des démarches de pensées mathématiques développées par des élèves et rapportées par Christine De Bloc Dock. Ce cheminement réserve des surprises aux étudiants, mais aussi, comme nous le verrons, au formateur qui tout en ayant ses objectifs s'adapte aux réactions intéressantes mais parfois imprévisibles de ses étudiants. Le temps utilisé pour chaque séance varie en fonction des tâches à effectuer, de la réaction des étudiants, mais aussi du fait qu'une partie du travail s'effectue ou non en dehors des heures de cours. Il faut dire que le contexte institutionnel dans lequel se déroule la formation est évidemment une variable à prendre en compte pour adapter les modalités de travail proposées aux étudiants. Dans le cadre du cours de licence je disposais d'un confort de temps et en général d'une disponibilité d'esprit de la part des étudiants que je ne retrouvais pas forcément d'emblée dans le cadre de la préparation du concours. La description et l'analyse du travail que je ferai correspond à la formation que j'ai assurée dans le cadre d'une licence pluridisciplinaire. Il s'agissait majoritairement d'étudiants visant par la suite une carrière de professeurs d'école après deux premières années de cursus en biologie, géologie, chimie ou physique. Les groupes comportaient selon les années de 40 à 60 étudiants. Cet effectif assez important n'empêchait pas le développement d'un travail « interactif », les étudiants travaillant alternativement individuellement, par petits groupes de voisinage ou en grand groupe pour des synthèses. Voici une description des différentes phases de travail accompagnée des observations que j'ai pu faire.

1ère phase : préparation du matériel, un premier contact avec la géométrie et présentation du projet de formation.

Lors d'une première séance (assez courte) :

- une feuille est distribuée avec un carré, un triangle équilatéral, et aussi un pentagone, un hexagone et un octogone réguliers (annexe, feuille 1). Sur le document donné, plusieurs polygones réguliers différents sont représentés, mais les côtés de ces polygones ont tous une longueur commune. Le contenu de cette feuille sera à décrire et à commenter.
- il est demandé à chaque étudiant de confectionner, pour la prochaine séance, un jeu de polygones en carton identiques aux polygones figurant sur le document distribué (une dizaine de triangles, une dizaine de carrés etc..).
- il est dit que ce matériel servira à faire des activités de pavages en référence à l'expérimentation réalisée avec des élèves de douze ans à Bruxelles. Les objectifs de ce travail sont annoncés : visiter ou revisiter des notions de géométrie, réfléchir aux méthodes de raisonnement en usage en géométrie, aborder des questions d'enseignement et d'apprentissage en géométrie à l'école et au collège.

La distribution du document où figurent les différents polygones est une première occasion pour les étudiants de retrouver quelques notions de géométrie. L'appel à décrire le contenu de ce document provoque en particulier l'évocation de la notion de « polygone régulier » et permet de la préciser collectivement. En effet, lorsqu'on prend le soin de leur en faire écrire une définition, il apparaît systématiquement qu'un grand nombre d'entre eux ne pensent qu'à la contrainte concernant l'isométrie des côtés. La production par les étudiants ou le formateur d'exemples de figures à 4 ou 5 côtés respectant exclusivement cette contrainte, ou a contrario ne respectant que la contrainte concernant l'isométrie des angles est l'occasion de continuer à explorer et à interroger le rapport entre isométrie des côtés et des angles.

2ème phase : problèmes de pavages du plan à l'aide de polygones réguliers.

A l'aide de leurs jeux de polygones en carton, les étudiants doivent :
1) Répondre à la question suivante : « Avec quels polygones réguliers peut-on paver le plan ? ». (Il s'agit de trouver tous les pavages réguliers possibles, c'est-à-dire ne comportant qu'une seule sorte de polygone et en ne se limitant pas aux exemples de polygones réguliers pour lesquels ils disposent de gabarits en carton).
2) Chercher des pavages semi-réguliers ou mixtes c'est-à-dire faits de plusieurs sortes de polygones réguliers (tous les nœuds doivent être entourés de manière identique).

Le travail commence inévitablement par la nécessité rapidement exprimée par les étudiants de définir ce qu'est en l'occurrence un « pavage » et en particulier « un pavage du plan », expression qui les laisse souvent perplexe car ils imaginent le pavage d'une surface bien délimitée. Ces précisions étant données, les étudiants font de nombreux essais avec leurs gabarits. Le travail sur les deux questions, données simultanément, s'étale en général sur deux séances.

En ce qui concerne la première question le *« tous »* de l'énoncé, qui implique qu'on dépasse le stade de la manipulation des gabarits en carton, n'est pas d'emblée assimilé. Lorsque son sens est à nouveau expliqué, les étudiants prennent enfin la mesure de la nature mathématique de la question ! Remarque : au cours du traitement de cette question par les étudiants, je stimule et observe l'avancée de leurs réflexions en ponctuant les séances (en cours ou en fin de séance) par la question suivante : *« A ce stade, pensez vous qu'en dehors des cas du triangle équilatéral, du carré et de l'hexagone, il existe d'autres polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan ?*

Quel est le degré de certitude de votre avis : « absolument certain », « assez certain », « incertain » ? Argumentez si possible votre avis.

Pour commencer, les étudiants font en général des conjectures sur la valeur des angles intérieurs. Par exemple, ils se placent dans un cadre numérique : *« Ce sont des diviseurs de 360 ! »* Mais le statut de cette condition n'est pas encore clair : est-ce une condition nécessaire ou une condition suffisante ? Parfois, pour relancer la réflexion à ce sujet, je demande ce qui se passerait si on prenait un polygone régulier ayant des angles de 10°, ou encore si c'est la même chose quand on considère la valeur des angles en grades ou radians. Ils reviennent aux contraintes du problème géométrique avec l'idée qu'il est nécessaire de pouvoir juxtaposer autour d'un nœud un nombre entier de fois l'angle intérieur d'un polygone pour que le pavage soit possible. A ce moment là très peu d'étudiants pensent que les possibilités de pavage avec des polygones réguliers se limitent aux trois exemples trouvés avec les gabarits en carton. Ils pensent plutôt qu'il y a forcément d'autres cas possibles. Cette intime conviction est souvent argumentée par une pensée d'ordre probabiliste fondée sur le fait qu'il existe une infinité de polygones réguliers. L'idée d'envisager un polygone régulier à 12 côtés peut faire avancer la réflexion comme le montre cette déclaration d'une étudiante à ce sujet relevée lors d'une séance : *« Il y aura forcément un vide quand on essaye de juxtaposer ; plus on augmente le nombre de côtés, plus on se rapproche d'un cercle, or avec des disques on ne peut pas paver le plan, il reste des vides ».*

Ici on a le passage de manipulations matérielles à des spéculations abstraites, passage étayé par des intuitions se basant sur des expériences ou des configurations connues. A ce moment les avis dans le groupe ont commencé à bouger mais il restait encore beaucoup d'étudiants incertains. Parfois les étudiants émettent l'idée que plus il y a de côtés plus l'angle est grand et donc on n'arrivera pas à caser tous ces angles autour d'un point. Ce jour là le problème n'a pas avancé et j'ai abandonné la question à ce point pour poursuivre le travail autour des pavages mixtes, ce qui a permis de se centrer sur les angles et de reprendre ensuite la question de l'existence des pavages réguliers. D'une année à l'autre l'histoire n'est jamais complètement écrite d'avance….

En ce qui concerne la création de pavages semi-réguliers, tout comme les enfants, les étudiants sont dans un premier temps souvent attirés par la création de jolies compositions (des « fleurs » avec des pétales par exemple) jouant non seulement sur l'occupation du plan mais aussi sur l'arrangement des couleurs dans lesquelles certains ont confectionné les polygones. Les étudiants font des essais et après un tour du groupe on récolte les propositions : 6-3-6-3 ; 4-3-4-3-3 ; 8-6-5 ; 6-4-3-4 ; etc (description des paysages autour des nœuds, chaque chiffre désignant un polygone régulier par son nombre de côtés). Je demande aux étudiants de vérifier les configurations proposées à l'aide des gabarits et alors certains disent rencontrer des problèmes du côté de la proposition 8-6-5. Certains pensent que ces problèmes viennent des limites matérielles du découpage des cartons, d'autres sont sûrs que ce pavage mixte n'est pas possible et qu'il faut le vérifier par le calcul des angles. Ce questionnement débouche donc sur la connaissance ou le calcul des angles dans les polygones réguliers en jeu. Cet épisode prend un certain temps et n'est pas facile pour tous mais il est l'occasion pour beaucoup de rafraîchir leurs connaissances en géométrie. Le verdict tombe : 135° + 120°+ 108° ne font pas 360° mais 363°! Je prolonge le travail en demandant aux étudiants aussi d'exprimer la valeur α_n des angles d'un polygone régulier de n côtés en fonction de n.

Avec ces outils on peut alors reprendre la question de l'existence des pavages réguliers. En l'occurrence l'attention portée aux angles a permis aux étudiants de reprendre l'idée émise que plus il y a de côtés plus le polygone se rapproche d'un cercle en la transformant en « plus il y a de côtés, plus les angles sont grands » et raisonner sur la

taille du vide à combler pour compléter le pavage autour d'un nœud et se rendre compte que le pavage avec des hexagones constitue une limite : au delà des hexagones réguliers l'espace à combler ne pourrait accueillir un troisième polygone lorsqu'on aura déjà placé deux polygones réguliers. La formule qui donne la valeur de α_n en fonction de n permet aussi de trouver une issue formellement correcte à la question. Il s'agit d'exprimer la question de la place manquante sous forme d'inéquation.
Par ailleurs la question de la construction des polygones réguliers sera reprise par la suite et donnera lieu au développement de connaissances en géométrie : programmes de construction des polygones réguliers, développement du langage, prise de conscience que pour construire un polygone régulier il y a une entrée possible par les côtés ou par les rayons, calcul du rayon en fonction des côtés ou inversement etc.
Mais avant cela, les étudiants sont conviés à considérer les pavages avec des polygones non réguliers.

3ème phase, problèmes de pavages du plan avec des polygones non réguliers.

Le passage aux pavages du plan par des polygones non réguliers a deux objets. D'une part il s'agit de montrer aux étudiants comment dans l'expérience relatée par Christine de Block Dock, les enfants qui ne possédaient pas dans un premier temps l'outil du calcul général des angles dans les polygones réguliers ont pu ainsi y accéder eux aussi pour trancher la question de l'existence du pavage 5-6-8. D'autre part ces problèmes de pavages à l'aide de polygones non réguliers donnent l'occasion aux étudiants de continuer à consolider leurs connaissances en géométrie et dans le domaine de la logique.
Pour cela, les étudiants sont d'abord invités à :

- imaginer des pavages avec des polygones non réguliers isométriques, libre à eux de les décrire, de les dessiner, de les construire
- formuler par écrit les conditions sur les polygones qui rendent les pavages possibles.

Les exemples fusent : pavage à l'aide d'un rectangle, d'un losange, d'un parallélogramme, d'un trapèze rectangle, d'un trapèze quelconque, d'un triangle isocèle, d'un triangle rectangle etc. Les affirmations concernant les conditions s'affichent : *« On peut paver le plan si le polygone est symétrique, possède un axe ou un centre de symétrie, des angles droits.. »* ou bien *« Il faut que… ».* La comparaison des formulations proposées permet aux étudiants de s'interroger s'ils énoncent là des conditions nécessaires ou des conditions suffisantes. C'est aussi l'occasion de statuer sur la validité de ces conditions en se référant aux exemples de pavages évoqués : *« Non il n'est pas nécessaire que le polygone ait un axe de symétrie puisqu'on peut paver avec un trapèze quelconque » ; « Non le fait qu'un polygone ait un axe de symétrie n'est pas une condition suffisante : pour preuve on ne peut paver à l'aide d'un octogone (régulier) ou d'un pentagone (régulier) »*
Le fait qu'on puisse paver le plan à l'aide d'un triangle quelconque n'est en général pas évoqué par les étudiants qui expriment leur scepticisme (comme les enfants) sur la possibilité de paver avec des polygones qui n'auraient aucune particularité. Néanmoins il arrive parfois qu'un étudiant pense à cette possibilité en la justifiant par le fait qu'avec deux triangles isométriques on peut constituer un parallélogramme. Dans un cas comme dans l'autre, en découpant des triangles isométriques (isolés) figurant sur une feuille préparée (annexe, feuille 2), les étudiants ont alors l'occasion de constater qu'ils arrivent bien à paver le plan avec un triangle quelconque. Remarque : question qui ne se posait pas avec les polygones réguliers, il faut préciser ici que le retournement des

gabarits est permis. Le cas du pavage à l'aide d'un quadrilatère quelconque, qui suscite a priori un scepticisme encore plus grand, est pareillement exploré (annexe, feuille 3).
A ce moment là du travail, les étudiants peuvent saisir comment les élèves ont eu accès au fait que la somme des angles d'un triangle ou d'un quadrilatère est égale respectivement à 180° et 360°. Ils voient aussi comment par triangulation, ils accèdent à la valeur de la somme des angles d'un pentagone et peuvent calculer la valeur de l'angle d'un pentagone régulier.

4ème phase : pavages du plan avec un triangle quelconque, mise en jeu des symétries centrales et axiales.

La question posée aux étudiants est la suivante :
« De combien de façon peut-on paver le plan avec un triangle quelconque ? »
Il y a 4 pavages possibles (annexe, feuille 4) s'obtenant respectivement par les symétries centrales par rapport au milieu des côtés des triangles et par les symétries orthogonales par rapport aux côtés des triangles. Trois symétries centrales, trois symétries axiales : on pourrait imaginer que cela aboutit à six pavages. Mais les pavages qui s'effectuent à partir des symétries centrales par rapport aux milieux des côtés ne correspondent qu'à un seul pavage (ce n'est pas d'emblée évident pour les étudiants). En revanche, on obtient bien trois pavages différents pour les symétries axiales
A priori les étudiants n'imaginent pas qu'il y a plusieurs façons d'agencer les triangles, ou bien s'imaginent au contraire qu'il y a un grand nombre de pavages possibles. Cette recherche prend alors beaucoup de temps si on désire que les étudiants la mènent de façon autonome jusqu'à son terme, sans donner aucune indication. Au hasard des manipulations mais en tenant compte du fait que les côtés de même longueur doivent se juxtaposer et que les retournements des gabarits sont permis, les étudiants trouvent néanmoins l'un ou l'autre des pavages possibles. En mettant alors en commun les propositions, et en les analysant, on peut mettre en évidence les transformations qui les structurent et permettre aux étudiants d'achever la recherche.
Ce travail permet par la suite de reprendre de façon plus générale les connaissances des étudiants concernant les isométries du plan.
Remarque : c'est cette activité de pavages du plan à l'aide de triangles isométriques qui est à la base de l'activité destinée à des élèves du cycle 3 que Claude Maurin présente dans la partie III de notre compte–rendu.

5ème phase : synthèse à propos du développement de la pensée en géométrie et des modes de validation en géométrie.

C'est l'occasion avec les étudiants de revenir sur leurs cheminements en interrogeant les types de preuves et de raisonnements que les étudiants ont rencontrés tout comme les élèves : d'abord empiriques, puis des enchaînements d'arguments empiriques en opposition (du point de vue des paradigmes géométriques en jeu), mais aussi en continuité (du point de vue des dimensions intuitives des démarches) avec des « démonstrations » se basant sur un corpus de propriétés et de définitions. C'est à cette occasion aussi que je peux les sensibiliser (en PE1 plus particulièrement) à la différenciation des paradigmes dans lesquels on peut se situer en géométrie (Houdement et Kuzniak, 2006) en particulier par l'examen de certains exercices qui offrent un support adéquat pour cela (Kuzniak et Rauscher, 2004)

En se référant à l'expérience décrite par Christine De Block Dock, est abordée la question des méthodes d'enseignement des mathématiques. Ici est mis en exergue une méthode qui engage les élèves dans une démarche mathématique en leur proposant un milieu, qui comme le décrit Wittmann (1981), suscite :

- des opérations sur une riche variété d'exemples et de modèles qui permettent l'élaboration de conjectures et le développement de l'intuition (stade de l'intuition)
- des réflexions sur ces premières activités pour trouver des formulations générales, des résultats, les tester, les améliorer, les prouver (stade du raisonnement)
- des analyses des concepts, des théorèmes et des preuves (stade du formalisme).

V – UNE CONCLUSION QUI OUVRE SUR QUELQUES QUESTIONS DE FORMATION.

Le titre du colloque était « Enseigner les mathématiques : où est le problème ? ». On peut dire que dans notre atelier nous avons eu largement l'occasion de faire éclater ce singulier en une multitude de questions concernant la formation des maîtres qui s'appuie sur la résolution de problèmes de pavages. Quels sont les contenus mathématiques sous-jacents à ce support ? Quelles sont les connaissances et démarches mathématiques que les étudiants peuvent développer à partir de ces problèmes ? Quels gestes professionnels peuvent-ils acquérir ensuite : analyse des enjeux d'apprentissage en géométrie, des modalités d'enseignement en adéquation avec ces enjeux ? Pour une large part le travail en atelier a permis d'accéder à quelques éléments de réponse.

Conclusion optimiste donc, que nous aurions néanmoins envie de prolonger par un appel à poser et à aborder certaines questions de forme et de fond à propos de la formation des maîtres. Une première concerne le temps consacré à la formation : comment prendre en compte les diverses contraintes de temps auxquelles sont soumises les formations selon les contextes institutionnels. Autre question, comment prendre en compte dans de telles modalités de formation l'injonction faite par les institutions de la définir en se référant à une liste de compétences ? Mais il est vrai qu'à ce sujet une question est peut-être à ouvrir : c'est la question de l'explicitation avec ou par les étudiants des connaissances qu'ils ont pu développer de façon souvent implicite dans les activités. Ces remarques sont une invitation à poursuivre et à compléter le travail d'analyse suscité par la question posée par le titre du colloque, question que nous poserions alors sous la forme suivante : «Formation des enseignants à partir de la résolution de problèmes : où est le problème ? »

BIBLIOGRAPHIE

DE BLOCK-DOCK C. (1994) Modalités de la pensée mathématique d'élèves de douze ans devant des problèmes de pavage, *Educational Studies in Mathematics*, **27**, 165-189.

DUVAL R. & GAUDIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, Grand N, **76,** IREM de Grenoble

EXPRIME (2008) « EXpérimenter des PRoblèmes Innovants en Mathématique à l'Ecole » ; INRP- IREM Lyon- LEPS-LIRDHIST de l'université Claude Bernard de Lyon ; lien internet : http://educmath.inrp.fr/applet/exprime/fregco2.pdf .

FRIEDELMEYER J.P. (2008), Equidécomposabilité des polygones plans, *L'ouvert*, **117**, IREM de Strasbourg.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **16/3**, 289-322.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A., (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives **11**, 175-193*

KUZNIAK A., RAUSCHER J-C., (2004) - *Processus de formation de Professeurs d'Ecole et anamnèse géométrique.* Actes du XXXème colloque COPIRELEM, Avignon, 19, 20 et 21 mai 2003 , Université de la Méditerrranée, 231-248

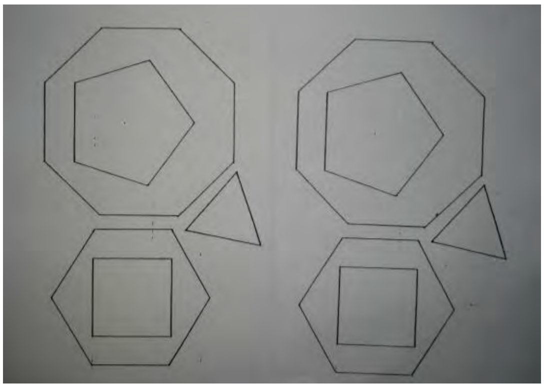
MAURIN C. (2008), Mesurer ? pour quoi faire ? deux exemples de situation pour des élèves de CM2 et 6ème, *Grand N,* 81*,* IREM de Grenoble.

VERGNAUD G. (1987) *Réflexions sur les finalités de l'Enseignement des Mathématiques,* Gazette des mathématiciens , **32**, 54-61).

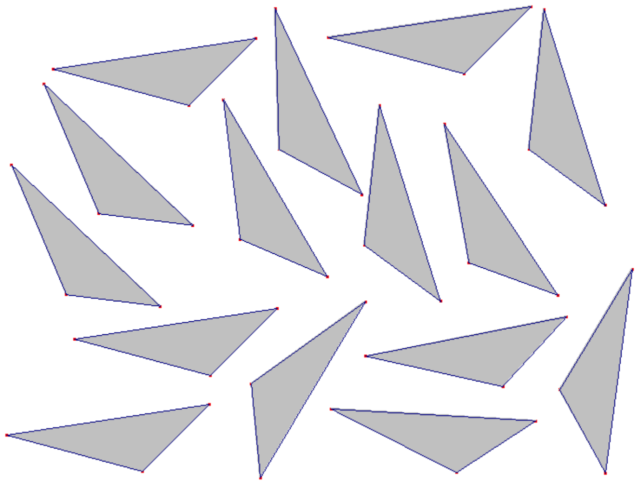
WITTMANN E. (1981) The complementary roles of intuitive and reflectives thinking in mathematics taeching, Educational Studies in Mathematics, **12**, 389-397

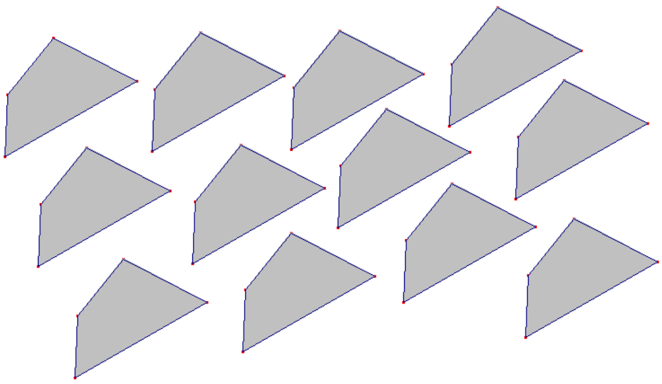
ANNEXE 1

Feuille 1

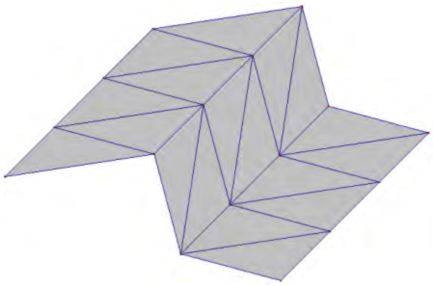


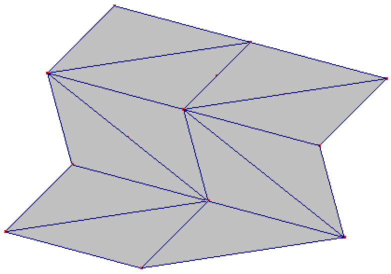
Feuilles 2 et 3

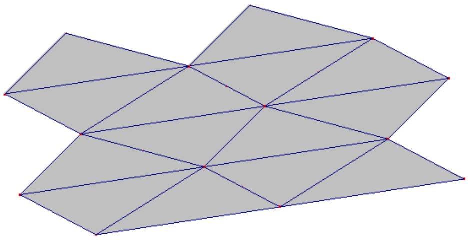


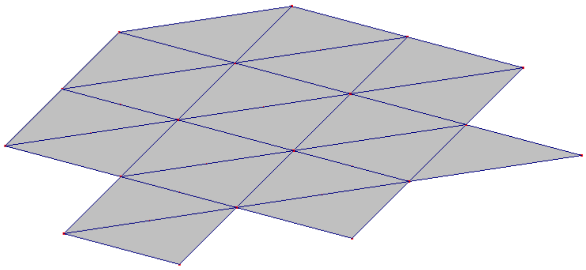


Feuille 4









ANNEXE 2

Compte rendu du travail de Christine De Block Dock (1994) : « Modalités de la pensée mathématique d'élèves de douze ans devant des problèmes de pavage »

Dans cet article (De Block-Dock, 1994), l'auteur analyse un enseignement dans lequel des élèves de douze ans ont traité des problèmes de pavages polygonaux et progressé à cette occasion dans leur apprentissage de la géométrie plane. L'analyse porte principalement sur les processus de pensée des élèves confrontés à la résolution de ces problèmes.

1. Modalités de l'enseignement analysé.

Conception :
L'élaboration de la séquence d'enseignement a été inspirée par la conception selon laquelle la résolution de problèmes et le lent travail d'organisation d'un champ de questions conduisent à un apprentissage plus profond, plus proche du sens que des exposés de théories organisées. Pour la plupart des recherches proposées, les élèves ont d'abord travaillé par petits groupes et ont ensuite communiqué leurs résultats lors de synthèses orales auxquelles toute la classe participait et pendant lesquelles l'enseignant donnait les explications nécessaires et fixait les acquis.

Le déroulement de l'enseignement :

- **1ère étape** : dessiner librement des pavages observés ou imaginés.

Il s'agit d'une étape de familiarisation.

- **2ème étape** : trouver « tous » les pavages possibles avec des polygones réguliers. Pour cela on donne des triangles équilatéraux, des carrés, des pentagones, des hexagones et des octogones réguliers en carton.

Le « tous » de l'énoncé est important parce qu'il implique que la recherche dépasse le stade « manipulatoire ». Il n'est pas facilement compris dans un premier temps. Lors de la synthèse l'existence de trois pavages réguliers est admise par tous (professeur compris). Cette constatation permet de trouver la valeur de l'angle intérieur du carré, du triangle équilatéral et de l'hexagone régulier (on suppose que le tour autour d'un point fait 360°). Les élèves arrivent à expliquer la non-existence d'autres pavages réguliers au-delà de l'hexagone par le fait que l'angle intérieur croît avec le nombre de côtés.

- **3ème étape** : avec le même jeu de polygones en carton on demande aux élèves de chercher des pavages faits de plusieurs sortes de polygones réguliers (tous les nœuds doivent être entourés de manière identique). On parle de pavages semi réguliers.

De nombreux essais sont effectués. Le pavage avec des octogones et les carrés avaient déjà été obtenus lors de la recherche avec les octogones uniquement. Les élèves peuvent ainsi en déduire la valeur de l'angle intérieur de l'octogone. Un essai pose problème : celui où un pentagone, un octogone régulier et un hexagone environnent un nœud. Les élèves ne sont pas sûrs de sa validité et pour cause puisque la somme angulaire fait 363°. Mais ils ne le savent pas puisqu'ils ne connaissent pas la valeur de l'angle du pentagone. Il faut donc trouver un moyen pour l'obtenir et ce besoin va servir de fil conducteur pour la suite.

- **4ème étape** : dessiner deux des pavages semi-réguliers et avant cela dessiner les polygones réguliers qui le composent.
- **5ème étape** : paver avec des polygones non-réguliers isométriques non fournis.

Au bout d'un certain temps, la recherche est circonscrite à celle de tous les pavages possibles avec des triangles isométriques découpés dans du carton. Lors de la synthèse, introduction des différentes isométries qui associent deux triangles des pavages.

- **6ème étape** : il est demandé aux élèves de s'intéresser aux problèmes d'angles dans ces nouveaux pavages.

Les élèves peuvent ainsi aboutir à la valeur de la somme des angles d'un triangle. Il y a ici un changement de point de vue pour les élèves car on ne s'intéresse plus à la valeur d'un angle mais à une somme. De manière analogue, par le biais d'un pavage par des quadrilatères quelconques, les élèves découvrent que la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360°.

- **7ème étape** : il est demandé aux élèves de trouver la somme des angles d'un pentagone.

Les élèves ne peuvent plus s'appuyer sur un pavage : il faut penser à trianguler le pentagone.

- **8ème étape** : reprise de la question de l'existence du pavage 5-6-8.

Les élèves disposent maintenant des outils pour trancher en calculant la somme angulaire autour d'un nœud.

2 Evolution de la pensée mathématique des élèves.

Au cours de cet enseignement, il a pu être observé que les élèves ont développé leurs connaissances et leurs savoirs à propos des polygones réguliers ou quelconques (définition d'un pavage régulier, semi-régulier, somme des angles, valeurs des angles etc.) et que plus largement, ils ont eu l'occasion d'affiner certaines notions de géométrie plane : cercles, positions de droites, isométries, etc.
Mais les modalités de cet enseignement qui laissent de nombreux moments d'initiative aux élèves ont surtout permis d'observer l'évolution de la pensée mathématique des élèves. Les informations et explications circulaient sans blocage majeur et la classe est apparue comme un groupe intellectuellement assez homogène. Bien qu'il se soit agi de la construction de savoirs individuels, ce ne fût pour aucun élève la construction individuelle de son savoir. Les observateurs présents dans la classe ont relevé de leur mieux les contributions des élèves. Toutes les données disponibles ont permis l'analyse de l'évolution de la pensée mathématique susceptible d'avoir été partagée par une majorité d'élèves.

Christine de Block-Dock annonce que son analyse essaye de discerner et de décrire les modalités de cette pensée plutôt que des étapes. En effet, même si ces modalités sont présentées dans un ordre d'abstraction croissante, les plus primitives ne disparaissent pas pour faire place aux suivantes : elles coexistent avec elles et continuent à jouer un rôle utile. Globalement, comme nous allons le voir se dessine un mouvement qui amène la pensée des élèves à se détacher du contexte concret qui l'a nourrie pour accéder à un niveau plus abstrait et une organisation plus globale.

Pensée instantanée et pensée discursive.
Principalement Christine de Block-Dock distingue deux registres par lesquels peuvent se repérer les modalités de la pensée et son évolution :

- La pensée instantanée qui agit par flashs, qui globalise les données sans les discerner. Elle a cours dans la vie quotidienne mais joue un rôle considérable en mathématique.
- La pensée discursive qui atteint le but où elle tend par une série d'opérations partielles intermédiaires. Il s'agit de la pensée qui procède par enchaînement d'idées. Elle a peu cours dans le quotidien et n'est pas « naturelle » pour un enfant.

L'analyse passe alors en revue les occasions et les manifestations d'abord de la pensée instantanée puis de la pensée discursive dans les problèmes de pavages proposés aux élèves.

La pensée instantanée.

Avant d'arriver au stade où elle procède par enchaînements d'idées, la pensée saisit les données dans un mouvement unique qui les globalise pour y déceler rapidement des relations.

Les actions lors de la création des pavages.

La construction de pavages à l'aide de polygones en carton est guidée par ce que H. Wallon (1970) appelle « l'intelligence des situations » qui correspond à une perception globale d'un ensemble de circonstances matérielles et actions relevant des capacités sensori-motrices. Cette intelligence comporte des « intuitions variables appropriées aux circonstances ». Ainsi dans le cas de la création de pavages il s'agit de *:*

- juxtaposer des segments d'égales longueurs
- compléter l'environnement d'un nœud
- comparer par juxtaposition, superposition : constat d'égalité ou d'inégalité.
- utiliser implicitement les règles naturelles d'additivité des angles, de longueurs, d'aires etc.
- compléter les figures en anticipant… *« je continue comme ça… »*

Constats aboutissant aux structures géométriques visuelles.

Les élèves connaissent certaines figures sans savoir les définir. Ils observent spontanément certaines relations constitutives de ces figures : *« Dans un losange les angles opposés ont même longueur »*. Ils reconnaissent des polygones réguliers dans des pavages formés à partir d'autres polygones réguliers : dans la juxtaposition de triangles équilatéraux ils reconnaissent des hexagones, ils reconnaissent le carré qui manque lorsqu'on accole des octogones.

Ces constats portent sur les objets à fortes symétries.

De ces constats, les figures acquièrent une **structure géométrique visuelle**. Chaque figure est perçue comme un agrégat de propriétés coexistantes sans relations explicites de dépendance.

Conjectures générales.

Les élèves essayent dans un mouvement unique de trouver une loi générale ou de détecter des relations simples entre les objets :

- nombre pair de côtés = pavage régulier : « pour créer des pavages avec des polygones réguliers d'une seule sorte, ça va pour les polygones ayant un nombre pair de côtés + le triangle équilatéral,
- pour inscrire un dodécagone dans un cercle, il suffit de reporter le demi-rayon,
- pour un triangle quelconque, il n'y a qu'un seul pavage avec des symétries orthogonales puisqu'il n'y en a qu'un avec des symétries centrales.

Tous ces énoncés sont issus d'un mouvement spontané de la pensée aux prises avec un champ de phénomènes.

Contrairement aux constats précédents ces énoncés sont en général faux. Dans un premier temps, avant que beaucoup de cas n'aient pu être examinés, les élèves s'aventurent à conjecturer des régularités qui sont parmi celles qui s'imposent le plus spontanément à l'esprit. La pensée suit « la ligne de plus grande pente ». Au moment où ils abordent une problématique, ils manifestent une certaine tolérance aux contradictions :

- ils ajoutent par exemple le cas des triangles équilatéraux aux cas des polygones réguliers ayant un nombre pair de côtés

- cas de la proportionnalité dans le cas du dodécagone
- principe d'analogie dans le cas des symétries

La plupart des conjectures fausses ont été rejetées par les élèves par la suite lors de travaux plus approfondis. Elles sont cependant très utiles dans l'évolution du raisonnement parce qu'elles sont sources de contradictions qui stimulent des échanges et servent de point d'ancrage à la réflexion.
Les constats se font en général sur une seule figure que le regard embrasse.
Les conjectures se font sur un couple d'objets (dodécagone, hexagone par exemple), ou sur une famille infinie d'objets (nombres pairs) accessible à la pensée.

La pensée discursive.
La pensée discursive est la pensée qui procède par enchaînements.

La pensée discursive à l'œuvre dans les dessins.
Nécessité d'aller au-delà de la reconnaissance de la figure :

- analyser les propriétés de la figure
- choisir et ordonner les propriétés utilisables en vue de la reconstituer (synthèse) et tenir compte des possibilités des instruments.

Comment cela se passe-t-il ? Devant un dessin à exécuter, les élèves n'ont pas immédiatement à l'esprit un projet complet. Leur pensée ne devance que d'un peu l'exécution. Une première étape erronée enclenche une réflexion débouchant vers une deuxième étape etc.
La pensée discursive à longue échéance est pilotée par une vue globale, mais elle s'exécute par petits paquets d'opérations minutieuses, ces étapes intermédiaires régies par une démarche d'analyse/synthèse portant sur la globalité du pavage.
L'activité du dessin force à prendre en compte de nombreuses propriétés et leurs relations.
Cette maturation conceptuelle n'est pas liée à un besoin logique de la matière mais à un objectif précis de reproduction et se fait donc spontanément.

La pensée discursive à l'œuvre dans les réalisations de pavages par les cartons.
Bien que chronologiquement les pavages aient été construits avec les cartons avant d'être dessinés, ces constructions nécessitent une abstraction plus forte : rien ne laisse, en dehors des pavages classiques, imaginer une loi de formation. L'objectif est abstrait : il faut réaliser des pavages. La pensée doit précéder une vision. Mais là le matériel en carton facilite les choses et permet aux élèves d'anticiper :

- pour les pavages simples, pas de problèmes
- mais après, il y a nécessité d'analyser les paramètres en jeu : élément de symétrie, orientation, longueur des côtés. Ici aussi il y a une dialectique entre action et réflexion. Il y a une gradation des difficultés : le problème de la création de pavages réguliers donne assez vite des solutions, alors que pour les pavages semi-réguliers se pose la question de l'isométrie des paysages aux nœuds et que pour les pavages avec des figures non régulières (dont les côtés sont de longueurs différentes) se posent des problèmes d'orientation.

Cette gradation permet de passer d'essais sauvages, sans qu'il y ait analyse, à une prise en compte ordonnée des variables en jeu et des contraintes.
Et les élèves sont ici amenés à se poser des questions à propos de ce qui ne va pas (pavage 5-6-8). Ils passent donc à une analyse plus globale sur les questions d'existence des pavages.

Preuves brèves :

Dans le cas de pavages, la pensée discursive intervient de façon implicite avec un objet concret à élaborer. Mais la pensée discursive s'exprime explicitement à travers de courtes preuves :

- formulée spontanément par les élèves
- en réponse à des questions du professeur

Sur quoi s'appuient ces argumentations ? Sur certains constats : les structures géométriques visuelles interviennent comme sources d'arguments. Exemples *: « on peut paver avec un assemblage de polygones réguliers qui a la forme d'une rosace hexagonale parce que l'hexagone régulier pave. »* ou encore : *« un trapèze rectangle pave car deux exemplaires adéquatement accolés forment un rectangle ».* Ces énoncés ont été formulés avant d'être vérifiées expérimentalement. Ce sont des preuves brèves : deux faits enchaînés ou le deuxième fait se justifie par l'existence d'un pavage antérieur.

L'étude des angles permet d'élaborer des preuves plus longues et dont les sources ne sont plus toutes empiriques. Pour établir l'énoncé : « L'angle du triangle équilatéral vaut 60°, celui de l'hexagone régulier 120° » les élèves s'appuient sur :

- des constats d'existence empirique des pavages où les polygones sont impliqués
- la connaissance de la valeur angulaire totale en un point (360°)
- l'égalité des angles intérieurs des polygones réguliers (implicite).

De même pour la somme des angles d'un triangle : constat empirique, d'existence d'un pavage, constat de la présence des angles en double exemplaire autour d'un nœud, connaissance de la valeur angulaire en un point.

Mais pour que cet enchaînement soit une vraie preuve, il faut que les arguments évoqués aient une portée générale. Les élèves n'en sont pas spontanément conscients. C'est le professeur qui les invite à s'interroger sur la validité pour d'autres triangles.

Preuves plus élaborées

Elles font appel à des preuves moins immédiates, des enchaînements plus longs, des arguments empiriques plus lointains, ou des propositions déjà prouvées.

Exemple pour prouver qu'il n'y a que trois polygones réguliers qui pavent le plan :

- pour l'heptagone, il n'y a plus de place pour intercaler un troisième exemplaire
- les angles intérieurs croissent avec le nombre de côtés
- donc aucun polygone ayant un nombre de côtés supérieurs à 6 ne peut paver le plan
- le cas du pentagone est traité expérimentalement

Exemple pour la question de l'existence du pavage 5-6-8 :

Ce problème a été le fil motivant à travers les activités. Le statut de ce problème n'a pas toujours été très clair pour les élèves. Dans un premier temps les élèves attribuent l'emboîtement difficile à des problèmes matériels (découpage, difficulté de poser).

Piaget note que l'échec (ce qui ne va pas) est attribué successivement à :

- à des objets extérieurs (ciseaux ici)
- à la résistance des objets eux-mêmes
- à l'action des sujets
- et enfin seulement à la prévision du sujet qui est remise en cause

En l'occurrence ce problème fut l'occasion d'un débat animé : qu'est ce qui fait qu'on accepte un assemblage et pas un autre ? Aucun critère objectif, si ce n'est un consensus dans les cas admis et des avis partagés dans le cas qui donne lieu à controverse. Cette controverse donne lieu à un renversement de perspective : les élèves acceptent de déterminer l'angle du pentagone régulier par une autre voie, la déduction théorique à laquelle ils aboutissent finalement. De plus les élèves qui ont pu prendre assez de recul ont pu réaliser qu'il serait contradictoire d'accepter simultanément l'existence des pavages de triangles quelconques et celle de l'assemblage 5-6-8. Il y a donc là une occasion d'être sensibilisé à une démarche de modélisation et de théorisation pour réduire une contradiction.

Finalement on peut observer dans cet enseignement une évolution dans les types de preuves :
- d'abord empiriques
- puis un enchaînement d'arguments empiriques
- enchaînements plus longs

La pensée des élèves va finalement vers un détachement du contexte concret qui l'a nourrie pour accéder à un niveau plus abstrait et une organisation plus globale.
Chritine De Block-Dock se réfère ici à Wittmann (1981), qui part de la supposition que l'enseignement des mathématiques n'a pas pour modèle une lecture des mathématiques mais une activité en mathématiques. Pour lui trois types d'activités sont nécessaires pour développer la pensée mathématique :
- des opérations sur une riche variété d'exemples et de modèles qui permettent l'élaboration de conjectures et le développement de l'intuition (stade de l'intuition)
- des réflexions sur ces premières activités pour trouver des formulations générales, des résultats, les tester, les améliorer, les prouver (stade du raisonnement)
- des analyses des concepts, des théorèmes et des preuves (stade du formalisme)

COMPETENCES NUMERIQUES EN MATERNELLE ET CYCLE 2 : UTILISATION EN FORMATION D'UN DVD D'ENTRETIENS INDIVIDUELS AVEC DES ELEVES

Isabelle LAURENÇOT-SORGIUS
IUFM de Midi-Pyrénées, site de Toulouse
isabelle.laurencot@toulouse.iufm.fr

Madeleine VAULTRIN
IUFM de Midi-Pyrénées, site de Toulouse
madeleine.vaultrin@toulouse.iufm.fr

Laurence MAGENDIE
IUFM d'Aquitaine, site de Bordeaux
laurence.magendie@aquitaine.iufm.fr

Résumé
Lors de cet atelier, nous avons présenté un DVD produit par l'IUFM Midi-Pyrénées et débattu de ses possibles utilisations. Ce DVD présente des enregistrements vidéos d'entretiens individuels avec des élèves de grande section de maternelle destinés à repérer leurs compétences numériques. Outil pour la formation des enseignants du primaire, il peut être utilisé avec de multiples objectifs et de multiples modalités, dès lors que l'on s'intéresse à l'apprentissage du nombre par les jeunes enfants.

I. PRESENTATION DU DVD « COMPETENCES NUMERIQUES EN GS »

I – 1 Le contenu du DVD

Ce DVD « Evolution des compétences numériques en Grande Section »[1], conçu et réalisé par des formateurs de l'IUFM de Midi-Pyrénées, montre des entretiens individuels avec des élèves de Grande Section destinés à repérer leurs procédures dans des activités utilisant les nombres et à identifier les compétences sous-jacentes.

Il s'inspire d'une vidéo réalisée dans les années 1980 par l'INRP dans le cadre de la recherche ERMEL. Il y ajoute une étude de l'évolution des compétences des élèves entre le début et la fin de l'année de GS (octobre et juin).

[1] Le DVD ainsi que son livret d'accompagnement peuvent être commandés à l'ARPEME ou éventuellement en prenant contact avec les collègues de l'IUFM de Midi-Pyrénées : isabelle.laurencot@toulouse.iufm.fr ou madeleine.vaultrin@toulouse.iufm.fr

Le DVD est accompagné d'un livret de 44 pages proposant des pistes d'utilisation en formation continue ou en PE2 (un exemple précis d'utilisation en PE2 y est intégralement décrit), des activités et des jeux en relation avec les compétences testées, ainsi que des références théoriques. L'ensemble peut aussi être le support d'une animation en circonscription.

Six élèves d'une même classe de GS, choisis par leur enseignante pour l'hétérogénéité de leurs compétences, ont été filmés en octobre 2005 et juin 2006. Chacun d'eux, lors d'un entretien individuel avec un formateur, effectue une série de tâches : dénombrement, fabrication de collection, calculs ... Huit compétences « numériques » sont ainsi repérées chez chaque élève (voir annexe pour la liste de ces compétences et les questions posées aux élèves). Un questionnaire très proche se trouve dans ERMEL CP ainsi que dans le document d'accompagnement des programmes de 2002 « Vers les mathématiques en maternelle ».

Le montage du DVD permet de choisir entre deux entrées : une entrée par les élèves et une entrée par les compétences.

Lors de l'atelier, nous avons visionné l'entretien complet de deux des six élèves et la compétence de surcomptage/décomptage pour chacun des six élèves.

I – 2 Présentation du cadre d'utilisation du DVD en formation par les animateurs de l'atelier

Un rapide tour de table permet de voir qu'il n'existe pas, dans les différents IUFM, d'autre film de ce type, reprenant les propositions de l'équipe ERMEL. Les films utilisés en formation sont plutôt des « extraits de classe ».

Lorsqu'on utilise ce film en formation, il nous paraît important d'indiquer en préalable qu'il est évident que des entretiens individuels ne sont pas faciles à mettre en place dans une classe de 30 élèves. Cependant, le document réalisé présente un double intérêt : d'une part faire une synthèse des différentes compétences numériques des enfants de cet âge, à enrichir éventuellement par les collègues en formation (collègues du RASED, formation continue), d'autre part, envisager le transfert de ce travail individuel dans le cadre collectif de la classe. Cela permet aussi d'approfondir les méthodes d'évaluation dans le domaine numérique en GS.

Ce film amène naturellement à parler des activités qui peuvent être mises en œuvre pour améliorer les compétences.

Il est utilisé actuellement en formation initiale et continue, avec les PE2, des enseignants des cycles 1 et 2, et des maîtres de l'éducation spécialisée (ASH).

II. ECHANGES ENTRE LES PARTICIPANTS

Ce qui suit est un résumé organisé des différentes interventions des participants à l'atelier.

II – 1 Echanges sur les utilisations possibles du DVD en formation

II – 1.1 Avec les PE2

Les PE2 ont très peu d'expérience de la maternelle et ont du mal à anticiper les capacités d'un élève de ce niveau.

Pour guider le visionnement du DVD avec les PE2, on peut donner des pistes d'observations : quelle est la compétence testée ? Quelles erreurs sont produites ? Comment décrire la procédure de l'élève ?

Ce DVD permet de bien voir la grande hétérogénéité des élèves de GS. Cette hétérogénéité peut être en partie gérée en proposant les mêmes activités aux élèves et en les adaptant à leurs compétences repérées au préalable : la consigne est la même, mais les nombres proposés aux élèves sont différents. Cela permet d'aborder la différenciation en classe avec les stagiaires.

Lorsque les PE2 partent en stage en maternelle, l'enseignante titulaire de la classe leur propose assez souvent de « faire le 6 » (ou tout autre nombre). L'hétérogénéité des élèves indique bien que ce n'est pas une entrée pertinente.

Une collègue de l'atelier qui travaille en Suisse nous dit qu'on n'a pas pu fixer des objectifs pour chaque niveau, PS, MS, GS, contrairement aux documents d'accompagnement des programmes français de 2002 parce qu'il est difficile de savoir quoi faire avec les élèves qui n'entrent pas dans la norme. L'enseignement en Suisse préfère faire progresser les élèves indépendamment d'une quelconque norme. Il existe parfois un tutorat CM2-maternelle et c'est le grand qui évalue les compétences du plus petit.

II – 1.2 En ASH

Ce film répond en partie à une grande demande de la part des stagiaires en formation initiale E ou D pour des tests sur les compétences numériques de leurs élèves. En formation, il fera suite à un point sur de « récents » travaux de recherche pédagogique sur les nombres (les principes du comptage de R. Gelman et C.R. Gallistel, les approches conceptuelles du nombre qui évoluent de l'appariement de J. Piaget vers le comptage et le dénombrement, les travaux de R. Brissiaud, les propositions de S. Baruk).

Le film est visionné avec de nombreuses pauses car il est un point de départ pour analyser les difficultés des élèves avec lesquels travaillent les maîtres E ou D.

Lorsque le test proposé est insuffisant pour repérer les erreurs des élèves, d'autres propositions sont faites à partir du livre « Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant » de A. Van Hout et C. Meljac. Le travail est poursuivi par des constructions de tests sur la numération ou les opérations.

La demande des stagiaires vient ensuite sur la remédiation à mettre en place, sur des activités qui ne fassent pas double emploi avec celles déjà faites en classe. Un certain nombre d'activités ou de jeux présentés dans le livret d'accompagnement du DVD répondent à cette demande.

La remarque est faite que très souvent l'indication au RASED pour des difficultés en mathématiques est faite trop tard (au CE2).

II – 2 Echanges autour des questions posées lors des entretiens du DVD et des difficultés apparues chez les élèves

II – 2.1 La comptine

Mémorisation

Dans l'activité où l'élève doit utiliser la comptine pour fabriquer une collection de nombre d'éléments fixé à l'avance, plusieurs élèves ne s'arrêtent pas sur le nombre demandé.
Une explication peut être que lorsque les élèves sont trop absorbés par la tâche, ils oublient ou ils ne prennent pas en compte le but, c'est notamment le cas lorsqu'on se rapproche de la limite de la comptine de l'élève.
Voici une attitude non citée mais fréquemment rencontrée avec les élèves en grande difficulté (ASH en particulier) : dans des situations où il faut réaliser une collection équipotente à une autre collection, l'élève compte la première collection d'objet correctement, comprend le principe cardinal et oublie le nombre en question après quelques secondes. Les enseignants spécialisés sont toujours démunis face à ces gros problèmes de mémoire immédiate.

Quelles sont les différences entre la mémorisation de la comptine des nombres et celle d'une comptine ordinaire ?
Des participants à l'atelier indiquent que ce n'est pas qu'une question de mémorisation pure mais aussi de sens, de sonorité. Le fait qu'il ne faille faire aucune erreur dans la comptine des nombres modifie l'enjeu et augmente la difficulté.
Il y a aussi pour la comptine numérique une forte charge sociale.

Lien avec le dénombrement

Peut-on savoir compter sans savoir la comptine ?
Les avis des participants sont partagés. Certains enfants peuvent savoir qu'il y a 3 objets sans savoir compter jusqu'à 3 (cependant R. Brissiaud, dans « Premiers pas vers les maths », prétend que le « subitizing » n'est pas un phénomène de reconnaissance immédiate : les petits nombres, selon lui, ne se « voient » pas, mais on a très tôt la possibilité de les énumérer sans effort). Le comptage peut aussi pour certains élèves bloquer une procédure plus rapide comme la perception immédiate moins disponible et à laquelle ils n'ont pas beaucoup été entraînés (doigts, reconnaissance des constellations du dé). D'autres procédures possibles existent : par exemple quand on demande aux élèves de dire combien il y a d'élèves présents dans la classe, un jour où il n'y a pas d'absent, ils peuvent répondre par connaissance du nombre d'élèves de la classe.

Extension de la comptine

Des exercices sont cités pour l'extension de la comptine, par exemple la course à 100 : à tour de rôle chacun dit un nombre, les élèves ne sont éliminés que s'ils sont inattentifs, pas s'ils ne savent pas ; ce jeu les aide à prendre conscience de l'algorithme oral quand ils entendent les autres dire les nombres qu'ils ne connaissent pas. Un élève qui a du mal à poursuivre la comptine numérique à partir d'un nombre donné peut avoir besoin de revenir un peu en arrière.

Formulation des consignes

Quand on demande un dénombrement aux élèves, il est important que la question posée commence par « combien … » et non par « compte combien … ».
De manière générale, il est important de travailler en formation, notamment des PE2, sur le choix de la consigne : choix des mots, des formulations … Par exemple la formulation du film « est-ce que tu peux me dire … » est trop compliquée et même les élèves la prennent comme une devinette et ne s'autorisent pas à utiliser des méthodes qui permettraient de donner la réponse avec certitude ; pour répondre à cette question, ils ne s'autorisent pas à pointer du doigt alors que, dans les épreuves suivantes, on voit que c'est une méthode qui leur est familière. Autre exemple : que signifie pour l'élève « compter à partir de 8 ? » (normalement le 8 ne devrait pas être compté). Cependant une bonne formulation de la consigne ne suffit pas toujours.

II – 2.2 « Autant que… »

Des participants ont rappelé l'importance des activités autour de « aller chercher autant de … que … », tout en précisant qu'il faut être attentif aux éléments qu'on apparie (l'appariement doit être naturel, les éléments doivent être de taille importante si on fait un appariement un à un ; on peut aussi apparier deux pour un pour des lego et des duplo, des fleurs et des abeilles …).
On trouve du matériel facile à utiliser sur certains sites comme « La maternelle de Moustache » ou celui de J.L. Sigrist.

II – 2.3 Le calcul

Certains élèves n'arrivent pas à faire des calculs additifs avec des petits nombres : une explication peut être que deux informations ne sont pas mémorisables en même temps (les deux nombres à ajouter).

Il est intéressant en regardant le film de poser le problème de savoir si les élèves s'autorisent l'utilisation des doigts ou pas ; le tabou des doigts n'est plus dans les discours, mais il est encore très souvent présent dans les faits. On voit en effet que les élèves cachent leurs doigts.

III. FIN DE L'ATELIER

Nous avons terminé l'atelier par quelques images du prochain film en préparation sur le repérage des compétences en géométrie en GS.

ANNEXE

Compétences repérées dans le DVD

1. Connaissance de la comptine

Consigne : « Jusqu'où sais-tu compter ? », […], « Compte pour moi », […] « Je n'ai pas eu le temps de noter, pourrais-tu recompter ? ».
Noter le nombre « *a* », plus grand nombre de la partie stable et conventionnelle de la comptine.

2. Dénombrement d'une collection d'objets (de fèves, de marrons, de cubes non emboîtables (soit tous de même couleur, soit de couleurs distinctes,…)

Demander de dénombrer une collection d'objets disposés regroupés en tas sur la table.
Noter la procédure de dénombrement (déplace, pointe, compte avec les yeux).
Choix du nombre *b* d'objets : nettement inférieur à *a* ou inférieur de 2 ou 3 unités à *a*.

3. Établissement d'une collection d'objets de cardinal fixé

Consigne : « Mets *p* objets dans la boîte ».
S'il y a échec en 2) et suivant le type d'erreur, *p* sera choisi nettement inférieur à *b*, sinon inférieur de 2 ou 3 à *b*.
La boîte est opaque. Une fois les objets mis dans la boîte, demander à l'élève de vérifier.
Noter la procédure de vérification (déplace, pointe, compte avec les yeux).

4. Surcomptage et décomptage

Utiliser la boîte dans laquelle l'élève sait combien il y a d'objets.
Demander à l'élève combien il y en a dans la boîte après avoir rajouté un ou deux objets puis après en avoir ôté un ou deux.

5. Reconnaissance d'écritures chiffrées

Des nombres sont écrits sur des étiquettes déplaçables. Il s'agit de faire reconnaître les écritures des nombres de 1 à 12 et faire lire les étiquettes.
Consigne : « Est-ce que tu reconnais ce qu'il y a sur les cartons ? Qu'est-ce qui est écrit ? ».

6. Des nombres pour mémoriser

Donner une bande sur laquelle des gommettes sont disposées linéairement (adapter la taille de la bande suivant les compétences numériques des élèves).
De petits objets (de taille permettant de recouvrir les gommettes) sont disposés sur une table au loin (peu visibles de l'endroit où l'entretien a lieu).
Consigne : « Tu vas ramener des objets de façon à recouvrir chacune des gommettes. Attention, toutes les gommettes devront être couvertes par un seul objet et il ne doit pas rester d'objets. Il faut en ramener juste ce qu'il faut, pas un de plus, pas un de moins et en un seul voyage ».

7. Des nombres pour calculer

- Faire compter des objets placés dans la main droite et des objets placés dans la main gauche de l'expérimentateur.
  Mettre les deux collections « ensemble » (dans une boîte opaque par exemple), et demander combien il y a d'objets dans cette nouvelle collection.
  Demander à l'élève comment il a fait pour trouver.

- Faire compter des objets. Une partie de ces objets est placée sous un gobelet retourné, l'autre partie est visible.
  Demander à l'élève combien d'objets sont cachés sous le gobelet.

8. Des nombres pour comparer

Faire un jeu de bataille simplifié avec l'élève. Les cartes du jeu de bataille présentent les nombres sous forme de constellations.

Compétences non repérées dans le DVD et qui auraient pu l'être

- Reconnaître les configurations des doigts de la main ou montrer *n* doigts.

- Reconnaître les constellations du dé.

BIBLIOGRAPHIE

BRISSIAUD R. (2003) *Comment les enfants apprennent à calculer*, Retz.

BRISSIAUD R. (2007) *Premiers pas vers les maths*, Retz.

ERMEL (1990) *Apprentissages numériques GS*, Hatier.

FISCHER J.P., MELJAC C. & BIDEAUD J. (2002) Les chemins du nombre, *PU du Septentrion.*

GRAND N (1999) Spécial maternelle, tome 1 Approche du nombre, *IREM de Grenoble.*

FAYOL M. (1990) L'enfant et le nombre, *Delaschaux Niestlé.*

PIERRARD A. (2002) Faire des mathématiques en maternelle, *Scéren/CRDP, Grenoble.*

VALENTIN D. (2004) Découvrir le monde avec les mathématiques, situations pour la petite et moyenne section, *Hatier.*

VALENTIN D. (2004) Découvrir le monde avec les mathématiques, situations pour la grande section, *Hatier.*

VAN HOUT A. & MELJAC C. (2001) Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant, *Masson*.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2002) Document d'accompagnement « vers les mathématiques en maternelle ».

Communication C 1

ENTRER DANS LE CODE ECRIT : LE SYSTEME DE NUMERATION EN CYCLE 2

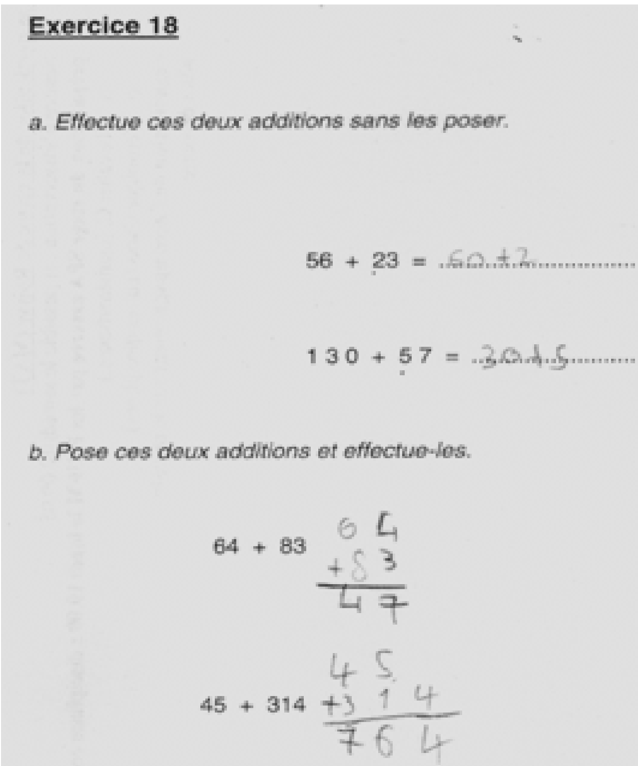
Claudine CHEVALIER,
Professeur de mathématiques
IUFM de Créteil
claudine.chevalier@creteil.iufm.fr

Comment enseigner aux élèves notre système de numération ? A quel âge peuvent–ils le mieux appréhender son fonctionnement ? Ce sont les questions envisagées ici dans le cadre d'expérimentations menées dans deux classes de CP, depuis deux ans, d'une situation adaptée de celle proposée par Bassis (texte initial 1984) en prenant appui sur les travaux de l'équipe Ermel (1991) autour des « groupements échanges » et de Briand – Salin concernant les processus de désignation (2004). Cette situation a également servi de support de formation en formation initiale et continue des Professeurs des Écoles. Des éléments de ces expérimentations et leur analyse, qui emprunte à la terminologie de Duval (2005), sont l'objet de cette communication.

1 CONTEXTE

1.1 Origine du questionnement

A l'origine de ces questions, un constat de difficultés récurrentes, voire d'échecs, constatés aux évaluations CE2, difficultés qui persistent en se prolongeant en 6ème par des erreurs d'interprétation du fonctionnement des nombres décimaux. Voici un exemple issu d'une évaluation en CE2 de 2004 et deux exemples d'évaluation 6éme de 1995 et 2004.


Exercice 18

a. Effectue ces deux additions sans les poser.

56 + 23 = 60+2

1 3 0 + 5 7 = 2015

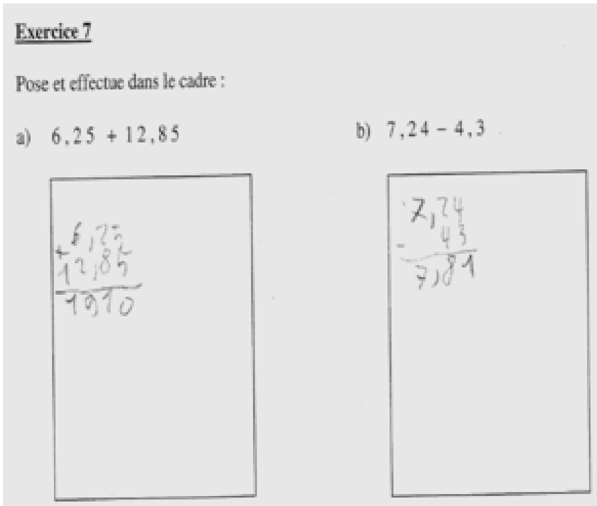
b. Pose ces deux additions et effectue-les.

64 + 83

45 + 314

En CE2, les erreurs commises - ajout du chiffre des unités (avec une erreur de comptage) au premier nombre puis ajout du chiffre des dizaines au résultat dans le premier calcul, alignement par la gauche dans l'addition posée - dénotent un traitement incertain des chiffres d'un nombre, témoin de la non compréhension du rôle de la position des chiffres dans un nombre.

En 6ème (1995) cette évaluation témoigne d'une liaison langage oral – écrit digital défectueuse.



Ici (6ème, 2004), la pose de l'addition est faite sans référence à l'existence de la virgule. On pourrait supposer qu'il ne s'agit que d'une incompréhension des nombres décimaux mais un entretien avec l'élève montre qu'il n'a jamais perçu le rôle de la position des chiffres dans un nombre même entier. L'alignement des chiffres par la droite dans une addition posée relève d'un apprentissage d'automatisation sans compréhension.

Ces erreurs constatées dans les évaluations depuis toutes ces années confirment les observations très souvent effectuées par des enseignants de cycle 3.

Des erreurs fréquentes rencontrées en cycle 3		
« cent trois »	traduit	1003
« mille vingt trois »	traduit	1000203

Ces difficultés de conversion entre représentations symboliques verbales et digitales sont fréquentes et posent, pour moi, la question du passage privilégié, dans l'enseignement français actuel, de l'apprentissage de la numération par l'énumération verbale. Les travaux effectués par

Briand – Salin avec des enfants d'âge maternel montrent, à mon sens, que les processus de désignation autre que verbale sont également à considérer dans l'apprentissage des notions de nombre et de numération.

1.2 Des regards sur ces difficultés spécifiques des élèves

De nombreux chercheurs et praticiens ont attiré l'attention sur les difficultés de cet enseignement.

- Le regard d'un chercheur : **Complexité du concept, Fayol (1990)**

« Les activités numériques présentent un double aspect. […] D'une part, elles renvoient à la numération comme système organisé, élaboré et mis en œuvre au sein d'une culture donnée. Il s'agit là d'un produit socio-historique extérieur à l'enfant mais qu'il doit s'approprier et intérioriser pour résoudre les problèmes. D'autre part, elles font appel à un certain nombre de notions logicomathématiques – sériation, équivalence, itération, addition, soustraction - qui structurent le système de manière sous-jacente et qui conditionnent son organisation interne. On a là affaire aux fondements logiques du nombre et de la numération. Or il va de soit que ***ces fondements ne peuvent être socialement transmis au même titre que la chaîne numérique verbale***[1]*. Ils doivent faire l'objet d'une construction de la part de l'enfant lui-même »*[2]

Cette conclusion de Fayol nous impose de nous saisir de cette difficulté d'enseignement pour tenter de la résoudre.

- Le regard de rééducatrices : **Difficulté d'apprentissage**

« Comment accepter qu'un ***enfant d'intelligence normale****, qui a su lire et écrire sans difficulté, se voit en fin de CE ou CM contraint de redoubler à cause du calcul ?* [….] *Dix années de face à* ***face avec l'échec en mathématiques*** *nous ont convaincues que quel que soient la classe, le niveau ou les points d'impact des blocages,* ***on doit revenir à la numération****. »*[3]

Le constat de ces rééducatrices, Bacquet et Gueritte-Hess (1996) à la suite de leur longue pratique, témoigne de l'importance de la compréhension du concept de numération pour toute acquisition ultérieure concernant le domaine numérique.

- Le regard de praticiennes : **Des questions en cours…**

[1] Souligné par moi
[2] Michel Fayol, L'enfant et le nombre, Delachaux et Niestlé, 1990, p. 185
[3] Michelle Bacquet, Bernadette Gueritte-Hess, rééducatrices en mathématiques, p. 2-3 in Le nombre et la numération, Pratique de rééducation, Isoscel, Editions du Papyrus, 1996

Déjà, en 2004, des praticiennes, Aigoin et Debourg, avaient fait part de leur questionnement sur ce sujet. La conclusion de leur article montrait que la question restait ouverte.

« Ainsi, nous pouvons nous demander ***dans quelle mesure les connaissances*** **a priori** ***des élèves sur les nombres*** *(connaissance de la comptine numérique orale sans relation avec le nombre en tant que mémoire d'une quantité, connaissance partielle du code, limitée à la connaissance des chiffres au détriment des règles d'écriture)* ***ne sont pas****, elles-mêmes,* ***un obstacle didactique à la construction de la numération et à la compréhension des fondements de notre système décimal. »***[4]

A la suite de l'ensemble de ces réflexions, de nombreuses années d'aide aux élèves en difficulté en CM et en 6ème, d'aide à des plus jeunes et de nombreuses lectures, j'ai été intéressée par une proposition de situation de Bassis (1984) qui me semblait correspondre au questionnement exprimé.

Il semble bien que la question qui se pose est celle de l'écriture du nombre qui se prononce, à la suite de « neuf » encore avec un mot nouveau, mais qui s'écrit avec un chiffre déjà utilisé et un signe qui signifie « rien »…

J'ai donc adapté et expérimenté une situation « les moutons », comme situation de référence dont je vais vous décrire tout d'abord les grandes étapes. Vous trouverez en annexe un écrit détaillé rédigé à destination d'enseignants de CP.

1.3 Présentation de la situation

Et après 9, quelle écriture ? : **« Les moutons »,** une situation de référence qui permet aux élèves l'apprentissage de la numération positionnelle, leur évite l'installation de conceptions erronées et permet aux Professeurs des Ecoles en formation la compréhension de la difficulté intrinsèque à notre numération, les oblige à une remise en question de leurs connaissances automatisées. Les étapes décrites ici sont celles de la situation telle que présentée aux élèves de CP. Quelques

[4] Chistine Aigoin,conseillère pédagogique et Valérie Debourg, professeur des écoles, membre du groupe d'Etudes et de Recherches à l'IREM de Montpellier in Grand N n°73, 2004 : dans leur article intitulé « Du dénombrement terme à terme aux groupements réguliers : un pas nécessaire vers la compréhension de notre système de numération positionnelle ! »

adaptations – mineures - sont nécessaires pour la présenter en situation de formation de professeur des écoles.

Les grandes étapes[5]

1.3.1 La désignation ORALE d'une quantité

Création d'un contexte imaginaire répondant au contexte d'historicité, introduisant le concept de nombre « mémoire de quantité », sans induire de procédure de dénombrement usuel.

1.3.2 La désignation ECRITE d'une quantité

Création des conditions de la compréhension de la nécessité d'un code écrit commun pour désigner une quantité et de la nécessité de réalisation de groupements**.**

1.3.3 La désignation ECRITE d'une quantité à l'aide de chiffres

Utilisation du code écrit usuel pour provoquer la prise de conscience du rôle conventionnel de la position des chiffres dans un nombre.

1.3.4 L'introduction du chiffre 0

Découverte de la nécessité de coder la place de l'absence d'un groupement (ou d'un isolé).

1.3.5 La désignation ECRITE d'une quantité à l'aide des dix chiffres disponibles

Compréhension de l'usage des groupements par dix pour permettre le codage à l'aide des chiffres disponibles.

Je vais à présent vous relater quelques éléments de ces expérimentations en formation de professeurs des écoles puis en classes de CP.

---

[5] cf. annexe 1

2 EXPERIMENTATION

2.1 En formation de Professeurs des Ecoles

Je vais, en un premier temps, vous présenter quelques productions écrites réalisées au cours des stages. Je veux toutefois vous préciser que cette situation a toujours provoqué chez les PE, devant ce tas d'objets à dénombrer, sans pouvoir compter en utilisant la suite numérique des mots appris, un premier moment de perplexité. Les très jeunes (proches de leur concours) ou les plus anciens (ayant vécu les « maths modernes ») ont ensuite en général réagi en disant : « mais ça c'est des bases », les uns cherchant à calculer après avoir compté en base dix (prisonniers de la dénomination usuelle et à la recherche de formules de traitement) puis transposant en base 4, les autres un peu perplexes puis constituant des groupes et des « groupes de groupes » et s'engageant dans des actions provoquant réflexion et échanges d'opinions…

Les trois premières étapes (après manipulation de trombones (ou jetons), écrit à l'aide de « mots », écrit à l'aide de « dessins », écrit à l'aide de « chiffres ») suffisent en général pour provoquer une discussion de fond sur les différentes facettes de notre numération décimale et les conditions de présentation aux élèves pour leur assurer une bonne compréhension de la notion de numération de position et de « système ».

La première étape orale qui permet de formuler les actions réalisées, est suivie d'une réalisation écrite avec comme objectif : « se souvenir du nombre de moutons de sa tribu ».

Voici quelques exemples de réalisations.

2.1.1 En formation initiale

Je vais, en un premier temps, vous présenter quelques productions écrites réalisées au cours des stages. Je veux toutefois vous préciser que cette situation a toujours provoqué chez les PE, devant ce tas d'objets à dénombrer, sans pouvoir compter en utilisant la suite numérique des mots appris, un premier moment de perplexité. Les très jeunes (proches de leur concours) ou les plus anciens (ayant vécu les « maths modernes ») ont ensuite en général réagi en disant : « mais ça c'est des bases », les uns cherchant à calculer après avoir compté en base dix (prisonniers de la dénomination usuelle et à la recherche de formules de traitement) puis transposant en base 4, les

autres un peu perplexes puis constituant des groupes et des « groupes de groupes » et s’engageant dans des actions provoquant réflexion et échanges d’opinions…

Les trois premières étapes (après manipulation de trombones (ou jetons), écrit à l’aide de « mots », écrit à l’aide de « dessins », écrit à l’aide de « chiffres ») suffisent en général pour provoquer une discussion de fond sur les différentes facettes de notre numération décimale et les conditions de présentation aux élèves pour leur assurer une bonne compréhension de la notion de numération de position et de « système ».

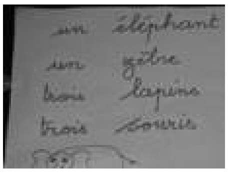
La première étape orale qui permet de formuler les actions réalisées, est suivie d’une réalisation écrite avec comme objectif : « se souvenir du nombre de moutons de sa tribu ».

Voici quelques exemples de réalisations.

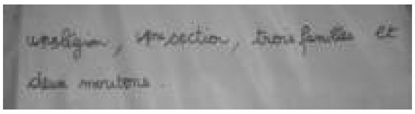
2.1.2 En formation continue

Etape 1

Groupe C



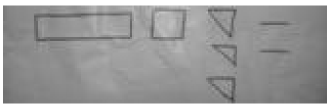
Groupe D



Le choix de dénomination faisant appel nettement à un imaginaire figuratif résulte-t-il des pratiques auprès d’enfants de ces enseignants expérimentés et de leur souci de se mettre à leur portée ? En tout état de cause, j’ai très fréquemment fait le constat de cette différence de symbolisation entre professeurs stagiaires et professeurs déjà expérimentés.

Etape 2

Le groupe C a simplement « traduit » en dessin sa dénomination verbale et a choisi de structurer additivement ces désignations.



Le groupe D a cherché une représentation plus abstraite des groupements.

Groupe C Groupe D

Etape 3

Groupe C Groupe D

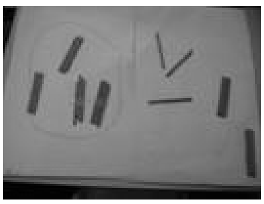
Le groupe C a choisi de représenter les différents ordres en symbolisant le rang par une position rappelant notre notation conventionnelle sous forme de puissance, en conservant toutefois une écriture de type additif pour le groupement de premier ordre. Il est à noter que le symbole « 4 » a été choisi en rappel de la constitution de base de chacun des groupes. Le groupe D a lui choisi un codage additif, tout en gardant une présentation positionnelle mais verticale – le 1 représentant les isolés, le 2 un groupe de quatre, le 3 un groupe de quatre fois quatre, le 4 un groupe de quatre fois quatre fois quatre – (le langage utilisé ici est celui par lequel s'expriment les PE et cela d'une manière courante).

2.2 Des réalisations d'élèves en classe de CP

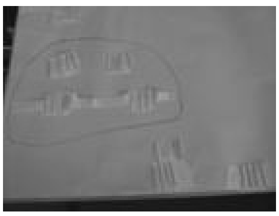
L'expérimentation a lieu depuis deux ans dans deux classes de CP de milieux socioprofessionnels différents (une école recrute dans un milieu plutôt favorisé, l'autre plutôt défavorisé). Le suivi des élèves en CE1 est également assuré.
La séquence a lieu en début d'année scolaire, sur huit séances environ. Le début d'année est consacré à s'assurer que les élèves possèdent bien la notion de cardinal ainsi que l'écriture des nombres jusqu'à 9.
La phase de représentation verbale écrite n'a pas lieu, comme avec les adultes, avec des élèves de CP. La communication orale collective et le choix du vocabulaire employé a lieu après la première étape.

Des réalisations d'élèves :

Etape 1 : *Les groupements*

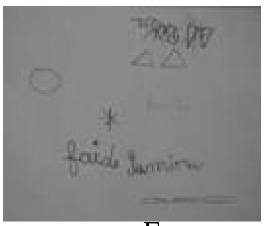


Groupe E

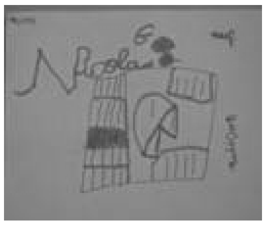


groupe F

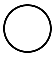
Etape 2 : *les représentations iconiques*



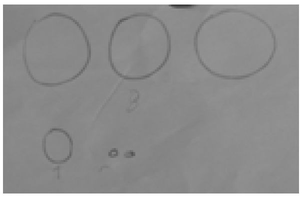
groupe E



groupe F

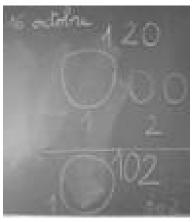
Le passage de la réalisation matérielle à la représentation iconique s’est fait facilement. **Pour le groupe E**, représente le grand groupe,  un petit groupe, un isolé[6]. On pourrait parler ici, à l’instar de Duval, de « pseudo-objets » qui permettent une représentation figurée de ce qui a été réalisé et est très proche de la réalité des objets dénombrés. **Pour le groupe F**, le besoin de figurer ce qui était en réalité est encore plus prégnant.
La synthèse collective a permis ensuite de choisir la représentation la moins « coûteuse » en termes de temps d’écriture et « d’encre » dépensée.

Etape 3 : *Les désignations à l’aide de chiffres*



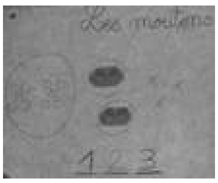
Dans la classe, dont une des représentations est extraite ci-contre, les petits, moyens et grands « ronds » ont été choisis pour symboliser respectivement les « tout seul », les « moyens groupes » et les « grands groupes ». Le groupe concerné ici, n’a pas pu en un premier temps se détacher de la proximité entre la représentation iconique et la représentation symbolique chiffrée. Il a fallu l’exigence, par la maîtresse, d’une écriture sans « dessin », sur une seule ligne, pour admettre le choix imposé par la transmission de notre code issu de cet héritage socio-historique dont parle Fayol (cf. citation ci-dessus).

Etape 4 : *La nécessité du chiffre 0*



Cette photographie témoigne de la synthèse faite le 16 octobre 2006 dans l’une des classes. Un des groupes n’avait pas de « tout seul », l’autre pas de « moyen champ » et pourtant ils avaient codé leur nombre de moutons « 12 » sans avoir le même nombre de bâtonnets. La nécessité de l’introduction d’un symbole nouveau comme marqueur de « place vide » a légitimé l’emploi du « 0 ».

Etape 5 : *Désignation écrite à l’aide des dix chiffres*



Il s’agit ici de la synthèse écrite collective finale permettant la mémorisation de la conversion entre représentation iconique et représentation symbolique digitale, cette fois dans notre système conventionnel de groupement par dix et

[6] La terminologie utilisée ici est celle qui a été employée dans les classes et qui a correspondu aux dénominations utilisée spontanément par les élèves.

d'écriture à l'aide des chiffres disponibles. La représentation des groupements par dix à l'aide des doigts des mains s'est imposée tout naturellement, témoignage de la liaison doigts – cerveau - pensée numérique dont parle Dehaene (2007) dans ses travaux. En aucune manière la chaîne numérique verbale n'est à ce moment concernée. « *Le passage des représentations iconiques, quelles qu'elles soient, aux systèmes de représentations symboliques* », dont parle Duval (2005) est ici directement travaillé.

3 ELEMENTS D'ANALYSE DE CETTE SITUATION

3.1 Apports pour les Professeurs d'Ecole

Récemment encore, des enseignants engagés dans un PPI[7] m'ont témoigné du grand intérêt que leur apportent le vécu et l'analyse de cette situation. Elle leur permet de comprendre concrètement les origines possibles des difficultés de leurs élèves et de les légitimer. Elle leur permet également de comprendre les différents aspects de la construction d'une réelle compréhension de la notion de numération : la nécessité de groupement régulier et optimal (manque de « mots » pour désigner le suivant - on ne peut pas « compter » -), la contrainte d'efficacité, la nécessité d'une désignation non seulement orale mais écrite à convenir en commun – le code -, la nécessité de comprendre le fonctionnement du code – la position des chiffres -.

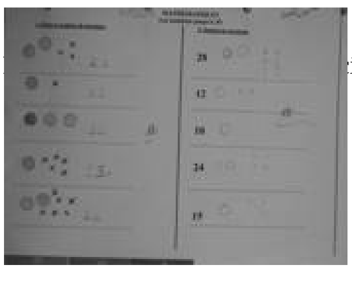
En formation initiale, cette situation permet aux stagiaires de prendre conscience de la différence entre posséder une connaissance et la transmettre. La nécessité d'une réflexion d'ordre didactique s'impose alors à eux comme préalable à l'acte d'enseigner.

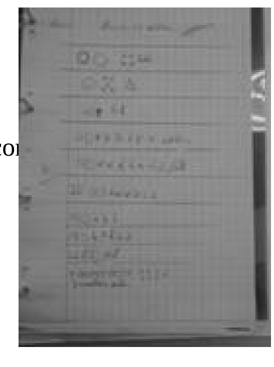
3.2 Apports pour les élèves de CP

Voici quelques éléments d'évaluation qui permettent de percevoir un apport positif de cette situation pour l'apprentissage par les élèves du système de numération.

- Un cas de « remédiation »

Mathieu est maintenu au CE1 à cause des mathématiques, les autres apprentissages



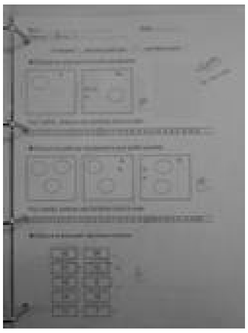


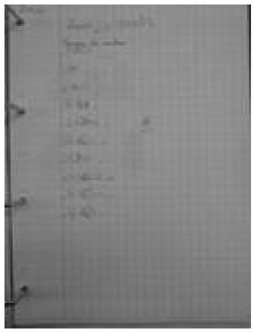
[7] Enseignants travaillant depuis plusieurs années dans le Plan de ... irco

ne lui causent aucune difficulté. En janvier il ne « dépasse pas le 9 ». Sa maîtresse déclare avoir tout essayer (manipulations, groupements/échanges…). Il travaille avec elle la situation « Les moutons » qui agit sur lui comme un élément déclencheur de compréhension. En mars, il a étendu la compréhension de son champ numérique jusqu'à 69…

– En CP

- Une aisance rapidement acquise dans les processus de conversion des représentations symboliques en représentations iconiques et réciproquement.
Les couleurs, apparaissant ci-contre, ont été une aide à la mémorisation pour certains élèves, la compréhension du rôle différent du chiffre des dizaines et de celui des unités étant assuré par le recours régulier au rappel de la situation vécue et du « moyen champ » ou « petit groupe » réalisé avec dix « tout seul ».
- Des résultats très encourageants sur tous les exercices de comparaison de nombres en écriture symbolique digitale et cela pour une grande majorité d'élèves dès le mois de novembre.





D'autres exemples de résultats encourageants en CE1 et CE2 ont été communiqués par les enseignants ayant participé à cette expérimentation dans les deux écoles. La remédiation en CE2 a été menée par la maîtresse de CP.

– En CE1 :

Des élèves ayant travaillé « Les moutons » en CP deviennent « moteurs » pour les autres élèves grâce au rappel de cette situation « référente » qui se travaille aisément également en CE1 et devient vite une référence pour toute la classe.

– En CE2 :

Des élèves en échec dans le domaine numérique, après avoir travaillé en petits groupes de remédiation cette situation, ont pu reprendre le travail du domaine numérique avec l'ensemble de leur classe, avec succès cette fois.
Depuis plusieurs années, cette maîtresse avait déjà pris en charge des élèves présentant des difficultés similaires et jusqu'à présent ces aides, prenant appui sur les ouvrages de l'équipe Ermel, n'avaient pas produit les effets attendus.

3.3 Une réponse à des questionnements théoriques ?

Cette situation permettrait-elle de répondre à des avis de différents chercheurs qui ont déjà longuement étudié cette question ?

3.3.1 Un accord avec certaines prises de position théoriques :

- Ancrage socio-historique pour l'élève :

La situation présentée ici semble permettre cette appropriation dont parle Fayol (1990)[8] en favorisant cet ancrage dans une histoire de tribus et de troupeaux et l'expérimentation à partir d'une situation imaginaire, processus si familier aux jeunes enfants qui favorise l'apprentissage.

- Travail des notions logico-mathématiques sous-tendues :

Par les manipulations permises et la nécessité de l'invention d'un code commun, elle engage l'enfant dans la compréhension « *[….] des fondements logiques du nombre et de la numération. Or il va de soit que ces fondements ne peuvent être socialement transmis au même titre que la chaîne numérique verbale. Ils doivent faire l'objet d'une construction de la part de l'enfant lui-même.* » Fayol (1990)[9].

Par la possibilité de réaliser des groupes et des « groupes de groupes » elle lui permet de percevoir certaines notions logicomathématiques. « *D'autre part, elles font appel à un certain nombre de notions logicomathématiques – sériation, équivalence, itération, addition, soustraction - qui structurent le système de manière sous-jacente et qui conditionnent son organisation interne.* » Fayol (1990)[10].

3.3.2 Un choix différent de certains autres :

- **Dissociation comptage et langage**

[8]Cf. citation infra p.2 Fayol, L'enfant et le nombre, Delachaux et Niestlé, 1990, p.185.
[9] Fayol, L'enfant et le nombre, Delachaux et Niestlé, 1990, p. 185
[10] ibidem

« C'est seulement lorsque le comptage des dizaines est conçu comme un résumé de celui des unités qu'il permet lui aussi de se représenter les unités. […] On voit que la langue joue un rôle essentiel dans cet apprentissage » Brissiaud (2003)[11]

- Groupements autres que dix

« Nous avons choisi de ne faire écrire les résultats des groupements que lorsque ceux-ci se font par dix, de manière à éviter les mélanges d'écritures […]. L'expérience a montré que la majorité des enfants de six ans ne tiraient pas profit du travail effectué dans des bases autres que dix. » Ermel (1991)[12].

Il n'est pas question ici de négliger le rôle de la langue ni de faire travailler écriture ou groupements de façon systématique dans plusieurs bases[13], mais de **permettre de dissocier temporairement comptage et désignation symbolique orale d'une quantité.** Notre langue française impose la mémorisation de seize mots différents pour désigner les seize premiers nombres[14] avant de permettre la possibilité d'un appui éventuel sur le langage pour comprendre les règles de fonctionnement interne du système de désignation symbolique chiffrée. Il semble donc nécessaire d'éviter de prendre appui sur le langage pour débuter cet apprentissage. D'autre part, la compréhension du fonctionnement du système ne peut se faire sans la prise de conscience de l'existence de groupements (groupe et groupes de groupes) et leurs désignations symboliques écrites. Mais le groupement par dix, par son étendue et l'impossibilité d'estimation visuelle de la quantité dix, impose le passage par une procédure de dénombrement verbal oral et empêche donc une liaison directe quantité – désignation écrite.

Ainsi la situation décrite permet-elle d'envisager de répondre aux recherches et prises de positions d'autres chercheurs.

3.3.3 Prise en compte des points de vues ci-après.

[11] Brissiaud, Comment les enfants apprennent à calculer, Retz, 2003 p. 232, 233
[12] Ermel , Apprentissages numériques et résolutions de problèmes, CP, Hatier, 2005, p.271
[13] Ce n'est pas la notion de base qui est privilégiée ici mais celle de groupement (groupe et groupe de groupes) d'une dimension qui permet la manipulation de jeunes enfants et la perception visuelle de la quantité regroupée.
[14] cf. annexe 3

- **Complexité des représentations des nombres**

*« Il y a la situation dans laquelle les objets étudiés sont inaccessibles en dehors de **représentations relevant d'une activité sémiotique**, comme en mathématiques. […] Quand un enfant utilise une, voire même deux, de ces représentations devient-il pour autant capable de reconnaître les nombres dans une troisième représentation ? […] L'enjeu essentiel de l'enseignement est **le passage des représentations iconiques**, quelles qu'elles soient, **aux systèmes de représentations symboliques**. »* Duval (2005)[15]

Duval[16] classe le langage naturel, comme les représentations chiffrées parmi les représentations symboliques, représentations chiffrées dont l'emploi est nécessaire dans la désignation écrite des nombres et leur utilisation dans les calculs. Les difficultés d'apprentissage mentionnées ci-dessus engendrées par l'utilisation de la langue orale nécessitent donc de pouvoir travailler dans un autre registre plus accessible aux élèves. Or l'accès aux représentations iconiques est plus aisé car proche des activités de manipulations possibles. Dans la situation proposée, ces représentations iconiques sont à la portée (physiquement à partir de manipulations simples) des élèves et la possibilité de réaliser des groupements facilitée par le petit nombre d'objets à manipuler. Ainsi, très rapidement les représentations iconiques correspondantes réalisées par les élèves prennent sens et les représentations symboliques chiffrées amenées alors peuvent prendre appui sur la notion même de quantité isolée ou de groupement.

- **Intuitions spatiales des quantités chez le jeune enfant.**

*« Cette expérience […] a permis de déterminer que **certaines régions cérébrales répondent à l'identité des objets, et d'autres à la quantité numérique**. […] Il est remarquable de penser que le cerveau de l'enfant est déjà organisé chez des bébés de trois mois. […]. **Il s'agit du socle sur lequel se feront les apprentissages ultérieurs. […]** Je crois qu'il serait particulièrement intéressant de **renforcer** dans les écoles **le lien entre chiffres arabes et quantités correspondantes. »*** Dehaene (2007) [17]

Dans la situation proposée, le groupement par 4 permet de se « passer de compter ». La représentation du nombre en tant que quantité est très nettement favorisée car visuellement disponible. Ainsi le *« le lien entre chiffres arabes et quantités correspondantes »* est nettement

[15] Duval, Actes du XXXII^{ème} colloque COPIRELEM, 2O05, p.67 ; 69
[16] cf. annexe 2
[17] Dehaene, Actes du Séminaire de mathématiques (novembre 2007), publication 14 mars 2008

renforcé. La correspondance entre chiffre arabe et groupement par quatre étant réalisée, passer du groupe de quatre au groupe de dix ne perturbe pas la compréhension du lien écriture symbolique chiffrée – quantité correspondante et dans les expériences faites, la compréhension de la nécessité du groupement par dix n'a posé aucun souci. La liaison groupement de dix – écriture symbolique chiffrée est ainsi effective.

4 CONCLUSION

Les expériences réalisées, autant en formation des maîtres qu'en classe de CP, permettent de faire l'hypothèse que la situation décrite pourrait servir de situation de référence pour l'apprentissage par les jeunes enfants de notre système de numération et la compréhension par les maîtres des difficultés de cet enseignement. Elle semble respecter les conclusions des différents travaux sur la nécessité de désignations des groupements menés par l'équipe Ermel et sur les difficultés inhérentes à notre langue française soulignées particulièrement par Brissiaud. Elle semble pouvoir apporter une réponse aux recommandations faites par Duval concernant *le passage des représentations iconiques aux systèmes de représentations symboliques* et Dehaene concernant *le renforcement dans les écoles du lien entre chiffres arabes et quantités correspondantes.* Il reste, de toute évidence, à en poursuivre l'expérimentation de façon à pouvoir apporter une conclusion plus rigoureuse de l'efficacité de sa mise en œuvre.

5 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Aigoin C., Guebourg V. (2004) *Grand N* **73,** 49-65
- Bacquet M., Gueritte-Hess B., (1996) *Le nombre et la numération,* Isoscel, *« Du dénombrement terme à terme aux groupements réguliers : un pas nécessaire vers la compréhension de notre système de numération positionnel »*
- Bassis O., (2003) *Concepts clés et situations problèmes,* Hachette Ed. 17-76
- Bideaud J., Lehalle H., (2002) d. *Le développement des activités numériques chez l'enfant,* Lavoisier

- Briand J., Salin M.H., Loubet M., *Apprentissages mathématiques en maternelle* Hatier 2004 CD.
- Brissiaud R., (2003) *Comment les enfants apprennent à calculer* Retz 232-238
- Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques* La Pensée sauvage
- Dehaene S. (2007) in *Actes du séminaire national Enseignement des mathématiques à l'école primaire* http://webtv.ac-versailles.fr 117-132
- Duval R. (2005) *Actes du XXXII colloque* Copirelem 67-89
- Ermel, (2005) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CP* Hatier 245-273
- Fayol M. (1990) *L'enfant et le nombre,* Delachaux et Niestlé, 180-190
- Fayol M. in Bideaud J., Lehalle H., (2002) d. *Le développement des activités numériques chez l'enfant,* Lavoisier 151-170
- Rouche N. (2006) *Du quotidien aux mathématiques* Ellipses 15-33

ANNEXE 1

Séquence CP *Et après 9, quelle écriture ?*
Etapes 1 à 5 :
Connaissances : Connaître et savoir interpréter la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale[18] d'un nombre.

Préambule
L'objectif principal, à ce moment de l'année, de la démarche d'apprentissage[19] exposée ici est double. Il s'agit tout d'abord de donner à l'élève, et à la classe, une situation de référence dans le domaine de la numération. Nous proposons en effet dans ce chapitre une « situation – problème », dans l'acception faible du terme, situation qui pourra également être réinvestie en CE1, favorisant ainsi la continuité des apprentissages. Il s'agit également de construire un apprentissage de la numération positionnelle ne permettant pas aux conceptions erronées des élèves de s'installer de manière pérenne. La situation des « moutons » a été conçue dans le but d'éluder les erreurs classiques connues depuis longtemps des élèves, mais aussi avec l'objectif d'appréhender la numération positionnelle dans tous ces questionnements (épistémologiques notamment). Il faudra, dans cette situation, porter attention à l'écrit et aux règles régissant celui-ci, en mathématiques.

Attention : En ce début d'année de CP, avec des élèves encore très jeunes, le plaisir de manipuler le matériel utilisé dans cette situation (des bâtonnets) peut l'emporter sur la réflexion. Il faut donc prévoir une séance de « découverte » (dévolution) du matériel, de la situation et des questions qu'elle implique.

Les moutons

1ère Etape : La désignation ORALE d'une quantité

Créer un contexte imaginaire qui réponde aux objectifs d'historicité et de communication.	Nous sommes dans un pays imaginaire, composé de tribus qui possèdent chacune un troupeau de moutons et qui, le soir, désirent trouver un moyen pour se souvenir du nombre de leurs moutons.
Contraindre le champ numérique disponible de façon à provoquer un problème de codage (oral puis écrit) sans dépasser les capacités manipulatoires de jeunes enfants.	Dans ce pays, les habitants ne savent compter que jusqu'à quatre et ….il leur arrive des choses « bizarres ».
Introduire le concept de nombre en tant que « mémoire de quantité », sans induire de procédure de dénombrement usuel de façon à ne pas interférer avec le savoir social et	Vous avez à votre disposition ces petits bâtonnets qui représentent les moutons de votre tribu. Vous devrez trouver un moyen pour savoir, la prochaine fois que vous

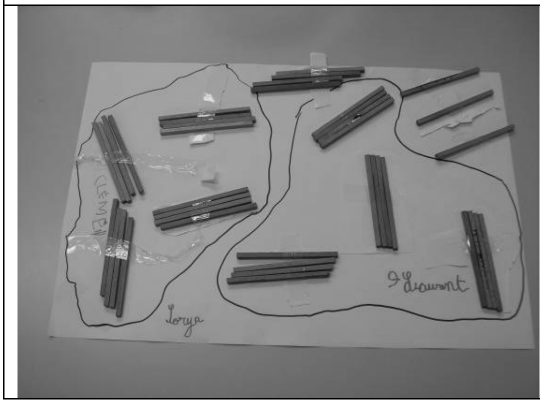
[18] L'expression « Ecriture décimale » signifie : écriture des nombres entiers à l'aide de chiffres qui prennent une valeur différente suivant la position où ils se trouvent, la base étant régulière et en groupements par dix.
[19] Démarche adaptée de celle expérimentée dans le cadre du GFEN (Groupe Français d'Education Nouvelle) - cf. Odette Bassis, Concepts Clés et situations problèmes, Hachette Education, 2005 -

scolaire déjà acquis (comptine numérique orale usuelle).	retrouverez vos moutons, si vous n'en avez pas perdu. Attention, dans ce pays, les habitants ne savent à ce moment que « parler ».
Mettre à disposition de chaque groupe vingt-sept, trente, trente-neuf, quarante-cinq, cinquante-quatre, ou cinquante-sept bâtonnets (suivant l'aisance des élèves) de façon à obtenir des groupements de trois ordres sans avoir le même nombre de groupes de chaque ordre. [20] Le nombre de bâtonnets est une **variable didactique** de la situation : ce nombre est en effet à la disposition de l'enseignant. L'enseignant choisira différentes valeurs de cette variable en fonction : - de la familiarité des élèves avec les nombres - du questionnement relatif à la nécessité du zéro (absent à ce stade de la situation)	

Difficultés prévisibles, rôle du maître : *Grouper par quatre les bâtonnets est une idée qui vient assez spontanément aux élèves. Cependant le rôle du maître est essentiel pour permettre la verbalisation de ces groupements et par là - même la prise de conscience de ce qui est en train de se passer. Le vocabulaire employé le plus souvent est « le petit groupe », « le petit champ », « le petit troupeau ».*
Certains groupes d'élèves cependant ne parviennent pas immédiatement ni au groupement régulier, ni au groupement optimisé par quatre. Là encore le rôle du maître est essentiel. Il est nécessaire de rappeler les objectifs d'optimisation : « Les habitants des tribus voudraient trouver un moyen le plus efficace possible pour se souvenir du nombre de moutons qu'ils possèdent : en disant le moins de mots possible et en trouvant le système le plus astucieux possible ».
Grouper ensuite les groupes par quatre (il s'agit là de la récursivité des groupements, aspect fondamental et n'allant pas de soi, de la numération positionnelle) est souvent plus difficile à concevoir pour les élèves. Ils sont généralement surpris par le problème du nombre de groupes de quatre qu'ils ne peuvent pas compter et une deuxième séance peut être nécessair ;

Provoquer la désignation orale des groupements réalisés par la nécessité de communication à distance au grand groupe.	Vous pouvez coller (scotcher) l'organisation de vos bâtonnets de façon à pouvoir montrer aux autres tribus comment vous vous y êtes pris. Expliquez oralement aux autres votre démarche.

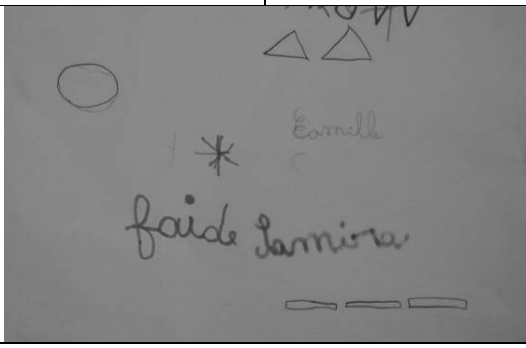
[20] Codages correspondants (à retrouver à la fin de la 3ème étape) : pour *vingt-sept bâtonnets* : 123 ; *trente* : 132 ; *trente-neuf* : 213 ; *quarante-cinq* : 231 ; *cinquante-quatre* : 312 ; *cinquante-sept* : 321.

Permettre le lien d'une séance à l'autre dans le processus d'apprentissage.	Je vais garder (ou photographier) vos réalisations de façon à ce que vous puissiez avoir une aide pour vous souvenir la prochaine fois de ce que vous avez fait.
	***Attention :*** *Bien conserver la trace des réalisations des élèves. Le support matériel est la référence pour eux pendant tout le déroulement de cette situation.*

DIFFICULTÉS PRÉVISIBLES, RÔLE DU MAÎTRE : *Si les élèves ont besoin d'une deuxième séance, il suffit alors de terminer le collage des groupements par quatre et prévoir ensuite un redécoupage des affichages pour pouvoir réorganiser ces groupes et obtenir les « groupes de groupes ». Le vocabulaire employé alors peut être « « le grand groupe », « le grand champ », « le grand troupeau ».*
Attention : *Laisser une liberté d'initiative aux élèves, ce vocabulaire n'ayant aucun caractère « officiel ». Il représente la « mémoire (locale, dans le temps et dans l'espace) de la classe » qui assurera le passage vers l'institutionnalisation de la dizaine lors du choix du groupement par dix. La seule contrainte à respecter est de retenir un vocabulaire qui image l'idée de groupement (petit et grand). Les élèves ont souvent, au moment de la mise en commun, des difficultés à faire un choix dans le vocabulaire qui leur permet de désigner les groupements qu'ils ont effectués. Là encore le rôle du maître est essentiel. Il doit les aider à choisir le vocabulaire pertinent qui deviendra la référence pour la classe. Il s'agit d'un moment d'institutionnalisation, ici uniquement orale, des référents :* « Nous avons donc décidé que, pour nous, les moutons isolés s'appelleront les « Tout Seul », les moutons groupés par quatre les « petits champs » et les « petits champs » groupés par quatre les « grands champs ».»
Attention : *Ne pas oublier de garder une certaine liberté dans le choix du vocabulaire, mais si les élèves n'en proposent pas un adéquat (cf. les contraintes ci-dessus), le professeur se doit de le proposer.*

<u>2ème Etape :</u> La désignation ECRITE d'une quantité et la nécessité d'un code commun

Créer les conditions de la compréhension de la nécessité de l'invention d'un code écrit pour désigner une quantité.	Toujours dans notre pays imaginaire, les habitants des tribus sont atteints d'une drôle de maladie passagère : ils ne savent plus parler, ils ne savent que dessiner. Ils vont essayer cette fois de trouver un moyen par le dessin de se souvenir du

	nombre de leurs moutons.
Provoquer la désignation écrite des groupements réalisés par la nécessité de communication à distance au grand groupe.	Vous pouvez représenter l'organisation de vos bâtonnets de façon à pouvoir montrer aux autres tribus comment vous vous y êtes pris.
Créer les conditions de la compréhension de la nécessité de l'invention d'un code écrit commun	Comparez vos représentations. Est-ce que vous pouvez savoir si votre tribu a autant de moutons que les autres tribus ?
Provoquer l'émergence de la notion d'efficacité et la compréhension du rôle d'optimisation des groupements par quatre dans la désignation écrite minimale de la quantité.	Essayez de vous mettre d'accord sur un code commun. Attention, il devra être le plus « efficace » possible (prendre le moins de temps possible pour réaliser le dessin).
	

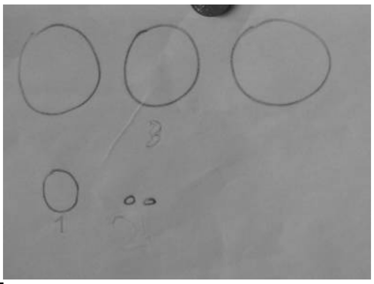
Difficultés prévisibles, rôle du maître : *A ce stade, il est possible qu'il soit nécessaire de recommencer, pour certains, de nouvelles manipulations (étape 1), compte tenu de la variété possible du choix de groupements (réguliers, irréguliers, optimisés ou non) et des régressions possibles dans les choix d'optimisation à cause du nouveau contexte (passage à l'écrit) ; l'objectif étant que tous les élèves parviennent à obtenir des groupements par quatre et des groupements de groupements par quatre et à les représenter avec le code écrit convenu en commun. Le maître doit alors bien insister sur : «* il [le code] devra être le plus efficace possible (prendre le moins de temps possible pour réaliser le dessin). »

3ème Etape : La désignation écrite d'une quantité à l'aide de CHIFFRES

Permettre d'utiliser la graphie du code usuel pour provoquer la prise de conscience du rôle conventionnel de la position des chiffres dans un nombre. *Soulignons ici que ce passage à un écrit « conventionnel » (celui de la communauté scientifique mais aussi celui du quotidien) renferme inévitablement une part*	Cette fois, dans notre pays imaginaire, les habitants des tribus ont rencontré un mathématicien un peu magicien : il leur a apporté, pour remplacer leur code dessin, un code écrit, « économique » : « 1 » pour désigner « une chose », « 2 » pour désigner « deux choses », « 3 » pour désigner « trois choses », « 4 » pour désigner « quatre choses ».

d'arbitraire. Cependant, la discussion collective dans la classe va permettre de faire émerger un consensus, et ainsi souligner que, parfois, il faut se mettre d'accord sur des définitions et des écrits (symboles et règles régissant ces symboles) pour ensuite parler de la même chose.	Ils vont essayer alors de représenter à l'aide de ce code un « dessin souvenir » du nombre de leurs moutons. A vous d'essayer…
Permettre, par la confrontation des écrits en grand groupe, la formulation explicite du rôle de la position de chaque chiffre dans un nombre dans notre système usuel.	Comparez vos écrits. Formulez (à l'oral) le mode d'emploi de votre code. Avez-vous tous le même ?
Créer les conditions de la compréhension de l'efficacité du code de numération usuel.	Pouvez-vous maintenant savoir si votre tribu a autant de moutons que les autres tribus ?

Difficultés prévisibles, rôle du maître : *Les élèves positionnent souvent leurs chiffres à côté des dessins dans une organisation non réfléchie. Le maître devra alors imposer d'écrire sur une autre feuille, c'est à ce moment que les problèmes posés par l'interprétation des significations apparaissent lors de la confrontation en grand groupe. La demande d'explicitation par le maître doit être rigoureuse :* « Comment positionnez-vous vos chiffres ? Que signifient-ils ? … »



Il est alors ensuite indispensable de bien prendre le temps de l'institutionnalisation et de faire un choix explicite dans le codage des groupements. Certains élèves peuvent avoir choisi de coder non pas le nombre de groupes, mais la nature des groupes : dans le cas ci-dessus, par exemple 4

4 4 4 désignant le « grand champ » ; 3 le « moyen champ »

3 et 1 les « tout seul »

1 1

Il n'y a donc ici aucune numération de position. Une discussion avec la classe permettra de convenir qu'il est nécessaire d' « utiliser tous le même code » *et qu'il vaut mieux* « utiliser le code qui est partagé par la communauté des adultes depuis très longtemps : on commence par écrire, sur une même ligne, le nombre de « grands champs », à côté le nombre de « moyens champs » et ensuite le nombre de « tout seul ».

Attention : *Bien prendre conscience que la convention d'écriture des nombres est inverse de ce que les élèves de CP sont en train d'apprendre concernant l'écriture du langage. A expliciter au besoin :* « Pour écrire un mot, on écrit les lettres dans l'ordre dans lequel on les entend, de gauche à droite. Pour écrire un nombre, j'écris les « tout seul », puis s'il y a « des moyens champs » isolés, j'en écris le nombre à sa gauche, puis s'il y a des « grands champs », j'en écris le nombre encore à sa gauche. »

<u>4ème Etape :</u> La nécessité de l'introduction du CHIFFRE « 0 »

Permettre de découvrir la nécessité de coder la place de l'absence d'un groupement (ou d'un isolé). *Remettre (par groupe échangeant en duo) : à l'un dix-huit bâtonnets, à l'autre vingt-quatre.* *Les codages correspondants (à retrouver à la fin de la 4ème étape) sont **102** pour dix-huit bâtonnets et **120** pour vingt-quatre bâtonnets.* *NB : ici encore, nous jouons sur la valeur de la variable didactique « nombre de bâtonnets »*	Cette fois, dans notre pays imaginaire, les habitants des tribus ont voulu, très fiers de savoir employer le code que leur a apporté le mathématicien, envoyer un message écrit à la tribu voisine pour comparer le nombre de leur nouveau troupeau de moutons. Vous échangerez vos messages entre deux groupes. Comparez vos écrits puis vérifiez à l'aide de vos bâtonnets votre conclusion.
Permettre la compréhension du rôle du « 0 » dans le code usuel en faisant le lien avec l'écriture connue du « 10 ».	Ne connaissez-vous pas un signe qui permette de noter cette « place vide » ?

DIFFICULTÉS PRÉVISIBLES, RÔLE DU MAÎTRE : *Les élèves sont très étonnés de trouver la même écriture codée pour leurs deux groupes (12) et un nombre de bâtonnets différents (contrôlés pour certains à l'aide de groupements, pour d'autres, plus déstabilisés, par une correspondance terme à terme). Ils pensent s'être trompés en codant. Là encore l'intervention du maître est déterminante. Il s'agit d'insister sur le fait qu'ils ne se sont pas trompés, mais qu'il s'agit* « d'un problème avec le code et qu'il faut trouver un moyen pour lever l'ambiguïté ». *La recherche en groupe ne doit pas se prolonger car il peut arriver que les élèves ne pensent pas au Zéro (0). Il est nécessaire de bien insister, lors de la confrontation collective, sur l'absence de « moyens champs » pour un groupe et l'absence de « tout seul » pour l'autre.* « Le « 0 » est situé à la place du groupement ou des isolés qui n'existent pas. »

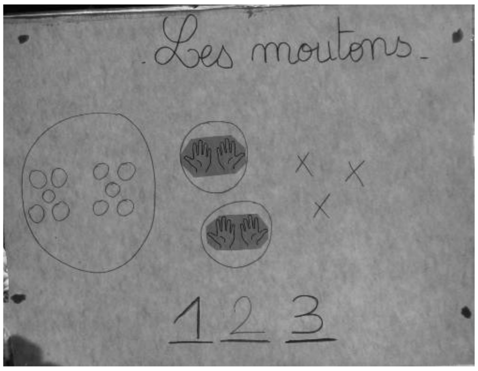
5ème Etape : **La désignation écrite d'une quantité à l'aide des DIX CHIFFRES disponibles**

Créer les conditions de la compréhension de la nécessité des groupements par dix pour permettre le codage d'une quantité supérieure à dix à l'aide des chiffres disponibles. *Contraindre le passage à l'écrit avant tout rappel de la comptine usuelle orale.* *Donner un nombre de bâtonnets en rapport avec l'aisance des élèves (au besoin par duos de groupes d'aisance équivalente) ;(dix-sept, vingt) ; (dix-huit, vingt) ; (vingt-sept, trente) ; etc.… (cent sept, cent dix)…* *Permettre la compréhension de la spécificité du code écrit utilisant les chiffres par rapport au code oral (qui deviendra code écrit en lettres petit à petit).*	Cette fois, dans notre pays imaginaire, les habitants savent compter jusqu'à dix. … Le mathématicien est alors revenu et a complété le code représenté par les chiffres : « 1 » ; « 2 » ; « 3 » ; « 4 » ; « 5 » ; « 6 » ; « 7 » ; « 8 » ; « 9 » ; et le drôle de « 0 ». « 1 » pour désigner « une chose », « 2 » pour désigner « deux choses », « 3 » pour désigner « trois choses », « 4 » pour désigner « quatre choses », etc. Mais attention, le mathématicien, un peu malicieux, les a tous rendus muets… Ecrivez à l'aide de ce code un message qui va permettre de comparer les différents troupeaux des tribus. Les habitants des tribus ont subitement retrouvé l'usage de la parole. Mettez-vous d'accord dans chaque groupe sur une façon de lire votre nombre de moutons. Ne retrouvez-vous pas la possibilité d'utiliser la comptine numérique ?

Il s'agit, à ce stade, d'assurer, pour tous, la compréhension de l'existence d'un code écrit utilisant dix chiffres, fait à partir de groupements par dix. Le « 0 » désigne l'absence d'éléments isolés (dans « 10 » ; « 20 »). La systématisation du système ne peut se faire que lorsque le nombre d'éléments à compter dépasse la centaine, pour permettre une écriture symbolique des groupements d'ordres différents et l'absence de groupements par « 0 » et sera donc un objectif d'apprentissage pour tous en CE1.

Difficultés prévisibles, rôle du maître : *Pour éviter le découragement éprouvé souvent par certains élèves - pourtant capables de gérer une grande quantité de bâtonnets - ou les erreurs de comptage des groupements de dix toujours possibles, il peut-être judicieux de répartir les rôles au sein des groupes en « compteurs » et « contrôleurs ». Certains élèves sont très vite à l'aise et comprennent la récursivité des groupements (au niveau de la structure qui se répète). Pour d'autres, il faudra attendre une nouvelle manipulation avec les groupements par dix (à poursuivre en CE1).*

Note : Le matériel utilisé ici peut être des trombones (réalisation facile de groupes attachés). Ce matériel peut être ensuite repris avec des groupements par dix pour aborder la centaine.



ANNEXE 2

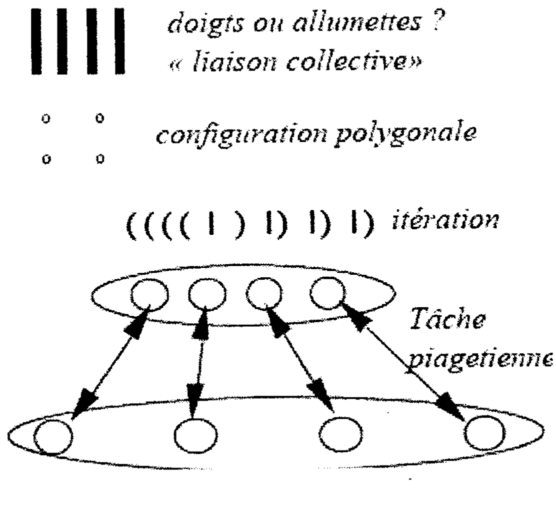
Représentations ICONIQUES Représentations « propres »	Représentations SYMBOLIQUES (chiffres ou mots)
	**4 : SYSTÈME** décimal. **100** : **SYSTÈME** binaire. Ces systèmes de position à base n impliquent ce signe par excellence, « 0 », lequel ne s'entend pas dans l'oralisation de l'écriture symbolique et ouvrent des extensions. **64/16** : écriture fractionnaire. **Quatre :** dénomination verbale dont le sens vient de sa place dans une suite de dénominations.

Figure 2 : Juxtaposition de plusieurs représentations d'un nombre.

Duval, conférence, in Actes du XXXII colloque, 2005, p. 71

REPRÉSENTATIONS SÉMIOTIQUES ET DÉMARCHES MATHÉMATIQUES 73

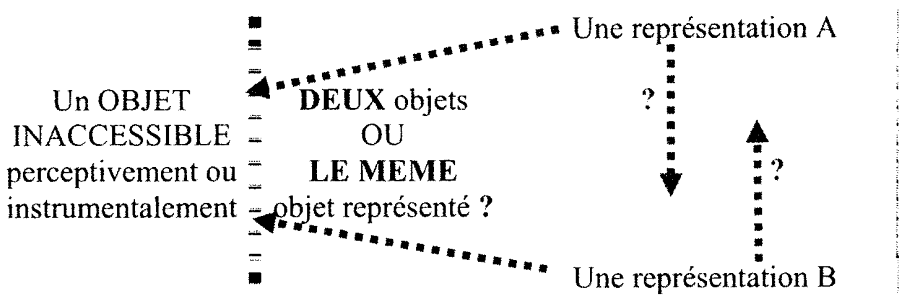


Figure 4 : Quelle reconnaissance en situation d'inaccessibilité non sémiotique ?

Duval, conférence, in Actes du XXXII colloque COPIRELEM, 2005, p. 73

66 La multiplication (1) : produit de deux nombres

Calcul rapide
Trouver la dizaine entière la plus proche.
236 ; 123...

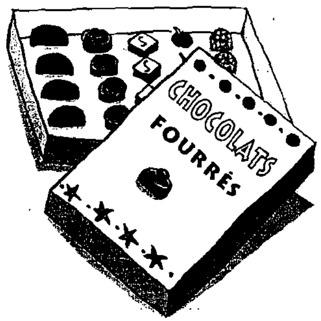
Objectifs – Construire le concept de produit. Écrire un produit sous la forme $a \times b$ et trouver sa valeur.

Date : ____________

Piste de recherche

Une boîte de chocolats

Combien de chocolats contient cette boîte ?

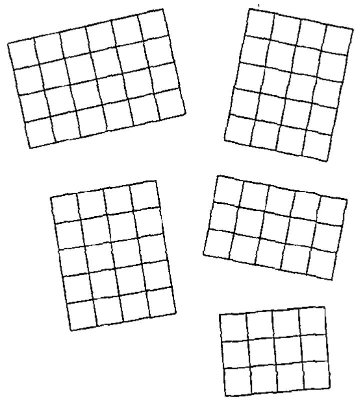


Le nombre de chocolats peut s'écrire 5×4 ou 4×5.

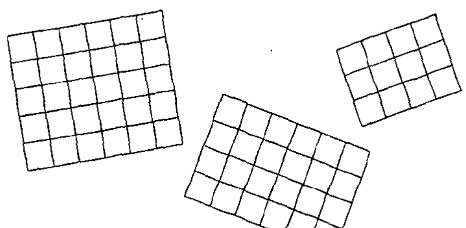
Complète : $5 \times 4 =$ ___ $\times$ ___ $=$ ______

La boîte contient ______ chocolats.

• Colorie les rectangles qui permettent de calculer le nombre de chocolats.



1 Colorie le rectangle qui permet de calculer le nombre de carreaux de ce tapis.



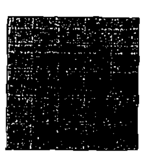
Complète : ___ $\times$ ___ $=$ ___ $\times$ ___ $=$ ______

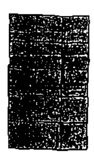
Nombre de carreaux du tapis : ______

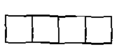
2 Écris et calcule les produits.

___ $\times$ ___ $=$ ___ $\times$ ___ $=$ ______

___ $\times$ ___ $=$ ___ $\times$ ___ $=$ ______







___ $\times$ ___ $=$ ___ $\times$ ___ $=$ ______

___ $\times$ ___ $=$ ______

___ $\times$ ___ $=$ ___ $\times$ ___ $=$ ______

ANNEXE 1

« Pour comprendre les mathématiques », CE1, édition Hachette, 2002, fichier élève et guide pédagogique.

OBJECTIFS – Construire le concept de produit ; écrire un produit sous la forme : a x b et trouver sa valeur.

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES

Nous proposons d'introduire le concept de produit à partir de la résolution d'un problème. Le produit est alors le nom et l'écriture qui exprime la solution de ce problème. Il n'est pas introduit *a priori*, de façon abstraite, mais représente dès le départ un nombre, encore inconnu, que l'on va déterminer et calculer avec les enfants. Il ne faut pas hésiter à consacrer deux journées à cette première leçon sur les produits. Il importe en effet que les enfants mettent du sens sous la notion. La première journée peut être consacrée aux activités collectives, nous en proposons un nombre suffisant pour que l'enseignant dispose d'un choix assez large. La seconde journée porte alors sur les activités individuelles qui sont un bon moyen d'évaluer les compétences acquises par les enfants. Sur la justification de nos choix pédagogiques, se reporter à l'annexe 4 du guide, *Produit de deux nombres, la multiplication*.

CALCUL RAPIDE

Trouver la dizaine entière la plus proche.
Le maître dit : « deux cent trente-six », l'élève écrit « 240 ».
236, 124, 74, 98, 207, 844, 392, 708, 403, 329.

ACTIVITÉS COLLECTIVES

MATÉRIEL

Activité 1.
– Des étiquettes blanches de 4 formes différentes ○ □ △ ◇ une vingtaine par enfant ou groupe d'enfants.
– Pour la classe : quelques boîtes rectangulaires présentant des alvéoles régulièrement espacées pour ranger les objets : boîtes de chocolats, cagettes de fruits...

✦ ACTIVITÉ 1 : COMBIEN DE LOGOS DIFFÉRENTS ?

Les enfants sont répartis en équipes de deux ou trois. Ils sont munis de leur cahier d'essais et de leurs crayons de couleur.

L'enseignant expose le problème : on veut dessiner des logos. Les formes de ceux-ci sont imposées : ce sont des carrés, des triangles, des ronds et des couronnes. Ils sont de couleurs rouge, noir, bleue, verte ou blanche. On voudrait savoir combien de logos différents on peut fabriquer et s'il y en a suffisamment pour en attribuer un à chaque enfant de la classe.

Il pose quelques questions pour s'assurer que tous les enfants ont compris la situation :

« *Que sont ces logos ? Qui peut en dessiner un au tableau ? De combien de couleurs dispose-t-on ? De combien de formes ?* »

Après quelques minutes de recherche, les enfants présentent leurs résultats. En général, les différentes équipes n'ont pas trouvé le même nombre, faute de méthode de travail rationnelle. L'enseignant organise alors la discussion. Il y a 4 formes et 5 couleurs. Ces nombres sont importants, si on les change, on ne trouvera pas le même nombre de logos. Il propose d'une part de noter le nombre inconnu de logos 4 x 5 ou 5 x 4, au choix, et induit la mise en ordre des logos : une forme et une couleur permettent de fabriquer un seul logo. On a déjà rencontré ce genre de situation : le tableau à double entrée est un bon outil pour trouver tous les logos sans oubli et sans répétition (*cf.* les leçons 32 et 33). Les enfants reprennent leur recherche. On trouve que le nombre de logos est 20. Selon l'effectif de la classe, il manquera ou non des logos. L'enseignant introduit alors le vocabulaire **produit de deux nombres**, la notation 5 x 4 = 4 x 5 et définit ce produit comme le nombre de cases d'un tableau à double entrée ayant le nombre correspondant de lignes et de colonnes.

✦ ACTIVITÉ 2 : LE BAL MASQUÉ

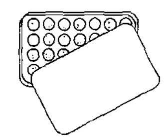
L'enseignant présente la situation-problème suivante. « *Pour Mardi gras, Lucile, Sophie, Lydia, Océane, Clément, Adrien et Julien se sont déguisés. Chaque garçon doit danser avec chaque fille et chaque couple se fait photographier. Combien de photos va-t-on obtenir ?* »

Les enfants sont répartis en groupes de sept ou huit de façon à pouvoir mimer la situation, un ou deux enfants selon l'effectif de la classe jouant le photographe. Ils doivent ensuite noter leurs découvertes. Souvent, les enfants ne prennent en compte que les photos où ils figurent, du moins dans un premier temps, certaines peuvent être comptées deux fois (Sophie-Julien et Julien-Sophie). L'enseignant leur demande de ranger leurs « photos » de façon qu'il n'y ait ni oubli ni répétition.

Au moment de la synthèse, chaque groupe vient expliquer sa démarche et les résultats auxquels il est parvenu. Si les enfants ne l'ont pas proposé, l'enseignant montre que le tableau à double entrée est l'outil adéquat : Sophie a toutes ses photos en ligne et Julien les siennes en colonne ou vice-versa. Il introduit le vocabulaire et les écritures : **le produit des nombres 4 et 3 est le nombre de cases d'un tableau à 4 lignes et 3 colonnes ou, ce qui revient au même, de trois lignes et 4 colonnes. On note ce nombre 4 x 3 = 3 x 4.**

✦ ACTIVITÉ 3 : PISTE DE RECHERCHE « UNE BOÎTE DE CHOCOLATS »

Phase 1. Les boîtes sont disposées devant les enfants, en partie cachées par leur couvercle, mais laissant voir les alvéoles sur deux côtés adjacents. Par exemple :



L'enseignant demande aux enfants combien de chocolats (ou de fruits...) la boîte peut contenir. Les enfants comptent les alvéoles sur chaque côté, ces nombres sont écrits au tableau. Les enfants verbalisent : il y a 4 rangées de 7 alvéoles ; il y a 7 rangées de 4 alvéoles. L'enseignant introduit le mot **produit**. Le nombre d'alvéoles est le produit : 4 x 7 = 7 x 4. Les enfants le calculent par la méthode de leur choix : dessin de la boîte sans son couvercle, somme réitérée 7 + 7 + 7 + 7 ou 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4.

Phase 2. Les enfants lisent le texte de la piste de recherche et observent le dessin. Ils retrouvent une situation analogue à celle que l'enseignant vient de leur proposer. Celui-ci s'assure que les enfants interprètent les quadrillages de la partie droite comme des modèles de la boîte vide et sans couvercle. Seuls les quadrillages en haut à droite et en bas à gauche sont des modèles convenables : (4 x 5 = 5 x 4). Il est facile de compter le nombre de leurs cases. Les enfants renseignent enfin leur fichier.

ANNEXE 1

« Pour comprendre les mathématiques », CE1, édition Hachette, 2002, fichier élève et guide pédagogique.

66 La multiplication (1) : produit de deux nombres

Calcul rapide *Trouver la dizaine entière la plus proche.* 236 ; 123...

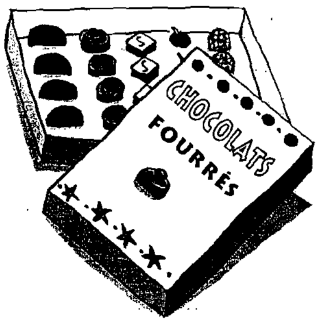
Objectifs – Construire le concept de produit. Écrire un produit sous la forme $a \times b$ et trouver sa valeur.

Date : ____________

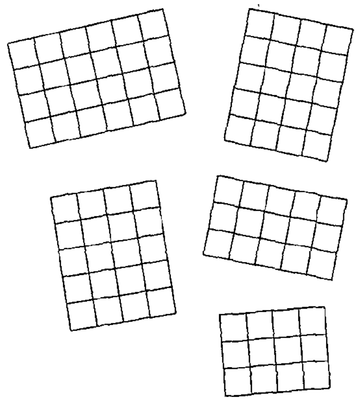
Piste de recherche

Une boîte de chocolats

Combien de chocolats contient cette boîte ?



• Colorie les rectangles qui permettent de calculer le nombre de chocolats.

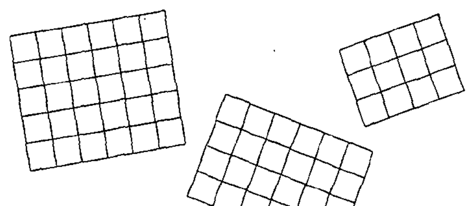


Le nombre de chocolats peut s'écrire 5 × 4 ou 4 × 5.

Complète : 5 × 4 = ___ × ___ = ______

La boîte contient ______ chocolats.

1 Colorie le rectangle qui permet de calculer le nombre de carreaux de ce tapis.



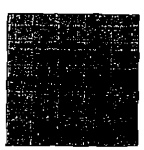
Complète : ___ × ___ = ___ × ___ = ______

Nombre de carreaux du tapis : ______

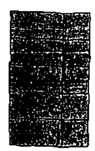
2 Écris et calcule les produits.

___ × ___ = ___ × ___ = ______

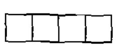
___ × ___ = ___ × ___ = ______



___ × ___ = ___ × ___ = ______



___ × ___ = ______



___ × ___ = ___ × ___ = ______

Objectifs – Construire le concept de produit ; écrire un produit sous la forme : a x b et trouver sa valeur.

Observations préliminaires

Nous proposons d'introduire le concept de produit à partir de la résolution d'un problème. Le produit est alors le nom et l'écriture qui exprime la solution de ce problème. Il n'est pas introduit *a priori*, de façon abstraite, mais représente dès le départ un nombre, encore inconnu, que l'on va déterminer et calculer avec les enfants. Il ne faut pas hésiter à consacrer deux journées à cette première leçon sur les produits. Il importe en effet que les enfants mettent du sens sous la notion. La première journée peut être consacrée aux activités collectives, nous en proposons un nombre suffisant pour que l'enseignant dispose d'un choix assez large. La seconde journée porte alors sur les activités individuelles qui sont un bon moyen d'évaluer les compétences acquises par les enfants. Sur la justification de nos choix pédagogiques, se reporter à l'annexe 4 du guide, *Produit de deux nombres, la multiplication.*

Calcul rapide

Trouver la dizaine entière la plus proche.
Le maître dit : « deux cent trente-six », l'élève écrit « 240 ».
236, 124, 74, 98, 207, 844, 392, 708, 403, 329.

ACTIVITÉS COLLECTIVES

MATÉRIEL

Activité 1.
– Des étiquettes blanches de 4 formes différentes : une vingtaine par enfant ou groupe d'enfants.
– Pour la classe : quelques boîtes rectangulaires présentant des alvéoles régulièrement espacées pour ranger les objets : boîtes de chocolats, cagettes de fruits...

✦ Activité 1 : Combien de logos différents ?

Les enfants sont répartis en équipes de deux ou trois. Ils sont munis de leur cahier d'essais et de leurs crayons de couleur.

L'enseignant expose le problème : on veut dessiner des logos. Les formes de ceux-ci sont imposées : ce sont des carrés, des triangles, des ronds et des couronnes. Ils sont de couleurs rouge, noir, bleue, verte ou blanche. On voudrait savoir combien de logos différents on peut fabriquer et s'il y en a suffisamment pour en attribuer un à chaque enfant de la classe.

Il pose quelques questions pour s'assurer que tous les enfants ont compris la situation :

« Que sont ces logos ? Qui peut en dessiner un au tableau ? De combien de couleurs dispose-t-on ? De combien de formes ? »

Après quelques minutes de recherche, les enfants présentent leurs résultats. En général, les différentes équipes n'ont pas trouvé le même nombre, faute de méthode de travail rationnelle. L'enseignant organise alors la discussion. Il y a 4 formes et 5 couleurs. Ces nombres sont importants, si on les change, on ne trouvera pas le même nombre de logos. Il propose d'une part de noter le nombre inconnu de logos 4 x 5 ou 5 x 4, au choix, et induit la mise en ordre des logos : une forme et une couleur permettent de fabriquer un seul logo. On a déjà rencontré ce genre de situation : le tableau à double entrée est un bon outil pour trouver tous les logos sans oubli et sans répétition (*cf.* les leçons 32 et 33). Les enfants reprennent leur recherche. On trouve que le nombre de logos est 20. Selon l'effectif de la classe, il manquera ou non des logos. L'enseignant introduit alors le vocabulaire **produit de deux nombres**, la notation 5 x 4 = 4 x 5 et définit ce produit comme le nombre de cases d'un tableau à double entrée ayant le nombre correspondant de lignes et de colonnes.

✦ Activité 2 : Le bal masqué

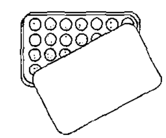
L'enseignant présente la situation-problème suivante. *« Pour Mardi gras, Lucile, Sophie, Lydia, Océane, Clément, Adrien et Julien se sont déguisés. Chaque garçon doit danser avec chaque fille et chaque couple se fait photographier. Combien de photos va-t-on obtenir ? »*

Les enfants sont répartis en groupes de sept ou huit de façon à pouvoir mimer la situation, un ou deux enfants selon l'effectif de la classe jouant le photographe. Ils doivent ensuite noter leurs découvertes. Souvent, les enfants ne prennent en compte que les photos où ils figurent, du moins dans un premier temps, certaines peuvent être comptées deux fois (Sophie-Julien et Julien-Sophie). L'enseignant leur demande de ranger leurs « photos » de façon qu'il n'y ait ni oubli ni répétition.

Au moment de la synthèse, chaque groupe vient expliquer sa démarche et les résultats auxquels il est parvenu. Si les enfants ne l'ont pas proposé, l'enseignant montre que le tableau à double entrée est l'outil adéquat : Sophie a toutes ses photos en ligne et Julien les siennes en colonne ou vice-versa. Il introduit le vocabulaire et les écritures : le **produit des nombres** 4 et 3 est le nombre de cases d'un tableau à 4 lignes et 3 colonnes ou, ce qui revient au même, de trois lignes et 4 colonnes. On note ce nombre 4 x 3 = 3 x 4.

✦ Activité 3 : Piste de recherche « Une boîte de chocolats »

Phase 1. Les boîtes sont disposées devant les enfants, en partie cachées par leur couvercle, mais laissant voir les alvéoles sur deux côtés adjacents. Par exemple :



L'enseignant demande aux enfants combien de chocolats (ou de fruits...) la boîte peut contenir. Les enfants comptent les alvéoles sur chaque côté, ces nombres sont écrits au tableau. Les enfants verbalisent : il y a 4 rangées de 7 alvéoles ; il y a 7 rangées de 4 alvéoles. L'enseignant introduit le mot **produit**. Le nombre d'alvéoles est le produit : 4 x 7 = 7 x 4. Les enfants le calculent par la méthode de leur choix : dessin de la boîte sans son couvercle, somme réitérée 7 + 7 + 7 + 7 ou 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4.

Phase 2. Les enfants lisent le texte de la piste de recherche et observent le dessin. Ils retrouvent une situation analogue à celle que l'enseignant vient de leur proposer. Celui-ci s'assure que les enfants interprètent les quadrillages de la partie droite comme des modèles de la boîte vide et sans couvercle. Seuls les quadrillages en haut à droite et en bas à gauche sont des modèles convenables : (4 x 5 = 5 x 4). Il est facile de compter le nombre de leurs cases. Les enfants renseignent enfin leur fichier.

ANNEXE 2

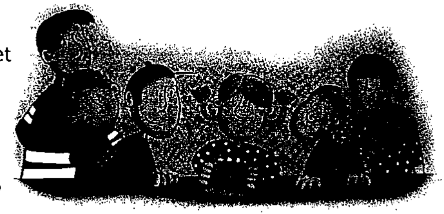
138 Situations de distribution (1)

Calcul rapide
Moitié d'un nombre de deux chiffres.
32 ; 50 ; 66....

Objectifs – Reconnaître une situation de division euclidienne.
Calculer empiriquement le quotient et le reste.

Piste de recherche

Des nougats



Amélie a rapporté de voyage un paquet de 32 nougats. Elle les distribue à ses 5 frères et sœurs.
Chacun reçoit le même nombre de nougats.
Combien de nougats chacun reçoit-il ?
Combien de nougats Amélie ne peut-elle pas distribuer ?

a) Reproduis les trois dernières lignes du tableau, puis complète-les.

b) Recopie et complète l'égalité suivante :
32 = (5 x ....) + ...

c) Rédige les réponses aux questions.

Nombre de nougats donnés à chaque enfant	Nombre de nougats distribués	Nombre de nougats restants
1	5 x 1 = 5	32 – 5 = 27
2	5 x 2 = 10	32 – 10 = 22
3	5 x 3 = 15	32 – 15 = 17
4	5 x 4 =	
5		
6		

Tu as divisé 32 par 5 ; 5 est le **diviseur**, 6 est le **quotient**, 2 est le **reste**.

1 Joris range ses 50 soldats dans 8 boîtes. Chaque boîte doit contenir le même nombre de soldats.
a) Combien de soldats contient chaque boîte ?
b) Tous les soldats sont-ils rangés ?

2 Le pirate Barberousse partage équitablement un sac de 47 écus entre ses 6 compagnons.
a) Combien chacun recevra-t-il ?
b) Si Barberousse ajoute un écu, combien aura alors chacun de ses compagnons ?

3 Émilie a acheté une boîte de 64 perles. Elle veut fabriquer 9 bracelets identiques.
a) Combien de perles chaque bracelet aura-t-il ?
b) Combien de perles restera-t-il ?

4 Aurélie possède 56 images d'insectes. Elle les distribue équitablement aux 10 enfants de son club de nature. Elle garde le reste.
a) Combien d'images chaque enfant reçoit-il ?
b) Combien d'images Aurélie garde-t-elle ?

5 Calcul réfléchi
Observe l'exemple, puis calcule.
26 x 4 = (26 x 2) x 2 = 52 x 2 = 104
17 x 4 35 x 4 28 x 4 87 x 4 115 x 4

« Pour comprendre les mathématiques », CE2, édition Hachette, 2002, fichier élève et guide pédagogique.

<u>Présentation de l'organisation de la classe prévue par les auteurs, dans le guide pédagogique correspondant</u>.
Deux séances sont prévues :
1re séance
Les enfants travaillent directement sur l'activité de la piste de recherche de leur fichier : après avoir pris connaissance du texte, le maître s'assure de la bonne compréhension de l'énoncé et répartit les élèves par groupe de 4. Dans chaque groupe les enfants doivent répondre aux questions de l'énoncé, sans tenir compte du tableau de droite. Les équipes ont à leur disposition des jetons représentant les frères et sœurs d'Amélie et des bûchettes représentant les nougats. En fin de travail un représentant de chaque groupe vient au tableau présenter les résultats de son équipe.
Le tableau à droite de la piste de recherche est reproduit au tableau, collectivement il est complété en « synthèse du travail des enfants ». Individuellement les enfants répondent à la question a) et aux questions de l'énoncé de la piste de recherche. Puis collectivement l'enseignant demande de répondre à la question b) et introduit le vocabulaire « diviseur », « quotient » et « reste ».
Les exercices 1 à 5 sont traités individuellement ou en petits groupes. L'enseignant s'assure collectivement que les énoncés sont bien compris. La correction de chacun, collective, est l'occasion d'exposer les différentes méthodes de calculs utilisés. Ils peuvent utiliser un tableau comme celui de la piste de recherche, dessiner la situation ou écrire directement l'égalité de la division. Dès l'exercice 2 l'enseignant attire l'attention sur l'expression « partage équitable ».

2^{e} séance
Les enfants travaillent directement sur l'activité de la piste de recherche de leur fichier : le tableau a été reproduit par le maître sur le tableau de la classe, les enfants lisent individuellement la description de la situation proposée puis une discussion collective a lieu autour de deux questions : « que peut bien vouloir dire « grand père a triché » ? » et « quel est le mot important pour comprendre la situation ? », (équitable).
L'enseignant peut faire mimer la situation en cas de difficultés. Une fois la compréhension de la situation assurée, le maître demande ce qui se passe le jeudi. La réponse attendue est : « Grand père n'a pas fait d'erreur de calcul. Il a triché en ne distribuant pas jusqu'au bout ses poires le jeudi et le samedi ».
A la suite de cela le maître précise que « le reste d'une division est toujours inférieur au diviseur ».
Individuellement ou par groupes de 3 ou 4 les élèves résolvent les exercices 1 et 2. Le maître s'assure au préalable que les énoncés sont correctement compris et la correction est collective après mise en forme des résultats.

4e période

Dominantes de la période
Arithmétique : calcul réfléchi de la division.
Géométrie et mesure : construction de figures, les aires, les masses.

ANNEXE 3

Tu vas apprendre à calculer la division de 163 par 25 (163 : 25 ?).

Vérifie que L = 163 mm et ℓ = 25 mm.

L

ℓ

163 = (25 x .....) + ...

Vérifie le nombre de fois et le reste avec ton compas et ton double décimètre.

J'ai appris

Diviser 163 par 25 (163 : 25) c'est chercher **deux nombres** :
1°) Combien de fois il y a 25 dans 163, ce nombre s'appelle le **quotient (q)**.
2°) Le **reste (r)**.

163 : 25 ? q = 6 ← *c'est le nombre de fois*
r = 13 ← *c'est le reste.* car 163 = (25 x 6) + 13

Attention : quand on divise par 25, le reste est obligatoirement plus petit que 25.

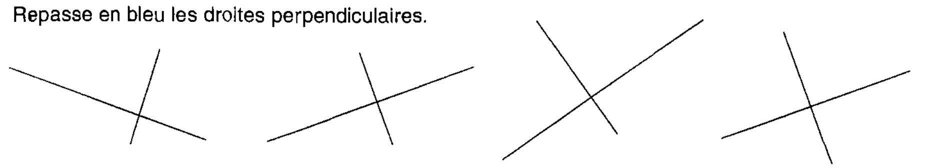
A

Calcule ces divisions. Si tu n'es pas sûr(e), tu peux tracer les segments correspondants sur ton cahier.

107 : 25 ?	q = ... r = ...	car 107 = (25 x ....) + ...	199 : 25 ?	q = ... r = ...	car ....
108 : 25 ?	q = ... r = ...	car 108 = (25 x ....) + ...	200 : 25 ?	q = ... r = ...	car ....
175 : 25 ?	q = ... r = ...	car 175 = (25 x ....) + ...	201 : 25 ?	q = ... r = ...	car ....
29 : 25 ?	q = ... r = ...	car	253 : 25 ?	q = ... r = ...	car ....
80 : 25 ?	q = ... r = ...	car	18 : 25 ?	q = ... r = ...	car ....

B

Repasse en bleu les droites perpendiculaires.



C

A et B La division est introduite dans son sens "division-groupement" (la "division-partage" sera abordée p.108). Le point de départ est un problème

« J'apprends les maths », CE2, édition Retz, 2001, fichier élève et guide pédagogique

<u>Présentation de l'organisation de la classe prévue par les auteurs, dans le livre du maître correspondant, pour travailler sur la fiche 96.</u>

Le maître débute la leçon en annonçant l'étude d'une nouvelle opération. Les auteurs proposent un discours du genre ; « Vous connaissez déjà l'addition, la soustraction, la multiplication, vous allez apprendre la division », tout en écrivant 163 ÷ 25 au tableau qu'il lit « on va calculer 163 ÷ 25 ».

La leçon se déroule en quatre phases :

1re phase (appelée « Anticipation »)

Les élèves prennent connaissance de la situation décrite dans le cadre A du fichier. D'après les auteurs, c'est une situation qui est familière aux enfants : ils savent qu'il faut chercher « combien de fois la petite longueur est contenu dans la grande ». Ici ce qui est nouveau est la donnée de longueurs L = 163 mm et l = 25 mm. Dans un débat collectif, on fait émerger qu'il n'y a pas besoin d'utiliser un compas, qu'il suffit de « chercher combien de fois il y a 25 dans 163 » ; le maître précise, si besoin est, qu'on cherche aussi « s'il reste une longueur et combien de millimètres elle mesure » puis il annonce que « quand on cherche combien de fois il y a 25 dans 163 et combien il reste, on fait la division de 163 par 25 ». On peut faire la division et vérifier que l'on trouve ce qu'on aurait trouvé avec le compas.

2e phase (appelée « Calcul et écriture du résultat »)

Au cours d'un débat collectif, les enfants trouvent qu'il y a 6 fois 25 dans 163 et qu'il reste 13. Le maître écrit 163 = (25 × 6) + 13 sous 163 ÷ 25. Cette égalité est comparée à celle qui aurait été écrite avec le compas L = (l × 6) + *r*, la valeur de *r* est discutée, on remarque que dans cette opération, contrairement aux autres opérations, on trouve deux nombres, les termes de quotient et de reste sont introduits. D'autres exemples peuvent être traités. L'encadré « J'ai appris » peut être utilisé à ce moment.

3e phase (appelée « Vérification avec compas et double décimètre »)

Le travail habituel est conduit avec le compas pour découper le grand segment et le reste est mesuré avec le double décimètre.

4e phase (appelée « Un autre problème et d'autres divisions »)

L'enseignant propose un problème analogue au précédent avec un segment d'une autre longueur, par exemple L = 191 cm et l = 25 cm. Après avoir écrit 191÷ 25 au tableau le maître demande le quotient *q* et le reste *r*. Les expressions utilisées précédemment sont reprises (on cherche combien de fois 25 dans 191 et combien il restera). Les élèves cherchent individuellement. L'écriture 191 = (25 × 7) + 16 justifie la réponse puis on vérifie au compas et au mètre au tableau.

D'autres divisions par 25 sont proposées collectivement avec des cas particuliers, comme un reste égal à 24 ou un quotient nul. Les deux premiers exercices du cadre B sont traités collectivement les autres individuellement.

Présentation de l'organisation de la classe prévue par les auteurs, dans le livre du maître correspondant, pour travailler sur la fiche 97.

Le même schéma que dans la séance précédente est préconisé : on annonce « explicitement le but de la séance », que l'on va anticiper par le calcul et vérifier avec le compas.

Si l'erreur correspondant à un reste supérieur au diviseur se produit, on peut avoir recours au problème géométrique pour expliquer ce qui se passe.

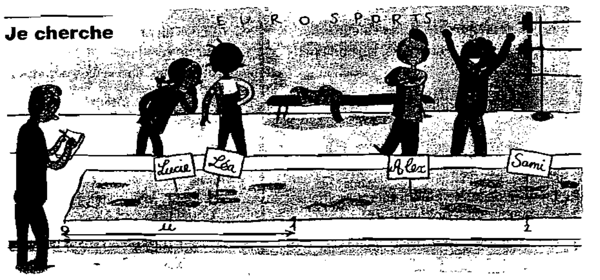
Des divisions par 5 peuvent être proposées en prolongement, (jusqu'à 12 × 5).

« Place aux maths ! », CM1, éditions Bordas, 2004, fichier élève

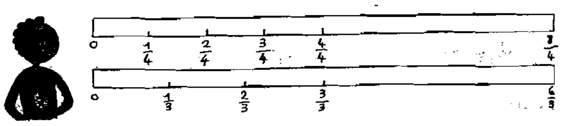
22 Les fractions (1)

Jeu de calcul : Portrait d'un nombre.

Je cherche



A. Léa, Lucie, Alex et Sami veulent mesurer la longueur de leur saut. Pour cela, ils ne disposent que de l'unité *u*. Sami a une bonne idée : il faut **partager** l'unité *u*.



Que peux-tu dire de $\frac{3}{3}$ et de $\frac{4}{4}$? de $\frac{8}{4}$ et de $\frac{6}{3}$?

$\frac{1}{3}$ *(un tiers)*, $\frac{2}{3}$ *(deux tiers)*, $\frac{3}{4}$ *(trois quarts)*, *sont des* ***fractions***.

B. Sur du papier calque, reproduis les deux instruments de mesure que Sami a fabriqués, puis utilise-les pour mesurer, sur l'image, la longueur des quatre sauts. Inscris ces mesures de longueur dans un tableau, puis range-les par ordre croissant.

Lucie	Léa	Alex	Sami
$\frac{2}{4}$ u	$\frac{2}{3}$ u		

Compare ton tableau avec celui de tes camarades. Avez-vous tous indiqué les mesures de la même façon pour les sauts d'Alex et de Sami ?

C. Trouve d'autres nombres pour exprimer la longueur des sauts de Lucie et de Léa.

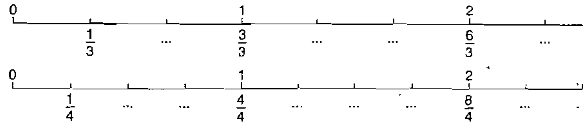
Lucie : $\frac{2}{4} = \frac{...}{2} = \frac{...}{8}$ Léa : $\frac{2}{3} = \frac{...}{6}$

D. Comment sont les fractions égales à 1 ? égales à 2 ?

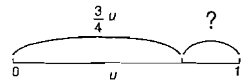
OBJECTIFS : • Utiliser les fractions pour mesurer des longueurs • Comparer des fractions

Je m'exerce

1. Reproduis et complète.



2. À son deuxième essai, Lucie fait un saut de $\frac{3}{4}$ d'unité. Que lui manque-t-il pour arriver à l'unité 1 ?

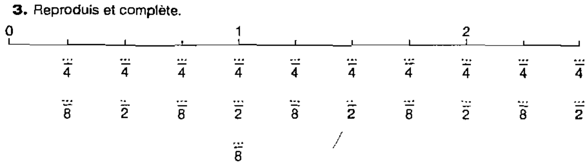


Complète.

$\frac{3}{4} + \frac{...}{...} = 1$ $\frac{5}{8} + \frac{...}{...} = 1$ $\frac{2}{3} + \frac{...}{...} = 1$ $\frac{1}{2} + \frac{...}{...} = 1$

$\frac{5}{4} + \frac{...}{...} = 2$ $\frac{7}{4} + \frac{...}{...} = 2$ $\frac{4}{3} + \frac{...}{...} = 2$ $\frac{3}{2} + \frac{...}{...} = 2$

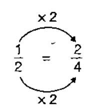
3. Reproduis et complète.



Parmi ces fractions, trouve celles qui sont plus grandes que 1, puis celles qui sont plus petites que 1.

Je calcule

• $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ car



• Complète :

$\frac{1}{3} = \frac{...}{6} = \frac{...}{9} = \frac{...}{...}$ $\frac{1}{4} = \frac{...}{8} = \frac{...}{12} = \frac{...}{...}$ $\frac{6}{8} = \frac{...}{4} = \frac{...}{...} = \frac{...}{...}$

ANNEXE 4

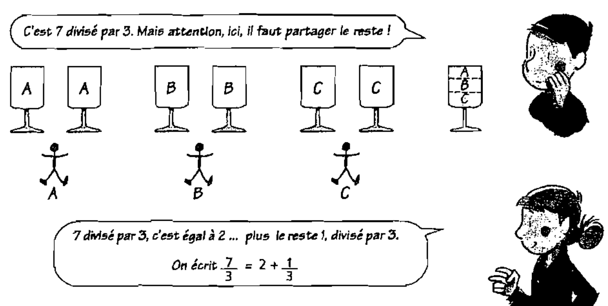
Troisième période

Arithmétique : la division-fraction ; les fractions (comparaisons, sommes) ; la technique écrite de la division (2e étape) ; la proportionnalité.
Géométrie et mesure : triangles ; parallélogrammes quelconques et particuliers ; aires.

Je découvre

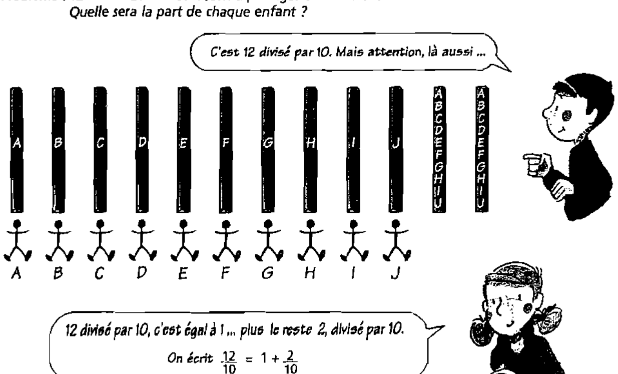
1 *Tu vas apprendre une nouvelle division, celle où l'on partage le reste.*

Problème : 7 verres de jus d'orange sont à partager entre 3 enfants.
Quelle sera la part de chaque enfant ?



Et s'il fallait partager 10 verres entre 3 enfants ? Écris l'égalité correspondante.

2 Problème : 12 barres de chocolat sont à partager entre 10 enfants.
Quelle sera la part de chaque enfant ?



Et s'il fallait partager 24 barres de chocolat entre 10 enfants ? Écris l'égalité correspondante.
Et s'il fallait partager 123 barres de chocolat entre 10 enfants ? Écris l'égalité correspondante.

1 à 5 L'écriture 7/3 désigne à la fois la division de 7 par 3 et la fraction « 7 tiers ». De sérieux arguments plaident en faveur d'une introduction de l'écriture *a*/*b* dans le sens « *a* divisé par *b* » (voir p. 4 et 5). Dans cette séquence, et jusqu'à la sq n° 61, on lira donc les écritures 7/3, 12/10, etc.,

SÉQUENCE **58** **Une nouvelle division et de nouveaux nombres**

Calculs proposés par écrit au tableau
1. Divisions par 2 de *n* < 200 (voir p. 11).
2. Divisions par 3, 4... dans des cas (ceux de la sq n° 55) où *q* = 10, 25, 50, 100..

3 Problème : 13 tartelettes sont à partager équitablement entre 4 personnes.
Quelle sera la part de chaque personne ?

Dessine les tartelettes et effectue le partage. Écris l'égalité correspondante.

J'ai appris

$\frac{17}{3}$ se lit « 17 divisé par 3 » (tu apprendras bientôt une autre façon de le lire).
C'est une nouvelle division, la **division-fraction**, où l'on partage le reste.
Avec cette division, on peut écrire une égalité :

c'est le quotient de la division avec reste...
$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$ *... mais le reste a été partagé.*

4 Calcule ces divisions-fractions.

$\frac{561}{4}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{52}{10}$ $\frac{25}{6}$ $\frac{702}{100}$

$\frac{103}{25}$ $\frac{109}{3}$ $\frac{35}{8}$ $\frac{4\,258}{5}$ $\frac{7\,041}{1\,000}$

5 **Problèmes**

Résous ces problèmes en indiquant si tu utilises la division avec reste ou la division-fraction.

1 ▶ On partage 7 brioches en 2 parts égales.
Combien de brioches y a-t-il dans chaque part ?

2 ▶ On répartit équitablement 13 billes entre 4 enfants.
Combien de billes aura chaque enfant ?

3 ▶ On partage équitablement 14 pains au lait entre 5 enfants.
Quelle sera la part d'un enfant ?

4 ▶ On partage équitablement 26 gaufrettes entre 3 frères.
Combien de gaufrettes chacun aura-t-il ?

ANNEXE 5

« J'apprends les maths », CE2, édition Retz, 2001, fichier élève

Gérer la résolution des problèmes, non pas seulement pour chercher, mais aussi et avant tout… pour apprendre des mathématiques

Annie NOIRFALISE [1]

IREM de Clermont Ferrand et ICFP Auvergne Limousin

A. Introduction

L'élaboration et la mise en œuvre de travaux de formation initiale et continue de professeurs d'école[2] ont été l'occasion de rassembler les matériaux sur lesquels s'appuie cet article.
Les analyses faites dans cette perspective, sur l'ensemble des thèmes abordés à l'école primaire, d'extraits d'ouvrages de collections variées, font apparaître des difficultés récurrentes, objet de notre propos, liées à l'utilisation de **« problèmes pour apprendre »** ; en particulier de problèmes pour la **« construction d'une nouvelle connaissance ».**

Ces analyses didactiques d'extraits d'ouvrages scolaires sont motivées, dans le cadre des formations évoquées, par les faits suivants :

- la grande majorité des professeurs d'école conduisent les études mathématiques dans leur classe en ayant essentiellement recours aux éléments d'organisation didactique donnés dans un ouvrage scolaire, (livret élève et quelques fois livre maître correspondant) ; les charges considérables qui leur incombent les obligent à limiter le temps de préparation dans chaque discipline étudiée,
- l'analyse de plusieurs de ces documents montre que néanmoins un travail important devrait être fait avant la séquence, par l'enseignant, pendant la séquence par l'enseignant et les élèves, et après la conduite de la séquence, afin que les différentes

[1] Cette contribution a été rédigée en collaboration avec Yves MATHERON, INRP, UMR-ADEF Marseille.
[2] L'ensemble des éléments élaborés, constituant un programme complet de formation de professeurs d'Ecoles, est rassemblé dans un ouvrage à paraître MATHERON Yves et NOIRFALISE Annie, (2008).

études conduites par le collectif maître/élèves en mathématiques, s'articulent en un tout cohérent afin que cette cohérence, elle-même, soit accessible aux élèves.

- ces analyses ne visent, en aucune façon, la dévalorisation du travail des auteurs d'ouvrages qui sont, eux aussi, soumis à des contraintes. Il s'agit, au contraire, de proposer en formation des outils pouvant permettre aux professeurs d'école d'utiliser quotidiennement, et de meilleure façon, les documents mis à leur disposition par les auteurs.

Les matériaux sur lesquels nous nous appuyons sont des analyses didactiques essentiellement conduites dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique[3]. Pour les lecteurs non familiers de l'usage de cette théorie, précisons que dans cet article, nous n'utilisons essentiellement, dans ce qui suit, qu'un nombre restreint des éléments théoriques qui la constitue : ceux utiles à la compréhension de notre propos.

Précisons tout d'abord que, dans un tel cadre, un objet mathématique n'existe jamais en soi. Si l'on prend l'exemple de la division euclidienne, parmi les diverses pratiques la mettant en jeu, on trouvera des déclarations que l'on range sous la rubrique définition : « on appelle division de l'entier a par l'entier b … », déclaration qui est une activité consistant à donner une définition. On pourra aussi calculer, d'une façon ou d'une autre, le reste et le quotient d'un entier par un autre, étudier ou utiliser les propriétés du reste et du quotient, etc. Mais on ne « mettra jamais la main » sur l'objet division euclidienne lui-même. Tout seul il n'existe pas, mais il n'existe qu'inséré dans des activités : par exemple, définir, calculer, déterminer des propriétés, etc., dont on a décidé qu'elles évoquaient, plus ou moins directement, la division euclidienne. Ce que nous appelons « division euclidienne » est, en fait, l'ensemble de toutes ces pratiques dont on ne saurait, toutefois, dresser un répertoire exhaustif.

Poursuivant l'exemple de la division euclidienne, étudier un objet mathématique revient à étudier un type de tâches dont on donne dans ce qui suit quelques occurrences : déterminer le montant de chaque part ou le nombre de parts dans des situations de partage ou de distribution équitables, calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres).

---

[3] Nous nous référons à la théorie didactique développée par Yves Chevallard et les didacticiens qui se réclament de cette approche. On pourra se reporter à la bibliographie de référence (Chevallard 1998 & 1999, Matheron & Noirfalise 200X, Cirade 2006).

Ce type de tâches peut être accompli grâce à une ou plusieurs techniques – ce terme signifiant étymologiquement « qui concerne un art ». Il s'agit, dans notre exemple et plus prosaïquement, d'une manière de faire : par un calcul posé, un partage effectif, un encadrement entre deux multiples consécutifs du diviseur, etc. Une technique répond à la question « Comment accomplir les tâches de ce type ? » On sait historiquement que depuis les Grecs, et en rupture avec les mathématiques développées par les Babyloniens et les Egyptiens, se limiter à l'usage de techniques permettant de résoudre certains problèmes n'est plus considéré, en Occident tout d'abord puis au niveau international, comme une pratique mathématique qui se suffirait à elle-même. Dans l'histoire de l'humanité, les mathématiques ne sont pas regardées, depuis plus de 2000 ans, comme une pratique qui consisterait à appliquer des « recettes », mais comme un savoir fondé en raison.

Aussi, les techniques mathématiques peuvent-elles être décrites, et leur adéquation à l'accomplissement d'un type de tâches donné peut-elle être justifiée par un discours, que l'on nomme technologique en recourrant pour cela à l'étymologie de ce terme constitué à l'aide de « logos » qui signifie « parole » ou « raison » ; la technologie désigne ainsi le discours raisonné tenu sur la technique. A son tour, la technologie d'une technique peut être justifiée dans le cadre d'une théorie mathématique. Ce dernier terme, emprunté à un verbe grec qui signifiait « observer, contempler », a pris en latin le sens de « spéculation » ou de « recherche spéculative ». L'élément théorique peut être de nature mathématique ou relever du recours au bon sens, à l'ordre des choses qui se font. L'ensemble des quatre éléments constitué d'un type de tâches, d'une technique permettant de l'accomplir, d'une technologie associée à la technique, et d'une théorie, définit une organisation praxéologique. Pour un type de tâches donné, une telle organisation dépend évidemment de l'institution dans laquelle on l'accomplit et où une praxéologie peut être partiellement incomplète. Dans le vaste champ des praxéologies de toutes natures, nous ne nous intéressons pour cet article qu'aux praxéologies de deux types. Les praxéologies mathématiques, soit ce que l'on nomme des organisations mathématiques, telles qu'elles se présentent à l'issue du processus de transposition didactique, ainsi que les praxéologies qui permettent de les mettre en place dans les classes, de les faire rencontrer et étudier par les élèves, soit ce que l'on nomme des organisations didactiques.

Pour chaque séquence étudiée, notre travail d'analyse consiste essentiellement à se poser les questions suivantes : quelle est l'organisation mathématique dont l'étude est visée et comment cette étude est-elle conduite, autrement dit quelle est l'organisation didactique proposée par les auteurs de l'ouvrage ? En particulier, en quoi les activités proposées permettent-elles de faire avancer l'étude de l'organisation mathématique visée ?

Afin de préciser notre propos, nous donnons dans un premier temps un extrait d'un tel travail, puis nous précisons les phénomènes récurrents relevés en les illustrant d'autres exemples évoqués plus succinctement.

B. Enseignements tirés de quelques extraits d'analyses didactiques

I. Analyse d'une séquence sur l'introduction du produit de deux entiers :

Nous travaillons sur la séquence 66 extraite de l'ouvrage « Pour comprendre les mathématiques », CE1, édition Hachette, 2002, fichier élève et guide pédagogique.
Voir documents de référence en ***ANNEXE 1*** *(nous utilisons tout d'abord la présentation du guide pédagogique)*

I. 1. Quel(s) objet(s) d'étude ?

La séquence étudiée est intitulée : « Le produit de deux nombres »,
Les objectifs annoncés sont : « Construire le concept de produit. Ecrire un produit sous la forme $a \times b$ et trouver sa valeur »

I. 1. a) À la lecture de cet intitulé, il s'agit entre autres de trouver la valeur du produit de deux nombres. Une des questions proposée à l'étude, mais non la première, est donc la suivante : « comment déterminer la valeur du produit de deux nombres entiers ? ». Nous la noterons Q 1, et son étude concerne la construction d'une organisation mathématique qui peut se décrire *a priori* ainsi :

- type de tâches : trouver la valeur produit de *a* et *b*, où *a* et *b* sont deux entiers quelconques donnés,
- techniques possibles : des techniques à portée limitée du type « je fais *a* tas de *b* jetons et je dénombre la collection obtenue par réunion de tous les tas », ou encore « je fais

un quadrillage de *a* lignes et *b* colonnes et je dénombre les cases », vers une technique de multiplication posée, en passant par le recours à des additions réitérées et l'usage d'une calculatrice,

- éléments technologiques et théoriques : ils dépendent de la technique utilisée et de l'institution dans laquelle s'accomplit ce travail.

I. 1. b) À cette étude s'en adjoint au moins une seconde, évoquée en premier lieu, et la question à laquelle elle répond, nécessite d'être précisée. Il s'agit, disent les auteurs de l'ouvrage, de « *construire le concept de produit* », donc, d'après la définition du mot « concept » donnée par le Larousse, d'œuvrer à « *définir les caractères spécifiques de l'objet " produit "* ». Que peut-on entendre par là ? Comme on l'a dit plus haut, un objet mathématique n'existe qu'inséré dans une pratique, on ne rencontre jamais l'objet « produit de deux entiers », on peut rencontrer une écriture d'un produit, (4×7), par exemple comme compte rendu[4] d'actions produisant l'organisation d'une collection en lignes et colonnes régulières, à l'occasion du calcul d'un produit, avec une calculatrice ou tout autre technique, à l'occasion de la résolution d'un problème où on se pose une question à laquelle le calcul d'un produit permet de répondre ; soit ce que l'on nomme une situation multiplicative….

Dans leur ouvrage, les auteurs précisent qu'ils se proposent « *d'introduire le concept de produit à partir de la résolution d'un problème. Le produit est alors le nom et l'écriture qui expriment la solution de ce problème* ». On peut donc comprendre qu'on commence ici à « définir les caractères spécifiques » des problèmes qui se résolvent avec un produit et peut-être même à répondre à la question : « comment reconnaître qu'une expérience matérielle pourra donner lieu à un compte rendu multiplicatif ? », que nous noterons Q 2. L'organisation praxéologique à construire pour répondre à cette seconde question n'est pas simple à décrire.
A partir des éléments trouvés dans l'ouvrage de référence, l'organisation qui s'ébauche alors semble être la suivante :

[4]En référence à une terminologie utilisée par H. Lebesgue à propos des nombres et citée par A. Mercier : « Le mathématicien Henri Lebesgue (1935, réédition 1975), qui disait aux futurs professeurs que « un nombre est le compte-rendu complet de l'action qui le produit [...] le reste est métaphysique » déclarait en conclusion de son cours sur « La mesure des grandeurs » que l'étude des mathématiques élémentaires était essentielle pour leur enseignement : cette étude permettait par exemple de comprendre qu'un nombre est le résultat d'une expérience particulière sur une grandeur. Il travaillait pour que, peut-être, les professeurs au fait de ce qu'est la mesure des grandeurs envisagent leur enseignement sur les systèmes de nombres comme portant sur les manières de *produire des mesures* par un algorithme vérifié ou des dispositifs validés, selon les cas, et *d'en rendre compte par un nombre,* que l'on considérerait alors comme le compte-rendu d'une *expérience de mesure*. ». Pour notre part, nous parlerons de compte rendu d'actions ou d'activités.

- type de tâches : pour une collection donnée, définie ici en compréhension, déterminer s'il est possible d'écrire son cardinal sous la forme $a \times b$,
- technique : déterminer deux caractères permettant de qualifier tous les objets de la collection ; déterminer toutes les valeurs possibles, pour chacun de ces deux caractères, prises par au moins un élément de la collection, a est le nombre de valeurs possible pour le premier caractère, b pour le second ; ranger les objets de la collection en un tableau à double entrée : dans une ligne donnée, on range les objets ayant une même valeur pour le premier caractère, ces objets étant ordonnés dans chaque ligne en respectant une même valeur, pour le second caractère dans une colonne donnée ; vérifier si tous les éléments de la collection sont rangés et si toutes les cases du tableau sont remplies,
- éléments technologiques : la description de la technique ; l'organisation de collections en tableaux de a rangées et b lignes complètes assure l'existence d'une correspondance terme à terme, par superposition des tableaux par exemple, et légitime la même écriture pour le cardinal de toutes les collections constituées de tous les objets caractérisés par deux variables, prenant respectivement a et b valeurs, représentées une fois et une seule ; pour des collections pour lesquelles a et b sont grands, cette écriture permet de garder en mémoire une organisation possible de la collection, comme une empreinte numérique et spatiale de celle-ci,
- théorie : produit cartésien en théorie des ensembles.

Cette étude préalable permet donc d'envisager au moins deux questions dont l'étude débuterait dans cette séquence. Ces deux questions sont interdépendantes : pour que le collectif enseignant / élèves puisse se lancer dans l'étude de la détermination du produit de deux nombres, il semblerait naturel d'avoir *a priori*, ou au moins rapidement en cours de travail, quelques précisions sur les objets dont il est question, sur leur nature, sur l'intérêt de cette étude et son devenir. Les auteurs ayant fait le choix « *d'introduire le concept de produit à partir de la résolution d'un problème* », cela signifie que l'on va sans doute débuter le travail par un exemple d'expérience matérielle pouvant donner lieu à un compte rendu multiplicatif, mais en poursuivant le projet d'instruire une réponse à la première question : « comment déterminer la valeur du produit de deux nombres entiers ? »

I. 2. Quels éléments d'organisation didactique trouve-t-on évoqués dans le guide pédagogique?

Notre travail consiste ici essentiellement à examiner si les activités proposées permettent de faire avancer l'élaboration des praxéologies dont la construction est visée, et ce qui pourrait optimiser ce travail.

En formation, le repérage des différents moments de l'étude et de la manière dont ils sont gérés[5] permet de s'interroger sur la place à donner aux élèves dans cette élaboration, et d'évaluer les places accordées d'une part à l'ostension et, d'autre part, à la collaboration attendue de la classe. Pour ne pas surcharger cette présentation, nous ne proposons dans ces lignes qu'une analyse incomplète de l'organisation didactique.

Nous examinons l'ensemble des activités prévues par les auteurs, y compris celles dont on ne trouve pas trace dans le livret élève, ce qui suppose la prise de connaissance préalable du contenu du guide pédagogique correspondant à la leçon, (*cf.* ANNEXE 1).

• Durant la première activité intitulée « *les logos* », une tâche de dénombrement d'une collection d'objets repérés par deux variables dont les valeurs possibles sont précisées, est confiée aux élèves :

- après une première présentation des résultats que l'on attend divergents, l'enseignant « *propose de noter le nombre inconnu de logos* 4×5 *ou* 5×4 *au choix* », puis de poursuivre le travail de détermination des éléments de la collection à l'aide d'une technique d'énumération recourrant à l'usage d'un tableau à double entrée. Il justifie ainsi sa proposition : « *le tableau à double entrée est un bon outil pour trouver tous les logos sans oubli et sans répétition* ». On ignore comment les symboles « 4×5 » et « 5×4 » sont introduits. Comment sont-ils motivés ? Quelle place occupent-ils dans l'activité d'énumération en cours, dans le dénombrement visé ? Comment l'équivalence de ces deux symboles est-elle justifiée ? Toutes ces questions demeurent sans réponse, car elles semblent procéder d'un « allant de soi » non questionnable. On peut relever que leur introduction précède le recours au tableau rectangulaire. L'énumération exacte des éléments de la collection n'est pas encore réalisée. Rien ne permet en ce point de justifier une telle notation. Les auteurs écrivent simplement : « *Il y a 4 formes et 5 couleurs. Ces nombres sont importants, si on les change, on ne trouvera pas le même nombre de logos* ». Il faudra s'en contenter car l'état d'avancement du travail ne permet pas aux élèves de comprendre en quoi ils sont

[5] Voir dans la bibliographie de référence les Actes de l'Université d'été, La Rochelle, 1998, pages 109 et suivantes.

importants, ni non plus de mettre en relation la notation introduite avec la structure de la collection ; donc de préciser des éléments pour caractériser les situations où elle peut être utilisée. Rien ne permet de justifier l'équivalence des deux écritures « 4×5 » et « 5×4 ». Cette manière de faire engage vers une introduction prématurée des conclusions énoncées, car les élèves n'ont guère pu les éprouver par eux-mêmes. Le texte le leur dit ; ils sont conviés à lui faire confiance.

- après une seconde phase de travail en équipes, durant laquelle les élèves doivent utiliser la technique donnée par l'enseignant pour énumérer les objets de la collection, « *l'enseignant introduit le vocabulaire produit de deux nombres***,** *la notation $4 \times 5 = 5 \times 4$, et définit ce produit comme le nombre de cases d'un tableau à double entrée ayant le nombre correspondant de lignes et de colonnes* ». Le terme « produit » de deux nombres est utilisé pour la première fois, mais aucune indication n'est donnée sur la gestion de ce moment. Un travail est-il fait à propos de la nature de la collection permettant une organisation en colonnes et lignes régulières, afin d'avancer dans la reconnaissance des situations pouvant donner lieu à un compte rendu multiplicatif (réponse à la question Q 2) ? Le tableau à double entrée a déjà été rencontré dans une séquence précédente, le rappel des situations alors étudiées pourrait être utilisé. L'attention est-elle attirée sur le rôle du tableau à double entrée, en tant qu'«empreinte numérique et spatiale » d'une organisation de la collection lui assurant le même cardinal qu'une autre collection ayant la même empreinte ? Ceci est pourtant l'une des raisons qui confèrent aux deux écritures « 4×5 » et « 5×4 » le statut de nombre ; et qui permet de justifier leur égalité…

• Pour la seconde activité, intitulée « *le bal masqué* », l'utilisation de la technique d'énumération montrée précédemment est explicitement attendue. Néanmoins, l'organisation de la classe est prévue de façon à ce que les enfants puissent mimer la situation dans leur groupe :

- lors de la synthèse du travail des groupes, l'enseignant « *montre que le tableau à double entrée est l'outil adéquat : Sophie a toutes ses photos en lignes et Julien les siennes en colonnes ou vice versa* ».
- à la fin de cette synthèse, l'enseignant « *introduit le vocabulaire et les écritures : le produit des nombres 4 et 3 est le nombre de cases d'un tableau à 4 lignes et 3*

colonnes ou, ce qui revient au même, de 3 lignes et 4 colonnes. On note ce nombre $4 \times 3 = 3 \times 4$ ».

Compte tenu de la nature du travail délégué aux élèves, cette seconde activité peut être interprétée comme engageant les élèves à s'entraîner à l'utilisation du tableau à double entrée, en tant que technique d'énumération des éléments d'une collection ; ce qui n'est pourtant pas tout à fait le but assigné à l'étude poursuivie.

Si l'on veut poursuivre le travail d'élaboration d'une technique de reconnaissance des situations pouvant donner lieu à un compte rendu multiplicatif, travail débuté précédemment, il s'agirait plutôt de déterminer si, dans une telle situation, les objets de la collection peuvent être organisés en tableau à double entrée ; cela constituerait plutôt un entraînement à la *reconnaissance de situations* donnant lieu à un compte rendu multiplicatif. Ce qui est tout autre chose ! Cette seconde activité permettrait de montrer que les deux problèmes proposés correspondent à un phénomène général ; tant en ce qui concerne l'utilisation de la technique d'énumération, que la notation multiplicative, grâce au lien que l'on peut faire entre les deux puisqu'on peut constater l'identité des cardinaux correspondants à chacun des tableaux… Cette activité permettrait aux élèves de changer d'objet de travail : passer du dénombrement de collections d'objets repérés par deux variables dont le nombre de valeurs est précisé, au dénombrement de collections disposées en rectangle, afin de poursuivre l'étude entreprise.

Si on veut débuter le travail sur la détermination du produit de deux nombres entiers a et b, réponse à Q 1, la référence au tableau de a lignes et b colonnes permet de détacher le nombre produit du contexte des couples et des logos. Les remarques de l'enseignant sur les lignes ou les colonnes, (« *Sophie a toutes ses photos en lignes et Julien les siennes en colonnes ou vice versa* »), sont importantes et peuvent permettre de faire passer les élèves dans le cadre du calcul numérique. L'enseignant peut préciser que Sophie ou Julien peuvent ainsi savoir dans combien de photos ils apparaîtront et, en notant en face de chaque ligne (ou colonne) le nombre d'objet énumérés dans celle-ci, on peut peut-être utiliser ces dénombrements partiels pour calculer le nombre total d'objets de la collection.

Si l'on veut poursuivre ces deux études qui viennent d'être débutées, il peut être utile :

- de s'entraîner à la reconnaissance des situations pouvant donner lieu à un compte rendu multiplicatif, en proposant éventuellement des situations ne permettant pas un tel compte rendu (travail sur la question Q 2),

- que le maître fasse inscrire au tableau, lors de la restitution du travail des élèves par exemple, et pour chaque situation le permettant, la description du tableau à double entrée correspondant ; en particulier la caractérisation des lignes et des colonnes successives de la collection traitée, en mentionnant le nombre d'éléments dans les lignes et les colonnes, et le nombre d'éléments de la collection. Les élèves seront ensuite invités à travailler non plus sur la constitution des collections mais sur le matériel numérique ainsi relevé, afin d'élaborer une technique de calcul du cardinal de la collection (travail sur la question Q 1),
- que les élèves aient à rechercher le cardinal de collections pour lesquelles le dénombrement direct est impossible, car le nombre de valeurs pour chacune des deux variables est trop important : 18 garçons et 23 filles, par exemple. Dans un tel cas, la construction du tableau à double entrée devient fastidieuse. Ceci conduit les élèves à changer de stratégie pour aller vers la nécessité de ne prendre en compte que le nombre d'éléments de chaque ligne (ou de colonne) et le nombre de lignes (ou de colonnes) afin d'obtenir le nombre total d'éléments par addition réitérée ; cette démarche permettrait de motiver mathématiquement le travail de la question Q 1. A ce titre la première activité du livret élève : « *Piste de recherche* “ *Une boîte de chocolat* ” », aurait davantage acquis de pertinence didactique si un travail antérieure avait été conduit pour que le nombre « produit » soit quelque peu décontextalisé des situations qui ont permis sa rencontre.

Si l'enseignant débute sa leçon par la première activité proposée dans le fichier élève, intitulée « *Piste de recherche* “ *Une boîte de chocolat* ” »,, il n'est plus question d'élaborer une organisation praxéologique correspondant à la question Q 2. Ce que les auteurs appellent « *Construire le concept de produit* » se limitera à admettre que « *le nombre de chocolats peut s'écrire* 5×4 *ou* 4×5 » et que le dénombrement des cases d'un quadrillage ayant le même nombre de lignes et de colonnes permet de le trouver. La réponse à la question Q 1, sera donnée par le matériel mis à disposition : la technique pour calculer le produit $a \times b$ consiste à dessiner un quadrillage de a sur b et de dénombrer les cases de celui-ci. Aucune information sur la technique de dénombrement attendue n'est apparente. Est-ce directement ? Par un comptage des cases une à une ? Ou grâce à des additions réitérées, après avoir dénombré les cases dans une ligne ou une colonne ?…

I. 3. Quels enseignements tirer de ce travail d'analyse:

La séquence dont nous avons précédemment amorcé l'analyse illustre, nous semble-t-il, l'effort affirmé des auteurs pour « *conduire les enfants à élaborer les notions fondamentales comme outils pertinents pour résoudre des problèmes dans le domaine numérique* »[6], conformément aux documents d'application des programmes de 2002[7].

Dans cette perspective :

- les activités proposées par l'enseignant doivent être choisies et guidées de façon à organiser le passage des élèves du problème initial (portant sur une expérience matérielle), à un autre problème (portant sur une expérience numérique), induisant un changement de cadre, correspondant au passage du système étudié à son modèle mathématique,
- les problèmes traités doivent être considérés comme des exemples de problèmes que l'on apprend à reconnaître : on n'apprend pas à résoudre le problème des logos mais à reconnaître les problèmes du « même type » que celui-ci, autrement dit à accomplir des tâches d'un même type et non une seule tâche du type
- les mathématiques que ces activités sont censées produire doivent rester présentes en ligne de mire, d'un bout à l'autre des séquences qui leur sont consacrées ; ce qui suppose une analyse *a priori* ascendante et globale. De plus, pour chaque activité, une analyse à l'aide d'un questionnement bâti à l'aide d'interrogations du type des suivantes devraient servir au professeur de fil directeur auquel se raccrocher constamment : comment se résout ce problème, comment sa résolution permet-elle d'avancer l'étude entreprise ? La détermination précise et préalable de l'organisation praxéologique à construire ou, comme dans l'exemple que nous avons suivi, des organisations praxéologiques à construire et de leur articulation, est indispensable pour poser ces questions et y répondre,
- enfin, si les situations proposées ne permettent pas d'amener les élèves à se détacher du contexte du problème à résoudre, tout en identifiant la catégorie de problèmes auxquels il appartient, il s'agit au minimum, que l'enseignant les alerte sur le travail en cours et précise clairement, lors de moments d'institutionnalisation, où l'on en est dans l'étude engagée.

[6] Extrait du guide pédagogique, page 11.
[7] Documents d'application des programmes, Cycle 2 page 7 et Cycle 3 page 7, édition CNDP, juillet 2002.

Le professeur se trouve ainsi confronté à la **difficulté professionnelle, sans doute inédite jusqu'alors, de gérer l'utilisation de « problèmes pour apprendre », en particulier de problèmes sur lesquels s'appuie la « construction d'une nouvelle connaissance »**. Cette façon d'aborder le travail mathématique est suggérée par les instructions officielles de 2002. Nous allons évoquer, sans entrer dans le détail, l'étude d'autres thèmes, proposée dans la même collection ou dans d'autres collections, afin de montrer que la séquence précédente illustre un phénomène récurrent.

II. Deux séquences sur l'introduction de la division euclidienne :

II. 1. Dans la même collection :

Nous travaillons sur la séquence 138, extraite de l'ouvrage « Pour comprendre les mathématiques », CE2, édition Hachette, 2002, fichier élève et guide pédagogique.

Voir documents de référence en ***ANNEXE 2***

II. 1. a. Quels objets d'étude ?

La séquence est intitulée : *« Situations de distributions »*

Les objectifs annoncés sont : *« Reconnaître une situation de distribution euclidienne. Calculer empiriquement le quotient et le reste »*

Suivant le schéma de la séquence précédente, celle-ci débute par l'étude de deux questions interdépendantes:

- « comment reconnaître qu'une situation peut se résoudre avec une division euclidienne ? », Q' 2,
- « comment déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne d'un entier par un autre entier ? », Q' 1. Les auteurs parlent de « *calculer empiriquement le quotient et le reste* » : on peut donc imaginer que la détermination sera faite en s'appuyant sur l'expérience et l'observation.

II. 1. b. Activités proposées et questions posées par leur gestion :

Comme dans la séquence étudiée auparavant, le travail débute par la résolution d'un problème matériel : un problème de partage équitable, un exemple de problème qui peut se résoudre à l'aide d'une division euclidienne, intitulé « *Piste de recherche " Les nougats "* ». A ce niveau, dans la situation présente, les élèves ont à leur disposition toutes les connaissances ou le matériel nécessaires pour résoudre ce problème ; la tâche à accomplir n'est pas problématique et aucun apport nouveau ne s'impose pour répondre à la question posée. On peut s'interroger : à quoi cela sert-il de résoudre ce problème ? En quoi le poser permet-il de faire avancer la construction des deux organisations praxéologiques visées ?

En fin d'activité, les auteurs introduisent l'égalité de la division « $32 = (5 \times \ldots) + \ldots$ » et le vocabulaire «*diviseur, quotient et reste* ». Comment cette écriture se justifie-t-elle ? Quelle est sa fonction ? En quoi permet-elle de faire avancer l'enjeu de l'enseignement escompté ?

Pour que cette activité permette d'entrer dans la double étude poursuivie, il semble au moins nécessaire qu'un travail d'analyse de la situation proposée soit fait avec les élèves, afin de faire avancer la réponse à la question Q' 2, et aussi qu'un lien soit établi entre la technique utilisée par chaque élève pour résoudre le problème de nougats et le matériel numérique introduit dans le livret. L'expérience proposée doit produire cinq *tas identiques* de nougats, *les plus gros possible*. A chaque étape, ces tas grossissent d'une unité, et on peut mettre en correspondance les états successifs de l'organisation de la collection totale, éventuellement en visualisant l'expérience matérielle, et la ligne correspondante du tableau ; pour cela le maître peut noter au tableau une description rapide des différentes étapes de l'expérience matérielle au regard de leur compte rendu numérique, comme ci-dessous :

Organisation de la collection totale	**Compte rendu numérique**
5 tas identiques de 1 nougat et un autre tas de 27	se note $5 \times 1 + 27$
…	…
5 tas identiques de 6 nougats et un autre tas de 2	se note $5 \times 6 + 2$
On ne peut plus faire de tas plus gros	L'organisation totale se note $5 \times 6 + 2$
Résultat de l'expérience matérielle	**Résultat de l'expérience numérique**
6 est le nombre maximum de nougats que l'on peut mettre dans chacun des 5 tas et il en reste	6 est le plus grand nombre par lequel on peut multiplier 5 pour s'approcher

2	de 32 et $32 - 5 \times 6 = 2$

Dans la deuxième colonne d'un tel tableau apparaît une description numérique du résultat de l'expérience matérielle correspondante qui, quant à elle, est évoquée dans la première colonne.

Au cours de ce travail :

- le professeur doit être attentif à permettre un début de description des situations que l'on cherche à reconnaître : partage d'un tout en un nombre donné de tas identiques les plus gros possible,
- le professeur peut aussi saisir l'occasion de rendre visibles des éléments qui permettent de justifier la technique qui permet d'abord de compléter le tableau, puis d'établir ensuite l'égalité numérique de la fin d'activité ; en particulier pour les élèves qui n'ont pas utilisé de calculs multiplicatifs pour répondre aux questions posées, et pour lesquels elle peut sans doute rester bien mystérieuse. Le professeur fait ainsi passer les élèves d'un cadre matériel à un cadre numérique. Mais les écritures numériques utilisées successivement ne restent encore, néanmoins, que des comptes-rendus des réorganisations successives de la collection,
- pour que le résultat numérique final ($5 \times 6 + 2$) soit identifié par les élèves comme ayant un statut particulier – celui de l'écriture d'une division, autrement dit d'une opération qui à deux nombres, 32 et 5, en fait correspondre deux autres, 6 et 2 –, il est nécessaire de préciser sa spécificité par rapport aux résultats intermédiaires. Ainsi, 6 est le plus grand nombre par lequel on peut multiplier 5 pour s'approcher de 32, en s'appuyant par exemple pour cela sur le résultat de l'expérience matérielle – c'est le nombre maximum de nougats que l'on peut mettre dans chacun des 5 tas –, et s'appelle le quotient ; et la différence entre 5×6 et 32 est appelée le reste, car c'est ce qu'il reste après partage,
- pour que le résultat numérique apparaisse comme pouvant informer sur la question posée dans « la situation des nougats », le lien entre le quotient comme plus grand nombre par lequel on peut multiplier 5 pour s'approcher de 32, et le nombre maximum de nougats que l'on peut mettre dans chacun des 5 tas, ainsi que le lien entre le reste de la division et ce qu'il reste après partage, doivent être rendu visibles. Ces liens permettent d'envisager la division de deux entiers comme technique pour prévoir le

résultat d'un partage équitable. Pour justifier l'utilisation d'une telle technique, le recours à des situations où l'usage de techniques empiriques est fastidieux serait assurément souhaitable. On rencontre en ce point l'une des dimensions technologiques de la technique, qui a pour fonction de la justifier et la rendre compréhensible, et dont l'escamotage ne peut guère que rendre plus difficile l'apprentissage.

L'élaboration des techniques que la résolution de ce problème aura permis de faire émerger sous la conduite du professeur n'en est encore qu'au stade de l'ébauche et nécessite, pour un apprentissage effectif, d'être poursuivie. Un assortiment d'activités et d'exercices permet d'assurer l'accompagnement de ce moment didactique. Les savoir-faire à travailler sont essentiellement les suivants :

- reconnaissance d'une situation qui pourra se résoudre en cherchant le quotient et le reste d'une division (question Q' 2),
- recherche du quotient et du reste de la division d'un entier par un autre entier grâce à des multiplications successives (question Q' 1).

Les exercices proposés dans le livret élève peuvent, à cet effet, être utilisés après une indispensable analyse préalable permettant de préciser quels objectifs d'entraînement ils autorisent la réalisation.

II. 2. Dans une autre collection :

Nous nous intéressons à la séquence des pages 96 et 97 de l'ouvrage « J'apprends les maths », CE2, édition Retz, 2001.

Voir document de référence en ANNEXE 3.

Dans le livre du maître correspondant, page 132, on relève l'information suivante : « *L'enseignant annonce aux élèves qu'ils vont apprendre aujourd'hui une nouvelle opération. …On va calculer 163 divisé par 25.* »

Dans ce cas, le type de tâches que l'on apprend à accomplir appartient donc clairement au domaine numérique : « chercher combien de fois *b* dans *a* » ou « diviser *a* par *b* ». Dans cette proposition d'ouvrage, on s'intéresse d'entrée de jeu à la réponse à la question Q' 1.

La technique du calcul du quotient et du reste dans la division euclidienne de deux entiers se construit en s'appuyant sur une situation de partage en éléments identiques ; mais celle-ci n'est qu'un outil technologique permettant d'élaborer la technique de calcul du quotient et du reste. La technique numérique de recherche des multiples du quotient qui sont inférieurs au dividende, est immédiatement utilisée. Elle est facilitée par le choix de quotients égaux à 25, 10 ou 5, et le vocabulaire utilisé : « *On cherche combien de fois la petite longueur est contenue dans la grande* » soit, «*combien de fois il y a 25 mm dans 163 mm* ». La technique de partage grâce au compas a déjà été travaillée dans des leçons précédentes. Elle est très vite disqualifiée et, en cours de séance, le recours au compas n'est utilisé que pour valider les résultats numériques ; la situation de référence assure le rôle d'échafaudage qui permet la construction visée. Elle est abandonnée lorsque la construction est achevée.

En revanche dans cette séquence, la question Q' 2 n'est pas travaillée explicitement, et il faudra chercher dans d'autres séquences l'étude de classes de problèmes auxquels la modélisation par la division euclidienne permet de répondre ; en justifiant alors le recours à cet outil.

II. 3. Ce que nous montrent les fragments d'analyses de ces deux séquences :

Dans ces séquences, comme dans la séquence sur l'introduction de la multiplication, l'enseignant doit **organiser le passage des élèves du problème initial,** portant sur une expérience matérielle, **à un autre problème**, portant quant à lui sur une expérience numérique. Il s'agit donc d'un changement de cadre correspondant au **passage du système étudié à son modèle mathématique.**

L'organisation didactique qui permet de mettre en place un tel changement de cadre doit amener les élèves à **se détacher du contexte du problème initial à résoudre,** tout en s'appuyant sur le travail fait dans ce contexte pour produire des éléments technologiques permettant l'élaboration des techniques numériques visées. Elle doit aussi permettre d'**identifier la catégorie de problèmes auxquels appartient le problème initial** afin de **motiver la construction de praxéologies propres au modèle et qui le constituent.**

B. Un phénomène récurrent

Dans le cadre de l'élaboration d'un contenu de formation mathématique des professeurs d'école, les analyses qui ont pu être conduites à partir d'extraits d'ouvrages scolaires de

collections variées, et sur l'ensemble des thèmes abordés à l'école primaire, font apparaître des similitudes importantes quant aux schémas d'étude proposés.
Donnons rapidement un dernier exemple : il porte sur l'introduction des fractions. Que l'introduction soit faite :

- à partir de la construction d'une nouvelle unité de mesure, comme le préconise la séquence 22, extraite de l'ouvrage « Place aux maths ! », CM1, éditions Bordas, 2004, ANNEXE 4, ou,
- à partir de l'évocation d'une nouvelle opération, « la division où on partage le reste », comme le préconise la séquence de la page 58, extraite de l'ouvrage « J'apprends les maths », CE2, édition Retz, 2001, ANNEXE 5,

le détachement du contexte ayant donné lieu à des comptes rendus sous forme de fractions reste à assurer afin que ces écritures deviennent des nombres ; c'est-à-dire des « êtres mathématiques » que l'on peut comparer, additionner, soustraire, …
Dans le premier cas, même si Sami affirme que des symboles comme ¾ permettent de « mesurer la longueur des sauts des enfants », ces symboles ne sont, à ce point de l'étude, que des comptes rendus de partages d'un segment à l'aide d'un guide âne, élaboré lors de la leçon précédente, et permettant de repérer et garder en mémoire la position d'un point sur ce segment. Un travail didactique reste à mener pour que ces ostensifs deviennent des mesures.

Dans le second cas, l'écriture 7/3 = 2 + 1/3 est aussi le compte rendu d'une expérience de partage équitable où le reste est, à son tour, partagé. Si, dans cette séquence un début de travail sur l'étude de la question Q″ 2, « comment déterminer qu'une situation peut donner lieu à un compte rendu avec une division fraction ? », est amorcé, il faudra attendre que le symbole a/b soit identifié à « a fois 1/b », quelques leçons plus loin, pour pouvoir utiliser les expériences matérielles qui ont été faites, comme des éléments technologiques pour construire l'arithmétique des rationnels.

Dans les différentes organisations didactiques évoquées plus haut :

- un problème que les élèves savent en général résoudre dans le cadre matériel où il est posé leur est proposé mais il pourrait aussi se résoudre, après modélisation numérique, en ayant recours à l'opération ou aux nouveaux nombres dont l'étude est visée,

- les manipulations matérielles conduisant à la résolution du problème permettent l'introduction d'un **compte rendu d'activité utilisant des nombres entiers et dont l'écriture est la même que celle de l'opération ou des nouveaux nombres dont l'étude est visée**.
- un certain travail doit être fait pour **justifier la pertinence de l'usage d'un certain type de compte rendu numérique pour un certain type de problème** : quels sont les caractères spécifiques des situations pouvant donner lieu à un tel compte rendu ? C'est l'objet des réponses à des questions de type Q 2,
- un certain travail doit être fait pour **détacher ces ostensifs du contexte qui a permis leur émergence et débuter la construction d'une organisation praxéologique dans le cadre numérique** ? C'est l'objet des réponses à des questions du type Q 1.

Dans la progression proposée par N. et G. Brousseau (1987), pour la construction des décimaux, le maître annonce explicitement le passage de l'expérience matérielle – en ce cas la reconnaissance de l'épaisseur de feuilles de papiers – à des expériences numériques. Il annonce, page 20 de la brochure, « *8/100, 9/45, … sont-ils des nombres ? Ce que nous avons fabriqué pour mesurer des épaisseurs est-ce que c'est des nombres ?* », et plus loin : « *pour décider si ce sont des nombres, il faut essayer de faire des opérations, par exemple des additions, proposez m'en* ». Dans un premier temps, les élèves accumulent les expériences matérielles leur permettant de trouver la somme et la différence de deux fractions, ainsi que le produit et la division par un entier ; tout ceci dans le cadre où les fractions représentent des épaisseurs de feuilles de papier, et sans qu' « *aucune technique dans le cas de fractions quelconques ne soit encore formulée* ». Ces fractions serviront ensuite pour mesurer différents types de grandeurs et résoudre des problèmes de manipulation de grandeurs : comparaison, égalité, évaluation de réunions… Au cours des activités proposées durant cette longue progression, le maître fait émerger les règles de comparaison et d'opérations sur les fractions. Le passage du cadre matériel au cadre numérique est de ce fait géré par le maître qui enseigne, en collaboration avec les élèves qui affrontent les situations choisies par le maître.

Les analyses didactiques que nous avons menées sur les manuels scolaires et les livres du maître font apparaître le caractère lacunaire des éléments mis à disposition des professeurs d'école par les auteurs d'ouvrages pour la gestion des séquences qu'ils proposent. Ce n'est pas l'essentiel de notre propos : nous le répétons nous ne visons pas l'évaluation du travail des auteurs qui se situe dans un champ de contraintes éditoriales et de culture didactique qui n'est pas le nôtre.

Nous souhaitons montrer que **l'utilisation des outils que la didactique des mathématiques** met à disposition des enseignants permet d'analyser les matériaux qu'ils ont à leur disposition. Cette analyse nous apparaît incontournable **pour orienter les choix d'enseignement des mathématiques**, conjointement avec d'autres considérations : connaissance de ses élèves, organisation des classes en cours unique ou non, possibilités offertes ou refusées par la ou les écoles dans lesquelles on exerce, choix personnels, etc.

Une des dimensions attachées au métier d'enseignant réside en ce qu'il engage celui qui s'y livre dans des **tâches de conception préalable de l'enseignement** – les préparations – dispensé aux élèves ; en cela il se distingue des métiers d'exécution. Pour ces tâches de conception, les manuels scolaires constituent l'un des types d'outils, parmi d'autres, mis à disposition des enseignants et très largement utilisés : citons aussi les programmes et documents d'accompagnement ou d'application, les revues à destination des enseignants de l'école élémentaire, les ouvrages plus théoriques qu'ils soient de mathématiques ou de didactique des mathématiques, etc. **Disposer, en tant que savoir professionnel pour l'exercice du métier, de connaissances mathématiques et didactiques, permet un usage réfléchi et des choix raisonnés parmi les propositions d'enseignement rencontrées** au gré des lectures ; et notamment des lectures de manuels scolaires. Le problème de la définition du cadre institutionnel permettant l'acquisition, en formation initiale et/ou continue de ce type de connaissances, reste posé.

Bibliographie

BLANC J.-P., BRAMAND P., DEBU P., GELY J., PEYNICHOU D., VARGAS A. (2002) *Pour comprendre les mathématiques CE1,* Paris : Editions Hachette.

BLANC J.-P., BRAMAND P., DEBU P., GELY J., PEYNICHOU D., VARGAS A. (2002) *Pour comprendre les mathématiques CE2,* Paris : Editions Hachette.

BROUSSEAU N. et G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence,* Bordeaux : Edition IREM de Bordeaux.

BRISSIAUD R., CLERC P., OUZOULIAS A. (2001) *J'apprends les maths CE2*, Paris : Editions Retz.

BRISSIAUD R., CLERC P., OUZOULIAS A. (2001) *J'apprends les maths CM1*, Paris : Editions Retz.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* , Vol. 19, n° 2, pp. 221-266.

CHEVALLARD Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, in *Actes de l'Université d'été de La Rochelle,* pp. 89- 118, édition coordonnée par NOIRFALISE R., Aubière : Edition IREM de Clermont Ferrand.

CIRADE G. (2006) *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*, Thèse de doctorat, Université d'Aix Marseille I.

HELAYEL J., BOUZY J. P., DEGRET P., DELUCHI-JOUBERT M. C., FAURE A. et B., FOURNIE C., TRESALLET E. (2002) *Place aux maths ! CM1,* Paris : Editions Bordas.

LEBEGUE H. (1956) *Sur la mesure des longueurs*, Paris : Editions Gauthier-Villars.

MATHERON Y. et NOIRFALISE A. (2008) *Formation initiale et continue des professeurs d'école en Mathématiques,* ouvrage à paraître.

MEN (2002) Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle 2 et cycle 3, Scéren CNDP.

Liens entre objets d'enseignement impliquant numération de position ou système métrique.

Christine Chambris,
Équipe Didirem - Université Paris-Diderot (Paris 7),
IUFM de Versailles - Université de Cergy Pontoise
cchambris@free.fr

<u>Objectif visé :</u>

Cette communication est la présentation d'une partie de ma thèse (Chambris, 2008). Elle peut contribuer à la réflexion sur la formation des maîtres dans les domaines de l'enseignement des grandeurs et de la numération de position.

1. Présentation du problème

Nous étudions les relations entre les grandeurs, les nombres et les opérations dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire : elles ont été profondément bouleversées au moment de la réforme des mathématiques modernes[1] (Chevallard, 1992), (Bronner, 1997, chapitre 2), (Chambris, 2007). Dans cette communication, nous regardons cette question via des problèmes élémentaires d'arithmétique relevant du champ de la numération de position des entiers.

Nous avons élaboré un questionnaire et l'avons fait passer à 277 élèves de fin de CM2 (5ème primaire). Il est constitué par une série d'exercices, nous en présentons quelques uns. Nous pensions *a priori* de certains d'entre eux qu'ils poseraient des difficultés aux élèves, les évaluations d'entrée en 6ème et des travaux sur les connaissances des élèves (Parouty, 2005) fournissant une première indication.

L'analyse des réponses aux exercices est l'occasion de poser de nouvelles questions quant à certaines « difficultés ». Sans être hors programme, certaines tâches vivent apparemment mal ou pas du tout dans l'enseignement actuel. Ceci ne semblait pas être le cas dans l'enseignement ancien d'où nous avons tiré certains de nos exercices. Pourquoi ? Nous tentons de présenter les « conditions de vie » de ces tâches, leur environnement didactique, dans l'enseignement ancien et actuel. Ce sont en grande partie des questions d'écologie didactique (Artaud, 1997) qui nous préoccupent.

[1] Pour faire court, nous désignons par « enseignement ancien » ce qui est antérieur à la réforme.

1.1. Premiers éléments sur les connaissances des élèves

Nous donnons d'abord quelques éléments sur les connaissances des élèves actuels. Parouty (2005) propose à des élèves de cycle 3 de résoudre des problèmes de numération « en contexte ». Au CE2, le problème est : « Pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ? » (R=10%). Elle pose le même genre de problème au CM1 (avec des paquets de 200) et observe la même réussite. Au CM2 avec des paquets de 2000, elle observe des progrès (R=30%). Elle indique que ce progrès n'est pas dû à une meilleure utilisation de la numération, mais au fait que les élèves posent la division (à plusieurs chiffres) qu'ils ont apprise.[2] Elle interroge les enseignants. Ils considèrent que le problème est (en%)[3] très facile : 0, assez facile : 13, difficile : 85, inabordable : 5.

Parouty propose aussi aux enseignants des exercices à faire travailler à leurs élèves. En évaluant ensuite les élèves, elle constate qu'ils ont progressé, non seulement dans la résolution de ces problèmes ce qui ne serait pas particulièrement remarquable mais dans toute la numération (et le calcul). (La méthodologie prévoit un groupe témoin).

Les évaluations d'entrée en 6ème proposent, chaque année, depuis 2005 des exercices de conversion.

5 kg = ………… g			
réponse	2005	2006	2007
5000	61,41	60,38	62,0
Autre	34,05	34,70	33,8
Absence	4,54	4,92	4,2

La réussite est donc relativement stable sur les 3 ans, un peu moins des deux tiers des élèves réussissent une conversion simple de kilogrammes en grammes.

1.2. Premiers éléments sur les relations entre le système métrique et la numération avant la réforme

En 1970, dans le programme de l'école primaire est créé le domaine « mesure ». Avant, la réforme des mathématiques modernes, l'étude du système métrique apparaît « mêlée » à celle des nombres. Dans le programme, à partir de 1970, numération et système métrique vivent dans deux domaines

---

[2] Parouty (2005) n'indique pas le mode de calcul de la réussite. Nous ne savons pas, en particulier, comment les réponses à « 1 près » sont comptabilisées. Dans notre étude, nous avons proposé aux élèves un problème du même type. Nous présentons ci-après les répartitions observées pour les réponses et les procédures. Dans (Chambris, 2008, p. 324), nous donnons en outre des éléments sur la répartition des réponses en fonction des procédures.

[3] Le total est différent de 100 dans (Parouty, 2005)

différents. En prenant l'exemple d'un manuel scolaire de la fin des années 50 (Bodard, CE1, CE2, 1957), nous présentons les relations entre système métrique et numération de position des entiers telles qu'elles ont probablement existé avant la réforme (et depuis 1923). Nous avons étudié plusieurs manuels et celui-ci est loin d'être exemplaire. Néanmoins, nous observons des éléments récurrents relativement à cette question de l'articulation entre système métrique et numération de position dans les différents manuels étudiés.

Au CE1, dans la leçon « Le billet de mille francs », le mémo indique 10 centaines = 1000. Dans les exercices, on trouve : 1000 F – 9 centaines de F = …F ; 500 F + 500 F = …F et aussi : « Combien de paquets de 100 enveloppes faut-il acheter pour avoir 1000 enveloppes ? »

Toujours au CE1, dans la leçon « Le kilogramme. Le kilomètre », le mémo indique 1 kg = 10 hg = 1000 g. Dans les exercices, on trouve : 600 g + 400 g = …g ou …kg et 1 hg + 9 hg = …hg ou …kg

Au CE2, dans la leçon « Le kilogramme », le mémo indique 1 kg = 1000 g. Dans les exercices, on trouve : « Complétons : 1 kg = 800 g + … » et aussi « Avec 1 kg de graines de betteraves, combien un grainetier peut-il faire de sachets de 100 g ? »

On observe ainsi un parallèle assez net entre les leçons de numération et de système métrique.

1.3. Éléments complémentaires sur les connaissances des élèves actuels

Pour préciser les éléments relatifs aux connaissances des élèves actuels nous avons proposé d'autres exercices du champ : numération / système métrique. Plutôt que repérer des niveaux « absolus », nous croisons les réussites aux différents exercices afin d'identifier des liens ou des absences de liens dans les connaissances des élèves. Nous utilisons plusieurs sources pour les exercices : des manuels anciens et actuels. Les manuels anciens fournissent de nombreux exercices qui mêlent grandeurs et nombres. Les manuels actuels proposent des tâches dont on peut penser qu'elles sont assez familières aux élèves actuels.

Des exercices proposés aux élèves

Notre questionnaire a été passé par 277 élèves de CM2 (en mai-juin 2005). Parmi les exercices, nous avons proposé :

> Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?
>
> Complète chacune des lignes : - Le chiffre des dizaines de 6529 est …
> - Le nombre de centaines de 8734 est …
>
> Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ?
>
> Complète chacune des lignes : 5 kg = ………g

8 kg = ………. hg

Nous avons aussi proposé d'autres exercices, du même type, de conversion de mm en cm en contexte et hors contexte que nous ne présentons pas ici.

Résultats bruts

Pour le « nombre de centaines de 8734 », on a les réponses suivantes :

réponse	87	7	700 ou 734
pourcentage	21%	46%	23%

8 kg = … hg : 71% de réussite

5 kg = … g : 66% de réussite

Pour le « nombre de paquets de 100 feuilles pour avoir 8564 feuilles » :

réponse	86	85	85,64
pourcentage	20%	19%	3%

Pour le « nombre de paquets dans 100 g dans 4 kg », la réussite (réponse 40) est de 32%. Les procédures susceptibles d'aboutir (qui ne sont éventuellement pas menées à terme) sont :

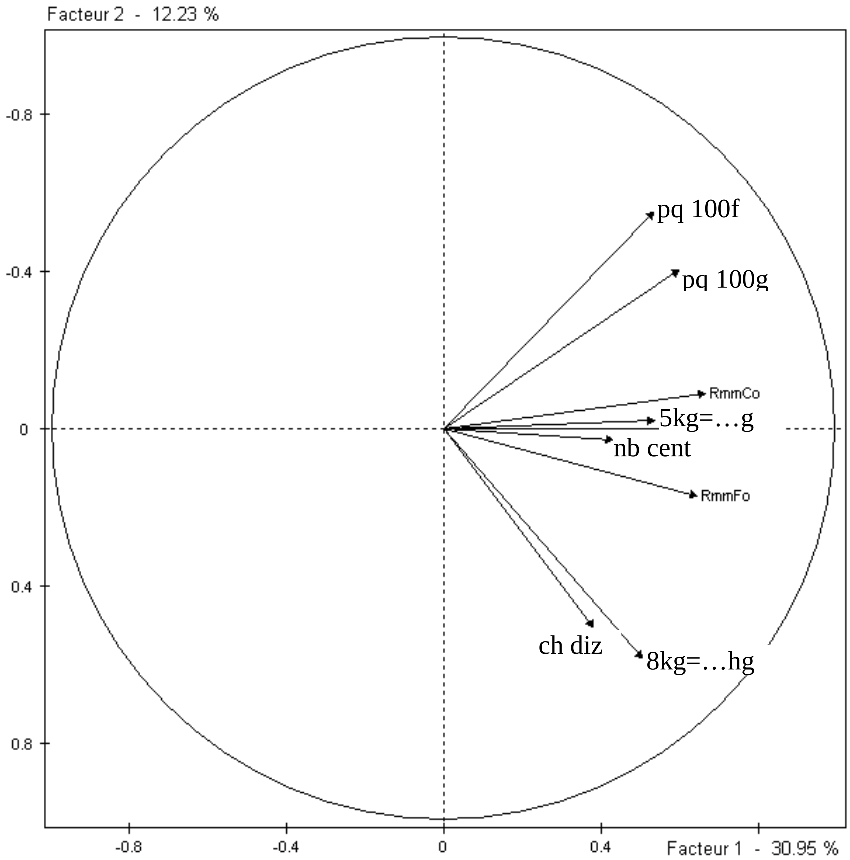
Procédures	réussite sans procédure visible	réussite et 1000 g = 1 kg	division en ligne	division posée	40×100	présence de 10	100 : 4
%	17%	1%	3%	5%	9%	3%	11%

38%

Mise en relation des réponses aux différents exercices

Pour mettre en relation les réponses aux différents exercices, nous effectuons une analyse factorielle. Il en ressort notamment que :

- Les réussites aux deux problèmes concrets relatifs aux milliers et centaines sont assez corrélées,
- Les réussites aux deux exercices « formels » (8 kg en hg et chiffre des dizaines) sont assez corrélées.
- Les réussites au problème « 4 kg en paquets de 100 g » et à la conversion « 8 kg en hg » semblent être indépendantes.Les réussites aux trois exercices relatifs aux conversions de mm en cm sont assez corrélées, qu'ils soient en contexte et hors contexte (nous n'étudions pas ce point dans cette communication).



1.4. <u>Questionnement de nature écologique : ce que nous retenons des éléments précédents</u>

Nous retenons de ces différents éléments les faits suivants :

- l'indépendance des procédures de résolution pour deux questions en contexte et formelle, susceptibles d'être résolues par une même technique (le nombre de paquets de 100 g dans 4 kg et convertir 8 kg en hg),
- la proximité des réussites dans les tâches formelles,
- la relative proximité dans les tâches en contexte,
- le fait que les élèves progressent, dans toute la numération, quand on leur propose des problèmes de numération en contexte,
- les réussites relativement médiocres à des questions *a priori* élémentaires de numération et de système métrique.

Nous considérons qu'on peut les interpréter d'un point de vue écologique comme nous allons le voir.

Cadre théorique et méthodologie

L'écologie des savoirs est une facette de la théorie anthropologique du didactique (TAD) qui englobe la théorie de la transposition didactique, développée par Chevallard (1991, 1999). L'écologie des savoirs (Artaud, 1997) permet d'étudier des questions telles que : comment les objets d'enseignement vivent-ils, avec qui ? Comment naissent-ils ? Pourquoi meurent-ils ?

Dans cette communication, nous faisons référence aux notions de praxéologie et d'ostensif. Une praxéologie est un moyen de décrire une pratique. Elle se décline en quatre composantes :

- le type de tâches est un ensemble de tâches qui se ressemblent,
- la technique est un moyen de traiter le type de tâches (« comment on fait),
- la technologie est une justification de la technique (« pourquoi ça marche quand on fait comme ça »),
- la théorie est un ensemble dans lequel s'inscrit la technologie, c'est un discours justificatif sur la technologie.

Les ostensifs sont des systèmes de signes utilisés dans les praxéologies. On parlera de l'instrumentalité d'un ostensif pour évoquer ce « qu'on peut ou non faire avec lui ».

Pour étudier les éléments que nous avons pointés, nous avons utilisé la méthodologie suivante. À travers des manuels scolaires du cours élémentaire et des textes pour l'école destinés aux enseignants ou aux formateurs, nous recherchons des techniques et technologies pour résoudre un même type de tâches de numération (et de système métrique) pour l'enseignement ancien et l'enseignement actuel, avec un intérêt particulier pour les ostensifs. Outre le fait que les ostensifs sont des éléments importants pour décrire les praxéologies, cet intérêt pour les ostensifs est notamment dû au fait qu'il est connu qu'au moment de la réforme on a, à la fois, introduit de nombreux symboles et formulé diverses interdictions relatives à l'utilisation de certains symboles ou mots.

Hypothèse

Ces faits nous amènent à formuler une hypothèse de nature écologique. La réforme des mathématiques modernes pourrait avoir détruit des liens qui n'ont pas été reconstruits jusqu'à aujourd'hui (des liens nouveaux et pertinents n'ayant pas non plus été inventés ou implémentés). Il s'agit de liens qui peuvent être internes au système métrique, internes à la numération, ou encore dans les relations entre numération et système métrique. Par suite, le travail dans chacun des deux domaines pourrait apparaître aux élèves (voire au professeur) comme indépendant. Cela pourrait avoir deux types de conséquences : les connaissances ne se renforcent pas entre les deux domaines, elles sont juxtaposées ; chacun des domaines est affaibli car il n'est pas nourri par l'autre.

2. Éléments d'interprétation d'ordre écologique

Nous commençons par donner des invariants relatifs à l'étude de la numération de position. Nous poursuivons par des éléments caractéristiques de cette étude dans l'enseignement ancien, puis par des éléments relatifs à l'enseignement actuel. Nous essayons ensuite de comprendre les raisons des changements. Finalement, nous nous intéressons à un aspect particulier, peut-être particulièrement sensible aux bouleversements vécus par l'enseignement de la numération de position depuis 40 ans.

2.1. Types de tâches de la numération de position en primaire

L'étude des manuels scolaires anciens et nouveaux permet de repérer une certaine stabilité des tâches enseignées en numération. Certaines d'entre elles sont « emblématiques », probablement liées à la nature même de l'objet étudié, à sa fonction dans les sociétés qui ont des pratiques numériques développées. D'autres tâches sont plus « conjoncturelles ».

Nous avons repéré cinq tâches emblématiques. Autour de ces tâches se rattachent éventuellement d'autres tâches, pour former des types de tâches.

1) Dénombrer une grande collection

2) Dire écrire les nombres

3) Les suites écrites et orales (de 1 en 1, de 10 en 10, etc.)

4) Comparer des nombres

5) Combien de paquets de 100 dans 3500 ?

Nous relevons aussi un ensemble de tâches particulières, nous les rassemblons sous l'intitulé « décomposer, recomposer un nombre ». Ces tâches sont importantes mais il est difficile de les considérer comme emblématiques. Par ailleurs, bien que très présentes, elles apparaissent sous des formes éventuellement différentes selon les époques.

2.2. Écologie de la numération dans l'enseignement antérieur à la réforme

Dans les manuels anciens, on observe une série de technologies stables, elles sont organisées autour d'un ostensif : la « numération en unités » que nous présentons en indiquant certaines de ses propriétés.

La numération en unités : un ostensif à tout faire

Il s'agit d'exprimer les nombres avec ce que nous appelons les « unités de la numération » (les mots : unités, dizaines, centaines, etc.) et les noms des nombres (d'abord de un à neuf) : par exemple, le nombre *trois milliers cinq centaines*.

Cet ostensif permet de régulariser l'oral : *trois dizaines* pour *trente*, mais pas seulement. En effet, il possède une plus grande instrumentalité que la numération orale. Il n'y a « pas d'oral » pour dire *56 centaines* (ou *cinquante six centaines*) ou pour dire *trente dizaines*. Ces désignations relèvent de la numération en unités et non de la numération orale dans laquelle on dirait : cinq mille six cents et trois cents.

Technologies anciennes

Nous présentons maintenant la série des cinq technologies anciennes stables. Nous les désignons par une lettre significative :

C) Comptage par unités de la numération : « On compte par dizaines (centaines, unités de mille) comme on compte par unités. »

R) Relations entre unités de la numération : « 1 centaine = 10 dizaines, 1 centaine = 100 unités »

O) Relations entre oral et unités de la numération. Il s'agit d'une traduction mot à mot : « 3 centaines = trois cents, 5 dizaines = cinquante ; donc 3 centaines 5 dizaines = trois cent cinquante »

P) Relation entre position et unité de la numération : « Dans un nombre, les centaines s'écrivent au 3ème rang à partir de la droite ».

Ce discours s'accompagne éventuellement du discours suivant complémentaire : « Le zéro ne représente pas d'unité, il marque simplement un rang. »

M) Relation entre unités de la numération et unités métriques, traduction mot à mot : « 1 hectomètre = 1 centaine de mètre »

Nous donnons maintenant l'exemple du traitement de deux tâches emblématiques (des techniques donc) à partir des technologies classiques. Sauf mention contraire, ces techniques ne sont pas explicites dans les livres, ce sont des reconstructions que nous proposons.

Technique ancienne pour la tâche : « dénombrer » (un tas d'objets dont il faut déterminer le nombre)

- compter dix objets (C), puis appeler dizaine un groupe de dix (R), compter les dizaines (C), s'il y en a moins que dix, itérer le processus, sinon appeler centaine un groupe de dix dizaines (R), itérer le processus en comptant les dizaines (C), etc.[4] ;
- les groupes étant réalisés, les compter (C). On a : 3 dizaines, 5 milliers ;
- (à l'écrit) les milliers occupent la 4ème position, les dizaines la 2ème (P) : le nombre s'écrit 5030 ;
- (à l'oral) 5 milliers se dit 5 mille, 3 dizaines se dit trente (O) : le nombre se dit cinq mille trente.

Technique ancienne pour la tâche : dire un nombre écrit en chiffres, 7020- 7020 comporte un 7 en 4ème position donc 7 milliers, un 2 en 2ème position donc 2 dizaines (P),

- 7 milliers = sept mille, 2 dizaines = vingt (O),
- 7020 se lit sept mille vingt

[4] Nous précisons que le processus s'arrête nécessairement quand tous les objets sont groupés. Il y a alors nécessairement moins de dix groupes de chaque espèce. Par ailleurs, on n'a pas mobilisé la division euclidienne dans cette tâche.

Dans les livres anciens, parfois des techniques sont énoncées : « pour lire un nombre de deux chiffres, on énonce d'abord le nombre des dizaines, puis celui des unités. Ainsi 38 se lit trente-huit » (Boucheny, CE, 1930). Souvent elles ne le sont pas. On peut penser que c'est parce qu'elles consistent en fait en un découpage de la tâche en sous-tâches qui peuvent, chacune, être traitées par un des discours élémentaires (les technologies).

2.3. La tâche « dénombrer » dans des manuels scolaires récents

Que peut-on dire des techniques pour traiter ces tâches aujourd'hui ? Pour étudier cette question, nous présentons des exemples tirés de manuels scolaires récents. Comme nous allons le voir, la situation actuelle semble plus hétérogène et, par suite, nous ne présentons que des fragments de tâches.

Nous avons retenu quatre manuels de CE2 :

- Pour comprendre les mathématiques (2004) – PCM (Hachette)
- Maths + (2002) (sed édition)
- Euro Maths (2004) (Hatier)
- Nouvel objectif calcul (1995) – NOC (Hatier)

Techniques actuelles pour la tâche : « dénombrer » (les groupes étant réalisés)

Nos quatre manuels introduisent précocement les écritures chiffrées : 1, 10, 100, 1000. Ils procèdent cependant différemment pour obtenir l'écriture chiffrée du « nombre total ».

Dans PCM, les nombres de paquets de chaque type sont indiqués dans un tableau de numération (les noms des colonnes sont les noms des unités de la numération). Dans Euro Maths, on compte de 1000 en 1000 pour savoir qu'on doit écrire 2000 (en utilisant probablement d'un algorithme de régularité des suites). Dans Maths +, on écrit une multiplication 2×1000. Dans NOC, on écrit un calcul en arbre ou en ligne. Ces différentes techniques permettent *grosso modo* d'obtenir une somme de la forme 2000+300+40 (la situation n'est pas claire dans PCM : on ne sait si on obtient directement le nombre dans le tableau en complétant par des zéros les colonnes vides ou bien si on procède à un calcul pour ce faire).

Les techniques pour réduire la somme sont alors les suivantes :

- une convention explicite d'écriture dans Euro Maths,
- un calcul posé, en prenant soin d'aligner les chiffres à droite dans NOC, on peut sans doute dire qu'il s'agit d'une convention (implicite),
- sans précision dans Maths + (mais nous n'avons pas consulté le livre du maître).

Dans PCM, on a bien une somme mais on ne sait pas si la somme est obtenue *a posteriori* (à partir du tableau) ou indépendamment du tableau, et finalement le tableau serait un moyen de la réduire, d'élaborer une convention (implicite).

Ajoutons les éléments suivants. La leçon « numération : groupements » (livres de l'élève et du maître) de NOC (1995) se passe des noms des unités de la numération ; ce sont des calculs avec des écritures chiffrées qui interviennent. Euro Maths 2004 après avoir donné une règle de calcul pour réduire la somme, formule finalement une règle directe du passage des paquets à l'écriture chiffrée qui utilise les noms des unités de la numération. Cette dernière règle ressemble fortement à la technologie P. Il y a toutefois une différence non négligeable entre l'approche classique et celle d'Euro Maths c'est que, dans l'approche classique, l'écriture 1000 dépend de P alors que, dans Euro Maths, P dépend de l'écriture 1000. Cette différence implique que, dans l'approche actuelle (Euro Maths), les règles initiales de manipulation ne sont pas élaborées sur les unités de la numération mais sur les écritures chiffrées.

La décomposition additive : un nouvel ostensif

On voit que, dans cette tâche, les écritures chiffrées des puissances de dix semblent *grosso modo* jouer le rôle que jouait les unités de la numération. Toutefois, les règles de fonctionnement sont loin d'être aussi explicites que celles qui régissaient la numération en unités. Les présupposés des différents manuels semblent être différents, même si finalement tout revient au même…

Pour résumer, que voit-on aujourd'hui ?

- une omniprésence des « décompositions additives » et une grande raréfaction voire une quasi disparition (à une époque peut-être révolue) de la numération en unités,
- pas d'harmonisation des techniques et technologies entre les manuels,
- des raisonnements inversés d'un manuel à l'autre à cause de « présupposés » différents (qui laissent en tout cas planer une grande ambiguïté),
- des implicites.

2.4. Des raisons du changement ?

D'où cela vient-il ? Nous formulons quelques hypothèses.

La réforme des mathématiques modernes

La réforme des mathématiques modernes (en 1970) amène à un net affaiblissement des unités de la numération à l'école primaire. Les raisons semblent être multiples, notamment :

- le caractère « générique » des bases s'oppose à celui, « spécifique », de la base dix (or à cette époque on veut montrer la généralité),

- les **manipulations** en base **remplacent les discours** en unités de la numération (on a une sorte de « toute croyance » en la manipulation),
- en outre, les unités de la numération semblent être discréditées notamment pour cause d'« ambiguïté ». Combien y a-t-il d'unités dans 234 ? Cette question est considérée comme ambiguë car on ne sait s'il faut répondre 4 ou 234 (APMEP, 1976).

Finalement, on peut penser que la réforme a fait « exploser » la numération en lui supprimant son ostensif fondamental, la numération en unités, qui permet de formuler les explications (et des tâches dans un registre symbolique) et en ajoutant de nouvelles tâches avec les changements de base notamment.

Contre réforme (ERMEL 1978)

Nous faisons maintenant référence à un ouvrage dont on peut penser qu'il a eu une influence assez forte sur les formateurs d'enseignants de primaire pendant les années 80. Il s'agit de la première édition de la publication des travaux de l'équipe ERMEL. Nous considérons qu'il est emblématique de la contre-réforme en primaire. Nous avons consulté le tome 2 du cours élémentaire.

Il semble qu'assez rapidement après la réforme est repérée la nécessité d'un registre symbolique pour le travail sur les nombres. En effet, si les élèves sont capables de coder et décoder des collections en base, les écritures chiffrées en base n'auraient tendance qu'à évoquer cette action de groupement (Perret, 1985). La contre-réforme ajoute des manipulations symboliques dans l'étude de la numération : « Le point fondamental est de familiariser les enfants au travail direct sur les écritures. » en utilisant en particulier 1, 10, 100, 1000.

Outre le fait que la progression d'ERMEL (pour le CE) est d'une très grande complexité, il n'est pas sûr que le lien entre ces manipulations d'écriture et les tâches emblématiques de numération soient complètement pris en charge, notamment pour la tâche « dénombrer ».

Plus précisément, ERMEL fait référence aux décompositions polynomiales : $a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$. Elles sont indispensables pour traiter les changements de base introduites au moment de la réforme. ERMEL propose en fait d'appuyer l'étude de la base dix sur les petites bases, sur les changements de bases. Ainsi, par « calcul mental » en base dix : on transforme des « nombres d'objets » écrits en bases, en base dix : $(213)_4=16+16+4+3$. Ceci doit servir à identifier le rôle des coefficients. En base dix, on écrira « de même » : 213=100+100+10+3 sans faire référence à une collection d'objets. C'est probablement complexe et cela ne semble pas véritablement repris dans les manuels de l'époque que nous avons étudiés (ça l'est d'autant moins que les bases disparaissent assez vite).

ERMEL va plus loin, en proposant des « technologies » pour les « numérations hybrides » (oral : « trois cent huit » s'écrit « 3 100 8 » qui devient « $3\times100+8$ »), pour les numérations d'addition » (romains : « CCV » devient « 100+100+5 »). Elles constituent des moyens qui permettent plus ou moins de se passer des technologies classiques.

Et les décompositions – recompositions ?

Ces éléments nous amènent à évoquer les « décompositions recompositions » à trois époques. Cette tâche est incluse en général dans la tâche dénombrer, comme nous venons de le voir. Elle en constitue une partie. Signalons toutefois le manuel Math Elem (1996) qui propose une autre façon que celles nous avons présentées pour réduire une somme (4000+60+2) :

« Certains élèves utilisent l'addition (…). La discussion les aidera à prendre conscience que la lecture seule permet de retrouver le nombre qui a été décomposé. » Il s'agit donc de s'appuyer sur la numération orale.

En fait, cette tâche est aujourd'hui généralisée dans l'ostensif : 300+40+7. Hier, elle n'existait pas dans cet ostensif, il s'agissait toujours de l'ostensif « numération en unités » : 3 c 4 d 7 u. Sous cette forme, après avoir plus ou moins disparu, elle semble revenir, elle cohabite avec celle en écriture chiffrée. Toutefois, comme le laisse penser Euro Maths, il semble qu'on puisse considérer qu'en unités de la numération, elle est seconde. C'est-à-dire que ce sont les « calculs » sur les écritures chiffrées des puissances de dix qui justifient la position des « unités », « dizaines » et « centaines ».

Il est bien possible que cette tâche ait eu un statut tout à fait particulier au moment de la contre-réforme : avant la réforme elle est intermédiaire pour « dénombrer », au moment de la réforme apparemment elle disparaît. À cette époque, on écrit directement le nombre dans le tableau quand on veut dénombrer une collection. La nécessité de restaurer un registre de manipulation symbolique semble la faire vivre plus ou moins indépendamment des tâches de dénombrement (au moment de la contre-réforme, ces dernières tâches semblent être fort rares dans certains manuels et souvent à réaliser directement dans le tableau). Finalement, l'évolution de l'enseignement de la numération pourrait progressivement lui avoir rendu sa niche habituelle : un intermédiaire pour dénombrer les grandes collections, ce qui était le cas dans l'enseignement ancien. Ces « décompositions – recompositions » correspondent grosso modo au travail de la technologie (P).

Une quête écologique

Au moment de la contre-réforme, on introduit beaucoup de tâches autour des « écritures » - les manipulations symboliques -. Ce qui est fascinant c'est que finalement, ce qui reste de ces tâches semble principalement se trouver dans les décompositions - recompositions de la numération où les écritures chiffrées des puissances de dix (ECPD) ont plus ou moins remplacé la numération en unités

Par ailleurs, il ne semble pas qu'on puisse faire « tout » ce qu'on faisait avant la numération en unités. En effet, la manipulation des écritures chiffrées demande de se passer de mots et donc de disposer d'outils symboliques beaucoup plus sophistiqués que la numération en unités. Par ailleurs, comme nous allons le voir, certaines tâches, notamment les conversions, n'ont pas véritablement de correspondance avec les ECPD.

Nous interprétons l'hétérogénéité dans les manuels actuels comme le produit de ces bouleversements. Nous voyons plusieurs raisons à cette hétérogénéité. Celle que avons montrée ici consiste à dire que le travail de « transposition », d'élaboration de technologies, qu'on observe dans ERMEL 1978 n'y est pas véritablement abouti, d'autant moins que le livre fait l'hypothèse d'un travail en bases qui a disparu des programmes peu de temps après sa parution. Il nous semble qu'un certain nombre de questions relatives à des technologies ou des techniques pour les différentes tâches de numération y sont laissées en suspens.

Cet aspect n'est peut-être pas le plus important. En effet, fondamentalement, il n'est pas sûr qu'on puisse se passer de la numération en unités pour étudier la numération. Il semble bien qu'ERMEL CE 1978 a eu ce projet. On peut interpréter le travail des manuels récents comme une recherche de mise en cohérence de la numération à destination de jeunes élèves en redonnant notamment un peu de légitimité à la numération en unités. Nous donnons maintenant un dernier exemple des bouleversements attachés à une tâche emblématique de la numération. La légitimité de l'ostensif « numération en unités » nous semble particulièrement cruciale pour comprendre les modifications dans la vie de ce type de tâches.

2.5. Les conversions : un type de tâches controversé

La dialectique « nombre de » - « chiffres des » n'existe pas dans l'enseignement ancien. En revanche, existe un type de tâche qui semble avoir aujourd'hui disparu. Il s'agit des « conversions » : convertir 3 centaines en dizaines, par exemple. Le « nombre de » est un cas particulier de conversion, quand un des nombres est exprimé dans l'unité « unité ».

Les conversions dans l'enseignement ancien

Dans l'enseignement ancien, nous pensons avoir repéré des conversions variées, plus ou moins élémentaires. Nous en distinguons trois sortes.

1) Les conversions simples ou la relation dix pour un : 1000F – 9 centaines de F = …F et aussi : 500F + 500F = …F

2) Les conversions « multiples de la relation », les nombres en jeu ont un seul chiffre non nul :

Combien y a-t-il d'unités dans 3 centaines ?

Combien 30 dizaines font-elles de centaines ?

Combien y a-t-il de décamètres dans 4 hectomètres ? ou 4 hm = … dam

3) Les conversions où plusieurs ordres de la numération sont impliqués, plusieurs chiffres non nuls.

Combien y a-t-il de centaines dans 35 dizaines ? (rép : 3 c 5 d). Pour traiter cette tâche, on peut utiliser le type précédent, 35 dizaines sont 30 dizaines et 5 dizaines soit 3 centaines et 5 dizaines.
Ces trois sortes de conversions semblent constituer une progression dans l'étude du type de tâches. Par ailleurs, la progression permet d'élaborer une technique pour traiter les tâches les plus complexes du type sans utiliser directement la propriété de la troncature.

Les conversions aujourd'hui

Aujourd'hui, les conversions sont quasiment inexistante dans les manuels du cours élémentaire. Il est possible que, le « nombre de » ait remplacé « les conversions » au moment de la réforme. Toutefois, depuis la réforme et jusqu'en 1995, même le « nombre de » est très peu répandu dans les livres. Ceci peut s'expliquer par la volonté de se passer des unités de la numération et sans cet ostensif, ce type de tâches ne peut exister.
Il n'est pas rare, dans des manuels actuels, que les relations entre unités (une centaine = dix dizaines par exemple) ne soient pas citées (ou seulement dans le livre du maître) alors que la propriété de la troncature, « nombre de », l'est. On trouve, des fois, des « calculs » autour des relations entre unités dans les leçons de numération ou de calcul : 800 + 200 =…. On trouve aussi de nouvelles tâches autour du « nombre de », par exemple : « calcule 3 c + 21 d ». Un type de tâches semble être en train d'émerger autour du « nombre de ».
Toutefois, en numération, la substitution des « nombres de » aux conversions affaiblit probablement la connaissance des relations entre unités et ne permet pas véritablement de traiter des tâches justificatives connexes, par exemple la retenue dans l'étude des techniques opératoires. Une façon élémentaire de justifier une retenue au rang des dizaines est d'utiliser la numération en unités. On a alors 13 dizaines = 1 centaine 3 dizaines. De même pour justifier l'algorithme de l'écriture chiffrée, il faut pouvoir exprimer la relation entre deux unités successives.L'émergence du type de tâches autour du « nombre de » apparaît assurément comme une nécessité écologique pour que la tâche vive. Néanmoins, il n'est pas sûr que les tâches qui se développent alors soient les plus adaptées pour satisfaire les besoins de l'étude de la numération.
Paradoxalement, le système métrique pourrait avoir « moins bougé » que la numération pendant ces 40 dernières années. Peut-être la raison en est qu'il possède un ostensif équivalent à la numération en unités : les unités km, hm, dam, m… et peut-être à cause de cela, il n'a pas perdu ses conversions. En revanche, il est assez clair qu'il s'est désolidarisé de la numération.

3. Conclusions

L'étude des manuels scolaires actuels semble montrer une grande hétérogénéité des technologies et des techniques. Hier, on constatait une grande homogénéité.

L'étude de l'enseignement ancien permet de mettre en évidence un ostensif probablement crucial : la numération en unités. Il a quasiment disparu au moment de la réforme mais revient progressivement. Il semble néanmoins avoir perdu certaines de ses propriétés « manipulatoires ». Sa marginalisation est susceptible d'expliquer la faiblesse du type de tâches « conversion » dont il semble pourtant qu'il est essentiel, notamment pour satisfaire des besoins connexes à l'étude de la numération de position. En fait, il a été plus ou moins remplacé par les écritures chiffrées des puissances de dix. Ces écritures permettent de faire les « mêmes » choses que la numération en unités à condition de maîtriser un formalisme qui n'est probablement pas disponible chez des jeunes élèves.

Ces éléments permettent-ils d'expliquer les résultats relatifs aux connaissances des élèves actuels ? Les problèmes que nous avons proposés sont principalement des problèmes de conversion. Est-ce parce que cette tâche a « disparu » qu'elle n'est pas réussie ? Ou bien, est-ce que les éléments que nous avons relevés dans les manuels sont plutôt le signe d'une désorganisation assez grande de l'enseignement de la numération et, finalement, les résultats des élèves seraient symptomatiques de cela ? Ou encore, est-ce parce que la numération est difficile et qu'il faut du temps aux élèves pour qu'ils la maîtrisent ?

4. Références bibliographiques

APMEP ; 1976 ; Mots. T.3 : vocabulaire de l'enseignement des mathématiques ; Paris : APMEP

Artaud, Michèle ; 1997 ; Introduction à l'approche écologique du didactique - l'écologie des organisations mathématiques et didactiques ; *Actes de la 9ème école d'été de didactique des mathématiques ;* 100-139

Bronner, Alain ; 1997 ; *Étude didactique des nombres réels : I-décimalité et racines carrées* ; Thèse nouveau doctorat ; Saint-Martin-d'Hères : Université de Grenoble 1

Chambris, Christine ; 2007 ; Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire ; *Repères – IREM* ; 69 ; 5-31

Chambris, Christine ; 2008 ; *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* ; Thèse ; Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7) ; http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/fr/

Chevallard, Yves ; 1992 ; Une réforme inaccomplie ; *La gazette des mathématiciens* ; 54 ; 17-21

Parouty, Véronique ; 2005 ; Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres. Foix mai 2004. Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour les maîtres ?* ; Toulouse : IREM de Toulouse

Perret, Jean-François ; 1985 ; *Comprendre l'écriture des nombres.* ; Exploration « recherches en sciences de l'éducation » ; Berne : Peter Lang.

COMMUNICATION C5

CREATION D'ENONCES DE PROBLEMES PAR LES ELEVES

Jiří Bureš, Université Charles de Prague

Hana Hrabáková, Université Charles de Prague

1. Introduction

La création d'énoncés de problèmes représente un moyen efficace et bien adapté pour développer la créativité des élèves de tous âges et influencer leur attitude envers les mathématiques. Au cours de la création d'un énoncé de problème, les élèves doivent surmonter différentes difficultés, ce qui peut contribuer au développement de leurs connaissances et aussi de leur culture mathématique. Au cours de cette création, l'autonomie dans le travail permet aux élèves de savourer le vrai travail d'un mathématicien (Silver, 1994). En plus, la production ou la formulation de questions et de problèmes influence, en général d'une manière positive, la capacité des élèves à résoudre les problèmes et peut aider les enseignants et les chercheurs à pénétrer dans la conception des notions et dans les processus mathématiques des élèves. (Bonotto, 2006).

La première partie de notre contribution consiste à définir et à caractériser la notion de *problem posing* et à expliquer son rapport avec la créativité. Dans la deuxième partie, nous décrirons le «Concours d'originalité de problèmes». Il s'agit de l'exemple d'une activité éducative où les élèves produisent les énoncés de problèmes. Dans la troisième partie, nous montrerons des extraits de la discussion en classe, les exemples des énoncés créés et nous proposerons quelques conclusions.

Comme nos recherches ont été menées dans le cadre du système scolaire tchèque, nous allons donner une brève description des enseignements primaire et secondaire en République tchèque. La scolarité obligatoire dure 9 ans, les élèves commençant à l'âge de 6 ans à fréquenter l'école fondamentale (elle correspond à la fois à l'école élémentaire et au collège en France). Ils peuvent y rester 9 ans, les bons élèves pouvant passer les examens d'entrée soit aux collèges-lycées de 8 ans (après 5 ans d'école fondamentale), soit aux collèges-lycées de 6 ans (après 7 ans d'école fondamentale). Ceux qui restent 9 ans à l'école élémentaire peuvent ensuite passer les examens d'entrée à un lycée de 4 ans (général ou professionnel) ou à un établissement d'enseignement professionnel de 3 ou 5 ans. Le nombre d'heures de mathématiques à l'école fondamentale varie entre 3 et 5 séances hebdomadaires de 45 minutes chacune et au lycée entre 2 et 4 séances hebdomadaires de 45 minutes chacune.

2. Production ou formulation de questions et de problèmes en général (*Problem posing*)

La notion anglaise de *problem posing* recouvre plusieurs activités plus ou moins différentes liées à la production ou formulation de questions et de problèmes. C'est la raison pour laquelle nous utilisons cette notion dans ce texte. D'après Leung (1997), le *problem posing* représente la création de nouveaux problèmes dont les résolutions ne sont pas connues au moins pour celui qui les crée. [...] Et ainsi, le *problem posing* consiste en la modification de la formulation d'un problème donné dans différentes représentations. Selon Bonotto (2006), le *problem posing* est considéré comme un processus dans lequel les élèves créent leurs propres interprétations des situations particulières basées sur leurs expériences mathématiques et les formulent comme un problème mathématique. Ceci leur permet d'interpréter et d'analyser la réalité, c'est-à-dire de distinguer les données pertinentes et non-pertinentes, de découvrir les relations entre les données et décider de l'(in)suffisance des informations disponibles pour la résolution du problème.

Sous la notion de *problem posing*, Silver (1993) distingue trois types d'activités plus ou moins différentes. Le premier type consiste à créer les énoncés avant la solution d'un problème (*presolution posing*). Il s'agit d'une situation donnée (par exemple issue de la vie courante) à partir de laquelle on crée de nouveaux énoncés. Dans le deuxième type d'activités, on modifie ou reformule l'énoncé de problème au cours de la résolution du problème (*within-solution posing*). Cette interprétation de l'énoncé aide à mieux comprendre l'énoncé et à faciliter la résolution du problème. Le troisième type d'activités vise à changer les données de l'énoncé original, ce qui intervient après la résolution du problème (*postsolution posing*). Ainsi, de nouveaux énoncés naissent à partir de l'énoncé original. Pour illustrer chacun des trois types d'activités, nous présentons un exemple.

Considérons la situation où M. Funès possède une somme d'argent de 1320 €. A partir de cette situation, nous pouvons, sans en chercher la solution, créer l'énoncé suivant:

Monsieur. Funès partage 1320 € entre Monsieur Cruchot, Monsieur Septime et Monsieur Duchemin. Monsieur Duchemin reçoit six fois plus d'argent que Monsieur Cruchot et Monsieur Septime 4 fois plus d'argent que Monsieur Cruchot. Combien d'argent reçoit chacun d'entre eux?

Lorsque nous voulons résoudre le problème proposé ci-dessus, nous faisons des interprétations des données de l'énoncé : il s'agit de 3 personnes, le total est divisé en 11 parties etc. Après avoir résolu le problème, nous pouvons modifier les données et obtenir ainsi de nouveaux énoncés : en faisant varier le nombre de personnes (4 ou 5), en choisissant une somme différente, etc.

Silver (1993) propose aussi plusieurs points de vue sur le *problem posing*. Nous reprenons ceux que nous avons utilisés dans la préparation de notre expérience.

Le *problem posing* est ainsi considéré comme :

- un outil pour améliorer la capacité des élèves à résoudre des problèmes,
- un moyen de pénétrer dans la conception des mathématiques des élèves et des concepts mathématiques construits par les élèves,
- un outil pour améliorer l'attitude des élèves envers les mathématiques,
- un indice de la créativité ou du talent pour les mathématiques.

Le *problem posing* est aussi étroitement lié à la créativité. Selon Silver (1997) et Leung (1997), la créativité caractérise non seulement les personnes ayant du talent, mais elle est aussi liée à des connaissances approfondies sur un domaine particulier. Ceci implique que les élèves ayant déjà acquis les connaissances sur un ou plusieurs domaines des mathématiques scolaires peuvent s'en servir pour développer leur créativité. Torrance (1966) a défini trois composantes clés de la créativité qui permettent de la mesurer :

- *Continuité/fluidité (fluency)* : se rapporte au nombre d'idées produites en répondant à une tâche.
- *Flexibilité (flexibility)* : se rapporte aux changements d'approches qui apparaissent en répondant à une tâche.
- *Nouveauté (novelty)* : se rapporte à l'originalité des idées produites en répondant à une tâche

Le tableau suivant (Leung, 1997) montre les relations entre la formulation de problèmes, la résolution de problèmes et la créativité.

Résolution de problèmes	**Créativité**	**Formulation de problèmes**
Les élèves explorent les problèmes « à fin ouverte », avec de nombreuses interprétations, manières de résolution et réponses ou solutions possibles.	→Fluidité←	Les élèves produisent beaucoup de problèmes et partagent les problèmes produits. Les élèves produisent les problèmes pour lesquels existent de nombreuses procédures de résolution.
Les élèves résolvent (expriment ou justifient) les problèmes d'abord d'une manière puis, d'autres manières. Les élèves discutent de nombreuses manières de résolution.	→Flexibilité←	Les élèves utilisent l'approche «S'il n'y avait pas... » pour produire les problèmes.
Les élèves examinent de nombreuses manières de résolution ou des réponses (expressions ou justifications), ensuite, ils en produisent une autre, différente des précédentes.	→Nouveauté←	Les élèves examinent quelques problèmes produits et ensuite, ils produisent un problème différent.

Dans le cadre de notre expérience, nous nous sommes concentrés sur le développement de la première des composantes - la fluidité. Les élèves ont du créer un problème original par rapport aux autres problèmes créés. Nous décrirons le déroulement de l'activité dans la partie suivante.

3. Description de l'expérience

Cette activité fait partie d'une recherche complexe en cours, menée par Guy Brousseau et Jarmila Novotna - *Contribution de la culture scolaire et des situations didactiques à l'éducation mathématique.* L'outil de recherches est le problème « verbal » et son traitement par les élèves. Parmi les questions que nous nous posons dans le cadre de la recherche, nous allons citer celles qui sont liées à notre expérience :

- Les élèves sont-ils capables d'identifier et d'expliquer les ressemblances et les différences entre les problèmes donnés; d'identifier les problèmes relevant du même modèle mathématique ?
- Les élèves sont-ils capables de créer les problèmes d'après une consigne spécifique ?
- Comment cette activité peut-elle contribuer à la motivation des élèves pour l'apprentissage des mathématiques ?
- Quelles compétences mathématiques peuvent être développées au cours de cette activité ?

La partie de cette recherche que nous allons décrire est l'expérience que nous avons appelée « Concours d'originalité de problèmes ». Ce concours a été réalisé dans une classe d'un collège-lycée pragois de 8 ans avec les élèves de 13-14 ans (8^e année de scolarité).
Les objectifs du concours étaient :

- attirer l'attention des élèves vers les problèmes en tant que lien entre les mathématiques et la fiction de la vie réelle,
- faire créer par les élèves des énoncés de problèmes correctement formulés,
- faire résoudre par les élèves des problèmes insolites,
- faire discuter les élèves sur les problèmes,
- savoir classer les problèmes d'après le modèle mathématique.

Dans le « Robert quotidien », un modèle mathématique est défini comme un « modèle formé par des expressions mathématiques et destiné à simuler un certain processus ». Pour l'exemple d'énoncé de problème que nous avons cité ci-dessus, il s'agit de la relation de la partie à un tout qui en est le modèle mathématique. Nous montrerons d'autres exemples plus tard.
Le concours comporte trois séquences. **La première séquence** vise à introduire l'activité. Elle dure 45 minutes. Son objectif est d'introduire les notions de base qui sont utilisées dans le cadre du concours - le problème original, les problèmes de la même famille. Le professeur propose trois problèmes aux élèves qui travaillent par deux et leur tâche est de les résoudre. Ensuite, ils écrivent les solutions au tableau. Le professeur leur demande d'identifier les différences et les similarités dans les résolutions des problèmes proposés pour ensuite en discuter en classe. Ensuite, il est demandé aux élèves d'inventer d'autres problèmes originaux et de la même famille en lien avec les trois problèmes proposés. A la fin de la première séquence, il est demandé aux élèves d'inventer un problème original pour participer au concours des problèmes originaux.

Avant de présenter les problèmes qui ont été proposés pendant la première séquence, nous donnons les définitions des notions de base que nous avons inventées pour cette activité : le problème original, les problèmes de la même famille. Le problème original est un problème dont le modèle mathématique nécessaire pour la solution diffère des modèles des problèmes donnés. Les problèmes de la même famille sont les problèmes dont le modèle mathématique est partiellement ou totalement le même que le modèle d'un problème donné. Il faut souligner deux aspects importants de ces catégories. Le classement est toujours relatif à un groupe spécifique de problèmes et, dans certains groupes de problèmes, plusieurs variantes de classement peuvent apparaître.

Pour illustrer les notions de base pour les élèves, le professeur a proposé les problèmes suivants :

1. Hier, dans un bistrot, 188 croque-monsieurs, croque-madames et sandwichs ont été vendus au total. Nous savons qu'il y avait sept fois plus de croque-monsieurs que de sandwichs et de huit croque-madames de plus que de sandwichs. Combien de croque-monsieurs, croque-madames et sandwichs ont été vendus?
Croque-Madames........ x + 8; Croque-Monsieurs.....7. x; Sandwichs................. x;

Total...............................188
$x + 7x + x + 8 = 188$ $\underline{x = 20}$

On a vendu 140 croque-monsieurs, 28 croque-madames et 20 sandwichs.

2. M. Funès partage 1320 € parmi M. Cruchot, M. Septime et M. Duchemin. M. Duchemin reçoit six fois plus d'argent que M. Cruchot et M. Septime 4 fois plus d'argent que M. Cruchot. Combien d'argent reçoit chacun d'entre eux?

M.Cruchot........ x; M.Septime..........4 x; M.Duchemin......6.x; Total............1320 €

$x + 4x + 6x = 1320$ $\underline{x = 120}$ €
M.Cruchot reçoit 120 €, M.Septime reçoit 480 € et M.Duchemin 720 €.

3. Un bus et une voiture partent en même temps pour Pilsen à 8h. Le bus roulant à la vitesse moyenne de 60 km/h arrive à Pilsen à 10h précises. A quelle heure arrive à Pilsen la voiture roulant à la vitesse moyenne de 90 km/h. Le bus et la voiture ont suivi le même chemin.

60 km/h.................... 120 minutes; 90 km/h....................... x minutes

$x : 120 = 60 : 90$ $\underline{x = 80}$ 8h + 1h20 = <u>9h20</u>
La voiture arrive à Pilsen à 9h20 .

Le modèle mathématique des deux premiers problèmes est la relation de la partie à un tout, donc il s'agit de problèmes de la même famille. Le troisième problème est du modèle de la proportion inverse donc c'est un problème original par rapport au cadre du groupe de problèmes donné.

La deuxième séquence dure deux semaines. Les élèves créent d'abord des problèmes, se familiarisent avec les problèmes proposés par les autres élèves et les résolvent. Au bout d'une semaine, tous les élèves apportent leurs énoncés de problèmes puis le professeur les rassemble sur un document qu'il distribue aux élèves. Pendant une semaine, chacun a le droit de remplacer, une fois, le problème qu'il a proposé par un autre. Ensuite, la classe est divisée en groupes de 4 – 5 élèves, les élèves devant se répartir entre eux tous les problèmes et les résoudre à la maison.

Les deux premières séquences constituent la préparation pour **la troisième séquence** - le concours d'originalité de problèmes. Le concours se déroule pendant deux cours consécutifs. Les élèves doivent classer les problèmes en familles et chercher le ou les problèmes originaux. Pendant la première partie, les élèves travaillent en groupes, ils discutent des problèmes, ils s'adressent aux auteurs dont les énoncés ne sont pas bien faits pour les amener à préciser ou à reformuler les énoncés. Ensuite, ils discutent en groupes et répartissent les problèmes en familles. Au cours de la deuxième partie, chaque groupe présente un problème, le classe dans une famille ou pas et doit justifier sa décision : chaque groupe participe au classement et chaque groupe parvient à des catégories en partie différentes. Dans la discussion finale, les élèves échangent sur les familles établies et proposent des modifications dans la classification des problèmes.

4. Evaluation de l'activité

L'expérience est composée de plusieurs activités. Nous en avons choisi deux qui nous semblent avoir contribué à développer la culture mathématique des élèves - la création d'énoncés de problèmes et la discussion en classe sur la classification de problèmes.

Remarques sur les énoncés créés

Les élèves ont produit 23 énoncés qui varient selon plusieurs caractéristiques. Les élèves ont pu être influencés par la notion d'originalité et ils l'ont recherchée dans différents aspects et non dans le modèle mathématique. La longueur des énoncés varie, des plus courts (26 mots) aux plus longs (208 mots). Le contexte et les actants des énoncés étaient surtout proches du manuel scolaire ou du milieu quotidien des élèves ; le registre de langue était plutôt standard en dehors de quelques énoncés contenant des expressions familières. La difficulté des problèmes à résoudre était adéquate au niveau des élèves, à l'exception d'une devinette et d'un problème exigeant des procédures inconnues des élèves. Pour la plupart des énoncés, le modèle mathématique était la relation de la partie à un tout.

Les élèves ont aussi créé quelques énoncés qui n'étaient pas clairs et univoques ou encore dont la solution n'existait pas. Nous allons donner deux exemples d'énoncés qui illustrent les erreurs les plus fréquentes.

<u>*Les boîtes de jus*</u>
Dans un magasin, il y avait une offre spéciale «Jus d'orange en boîtes». Le 1er jour, on a vendu <u>9/18</u>, le 2e jour 40 boîtes de jus et le soir, ils ont découvert <u>3/36</u> derrière un casier. Combien de boîtes de jus y avait-il au départ ?

Les fractions citées dans l'énoncé représentent les parties d'un tout qui n'est pas explicitement défini. Après les questions des autres élèves, l'auteur a corrigé l'énoncé de la manière suivante :

Dans un magasin, il y avait une offre spéciale «Jus d'orange en boîtes». Le 1er jour, on a vendu 9/18 <u>du nombre total</u>, le 2e jour 40 boîtes de jus du nombre total et le soir, ils ont découvert 3/36 du nombre total derrière un casier. Combien de boîtes de jus y avait-il au départ ?

L'autre exemple illustre le cas d'énoncés de problèmes dont la solution n'existait pas.

<u>*Les champignons*</u>

Trois copines - Pauline, Caroline et Monique - ont ramassé des champignons. Pauline a trouvé 4 champignons de plus que Caroline et Monique deux champignons de moins que Pauline. Elles on trouvé 53 champignons au total. Après le retour à la maison, Pauline a réalisé qu'elle avait 5 champignons véreux, Caroline 6 et Monique 3. Combien de champignons avait chacune d'elles à la fin?

$$3x + 6 = 53 \qquad\qquad x = 47/3$$

L'auteur a aussi modifié l'énoncé en choisissant 51 comme nombre total de champignons.

La classification des problèmes

Pendant le travail en groupes, plusieurs familles sont apparues : fractions, pourcentages, temps, transformation d'unités, mélange des problèmes non classés...Le travail en classe a commencé par la création d'un grand nombre de familles. Au cours de la discussion, certaines de ces familles ont été réunies et les élèves se sont mis d'accord sur la classification finale. Certains problèmes ont été classés dans plusieurs familles selon les différentes procédures de résolution des problèmes. La discussion a aidé certains élèves à comprendre les similarités et différences des modèles mathématiques, ainsi que le montre l'extrait suivant :

Il précède une discussion sur quelques problèmes concernant les fractions et les pourcentages.
P - professeur, E - élève (s)

- <u>E Dans certains groupes (de problèmes), on travaille non seulement avec les pourcentages, mais aussi avec les fractions.</u>
- P Et... Certains de ceux-ci?
- E En plus, par exemple dans le problème (*appelé*) Řáholec, il y a aussi la proportionnalité.
- P Dans le problème Řáholec, on travaille aussi avec la proportionnalité. Alors, qu'est-ce que vous avez fait avec cela?
- E Classer Řáholec dans deux catégories.
- P Classer Řáholec dans deux catégories. Et où le classer?
- E Classer Řáholec dans deux catégories et le classer aussi dans *le rapport*.
- P Bon, on va le séparer *(créer une nouvelle catégorie)*, il n'y a pas de catégories comme ça.
- E Mais je pense classer dans deux catégories ceux qui ont des fractions …
- P C'est une question…. Qu'en pensez-vous ?
- E Classer dans deux catégories.
- P Classer dans deux catégories?
- E Classer dans deux catégories.

- P Les problèmes avec des fractions.....vous avez dit....un groupe a dit qu'il y a des problèmes avec des pourcentages et des problèmes avec les fractions...Alors, on les garde tous dans une catégorie ou on les classe dans deux catégories ?
- E Mais c'est la même chose...
- P Honzo…
- E ...que c'est la même chose...
- P Et pourquoi c'est pareil?
- E Parce que quand on travaille avec des pourcentages, on peut faire pareil avec des fractions, avec les mêmes nombres.
- P Bien…. Báro, tu partages cette opinion ? Oui. Tout le monde est d'accord ?
- *(E sont d'accord)*
- P D'accord, on met dans une seule catégorie tout ce qui est avec les pourcentages et les fractions. D'accord ? oui? Katko...
- E Ben, on y ajoute encore...

Le travail se poursuit par un reclassement de problèmes concernant les fractions et pourcentages dans la même catégorie. La découverte de l'analogie entre le calcul avec les pourcentages et avec les fractions constitue, pour les élèves, un nouvel exemple de relations entre différents domaines mathématiques. Certains énoncés dont il était question dans l'extrait de discussion sont présentés ci-dessous:

- *Les boîtes de jus*

Un magasin a proposé une offre spéciale «Jus d'orange en boîtes». Le 1er jour, il a vendu 9/18 du nombre total, le 2e jour, 40 boîtes de jus du nombre total et le soir, il restait 3/36 du nombre total derrière un casier. Combien de boîtes de jus y avait-il au départ ?

- *Le plat*

Sur la carte d'un restaurant, les prix ont été indiqués pour 500 grammes. La portion prévue pour les enfants était deux fois plus petite et encore réduite de 28%. Combien de grammes de nourriture reçoit un enfant?

- *La forêt Řáholec*

Křemílek et Vochomůrka sont allés ramasser des champignons dans la forêt Řáholec. En rentrant, ils ont rencontré Manka et Rumcajs qui avaient 50 champignons. Křemílek et Vochomůrka avaient 16% de moins qu'eux. Křemílek et Vochomůrka ont trouvé les champignons de quatre espèces : amanites, cèpes, chanterelles, bolets rudes dans le rapport 3:2:5:4. Combien d'exemplaires de chaque espèce de champignons ont trouvé Křemílek et Vochomůrka?

- *Les escargots*

Julián a 1/4 du nombre total des escargots. Krasoslav en possède 1/8, Mirka a 1/4 de plus que Tupmila qui, malheureusement, n'a pas d'escargots. Milada a toute une moitié du nombre total des escargots, à la différence de Jarda qui n'appartient pas du tout à ce qroupe, parce qu'il collecte les limaçons et les pélicans. Exprime à l'aide d'un rapport lequel des groupes a le plus d'escargots? Julián, Milada et Mirka, ou Krasoslav et Tupmila

Conclusion

Le concours d'originalité de problèmes représente un moyen pouvant contribuer à développer la culture scolaire des élèves. Il permet aux élèves d'analyser les énoncés de problèmes différents, de les comparer et d'en chercher les ressemblances et différences. Il contribue aussi à développer une attitude plus positive envers les problèmes « verbaux ». La validation des résultats fait partie de la discussion et devient ainsi indépendante du professeur. En plus, la création d'énoncés de problèmes représente une part essentielle du travail des mathématiciens. L'aspect motivant de l'activité est favorisé par la compétition et par l'apprentissage en groupes.

L'activité a été assez bien acceptée par les élèves. D'après le questionnaire d'évaluation qu'ils ont rempli après le concours, ils ont apprécié surtout la possibilité de communiquer leur propre opinion, de devoir justifier les décisions, de pouvoir réviser la résolution de différents problèmes et surtout de pouvoir réfléchir aux procédures de résolution, pas seulement aux solutions des problèmes.

Le concours nous a fourni quelques réponses aux questions que nous nous sommes posées auparavant. Les élèves ont su créer des énoncés de problèmes dans des domaines différents de leur connaissance mathématique préalable, ont été capables de découvrir les ambiguïtés de la formulation des énoncés, d'en discuter et de reformuler les énoncés, ce qui représente un travail sur la précision mathématique et sur l'utilisation de la langue. Au cours de la discussion, les élèves se sont mis d'accord sur la classification finale des problèmes et ils ont découvert la ressemblance entre les fractions et les pourcentages.

Pourtant, il reste encore des questions ouvertes concernant surtout l'évaluation de l'activité et l'introduction de l'activité dans l'enseignement :

-Comment évaluer cette activité? Qu'est-ce qu'on peut mesurer/évaluer?

-Quand et comment introduire cette activité dans l'enseignement?

-Quels en sont les avantages et inconvénients pour le professeur et pour les élèves?

-Quelles sont les relations de cette activité avec la connaissance mathématique préalable des élèves, la maîtrise de la langue maternelle, la mention en mathématiques etc?

Bibliographie

[1] Bonotto, C. (2006): Extending students' understanding of decimal numbers via realistic mathematical modeling and problem posing, Paru dans: Novotna, J., Moraova, H., Kratka, M. & Stehlikova, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2. 33-40. Prague: PME.

[2] Brousseau, G. (1998): Théorie des situations didactiques. Grenoble: La pensée sauvage. 395 p. coll. Recherches en Didactique des Mathématiques.

[3] Novotna J. (2000): Analyza reseni slovnich uloh [kapitoly z didaktiky matematiky]. Praha: Univerzita Karlova. 23 p.

[4] Sarrazy, B. (2002): Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem-solving among, Paru dans: *European Journal of Psychology of Education*. 2002. vol. XVII. 3. 321-341.

[5] Silver, E.A. (1994): On Mathematical Problem Posing, Paru dans: *For the Learning of Mathematics*. 2002. vol. 14. 1. 19-28.

[6] Silver, E.A., Cai, J. (1996): An analysis of aritmetic problem posing by middle school students, Paru dans: *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 27. 5. 521-539.

L'évolution des connaissances qu'ont les enfants des fonctions cognitives de l'écriture des nombres : apport de l'épreuve DENORECO[1]

Christelle Delaplace & Annick Weil-Barais

Laboratoire de Psychologie « Processus de Pensée et Interventions »
Université d'Angers[2]
christelle.delaplace@univ-angers.fr
annick.weil-barais@univ-angers.fr

Résumé

Nous présentons ici une épreuve (DENORECO) conçue dans la perspective d'évaluer la capacité des enfants à utiliser leur notation numérique des quantités pour résoudre des problèmes. Les résultats présentés comparent les réponses d'élèves du CP au CM2. Ils mettent en évidence les difficultés qu'ont les enfants à comprendre que l'écriture numérique des quantités préalablement dénombrées peut être ultérieurement réutilisée pour effectuer des calculs. Ils attirent l'attention sur un aspect jusqu'alors peu pris en compte dans les études concernant le développement des compétences numériques des enfants, à savoir leur connaissance des fonctions cognitives des systèmes de notation. Lorsque les notations sont produites par l'enfant à la demande, on n'est pas assuré que l'enfant comprenne bien la nature du lien entre ce qui est noté et les aspects de la réalité qui sont notés.

1 Introduction

Du point de vue anthropologique et psychologique, un certain nombre d'auteurs (en particulier, Olson, Goody, Vygotski) ont attiré l'attention sur le fait que l'écriture fait partie de ce qui a le plus transformé le psychisme humain. Par exemple, le fait de noter des informations permet de dépasser nos capacités de mémorisation, de communication, de réflexion et de raisonnement. L'écriture libère en partie des contraintes spatio-temporelles et cognitives (limitation de la mémoire de travail et de l'accès aux connaissances en mémoire à long terme). Ce qui est écrit peut être repris, retravaillé et réfléchi, à condition que les traces fassent sens pour la personne qui y est confrontée.

Si à l'échelle du développement de l'espèce l'idée d'une transformation des modes de pensée associée à l'invention, la transformation et l'instrumentation des systèmes d'écriture (l'imprimerie, les formalismes logiques, algébriques, les logiciels de traitements de texte, etc.) est étayée par un certain nombre de faits (par exemple, le développement des sciences et des technologies), on manque de données au plan psycho-génétique. De fait, on connaît mal les transformations des conduites des enfants associées à l'appropriation des différents systèmes d'écriture qu'ils apprennent à l'école. De manière générale, comme nous l'avons relevé dans

[1] La réalisation de cette recherche a bénéficié du soutien du programme de recherche « Ecole et Sciences Cognitives » de la MRT et du programme de recherche « OuForEP, Outils pour la Formation, l'Education et la Prévention » de la région des Pays de La Loire.

[2] Laboratoire de Psychologie « Processus de Pensée et Interventions »
Université d'Angers, Maison des Sciences Humaines
11 boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01

une précédente publication (Weil-Barais, Gaux & Iralde, 2007), la connaissance par les enfants des fonctions pragmatiques et cognitives qu'assurent les notations a été très peu étudiée. Quelques travaux ont pu mettre en évidence une émergence de la fonction référentielle des notations vers l'âge de 6 ans (Bialystok, 2000 ; Bialystok & Martin, 2003 ; Tolchinsky Landsmann & Karmiloff-Smith, 1992). Ce n'est que vers 8-9 ans, voire même 11 ans que les enfants acquerraient la capacité à produire des notations adéquates, le contexte social pouvant par ailleurs avoir un effet sur ces productions (Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1980.)

Concernant la connaissance du système numérique qui nous occupe dans cet article, les tests existant (l'UDN-II de Meljac & Lemmel, l'Échelle d'apprentissages scolaires primaires (ECHAS) de Simonart, le Numérical de Gaillard, le Tedi-Math de Van Nieuwenhoven, Grégoire & Noël, le Péda 1C (tests pédagogiques de 1er cycle primaire) de Simonart n'évaluent pas la connaissance des fonctions cognitives de l'écriture des nombres, en premier lieu la fonction référentielle. Or, l'une des fonctions essentielles de l'écriture des nombres est de représenter des quantités qui peuvent faire ensuite l'objet de traitements (comparées, combinées, etc.) en l'absence des collections d'objets.

Les compétences numériques évaluées par les tests existants (niveaux maternelle et école primaire) concernent la classification et la sériation, la conservation des quantités (en référence à la théorie de Piaget), la connaissance de la suite des numéraux, le dénombrement, la lecture des nombres, leur écriture sous dictée, la connaissance des signes opératoires et des opérations arithmétiques (en référence aux travaux qui mettent l'accent sur l'importance de la connaissance de la suite numérique, des procédures de dénombrement et des algorithmes de calcul). Les rares items qui pourraient évaluer ce que les enfants se représentent à propos des nombres concernent l'estimation de grandeurs. Par exemple, on demande à l'enfant de comparer deux collections d'objets (sans pouvoir les compter), ou on lui pose des questions du type : « une lettre de 20 pages, est-ce beaucoup ? » (Épreuve d'estimation en contexte du test Numerical ; Gaillard, 2000).

L'absence d'épreuves concernant la connaissance de la fonction référentielle des nombres, nous a conduits à construire une épreuve spécifique que nous allons dans un premier temps décrire. Dans un second temps, nous présenterons les données obtenues dans deux études exploratoires. En conclusion, nous indiquerons les évolutions possibles de l'épreuve en fonction de ces données.

2 Présentation du test

Les questions qui ont orienté la conception du test sont les suivantes : quel lien existe-t-il entre la capacité à écrire les nombres et l'usage des quantités notées pour faire des calculs ? A quelle période du développement les enfants utilisent-ils spontanément leurs notations ?

Le test DENORECO (« DENO » pour dénombrement et « RECO » pour réunion de collections) a été créé pour répondre à ces questions (Weil-Barais, Gaux, Iralde & alli, 2004). Il a été initialement conçu pour être intégré à une batterie de tests destinée à l'évaluation de la maîtrise des systèmes de notation chez l'enfant âgé de 6 à 12 ans[3].

La situation présentée aux enfants permet, d'une part, d'observer comment, à la demande de l'observateur, les enfants notent spontanément les quantités. D'autre part, elle a pour but de rendre compte de l'utilisation spontanée que font les enfants des notations qu'ils ont produites, afin de réaliser un calcul simple (addition de deux quantités inférieures à 10, de façon à ce que les enfants n'aient pas de difficulté à effectuer les opérations mentalement).

[3] La conception de cette batterie a été réalisée dans le cadre d'un programme de recherche COGNITIQUE ECOLE & SCIENCES COGNITIVES : Pratiques d'écriture et instrumentation du psychisme : approches psychologiques et didactiques (2001-2003).

Les quatre premiers items ont pour but de vérifier les capacités de dénombrement et d'écriture des nombres de l'enfant. Les deux derniers items sont ceux qui nous intéressent particulièrement puisqu'ils sont liés à la fonction référentielle de la notation. Ce sont ces deux items qui nous permettent d'observer si les enfants utilisent spontanément leurs notations.

2.1 Matériel

Il est composé de boîtes remplies de petits objets en bois peint (environ 2 cm) représentant des animaux marins (figure 1), d'un sac pour recevoir le contenu des boîtes lorsqu'ils sont mélangés (items 5 et 6) et du matériel pour écrire, dessiner ou découper. Il s'agit d'une trousse d'écolier comprenant des crayons (noir et de couleur) et une gomme, une paire de ciseaux, un double-décimètre et un rapporteur ainsi que d'une feuille de papier au format A4.
Les boîtes sont au nombre de quatre. La boîte n°1 contient 6 poissons, la boîte n°2, 8 poissons, la boîte n°3, 2 poissons, 2 étoiles de mer et 3 oiseaux et, enfin, la boîte n°4, 4 poissons, 4 étoiles de mer, et 4 oiseaux. Pour chaque boîte, une gommette différente est collée sur le couvercle permettant de l'identifier.

Insérer ici la figure 1

Sur la feuille de papier sont dessinées six cases (trois lignes comprenant chacune deux cases), identifiées de telle sorte que les quantités à additionner ne soient pas disposées l'une en dessus de l'autre. Cette présentation vise à ne pas induire une réponse mécanique.

2.2 Conditions d'administration du test

Cette épreuve est individuelle. La consigne générale de l'épreuve est énoncée par l'expérimentateur. Il montre à l'enfant les différentes boîtes et la feuille de réponse. Il attire son attention sur les différentes gommettes apposées sur les couvercles. Il explique qu'il mettra les contenus des différentes boîtes sur la table et que la tâche demandée sera d'abord de dire combien il y a d'objets et ensuite de noter la quantité sur la feuille fournie, à l'endroit correspondant au dessin du couvercle de la boîte (montré du doigt à chaque item).
Les items 1 à 6 sont présentés successivement, sans limitation de temps.
Item 1 : l'expérimentateur renverse le contenu de la boîte n°1 sur la table, en prenant soin qu'il n'y ait pas de recouvrement entre les objets (6 poissons). La gommette sur le couvercle de la boîte reste visible. L'expérimentateur demande alors à l'enfant combien il y a d'objets, et de noter sa réponse sur la feuille de papier mise à sa disposition dans la case correspondante qu'il pointe du doigt (cf. figure 2).
Si la quantité indiquée est incorrecte, l'expérimentateur aide l'enfant jusqu'à ce qu'il fournisse oralement la quantité exacte d'objets. En effet, il ne s'agit pas de tester la capacité à dénombrer, mais d'évaluer l'écriture des quantités.
Item 2 : la boîte n°2 est utilisée. La procédure est sensiblement la même que pour l'item 1 mis à part que les objets (8 poissons) sont disposés en ligne sur la table avec un intervalle d'environ 1 cm entre deux objets.
Item 3 : les objets de la boîte n°3 (2 poissons, 2 étoiles de mer, 3 oiseaux) sont disposés en désordre sur la table mais sans recouvrement. Si l'enfant commence par indiquer oralement le nombre d'objets par catégorie, l'expérimentateur lui demande d'indiquer combien il y a d'objets en tout.
Item 4 : les objets sont disposés sur la table en lignes par catégorie (4 poissons, 4 étoiles de mer, 4 oiseaux). La correspondance terme à terme entre objets est respectée. Cette fois encore, si l'enfant indique le nombre d'objets par catégorie, on lui demande de dire combien il y a d'objets en tout.

Items 5 et 6 : Pour l'item 5, l'expérimentateur indique à l'enfant qu'il va maintenant mélanger le contenu des boîtes 1 et 2 et que ce dernier devra dire et noter combien il y a d'objets en tout. Pour l'item 6, ce sont les contenus des boîtes 3 et 4 qui sont mélangés. Deux variantes de disposition du matériel ont été expérimentées : ensemble des objets visible ou non visible (*cf.* § 2.4).
Dans le contexte des études rapportées ci-après, l'enfant est informé qu'il participe à une étude, que ses propres résultats ne seront pas divulgués, qu'il doit répondre du mieux qu'il peut aux questions qui lui seront posées mais qu'il a le droit de ne pas savoir faire. Il a par ailleurs tout le temps qu'il souhaite pour répondre. Le livret utilisé où sont notées les consignes et les réponses des enfants comporte le titre « écrire », ce dont l'enfant peut prendre connaissance, mais son attention n'est pas attirée sur cette information.

2.3 Grilles d'observation

Pour chacun des items, l'expérimentateur note sur une grille d'observation les réponses de l'enfant. Les informations relevées sont les suivantes : 1) la quantité verbalisée, 2) la quantité notée, 3) le type de notation et 4) les stratégies utilisées.
Les différents types de notations répertoriés dans les grilles sont : la réponse numérique – la notation utilise les chiffres arabes ; la réponse numérale – nombres écrits alphabétiquement ; la réponse graphique figurative – les quantités sont représentées à l'aide de dessins figuratifs (par exemple, l'enfant dessine des poissons, des oiseaux et des étoiles) ; et enfin la réponse graphique non figurative – l'enfant utilise des signes ou symboles (par exemple, il dessine des bâtons ou des croix).
Les différents types de stratégies référencés dans les grilles sont le dénombrement (par comptage oral ou pointage), l'addition, la multiplication, et enfin le calcul à partir des quantités notées. Dans ce dernier cas, l'enfant regarde ou pointe du doigt les quantités qu'il a notées sur sa feuille de réponses, calcule mentalement ou en verbalisant. Dans certains cas, l'enfant pose l'opération.

Insérer ici la figure2

Chaque item donnant lieu à des ensembles de stratégies particuliers, les différents types de stratégies répertoriés diffèrent sensiblement d'un item à l'autre. Par exemple, la stratégie « utilisation des notations » ne vaut que pour les items 5 et 6 pour lesquels les notations précédentes peuvent être utilisées. La grille d'observation de l'item 5 est présentée à titre d'exemple en figure 2.

2.4 Variantes

Dans la mesure où il s'agit d'un test en cours de validation, à l'heure actuelle deux versions du test ont été expérimentées. Nous précisons ci-après les variantes (DENORECO-0 et DENORECO 1) et les raisons qui nous ont conduits à procéder à des modifications.

- Dans la version 0, pour les items 5 et 6, les contenus des boîtes sont vidés dans un sac en toile ; dans la version 1, les contenus sont déversés directement sur la table. Cette modification vise à éviter que les enfants pensent que la tâche relève d'actions matérielles à accomplir, ce qui peut être induit par l'action de mettre dans le sac. Elle nous a été suggérée par les données d'un premier recueil de résultats montrant la persistance à un âge avancé des conduites de dénombrement.

  Pour la version 0, l'enfant n'est pas incité à vider le sac. Le sac est néanmoins posé sur la table de travail et l'enfant est autorisé à le manipuler s'il le souhaite. Ainsi, la consigne reste la même pour les deux versions de l'épreuve, c'est-à-dire indiquer le nombre d'objets en tout, et le noter sur la feuille de réponse.

- Dans la version 0, les gommettes collées sur les couvercles des boîtes représentent des animaux en couleur et stylisés de manière enfantine, alors que dans la version 1, elles représentent des symboles et figures géométriques de couleur noire. Cette modification a été introduite, les données de la première étude nous ayant laissé penser que le caractère enfantin des dessins pouvait induire des réponses peu élaborées.

3 Données développementales

Nous présentons ci-après les données relatives aux deux recueils de données réalisés utilisant successivement les deux variantes du test, à deux années d'intervalle.

3.1 Sujets

La première version de l'épreuve (DENORECO-0) a été soumise à 80 enfants scolarisés du CE1 au CM2. Vingt enfants étaient en CE1, 20 en CE2, 20 en CM1 et enfin, 20 en CM2.
Dans la seconde version (DENORECO-1), l'échantillon est constitué de 145 enfants non redoublants de CP, CE1, CE2, CM1 et CM2, âgés de 6 à 11 ans. Les caractéristiques de cette population sont présentées dans le tableau 1. Notons que les élèves de CM1 sont peu représentés dans cette étude. S'agissant d'une étude exploratoire, nous n'avons pas cherché à constituer un échantillon représentatif de la population scolaire française. Les résultats de nos études seront indiqués en pourcentages de façon à permettre une comparaison entre les différentes classes dont les effectifs ne sont pas équivalents.

Insérer ici le tableau 1

3.2 Ecriture des quantités

Nous présenterons dans cette partie les résultats concernant les quatre premiers items de l'épreuve qui avaient pour but de vérifier que les enfants savaient écrire une quantité dénombrée.
Dans les deux versions de l'épreuve, les items 1 à 4 ont été massivement réussis par les enfants : ils écrivent numériquement les quantités et ce qu'ils écrivent correspond à la quantité dénombrée. Les pourcentages de réussite par classe et par item sont compris entre 90 % et 100 %, ce qui est conforme à nos attendus : que les enfants n'aient pas de problème de dénombrement et qu'ils savent noter les quantités, de façon à pouvoir isoler ce qui relève uniquement de la connaissance de la fonction référentielle des nombres.
Dans les deux recueils de données, ce sont les enfants de CE1 qui réussissent le moins bien l'épreuve, même si les scores de réussite restent toutefois très élevés (94 % avec DENORECO-0 et 95 % avec DENORECO-1). Les autres classes, y compris la classe de CP du recueil de données de la version DENORECO-1, plafonnent à 98 % de réussite minimum.
Les stratégies de comptage utilisées pour les items 1 à 4 ont été plus particulièrement analysées concernant la version DENORECO-1. Les enfants de CP utilisent préférentiellement la stratégie de dénombrement pour compter les objets (1,2,3,4,5…). A partir du CE1, les stratégies de comptage changent radicalement. Les enfants vont utiliser beaucoup plus fréquemment l'addition. Cette stratégie se manifestait différemment en fonction des items. Par exemple, pour les items 1 et 2 où une seule catégorie d'objets était présente, l'addition pouvait se manifester par un regroupement deux par deux ou trois par trois des objets (ex : 2+2+2). Pour les items 1 et 4 qui présentent des collections hétérogènes d'objets, certains enfants additionnent les quantités correspondant à chacune des catégories d'objets (ex : 2 poissons + 2 étoiles + 3 oiseaux).

A partir du CM1, une autre stratégie entre en jeu pour dénombrer les objets de l'item 4 (disposition en ligne de collections égales de trois catégories d'objets) : les enfants multiplient la quantité par le nombre de catégories (3x4).

Insérer ici le tableau 2

Les données principales concernant les procédures utilisées sont récapitulées dans le tableau 2 : de 77 % à 82 % des enfants de CP utilisent le dénombrement. Cette stratégie est encore utilisée par 25 à 38 % des enfants de CE1 et 55 à 59 % des enfants de CE2. Ils ne sont plus que 15 à 31 % à utiliser le dénombrement en CM1, et 9 % à 54 % en CM2.
On relèvera que cet ensemble de résultats est compatible avec ceux obtenus par d'autres auteurs auprès d'enfants des classes d'âge considérées (par exemple Camos, Fayol & Barrouillet, 1999)

3.3 Utilisation des quantités notées

Nous appréhendons la connaissance de la fonction référentielle des notations à partir des analyses des conduites aux items 5 et 6. Le but est de voir si les enfants utilisent spontanément les quantités qu'ils ont notées sur leur feuille de réponse pour faire face aux problèmes posés (de type « composition de collections »). Nous analysons séparément la justesse des réponses et la procédure employée pour y parvenir.
Dans nos deux recueils de données et toutes classes confondues, les items 5 et 6 ont engendré 83 à 99 % de réponses correctes (quantités correctement écrites). Les taux de réussite sont donc globalement élevés.
Il faut cependant noter que, tout comme pour les items 1 à 4, les enfants de CE1 du second recueil de données sont ceux qui ont le moins bien réussi les items 5 et 6 (66 % et 69 % de réussite respectivement). Dans le premier recueil de données, les performances des CE1 étaient largement supérieures (85 % de réussite pour l'item 5 et 80 % pour l'item 6). Cette différence de réussite pourrait peut-être être attribuée à un effet classe que, dans le cadre de cette étude, nous sommes incapables de contrôler, faute de disposer d'informations sur les pratiques pédagogiques et le niveau général des élèves.

Insérer ici le tableau 3

Si nous nous intéressons maintenant à la stratégie utilisée par les enfants pour additionner le contenu des boîtes, relevons tout d'abord qu'il existe des différences entre nos deux recueils de données : avec DENORECO-0 (voir tableau 3), bien que les objets soient placés dans un sac et ne soient pas directement dénombrables (l'enfant doit en effet choisir de vider le sac pour dénombrer), très peu d'enfants de CE1, CE2 et CM1 ont pensé à utiliser leurs notations pour fournir leurs réponses aux items 5 et 6 : ils sont entre 25 et 35 % seulement à avoir utilisé ce qu'ils avaient noté précédemment pour faire une addition. C'est en CM2 seulement que les enfants utilisent majoritairement leurs notations, même s'ils ne sont encore que 60 % à le faire.

Insérer ici le tableau 4

Avec DENORECO-1 (voir tableau 4), l'utilisation majoritaire des notations est plus précoce. En effet, c'est à partir du CE2 que les enfants utilisent préférentiellement ce qu'ils ont écrit pour répondre aux items 5 et 6 : ils sont entre 62 et 77 % à partir de ce niveau scolaire à utiliser leurs notations. En CP et CE1, seulement 9 à 14 % des enfants ont recours à cette stratégie.

On assiste donc à un changement de stratégie de résolution à partir du CE1 avec l'épreuve DENORECO-1 alors que ce changement a lieu à partir du CM1 seulement avec DENORECO-0.

3.4 Interprétation des résultats

Afin d'affiner les analyses, nous avons croisé la réussite aux items 5 et 6 et la procédure de résolution, afin de déterminer si la justesse des réponses est dépendante de la stratégie que l'enfant utilise pour donner sa réponse. Il pourrait en effet être envisagé que les enfants qui commettent le plus d'erreurs sont ceux qui font des calculs à partir des notations.

Cette analyse a été réalisée uniquement à partir du recueil de données de la version DENORECO-1 qui concerne davantage d'enfants.

Dans un premier temps, nous avons étudié le lien entre stratégie de résolution et réussite toutes classes confondues. Dans un second temps, nous avons observé ce lien à l'intérieur de chaque classe : nous pouvons en effet supposer que les plus jeunes qui calculent à partir des notations auront tendance à plus se tromper que les plus jeunes qui recomptent. De même, les plus jeunes qui calculent à partir des notations pourraient plus facilement commettre des erreurs que les plus âgés qui calculent également à partir de ce qu'ils ont inscrit sur leur feuille de réponse.

Les résultats, toutes classes confondues, montrent d'abord que la réussite aux items 5 et 6 est plus importante chez les enfants ayant utilisé leurs notations. En effet, 95 % des enfants utilisant leurs notations écrivent correctement sur leur feuille la réponse correspondant à l'addition des quantités des deux boîtes désignées. Parmi les enfants qui recomptent les objets, 80 % fournissent la réponse correcte. Ainsi, contrairement à notre idée première, le dénombrement serait ici plus source d'erreurs que le calcul à partir des notations.

Ensuite, pour examiner le lien entre procédure de résolution et réussite en fonction du niveau scolaire de l'enfant, nous avons effectué des regroupements de classes. Etant donné que le changement de stratégie (du dénombrement au calcul à partir des notations) se situe entre le CE1 et le CE2 avec DENORECO-1, nous avons regroupé les CP et les CE1 d'un côté et les CE2, CM1 et CM2 d'un autre côté.

Le tableau 5 confirme que les enfants qui ont utilisé leurs notations sont ceux qui réussissent le mieux les items 5 et 6, et cela même chez les plus jeunes : nous avons chez ces enfants des performances de réussite qui sont de l'ordre de 92 à 100 %. C'est en dénombrant, et non pas en calculant, que les enfants font le plus d'erreurs. Effectivement, les pourcentages de réussite sont compris entre 74 et 93 %. Ceci renvoie aux difficultés liées au dénombrement décrites par de nombreux auteurs (par exemple, Fuson, 1991 et Van Nieuwenhoven, 1999).

Insérer le tableau 5 ici

Plus précisément, chez les plus jeunes, l'écart de performances entre ceux qui utilisent leurs notations et ceux qui recomptent est plus important que chez les plus âgés. En effet, les enfants les plus jeunes qui dénombrent le tout sont enclins à faire plus d'erreurs que les plus âgés qui utilisent cette procédure. Les plus jeunes qui dénombrent réussissent l'épreuve à hauteur de 74 % (item 5) et 78 % (item 6), alors que les plus âgés qui utilisent cette même stratégie réussissent l'épreuve dans des proportions supérieures, de l'ordre de 93 % (item 5) et 82 % (item 6). Chez les enfants qui utilisent leurs notations, on ne trouve pas de différence en fonction du niveau scolaire. Contrairement à ce à quoi nous nous attendions, les plus jeunes qui calculent à partir de leurs notations ne commettent aucune erreur (100 % de réussite pour les deux items mais ils ne sont que 7 sur 54 à le faire).[4] Ces données sont difficiles à interpréter mais on peut faire l'hypothèse suivante : ne se lancent dans les calculs que les élèves très sûrs d'eux. Toutefois, comme nous l'évoquerons en conclusion, il conviendrait de conduire une étude plus extensive de façon à mieux cerner les déterminants de l'usage des nombres dans leur fonction de représentation.

4 Conclusion et discussion

Bien qu'au cours de l'enseignement (de l'école maternelle à l'école primaire) les enfants soient entraînés à noter toute sorte d'informations, ils ne pensent pas toujours à les utiliser. En effet, nous avons vu avec cette épreuve que les performances évoluaient avec l'âge : l'utilisation spontanée des notations devient plus fréquente que le dénombrement à partir du CE2. Néanmoins, de 30 à 40 % des élèves en CM2 n'ont pas un usage spontané des notations et ont recours au dénombrement des objets plutôt qu'à l'addition des quantités notées numériquement. Les modifications de la présentation de la tâche (sac présent ou non) n'introduisent pas de variations importantes dans les conduites des enfants. Ceci conforte l'idée qu'il y aurait une difficulté cognitive fondamentale liée à l'usage des nombres dans leur fonction de représentation. Les enfants peuvent savoir noter numériquement des quantités et faire des opérations mais ne pas penser à utiliser leurs notations pour résoudre des problèmes. C'est une observation que nous avions faite de manière fortuite en contexte de classe et qui, à l'époque, nous avait rendus perplexe, faute de bien saisir que la fonction référentielle des notations numériques n'était pas immédiate pour les enfants. Le fait de demander à l'enfant d'écrire une quantité préalablement dénombrée ne garantit pas que l'enfant comprenne le lien entre les aspects de la réalité représentée et sa représentation symbolique. Les chiffres qu'écrit l'enfant n'auraient au départ qu'un statut de code graphique et ce n'est que progressivement que ces codes prendraient sens par rapport à un système de notations qui permet, entre autres, de faire des additions.

Ce constat peut paraître surprenant, surtout chez les élèves les plus âgés. Cependant, il est possible que notre épreuve ne soit pas adaptée à ces élèves, qui ont pu la trouver trop facile, et par là-même saugrenue. Effectivement, les quantités à additionner étant faibles, ces élèves ont pu se demander ce qu'on attendait d'eux. Dans ce genre de contexte où le contrat expérimental n'est pas clair pour les enfants, il est fréquent d'observer des réponses

[4] Les effectifs d'enfants ayant utilisé leurs notations étant faibles, les pourcentages n'ont qu'une valeur indicative.

inattendues de leur part. Il conviendrait sans doute d'adapter notre épreuve pour qu'elle soit plus en adéquation avec les capacités des élèves les plus âgés, par exemple en augmentant les quantités à dénombrer. Ceci permettrait de préciser les contraintes en termes de quantités à dénombrer qui poussent les enfants à utiliser les nombres dans leur fonction référentielle.

Si on s'attarde plus spécifiquement aux erreurs en fonction de la procédure de comptage choisie par l'enfant, il apparaît que les erreurs sont commises en majorité par les enfants les plus jeunes qui ne savent pas bien dénombrer. Effectivement, les enfants qui utilisent leurs notations font moins d'erreurs que ceux qui comptent les objets, et ce, même chez les plus jeunes. Il semblerait donc que lorsque les enfants utilisent la fonction référentielle des nombres, ils savent bien calculer : ils font dans ce cas très peu d'erreurs de calcul, indépendamment de leur âge. Par contre, les enfants les plus jeunes qui utilisent le dénombrement font plus d'erreurs que les plus âgés qui utilisent cette même procédure.

Les données obtenues attirent l'attention sur la connaissance des fonctions des nombres qui n'est pas nécessairement acquise lorsque les enfants en maîtrisent l'écriture. Des investigations sont à poursuivre dans deux directions. D'une part, il serait nécessaire de dupliquer l'étude sur un plus grand nombre d'enfants, en recueillant des indications sur la sensibilité des maîtres à cet aspect de la connaissance des nombres. Nous avons en effet observé des différences de résultats entre les deux études conduites. Ces différences pourraient être attribuables soit aux modifications intervenues dans le matériel (matériel plus scolaire dans la seconde étude), soit à des différences de niveau ou de pratiques pédagogiques. Ces aspects seraient à contrôler. D'autre part, il serait également nécessaire de procéder à des investigations plus approfondies, en interrogeant l'enfant après-coup, en utilisant par exemple la technique de l'ECA (entretien cognitif à visée d'apprentissage) mis au point par Perraudeau (2002) : comment l'enfant justifie-t-il la procédure employée pour résoudre les problèmes, est-il capable d'envisager d'autres procédures que celle qu'il a mise en œuvre spontanément, comment réagit-il à une suggestion qui lui serait faite d'utiliser les nombres déjà écrits ?

On relèvera, pour terminer, que le caractère tardif de l'accès à la fonction de représentation des nombres n'a rien de surprenant en regard des travaux mentionnés en introduction relatifs au développement de l'usage des représentations externes. Il conviendrait de mieux connaître les modalités éducatives et pédagogiques qui permettent aux enfants de la maîtriser. Quoi qu'il en soit, il s'agit d'un aspect à faire travailler aux enfants dans le cadre de l'enseignement des mathématiques puisque comme nous l'avons établi, les enfants peuvent savoir écrire numériquement des quantités et ne pas penser à faire usage de ce qu'ils ont noté pour résoudre des problèmes.

Malgré le caractère encore inachevé de la conception du test, il permet de cerner la disponibilité de la connaissance (« en actes »[5]) de la fonction référentielle des nombres. Des études sont à poursuivre pour identifier les déterminants cognitifs et sociaux de l'usage des notations numériques.

5. Références

Bialystok, E. (2000). Symbolic representation across domains in preschool children. *Journal of Experimental Child Psychology, 76*, 173-189.

Bialystok, E. et Martin, M. M. (2003). Notation to symbol : development in children's understanding of print. *Journal of Experimental Child Psychology,86*, 223-243.

[5] Comme le rappelle Vergnaud (1996), toute connaissance a une composante opératoire et prédicative. DENORECO teste la composante opératoire de la connaissance des nombres.

Camos, V., Fayol, M., & Barrouillet, P. (1999). L'activité de dénombrement chez l'enfant : Double tâche ou procédure? *L'Année Psychologique*, *99*, 623-645.

Fuson, K. (1991). Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (eds) : *Les chemins du nombre* (pp. 159 – 179). Lille : Presses Universitaires de Lille.

Gaillard, F. (2000). Numerical. Test neurocognitif pour l'apprentissage du nombre et du calcul. *Actualités Psychologiques, édition spéciale*.

Goody, J. (1977). *La raison graphique*. Paris : Editions de Minuit. Traduction française en 1979.

Meljac, C., & Lemmel, G. (1999). *UDN-II. Construction et utilisation du nombre*. Paris : ECPA.

Olson, D. R. (1998). *L'Univers de l'écrit. Comment la culture écrite donne forme à la pensée.* Paris : Retz.

Perraudeau, M. (2002). *L'entretien cognitif à visée d'apprentissage : un dispositif pour aider l'élève en mathématique.* Paris : L'Harmattan.

Schubauer-Leoni, M.-L. & Perret-Clermont, A.-N. (1980). Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. *Recherches en didactique des mathématiques, 1(3),* 297-350.

Simonart, G. (2006). *Echelle d'apprentissages scolaires primaires*. Namur : AFAPMS.

Simonart, G. (1998). *Péda-1c. Tests pédagogiques de premier cycle primaire*. Braine-le-Château : ATM.

Sinclair, H. (1988). *La production de notations chez le jeune enfant ; langage, nombre, rythmes et mélodies*. Paris : Presses universitaires de France.

Tolchinsky Landsmann, L. et Karmiloff-Smith, A. (1992).Children's understanding of notations as domains of knowledge versus referential-communicative tools. *Cognitive development, 7*, 287-300.

Van Nieuwenhoven, C. (1999). *Le comptage. Vers la construction du nombre*. Bruxelles : De Boeck.

Van Nieuwenhoven, C., Grégoire, J., & Noël, M.-P. (2001). *Tedi-Math. Test diagnostic des compétences de base en mathématiques*. Paris : ECPA.

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. In J.M. Barbier (Edit.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 275-292). Paris : PUF.

Vygotski, L. S. (1934/1997). *Pensée et langage*. Paris : La Dispute.

Weil-Barais, A., Gaux, C., & Iralde, L. (2007). Développement des fonctions pragmatiques et cognitives de l'écriture. In J.-P. Gaté, & C. Gaux (Edits.), *Lire-écrire de l'enfance à l'âge adulte* (pp. 57-76). Rennes : PUR.

Weil-Barais, A., Gaux, C., Iralde, L., Bouchafa, H., Charrier, M., & Nogues, L.M. (2004). *Ecrire : protocole d'observation*. Laboratoire de psychologie, Université d'Angers.

Boîte n°1 et item 1 (●) : 	Boîte n°2 et item 2 (■) : 
Boîte n°3 et item 3 (▲) : 	Boîte n°4 et item 4 (♥) : 

Figure 1 : Contenu des boîtes dest items 1 à 4.

Dénombrement des objets	❑
Dénombrement des notations graphiques	❑
Calcul à partir des notations numériques	❑
Quantité notée	…
Type de notation	…

Figure 2 : Grille d’observation de l’item 5

Classe	Effectif	Garçons	Filles	Âge moyen
CP	22	8	14	6 ans 8 mois
CE1	32	15	17	7 ans 6 mois
CE2	22	10	12	8 ans 9 mois
CM1	13	5	8	9 ans 11 mois
CM2	56	28	28	10 ans 8 mois

Tableau 1 : Echantillon de l'étude 2

	Item 1		Item 2		Item 3		Item 4		
	Dénb.	Add.	Dénb.	Add.	Dénb.	Add.	Dénb.	Add.	Multip.
CP (N=22)	82 %	18 %	77 %	23 %	82 %	18 %	82 %	9 %	5 %
CE1 (N=32)	38 %	63 %	25 %	75 %	34 %	66 %	38 %	50 %	0 %
CE2 (N=22)	55 %	41 %	59 %	41 %	59 %	41 %	55 %	41 %	5 %
CM1 (N=13)	31 %	69 %	23 %	77 %	31 %	69 %	15 %	23 %	62 %
CM2 (N=56)	21 %	50 %	54 %	46 %	37 %	63 %	9 %	46 %	41 %

Dénb. = dénombrement ; Add. = addition ; Multipl. = multiplication

Tableau 2 : Stratégies de comptage utilisées (en pourcentages) en fonction de la classe pour les items 1 à 4 (DENORECO-1)

	Item 5	Item 6	Moyenne
CE1 (N = 20)	30 %	35 %	32,5 %
CE2 (N = 20)	35 %	35 %	35 %
CM1 (N = 20)	25 %	25 %	25 %
CM2 (N = 20)	60 %	60 %	60 %
Moyenne	37,5 %	38,75 %	

Tableau 3 : Pourcentages d’enfants ayant utilisé leurs notations pour les items 5 et 6 (DENORECO-0)

	Item 5	Item 6	Moyenne
CP (N=22)	14 %	9 %	12%
CE1 (N=32)	13 %	13 %	13%
CE2 (N=22)	68 %	68 %	68%
CM1(N=13)	62 %	62 %	62%
CM2 (N=56)	64 %	77 %	71%
Moyenne	46 %	50 %	

Tableau 4 : Pourcentages d’enfants ayant utilisé leurs notations en fonction de la classe pour les items 5 et 6 (DENORECO-1)

	Item 5		Item 6	
	CP & CE1	CE2, CM1 & CM2	CP & CE1	CE2, CM1 & CM2
Dénombrement	74 % (N = 47)	93 % (N = 30)	78 % (N = 46)	82 % (N = 22)
Utilisation des notations	100 % (N = 7)	96 % (N = 59)	100 % (N = 6)	92 % (N = 66)

Tableau 5 : Pourcentages d’enfants ayant réussi l’item en fonction de la procédure utilisée et en fonction du niveau scolaire.

« Il ne faut pas désarticuler un nombre »

Mise en œuvre du dispositif CESAME en primaire

Maryse Maurel, Catherine Sackur, Jean-Philippe Drouhard,

Odile Perriollat, Florence Ciaravola

GECO-IREM de NICE

Les auteurs expérimentent en cycle 3 le dispositif CESAME qu'ils utilisent habituellement au lycée ou à l'université. Ils présentent deux séances en CM1 sur la technique opératoire de la soustraction et une séance en CM2 sur l'ordre des décimaux, pour lesquelles ils ont suivi les quatre étapes du dispositif.
Une comparaison entre le travail ordinaire de la classe et les spécificités du dispositif CESAME leur permet de relever les apports positifs de ce travail.
Mots-clés
dispositif CESAME ; connaissance locale ; connaissance expérientielle ; travail sur les réponses fausses ; ordre sur les décimaux ; écart ; retenue.

Cet exposé relate et analyse des séances que nous avons menées à l'école primaire en CM1 et CM2.

Par rapport à nos travaux antérieurs, ce travail présente deux particularités.

La première concerne le cycle d'enseignement. Nous avions envie, depuis longtemps, de tester le dispositif CESAME à l'école primaire. Ce cycle 3 est pour nous un territoire inconnu, tant en ce qui concerne les sujets mathématiques et les connaissances mises en œuvre que les élèves et leur capacité à jouer le jeu d'un tel dispositif. En faisant ces expériences, nous nous sommes donc aventurées hors de notre domaine habituel, celui pour lequel le dispositif CESAME a été conçu, les années de lycée et les premières années d'université.

La deuxième différence porte sur notre présence dans les classes. Jusque là, nous expérimentions dans nos propres classes avec éventuellement l'aide d'autres membres de l'équipe comme observateurs. Nous n'avions ainsi pas besoin de former des maîtres à la théorie et à la pratique du dispositif CESAME. Nous en sommes des spécialistes, ce qui n'a pas toujours évité les erreurs, mais en minimisait les risques et la fréquence. Avec le travail en primaire, nous avons dû déléguer la mise en œuvre du dispositif à des enseignantes qui le découvraient en même temps que leurs élèves. Avec ce travail, nous avons centré notre attention sur les effets pour les élèves et leur apprentissage. Nous n'avons pas fait d'étude spécifique de l'effet sur les enseignantes.

Le dispositif CESAME

Nous exposons ici le déroulement du dispositif tel qu'il a été conçu dans le cadre de nos recherches. Nous exposerons au fur et à mesure, les difficultés que nous avons rencontrées pour sa mise en œuvre au cours moyen. Le but de ce dispositif est de faire vivre expérientiellement aux élèves la nécessité des énoncés mathématiques en leur faisant rencontrer la réalité mathématique. Cette réalité résiste au même titre que résiste la réalité physique. On ne peut pas modifier un énoncé mathématique et son contenu n'est jamais le résultat d'un consensus ou d'un vote. Les bases théoriques du dispositif se trouvent dans les recherches CESAME et en particulier dans le modèle des trois niveaux de connaissances tel qu'il est exposé dans l'article Sackur et al (2005).

Notre dispositif expérimental s'inspire du débat scientifique de Legrand (Legrand, 1993) avec des finalités différentes : nous souhaiterions que chaque élève, et pas seulement le groupe comme chez Legrand, ait une activité mathématique proche de l'activité d'un mathématicien. Nous essayons de travailler, non pas pour un groupe d'élèves mais pour chaque élève individuellement car nous pensons que nous avons à apprendre de la façon dont chacun pense et construit ses connaissances. C'est cela qui nous permet de travailler sur les connaissances locales, de les identifier et de pouvoir agir pour les modifier. C'est le parcours personnel de chaque élève qui nous intéresse, ce que nous appelons sa singularité.

Le débat scientifique de Legrand donne aux élèves la responsabilité des mathématiques construites dans la classe. Cela se fait sous le contrôle du professeur, bien sûr, car on ne valide jamais un résultat faux, mais tout au long du débat, ce sont les élèves qui ont en charge la détermination du vrai et du faux. Ainsi nous rejoignons Legrand sur la conviction que les mathématiques sont un lieu où chacun peut exercer sa liberté, sans soumission à une autorité extérieure.

Une autre différence avec le débat scientifique de Legrand est que nous travaillons sur des notions anciennes et non dans la construction de nouvelles connaissances.

Le dispositif expérimental est constitué de quatre étapes :

1. Un *travail personnel* assez court de 10 minutes. Cette phase de *travail individuel* permet l'activation des connaissances locales (Léonard et Sackur, 1991) et la production d'erreurs. L'un de nos principes est que les élèves ne répondent pas au hasard. Sachant qu'ils auront à défendre leur travail dans le petit groupe puis à produire un résultat commun face au grand groupe, ils ont une responsabilité personnelle. C'est ici que se mettent en place les “opinions”, qui ne sont encore que des “intimes convictions”. Ce temps de travail personnel est essentiel à nos yeux.

2. Un *travail en groupes de 3 ou 4 personnes* ayant donné des réponses différentes, lorsque cela est possible ; les membres du groupe doivent se mettre d'accord pour donner une seule réponse que chacun pourra défendre devant la classe complète (le grand groupe). Nous leur demandons d'arriver à une certitude solide et personnelle, qui soit la même pour les quatre personnes et qui ne soit pas seulement un accord public formel. L'obligation d'une justification mathématique de leur réponse s'impose d'elle-même, en général, à cette étape. Le petit groupe rédige un compte-rendu collectif des étapes de son travail. Ce travail permet :

   - de déterminer le résultat exact,
   - de mettre en échec les *connaissances locales* qui donnent des résultats faux,
   - de faire l'expérience de la contradiction (par l'obligation à se mettre d'accord avec un *autrui* extérieur) et de la résistance de la réalité mathématique,

- de construire une nouvelle connaissance (ou de réactiver la connaissance exacte),
- de faire l'expérience du caractère nécessaire (ou d'autres caractéristiques) de la connaissance mathématique.

C'est à cette étape que les opinions personnelles laissent la place à un savoir partagé de nature mathématique. Le professeur ne s'interdit pas d'intervenir auprès des élèves pour demander des explicitations et les aider à faire le point sur leur travail, mais il ne donne pas les réponses mathématiques qui restent à la charge des élèves.

3. Dans une *phase de synthèse en grand groupe*, le porte-parole de chaque groupe, choisi par le professeur, raconte ce qui s'est passé dans son groupe, l'état des choses au début du travail, les étapes de l'évolution des connaissances, la conclusion sur laquelle il y a eu accord et les raisons de cet accord ; les autres complètent éventuellement. La *séance de synthèse* en grand groupe est l'occasion pour les élèves de faire un premier retour réflexif sur leur travail. Le compte-rendu de chaque petit groupe est préparé à la fin de la phase de travail en petits groupes afin que chacun de ses membres soit en mesure de l'exposer. Cette phase permet une confrontation entre les groupes et élargit la palette des problèmes rencontrés et de leurs solutions. Elle est l'occasion de l'explicitation de certaines connaissances et de certains raisonnements, justes ou faux. Enfin elle permet au professeur de faire vivre, pour ceux qui ne les ont pas vécues dans leur petit groupe, les expériences des petits groupes qui méritent d'être partagées dans le grand groupe. Le professeur commente à partir de ce qu'il a observé et relevé sur les comptes-rendus et fait les démonstrations nécessaires si elles sont absentes.
4. *La phase d'institutionnalisation* porte sur les différentes propriétés des connaissances mathématiques : énoncé de la connaissance visée (connaissance d'ordre I), règles du jeu du travail mathématique mises en œuvre par les étudiants (connaissance d'ordre II), le fait que faire des mathématiques c'est établir des énoncés nécessaires en respectant certains principes (connaissance d'ordre III).

Pour des illustrations du dispositif à l'université ou au lycée, on peut voir Maurel (2001) ou Sackur et Maurel (2000).

La soustraction

En CM1 nous avons travaillé deux fois avec les élèves, d'abord sur la technique opératoire de la soustraction puis sur celle de la multiplication. Nous ne donnons ici que les résultats concernant la soustraction.

Le dispositif s'appuie sur les connaissances locales des élèves. Connaître des erreurs ne signifie pas connaître les connaissances locales qui conduisent à ces erreurs. Pour passer des unes aux autres un travail d'analyse est nécessaire, car il faut identifier les limites de la connaissance locale et déterminer de façon précise quelle est la connaissance mathématique qui lui a permis d'émerger. Ce travail n'a pas été fait sur les notions du primaire. Nous l'avons commencé, avec nos co-chercheurs et avons fait l'hypothèse d'une connaissance locale que nous présentons ici. Nous avons observé qu'elle était effectivement présente chez un certain nombre d'élèves.

La principale difficulté de la soustraction est la retenue. Ainsi qu'on peut le voir ci-dessous, dans le travail demandé par l'enseignante à ses élèves, les soustractions sont posées en colonnes. Dans la soustraction 939 - 721, tous les chiffres d'en haut sont plus grands que les chiffres correspondants d'en bas. Il n'y a pas de problème : colonne par colonne, les soustractions sont toujours possibles. Par contre, dans 917 – 738, il y a nécessité de faire des retenues. Nous ne savons pas comment procèdent les élèves qui se trompent.

Une connaissance locale pourrait être : on fait la soustraction dans le sens où c'est possible, en retranchant le plus petit au plus grand, quelle que soit sa place dans la soustraction posée, en haut ou en bas.

Pour 917 - 738, en appliquant la connaissance locale, on obtient 8 moins 7 ça fait 1, 3 moins 1 ça fait 2 et 9 moins 7 ça fait 2, et le résultat est 221. Un autre exemple intéressant est le suivant : 800 - 425 où la connaissance locale fait écrire 425 comme résultat. La fiche de travail présente des soustractions avec et sans retenues. Elle est conçue pour favoriser la production des connaissances locales et la dispersion des résultats dans la phase de travail personnel.

Voici les soustractions proposées aux élèves :

Résous ces opérations :

(1)
```
  9 3 9
- 7 2 1
……………
```

(2)
```
  9 1 7
- 7 3 8
……………
```

(3)
```
  3 5 4 7 8
- 1 2 3 2 5
………………
```

(4)
```
  8 0 0
- 4 2 5
……………
```

(5)
```
  5 0 0
-   3 2
……………
```

Justifie tes réponses en expliquant comment tu as procédé.

Déroulement de la séance

Odile fait rappeler aux élèves qui nous sommes, pourquoi nous venons leur rendre visite, puis elle rappelle les consignes et lance le travail individuel.

Travail individuel

Nous observons les résultats des élèves de façon à constituer des groupes dans lesquels apparaissent des résultats différents pour qu'il y ait discussion.

Les soustractions 1 et 3 sont réussies par tous les élèves (au nombre de 25) sauf deux pour la première soustraction. Pour chacune des soustractions 2, 4 et 5, la réussite est de l'ordre de 50%. Le tableau ci-dessous donne les résultats précis ; la ligne "retenue" concerne des oublis de retenue pour lesquels nous n'avons pas identifié de connaissance locale. Pour le faire, il faudrait pouvoir mener des entretiens ou disposer de plus de données. La ligne "autre" correspond, le plus souvent, à une erreur de soustraction élémentaire telle que 4-3 égale 2.

Soustraction	939-721	917-738	35478-12325	800-425	500-32
Bonne Réponse	23	9	25	10	13
Connaissance locale	0	4	0	4	4
Autre erreur de retenue	0	6	0	10	7
Autre réponse	2	5	0	1	1

Sur les trois soustractions qui ont donné lieu à des erreurs, la connaissance locale représente 15% des réponses, l'oubli de retenue 30% et il y a 47% de réponses exactes. Très souvent les élèves n'inscrivent sur leur feuille qu'une partie des retenues ce qui conduit à des oublis de retenue dans une ou deux colonnes. On remarque qu'aucun élève n'a expliqué sa méthode pour faire les soustractions

Travail en petits groupes

Pour l'essentiel, pendant ce temps de travail en petits groupes, les élèves ont comparé leurs résultats et ceux qui étaient certains de ne pas s'être trompés ont expliqué aux autres comment faire. Il n'y pas eu discussion sur les erreurs mais simplement correction. C'est un travail très difficile de discuter sur les erreurs et il n'est pas étonnant que dans la première séance, des élèves aussi jeunes n'aient pas réussi à le faire. La consigne de garder trace des erreurs n'avait pas été donnée de façon suffisamment explicite par l'enseignante. C'est une autre des difficultés que nous avons rencontrées dans la mise en œuvre du dispositif.

Synthèse en grand groupe

La discussion sur les erreurs s'est faite dans la synthèse en grand groupe. Ce moment du travail a beaucoup plu aux élèves d'après les retours que nous avons eus.

Il n'y a pas eu de discussion sur la première soustraction.

Pour la deuxième, une première discussion porte sur la retenue.
Adrien passe au tableau pour 917 – 738. Il dit : « dix-sept moins huit, neuf ; il écrit une retenue de 1 à côté du 3 ; à onze on enlève quatre, sept ; et neuf moins sept, un ».
D'après lui, il faut faire une retenue parce que "7 moins 8, on ne peut pas". Nous faisons préciser ce "qu'on ne peut pas".
Marie répond : « 7 est plus petit que 8, on ne peut pas soustraire, on ne peut pas enlever plus que ce qu'on a, alors on met une retenue. Ça veut dire emprunter une dizaine ou une centaine.

7 – 8, je peux pas ; voir qui peut me prêter une dizaine ou une centaine, alors 17 – 8. Après 1 – 4, je peux pas, j'emprunte une centaine et je la rends. Je l'emprunte au 3 la dizaine ».

Une discussion s'engage, car on ne sait pas à qui on emprunte et à qui il faut rendre.

D'après Quentin, cette dizaine vient de nulle part, on ajoute au nombre 917 une dizaine sous la forme de 10 unités. Ensuite, il faut la "rendre" au 3, de façon à conserver l'écart sinon on effectuerait 927-738 au lieu de 917-738. Quentin fait intervenir l'écart qui doit être conservé si on veut que le résultat soit juste.

« La dizaine vient de nulle part, c'est pour pas changer le nombre, c'est comme 927 – 738. Après, on la rend au 3 sinon 917, ça va plus être ce nombre et on aurait plus la même différence. Si tu veux que ton résultat soit juste, il faut qu'il y ait toujours le même écart entre 917 et 738 ».

Une deuxième discussion commence à la suite de l'échange suivant :

Sébastien : la dizaine, on la prend de nulle part.

Jonathan : je sais pas pourquoi on la rend, on l'a même pas empruntée.

Bastien : pourquoi on la rendrait puisqu'elle appartient à personne.

Frédéric : c'est la méthode.

Cette dernière réponse est une réponse en conformité, or tout montre ici que plusieurs élèves ont peut-être à peu près acquis la technique opératoire mais ne savent pas du tout pourquoi on procède de la sorte. Nous ne pouvons donc nous satisfaire de cet argument d'autorité.

Catherine va au tableau et propose la connaissance locale comme une "autre méthode" que certains ont utilisé pour faire leurs soustractions. Il y a alors un certain flottement. La discussion ne peut véritablement s'engager car il est 11h30 et c'est l'heure de partir déjeuner. Catherine a été obligée de proposer cette connaissance locale car elle n'est pas apparue dans la discussion. Il peut y avoir plusieurs explications à cela : la consigne de garder trace des erreurs n'a pas été assez explicite ; les élèves ne l'ont peut-être pas identifiée lors du travail en petit groupe, ce qui n'est pas très étonnant, c'est un travail difficile ; comme nous l'avons dit, à ce moment du travail, ils se sont surtout attachés à corriger les soustractions fausses.

Certains élèves discutent avec Maryse puis avec Odile dans l'escalier en sortant de la classe.

Bastien et Jonathan : Je suis d'accord avec ce qu'a fait la dame au tableau puisqu'on peut le faire avec la multiplication et l'addition.

Odile : Qu'est-ce qu'on peut faire ?

Eux : On peut changer la place des nombres, sans changer le résultat.

Odile : Est-ce que ce qu'on peut changer dans l'addition et la multiplication, c'est ce qu'a changé la professeure ?

Bastien : Ah non ! On ne peut pas désarticuler un nombre !

La suite de la discussion en grand groupe et l'institutionnalisation

La discussion ne reprend que le lendemain, avec Odile. Catherine et Maryse ne sont pas présentes. Dans un premier temps, il y a discussion sur la conservation de l'écart. Odile rappelle à ce moment une connaissance mise à jour dans le travail sur les problèmes : « on peut prendre plusieurs chemins pour trouver le résultat, mais le résultat sera toujours le même puisque l'énoncé ne change pas et qu'on ne peut pas le transformer. Ici, c'est pareil, il ne faut pas changer l'énoncé donc il ne faut pas changer l'écart ». Pour nous cette connaissance est une connaissance d'ordre II.

Puis Bastien raconte l'échange qu'il a eu dans l'escalier avec Odile sur la non "désarticulation" d'un nombre. Utiliser la connaissance locale revient à échanger le 7 et le 8 des unités et le 1 et le 3 des dizaines.

Odile pose $\begin{array}{r} 9\ 1\ 7 \\ \underline{-\ 7\ 3\ 8} \\ 2\ 2\ 1 \end{array}$ qui devient avec les explications de Bastien $\begin{array}{r} 9\ 3\ 8 \\ \underline{-\ 7\ 1\ 7} \end{array}$

On a donc changé les nombres, on a changé l'énoncé et ce n'est pas possible de faire ça. Un nombre ne se "désarticule pas", sinon on le change. Ce n'est pas à proprement parler le nombre qui a été désarticulé, mais la soustraction dans son ensemble. Nous avons conservé ici l'expression de Bastien qui nous a paru très imagée.

L'institutionnalisation se poursuit avec le rappel de la connaissance : « on ne peut pas enlever si on n'a pas assez, donc il faut toujours que le nombre du haut soit le plus grand ».

Quelques soustractions de contrôle sont effectuées et la classe travaille ensuite sur les différentes techniques possibles pour faire la preuve que la soustraction est juste.

En résumé, les connaissances institutionnalisées sont les suivantes :

- Dans une soustraction, l'écart entre les nombres doit être conservé,
- On ne peut pas enlever plus que ce qu'on a, il faut faire des retenues,
- On ne peut pas changer l'énoncé, donc on ne peut pas changer les nombres.

Les décimaux

Le travail s'est fait dans une classe de CM2. L'ordre des décimaux est une connaissance du CM1.

Sur les décimaux nous avons identifié, lors d'un travail précédent (Léonard et Sackur 1981), deux connaissances locales, la règle 1 et la règle 2. La règle 1 découle directement de la comparaison des entiers : deux décimaux de même partie entière sont rangés dans le même ordre que leurs parties décimales considérées globalement comme des entiers. Ainsi 12,89 est plus petit que 12,143 parce que 89 est plus petit que 143. La règle 2 donne un résultat inverse : toujours pour des décimaux de même partie entière, un nombre est d'autant plus petit que sa partie décimale est longue.

Il s'agit pour nous, dans ce travail en CM2, de vérifier l'existence de ces connaissances locales, éventuellement d'en découvrir d'autres, mais c'est peu probable car nous connaissons bien la question qui a été souvent reprise par des enseignants. C'est surtout l'occasion d'expérimenter le dispositif. Nous avons affaire à une autre institutrice, Florence, qui travaille beaucoup avec Odile et qui a suivi ses propres élèves de CM1 en CM2. Elle pratique le même genre de pédagogie active, qui laisse une très grande place à l'expression des élèves.

La fiche de travail a été préparée par Florence seule.

Range les nombres décimaux suivants par ordre croissant

- 2,17 - 2,348 - 3,1 - 2,5 - 2,096 - 10,2 - 1,97

....

- 11,68 - 11,898 - 11,8 - 11,75 - 17,15

....

- 15,5 - 15,078 - 15,349 - 15,41 - 15,36 - 15,708

....

- 5,125 - 4,996 - 5,02 - 5,027 - 5,2 - 5,004

....

- 1,414 - 1,4 - 1,05 - 1,054 - 1,504 - 1,44

....

Justifie tes réponses en expliquant comment tu as procédé pour ranger les nombres décimaux.

Déroulement de la séance

Travail individuel

Nous avons relevé les erreurs correspondant aux connaissances locales identifiées pour la comparaison des décimaux. Aucun élève n'a fait d'erreur sur les parties entières. Les erreurs proviennent presque toutes de l'application de la règle 1, très peu de celle de la règle 2. Ce qui frappe, dans le travail des élèves, c'est leur grande cohérence : ceux qui utilisent une règle, bonne réponse ou connaissance locale, le font dans les cinq séries de nombres à classer. Il n'y a que 9 élèves sur 25 qui donnent des réponses variables et dans certaines de ces réponses il y a l'oubli d'un nombre ou une série inachevée. 11 élèves donnent la bonne réponse partout, 6 utilisent la règle 1 et 1 utilise la règle 2.

Comme dans nos travaux précédents, nous constatons que la règle 1 fournit l'essentiel des réponses inexactes. En ce qui concerne les explications sur la façon de procéder, 18 élèves écrivent qu'ils comparent d'abord les parties entières puis les parties décimales. Parmi ces 18, 6 écrivent qu'ils comparent les dixièmes, puis les centièmes, puis les millièmes, ce qui n'est pas forcément ce qu'ils font, mais ils l'écrivent ; 3 écrivent qu'ils ajoutent des zéros (pour avoir des parties décimales de même longueur). Ces deux façons de faire donnent la bonne réponse.

Les autres ne disent pas comment ils comparent les parties décimales. Celui qui a utilisé la règle 2 sur les cinq séries, l'explique : "d'abord j'ai pris la plus petite unité parce que c'est par ordre croissant (du plus petit au plus grand). Puis j'ai regardé les chiffres après la virgule et j'ai pris le plus grand qui en fait est le plus petit".

Il y a donc près de la moitié des élèves, 10 sur 25, qui sont capables d'expliciter une façon de procéder. Ce point est important car il conditionne une partie du travail fait dans les petits groupes. Comme toujours, nous avons constitué les groupes pendant le temps de travail individuel en observant ce qu'écrivaient les élèves de façon à créer les conditions du débat. Ce travail, un peu acrobatique, a fourni ici des groupes qui permettaient la confrontation de procédures différentes.

Travail en petits groupes

Le travail en petits groupes a duré environ 25 minutes. Nous avons eu beaucoup de mal à négocier ce temps de travail. Plusieurs groupes ont refusé, par leur attitude, d'entrer dans le contrat ; dans deux groupes, les groupes 2 et 6, un élève corrigeait le travail de ses camarades, sans les laisser s'exprimer et sans donner d'explication. Il (c'était un garçon) était certain de ses résultats et ne voyait pas l'utilité de faire autre chose qu'une correction de ce qui était faux chez les autres.

En travaillant de façon très proche avec d'autres groupes, nous avons réussi à les conduire vers une attitude correspondant plus à ce que nous souhaitions. Ce fut le cas pour un groupe avec Maryse, le groupe 4, qui a bien identifié les procédures personnelles. Un groupe avec Catherine, le groupe 7 a avancé sur ce chemin. Le groupe 3 a plutôt bien travaillé tout seul. Les groupes 1 et 5 ont réussi à exprimer leur manière de faire juste sans lancer de discussion sur les procédures de chacun.

Revenons sur le travail du groupe 4 : si on regarde les fiches, deux élèves de ce groupe figurent parmi ceux qui ont le mieux exposé leur procédure par écrit.

Maryse rapporte la discussion à laquelle elle a assisté (c'est elle qui parle) :

« Ils comparent leurs résultats, ils sont très différents.

Benjamin : Plus il y en a (des chiffres) après la virgule, plus c'est petit (*règle 2*)

Caroline : Moins il y en a (des chiffres) après la virgule, plus c'est petit (*règle 1*)

Baptiste : Ni l'un, ni l'autre, il faut mettre les dixièmes, les centièmes, les millièmes, exemple pour c), 15,5=15,50 donc 15,41<15,50

Paul : J'ai fait comme ça aussi

Alors tous ensemble, ils reprennent les exercices et les refont, en vérifiant qu'ils sont d'accord ; je demande de rappeler la règle qu'ils utilisent pour vérifier qu'ils utilisent bien tous la même. C'est Paul qui la dit.

Paul : Je regarde d'abord avant la virgule, puis après la virgule

Benjamin : Je prends un exemple (il écrit au verso de la feuille),

18,300 et 18,34

18, 300 et 18, 340

mais j'aurais pu faire

18, 30 et 18,34

Baptiste : moi, j'aurais écrit

18,3 et 18, 34

18,30 et 18,34

Ils sont bien d'accord et reprennent ensemble tous les exercices. Baptiste et Paul avaient déjà les bons résultats. Caroline et Benjamin refont les leurs. Ils disent ce qu'ils font et Paul et Baptiste veillent pour que Caroline et Benjamin s'attendent mutuellement quand l'un distance l'autre. »

Mise en commun en grand groupe

C'était la première fois que nous mettions en œuvre le dispositif CESAME dans cette classe. Nous y avons rencontré des difficultés d'origines diverses que nous pouvons analyser ici.

Il y a eu, tout d'abord, des difficultés liées aux relations entre élèves qui n'ont rien à voir avec le dispositif ni avec les mathématiques mais qui ont fait que certains n'ont pu se mobiliser pour travailler selon un dispositif qu'ils ne connaissaient pas. Cette situation, qui est toujours susceptible de se produire, nous échappe complètement.

Ce dont nous sommes responsables, c'est de l'appropriation du dispositif par l'enseignante. Visiblement, ici, nous n'avions pas clairement explicité à Florence comment doit se passer la mise en commun en classe entière. De ce fait, elle a commencé à demander des explications et à fournir des contre exemples aux élèves avant que l'ensemble des résultats sur une série ait été posé au tableau. Elle est entrée dans un fonctionnement qui lui est familier au lieu de respecter le protocole CESAME que nous, les chercheuses, n'avions pas posé de façon assez claire. Ceci nous donne une occasion supplémentaire de constater que le dispositif a des spécificités précises qui permettent d'obtenir les résultats souhaités et qu'il ne consiste pas en un dialogue argumenté avec les élèves ou des élèves entre eux. Une très grande rigueur est nécessaire pour son application. On retrouve ici une des difficultés que nous avions anticipées pour ce travail avec des enseignantes non spécialistes du dispositif.

Le groupe 4 est venu exposer son travail au tableau et a été capable de dire quelles avaient été les erreurs observées. Par contre, ils n'ont pas énoncé, face au grand groupe, la conclusion à laquelle ils étaient arrivés dans le travail en petit groupe ; ainsi l'enseignante ne dispose de rien pour procéder à l'institutionnalisation et la séance se termine sans qu'on arrive à une quelconque conclusion sur une connaissance juste. Il faut remarquer, une fois de plus, que nous n'avons pas eu suffisamment de temps pour mener à bien les quatre temps du dispositif. La plage entre la fin de la récréation et la sortie, qui dure à peu près une heure et quart, pourrait être suffisante si les élèves étaient bien entraînés. Remarquons que les étudiants du DEUG MASS travaillaient systématiquement avec le dispositif en séance de travaux dirigés de deux heures. C'est sans doute ce vers quoi nous devrons tendre si nous reprenons cette expérience en primaire, même si les deux heures sont coupées par la récréation.

Institutionnalisation

Florence a pu reprendre la mise en commun en classe entière quelques jours après cette séance, prenant prétexte de l'absence d'un élève le jour de la séance pour demander aux autres de lui raconter ce qui s'était passé.

Les trois temps du dispositif ont été bien rappelés ; deux élèves qui utilisaient la règle 1 ont pris la parole pour dire comment ils faisaient "avant", c'est à dire avant qu'il y ait confrontation dans les petits groupes ; un élève explique l'ajout des zéros et un autre expose la méthode par comparaison des dixièmes, centièmes, millièmes. À ce sujet, Florence reprend une remarque passée un peu inaperçue lors de la séance :

« Aurélie : On regarde le chiffre des dixièmes et celui qui a le plus petit est le plus petit

Alix : Et ceux là, 11,8 et 11, 898 ils ont tous les deux 8 comme chiffre des dixièmes

Alexis : 11,898 c'est presque 11,9 tandis que 11,8, c'est seulement 8 dixièmes »

Lors de la séance suivante, Alix dit que même si on rallonge 2,19699999999 il ne sera jamais plus grand que 2,5.

Plusieurs connaissances auraient pu être institutionnalisées mais nous ne savons pas si elles l'ont été.

Quelques éléments de comparaison entre le dispositif CESAME et le travail ordinaire de la classe

Florence et Odile sont deux enseignantes très à l'écoute de leurs élèves. Cela ne tient pas seulement à une disposition de leur personnalité, il s'agit de choix réfléchis. Tout leur enseignement est construit de façon que les élèves s'approprient un certain nombre de règles de fonctionnement de la classe et prennent des responsabilités dans leur mise en œuvre. Ainsi, des séances comme « ça va, ça va pas » qui ont lieu tous les soirs chez Odile permettent aux élèves un travail de retour sur ce qui s'est passé dans la journée et une mise en commun qui les oblige à une réflexion au delà de l'anecdotique. Le respect de l'autre, qui est constamment mis en avant, les habitue à s'écouter et à laisser circuler la parole tout en maintenant leur attention en éveil. De leur côté, les enseignantes sont aussi très attentives à ce que chaque enfant trouve sa place dans le groupe et soit valorisé dans ses efforts. Sur le plan purement pratique, les tâches matérielles sont réparties entre les élèves, chacun ayant un rôle précis et les responsabilités qui vont avec. Le travail en petits groupes n'est pas très fréquent. Les enseignantes lui préfèrent le travail par groupe de deux car la communication entre les élèves est plus facile lorsqu'ils sont assis côte à côte que lorsqu'ils se font face, ce qui est obligatoire quand ils sont plus de deux. D'autre part, se mettre par quatre nécessite de tourner les tables ce qui prend beaucoup de temps car elles sont lourdes. Dernière spécificité des petits groupes CESAME, ils sont construits pour permettre la confrontation ; les élèves sont susceptibles de changer de place : ceci a créé des problèmes dans la classe de Florence car certains élèves en ont profité pour fouiller dans les affaires personnelles de leurs camarades qui ont alors eu l'esprit distrait de leur travail.

Que va apporter de nouveau le dispositif CESAME à une telle classe ?

Pour les élèves, la nouveauté majeure consiste à s'occuper des réponses fausses au lieu de se contenter de rechercher et d'expliquer la bonne réponse. Il faut identifier les réponses fausses, comprendre leur origine et en garder mémoire pour les exposer à la classe entière ainsi que les raisons pour lesquelles on les rejette.

Pour l'enseignante, la nouveauté se situe aussi dans la gestion des réponses fausses, mais évidemment pas de la même façon que pour les élèves. Odile et Florence ont l'habitude de faire débattre les élèves pour réussir à identifier la réponse exacte à un exercice. Ce qu'elles ont observé, c'est que, au moins en mathématiques, elles dirigent la discussion vers cette réponse, sans toujours laisser le temps aux élèves de comprendre et de discuter des autres réponses.

Lors de la discussion en classe entière, dans le dispositif CESAME, le rôle de l'enseignante est de choisir, parmi tout ce qui est dit par les élèves, ce qu'elle garde et ce qu'elle laisse de côté pour que la solution émerge : elle coupe des branches ou choisit des briques selon la nature de métaphore que l'on préfère. Le travail en petits groupes du dispositif CESAME oblige les élèves à puiser dans les connaissances qu'ils possèdent pour résoudre le problème auquel ils font face : qu'est ce qui est juste et qu'est ce qui est faux dans ce que nous avons faits les uns et les autres ? Ils ont à mettre en commun leurs connaissances qui, avec des différences de degré, sont les mêmes puisqu'ils ont suivi le même cursus, pour résoudre les contradictions qu'ils ont amenées dans le petit groupe. C'est à partir d'un socle commun, dont ils sont sûrs, qu'ils vont pouvoir comprendre les erreurs et se mettre d'accord sur la bonne réponse. Ceci, ils l'apportent ensuite dans la mise en commun en classe entière. Ce qu'ils apportent comme connaissances pour se convaincre, chacun individuellement et tous ensemble, n'est pas forcément ce que l'enseignante aurait apporté. L'enseignante doit respecter le choix des briques et des branches pour amener le débat vers une solution ; c'est un travail difficile car il ne faut pas faire cheminer les élèves par un autre chemin que celui qu'ils ont choisi. Il faut voir, dans ce qu'ils proposent si c'est un chemin susceptible d'aboutir, mais il ne faut pas les obliger à le laisser et à en choisir un autre que l'enseignante juge plus adapté, sinon on risque de tirer à côté du but. C'est dans ce travail qu'Odile et Florence ont identifié une différence entre leur pratique habituelle et ce qu'impose le dispositif CESAME.

Citons Odile : « Quant à ma "méthode" d'enseignement, je réalise que depuis quelque temps, j'usais de "l'argument d'autorité" à savoir : « c'est comme ça, on vous l'a déjà expliqué l'an dernier, en zappant de plus en plus les étapes de décomposition et de distributivité dans la technique opératoire de la multiplication, croyant gagner du temps, pensant que ça les "embrouillait" plus qu'autre chose, n'ayant pas fait le lien entre les différentes erreurs rencontrées jeudi, et surtout en ne laissant pas vraiment la possibilité aux élèves d'expliquer leurs erreurs, de leur laisser s'en rendre compte et trouver les solutions eux mêmes. Je croyais le faire, eh bien non ! »

Ainsi, Odile a été surprise par certaines erreurs faites par ses élèves, qu'elle n'avait jamais identifiées auparavant. En cherchant à conduire ses élèves vers la bonne réponse, elle se privait de certaines informations qu'ils pouvaient lui donner. Le dispositif CESAME, en obligeant les élèves à travailler sur les différentes solutions qu'ils apportent donne ces informations et d'autre part il met en évidence les différences mathématiques entre les réponses justes et les réponses fausses. Les élèves ayant une raison mathématique de choisir la réponse juste sont dans une meilleure situation pour la comprendre et la mémoriser.

De plus, Odile nous dit qu'elle sait mieux maintenant interroger les élèves sur ce qu'ils ont ou n'ont pas compris. Il s'est trouvé qu'en parallèle du travail avec le dispositif CESAME dans sa classe, Odile a lu des articles sur l'entretien d'explicitation. Cette réflexion personnelle, en liaison avec le travail que nous avons fait ensemble, l'a conduite à modifier la façon dont elle interroge les élèves : elle remplace les questions en « pourquoi » par une interrogation qui amène les enfants à travailler sur leurs erreurs ; avec des relances telles que « qu'est-ce que tu fais quand tu fais ça ? » elle constate qu'on peut amener les élèves à dire ce qu'ils savent faire, ce qu'ils ont compris et qu'ainsi ils réfléchissent suffisamment à leurs erreurs pour trouver leur solution.

Si on s'intéresse maintenant aux acquis des élèves après les séances CESAME, on constate qu'ils sont plus solides qu'avec le travail habituel de ces enseignantes. Odile en a été enthousiasmée :

« Je leur propose d'effectuer sur l'ardoise 900 – 32. Deux résultats sont faux. Sans désigner les enfants je dis : "Nous n'avons pas tous les mêmes résultats, tout le monde pense à tout ce qu'on vient de dire et vérifie." Tous les résultats sont corrigés sur l'ardoise. »

« Par rapport aux autres années : après la séance de « recherche redécouverte », j'avais au minimum 8 enfants à revoir en groupes de besoin. Aujourd'hui j'en ai donc 2 et encore je ne suis pas sûre qu'ils en aient vraiment besoin ; quand je reprends leurs recherches de mardi ce n'était pas aussi mauvais que ça. Résultat à confirmer lundi, après avoir fait brièvement rappeler à l'oral la technique opératoire, notamment pour les 2 élèves en « échec », avant de faire un groupe de besoin pour eux. »

Nous pouvons étudier un effet plus global du dispositif sur les élèves. D'après les observations de Florence, les enfants sont davantage enclins à confronter leurs réponses. Elle l'a constaté avec trois procédures qu'ils ont utilisées pour résoudre un problème de proportionnalité. Pour elle, auparavant, les élèves savaient dire : « je trouve pareil mais je n'ai pas fait pareil » avec une idée vague que si la méthode n'était pas celle proposée par le maître, cela ne devait pas être tout à fait juste. Elle nous dit que les élèves savent qu'on peut faire juste par différents chemins mais « qu'il y a une différence entre le fait de le dire et le fait de leur faire vivre ». Elle pointe ainsi ce que nous appelons une connaissance expérientielle. Dans la théorie CESAME, les connaissances d'ordre II sont des connaissances qu'on ne peut enseigner par un discours mais dont il faut que élèves fassent l'expérience, ce qui est exactement le cas ici.

Dans les deux classes, les élèves ont réinvesti les connaissances discutées et acquises pendant le travail avec le dispositif CESAME, dans un travail ultérieur. En CM1, la connaissance locale est réapparue lors de la soustraction avec les nombres décimaux si on soustrait un nombre à virgule d'un entier : 120-8,14 donne 112,14. En écrivant 120 comme 120,00 les élèves de CM1 ont retrouvé l'argument « il ne faut pas désarticuler un nombre » pour corriger leur erreur. En CM2, toujours pour les opérations sur les décimaux, les résultats acquis lors de la comparaison ont été rappelés et il n'y a eu que très peu d'erreurs. Ces séances CESAME servent donc de référence pour la suite des apprentissages. Les connaissances institutionnalisées à cette occasion sont des points d'ancrage pour des apprentissages futurs.

Dernière remarque sur des effets des expériences CESAME dans les classes :

Les élèves font en sorte que tout le monde écoute les explications, surtout au CM1. Ils ont, plus qu'auparavant, le sentiment que leur parole est prise en compte et ils jouent tous le jeu de l'écoute : « ils en usent et abusent ». Il s'agit pourtant d'une classe où l'écoute de la parole des élèves est particulièrement libre et où le respect mutuel est très important. Il se peut que le dispositif CESAME ait transféré aux activités de mathématiques des modes de fonctionnement qui y étaient moins habituels et que les enseignantes aient été plus attentives à ces phénomènes.

Bibliographie

LEGRAND M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères-IREM*. 10, pp 123-158.

LEONARD F. & SACKUR-GRISVARD C. (1981), Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs, *Bulletin de l'APMEP* 327, pp 47-60.

LEONARD F. & SACKUR C. (1991), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10(2/3), pp.205-240.

MAUREL M. (2001), Derrière la droite, l'hyperplan. *Repères-IREM* 42, pp.83-114

SACKUR C., ASSUDE T., MAUREL M., DROUHARD J-P., PAQUELIER Y. (2005), L'expérience de la nécessité épistémique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 25/1 pp.57-90.

SACKUR C. & MAUREL M. (2000), Les inéquations en classe de seconde. Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x* 53, pp. 5-26.

UN EXEMPLE DE FORMATION CONTINUE À LA MODÉLISATION DANS LE CADRE DU PROJET LEMA : DESCRIPTION ET PROBLEMES RENCONTRES

Richard CABASSUT
PIUFM, IUFM d'Alsace
Didirem Paris 7
richard.cabassut@alsace.iufm.fr

Résumé[1]
En janvier 2008 s'est déroulée à l'IUFM de Strasbourg une formation continue de cinq jours sur l'enseignement de la modélisation à destination de professeurs d'école. Cette formation a été préparée dans le cadre d'un projet européen Comenius et comprend cinq modules : modélisation (c'est quoi et pourquoi, tâches (explorer, classifier, créer), leçons (méthodes, compétences, contenus), évaluation (formative, sommative, rétroaction), réflexion et validation. On présentera la formation proposée, en l'illustrant par quelques extraits. On évoquera ensuite quelques problèmes rencontrés dans la mise en oeuvre de la formation.

Avec le soutien financier de la commission européenne, un projet Comenius européen LEMA[2] rassemble différents partenaires européens, universités ou instituts de formations d'enseignants. « Ce projet propose de soutenir chez les professeurs l'essor de pratiques pédagogiques de modélisation et d'application des mathématiques, par le développement d'un cours de formation pour enseignants. Le but serait, tout en développant une approche commune, de proposer un cours flexible et adaptable aux besoins des pays partenaires actuels ou ultérieurs. La diversité des bonnes pratiques courantes parmi les pays partenaires sera prise en compte pour le développement du cours. Les groupes cibles sont les professeurs de l'école primaire et du début de l'école secondaire, en formation initiale ou en formation continue ». (LEMA 2006)

---

[1] Cette communication est dans le prolongement des ateliers de la Copirelem de Dourdan (Cabassut 2006) et de Troyes (Adjiage, Cabassut 2007)

[2] Le projet LEMA (Learning and education in and through modelling) est cofinancé par l'Union Européenne comme action Comenius 2-1. Des informations se trouvent sur le site www.lema-project.org . Le projet dure d'octobre 2006 à septembre 2009. Les représentants des partenaires du projet sont : Katja Maaß & Barbara Schmidt, University of Education Freiburg, Richard Cabassut, IUFM, Strasbourg, Fco. Javier Garcia & Luisa Ruiz, University of Jaen, Nicholas Mousoulides, University of Cyprus, Anke Wagner, University of Education, Ludwigsburg, Geoff Wake, The University of Manchester, Ödön Vancso & Gabriella Ambrus, Eötvös Lorand University, Budapest.

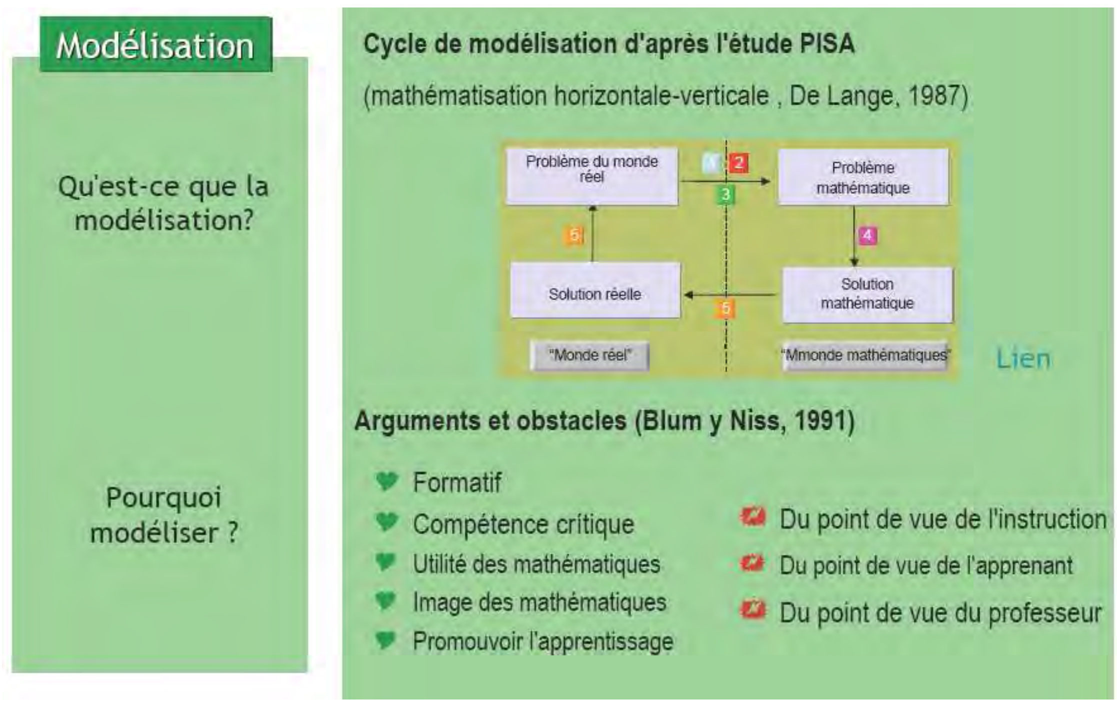
Décrivons le contenu de la formation qui a été élaborée par l'équipe du projet LEMA[2] et expérimentée en France en formation continue, auprès de professeurs d'école, sur une durée de cinq jours.

I – EXEMPLE DE FORMATION A LA MODELISATION

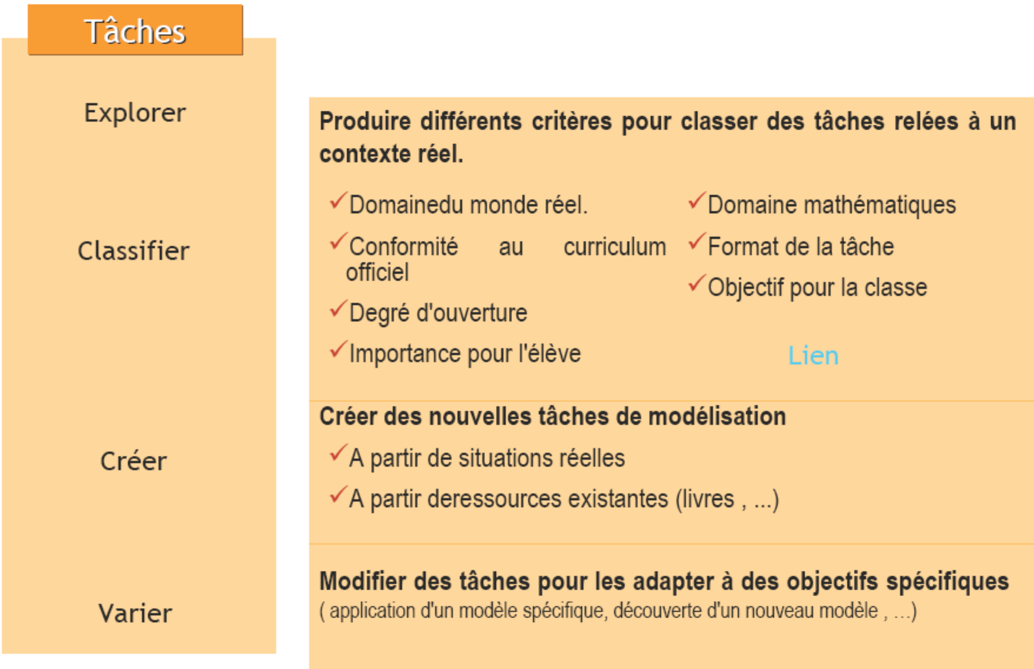
Avant la formation un questionnaire a été diffusé dans les différents pays partenaires pour préciser les besoins en formation. Cette analyse des besoins a permis de constituer une formation en cinq modules indépendants.

I – 1 Structure de la formation

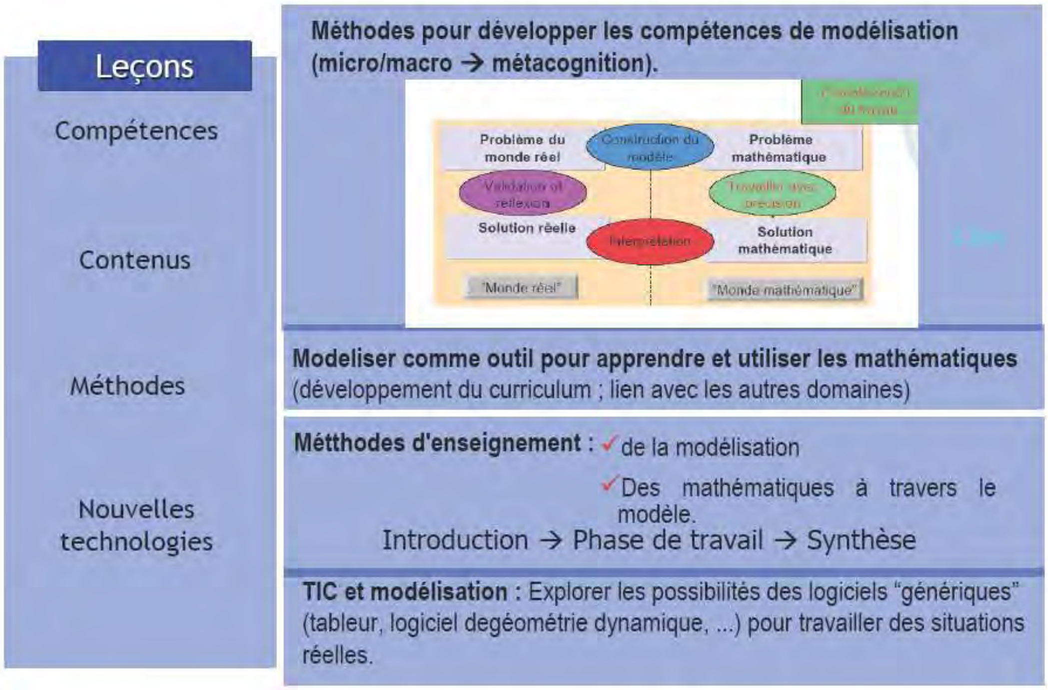
Le **module « modélisation »** propose aux professeurs en formation de travailler sur différentes tâches du monde réel, de réfléchir aux caractéristiques de ces tâches et de penser à des critères permettant de différencier les tâches de modélisation des autres tâches du monde réel. Ensuite est encouragée la réflexion sur l'inclusion d'un nombre plus important de tâches de modélisation et d'application dans l'enseignement, ses bénéfices pour les élèves, mais également les difficultés et les obstacles à surmonter.



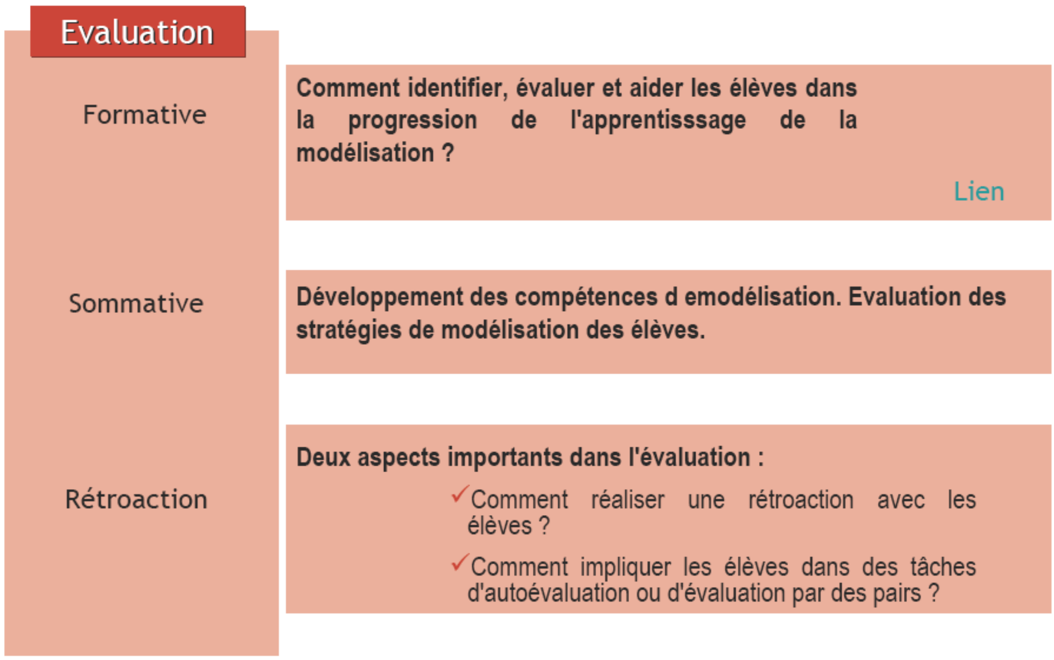
Le **module « tâches »** doit permettre d'autres expériences du processus de modélisation à partir de différentes tâches, de prendre connaissance de tâches variées pour en faciliter la classification, de réfléchir à l'influence de la présentation des tâches sur les stratégies des élèves. Le professeur en formation réfléchit à la façon de préparer de nouvelles tâches à partir de situations réelles, et de réécrire ou adapter des exercices de manuels pour les transformer en tâches de modélisation en fonction des objectifs de ses leçons, de réfléchir à la façon de classifier différentes tâches liées à un contexte et d'avoir une vue d'ensemble de la gamme étendue des tâches qui peuvent être utilisées avec des élèves. Dans le module on considère comment varier les tâches pour s'assurer qu'elles aient toutes les chances de répondre aux objectifs d'un cours.



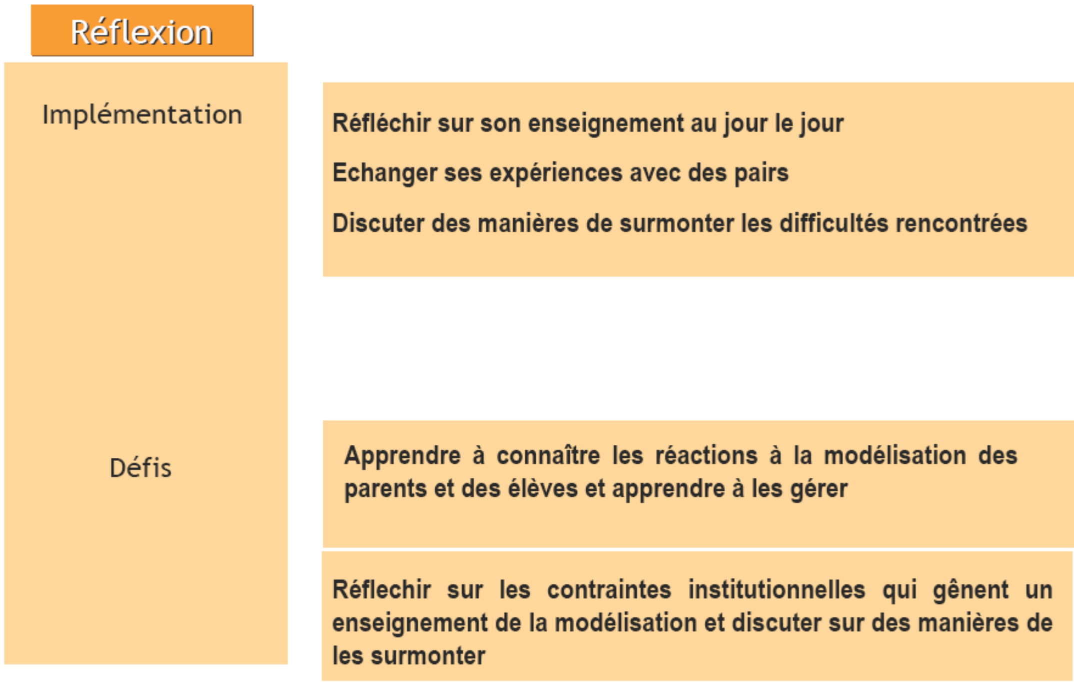
Le **module « leçons »** permet de réfléchir aux questions et aux problèmes importants qui peuvent survenir dans les modélisations en classe, d'envisager plusieurs méthodes et stratégies pouvant être utilisées dans des leçons de modélisation ; de réfléchir aux compétences acquises par les élèves lors de la modélisation, à la façon de concevoir des leçons pour aider les élèves à développer certaines compétences en modélisation et à la façon d'aider les compétences des élèves en matière de raisonnement. On réfléchit à l'importance pour les élèves d'une vue d'ensemble du cycle de modélisation, à la façon d'aider les élèves à développer des stratégies métacognitives et à la façon d'utiliser une approche de modélisation dans l'enseignement en se concentrant sur un contenu mathématique spécifique.



Le module « évaluation » permet de réfléchir à la façon d'identifier, d'évaluer et d'aider les progrès des élèves en modélisation mathématique, de questionner aussi bien l'évaluation formative que sommative, de réfléchir à la rétroaction à donner aux élèves en tant qu'enseignant, lorsqu'ils exécutent en groupes des tâches de modélisation, enfin de réfléchir à des stratégies qui encouragent l'apprentissage de l'auto-évaluation chez les élèves.



Le module « réflexion » examine d'éventuelles réactions à la modélisation des élèves et des parents, la façon de traiter avec eux. Il permet d'examiner la façon dont les caractéristiques de l'institution dans laquelle le professeur formé travaille peuvent le gêner dans ses tentatives pour intégrer la modélisation dans sa pratique de classe. On examine les moyens de surmonter les obstacles. On réfléchit aux expériences de modélisation avec les classes et aux discussions qu'elles peuvent susciter entre collègues dans les écoles où les expériences sont conduites.



I – 2 Matériel mis à la disposition du formateur et des formés

Les ressources suivantes sont mises à disposition du formateur de professeurs et des professeurs formés :

une description schématique de la formation pour le formateur et les formés,

une introduction pour les formateurs,

une introduction pour les formés,

des évaluations initiale, au jour le jour, et finale pour les formés,

pour chaque module : un diaporama du formateur, qui sera également mis à disposition des formés, un guide pour les formateurs, du matériel pour les formés, et un journal du formé.

I – 3 Exemples d'activités de formation et de production

Il n'est pas possible de rendre compte de tous les modules. Nous allons donc extraire quelques exemples d'activités de formation, qui sont bien entendu à replonger dans la progression de la formation.

I – 3.1 module « modélisation »

Proposons un extrait d'activités de formation appartenant au module « modélisation ». D'abord les objectifs et résultats attendus sont indiqués en début de module :

Objectifs	Résultats
Vous devrez : • travailler sur différentes tâches du monde réel. • réfléchir sur les caractéristiques de ces tâches. • penser à des critères permettant de différencier les tâches de modélisation des autres tâches du monde réel.	• Critères d'identification des tâches de modélisation • Vue d'ensemble du processus de modélisation

La structure de la session « module » est précisée :

Lors de la première activité, les professeurs en formation résolvent les six tâches suivantes en groupes de quatre à cinq personnes (6 groupes en tout).

Ensuite on opère trois regroupements de deux groupes. Les solutions trouvées sont comparées, suivant les quatre critères : contexte de la tâche, solutions attendues, connaissances mathématiques utilisées, activités de celui qui cherche la solution. Les similarités et les différences sont dégagées sur une affiche.

Une discussion collective s'ensuit qui permettra de dégager les caractéristiques d'une tâche de modélisation.

Tâche 1 : “Pétition contre une nouvelle loi”

Le parti espagnol d'opposition a récemment présenté au Congrès, le 25 avril 2006, 4 millions de signatures contre une nouvelle loi soutenue par le gouvernement.

Tous les journaux espagnols ont publié des photos des grandes caisses et des 10 camionnettes nécessaires pour transporter les feuilles de papier au Congrès. Pensez-vous qu'il y avait une intention politique derrière cette mise en scène ou bien croyez-vous que toutes ces caisses et ces camionnettes étaient vraiment nécessaires pour transporter ces 4 millions de signatures?

Tâche 2 : “Battement du cœur”

Pour des raisons de santé, il faut limiter ses efforts, comme par ex. en sport, afin que la fréquence cardiaque ne dépasse pas un certain seuil.

Longtemps, la relation entre la fréquence cardiaque maximum recommandée pour une personne et son âge était donnée par la formule suivante :

Fréquence cardiaque maximum recommandée = 220 – âge

Des études récentes ont montré qu'il fallait légèrement modifier cette formule. On obtient ainsi la nouvelle formule :

Fréquence cardiaque maximum recommandée = 208 – (0,7 x âge)

Un article de journal déclarait : “*En utilisant la nouvelle formule à la place de l'ancienne, on voit que le nombre maximum recommandé de battements du cœur par minute diminue légèrement pour les personnes jeunes alors qu'il augmente un peu pour les personnes âgées.*”

À partir de quel âge voit-on une augmentation de la fréquence cardiaque maximum recommandée selon la nouvelle formule ? Présentez votre travail.

Extrait de .oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf

Tâche 3 : Festival de musique

Le **Festival des arts du spectacle de Glastonbury** est le plus grand festival de musique et d'arts du spectacle au monde en pleine nature. En 2005, le festival recouvrait une zone clôturée de plus de 3,6 km² et comptait plus de 385 spectacles en direct. Beaucoup de festivaliers viennent avec leurs propres tentes pour dormir à l'intérieur de la zone du festival.

Les organisateurs doivent limiter le nombre de billets et le nombre de tentes autorisées pour garantir la sécurité. Quel conseil pourriez-vous donner ?

Tâche 4 : Gaz naturel

En 1993, les réserves mondiales de gaz naturel étaient estimées à 141,8 milliards de mètres cubes. Depuis cette date, on a utilisé chaque année en moyenne 2,5 milliards de mètres cubes. Calculez à quelle date les réserves de gaz naturel seront épuisées. Utilisez différentes hypothèses et modèles. Expliquez toutes vos étapes.

© Maaß, Katja (2007) : Mathematisches Modellieren im Unterricht. Cornelsen Verlag, Berlin

Tâche 5 : Œufs de Pâques

Danielle a trouvé 23 œufs. Elle a un large sourire car elle a trouvé neuf œufs de plus que Chris. Jennie sourit encore plus. Elle a trouvé exactement autant d'œufs que Chris et Danielle réunis. Comment d'œufs a trouvé Jennie ?

Tâche 6 : Les voisins

À votre avis, combien de gens habitent dans cet immeuble ?

Étiquettes des sonnettes dans le hall d'entrée :

© Maaß, Katja (2009) : Mathematisches Modellieren im Grundschulunterricht. Cornelsen Verlag, Berlin

Volontairement les tâches sur lesquelles travaillent les professeurs formés ne sont pas toutes du niveau des classes qu'ils ont en charge. Il s'agit d'abord de réfléchir à la modélisation, sans rentrer directement dans la mise en œuvre dans les classes des formés.

I – 3.2 module « leçons », sous-module « méthodes »

Voici quelques activités extraites du module « leçons », sous module « méthodes ».

Objectifs

Vous devrez :

- réfléchir sur les questions et les problèmes importants qui peuvent survenir dans les modélisations en classe.
- envisager plusieurs méthodes et stratégies pouvant être utilisées dans des leçons de modélisation

Déroulement

Vous proposerez dans une première activité vos méthodes.

Vous simulerez ensuite une méthode (par un jeu de rôle).

Vous discuterez enfin de ces méthodes à la lumière de quelques recommandations issues de textes officiels.

Une première activité permet aux formés de proposer individuellement ou en paire leurs méthodes.

Proposer le résumé d'une fiche de préparation en travaillant individuellement ou en paire (comme vous le ressentez) sur une tâche proposée depuis le début de la formation ou sur une tâche que vous avez faite en classe.

Dans ce résumé de fiche de préparation il doit apparaître clairement les méthodes pour :

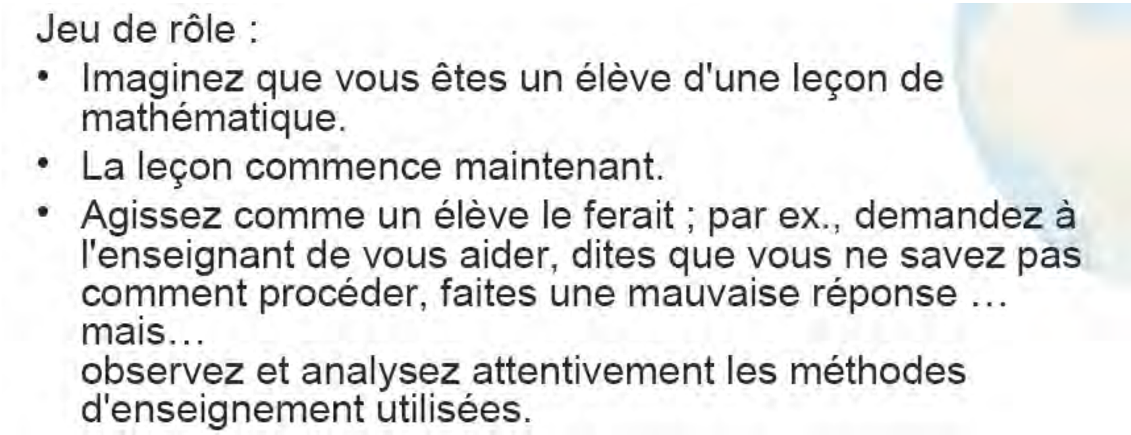
- introduire la séance
- organiser le travail (déroulement, forme de travail, productions attendues, rôle du professeur, rôle des élèves)
- conclure la séance

Vous pointerez les endroits où vous prévoyez des difficultés et indiquerez quelles solutions vous proposez.

Production attendue : une affiche format A3

Chaque affiche est présentée et une affiche de synthèse des différentes méthodes rencontrées est rédigée et sera discutée ultérieurement.

Dans une seconde activité, un jeu de rôle est proposé dans lequel le formateur joue le rôle du professeur et les formés ceux des élèves.



La tâche proposée par le professeur (joué par le formateur) est la suivante :

Les modalités proposées par le guide du formateur sont les suivantes :

Un objectif important de l'intégration de la modélisation dans les leçons de mathématiques est de voir la pertinence des mathématiques dans la vie et dans la société. C'est pourquoi le contexte d'une tâche est important.

- introduire et diriger un débat sur le contexte de la tâche
- essayer de ne pas donner trop d'informations à l'avance,

- résumer les résultats importants à la fin de la discussion.

Les élèves (joués par les formés) se répartissent par ordre alphabétique en groupes de cinq à six élèves et essaient de résoudre la tâche.

- Une brève session de réflexion en groupe entier pour présenter des idées pour résoudre la tâche. Ceci permet d'aider les groupes en difficulté. On écrit les idées sur une affiche sans les commenter.

- Retour au travail en groupes. Eviter de trop aider les groupes. Si un groupe demande de l'aide, l'encourager à étudier la tâche et à surmonter les problèmes. Une méthode consiste à demander à un groupe d'expliquer ce qu'ils ont fait jusque-là et comment ils envisagent de continuer.

- Demander à chaque groupe de présenter son travail sur une affiche.

- La dernière activité consiste à réfléchir puis discuter, en groupes puis en collectif, sur les différentes méthodes rencontrées dans les activités précédentes.

Réfléchissez en groupes sur les méthodes d'enseignement utilisées dans le jeu de rôle ou proposée par les collègues (voir les affiches).

- Concentrez-vous sur chaque phase :
    - Introduction
    - Phase de travail
    - Phase de conclusion

Mettez en relief les difficultés que vous avez décelées et suggérez quelques éventuels moyens de les surmonter. Indiquez les points observés qui, par expérience, semblent fonctionner bien. Synthétisez vos réflexions sur une affiche fixée au mur.

I – 3.3 module « leçons », sous-module « compétences »

Objectifs

Vous devrez réfléchir :

- aux sous-compétences acquises par les élèves lors de la modélisation
- à la façon de concevoir des leçons pour aider les élèves à développer certaines compétences en modélisation
- à la façon d'aider les compétences des élèves en matière de raisonnement.

Le module débute par un exposé du formateur sur le cycle de modélisation de PISA et les compétences qu'il repère[3].

Ensuite il est proposé une discussion sur le thème suivant :

Discussion

La remarque suivante a été faite par des enseignants qui ont abordé la modélisation dans leurs leçons :

"Pour accroître le développement des compétences en modélisation, les élèves doivent d'abord pratiquer chaque étape du processus de modélisation. Ce n'est que lorsqu'ils ont été capables d'exécuter chaque étape que l'on peut leur donner des tâches qui exigent de mettre en oeuvre l'ensemble du processus."

---

[3] On pourra trouver des informations dans CABASSUT R. (2008) Articulation entre réel et mathématiques : spécificité et généricité de la modélisation. *Acte du colloque Didirem "Approches plurielles en didactique des mathématiques Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ? »*. Université Paris 7. Paris, 4 - 6 septembre 2008. A paraître.

On trouvera également des informations sur le site www.lema-project.org au plus tard en septembre 2009.

A la suite de cette discussion, différentes activités de formation ciblées sur certaines sous-compétences, sont proposées. Concernant l'étape « construire un modèle » l'activité suivante est proposée.

Imaginez qu'avec un groupe d'élèves vous utilisiez la tâche de la "pétition" que nous avons vue dans "Qu'est-ce que la modélisation ?". Vous voulez aider vos élèves à "construire le modèle".Imaginez maintenant que vous êtes à la place des élèves. On vous donne un jeu de cartes. Répartissez les cartes en trois groupes. Ces groupes contiennent :
1 les faits que vous avez besoin d'utiliser
2 les faits dont vous n'avez pas besoin
3 les hypothèses que vous avez besoin de faire.
Décrivez votre tri en inscrivant 1, 2 ou 3 sur chaque carte.

Les cartes ci-dessous sont distribuées aux formés.

Un fourgon Ford Transit a une longueur inétrieure de 2458mm	Les ventes de fourgons Ford Transit ont augmenté en Europe d e2005 à 2006 d'environ 20%	Il y a 25 signatures sur chaque feuille de papier
Une feuille d epapier A4 a différentes qualités. Le poids peut varier entre 70, 80 ou 90 grammes par mètre carré	Il y a 500 feuilles de papier par rame	Un fourgon Ford transit est à l'intérieur large de 1719mm
Un fourgon Ford Transit a une hauteur intrieure de 1338mm	Le poids maximum de charge d'un fourgon Ford Transit est de 1000 kg	Une feuille de papier A4 est longue de 297 mm
16 feuilles A4 couvrent un mètre carré	5 rames sont vendues en boîtes de 305x 220x300 (longueur en mm)	Les signaturessont sur les deux faces de la feuille
Un fourgon Ford Transit a une hauteur de porte arrière de 1566 mm	Un fourgon Ford Transit pèse 3300 kg	Une feuille de papier A4 est large de 210 mm

Les formés doivent ensuite concevoir des cartes en rapport avec des tâches déjà rencontrées.

Répartissez vous en groupe et construire sur une affiche A3 des cartes pour une des trois tâches « le tour en ballon », « la queue à Europapark » et « la course dans la cour »

Les tâches évoquées[4] sont les suivantes.

---

[4] La tâche 3 est inspirée d'un article de Serge Petit « Le tilleul et le marronnier » parue dans le n°466 du Bulletin Vert de l'APMEP, p.597.

Tâche 1 Tour en ballon

Une classe de CP de 23 élèves et une classe de CE1 de 25 élèves vont visiter Europapark. Ils arrivent à 14h au park. Tous les élèves veulent aller dans le manège « Le vol d' Icare » avec des ballons et des nacelles.

Peuvent-ils faire un tour de ce manège tous ensembles ?

Photo capturée sur le site http://www.epfrust.com/

Vous êtes à Europa Park et vous souhaitez entrer dans une attraction où la file d'attente est de 20 mètres de long.

Combien de temps devrez-vous attendre ?

Tâche 3   La course

Dans une cour d'école se trouvent deux arbres : l'un petit, l'autre grand.

Il y a aussi une clôture rectiligne.

Un groupe d'élèves organisent une course : chaque élève commence au petit arbre puis va toucher la clôture avant de courir jusqu'au grand arbre pour terminer la course.

Quel est le meilleur endroit pour toucher la clôture ?

II – QUELQUES PROBLEMES RENCONTRES

II – 1 organiser le stage

Expérimenter cette formation continue en France est complexe, compte tenu de l'organisation du plan départemental de formation des professeurs d'école de l'académie dont dépend l'IUFM partenaire du projet : il faut s'inscrire dans les priorités académiques, satisfaire les contraintes de format des formations (projet déposé en février de l'année précédente, durée de la formation : par exemple certains stages doivent durer les trois semaines de stage R3 pour lesquelles le professeur formé sera remplacé par un professeur stagiaire PE2 en responsabilité dans sa classe), être sélectionné dans le plan académique de formation, avoir suffisamment d'inscrits (une vingtaine) pour que le stage puisse avoir lieu. C'est pourquoi le stage a été conçu de manière modulaire : le formateur peut choisir de traiter seulement une partie des modules ; l'ordre des modules est libre ; leur contenu peut être modifié par le formateur. Il faut savoir que suivant les pays la formation continue est facultative ou obligatoire, gratuite ou payante, organisée sur le temps scolaire ou en dehors, rémunérée ou pas, à l'initiative d'un formateur ou sur commande d'une institution ...

Dans le cas français, deux projets avaient été proposés. Le premier était une formation à distance, avec rencontre en présentiel et utilisation d'une plate-forme collaborative dans un dispositif analogue à celui décrit en (Cabassut et al. 2006). Cette proposition n'a pas été acceptée. Un autre projet a inscrit cette formation à la modélisation de cinq jours dans un stage plus long de trois semaines (durée du R3) sur la résolution de problèmes en mathématiques à l'école primaire. Les objectifs annoncés pour cette formation de trois semaines étaient les suivants :

- s'inscrire dans les axes prioritaires du plan de formation départemental : maîtrise de la langue, développement de l'enseignement scientifique (mathématiques), maîtrise des TICE ;

- repérer les objectifs spécifiques et les objectifs transversaux (maîtrise de la langue) aux activités de résolutions de problème et de modélisation mathématiques proposées par différentes ressources (manuels, documentation en ligne, ...) ;

- concevoir différents types de séances de résolution de problème et de modélisation : situation-problème, structuration, entraînement, évaluation ;

- concevoir une progression sur la résolution de problème ou la modélisation ;

- savoir intégrer les TICE dans des activités de résolution de problème ou de modélisation ;

Le projet a été accepté mais a imposé que les professeurs formés soient tous enseignants en cycle 2, ce qui a nécessité une adaptation des tâches proposées. Le nombre d'inscrits (29 inscrits et 23 participants effectifs) a permis la réalisation effective de la formation.

II – 2 évaluation de la formation

L'évaluation de la formation a donné lieu à plusieurs passations de questionnaires :

- un questionnaire d'analyse des besoins auprès d'enseignants : on observe une très grande difficulté à obtenir un retour des questionnaires qui permettent de garantir une certaine représentativité des réponses ;

- un même questionnaire en début de stage et en fin de stage : il permet d'observer les changements ; il est reposé 6 mois après le stage mais dans ce cas les retours sont peu nombreux ; de même le questionnaire a été passé auprès d'une population de contrôle et on obtient peu de retour ;

- un questionnaire après chaque jour de stage ;

- une discussion en fin de stage et quelques entretiens approfondis pour certains stagiaires ;

Il est très difficile d'effectuer une évaluation approfondie sous forme de questionnaires : elle apparaît très coûteuse en temps de passation et pas assez représentative.

Cette partie du projet n’est pas encore accessible.

II – 3 adaptations françaises

Certaines tâches pour les professeurs en formation et certaines tâches pour les élèves ont du être adaptées en prenant en compte le cycle 2.

Le temps insuffisant pour dérouler toute la formation prévue a obligé à supprimer certains modules, le module « réflexion » et le sous-module « évaluation par rétroaction ». Les modules « argumentation » ou « TIC » ont été supprimés mais les thématiques ont été traitées, plus généralement que dans le cadre de la modélisation, dans la suite du stage sur la résolution de problèmes.

Le formateur a souhaité changer certaines activités du module « leçons » en travaillant sur les programmes français et les contenus de certains manuels, car les programmes et les manuels ont un rôle important en France. Pour le module « leçons » sous-module « méthode », une activité préliminaire a été introduite : chaque formé exprime ses méthodes, avant que ne lui soient « imposées » dans le jeu de rôle les méthodes du formateur.

De même, dans le module sur les compétences, des activités en référence au socle commun et aux programmes officiels de l’école, ont été introduites.

IV – CONCLUSION

Nous avons présenté un exemple de formation à la modélisation à destination des professeurs d'école. L'ensemble de ces ressources sera téléchargeable sur le site du projet www.lema-project.org avant octobre 2009, date de fin du projet

Un rapport récent de l'Inspection Générale de l'Education Nationale précisait : « L’action de l’école primaire contribue à l’acquisition de la « littératie » mathématique. La vie courante offre des situations de niveau de complexité variable : le maître doit les sélectionner de façon à ce que l’élève puisse mettre en jeu les outils mathématiques qu’il possède et des raisonnements logiques. De nombreux exemples pourraient être cités, notamment en s'appuyant sur l'environnement de la classe (coût d'une sortie scolaire, dépenses liées à une impression de documents, durée de certains trajets scolaires, gestion de la coopérative scolaire…) qui peuvent donner naissance à des activités riches, surtout si elles sont pratiquées à partir de documents authentiques » (IGEN 2006, p.40). A travers l'étude de rapports d'inspection et d'entretiens avec les enseignants, le rapport conclut que « les problèmes de vie courante tiennent une place insuffisante dans nombre de classes » (Ibid. p.59).

En France, le socle commun de connaissances et de compétences a été mis en œuvre à l'école primaire dès la rentrée 2007. Parmi les capacités mathématiques, « à la sortie de l'école obligatoire, l'élève doit être en mesure d'appliquer les principes et processus mathématiques de base dans la vie quotidienne, dans sa vie privée comme dans son travail. Pour cela, il doit être capable : [...] - de saisir quand une situation de la vie courante se prête à un traitement mathématique, l'analyser en posant les données puis en émettant des hypothèses, s'engager dans un raisonnement ou un calcul en vue de sa résolution, et, pour cela : savoir quand et comment utiliser les opérations élémentaires ; contrôler la vraisemblance d'un résultat ; reconnaître les situations relevant de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté ; utiliser les représentations graphiques ; utiliser les théorèmes de géométrie plane [...]. L'étude des sciences expérimentales développe les capacités inductives et déductives de l'intelligence sous ses différentes formes. L'élève doit être capable de pratiquer une démarche scientifique : savoir observer, questionner, formuler une hypothèse et la valider, argumenter, modéliser de façon élémentaire ; comprendre le lien entre les phénomènes de la nature et le langage mathématique qui s'y applique et aide à les décrire » (BOEN 2006 pVIII-IX).

Nous espérons que cette formation à la modélisation participera à une prise en compte des problèmes de la vie courante dans l'enseignement, et à une formation aux capacités mathématiques décrites dans le socle commun. Bien entendu, les problèmes de la vie courante sont depuis longtemps mis en œuvre à l'école primaire, et les problèmes de modélisation ne constituent pas la seule voie pour développer les capacités mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

ADJIAGE R., CABASSUT R. (2008) La modélisation dans une perspective de formation et d'enseignement. In *Actes du 34e colloque Copirelem,* Troyes.

BOEN (2006) S*ocle commun de connaissances et de compétences,* bulletin officiel de l'éducation nationale n° 29 du 20 juillet 2006.

CABASSUT R., RIEMLINGER P. ET TRESTINI M. (2006) Les TIC dans la formation et l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. In *Actes du 32e Colloque Copirelem* .IREM de Strasbourg, mai 2006, p.103.

CABASSUT R. (2007) Exemples de modélisation à l'école primaire allemande : quels enjeux pour la formation des maîtres? In *Actes su 33e colloque Copirelem,* Dourdan, p. 119 - 120.

CABASSUT R. (2008) Enseigner la modélisation dans un contexte européen. B*ulletin vert de l'APMEP.* N°477. Juillet août 2008.

IGEN (2006) *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire.* Rapport de l'inspection générale sur l'enseignement des mathématiques n° 2006-034, juin 2006. Ministère de l'Education Nationale.

LEMA **L**earning and **E**ducation in and through **M**odelling and **A**pplication http://www.lema-project.org

Conditions et contraintes « internes » de l'introduction des TICE dans les pratiques mathématiques à l'école élémentaire.

IMBERT Jean-Louis
IUFM Midi-Pyrénées
Doctorant ADEF UMR Université de Provence

Cette communication porte sur une partie de ma thèse qui traite des conditions et contraintes de l'intégration des TICE dans les pratiques mathématiques à l'école élémentaire. Elle fait suite à la communication présentée à Troyes (2007) sur les contraintes externes à l'introduction des TICE J'aborde ici un deuxième aspect, les contraintes internes (classe).

La première partie de ma recherche porte sur trois influences institutionnelles que j'ai qualifiées d'externes à la vie de la classe et qui constituent des contraintes à l'intégration des TICE : les programmes de l'école, les équipes de circonscriptions et les manuels. Elle m'a conduit au constat de la faible intégration des Technologies d'Information et de Communication pour l'Enseignement (TICE).

Dans la deuxième partie je me suis intéressé aux contraintes internes que peuvent constituer les pratiques mathématiques, les situations d'apprentissage, le rôle de l'enseignant et l'instrument TICE. La théorie des situations didactiques, la théorie anthropologique du didactique et l'approche instrumentale m'ont permis d'éclairer ces notions. Elles m'aident à comprendre les pratiques de cinq enseignants d'école primaire que j'ai observés pendant plusieurs mois.

Pour expliquer le peu d'utilisation des TICE dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire il faut donc répondre à la question :

« Quelles sont les conditions et les contraintes internes à la classe que l'enseignant doit prendre en compte pour intégrer les TICE dans les pratiques mathématiques à l'école élémentaire? » En restant dans le champ de la didactique, cette question globale m'amène à poser les questions suivantes :

- Comment comprendre et décrire les pratiques mathématiques à l'école élémentaire ?
- Quelle est la position de l'enseignant dans le pilotage de l'activité mathématique intégrant des TICE ?
- Quels sont la place et le statut des TICE dans les situations d'apprentissage mathématiques ?

Je vais présenter succinctement le cadre théorique et l'outil d'analyse, puis je présenterai l'étude des pratiques d'un des cinq enseignants observés.

1 Le cadre théorique

Pour comprendre et décrire **des pratiques mathématiques ordinaires, dans des classes ordinaires**, j'ai utilisé les notions de milieu et de contrat didactique associés aux situations d'apprentissage mises en œuvre. Ces éléments de la théorie des situations définie par BROUSSEAU permettent d'expliquer un *« système minimal de conditions nécessaires dans lesquelles une connaissance (mathématique) déterminée, peut se manifester par les décisions aux effets observables (des actions) d'un actant sur un milieu »*. (BROUSSEAU, 2002). Pour affiner la notion de contrat didactique et de milieu dans des situations ordinaires j'ai utilisé des éléments de réflexion apportés par HERSANT et PERRIN-GLORIAN (2003).

Enfin, les TICE n'étant pas encore un objet naturalisé[1] dans la classe, je les étudie comme un artefact dans le milieu matériel, comme pourrait l'être une équerre. Je m'attache à dégager à partir des travaux d'ASSUDE et de TROUCHE les apports spécifiques des environnements informatiques en lien avec les différents acteurs de la classe et avec le savoir étudié, en d'autres termes identifier si les TICE acquièrent un statut d'instrument dans les autres milieux de l'enseignant et de l'élève.

1.1 L'apport d'une approche par la Théorie des Situations Didactiques

Faire des mathématiques à l'école élémentaire peut se décrire à travers les quatre composantes de l'activité d'apprentissage : le savoir, l'élève, l'enseignant et les relations entre ces différentes composantes, ce que BROUSSEAU (1986, 2002) qualifie de situation didactique. A l'intérieur de celle-ci, le contrat implicite entre l'élève et l'enseignant conditionne la situation. Enfin, la notion de milieu permet de caractériser les positions respectives de l'élève et de l'enseignant, en particulier dans les situations a-didactiques qui sont celles où l'enseignant n'intervient pas par rapport aux connaissances en jeu et dans lesquelles l'apprenant agit sur un « *milieu antagonique en fonction de ses propres motivations* ». (BROUSSEAU, 1996)

1.1.1 Le contrat didactique

Les éléments du milieu qui caractérisent la situation sont le résultat de la mise en place d'un dispositif dont le but est l'apprentissage des élèves. Les attentes réciproques de l'enseignant et des élèves, **concernant le savoir en jeu dans la situation**, s'organisent sous la forme de ce que BROUSSEAU (1986) a nommé « **contrat didactique** ».

Pour les contrats didactiques, ceux où l'on peut déceler *« une action où quelqu'un tente d'enseigner quelque chose à quelqu'autre qui ne veut pas l'apprendre »* (BROUSSEAU, 2002, p.32), sont

1 J'utilise naturalisé dans un sens proche de celui de Assude et Chevallard c'est-à -dire, ici, dans ce contexte les TICE sont reconnues comme un outil utilisable dans la classe pour faire des mathématiques, et en ce sens sont identifiées comme un savoir de l'enseignant concernant ses pratiques.

compréhensibles si on peut identifier les systèmes en jeu et leurs rapports (BROUSSEAU, 1995, pp. 22-23). Pour l'étude des séances ordinaires, j'ai repris la caractérisation qu'en ont faite PERRIN-GLORIAN et HERSANT (2003) en lien avec le déroulement du temps didactique. En plus du partage de responsabilité, elles retiennent trois autres composantes pour affiner les contrats étudiés : le domaine mathématique, le statut didactique du savoir (ancien / nouveau), la nature et les caractéristiques de la situation, *« à savoir l'existence ou non d'un milieu adidactique capable de rétroactions interprétables au niveau des connaissances élèves »*.

J'utiliserai le repérage, dans le temps didactique, des différents types de méso-contrat[2] (*Reconnaissance du savoir, Rappel, Réinvestissement des savoirs, Reprise, Revue de savoirs,...)* pour évaluer le rapport entre la tâche logicielle (TAL) et la tâche mathématique (TAM). D'autre part au niveau local *« le partage des responsabilités entre l'enseignant et l'apprenant caractérise le micro-contrat didactique. »* PERRIN-GLORRIAN et HERSANT en identifient sept qu'elles regroupent en trois catégories : les micro-contrats où l'enseignant garde toute la responsabilité ; ceux où la responsabilité est partagée entre l'enseignant et la classe ; enfin ceux dans lesquels la responsabilité est partagée entre l'enseignant et chaque élève de la classe.

Cela me fait dire d'une part que la recherche d'un hypothétique contrat constitue pour l'enseignant une condition nécessaire, une contrainte, lors de la mise en œuvre de pratiques mathématiques à l'école élémentaire. D'autre part, le modèle de la structuration du milieu permet de comprendre les contraintes et les conditions que devra gérer l'enseignant pour piloter la situation d'apprentissage des mathématiques. Se pose donc la question de la place des TICE dans ce modèle.

En réponse au « contrat didactique » qui lui confère un statut d'élève, il va agir sur le milieu matériel. Les réponses à ses actions définissent le milieu objectif où l'élève peut produire des jeux d'essais. C'est dans ce milieu que les techniques de l'élève peuvent être visibles.

Parmi ces contrats didactiques, j'ai retenu ceux où l'enseignant a un rôle important c'est-à-dire les moments de dévolution et d'institutionnalisation.

1.1.1 La dévolution

Les gestes de l'enseignant devraient mettre en évidence des ruptures de contrat liées au paradoxe de la dévolution : *« tout ce qu'il [l'enseignant] entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. [...]. Apprendre, implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter. »* (BROUSSEAU, 2002)

2 PERRIN-GLORRIAN et HERSANT (2003)

Dans ces conditions, si le milieu pour une dévolution existe et qu'il permet les rétroactions, alors on pourra identifier un élève apprenant. En revanche, si le milieu n'offre pas cette possibilité, alors l'enseignant devra assumer la responsabilité de tous les gestes de l'élève qui ne pourra plus être en position d'apprenant. L'enseignant devra alors utiliser d'autres stratégies didactiques comme les « ostensions » (BERTHELOT & SALIN, 1992) pour justifier des conditions d'usage des TICE.

Ces conditions de réalisation d'une dévolution réussie doivent être repérées par l'enseignant comme étant des contraintes et anticipées dès la phase de construction. Elles sont les obstacles qu'il devra dépasser pour la mise en œuvre de la situation d'apprentissage des élèves.

1.1.2 L'institutionnalisation

Du côté de l'apprenant, le deuxième moment fort de l'intervention de l'enseignant est l'institutionnalisation des connaissances comme référence pour la classe, c'est-à-dire un savoir réinvestissable dans d'autres tâches.

1.2 L'approche par la dimension instrumentale et praxéologique

Un élément particulier dans le milieu étudié est l'objet informatique. Il prend des places différentes du point de vue du savoir étudié, de l'élève ou de l'enseignant. Comment est-il orchestré, intégré, reconnu dans les différents milieux par les différents acteurs ? Pour répondre à cette question, je m'appuie sur l'approche instrumentale proposée par RABARDEL et les développements en mathématiques étudiés par ASSUDE (2001, 2002, 2005) et TROUCHE (2005).

L'idée que l'usage des instruments est transparent, c'est-à-dire qu'il laisse voir ce qu'il y a à faire pour les utiliser, est une idée très répandue : voir ASSUDE et al. (1996). Dans ses travaux, TROUCHE (2005) la décrit *« comme la possibilité de comprendre les traitements réalisés par la machine sur la base de son expérience des techniques papier-crayon. »*

L'approche d'ASSUDE (2002, 2005, 2007) place l'objet TICE dans un rapport global à la situation d'apprentissage. Elle caractérise l'intégration des TICE dans les séances de mathématiques.

1.2.1 Les modes d'intégration

A propos de l'intégration du logiciel Cabri, je retiens que l'enseignant va devoir gérer deux ruptures, l'une dans l'usage des techniques de résolution de problèmes, l'autre dans l'usage social de l'ordinateur par les élèves. L'enseignant aura donc à sa charge les choix d'activités avec la prise en compte de ces conditions. Il devra faire des choix de types de tâches pour qu'une connaissance instrumentale apparaisse en tant qu'outil pour résoudre une question. Cette modélisation caractérise le mode d'intégration instrumentale et le mode d'intégration praxéologique résumés ci-après.

Le mode d'**intégration instrumentale** est caractérisé par quatre types, *« l'initiation instrumentale, l'exploration instrumentale, le renforcement instrumental et la symbiose instrumentale »* ASSUDE

(2007), par plusieurs critères, le niveau de connaissance de l'outil « Cabri » et l'existence dans le travail de l'élève d'une “*Tache de type Cabri*” (TAC), une “*Tâche de type Mathématique*” (TAM) ou son absence, une “*connaissance instrumentale*” (IK), une “*connaissance Mathématique*” (MK) et le “*rapport entre la connaissance Mathématique et la connaissance Instrumentale”* (MK/IK).

Le mode d'**intégration praxéologique** a pour objectif de décrire l'activité des élèves en termes de praxéologies mathématiques c'est-à-dire en termes de “Tâches, Techniques, Technologie et Théorie” dont les deux éléments tâches et techniques seront essentiellement rencontrés à l'école primaire, ASSUDE identifie d'une part les rapports entre les praxéologies dans l'environnement “papier-crayon” ou “Cabri” et d'autre part leur statut en termes d'ancien ou de nouveau.

Ce modèle constitue un outil, pour situer les usages d'intégration des TICE par rapport à ces critères. Pour les usages des TICE que j'ai observés, il existe des logiciels qui ne disposent pas de la possibilité de réaliser une tâche différente de celle que l'on peut réaliser en environnement « papier-crayon ». Ce qui m'a fait introduire un nouveau mode d'intégration instrumental que j'ai appelé “Détournement” et qui caractérise une situation où l'on observe la mise en jeu d'une connaissance mathématique et d'une connaissance instrumentale avec une certaine indépendance entre elles. D'autre part, par similitude avec la notation d'ASSUDE, j'ai substitué l'appellation “Tâche Logicielle” (TAL) à “Tâche Cabri” (TAC) dans le tableau descriptif des différents modes d'intégration instrumentale :

	Débutants			Non débutants	
	Initiation	Exploration	Détournement	Renforcement	Symbiose
TAM		x	x	x	x
TAL	x				
IK	x	x	x		x
MK			x	x	x
IK/MK		MK prétexte pour IK	IK indépendant de MK	IK outil pour MK	Max

1.2.2 Praxéologie d'intégration et méso-contrats

ASSUDE identifie cinq modes d'intégration praxéologique et le lien entre les pratiques anciennes et les pratiques nouvelles. Pour structurer notre compréhension des conditions que l'enseignant doit prendre en compte dans l'intégration des TICE, je les interroge à partir des types de situation et des types de méso-contrat[3] qui résultent du statut didactique du savoir.

3 PERRIN-GLORIAN (2003)

1.2.3 Gestion de la transparence

La diversité des environnements numériques ne favorise pas une démarche simple d'identification. Plus l'environnement est complexe, plus il contient d'artefacts spécifiques, plus l'analyse des éléments constitutifs du milieu matériel devra être approfondie au risque de rencontrer des incidents successifs lors de la mise en œuvre. Cette prise en compte de la transparence peut être globale, mais aussi dans l'utilisation d'une technique logicielle associée à une sous tâche.

1.3 Deux contrats spécifiques : la dévolution et l'institutionnalisation

1.3.1 Organiser la dévolution en favorisant un environnement

La mise en œuvre d'une séance et l'élaboration du milieu matériel de la situation devrait conduire l'enseignant à envisager l'influence de l'ordre de rencontre de la connaissance mathématique dans un environnement ou dans l'autre. Ces choix d'introduction de la TAL antérieurement à la TAPP ne peuvent porter que sur l'hypothèse qu'elle favorise une connaissance ou un savoir mathématique que la TAPP ne permet pas de construire simplement ou de façon aussi pertinente ou efficace d'un point de vue didactique.

1.3.2 Gestion de l'institutionnalisation

L'organisation d'une institutionnalisation après un passage dans la résolution de deux tâches, une papier-crayon et l'autre TICE, nécessite l'organisation des deux mémoires successives des activités de résolution pour aboutir à une mise en relation. De plus cette mémoire porte sur la connaissance mathématique dans ses deux aspects, TAL et TAPP, les techniques « papier-crayon » et/ou logicielles et les rapports entre elles.

2 Un outil pour repérer l'intégration et son évolution

Pour caractériser l'évolution de la pratique d'un enseignant, les TICE étant intégrées comme les autres artefacts didactiques, j'ai choisi de m'intéresser à plusieurs indicateurs qui facilitent le repérage de ses actions. A partir des rétroactions que produit sa mise en œuvre, j'observe son évolution vers ce que j'ai appelé une intégration « optimale », c'est-à-dire ce que **l'outil TICE permet de réaliser que les autres outils n'auraient pas permis de mettre en œuvre du point de vue des mathématiques**. Cela correspond, pour l'enseignant, à la reconnaissance de l'outil TICE dans le milieu matériel et aux usages qui en seront faits dans la situation d'apprentissage.

Je vais donc utiliser les critères qui reprennent les éléments associés au cadre théorique de cette partie : la dimension instrumentale, l'intégration praxéologique, les types de contrats mis en œuvre et sur la gestion de la dévolution et l'institutionnalisation.

2.1 L'outil d'analyse « Toile »

Pour obtenir une lisibilité des éléments retenus dans le cadre théorique, j'ai synthétisé les indicateurs dans un outil graphique que j'ai nommé "Toile". Il se construit à partir du cadre théorique présenté sur les différentes entrées.

Pour la **dimension instrumentale** j'ai choisi de retenir deux critères :

L'usage des techniques
- Les techniques utilisées ou potentiellement utilisables dans l'environnement numérique.
- TEPP (pour techniques « papier-crayon »)
- TEL (pour techniques «logicielles »)
- TEPP et TEL indépendantes, elles sont juxtaposées dans l'activité
- TEPP et TEL induites par l'enseignant
- TEPP et TEL interagissent

A propos d'une TAM, le rapport entre les tâches dans l'environnement numérique et papier-crayon

Pour prendre en compte la **dimension praxéologique** j'ai retenu deux critères :

Les niveaux d'intégration instrumentale
- le détournement, niveau le moins adapté
- l'initiation,
- l'exploration,
- le renforcement
- le niveau le plus adapté : la symbiose.

La gestion de la transparence de l'outil et des techniques logicielles
- Non gérée
- Localement non gérée : par exemple un artefact intervenant dans une technique n'est pas pris en compte
- La connaissance des problèmes ne donne pas lieu à une anticipation dans la séance d'où des

Pour caractériser les contrats en jeu, j'ai retenu trois critères :

Le statut du savoir
- Ancien
- Institutionnalisé à consolider
- En cours d'institutionnalisation
- Nouveau après une première rencontre
- Nouveau

Les caractéristiques de la situation
- Ostension assumée ou Transmission du savoir
- Ostension déguisée : lorsque le professeur assume la responsabilité dans la production des connaissances et l'évaluation des réponses alors qu'il a mis en place une situation d'action, de formulation ou de validation.
- Situation non antagonique
- Situation antagonique non exploitée
- Situation antagonique

Le partage de responsabilité entre l'élève et l'enseignant
- Non partagée : l'enseignant assume totalement la transmission du savoir et la façon de le mettre

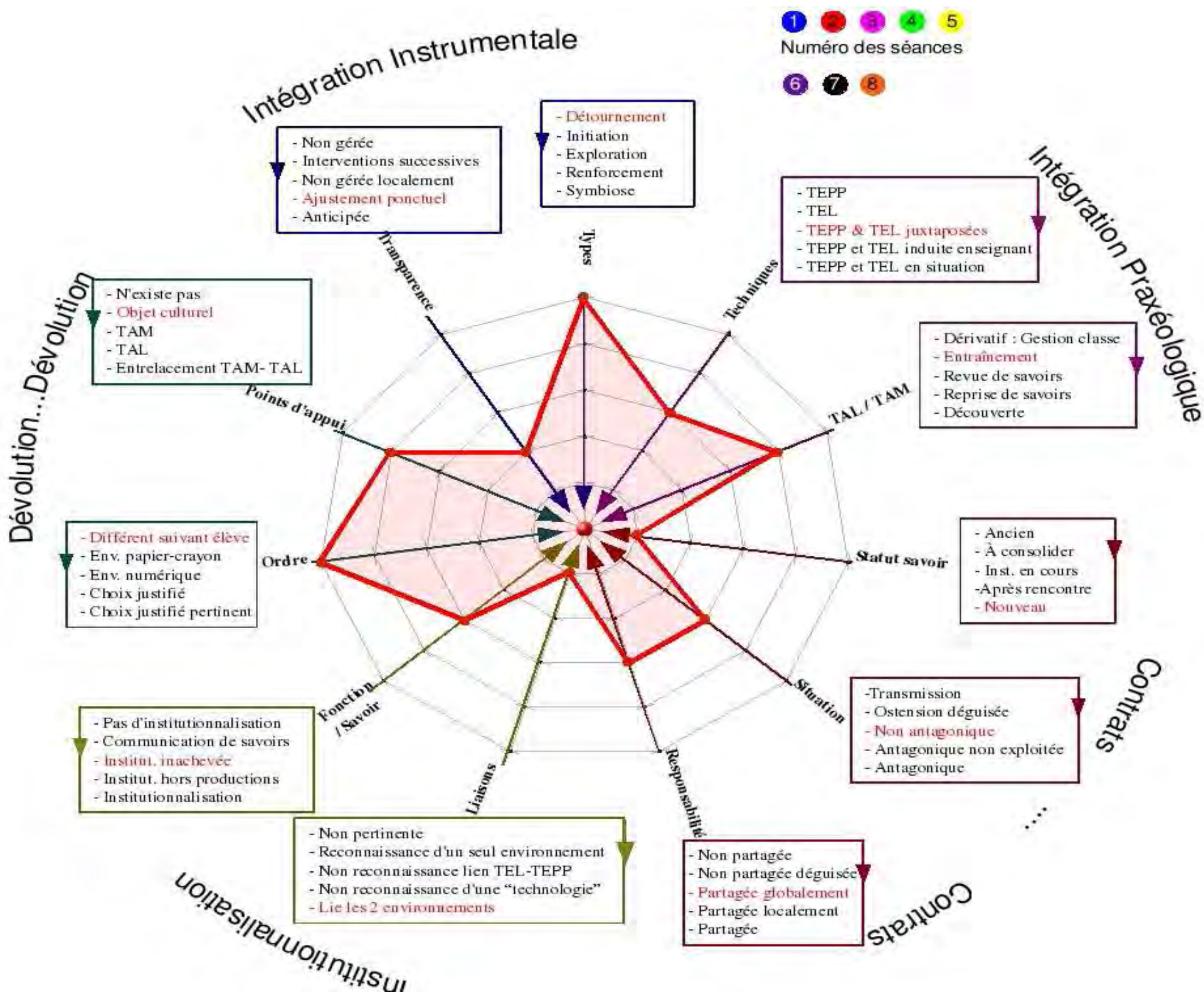
Pour caractériser **la mise en place des contrats** de dévolution j'ai choisi de retenir

Les points d'appui de la dévolution – Elle n'existe pas – Elle s'appuie sur des TICE qui sont un objet culturel (Je considère que l'image sociale n'a pas de fonction par rapport à la TAM) – Elle s'appuie uniquement sur la tâche mathématique en ne prenant pas en compte la dimension instrumentale – Elle s'appuie uniquement sur la TAL – Elle entrelace le problème mathématique et l'artefact **L'ordre d'introduction de l'environnement** – les élèves ne rencontrent pas les environnements dans le même ordre – le savoir ou la situation est introduit en environnement “papier-crayon”

Pour prendre en compte un contrat spécifique, **l'institutionnalisation**, j'ai retenu :

Sa fonction par rapport au savoir – Pas d'institutionnalisation ou ne correspond pas avec l'objectif initialement visé – Une communication de savoirs : l'enseignant reformule des savoirs déjà là, sans lien réel avec les productions des élèves – Une institutionnalisation inachevée où les connaissances engagées par les élèves ne sont que partiellement reconnues, partiellement débattues sans validation... – Une institutionnalisation hors des productions : l'enseignant n'établit pas le lien explicite avec les connaissances engagées. – Une institutionnalisation **La liaison entre connaissance et technique** – N'est pas pertinente en regard des connaissances en jeu ou absence d'institutionnalisation – N'est réalisée qu'en référence à un environnement – Alors qu'il existe un potentiel de justification qui lie les deux techniques, la liaison n'est pas réalisée

Ce repérage d'un mode d'intégration est schématisé sur la “Toile”, à la manière de la cible, où le point central constitue le voisinage de l'intégration “optimale”. Chaque hendécagone régulier représente un niveau ordonné. Les niveaux sont ordonnés, c'est-à-dire plus le point de repérage s'éloigne du centre, plus l'intégration est éloignée de l'intégration “optimale”. J'ai simplifié le texte des critères et des niveaux et je les ai reportés autour de la “Toile” dans des cadres rectangulaires. Ce codage est renforcé par une flèche sur le cadre donnant le sens de l'intégration optimale. J'utilise une ligne polygonale de couleur pour désigner le positionnement de la pratique de l'enseignant lors d'une séance ou d'une séquence. Sur la “Toile” ci-après j'ai présenté un codage fictif où j'ai écrit en rouge le niveau pour un critère, codé sur la “Toile” par un point rouge, le polygone représentant globalement la séance.



3 Les contraintes attachées aux situations mathématiques : l'exemple de la classe de l'enseignante Coralie

Je vais présenter comment mon outil "Toile" souligne les résultats d'observations que j'ai réalisé dans la classe de l'enseignante Coralie. Ces observations ont été mémorisées à partir d'un enregistrement vidéo pour garder la dimension collective des actions des élèves et de l'enseignant ce qui m'a permis de décrire le synopsis de chaque séance.

Pour capturer les échanges particuliers, que la caméra ne peut pas saisir, j'ai utilisé un enregistreur audio qui permet d'observer les adaptations de l'enseignant en réponse aux questions des élèves ou aux observations particulières.

Chaque séance a donc donné lieu à un entretien ante et un entretien post séance. L'objectif principal de l'entretien "ante" est de repérer les éléments de préparation de la séance. L'entretien "post" reprend les points qui invitent l'enseignant à se situer par rapport à ce qu'il retient de la séance.

3.1 La séance “calcul en arbre”

Coralie a une classe double niveau CM1-CM2. J'ai choisi de présenter ici l'étude concernant l'intégration des TICE avec les CM1. La séance que je vais analyser est la séance □ qui se situe dans la troisième séquence observée. Elle porte sur du calcul réfléchi. Le support logiciel est le logiciel « calcul » et l'activité exploitée s'appelle “Calcul en arbre”.

3.1.1 Le dispositif de travail

Pendant que les cinq élèves de CM1 travaillent sur l'ordinateur, les dix élèves de CM2 effectuent une activité « autonome » de recherche sur des problèmes de mathématique pour lesquels il s'agit de donner du sens au texte (recherche de questions, reformulation de données,...) à partir de documents photocopiés.

L'orchestration générale des activités est assez stable et est liée à la particularité des classes multi-niveaux. La classe est spatialement partagée pour séparer les deux niveaux CM1 et CM2, mais aussi pour pouvoir provoquer et gérer des moments collectifs. Au fond de la salle, Coralie dispose de trois ordinateurs équipés de “Windows 98”. Bien sûr, ces conditions ne sont pas idéales pour intégrer les TICE.

Pour comprendre la séance, voyons maintenant le logiciel “calcul en arbre”, peu connu, qu'elle a utilisé dans la séance.

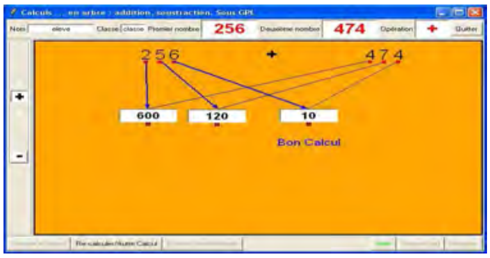
3.1.2 La situation point de départ et l'objectif

Au cours du cycle, 2 les élèves ont résolu des problèmes additifs sans totalement maîtriser la technique opératoire. Les techniques personnelles sont alors utilisées. L'arbre de calcul permet de garder la mémoire des associations réalisées entre les termes en utilisant implicitement l'associativité et la commutativité pour arriver à une expression contenant le plus possible de nombres “faciles” pour organiser la suite des calculs. Repris dans d'autres problèmes, l'arbre de calcul, utilisé dans de nombreux manuels, permet de mettre en relation les données d'un problème sous forme schématique et d'en garder une trace permettant une explicitation par exemple dans les mises en commun. En fin de cycle 2, il est devenu un schéma qui permet l'explicitation et aide à la formulation d'une technique de calcul réfléchi, par exemple pour mettre en relation les différentes unités dans l'écriture linéaire d'additions ou de soustractions. L'objectif déclaré lors des entretiens est un renforcement de la technique opératoire de l'addition et de la numération de position.

3.1.3 Le dispositif de travail : Présentation générale de l'outil logiciel

Les élèves s'identifient par leur nom et leur classe et doivent saisir deux nombres et l'opération à effectuer. Il n'y a que deux types de tâches possibles : calculer une somme, calculer une différence.

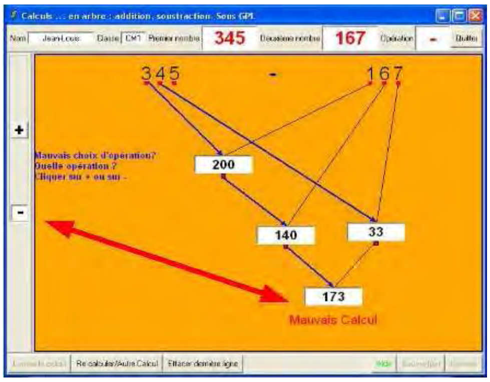
Après avoir cliqué sur le bouton « lancer le calcul », la somme ou la différence apparaît dans la zone orange de calcul. La tâche se décompose en plusieurs sous-tâches :



T_1 : choisir deux unités pour les additionner

T_2 : associer à la souris les deux chiffres choisis en un point de la zone de l'espace de calcul.

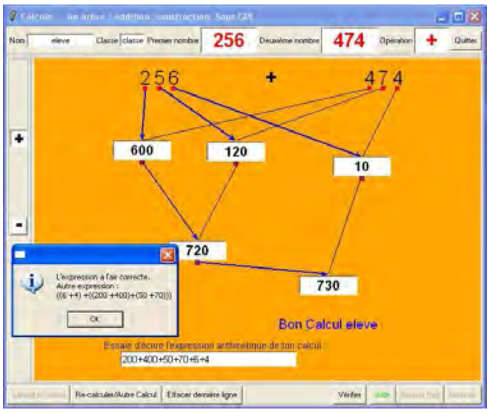
Chaque chiffre est souligné par un carré. L'association entre plusieurs carrés par des « flèches » désigne les termes d'une ou plusieurs sommes (ou différences) par rapprochement avec un arbre de calcul en environnement “papier-crayon”.



T_3 : activer une zone de saisie à la pointe des deux « flèches » et sélectionner l'opération à effectuer

T_4 : calculer la somme ou la différence

T_5 : saisir dans la zone la valeur du calcul. Si la valeur est exacte le logiciel affiche « Bon Calcul » sinon il faut saisir une nouvelle valeur. On ne peut continuer que si le résultat est exact. La validation est fonction de l'opération choisie sur la partie gauche de l'écran.



T_6 : Lors de la dernière étape de calcul il est demandé d'écrire globalement la technique de calcul.

T_7 : la validation de cette écriture est réalisée par un clic sur le bouton « vérifier ». Ce qui provoque l'affichage d'un message de validation de l'expression.

3.1.4 Le potentiel a-didactique du logiciel[4], les types de tâches, tâches et techniques associées

Dans les manuels, l'arbre de calcul apparaît comme une pratique de formulation d'une technique de calcul réfléchi ou comme un outil méthodologique pour conduire un calcul réfléchi suivant les phases de l'apprentissage. Dans ce logiciel, les deux aspects, support pour une formulation d'une technique et outil méthodologique de calcul réfléchi, se renforcent pour contraindre l'élève à un usage réfléchi de techniques de calcul et de compréhension du nombre. Ce sont eux qui devraient définir la consigne qui pourrait être « calculer la somme ou la différence de ces deux nombres en utilisant des calculs simples à faire de tête dont vous garderez la mémoire en utilisant les “flèches” du logiciel. »

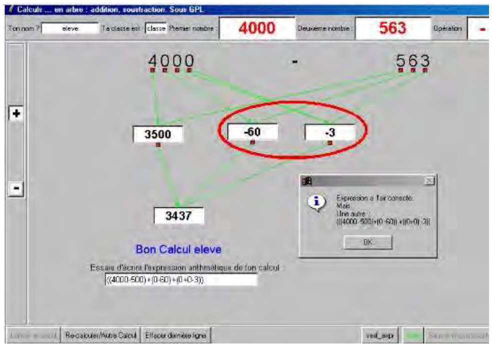
4 Le logiciel est un élément du milieu matériel qui peut favoriser la rencontre d'un obstacle dans des conditions qu'il reste à préciser et qui détermineront les niveaux des situations.

Les principales compétences mises en jeu dans "calcul en arbre" relèvent de la numération et du calcul. Dans le domaine de la numération, il s'agit de savoir déterminer la valeur d'un chiffre selon sa position dans le nombre et décomposer le nombre sous la forme de sa décomposition canonique en puissance de 10. Dans le domaine du calcul, il s'agit de connaître les tables d'addition et savoir additionner ou soustraire des dizaines entières ou des centaines entières.

L'usage du calcul en arbre pour la soustraction est en rupture avec la technique traditionnelle et s'apparente avec la technique de calcul anglo-saxonne présentée dans les documents d'accompagnement de l'école primaire.

La disposition des “flèches” peut rendre illisibles les liens entre les calculs intermédiaires si l'élève n'a pas anticipé suffisamment l'organisation spatiale de l'arbre de calcul.

Enfin, lors de la préparation, la documentation de ce module est porteuse d'une technique qui n'a pas à être enseignée et qui ne relève pas de l'école primaire, puisqu'elle utilise un passage par les nombres entiers relatifs négatifs, comme le montre cette copie d'écran extraite de la documentation diffusée avec le logiciel. Ce type de document pèsera sur les pratiques des enseignants s'ils n'ont pas beaucoup de temps à consacrer à la préparation de leur séance.



Dans la gestion de la situation, l'enseignante va être confrontée à d'autres problèmes :

- Les élèves de CM1 disposent d'un algorithme de calcul de la soustraction posée qui n'est pas directement ré-investissable ici, et les élèves n'ont pas de raison immédiate d'en chercher un autre puisque, à propos de l'addition, ils ont pu utiliser l'algorithme de l'addition posée.
- Cette technique complexifie la tâche de calcul des élèves sans apporter des éléments de connaissances nouvelles, ni par rapport au calcul, ni par rapport à la connaissance du système de numération. Dans tous les cas, l'usage que pourrait en faire l'enseignante pour confronter les élèves à la décomposition des nombres selon les unités devrait être associé à la résolution de problèmes.
- Enfin, l'enseignante devra gérer des mises en commun où les élèves vont devoir expliquer les difficultés qu'ils rencontrent. Les conditions matérielles et logicielles ne sont pas favorables à une mise en commun efficace.

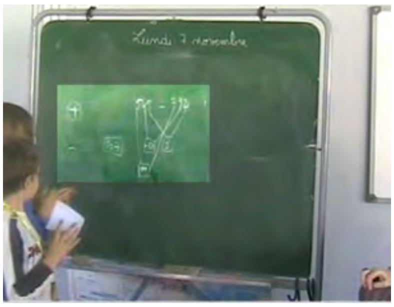
Pour comprendre l'organisation générale de la séance je vais présenter un synopsis réduit.

3.2 Synopsis de la séance 5

Episode 1 jusqu'à la 2^e^ minute : Les CM1 finissent un choix d'images sur l'ordinateur pour une présentation pendant que Coralie passe les consignes aux CM2. Les CM1 sont répartis en deux groupes de deux et un élève seul.

Episode 2 jusqu'à la 6e minute : Passage de la consigne *« On va faire le même travail que la semaine dernière chut ! Sur le calcul en arbre, mais... hou ! Hou ! Mais cette semaine avec des soustractions. D'accord ! L'autre fois on avait fait des additions cette semaine des soustractions. On va ouvrir le logiciel. »* Puis elle donne la soustraction qu'ils vont faire au départ. Première réaction des élèves à l'impossibilité de réaliser le calcul *« 40 moins 80 »*.

Episode 3 jusqu'à la 23e minute : A la 9e minute un élève suggère la possibilité de faire « *140 – 90* » ; 10e minute, un élève demande « *On peut aller sur Aide ?* » ; 11e minute nouvelle suggestion : « *il faudrait qu'on mette une retenue* »



A la 18e minute l'enseignante procède à la mise en commun, avec écriture au tableau, de la technique de deux élèves qui ont utilisé le signe "-" *« avec le moins en dessous de zéro quoi ! »*

Les élèves reviennent à leur place et Coralie interpelle Ey pour lui demander sa démarche mais il n'a pas la possibilité de développer ses arguments. Échec de la formulation de la technique de Ey.

Episode 4 jusqu'à la 30e minute : *« Je vais vous en donner une autre et vous allez voir si vous avez une autre façon de faire »* sous entendu « qu'avec des nombres négatifs » mais cela peut s'entendre « autrement que la dernière proposition » ! Puis elle se reprend pour dire : *« on n'a plus le droit de mettre de signe moins dans les nombres ! [...] donc il faut faire autrement. »*

Episode 5 jusqu'à la 55e minute : Devant l'impasse des échanges des élèves, la séance se termine par un échange collectif pour résoudre 832 – 198 en utilisant un arbre de calcul.

3.3 Analyse a posteriori de la séquence d'apprentissage

3.3.1 Le mode d'intégration instrumentale

Pour toutes les séances "calcul en arbre", le logiciel est un prétexte à la rencontre avec une connaissance mathématique qui aurait pu être traitée sans environnement numérique. On a une intégration que l'on qualifie de détournement instrumental.

3.3.2 La gestion de la transparence

J'observe comment les questions d'usage restent non explicitées en s'appuyant sur deux exemples parmi tous ceux observés.

Dans la zone de saisie, le logiciel valide le résultat à partir de l'opération sélectionnée sur la gauche de l'écran. C'est en cours d'utilisation, en réaction à la remarque d'une élève, que Coralie donnera l'information. Elle n'a pas d'importance dans le cas de la somme de deux nombres (initialement le choix d'opération est positionné sur l'addition) mais elle en aura dans le cas d'une soustraction.

La gestion de l'espace de la fenêtre est l'occasion pour les élèves de jouer avec l'organisation spatiale (symétrie, alignement) mais ce type de présentation n'est pas forcément compatible avec une lisibilité dans l'organisation des calculs, ce que Coralie n'a pas anticipé. C'est dans la rencontre avec cette difficulté qu'elle en avertira les élèves.

La répétition sur trois séances de l'utilisation du même environnement permettra de passer d'interventions successives à une intervention ponctuelle pour celle-ci et les suivantes.

3.3.3 L'intégration praxéologique : des techniques anciennes à l'environnement logiciel

Je vais présenter quelques éléments permettant de comprendre mes repérages.

La situation de départ est donnée par la consigne : *« On va faire le même travail que la semaine dernière sur le "calcul en arbre" mais cette semaine avec des soustractions. Je vous donne la soustraction que vous allez faire au départ : “545 – 392”. Ça fonctionne exactement pareil sauf qu'il faut mettre moins ! »* Il faut bien sûr entendre « l'interface est la même et l'opération mathématique est la soustraction ». Je retiens que les élèves auront peut-être entendu *« qu'il faut mettre moins »* mais où ?

Au bout de cinq minutes les élèves sont bloqués par l'impossibilité de retrancher 90 de 40. Coralie sollicite l'ensemble des CM1. En faisant cela elle fait passer l'obstacle du statut d'une difficulté personnelle à celui d'une difficulté de tous.

Les tentatives sont nombreuses, infructueuses, de plus en plus magiques. Coralie choisit de faire une mise en commun au tableau pour favoriser la formulation. C'est la première fois qu'elle sort de l'environnement ordinateur. La proximité de la technique en arbre dans l'environnement papier-crayon et dans l'environnement numérique laisse croire à Coralie qu'elle pourra mieux faire expliciter les opérations en jeu sur le tableau plus grand, plus lisible que l'écran de l'ordinateur dans une interaction avec tous les élèves. Alors que la difficulté est d'ordre mathématique, Coralie cherche une réponse dans les outils de gestion de la classe qu'elle connaît le mieux, la « mise en commun » autour du tableau.

Elle va essayer d'exploiter la proximité entre les techniques instrumentales et les techniques “papier-crayon” pour faire verbaliser leurs techniques nouvelles. Cependant elle ne pose pas la question du sens de ces calculs. Et lorsqu'elle évoque la possibilité de rechercher du sens, elle reste dans les outils TICE et tableau au détriment des mathématiques.

Les éléments que je viens de présenter me semblent fixer le mode d'intégration sur le critère “Techniques” au niveau d'une juxtaposition de techniques des deux environnements sans que l'une enrichisse l'autre comme je l'ai dit dans l'analyse du logiciel.

3.3.4 Rapport entre la TAL et la TAM

La tâche logicielle utiliser « un calcul en arbre pour calculer une différence » se confond avec la tâche mathématique, elle peut être réalisée comme c'est le cas ici en environnement “papier-crayon” ou sur le tableau. Pour des élèves de cycle 3, il s'agit d'un problème complexe, plusieurs étapes sont nécessaires, les tâches intermédiaires sont des tâches maîtrisées depuis le début du cycle 3. Il s'agit globalement d'organiser une suite de calcul qui structure, une technique particulière, « le calcul en arbre ».

C'est la rupture entre les situations antérieures où l'arbre de calcul avait un sens et celle-ci qui empêche les élèves de le réinvestir dans cette situation, l'utilisation de l'environnement numérique ne favorisant pas ici le retour vers des situations déjà rencontrées.

Les élèves doivent donc réinvestir leurs savoirs dans une situation nouvelle et n'ont pas les outils pour y réussir.

3.3.5 Les contrats

Pour le savoir engagé, les situations et la responsabilité des acteurs je reprends ici les éléments clés qui permettront au lecteur de les situer sur notre “Toile”.

La recherche d'une technique de calcul intégrant les propriétés des nombres place les élèves en situation d'utiliser des savoirs déjà rencontrés mais qu'il faudra organiser pour résoudre le problème proposé.

Comme je l'ai dit à propos des tâches, Coralie n'a pas su exploiter les limites des techniques de calcul posé, bien maîtrisées par la plupart des élèves, qui, ici, ne peuvent pas être appliquées directement, ce qui crée une situation antagonique.

Mais les échecs dans la conduite de la séance font que Coralie organise davantage l'activité, oriente davantage le choix d'une technique, contrôle davantage les productions. C'est Coralie qui garde la responsabilité générale de la dévolution et la validation.

3.3.6 Les points d'appui pour réaliser la dévolution de la situation

Le fait que la première séance réalisée en environnement logiciel n'apporte qu'une surcharge dans la complexité de la gestion d'une séance me fait dire que Coralie utilise l'image sociale positive de l'ordinateur pour impliquer les élèves dans la tâche mathématique.

On peut dire qu'elle fait le choix d'exploiter la dimension logicielle pour revisiter des savoirs.

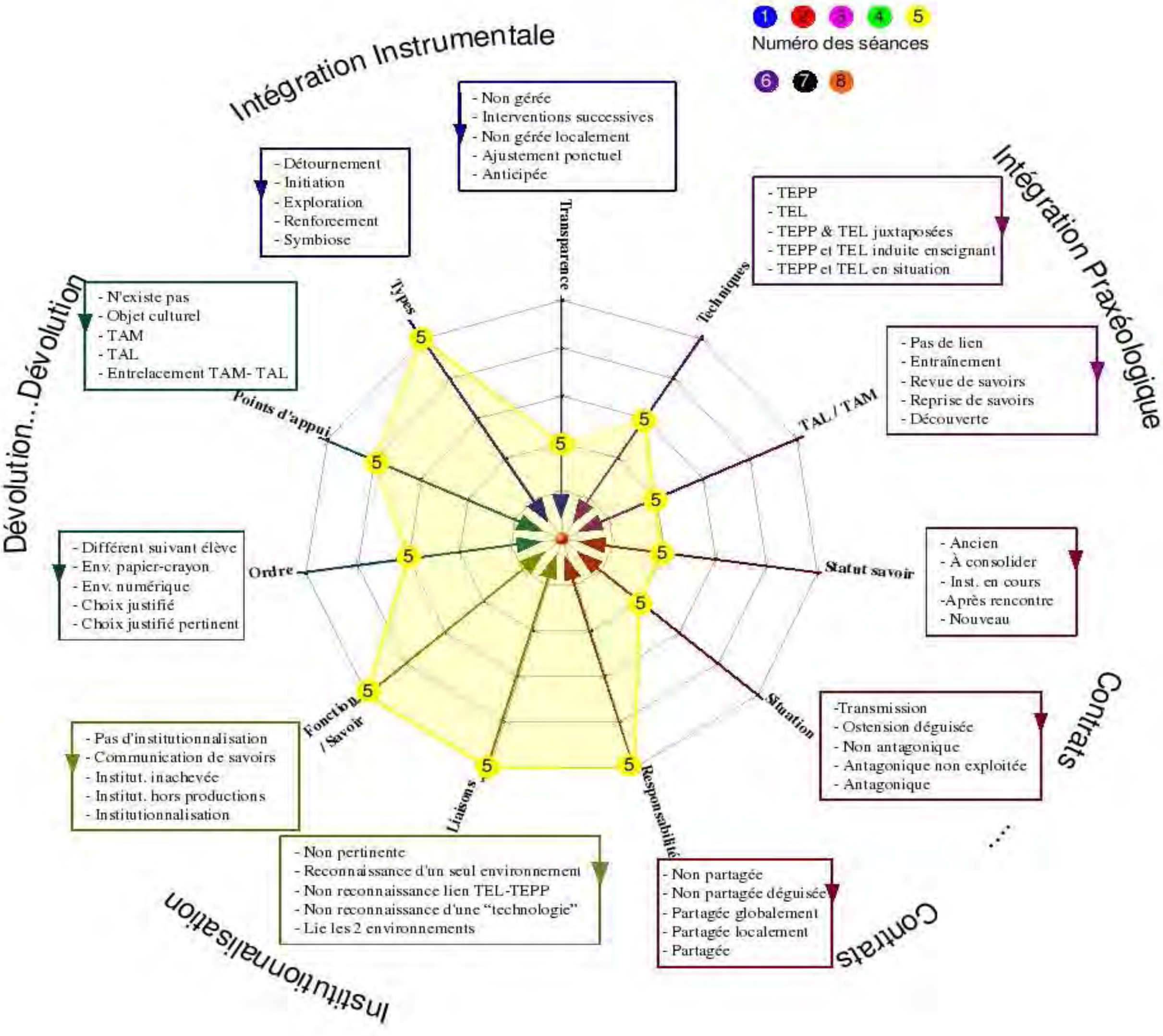
Mais l'échec relatif de cette séance conduit Coralie à placer la recherche individuelle dans la tâche logicielle, où les moments de formulation, d'explicitation s'appuient sur la trace du tableau qui regroupe les élèves.

Une telle organisation ne peut pas être le fruit du hasard et, même si les résultats n'ont pas l'efficacité escomptée, elle me semble avoir des éléments de pertinence.

3.3.7 L'institutionnalisation réalisée et les environnements

Ici l'institutionnalisation se résume à une mise en commun d'impressions sur la séance sans contenu mathématique réel. Elle ne donne pas un statut de savoir aux connaissances étudiées, elle va même à l'encontre de ce qui est attendu dans la mise en commun intermédiaire. Elle est plus une réponse à notre présence comme le confirment les entretiens ante, qu'une nécessité réfléchie pour la classe.

Ce repérage me permet de situer cette séance sur la “Toile” par rapport à nos critères d'intégration



des pratiques en environnement TICE.

3.4 Comparaison de la séance □ aux autres séances de Coralie

J'utilise le principe de la superposition de mes “Toiles” pour identifier les signes d'une évolution possible d'une séance à l'autre.

J'utilise la “Toile des critères” pour repérer les évolutions à partir des éléments de lecture suivants :

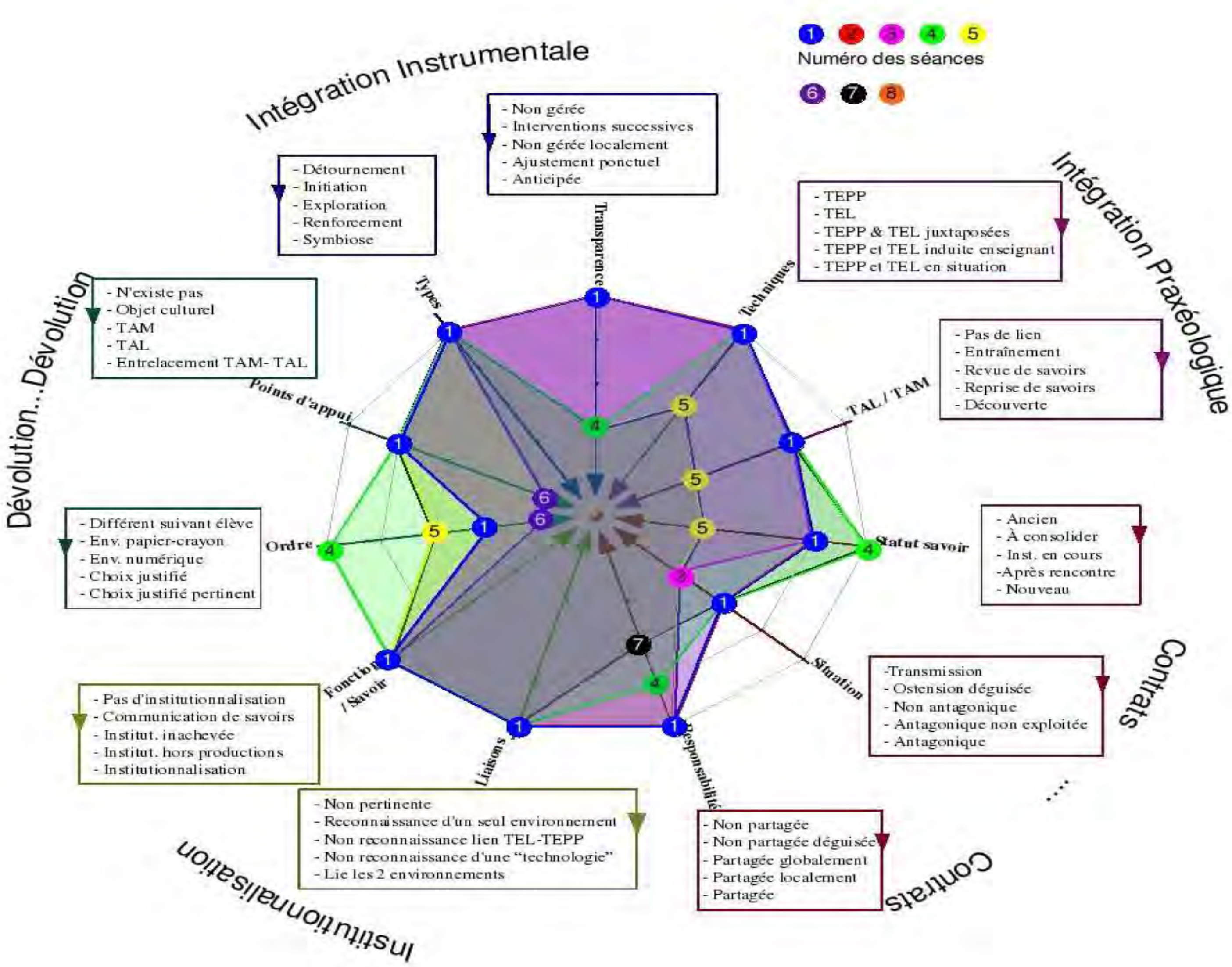
- Chaque séquence est identifiée par une ligne polygonale portant un numéro correspondant à l'ordre dans lequel elle a été réalisée.
- Les pastilles, sommets de la ligne polygonale, portant le numéro de la séquence, situent, pour un critère ou un contrat, les indicateurs sur une position qui, lorsqu'elle se rapproche du centre de la toile, traduit un rapprochement de ce que j'appelle “intégration optimale”.
- La superposition des lignes polygonales permet de situer les évolutions vers une “intégration optimale”. Dans l'empilement, la couche la plus profonde est celle qui décrit la dernière séquence (ou séance). S'il y a superposition de pastilles, dans ce cas la pastille visible portera le numéro de la première séquence où cette position a été prise. Pour faciliter la lecture, lorsque la surcharge graphique de la “Toile” est trop importante, je superpose partiellement les pastilles pour qu'elles soient visibles.
- Dans le cas où le recouvrement des pastilles ne permet pas d'identifier l'évolution des positions, ce sont les côtés de la ligne polygonale qui les identifient.

La lecture de la “Toile” traduit les tendances évolutives des enseignants sur les différents critères, selon leurs changements ou non de positions, que j'identifie de la façon suivante :

- Il y a évolution s'il y a plus de deux positions différentes sur notre “Toile”. Elle est progressive si l'évolution est marquée par des positions qui se rapprochent au moins deux fois du centre de la “Toile”. Elle est régressive si l'évolution est marquée par des positions qui s'éloignent au moins deux fois du centre de la “Toile”.
- Un critère est stable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'évolution, si les pastilles n'occupent pas plus de deux positions. La stabilité est totale lorsque les pastilles occupent la même position ou des positions voisines dans l'ordre des séances sans changement de sens. La stabilité est relative si les positions sont éloignées ou si j'observe un va et vient sur les deux positions.

Remarque : Ces variations sur un critère sont identifiées plus simplement par une représentation graphique qui facilite l'interrogation sur le type d'évolution. Il ne s'agit pas de donner au schéma un statut de preuve. Pour des raisons de lisibilité, j'ai choisi d'établir une équidistance entre les niveaux et entre les critères. Cependant il ne s'agit pas de mesures mais de repères.

Cette superposition des “Toiles” permet de représenter les critères sur lesquels Coralie évolue et ceux sur lesquels elle a une stabilité d'usage. Il est alors plus facile d'identifier que les critères portant sur la dévolution, les types d'intégration instrumentale, ceux de l'intégration praxéologique et le statut du savoir sont susceptible d'une évolution tandis que les autres restent stables.



J'ai alors repris cette réponse de BROUSSEAU à VERGNAUD « *Je suis entièrement d'accord pour admettre que le professeur se trouve devant le triplet "situation, connaissance, sujet" un peu comme l'actant devant une "situation objective"* » pour ouvrir le débat sur la question : Peut-on prolonger cette réflexion par la question : A partir des rétroactions du milieu classe les enseignants apprennent-ils ? À laquelle je tente de répondre dans la suite de la thèse.

4 Conclusion

La conclusion de cette communication aurait dû émerger du débat à la suite de ma dernière question : Est-ce que l'outil « Toile » permet d'identifier chez les enseignants des pratiques d'auto-apprentissage lors de l'intégration des TICE dans les pratiques mathématiques ?

Les questions qui ont suivi cette communication ont principalement porté sur des éclaircissements à propos de l'élaboration de l'outil « Toile », ainsi que sur la pertinence qu'il y a à utiliser de tels logiciels mais la question de l'auto-apprentissage n'a pas été abordée.

Concernant l'usage « de tels logiciels » ma communication en termes de contraintes internes n'y répond pas. En effet, elle ne peut pas être étudiée du seul point de vue interne des pratiques dans la classe, les influences externes que j'ai identifiées dans la première partie de ma thèse donnent un éclairage sur les choix de tels logiciels par les enseignants.

Concernant l'outil « Toile » la durée de la présentation n'a pas permis de développer une explicitation des éléments qui m'ont conduit à retenir onze critères et les niveaux pour caractériser une échelle vers une « intégration optimale ».

J'ai cependant essayé de présenter :

- Quels sont les cadres théoriques qui m'ont permis de retenir ces critères. Ils apparaissent alors comme un bon compromis entre leur utilisabilité et la complexité des pratiques mathématiques à décrire.
- Comment leur représentation sur la « Toile » favorise alors un repérage des conditions et des contraintes qui pèsent sur la pratique. En cela, comment elle facilite dans un premier temps, dans un contexte donné, la compréhension du sens, c'est ma démarche à propos de la pratique de Coralie, puis dans un deuxième temps comment elle permet d'interroger la stabilité de ces évolutions chez d'autres enseignants.

L'utilisation de cet outil à propos des pratiques de Coralie permet bien d'identifier ses évolutions qui révèlent des obstacles qu'elle rencontre dans l'intégration des TICE. Ces évolutions caractérisent ses techniques pour introduire les TICE dans les pratiques mathématiques de sa classe.

Je formule alors l'hypothèse que l'on dispose d'un outil pour décrire la situation objective de l'enseignant lorsqu'il tente de résoudre le problème de l'intégration des TICE en mathématique. Cette position justifie alors que j'ouvre le débat sur « l'auto-apprentissage » des enseignants et notamment sur les conditions pour construire un milieu d'auto-apprentissage.

1 BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T. CAPPONI B. BERTOMEU J.F. BONNET J.F. (1996), De l'économie et de l'écologie du travail avec le logiciel Cabri-géomètre, *Petit x n° 44*, IREM Grenoble, pp. 53-79.

ASSUDE T. & GRUGEON B. (2002), Intégration de logiciels de géométrie dynamique à l'école primaire, *Actes du XXIXème Colloque de la COPIRELEM, IREM des Pays de la Loire*, pp. 227-253.

ASSUDE T. & GELIS J-M (2002), La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire, *Educational Studies in Mathematics*, pp. 259-287.

ASSUDE T. (2005), Time management in the work economy of a class. *Educational Studies in Mathematics*. 59.1, pp. 183-203.

ASSUDE T., MERCIER A., SENSEVY G. (2007), L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux, *27/2*, pp. 221-252, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1992), L'enseignement de l'espace et la géométrie dans la scolarité obligatoire, Thèse Université Bordeaux I.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique, *Revue de Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n°2, La pensée sauvage éditions, pp. 33-115.

BROUSSEAU G. (1995), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In NOIRFALISSE R., PERRIN-GLORIAN M.J., (Éd.) *Actes de la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 3-45, Clermont-Ferrand : IREM.

BROUSSEAU G. (1996), La théorie des situations didactiques, Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal, disponible en ligne : http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

BROUSSEAU G. (1998), La théorie des situations didactiques. Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990 présentés par BALACHEFF N., COOPER M., SUTHERLAND R. et WARFIELD V., La pensée sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (2002). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques, DEAST (Didactique et Anthropologie des Enseignements Scientifiques et Techniques),
http://perso.orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf texte en ligne septembre 2007.

BROUSSEAU G. (2005), Réponses à VERGNAUD G, in Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures Hommage à Guy Brousseau, (Ed.) CLANCHE P, SALIN M.H., SARRAZY B., La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS C., 2002, Situations, milieux, connaissances – analyse de l'activité du professeur, *Actes de la 11ème École d'Eté de Didactique des Mathématiques*, pp. 141-156, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

PERRIN-GLORIAN M-J, HERSANT M (2003), Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/2, pp. *217-276*, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

TROUCHE L. (2005), Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25/1, pp. 91-138, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Table des matières