COMMUNICATION C5

CREATION D'ENONCES DE PROBLEMES PAR LES ELEVES

Jiří Bureš, Université Charles de Prague

Hana Hrabáková, Université Charles de Prague

1. Introduction

La création d'énoncés de problèmes représente un moyen efficace et bien adapté pour développer la créativité des élèves de tous âges et influencer leur attitude envers les mathématiques. Au cours de la création d'un énoncé de problème, les élèves doivent surmonter différentes difficultés, ce qui peut contribuer au développement de leurs connaissances et aussi de leur culture mathématique. Au cours de cette création, l'autonomie dans le travail permet aux élèves de savourer le vrai travail d'un mathématicien (Silver, 1994). En plus, la production ou la formulation de questions et de problèmes influence, en général d'une manière positive, la capacité des élèves à résoudre les problèmes et peut aider les enseignants et les chercheurs à pénétrer dans la conception des notions et dans les processus mathématiques des élèves. (Bonotto, 2006).

La première partie de notre contribution consiste à définir et à caractériser la notion de *problem posing* et à expliquer son rapport avec la créativité. Dans la deuxième partie, nous décrirons le «Concours d'originalité de problèmes». Il s'agit de l'exemple d'une activité éducative où les élèves produisent les énoncés de problèmes. Dans la troisième partie, nous montrerons des extraits de la discussion en classe, les exemples des énoncés créés et nous proposerons quelques conclusions.

Comme nos recherches ont été menées dans le cadre du système scolaire tchèque, nous allons donner une brève description des enseignements primaire et secondaire en République tchèque. La scolarité obligatoire dure 9 ans, les élèves commençant à l'âge de 6 ans à fréquenter l'école fondamentale (elle correspond à la fois à l'école élémentaire et au collège en France). Ils peuvent y rester 9 ans, les bons élèves pouvant passer les examens d'entrée soit aux collèges-lycées de 8 ans (après 5 ans d'école fondamentale), soit aux collèges-lycées de 6 ans (après 7 ans d'école fondamentale). Ceux qui restent 9 ans à l'école élémentaire peuvent ensuite passer les examens d'entrée à un lycée de 4 ans (général ou professionnel) ou à un établissement d'enseignement professionnel de 3 ou 5 ans. Le nombre d'heures de mathématiques à l'école fondamentale varie entre 3 et 5 séances hebdomadaires de 45 minutes chacune et au lycée entre 2 et 4 séances hebdomadaires de 45 minutes chacune.

2. Production ou formulation de questions et de problèmes en général (*Problem posing*)

La notion anglaise de *problem posing* recouvre plusieurs activités plus ou moins différentes liées à la production ou formulation de questions et de problèmes. C'est la raison pour laquelle nous utilisons cette notion dans ce texte. D'après Leung (1997), le *problem posing* représente la création de nouveaux problèmes dont les résolutions ne sont pas connues au moins pour celui qui les crée. [...] Et ainsi, le *problem posing* consiste en la modification de la formulation d'un problème donné dans différentes représentations. Selon Bonotto (2006), le *problem posing* est considéré comme un processus dans lequel les élèves créent leurs propres interprétations des situations particulières basées sur leurs expériences mathématiques et les formulent comme un problème mathématique. Ceci leur permet d'interpréter et d'analyser la réalité, c'est-à-dire de distinguer les données pertinentes et non-pertinentes, de découvrir les relations entre les données et décider de l'(in)suffisance des informations disponibles pour la résolution du problème.

Sous la notion de *problem posing*, Silver (1993) distingue trois types d'activités plus ou moins différentes. Le premier type consiste à créer les énoncés avant la solution d'un problème (*presolution posing*). Il s'agit d'une situation donnée (par exemple issue de la vie courante) à partir de laquelle on crée de nouveaux énoncés. Dans le deuxième type d'activités, on modifie ou reformule l'énoncé de problème au cours de la résolution du problème (*within-solution posing*). Cette interprétation de l'énoncé aide à mieux comprendre l'énoncé et à faciliter la résolution du problème. Le troisième type d'activités vise à changer les données de l'énoncé original, ce qui intervient après la résolution du problème (*postsolution posing*). Ainsi, de nouveaux énoncés naissent à partir de l'énoncé original. Pour illustrer chacun des trois types d'activités, nous présentons un exemple.

Considérons la situation où M. Funès possède une somme d'argent de 1320 €. A partir de cette situation, nous pouvons, sans en chercher la solution, créer l'énoncé suivant:

Monsieur. Funès partage 1320 € entre Monsieur Cruchot, Monsieur Septime et Monsieur Duchemin. Monsieur Duchemin reçoit six fois plus d'argent que Monsieur Cruchot et Monsieur Septime 4 fois plus d'argent que Monsieur Cruchot. Combien d'argent reçoit chacun d'entre eux?

Lorsque nous voulons résoudre le problème proposé ci-dessus, nous faisons des interprétations des données de l'énoncé : il s'agit de 3 personnes, le total est divisé en 11 parties etc. Après avoir résolu le problème, nous pouvons modifier les données et obtenir ainsi de nouveaux énoncés : en faisant varier le nombre de personnes (4 ou 5), en choisissant une somme différente, etc.

Silver (1993) propose aussi plusieurs points de vue sur le *problem posing*. Nous reprenons ceux que nous avons utilisés dans la préparation de notre expérience.

Le *problem posing* est ainsi considéré comme :

- un outil pour améliorer la capacité des élèves à résoudre des problèmes,
- un moyen de pénétrer dans la conception des mathématiques des élèves et des concepts mathématiques construits par les élèves,
- un outil pour améliorer l'attitude des élèves envers les mathématiques,
- un indice de la créativité ou du talent pour les mathématiques.

Le *problem posing* est aussi étroitement lié à la créativité. Selon Silver (1997) et Leung (1997), la créativité caractérise non seulement les personnes ayant du talent, mais elle est aussi liée à des connaissances approfondies sur un domaine particulier. Ceci implique que les élèves ayant déjà acquis les connaissances sur un ou plusieurs domaines des mathématiques scolaires peuvent s'en servir pour développer leur créativité. Torrance (1966) a défini trois composantes clés de la créativité qui permettent de la mesurer :

- *Continuité/fluidité (fluency)* : se rapporte au nombre d'idées produites en répondant à une tâche.
- *Flexibilité (flexibility)* : se rapporte aux changements d'approches qui apparaissent en répondant à une tâche.
- *Nouveauté (novelty)* : se rapporte à l'originalité des idées produites en répondant à une tâche

Le tableau suivant (Leung, 1997) montre les relations entre la formulation de problèmes, la résolution de problèmes et la créativité.

Résolution de problèmes	**Créativité**	**Formulation de problèmes**
Les élèves explorent les problèmes « à fin ouverte », avec de nombreuses interprétations, manières de résolution et réponses ou solutions possibles.	→Fluidité←	Les élèves produisent beaucoup de problèmes et partagent les problèmes produits. Les élèves produisent les problèmes pour lesquels existent de nombreuses procédures de résolution.
Les élèves résolvent (expriment ou justifient) les problèmes d'abord d'une manière puis, d'autres manières. Les élèves discutent de nombreuses manières de résolution.	→Flexibilité←	Les élèves utilisent l'approche «S'il n'y avait pas... » pour produire les problèmes.
Les élèves examinent de nombreuses manières de résolution ou des réponses (expressions ou justifications), ensuite, ils en produisent une autre, différente des précédentes.	→Nouveauté←	Les élèves examinent quelques problèmes produits et ensuite, ils produisent un problème différent.

Dans le cadre de notre expérience, nous nous sommes concentrés sur le développement de la première des composantes - la fluidité. Les élèves ont du créer un problème original par rapport aux autres problèmes créés. Nous décrirons le déroulement de l'activité dans la partie suivante.

3. Description de l'expérience

Cette activité fait partie d'une recherche complexe en cours, menée par Guy Brousseau et Jarmila Novotna - *Contribution de la culture scolaire et des situations didactiques à l'éducation mathématique.* L'outil de recherches est le problème « verbal » et son traitement par les élèves. Parmi les questions que nous nous posons dans le cadre de la recherche, nous allons citer celles qui sont liées à notre expérience :

- Les élèves sont-ils capables d'identifier et d'expliquer les ressemblances et les différences entre les problèmes donnés; d'identifier les problèmes relevant du même modèle mathématique ?
- Les élèves sont-ils capables de créer les problèmes d'après une consigne spécifique ?
- Comment cette activité peut-elle contribuer à la motivation des élèves pour l'apprentissage des mathématiques ?
- Quelles compétences mathématiques peuvent être développées au cours de cette activité ?

La partie de cette recherche que nous allons décrire est l'expérience que nous avons appelée « Concours d'originalité de problèmes ». Ce concours a été réalisé dans une classe d'un collège-lycée pragois de 8 ans avec les élèves de 13-14 ans (8^e année de scolarité).
Les objectifs du concours étaient :

- attirer l'attention des élèves vers les problèmes en tant que lien entre les mathématiques et la fiction de la vie réelle,
- faire créer par les élèves des énoncés de problèmes correctement formulés,
- faire résoudre par les élèves des problèmes insolites,
- faire discuter les élèves sur les problèmes,
- savoir classer les problèmes d'après le modèle mathématique.

Dans le « Robert quotidien », un modèle mathématique est défini comme un « modèle formé par des expressions mathématiques et destiné à simuler un certain processus ». Pour l'exemple d'énoncé de problème que nous avons cité ci-dessus, il s'agit de la relation de la partie à un tout qui en est le modèle mathématique. Nous montrerons d'autres exemples plus tard.
Le concours comporte trois séquences. **La première séquence** vise à introduire l'activité. Elle dure 45 minutes. Son objectif est d'introduire les notions de base qui sont utilisées dans le cadre du concours - le problème original, les problèmes de la même famille. Le professeur propose trois problèmes aux élèves qui travaillent par deux et leur tâche est de les résoudre. Ensuite, ils écrivent les solutions au tableau. Le professeur leur demande d'identifier les différences et les similarités dans les résolutions des problèmes proposés pour ensuite en discuter en classe. Ensuite, il est demandé aux élèves d'inventer d'autres problèmes originaux et de la même famille en lien avec les trois problèmes proposés. A la fin de la première séquence, il est demandé aux élèves d'inventer un problème original pour participer au concours des problèmes originaux.

Avant de présenter les problèmes qui ont été proposés pendant la première séquence, nous donnons les définitions des notions de base que nous avons inventées pour cette activité : le problème original, les problèmes de la même famille. Le problème original est un problème dont le modèle mathématique nécessaire pour la solution diffère des modèles des problèmes donnés. Les problèmes de la même famille sont les problèmes dont le modèle mathématique est partiellement ou totalement le même que le modèle d'un problème donné. Il faut souligner deux aspects importants de ces catégories. Le classement est toujours relatif à un groupe spécifique de problèmes et, dans certains groupes de problèmes, plusieurs variantes de classement peuvent apparaître.

Pour illustrer les notions de base pour les élèves, le professeur a proposé les problèmes suivants :

1. Hier, dans un bistrot, 188 croque-monsieurs, croque-madames et sandwichs ont été vendus au total. Nous savons qu'il y avait sept fois plus de croque-monsieurs que de sandwichs et de huit croque-madames de plus que de sandwichs. Combien de croque-monsieurs, croque-madames et sandwichs ont été vendus?

Croque-Madames........ $x + 8$; Croque-Monsieurs.....$7. x$; Sandwichs................. x;

Total...............................188

$x + 7x + x + 8 = 188$ $\underline{x = 20}$

On a vendu 140 croque-monsieurs, 28 croque-madames et 20 sandwichs.

2. M. Funès partage 1320 € parmi M. Cruchot, M. Septime et M. Duchemin. M. Duchemin reçoit six fois plus d'argent que M. Cruchot et M. Septime 4 fois plus d'argent que M. Cruchot. Combien d'argent reçoit chacun d'entre eux?

M.Cruchot........ x; M.Septime..........4 x; M.Duchemin......6.x; Total............1320 €

$x + 4x + 6x = 1320$ $\underline{x = 120}$ €

M.Cruchot reçoit 120 €, M.Septime reçoit 480 € et M.Duchemin 720 €.

3. Un bus et une voiture partent en même temps pour Pilsen à 8h. Le bus roulant à la vitesse moyenne de 60 km/h arrive à Pilsen à 10h précises. A quelle heure arrive à Pilsen la voiture roulant à la vitesse moyenne de 90 km/h. Le bus et la voiture ont suivi le même chemin.

60 km/h.................... 120 minutes; 90 km/h....................... x minutes

$x : 120 = 60 : 90$ $\underline{x = 80}$ 8h + 1h20 = <u>9h20</u>

La voiture arrive à Pilsen à 9h20 .

Le modèle mathématique des deux premiers problèmes est la relation de la partie à un tout, donc il s'agit de problèmes de la même famille. Le troisième problème est du modèle de la proportion inverse donc c'est un problème original par rapport au cadre du groupe de problèmes donné.

La deuxième séquence dure deux semaines. Les élèves créent d'abord des problèmes, se familiarisent avec les problèmes proposés par les autres élèves et les résolvent. Au bout d'une semaine, tous les élèves apportent leurs énoncés de problèmes puis le professeur les rassemble sur un document qu'il distribue aux élèves. Pendant une semaine, chacun a le droit de remplacer, une fois, le problème qu'il a proposé par un autre. Ensuite, la classe est divisée en groupes de 4 – 5 élèves, les élèves devant se répartir entre eux tous les problèmes et les résoudre à la maison.

Les deux premières séquences constituent la préparation pour **la troisième séquence** - le concours d'originalité de problèmes. Le concours se déroule pendant deux cours consécutifs. Les élèves doivent classer les problèmes en familles et chercher le ou les problèmes originaux. Pendant la première partie, les élèves travaillent en groupes, ils discutent des problèmes, ils s'adressent aux auteurs dont les énoncés ne sont pas bien faits pour les amener à préciser ou à reformuler les énoncés. Ensuite, ils discutent en groupes et répartissent les problèmes en familles. Au cours de la deuxième partie, chaque groupe présente un problème, le classe dans une famille ou pas et doit justifier sa décision : chaque groupe participe au classement et chaque groupe parvient à des catégories en partie différentes. Dans la discussion finale, les élèves échangent sur les familles établies et proposent des modifications dans la classification des problèmes.

4. Evaluation de l'activité

L'expérience est composée de plusieurs activités. Nous en avons choisi deux qui nous semblent avoir contribué à développer la culture mathématique des élèves - la création d'énoncés de problèmes et la discussion en classe sur la classification de problèmes.

Remarques sur les énoncés créés

Les élèves ont produit 23 énoncés qui varient selon plusieurs caractéristiques. Les élèves ont pu être influencés par la notion d'originalité et ils l'ont recherchée dans différents aspects et non dans le modèle mathématique. La longueur des énoncés varie, des plus courts (26 mots) aux plus longs (208 mots). Le contexte et les actants des énoncés étaient surtout proches du manuel scolaire ou du milieu quotidien des élèves ; le registre de langue était plutôt standard en dehors de quelques énoncés contenant des expressions familières. La difficulté des problèmes à résoudre était adéquate au niveau des élèves, à l'exception d'une devinette et d'un problème exigeant des procédures inconnues des élèves. Pour la plupart des énoncés, le modèle mathématique était la relation de la partie à un tout.

Les élèves ont aussi créé quelques énoncés qui n'étaient pas clairs et univoques ou encore dont la solution n'existait pas. Nous allons donner deux exemples d'énoncés qui illustrent les erreurs les plus fréquentes.

<u>*Les boîtes de jus*</u>
Dans un magasin, il y avait une offre spéciale «Jus d'orange en boîtes». Le 1er jour, on a vendu <u>9/18</u>, le 2e jour 40 boîtes de jus et le soir, ils ont découvert <u>3/36</u> derrière un casier. Combien de boîtes de jus y avait-il au départ ?

Les fractions citées dans l'énoncé représentent les parties d'un tout qui n'est pas explicitement défini. Après les questions des autres élèves, l'auteur a corrigé l'énoncé de la manière suivante :

Dans un magasin, il y avait une offre spéciale «Jus d'orange en boîtes». Le 1er jour, on a vendu 9/18 <u>du nombre total</u>, le 2e jour 40 boîtes de jus du nombre total et le soir, ils ont découvert 3/36 du nombre total derrière un casier. Combien de boîtes de jus y avait-il au départ ?

L'autre exemple illustre le cas d'énoncés de problèmes dont la solution n'existait pas.

Les champignons

Trois copines - Pauline, Caroline et Monique - ont ramassé des champignons. Pauline a trouvé 4 champignons de plus que Caroline et Monique deux champignons de moins que Pauline. Elles on trouvé 53 champignons au total. Après le retour à la maison, Pauline a réalisé qu'elle avait 5 champignons véreux, Caroline 6 et Monique 3. Combien de champignons avait chacune d'elles à la fin?

$$3x + 6 = 53 \qquad\qquad x = 47/3$$

L'auteur a aussi modifié l'énoncé en choisissant 51 comme nombre total de champignons.

La classification des problèmes

Pendant le travail en groupes, plusieurs familles sont apparues : fractions, pourcentages, temps, transformation d'unités, mélange des problèmes non classés...Le travail en classe a commencé par la création d'un grand nombre de familles. Au cours de la discussion, certaines de ces familles ont été réunies et les élèves se sont mis d'accord sur la classification finale. Certains problèmes ont été classés dans plusieurs familles selon les différentes procédures de résolution des problèmes. La discussion a aidé certains élèves à comprendre les similarités et différences des modèles mathématiques, ainsi que le montre l'extrait suivant :

Il précède une discussion sur quelques problèmes concernant les fractions et les pourcentages.
P - professeur, E - élève (s)

- E Dans certains groupes (de problèmes), on travaille non seulement avec les pourcentages, mais aussi avec les fractions.
- P Et... Certains de ceux-ci?
- E En plus, par exemple dans le problème (*appelé*) Řáholec, il y a aussi la proportionnalité.
- P Dans le problème Řáholec, on travaille aussi avec la proportionnalité. Alors, qu'est-ce que vous avez fait avec cela?
- E Classer Řáholec dans deux catégories.
- P Classer Řáholec dans deux catégories. Et où le classer?
- E Classer Řáholec dans deux catégories et le classer aussi dans *le rapport*.
- P Bon, on va le séparer *(créer une nouvelle catégorie)*, il n'y a pas de catégories comme ça.
- E Mais je pense classer dans deux catégories ceux qui ont des fractions …
- P C'est une question…. Qu'en pensez-vous ?
- E Classer dans deux catégories.
- P Classer dans deux catégories?
- E Classer dans deux catégories.

- P Les problèmes avec des fractions.....vous avez dit....un groupe a dit qu'il y a des problèmes avec des pourcentages et des problèmes avec les fractions...Alors, on les garde tous dans une catégorie ou on les classe dans deux catégories ?
- E Mais c'est la même chose...
- P Honzo…
- E ...que c'est la même chose...
- P Et pourquoi c'est pareil?
- E Parce que quand on travaille avec des pourcentages, on peut faire pareil avec des fractions, avec les mêmes nombres.
- P Bien…. Báro, tu partages cette opinion ? Oui. Tout le monde est d'accord ?
- *(E sont d'accord)*
- P D'accord, on met dans une seule catégorie tout ce qui est avec les pourcentages et les fractions. D'accord ? oui? Katko...
- E Ben, on y ajoute encore...

Le travail se poursuit par un reclassement de problèmes concernant les fractions et pourcentages dans la même catégorie. La découverte de l'analogie entre le calcul avec les pourcentages et avec les fractions constitue, pour les élèves, un nouvel exemple de relations entre différents domaines mathématiques. Certains énoncés dont il était question dans l'extrait de discussion sont présentés ci-dessous:

- *Les boîtes de jus*

Un magasin a proposé une offre spéciale «Jus d'orange en boîtes». Le 1er jour, il a vendu 9/18 du nombre total, le 2e jour, 40 boîtes de jus du nombre total et le soir, il restait 3/36 du nombre total derrière un casier. Combien de boîtes de jus y avait-il au départ ?

- *Le plat*

Sur la carte d'un restaurant, les prix ont été indiqués pour 500 grammes. La portion prévue pour les enfants était deux fois plus petite et encore réduite de 28%. Combien de grammes de nourriture reçoit un enfant?

- *La forêt Řáholec*

Křemílek et Vochomůrka sont allés ramasser des champignons dans la forêt Řáholec. En rentrant, ils ont rencontré Manka et Rumcajs qui avaient 50 champignons. Křemílek et Vochomůrka avaient 16% de moins qu'eux. Křemílek et Vochomůrka ont trouvé les champignons de quatre espèces : amanites, cèpes, chanterelles, bolets rudes dans le rapport 3:2:5:4. Combien d'exemplaires de chaque espèce de champignons ont trouvé Křemílek et Vochomůrka?

- *Les escargots*

Julián a 1/4 du nombre total des escargots. Krasoslav en possède 1/8, Mirka a 1/4 de plus que Tupmila qui, malheureusement, n'a pas d'escargots. Milada a toute une moitié du nombre total des escargots, à la différence de Jarda qui n'appartient pas du tout à ce qroupe, parce qu'il collecte les limaçons et les pélicans. Exprime à l'aide d'un rapport lequel des groupes a le plus d'escargots? Julián, Milada et Mirka, ou Krasoslav et Tupmila

Conclusion

Le concours d'originalité de problèmes représente un moyen pouvant contribuer à développer la culture scolaire des élèves. Il permet aux élèves d'analyser les énoncés de problèmes différents, de les comparer et d'en chercher les ressemblances et différences. Il contribue aussi à développer une attitude plus positive envers les problèmes « verbaux ». La validation des résultats fait partie de la discussion et devient ainsi indépendante du professeur. En plus, la création d'énoncés de problèmes représente une part essentielle du travail des mathématiciens. L'aspect motivant de l'activité est favorisé par la compétition et par l'apprentissage en groupes.

L'activité a été assez bien acceptée par les élèves. D'après le questionnaire d'évaluation qu'ils ont rempli après le concours, ils ont apprécié surtout la possibilité de communiquer leur propre opinion, de devoir justifier les décisions, de pouvoir réviser la résolution de différents problèmes et surtout de pouvoir réfléchir aux procédures de résolution, pas seulement aux solutions des problèmes.

Le concours nous a fourni quelques réponses aux questions que nous nous sommes posées auparavant. Les élèves ont su créer des énoncés de problèmes dans des domaines différents de leur connaissance mathématique préalable, ont été capables de découvrir les ambiguïtés de la formulation des énoncés, d'en discuter et de reformuler les énoncés, ce qui représente un travail sur la précision mathématique et sur l'utilisation de la langue. Au cours de la discussion, les élèves se sont mis d'accord sur la classification finale des problèmes et ils ont découvert la ressemblance entre les fractions et les pourcentages.

Pourtant, il reste encore des questions ouvertes concernant surtout l'évaluation de l'activité et l'introduction de l'activité dans l'enseignement :

-Comment évaluer cette activité? Qu'est-ce qu'on peut mesurer/évaluer?

-Quand et comment introduire cette activité dans l'enseignement?

-Quels en sont les avantages et inconvénients pour le professeur et pour les élèves?

-Quelles sont les relations de cette activité avec la connaissance mathématique préalable des élèves, la maîtrise de la langue maternelle, la mention en mathématiques etc?

Bibliographie

[1] Bonotto, C. (2006): Extending students' understanding of decimal numbers via realistic mathematical modeling and problem posing, Paru dans: Novotna, J., Moraova, H., Kratka, M. & Stehlikova, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2. 33-40. Prague: PME.

[2] Brousseau, G. (1998): Théorie des situations didactiques. Grenoble: La pensée sauvage. 395 p. coll. Recherches en Didactique des Mathématiques.

[3] Novotna J. (2000): Analyza reseni slovnich uloh [kapitoly z didaktiky matematiky]. Praha: Univerzita Karlova. 23 p.

[4] Sarrazy, B. (2002): Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem-solving among, Paru dans: *European Journal of Psychology of Education*. 2002. vol. XVII. 3. 321-341.

[5] Silver, E.A. (1994): On Mathematical Problem Posing, Paru dans: *For the Learning of Mathematics*. 2002. vol. 14. 1. 19-28.

[6] Silver, E.A., Cai, J. (1996): An analysis of aritmetic problem posing by middle school students, Paru dans: *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 27. 5. 521-539.