# Liens entre objets d'enseignement impliquant numération de position ou système métrique.

Christine Chambris,
Équipe Didirem - Université Paris-Diderot (Paris 7),
IUFM de Versailles - Université de Cergy Pontoise
cchambris@free.fr

Objectif visé :

Cette communication est la présentation d'une partie de ma thèse (Chambris, 2008). Elle peut contribuer à la réflexion sur la formation des maîtres dans les domaines de l'enseignement des grandeurs et de la numération de position.

## 1. Présentation du problème

Nous étudions les relations entre les grandeurs, les nombres et les opérations dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire : elles ont été profondément bouleversées au moment de la réforme des mathématiques modernes[1] (Chevallard, 1992), (Bronner, 1997, chapitre 2), (Chambris, 2007). Dans cette communication, nous regardons cette question via des problèmes élémentaires d'arithmétique relevant du champ de la numération de position des entiers.

Nous avons élaboré un questionnaire et l'avons fait passer à 277 élèves de fin de CM2 (5$^{ème}$ primaire). Il est constitué par une série d'exercices, nous en présentons quelques uns. Nous pensions *a priori* de certains d'entre eux qu'ils poseraient des difficultés aux élèves, les évaluations d'entrée en 6$^{ème}$ et des travaux sur les connaissances des élèves (Parouty, 2005) fournissant une première indication.

L'analyse des réponses aux exercices est l'occasion de poser de nouvelles questions quant à certaines « difficultés ». Sans être hors programme, certaines tâches vivent apparemment mal ou pas du tout dans l'enseignement actuel. Ceci ne semblait pas être le cas dans l'enseignement ancien d'où nous avons tiré certains de nos exercices. Pourquoi ? Nous tentons de présenter les « conditions de vie » de ces tâches, leur environnement didactique, dans l'enseignement ancien et actuel. Ce sont en grande partie des questions d'écologie didactique (Artaud, 1997) qui nous préoccupent.

[1] Pour faire court, nous désignons par « enseignement ancien » ce qui est antérieur à la réforme.

### 1.1. Premiers éléments sur les connaissances des élèves

Nous donnons d'abord quelques éléments sur les connaissances des élèves actuels. Parouty (2005) propose à des élèves de cycle 3 de résoudre des problèmes de numération « en contexte ». Au CE2, le problème est : « Pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ? » (R=10%). Elle pose le même genre de problème au CM1 (avec des paquets de 200) et observe la même réussite. Au CM2 avec des paquets de 2000, elle observe des progrès (R=30%). Elle indique que ce progrès n'est pas dû à une meilleure utilisation de la numération, mais au fait que les élèves posent la division (à plusieurs chiffres) qu'ils ont apprise.[2] Elle interroge les enseignants. Ils considèrent que le problème est (en%)[3] très facile : 0, assez facile : 13, difficile : 85, inabordable : 5.

Parouty propose aussi aux enseignants des exercices à faire travailler à leurs élèves. En évaluant ensuite les élèves, elle constate qu'ils ont progressé, non seulement dans la résolution de ces problèmes ce qui ne serait pas particulièrement remarquable mais dans toute la numération (et le calcul). (La méthodologie prévoit un groupe témoin).

Les évaluations d'entrée en 6ème proposent, chaque année, depuis 2005 des exercices de conversion.

| 5 kg = ………… g | | | |
|---|---|---|---|
| réponse | 2005 | 2006 | 2007 |
| 5000 | 61,41 | 60,38 | 62,0 |
| Autre | 34,05 | 34,70 | 33,8 |
| Absence | 4,54 | 4,92 | 4,2 |

La réussite est donc relativement stable sur les 3 ans, un peu moins des deux tiers des élèves réussissent une conversion simple de kilogrammes en grammes.

### 1.2. Premiers éléments sur les relations entre le système métrique et la numération avant la réforme

En 1970, dans le programme de l'école primaire est créé le domaine « mesure ». Avant, la réforme des mathématiques modernes, l'étude du système métrique apparaît « mêlée » à celle des nombres. Dans le programme, à partir de 1970, numération et système métrique vivent dans deux domaines

[2] Parouty (2005) n'indique pas le mode de calcul de la réussite. Nous ne savons pas, en particulier, comment les réponses à « 1 près » sont comptabilisées. Dans notre étude, nous avons proposé aux élèves un problème du même type. Nous présentons ci-après les répartitions observées pour les réponses et les procédures. Dans (Chambris, 2008, p. 324), nous donnons en outre des éléments sur la répartition des réponses en fonction des procédures.

[3] Le total est différent de 100 dans (Parouty, 2005)

différents. En prenant l'exemple d'un manuel scolaire de la fin des années 50 (Bodard, CE1, CE2, 1957), nous présentons les relations entre système métrique et numération de position des entiers telles qu'elles ont probablement existé avant la réforme (et depuis 1923). Nous avons étudié plusieurs manuels et celui-ci est loin d'être exemplaire. Néanmoins, nous observons des éléments récurrents relativement à cette question de l'articulation entre système métrique et numération de position dans les différents manuels étudiés.

Au CE1, dans la leçon « Le billet de mille francs », le mémo indique 10 centaines = 1000. Dans les exercices, on trouve : 1000 F – 9 centaines de F = …F ; 500 F + 500 F = …F et aussi : « Combien de paquets de 100 enveloppes faut-il acheter pour avoir 1000 enveloppes ? »

Toujours au CE1, dans la leçon « Le kilogramme. Le kilomètre », le mémo indique 1 kg = 10 hg = 1000 g. Dans les exercices, on trouve : 600 g + 400 g = …g ou …kg et 1 hg + 9 hg = …hg ou …kg

Au CE2, dans la leçon « Le kilogramme », le mémo indique 1 kg = 1000 g. Dans les exercices, on trouve : « Complétons : 1 kg = 800 g + … » et aussi « Avec 1 kg de graines de betteraves, combien un grainetier peut-il faire de sachets de 100 g ? »

On observe ainsi un parallèle assez net entre les leçons de numération et de système métrique.

## 1.3. Éléments complémentaires sur les connaissances des élèves actuels

Pour préciser les éléments relatifs aux connaissances des élèves actuels nous avons proposé d'autres exercices du champ : numération / système métrique. Plutôt que repérer des niveaux « absolus », nous croisons les réussites aux différents exercices afin d'identifier des liens ou des absences de liens dans les connaissances des élèves. Nous utilisons plusieurs sources pour les exercices : des manuels anciens et actuels. Les manuels anciens fournissent de nombreux exercices qui mêlent grandeurs et nombres. Les manuels actuels proposent des tâches dont on peut penser qu'elles sont assez familières aux élèves actuels.

### Des exercices proposés aux élèves

Notre questionnaire a été passé par 277 élèves de CM2 (en mai-juin 2005). Parmi les exercices, nous avons proposé :

> Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?
>
> Complète chacune des lignes : - Le chiffre des dizaines de 6529 est …
> - Le nombre de centaines de 8734 est …
>
> Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ?
>
> Complète chacune des lignes : 5 kg = ……….g

8 kg = ………. hg

Nous avons aussi proposé d’autres exercices, du même type, de conversion de mm en cm en contexte et hors contexte que nous ne présentons pas ici.

## Résultats bruts

Pour le « nombre de centaines de 8734 », on a les réponses suivantes :

| réponse | 87 | 7 | 700 ou 734 |
|---|---|---|---|
| pourcentage | 21% | 46% | 23% |

8 kg = … hg : 71% de réussite

5 kg = … g : 66% de réussite

Pour le « nombre de paquets de 100 feuilles pour avoir 8564 feuilles » :

| réponse | 86 | 85 | 85,64 |
|---|---|---|---|
| pourcentage | 20% | 19% | 3% |

Pour le « nombre de paquets dans 100 g dans 4 kg », la réussite (réponse 40) est de 32%. Les procédures susceptibles d’aboutir (qui ne sont éventuellement pas menées à terme) sont :

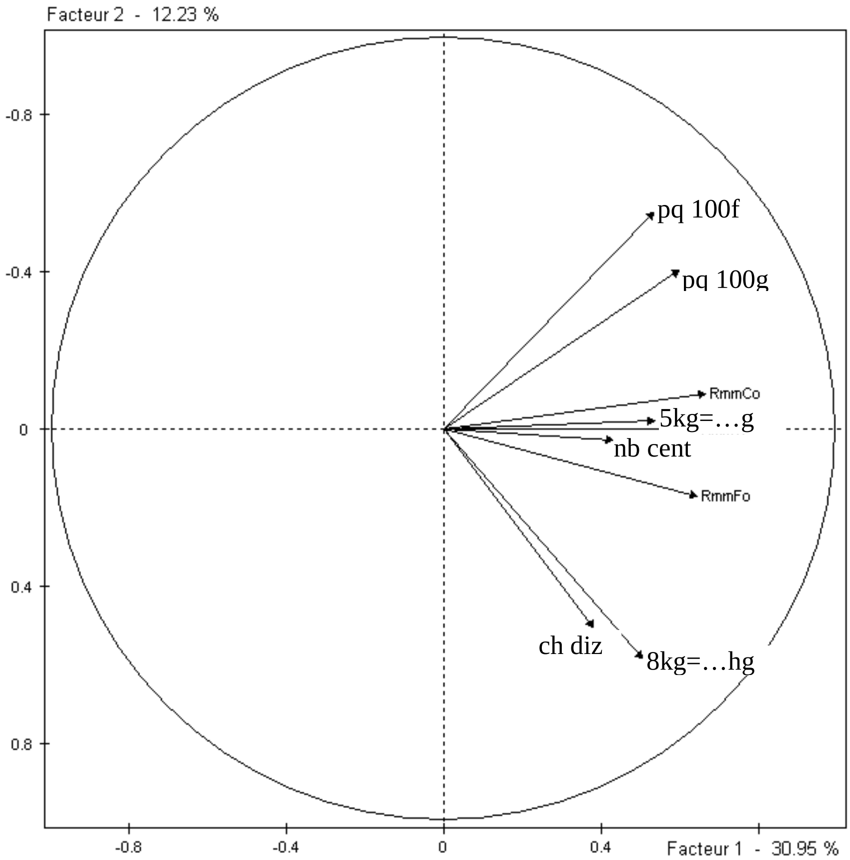
| Procédures | réussite sans procédure visible | réussite et 1000 g = 1 kg | division en ligne | division posée | $40 \times 100$ | présence de 10 | 100 : 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % | 17% | 1% | 3% | 5% | 9% | 3% | 11% |

38%

## Mise en relation des réponses aux différents exercices

Pour mettre en relation les réponses aux différents exercices, nous effectuons une analyse factorielle. Il en ressort notamment que :

- Les réussites aux deux problèmes concrets relatifs aux milliers et centaines sont assez corrélées,
- Les réussites aux deux exercices « formels » (8 kg en hg et chiffre des dizaines) sont assez corrélées.
- Les réussites au problème « 4 kg en paquets de 100 g » et à la conversion « 8 kg en hg » semblent être indépendantes.Les réussites aux trois exercices relatifs aux conversions de mm en cm sont assez corrélées, qu’ils soient en contexte et hors contexte (nous n’étudions pas ce point dans cette communication).




### 1.4. <u>Questionnement de nature écologique : ce que nous retenons des éléments précédents</u>

Nous retenons de ces différents éléments les faits suivants :

- l'indépendance des procédures de résolution pour deux questions en contexte et formelle, susceptibles d'être résolues par une même technique (le nombre de paquets de 100 g dans 4 kg et convertir 8 kg en hg),
- la proximité des réussites dans les tâches formelles,
- la relative proximité dans les tâches en contexte,
- le fait que les élèves progressent, dans toute la numération, quand on leur propose des problèmes de numération en contexte,
- les réussites relativement médiocres à des questions *a priori* élémentaires de numération et de système métrique.

Nous considérons qu'on peut les interpréter d'un point de vue écologique comme nous allons le voir.

### Cadre théorique et méthodologie

L'écologie des savoirs est une facette de la théorie anthropologique du didactique (TAD) qui englobe la théorie de la transposition didactique, développée par Chevallard (1991, 1999). L'écologie des savoirs (Artaud, 1997) permet d'étudier des questions telles que : comment les objets d'enseignement vivent-ils, avec qui ? Comment naissent-ils ? Pourquoi meurent-ils ?

Dans cette communication, nous faisons référence aux notions de praxéologie et d'ostensif. Une praxéologie est un moyen de décrire une pratique. Elle se décline en quatre composantes :

- le type de tâches est un ensemble de tâches qui se ressemblent,
- la technique est un moyen de traiter le type de tâches (« comment on fait),
- la technologie est une justification de la technique (« pourquoi ça marche quand on fait comme ça »),
- la théorie est un ensemble dans lequel s'inscrit la technologie, c'est un discours justificatif sur la technologie.

Les ostensifs sont des systèmes de signes utilisés dans les praxéologies. On parlera de l'instrumentalité d'un ostensif pour évoquer ce « qu'on peut ou non faire avec lui ».

Pour étudier les éléments que nous avons pointés, nous avons utilisé la méthodologie suivante. À travers des manuels scolaires du cours élémentaire et des textes pour l'école destinés aux enseignants ou aux formateurs, nous recherchons des techniques et technologies pour résoudre un même type de tâches de numération (et de système métrique) pour l'enseignement ancien et l'enseignement actuel, avec un intérêt particulier pour les ostensifs. Outre le fait que les ostensifs sont des éléments importants pour décrire les praxéologies, cet intérêt pour les ostensifs est notamment dû au fait qu'il est connu qu'au moment de la réforme on a, à la fois, introduit de nombreux symboles et formulé diverses interdictions relatives à l'utilisation de certains symboles ou mots.

### Hypothèse

Ces faits nous amènent à formuler une hypothèse de nature écologique. La réforme des mathématiques modernes pourrait avoir détruit des liens qui n'ont pas été reconstruits jusqu'à aujourd'hui (des liens nouveaux et pertinents n'ayant pas non plus été inventés ou implémentés). Il s'agit de liens qui peuvent être internes au système métrique, internes à la numération, ou encore dans les relations entre numération et système métrique. Par suite, le travail dans chacun des deux domaines pourrait apparaître aux élèves (voire au professeur) comme indépendant. Cela pourrait avoir deux types de conséquences : les connaissances ne se renforcent pas entre les deux domaines, elles sont juxtaposées ; chacun des domaines est affaibli car il n'est pas nourri par l'autre.

## 2. Éléments d'interprétation d'ordre écologique

Nous commençons par donner des invariants relatifs à l'étude de la numération de position. Nous poursuivons par des éléments caractéristiques de cette étude dans l'enseignement ancien, puis par des éléments relatifs à l’enseignement actuel. Nous essayons ensuite de comprendre les raisons des changements. Finalement, nous nous intéressons à un aspect particulier, peut-être particulièrement sensible aux bouleversements vécus par l’enseignement de la numération de position depuis 40 ans.

## 2.1. Types de tâches de la numération de position en primaire

L’étude des manuels scolaires anciens et nouveaux permet de repérer une certaine stabilité des tâches enseignées en numération. Certaines d’entre elles sont « emblématiques », probablement liées à la nature même de l’objet étudié, à sa fonction dans les sociétés qui ont des pratiques numériques développées. D’autres tâches sont plus « conjoncturelles ».

Nous avons repéré cinq tâches emblématiques. Autour de ces tâches se rattachent éventuellement d’autres tâches, pour former des types de tâches.

1) Dénombrer une grande collection
2) Dire écrire les nombres
3) Les suites écrites et orales (de 1 en 1, de 10 en 10, etc.)
4) Comparer des nombres
5) Combien de paquets de 100 dans 3500 ?

Nous relevons aussi un ensemble de tâches particulières, nous les rassemblons sous l’intitulé « décomposer, recomposer un nombre ». Ces tâches sont importantes mais il est difficile de les considérer comme emblématiques. Par ailleurs, bien que très présentes, elles apparaissent sous des formes éventuellement différentes selon les époques.

## 2.2. Écologie de la numération dans l’enseignement antérieur à la réforme

Dans les manuels anciens, on observe une série de technologies stables, elles sont organisées autour d’un ostensif : la « numération en unités » que nous présentons en indiquant certaines de ses propriétés.

### La numération en unités : un ostensif à tout faire

Il s’agit d’exprimer les nombres avec ce que nous appelons les « unités de la numération » (les mots : unités, dizaines, centaines, etc.) et les noms des nombres (d’abord de un à neuf) : par exemple, le nombre *trois milliers cinq centaines*.

Cet ostensif permet de régulariser l’oral : *trois dizaines* pour *trente*, mais pas seulement. En effet, il possède une plus grande instrumentalité que la numération orale. Il n’y a « pas d’oral » pour dire *56 centaines* (ou *cinquante six centaines*) ou pour dire *trente dizaines*. Ces désignations relèvent de la numération en unités et non de la numération orale dans laquelle on dirait : cinq mille six cents et trois cents.

### Technologies anciennes

Nous présentons maintenant la série des cinq technologies anciennes stables. Nous les désignons par une lettre significative :

C) Comptage par unités de la numération : « On compte par dizaines (centaines, unités de mille) comme on compte par unités. »

R) Relations entre unités de la numération : « 1 centaine = 10 dizaines, 1 centaine = 100 unités »

O) Relations entre oral et unités de la numération. Il s'agit d'une traduction mot à mot : « 3 centaines = trois cents, 5 dizaines = cinquante ; donc 3 centaines 5 dizaines = trois cent cinquante »

P) Relation entre position et unité de la numération : « Dans un nombre, les centaines s'écrivent au 3ème rang à partir de la droite ».

Ce discours s'accompagne éventuellement du discours suivant complémentaire : « Le zéro ne représente pas d'unité, il marque simplement un rang. »

M) Relation entre unités de la numération et unités métriques, traduction mot à mot : « 1 hectomètre = 1 centaine de mètre »

Nous donnons maintenant l'exemple du traitement de deux tâches emblématiques (des techniques donc) à partir des technologies classiques. Sauf mention contraire, ces techniques ne sont pas explicites dans les livres, ce sont des reconstructions que nous proposons.

### Technique ancienne pour la tâche : « dénombrer » (un tas d'objets dont il faut déterminer le nombre)

- compter dix objets (C), puis appeler dizaine un groupe de dix (R), compter les dizaines (C), s'il y en a moins que dix, itérer le processus, sinon appeler centaine un groupe de dix dizaines (R), itérer le processus en comptant les dizaines (C), etc.[4] ;
- les groupes étant réalisés, les compter (C). On a : 3 dizaines, 5 milliers ;
- (à l'écrit) les milliers occupent la 4ème position, les dizaines la 2ème (P) : le nombre s'écrit 5030 ;
- (à l'oral) 5 milliers se dit 5 mille, 3 dizaines se dit trente (O) : le nombre se dit cinq mille trente.

**Technique ancienne pour la tâche : dire un nombre écrit en chiffres, 7020**- 7020 comporte un 7 en 4ème position donc 7 milliers, un 2 en 2ème position donc 2 dizaines (P),

- 7 milliers = sept mille, 2 dizaines = vingt (O),
- 7020 se lit sept mille vingt

[4] Nous précisons que le processus s'arrête nécessairement quand tous les objets sont groupés. Il y a alors nécessairement moins de dix groupes de chaque espèce. Par ailleurs, on n'a pas mobilisé la division euclidienne dans cette tâche.

Dans les livres anciens, parfois des techniques sont énoncées : « pour lire un nombre de deux chiffres, on énonce d'abord le nombre des dizaines, puis celui des unités. Ainsi 38 se lit trente-huit » (Boucheny, CE, 1930). Souvent elles ne le sont pas. On peut penser que c'est parce qu'elles consistent en fait en un découpage de la tâche en sous-tâches qui peuvent, chacune, être traitées par un des discours élémentaires (les technologies).

## 2.3. La tâche « dénombrer » dans des manuels scolaires récents

Que peut-on dire des techniques pour traiter ces tâches aujourd'hui ? Pour étudier cette question, nous présentons des exemples tirés de manuels scolaires récents. Comme nous allons le voir, la situation actuelle semble plus hétérogène et, par suite, nous ne présentons que des fragments de tâches.

Nous avons retenu quatre manuels de CE2 :

- Pour comprendre les mathématiques (2004) – PCM (Hachette)
- Maths + (2002) (sed édition)
- Euro Maths (2004) (Hatier)
- Nouvel objectif calcul (1995) – NOC (Hatier)

### Techniques actuelles pour la tâche : « dénombrer » (les groupes étant réalisés)

Nos quatre manuels introduisent précocement les écritures chiffrées : 1, 10, 100, 1000. Ils procèdent cependant différemment pour obtenir l'écriture chiffrée du « nombre total ».

Dans PCM, les nombres de paquets de chaque type sont indiqués dans un tableau de numération (les noms des colonnes sont les noms des unités de la numération). Dans Euro Maths, on compte de 1000 en 1000 pour savoir qu'on doit écrire 2000 (en utilisant probablement d'un algorithme de régularité des suites). Dans Maths +, on écrit une multiplication $2\times1000$. Dans NOC, on écrit un calcul en arbre ou en ligne. Ces différentes techniques permettent *grosso modo* d'obtenir une somme de la forme 2000+300+40 (la situation n'est pas claire dans PCM : on ne sait si on obtient directement le nombre dans le tableau en complétant par des zéros les colonnes vides ou bien si on procède à un calcul pour ce faire).

Les techniques pour réduire la somme sont alors les suivantes :

- une convention explicite d'écriture dans Euro Maths,
- un calcul posé, en prenant soin d'aligner les chiffres à droite dans NOC, on peut sans doute dire qu'il s'agit d'une convention (implicite),
- sans précision dans Maths + (mais nous n'avons pas consulté le livre du maître).

Dans PCM, on a bien une somme mais on ne sait pas si la somme est obtenue *a posteriori* (à partir du tableau) ou indépendamment du tableau, et finalement le tableau serait un moyen de la réduire, d'élaborer une convention (implicite).

Ajoutons les éléments suivants. La leçon « numération : groupements » (livres de l'élève et du maître) de NOC (1995) se passe des noms des unités de la numération ; ce sont des calculs avec des écritures chiffrées qui interviennent. Euro Maths 2004 après avoir donné une règle de calcul pour réduire la somme, formule finalement une règle directe du passage des paquets à l'écriture chiffrée qui utilise les noms des unités de la numération. Cette dernière règle ressemble fortement à la technologie P. Il y a toutefois une différence non négligeable entre l'approche classique et celle d'Euro Maths c'est que, dans l'approche classique, l'écriture 1000 dépend de P alors que, dans Euro Maths, P dépend de l'écriture 1000. Cette différence implique que, dans l'approche actuelle (Euro Maths), les règles initiales de manipulation ne sont pas élaborées sur les unités de la numération mais sur les écritures chiffrées.

### La décomposition additive : un nouvel ostensif

On voit que, dans cette tâche, les écritures chiffrées des puissances de dix semblent *grosso modo* jouer le rôle que jouait les unités de la numération. Toutefois, les règles de fonctionnement sont loin d'être aussi explicites que celles qui régissaient la numération en unités. Les présupposés des différents manuels semblent être différents, même si finalement tout revient au même…

Pour résumer, que voit-on aujourd'hui ?

- une omniprésence des « décompositions additives » et une grande raréfaction voire une quasi disparition (à une époque peut-être révolue) de la numération en unités,
- pas d'harmonisation des techniques et technologies entre les manuels,
- des raisonnements inversés d'un manuel à l'autre à cause de « présupposés » différents (qui laissent en tout cas planer une grande ambiguïté),
- des implicites.

## 2.4. <u>Des raisons du changement ?</u>

D'où cela vient-il ? Nous formulons quelques hypothèses.

### La réforme des mathématiques modernes

La réforme des mathématiques modernes (en 1970) amène à un net affaiblissement des unités de la numération à l'école primaire. Les raisons semblent être multiples, notamment :

- le caractère « générique » des bases s'oppose à celui, « spécifique », de la base dix (or à cette époque on veut montrer la généralité),

- les **manipulations** en base **remplacent les discours** en unités de la numération (on a une sorte de « toute croyance » en la manipulation),
- en outre, les unités de la numération semblent être discréditées notamment pour cause d'« ambiguïté ». Combien y a-t-il d'unités dans 234 ? Cette question est considérée comme ambiguë car on ne sait s'il faut répondre 4 ou 234 (APMEP, 1976).

Finalement, on peut penser que la réforme a fait « exploser » la numération en lui supprimant son ostensif fondamental, la numération en unités, qui permet de formuler les explications (et des tâches dans un registre symbolique) et en ajoutant de nouvelles tâches avec les changements de base notamment.

## Contre réforme (ERMEL 1978)

Nous faisons maintenant référence à un ouvrage dont on peut penser qu'il a eu une influence assez forte sur les formateurs d'enseignants de primaire pendant les années 80. Il s'agit de la première édition de la publication des travaux de l'équipe ERMEL. Nous considérons qu'il est emblématique de la contre-réforme en primaire. Nous avons consulté le tome 2 du cours élémentaire.

Il semble qu'assez rapidement après la réforme est repérée la nécessité d'un registre symbolique pour le travail sur les nombres. En effet, si les élèves sont capables de coder et décoder des collections en base, les écritures chiffrées en base n'auraient tendance qu'à évoquer cette action de groupement (Perret, 1985). La contre-réforme ajoute des manipulations symboliques dans l'étude de la numération : « Le point fondamental est de familiariser les enfants au travail direct sur les écritures. » en utilisant en particulier 1, 10, 100, 1000.

Outre le fait que la progression d'ERMEL (pour le CE) est d'une très grande complexité, il n'est pas sûr que le lien entre ces manipulations d'écriture et les tâches emblématiques de numération soient complètement pris en charge, notamment pour la tâche « dénombrer ».

Plus précisément, ERMEL fait référence aux décompositions polynomiales : $a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$. Elles sont indispensables pour traiter les changements de base introduites au moment de la réforme. ERMEL propose en fait d'appuyer l'étude de la base dix sur les petites bases, sur les changements de bases. Ainsi, par « calcul mental » en base dix : on transforme des « nombres d'objets » écrits en bases, en base dix : $(213)_4=16+16+4+3$. Ceci doit servir à identifier le rôle des coefficients. En base dix, on écrira « de même » : 213=100+100+10+3 sans faire référence à une collection d'objets. C'est probablement complexe et cela ne semble pas véritablement repris dans les manuels de l'époque que nous avons étudiés (ça l'est d'autant moins que les bases disparaissent assez vite).

ERMEL va plus loin, en proposant des « technologies » pour les « numérations hybrides » (oral : « trois cent huit » s'écrit « 3 100 8 » qui devient « $3\times100+8$ »), pour les numérations d'addition » (romains : « CCV » devient « 100+100+5 »). Elles constituent des moyens qui permettent plus ou moins de se passer des technologies classiques.

## Et les décompositions – recompositions ?

Ces éléments nous amènent à évoquer les « décompositions recompositions » à trois époques. Cette tâche est incluse en général dans la tâche dénombrer, comme nous venons de le voir. Elle en constitue une partie. Signalons toutefois le manuel Math Elem (1996) qui propose une autre façon que celles nous avons présentées pour réduire une somme (4000+60+2) :

« Certains élèves utilisent l'addition (…). La discussion les aidera à prendre conscience que la lecture seule permet de retrouver le nombre qui a été décomposé. » Il s'agit donc de s'appuyer sur la numération orale.

En fait, cette tâche est aujourd'hui généralisée dans l'ostensif : 300+40+7. Hier, elle n'existait pas dans cet ostensif, il s'agissait toujours de l'ostensif « numération en unités » : 3 c 4 d 7 u. Sous cette forme, après avoir plus ou moins disparu, elle semble revenir, elle cohabite avec celle en écriture chiffrée. Toutefois, comme le laisse penser Euro Maths, il semble qu'on puisse considérer qu'en unités de la numération, elle est seconde. C'est-à-dire que ce sont les « calculs » sur les écritures chiffrées des puissances de dix qui justifient la position des « unités », « dizaines » et « centaines ».

Il est bien possible que cette tâche ait eu un statut tout à fait particulier au moment de la contre-réforme : avant la réforme elle est intermédiaire pour « dénombrer », au moment de la réforme apparemment elle disparaît. À cette époque, on écrit directement le nombre dans le tableau quand on veut dénombrer une collection. La nécessité de restaurer un registre de manipulation symbolique semble la faire vivre plus ou moins indépendamment des tâches de dénombrement (au moment de la contre-réforme, ces dernières tâches semblent être fort rares dans certains manuels et souvent à réaliser directement dans le tableau). Finalement, l'évolution de l'enseignement de la numération pourrait progressivement lui avoir rendu sa niche habituelle : un intermédiaire pour dénombrer les grandes collections, ce qui était le cas dans l'enseignement ancien. Ces « décompositions – recompositions » correspondent grosso modo au travail de la technologie (P).

## Une quête écologique

Au moment de la contre-réforme, on introduit beaucoup de tâches autour des « écritures » - les manipulations symboliques -. Ce qui est fascinant c'est que finalement, ce qui reste de ces tâches semble principalement se trouver dans les décompositions - recompositions de la numération où les écritures chiffrées des puissances de dix (ECPD) ont plus ou moins remplacé la numération en unités Par ailleurs, il ne semble pas qu'on puisse faire « tout » ce qu'on faisait avant la numération en unités. En effet, la manipulation des écritures chiffrées demande de se passer de mots et donc de disposer d'outils symboliques beaucoup plus sophistiqués que la numération en unités. Par ailleurs, comme nous allons le voir, certaines tâches, notamment les conversions, n'ont pas véritablement de correspondance avec les ECPD.

Nous interprétons l'hétérogénéité dans les manuels actuels comme le produit de ces bouleversements. Nous voyons plusieurs raisons à cette hétérogénéité. Celle que avons montrée ici consiste à dire que le travail de « transposition », d'élaboration de technologies, qu'on observe dans ERMEL 1978 n'y est pas véritablement abouti, d'autant moins que le livre fait l'hypothèse d'un travail en bases qui a disparu des programmes peu de temps après sa parution. Il nous semble qu'un certain nombre de questions relatives à des technologies ou des techniques pour les différentes tâches de numération y sont laissées en suspens.

Cet aspect n'est peut-être pas le plus important. En effet, fondamentalement, il n'est pas sûr qu'on puisse se passer de la numération en unités pour étudier la numération. Il semble bien qu'ERMEL CE 1978 a eu ce projet. On peut interpréter le travail des manuels récents comme une recherche de mise en cohérence de la numération à destination de jeunes élèves en redonnant notamment un peu de légitimité à la numération en unités. Nous donnons maintenant un dernier exemple des bouleversements attachés à une tâche emblématique de la numération. La légitimité de l'ostensif « numération en unités » nous semble particulièrement cruciale pour comprendre les modifications dans la vie de ce type de tâches.

### 2.5. <u>Les conversions : un type de tâches controversé</u>

La dialectique « nombre de » - « chiffres des » n'existe pas dans l'enseignement ancien. En revanche, existe un type de tâche qui semble avoir aujourd'hui disparu. Il s'agit des « conversions » : convertir 3 centaines en dizaines, par exemple. Le « nombre de » est un cas particulier de conversion, quand un des nombres est exprimé dans l'unité « unité ».

#### Les conversions dans l'enseignement ancien

Dans l'enseignement ancien, nous pensons avoir repéré des conversions variées, plus ou moins élémentaires. Nous en distinguons trois sortes.

1) Les conversions simples ou la relation dix pour un : 1000F – 9 centaines de F = …F et aussi : 500F + 500F = …F

2) Les conversions « multiples de la relation », les nombres en jeu ont un seul chiffre non nul :

Combien y a-t-il d'unités dans 3 centaines ?

Combien 30 dizaines font-elles de centaines ?

Combien y a-t-il de décamètres dans 4 hectomètres ? ou 4 hm = … dam

3) Les conversions où plusieurs ordres de la numération sont impliqués, plusieurs chiffres non nuls.

Combien y a-t-il de centaines dans 35 dizaines ? (rép : 3 c 5 d). Pour traiter cette tâche, on peut utiliser le type précédent, 35 dizaines sont 30 dizaines et 5 dizaines soit 3 centaines et 5 dizaines.
Ces trois sortes de conversions semblent constituer une progression dans l'étude du type de tâches. Par ailleurs, la progression permet d'élaborer une technique pour traiter les tâches les plus complexes du type sans utiliser directement la propriété de la troncature.

### Les conversions aujourd'hui

Aujourd'hui, les conversions sont quasiment inexistante dans les manuels du cours élémentaire. Il est possible que, le « nombre de » ait remplacé « les conversions » au moment de la réforme. Toutefois, depuis la réforme et jusqu'en 1995, même le « nombre de » est très peu répandu dans les livres. Ceci peut s'expliquer par la volonté de se passer des unités de la numération et sans cet ostensif, ce type de tâches ne peut exister.
Il n'est pas rare, dans des manuels actuels, que les relations entre unités (une centaine = dix dizaines par exemple) ne soient pas citées (ou seulement dans le livre du maître) alors que la propriété de la troncature, « nombre de », l'est. On trouve, des fois, des « calculs » autour des relations entre unités dans les leçons de numération ou de calcul : 800 + 200 =…. On trouve aussi de nouvelles tâches autour du « nombre de », par exemple : « calcule 3 c + 21 d ». Un type de tâches semble être en train d'émerger autour du « nombre de ».
Toutefois, en numération, la substitution des « nombres de » aux conversions affaiblit probablement la connaissance des relations entre unités et ne permet pas véritablement de traiter des tâches justificatives connexes, par exemple la retenue dans l'étude des techniques opératoires. Une façon élémentaire de justifier une retenue au rang des dizaines est d'utiliser la numération en unités. On a alors 13 dizaines = 1 centaine 3 dizaines. De même pour justifier l'algorithme de l'écriture chiffrée, il faut pouvoir exprimer la relation entre deux unités successives.L'émergence du type de tâches autour du « nombre de » apparaît assurément comme une nécessité écologique pour que la tâche vive. Néanmoins, il n'est pas sûr que les tâches qui se développent alors soient les plus adaptées pour satisfaire les besoins de l'étude de la numération.
Paradoxalement, le système métrique pourrait avoir « moins bougé » que la numération pendant ces 40 dernières années. Peut-être la raison en est qu'il possède un ostensif équivalent à la numération en unités : les unités km, hm, dam, m… et peut-être à cause de cela, il n'a pas perdu ses conversions. En revanche, il est assez clair qu'il s'est désolidarisé de la numération.

## 3. Conclusions

L’étude des manuels scolaires actuels semble montrer une grande hétérogénéité des technologies et des techniques. Hier, on constatait une grande homogénéité.

L’étude de l’enseignement ancien permet de mettre en évidence un ostensif probablement crucial : la numération en unités. Il a quasiment disparu au moment de la réforme mais revient progressivement. Il semble néanmoins avoir perdu certaines de ses propriétés « manipulatoires ». Sa marginalisation est susceptible d’expliquer la faiblesse du type de tâches « conversion » dont il semble pourtant qu’il est essentiel, notamment pour satisfaire des besoins connexes à l’étude de la numération de position. En fait, il a été plus ou moins remplacé par les écritures chiffrées des puissances de dix. Ces écritures permettent de faire les « mêmes » choses que la numération en unités à condition de maîtriser un formalisme qui n’est probablement pas disponible chez des jeunes élèves.

Ces éléments permettent-ils d’expliquer les résultats relatifs aux connaissances des élèves actuels ? Les problèmes que nous avons proposés sont principalement des problèmes de conversion. Est-ce parce que cette tâche a « disparu » qu’elle n’est pas réussie ? Ou bien, est-ce que les éléments que nous avons relevés dans les manuels sont plutôt le signe d’une désorganisation assez grande de l’enseignement de la numération et, finalement, les résultats des élèves seraient symptomatiques de cela ? Ou encore, est-ce parce que la numération est difficile et qu’il faut du temps aux élèves pour qu’ils la maîtrisent ?

## 4. Références bibliographiques

APMEP ; 1976 ; Mots. T.3 : vocabulaire de l’enseignement des mathématiques ; Paris : APMEP

Artaud, Michèle ; 1997 ; Introduction à l’approche écologique du didactique - l’écologie des organisations mathématiques et didactiques ; *Actes de la 9ème école d’été de didactique des mathématiques ;* 100-139

Bronner, Alain ; 1997 ; *Étude didactique des nombres réels : I-décimalité et racines carrées* ; Thèse nouveau doctorat ; Saint-Martin-d'Hères : Université de Grenoble 1

Chambris, Christine ; 2007 ; Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire ; *Repères – IREM* ; 69 ; 5-31

Chambris, Christine ; 2008 ; *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l’école primaire. Évolution de l’enseignement au cours du 20$^{e}$ siècle. Connaissances des élèves actuels.* ; Thèse ; Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7) ; http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/fr/

Chevallard, Yves ; 1992 ; Une réforme inaccomplie ; *La gazette des mathématiciens* ; 54 ; 17-21

Parouty, Véronique ; 2005 ; Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres. Foix mai 2004. Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour les maîtres ?* ; Toulouse : IREM de Toulouse

Perret, Jean-François ; 1985 ; *Comprendre l'écriture des nombres.* ; Exploration « recherches en sciences de l'éducation » ; Berne : Peter Lang.