Gérer la résolution des problèmes, non pas seulement pour chercher, mais aussi et avant tout… pour apprendre des mathématiques

Annie NOIRFALISE [1]

IREM de Clermont Ferrand et ICFP Auvergne Limousin

A. Introduction

L'élaboration et la mise en œuvre de travaux de formation initiale et continue de professeurs d'école[2] ont été l'occasion de rassembler les matériaux sur lesquels s'appuie cet article.
Les analyses faites dans cette perspective, sur l'ensemble des thèmes abordés à l'école primaire, d'extraits d'ouvrages de collections variées, font apparaître des difficultés récurrentes, objet de notre propos, liées à l'utilisation de **« problèmes pour apprendre »** ; en particulier de problèmes pour la **« construction d'une nouvelle connaissance ».**

Ces analyses didactiques d'extraits d'ouvrages scolaires sont motivées, dans le cadre des formations évoquées, par les faits suivants :

- la grande majorité des professeurs d'école conduisent les études mathématiques dans leur classe en ayant essentiellement recours aux éléments d'organisation didactique donnés dans un ouvrage scolaire, (livret élève et quelques fois livre maître correspondant) ; les charges considérables qui leur incombent les obligent à limiter le temps de préparation dans chaque discipline étudiée,
- l'analyse de plusieurs de ces documents montre que néanmoins un travail important devrait être fait avant la séquence, par l'enseignant, pendant la séquence par l'enseignant et les élèves, et après la conduite de la séquence, afin que les différentes

[1] Cette contribution a été rédigée en collaboration avec Yves MATHERON, INRP, UMR-ADEF Marseille.
[2] L'ensemble des éléments élaborés, constituant un programme complet de formation de professeurs d'Ecoles, est rassemblé dans un ouvrage à paraître MATHERON Yves et NOIRFALISE Annie, (2008).

études conduites par le collectif maître/élèves en mathématiques, s'articulent en un tout cohérent afin que cette cohérence, elle-même, soit accessible aux élèves.

- ces analyses ne visent, en aucune façon, la dévalorisation du travail des auteurs d'ouvrages qui sont, eux aussi, soumis à des contraintes. Il s'agit, au contraire, de proposer en formation des outils pouvant permettre aux professeurs d'école d'utiliser quotidiennement, et de meilleure façon, les documents mis à leur disposition par les auteurs.

Les matériaux sur lesquels nous nous appuyons sont des analyses didactiques essentiellement conduites dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique[3]. Pour les lecteurs non familiers de l'usage de cette théorie, précisons que dans cet article, nous n'utilisons essentiellement, dans ce qui suit, qu'un nombre restreint des éléments théoriques qui la constitue : ceux utiles à la compréhension de notre propos.

Précisons tout d'abord que, dans un tel cadre, un objet mathématique n'existe jamais en soi. Si l'on prend l'exemple de la division euclidienne, parmi les diverses pratiques la mettant en jeu, on trouvera des déclarations que l'on range sous la rubrique définition : « on appelle division de l'entier a par l'entier b … », déclaration qui est une activité consistant à donner une définition. On pourra aussi calculer, d'une façon ou d'une autre, le reste et le quotient d'un entier par un autre, étudier ou utiliser les propriétés du reste et du quotient, etc. Mais on ne « mettra jamais la main » sur l'objet division euclidienne lui-même. Tout seul il n'existe pas, mais il n'existe qu'inséré dans des activités : par exemple, définir, calculer, déterminer des propriétés, etc., dont on a décidé qu'elles évoquaient, plus ou moins directement, la division euclidienne. Ce que nous appelons « division euclidienne » est, en fait, l'ensemble de toutes ces pratiques dont on ne saurait, toutefois, dresser un répertoire exhaustif.

Poursuivant l'exemple de la division euclidienne, étudier un objet mathématique revient à étudier un type de tâches dont on donne dans ce qui suit quelques occurrences : déterminer le montant de chaque part ou le nombre de parts dans des situations de partage ou de distribution équitables, calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres).

[3] Nous nous référons à la théorie didactique développée par Yves Chevallard et les didacticiens qui se réclament de cette approche. On pourra se reporter à la bibliographie de référence (Chevallard 1998 & 1999, Matheron & Noirfalise 200X, Cirade 2006).

Ce type de tâches peut être accompli grâce à une ou plusieurs techniques – ce terme signifiant étymologiquement « qui concerne un art ». Il s'agit, dans notre exemple et plus prosaïquement, d'une manière de faire : par un calcul posé, un partage effectif, un encadrement entre deux multiples consécutifs du diviseur, etc. Une technique répond à la question « Comment accomplir les tâches de ce type ? » On sait historiquement que depuis les Grecs, et en rupture avec les mathématiques développées par les Babyloniens et les Egyptiens, se limiter à l'usage de techniques permettant de résoudre certains problèmes n'est plus considéré, en Occident tout d'abord puis au niveau international, comme une pratique mathématique qui se suffirait à elle-même. Dans l'histoire de l'humanité, les mathématiques ne sont pas regardées, depuis plus de 2000 ans, comme une pratique qui consisterait à appliquer des « recettes », mais comme un savoir fondé en raison.

Aussi, les techniques mathématiques peuvent-elles être décrites, et leur adéquation à l'accomplissement d'un type de tâches donné peut-elle être justifiée par un discours, que l'on nomme technologique en recourrant pour cela à l'étymologie de ce terme constitué à l'aide de « logos » qui signifie « parole » ou « raison » ; la technologie désigne ainsi le discours raisonné tenu sur la technique. A son tour, la technologie d'une technique peut être justifiée dans le cadre d'une théorie mathématique. Ce dernier terme, emprunté à un verbe grec qui signifiait « observer, contempler », a pris en latin le sens de « spéculation » ou de « recherche spéculative ». L'élément théorique peut être de nature mathématique ou relever du recours au bon sens, à l'ordre des choses qui se font. L'ensemble des quatre éléments constitué d'un type de tâches, d'une technique permettant de l'accomplir, d'une technologie associée à la technique, et d'une théorie, définit une organisation praxéologique. Pour un type de tâches donné, une telle organisation dépend évidemment de l'institution dans laquelle on l'accomplit et où une praxéologie peut être partiellement incomplète. Dans le vaste champ des praxéologies de toutes natures, nous ne nous intéressons pour cet article qu'aux praxéologies de deux types. Les praxéologies mathématiques, soit ce que l'on nomme des organisations mathématiques, telles qu'elles se présentent à l'issue du processus de transposition didactique, ainsi que les praxéologies qui permettent de les mettre en place dans les classes, de les faire rencontrer et étudier par les élèves, soit ce que l'on nomme des organisations didactiques.

Pour chaque séquence étudiée, notre travail d'analyse consiste essentiellement à se poser les questions suivantes : quelle est l'organisation mathématique dont l'étude est visée et comment cette étude est-elle conduite, autrement dit quelle est l'organisation didactique proposée par les auteurs de l'ouvrage ? En particulier, en quoi les activités proposées permettent-elles de faire avancer l'étude de l'organisation mathématique visée ?

Afin de préciser notre propos, nous donnons dans un premier temps un extrait d'un tel travail, puis nous précisons les phénomènes récurrents relevés en les illustrant d'autres exemples évoqués plus succinctement.

B. Enseignements tirés de quelques extraits d'analyses didactiques

I. Analyse d'une séquence sur l'introduction du produit de deux entiers :

Nous travaillons sur la séquence 66 extraite de l'ouvrage « Pour comprendre les mathématiques », CE1, édition Hachette, 2002, fichier élève et guide pédagogique.
Voir documents de référence en ***ANNEXE 1*** *(nous utilisons tout d'abord la présentation du guide pédagogique)*

I. 1. Quel(s) objet(s) d'étude ?

La séquence étudiée est intitulée : « Le produit de deux nombres »,
Les objectifs annoncés sont : « Construire le concept de produit. Ecrire un produit sous la forme $a \times b$ et trouver sa valeur »

I. 1. a) À la lecture de cet intitulé, il s'agit entre autres de trouver la valeur du produit de deux nombres. Une des questions proposée à l'étude, mais non la première, est donc la suivante : « comment déterminer la valeur du produit de deux nombres entiers ? ». Nous la noterons Q 1, et son étude concerne la construction d'une organisation mathématique qui peut se décrire *a priori* ainsi :

- type de tâches : trouver la valeur produit de *a* et *b*, où *a* et *b* sont deux entiers quelconques donnés,
- techniques possibles : des techniques à portée limitée du type « je fais *a* tas de *b* jetons et je dénombre la collection obtenue par réunion de tous les tas », ou encore « je fais

un quadrillage de *a* lignes et *b* colonnes et je dénombre les cases », vers une technique de multiplication posée, en passant par le recours à des additions réitérées et l'usage d'une calculatrice,

- éléments technologiques et théoriques : ils dépendent de la technique utilisée et de l'institution dans laquelle s'accomplit ce travail.

I. 1. b) À cette étude s'en adjoint au moins une seconde, évoquée en premier lieu, et la question à laquelle elle répond, nécessite d'être précisée. Il s'agit, disent les auteurs de l'ouvrage, de « *construire le concept de produit* », donc, d'après la définition du mot « concept » donnée par le Larousse, d'œuvrer à « *définir les caractères spécifiques de l'objet " produit "* ». Que peut-on entendre par là ? Comme on l'a dit plus haut, un objet mathématique n'existe qu'inséré dans une pratique, on ne rencontre jamais l'objet « produit de deux entiers », on peut rencontrer une écriture d'un produit, (4×7), par exemple comme compte rendu[4] d'actions produisant l'organisation d'une collection en lignes et colonnes régulières, à l'occasion du calcul d'un produit, avec une calculatrice ou tout autre technique, à l'occasion de la résolution d'un problème où on se pose une question à laquelle le calcul d'un produit permet de répondre ; soit ce que l'on nomme une situation multiplicative….

Dans leur ouvrage, les auteurs précisent qu'ils se proposent « *d'introduire le concept de produit à partir de la résolution d'un problème. Le produit est alors le nom et l'écriture qui expriment la solution de ce problème* ». On peut donc comprendre qu'on commence ici à « définir les caractères spécifiques » des problèmes qui se résolvent avec un produit et peut-être même à répondre à la question : « comment reconnaître qu'une expérience matérielle pourra donner lieu à un compte rendu multiplicatif ? », que nous noterons Q 2. L'organisation praxéologique à construire pour répondre à cette seconde question n'est pas simple à décrire.
A partir des éléments trouvés dans l'ouvrage de référence, l'organisation qui s'ébauche alors semble être la suivante :

[4]En référence à une terminologie utilisée par H. Lebesgue à propos des nombres et citée par A. Mercier : « Le mathématicien Henri Lebesgue (1935, réédition 1975), qui disait aux futurs professeurs que « un nombre est le compte-rendu complet de l'action qui le produit [...] le reste est métaphysique » déclarait en conclusion de son cours sur « La mesure des grandeurs » que l'étude des mathématiques élémentaires était essentielle pour leur enseignement : cette étude permettait par exemple de comprendre qu'un nombre est le résultat d'une expérience particulière sur une grandeur. Il travaillait pour que, peut-être, les professeurs au fait de ce qu'est la mesure des grandeurs envisagent leur enseignement sur les systèmes de nombres comme portant sur les manières de *produire des mesures* par un algorithme vérifié ou des dispositifs validés, selon les cas, et *d'en rendre compte par un nombre,* que l'on considérerait alors comme le compte-rendu d'une *expérience de mesure*. ». Pour notre part, nous parlerons de compte rendu d'actions ou d'activités.

- type de tâches : pour une collection donnée, définie ici en compréhension, déterminer s'il est possible d'écrire son cardinal sous la forme $a \times b$,
- technique : déterminer deux caractères permettant de qualifier tous les objets de la collection ; déterminer toutes les valeurs possibles, pour chacun de ces deux caractères, prises par au moins un élément de la collection, *a* est le nombre de valeurs possible pour le premier caractère, *b* pour le second ; ranger les objets de la collection en un tableau à double entrée : dans une ligne donnée, on range les objets ayant une même valeur pour le premier caractère, ces objets étant ordonnés dans chaque ligne en respectant une même valeur, pour le second caractère dans une colonne donnée ; vérifier si tous les éléments de la collection sont rangés et si toutes les cases du tableau sont remplies,
- éléments technologiques : la description de la technique ; l'organisation de collections en tableaux de *a* rangées et *b* lignes complètes assure l'existence d'une correspondance terme à terme, par superposition des tableaux par exemple, et légitime la même écriture pour le cardinal de toutes les collections constituées de tous les objets caractérisés par deux variables, prenant respectivement *a* et *b* valeurs, représentées une fois et une seule ; pour des collections pour lesquelles *a* et *b* sont grands, cette écriture permet de garder en mémoire une organisation possible de la collection, comme une empreinte numérique et spatiale de celle-ci,
- théorie : produit cartésien en théorie des ensembles.

Cette étude préalable permet donc d'envisager au moins deux questions dont l'étude débuterait dans cette séquence. Ces deux questions sont interdépendantes : pour que le collectif enseignant / élèves puisse se lancer dans l'étude de la détermination du produit de deux nombres, il semblerait naturel d'avoir *a priori*, ou au moins rapidement en cours de travail, quelques précisions sur les objets dont il est question, sur leur nature, sur l'intérêt de cette étude et son devenir. Les auteurs ayant fait le choix « *d'introduire le concept de produit à partir de la résolution d'un problème* », cela signifie que l'on va sans doute débuter le travail par un exemple d'expérience matérielle pouvant donner lieu à un compte rendu multiplicatif, mais en poursuivant le projet d'instruire une réponse à la première question : « comment déterminer la valeur du produit de deux nombres entiers ? »

I. 2. Quels éléments d'organisation didactique trouve-t-on évoqués dans le guide pédagogique?

Notre travail consiste ici essentiellement à examiner si les activités proposées permettent de faire avancer l'élaboration des praxéologies dont la construction est visée, et ce qui pourrait optimiser ce travail.

En formation, le repérage des différents moments de l'étude et de la manière dont ils sont gérés[5] permet de s'interroger sur la place à donner aux élèves dans cette élaboration, et d'évaluer les places accordées d'une part à l'ostension et, d'autre part, à la collaboration attendue de la classe. Pour ne pas surcharger cette présentation, nous ne proposons dans ces lignes qu'une analyse incomplète de l'organisation didactique.

Nous examinons l'ensemble des activités prévues par les auteurs, y compris celles dont on ne trouve pas trace dans le livret élève, ce qui suppose la prise de connaissance préalable du contenu du guide pédagogique correspondant à la leçon, (*cf.* ANNEXE 1).

• Durant la première activité intitulée « *les logos* », une tâche de dénombrement d'une collection d'objets repérés par deux variables dont les valeurs possibles sont précisées, est confiée aux élèves :

- après une première présentation des résultats que l'on attend divergents, l'enseignant « *propose de noter le nombre inconnu de logos* 4×5 *ou* 5×4 *au choix* », puis de poursuivre le travail de détermination des éléments de la collection à l'aide d'une technique d'énumération recourrant à l'usage d'un tableau à double entrée. Il justifie ainsi sa proposition : « *le tableau à double entrée est un bon outil pour trouver tous les logos sans oubli et sans répétition* ». On ignore comment les symboles « 4×5 » et « 5×4 » sont introduits. Comment sont-ils motivés ? Quelle place occupent-ils dans l'activité d'énumération en cours, dans le dénombrement visé ? Comment l'équivalence de ces deux symboles est-elle justifiée ? Toutes ces questions demeurent sans réponse, car elles semblent procéder d'un « allant de soi » non questionnable. On peut relever que leur introduction précède le recours au tableau rectangulaire. L'énumération exacte des éléments de la collection n'est pas encore réalisée. Rien ne permet en ce point de justifier une telle notation. Les auteurs écrivent simplement : « *Il y a 4 formes et 5 couleurs. Ces nombres sont importants, si on les change, on ne trouvera pas le même nombre de logos* ». Il faudra s'en contenter car l'état d'avancement du travail ne permet pas aux élèves de comprendre en quoi ils sont

[5] Voir dans la bibliographie de référence les Actes de l'Université d'été, La Rochelle, 1998, pages 109 et suivantes.

importants, ni non plus de mettre en relation la notation introduite avec la structure de la collection ; donc de préciser des éléments pour caractériser les situations où elle peut être utilisée. Rien ne permet de justifier l'équivalence des deux écritures « 4×5 » et « 5×4 ». Cette manière de faire engage vers une introduction prématurée des conclusions énoncées, car les élèves n'ont guère pu les éprouver par eux-mêmes. Le texte le leur dit ; ils sont conviés à lui faire confiance.

- après une seconde phase de travail en équipes, durant laquelle les élèves doivent utiliser la technique donnée par l'enseignant pour énumérer les objets de la collection, « *l'enseignant introduit le vocabulaire produit de deux nombres***,** *la notation $4 \times 5 = 5 \times 4$, et définit ce produit comme le nombre de cases d'un tableau à double entrée ayant le nombre correspondant de lignes et de colonnes* ». Le terme « produit » de deux nombres est utilisé pour la première fois, mais aucune indication n'est donnée sur la gestion de ce moment. Un travail est-il fait à propos de la nature de la collection permettant une organisation en colonnes et lignes régulières, afin d'avancer dans la reconnaissance des situations pouvant donner lieu à un compte rendu multiplicatif (réponse à la question Q 2) ? Le tableau à double entrée a déjà été rencontré dans une séquence précédente, le rappel des situations alors étudiées pourrait être utilisé. L'attention est-elle attirée sur le rôle du tableau à double entrée, en tant qu'«empreinte numérique et spatiale » d'une organisation de la collection lui assurant le même cardinal qu'une autre collection ayant la même empreinte ? Ceci est pourtant l'une des raisons qui confèrent aux deux écritures « 4×5 » et « 5×4 » le statut de nombre ; et qui permet de justifier leur égalité…

• Pour la seconde activité, intitulée « *le bal masqué* », l'utilisation de la technique d'énumération montrée précédemment est explicitement attendue. Néanmoins, l'organisation de la classe est prévue de façon à ce que les enfants puissent mimer la situation dans leur groupe :

- lors de la synthèse du travail des groupes, l'enseignant « *montre que le tableau à double entrée est l'outil adéquat : Sophie a toutes ses photos en lignes et Julien les siennes en colonnes ou vice versa* ».
- à la fin de cette synthèse, l'enseignant « *introduit le vocabulaire et les écritures : le produit des nombres 4 et 3 est le nombre de cases d'un tableau à 4 lignes et 3*

colonnes ou, ce qui revient au même, de 3 lignes et 4 colonnes. On note ce nombre 4 × 3 = 3 ×4 ».

Compte tenu de la nature du travail délégué aux élèves, cette seconde activité peut être interprétée comme engageant les élèves à s'entraîner à l'utilisation du tableau à double entrée, en tant que technique d'énumération des éléments d'une collection ; ce qui n'est pourtant pas tout à fait le but assigné à l'étude poursuivie.

Si l'on veut poursuivre le travail d'élaboration d'une technique de reconnaissance des situations pouvant donner lieu à un compte rendu multiplicatif, travail débuté précédemment, il s'agirait plutôt de déterminer si, dans une telle situation, les objets de la collection peuvent être organisés en tableau à double entrée ; cela constituerait plutôt un entraînement à la *reconnaissance de situations* donnant lieu à un compte rendu multiplicatif. Ce qui est tout autre chose ! Cette seconde activité permettrait de montrer que les deux problèmes proposés correspondent à un phénomène général ; tant en ce qui concerne l'utilisation de la technique d'énumération, que la notation multiplicative, grâce au lien que l'on peut faire entre les deux puisqu'on peut constater l'identité des cardinaux correspondants à chacun des tableaux… Cette activité permettrait aux élèves de changer d'objet de travail : passer du dénombrement de collections d'objets repérés par deux variables dont le nombre de valeurs est précisé, au dénombrement de collections disposées en rectangle, afin de poursuivre l'étude entreprise.

Si on veut débuter le travail sur la détermination du produit de deux nombres entiers a et b, réponse à Q 1, la référence au tableau de a lignes et b colonnes permet de détacher le nombre produit du contexte des couples et des logos. Les remarques de l'enseignant sur les lignes ou les colonnes, (« *Sophie a toutes ses photos en lignes et Julien les siennes en colonnes ou vice versa* »), sont importantes et peuvent permettre de faire passer les élèves dans le cadre du calcul numérique. L'enseignant peut préciser que Sophie ou Julien peuvent ainsi savoir dans combien de photos ils apparaîtront et, en notant en face de chaque ligne (ou colonne) le nombre d'objet énumérés dans celle-ci, on peut peut-être utiliser ces dénombrements partiels pour calculer le nombre total d'objets de la collection.

Si l'on veut poursuivre ces deux études qui viennent d'être débutées, il peut être utile :

- de s'entraîner à la reconnaissance des situations pouvant donner lieu à un compte rendu multiplicatif, en proposant éventuellement des situations ne permettant pas un tel compte rendu (travail sur la question Q 2),

- que le maître fasse inscrire au tableau, lors de la restitution du travail des élèves par exemple, et pour chaque situation le permettant, la description du tableau à double entrée correspondant ; en particulier la caractérisation des lignes et des colonnes successives de la collection traitée, en mentionnant le nombre d'éléments dans les lignes et les colonnes, et le nombre d'éléments de la collection. Les élèves seront ensuite invités à travailler non plus sur la constitution des collections mais sur le matériel numérique ainsi relevé, afin d'élaborer une technique de calcul du cardinal de la collection (travail sur la question Q 1),
- que les élèves aient à rechercher le cardinal de collections pour lesquelles le dénombrement direct est impossible, car le nombre de valeurs pour chacune des deux variables est trop important : 18 garçons et 23 filles, par exemple. Dans un tel cas, la construction du tableau à double entrée devient fastidieuse. Ceci conduit les élèves à changer de stratégie pour aller vers la nécessité de ne prendre en compte que le nombre d'éléments de chaque ligne (ou de colonne) et le nombre de lignes (ou de colonnes) afin d'obtenir le nombre total d'éléments par addition réitérée ; cette démarche permettrait de motiver mathématiquement le travail de la question Q 1. A ce titre la première activité du livret élève : « *Piste de recherche " Une boîte de chocolat "* », aurait davantage acquis de pertinence didactique si un travail antérieure avait été conduit pour que le nombre « produit » soit quelque peu décontextalisé des situations qui ont permis sa rencontre.

Si l'enseignant débute sa leçon par la première activité proposée dans le fichier élève, intitulée « *Piste de recherche " Une boîte de chocolat "* »,, il n'est plus question d'élaborer une organisation praxéologique correspondant à la question Q 2. Ce que les auteurs appellent « *Construire le concept de produit* » se limitera à admettre que « *le nombre de chocolats peut s'écrire* 5×4 *ou* 4×5 » et que le dénombrement des cases d'un quadrillage ayant le même nombre de lignes et de colonnes permet de le trouver. La réponse à la question Q 1, sera donnée par le matériel mis à disposition : la technique pour calculer le produit $a \times b$ consiste à dessiner un quadrillage de a sur b et de dénombrer les cases de celui-ci. Aucune information sur la technique de dénombrement attendue n'est apparente. Est-ce directement ? Par un comptage des cases une à une ? Ou grâce à des additions réitérées, après avoir dénombré les cases dans une ligne ou une colonne ?…

I. 3. Quels enseignements tirer de ce travail d'analyse:

La séquence dont nous avons précédemment amorcé l'analyse illustre, nous semble-t-il, l'effort affirmé des auteurs pour « *conduire les enfants à élaborer les notions fondamentales comme outils pertinents pour résoudre des problèmes dans le domaine numérique* »[6], conformément aux documents d'application des programmes de 2002[7].

Dans cette perspective :

- les activités proposées par l'enseignant doivent être choisies et guidées de façon à organiser le passage des élèves du problème initial (portant sur une expérience matérielle), à un autre problème (portant sur une expérience numérique), induisant un changement de cadre, correspondant au passage du système étudié à son modèle mathématique,
- les problèmes traités doivent être considérés comme des exemples de problèmes que l'on apprend à reconnaître : on n'apprend pas à résoudre le problème des logos mais à reconnaître les problèmes du « même type » que celui-ci, autrement dit à accomplir des tâches d'un même type et non une seule tâche du type
- les mathématiques que ces activités sont censées produire doivent rester présentes en ligne de mire, d'un bout à l'autre des séquences qui leur sont consacrées ; ce qui suppose une analyse *a priori* ascendante et globale. De plus, pour chaque activité, une analyse à l'aide d'un questionnement bâti à l'aide d'interrogations du type des suivantes devraient servir au professeur de fil directeur auquel se raccrocher constamment : comment se résout ce problème, comment sa résolution permet-elle d'avancer l'étude entreprise ? La détermination précise et préalable de l'organisation praxéologique à construire ou, comme dans l'exemple que nous avons suivi, des organisations praxéologiques à construire et de leur articulation, est indispensable pour poser ces questions et y répondre,
- enfin, si les situations proposées ne permettent pas d'amener les élèves à se détacher du contexte du problème à résoudre, tout en identifiant la catégorie de problèmes auxquels il appartient, il s'agit au minimum, que l'enseignant les alerte sur le travail en cours et précise clairement, lors de moments d'institutionnalisation, où l'on en est dans l'étude engagée.

[6] Extrait du guide pédagogique, page 11.
[7] Documents d'application des programmes, Cycle 2 page 7 et Cycle 3 page 7, édition CNDP, juillet 2002.

Le professeur se trouve ainsi confronté à la **difficulté professionnelle, sans doute inédite jusqu'alors, de gérer l'utilisation de « problèmes pour apprendre », en particulier de problèmes sur lesquels s'appuie la « construction d'une nouvelle connaissance »**. Cette façon d'aborder le travail mathématique est suggérée par les instructions officielles de 2002. Nous allons évoquer, sans entrer dans le détail, l'étude d'autres thèmes, proposée dans la même collection ou dans d'autres collections, afin de montrer que la séquence précédente illustre un phénomène récurrent.

II. Deux séquences sur l'introduction de la division euclidienne :

II. 1. Dans la même collection :

Nous travaillons sur la séquence 138, extraite de l'ouvrage « Pour comprendre les mathématiques », CE2, édition Hachette, 2002, fichier élève et guide pédagogique.

*Voir documents de référence en **ANNEXE 2***

II. 1. a. Quels objets d'étude ?

La séquence est intitulée : *« Situations de distributions »*

Les objectifs annoncés sont : *« Reconnaître une situation de distribution euclidienne. Calculer empiriquement le quotient et le reste »*

Suivant le schéma de la séquence précédente, celle-ci débute par l'étude de deux questions interdépendantes:

- « comment reconnaître qu'une situation peut se résoudre avec une division euclidienne ? », Q' 2,
- « comment déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne d'un entier par un autre entier ? », Q' 1. Les auteurs parlent de « *calculer empiriquement le quotient et le reste* » : on peut donc imaginer que la détermination sera faite en s'appuyant sur l'expérience et l'observation.

II. 1. b. Activités proposées et questions posées par leur gestion :

Comme dans la séquence étudiée auparavant, le travail débute par la résolution d'un problème matériel : un problème de partage équitable, un exemple de problème qui peut se résoudre à l'aide d'une division euclidienne, intitulé « *Piste de recherche " Les nougats "* ». A ce niveau, dans la situation présente, les élèves ont à leur disposition toutes les connaissances ou le matériel nécessaires pour résoudre ce problème ; la tâche à accomplir n'est pas problématique et aucun apport nouveau ne s'impose pour répondre à la question posée. On peut s'interroger : à quoi cela sert-il de résoudre ce problème ? En quoi le poser permet-il de faire avancer la construction des deux organisations praxéologiques visées ?

En fin d'activité, les auteurs introduisent l'égalité de la division « $32 = (5 \times \ldots) + \ldots$ » et le vocabulaire *«diviseur, quotient et reste »*. Comment cette écriture se justifie-t-elle ? Quelle est sa fonction ? En quoi permet-elle de faire avancer l'enjeu de l'enseignement escompté ?

Pour que cette activité permette d'entrer dans la double étude poursuivie, il semble au moins nécessaire qu'un travail d'analyse de la situation proposée soit fait avec les élèves, afin de faire avancer la réponse à la question Q' 2, et aussi qu'un lien soit établi entre la technique utilisée par chaque élève pour résoudre le problème de nougats et le matériel numérique introduit dans le livret. L'expérience proposée doit produire cinq *tas identiques* de nougats, *les plus gros possible*. A chaque étape, ces tas grossissent d'une unité, et on peut mettre en correspondance les états successifs de l'organisation de la collection totale, éventuellement en visualisant l'expérience matérielle, et la ligne correspondante du tableau ; pour cela le maître peut noter au tableau une description rapide des différentes étapes de l'expérience matérielle au regard de leur compte rendu numérique, comme ci-dessous :

Organisation de la collection totale	**Compte rendu numérique**
5 tas identiques de 1 nougat et un autre tas de 27	se note $5 \times 1 + 27$
…	…
5 tas identiques de 6 nougats et un autre tas de 2	se note $5 \times 6 + 2$
On ne peut plus faire de tas plus gros	L'organisation totale se note $5 \times 6 + 2$
Résultat de l'expérience matérielle	**Résultat de l'expérience numérique**
6 est le nombre maximum de nougats que l'on peut mettre dans chacun des 5 tas et il en reste	6 est le plus grand nombre par lequel on peut multiplier 5 pour s'approcher

2	de 32 et $32 - 5 \times 6 = 2$

Dans la deuxième colonne d'un tel tableau apparaît une description numérique du résultat de l'expérience matérielle correspondante qui, quant à elle, est évoquée dans la première colonne.

Au cours de ce travail :

- le professeur doit être attentif à permettre un début de description des situations que l'on cherche à reconnaître : partage d'un tout en un nombre donné de tas identiques les plus gros possible,
- le professeur peut aussi saisir l'occasion de rendre visibles des éléments qui permettent de justifier la technique qui permet d'abord de compléter le tableau, puis d'établir ensuite l'égalité numérique de la fin d'activité ; en particulier pour les élèves qui n'ont pas utilisé de calculs multiplicatifs pour répondre aux questions posées, et pour lesquels elle peut sans doute rester bien mystérieuse. Le professeur fait ainsi passer les élèves d'un cadre matériel à un cadre numérique. Mais les écritures numériques utilisées successivement ne restent encore, néanmoins, que des comptes-rendus des réorganisations successives de la collection,
- pour que le résultat numérique final ($5 \times 6 + 2$) soit identifié par les élèves comme ayant un statut particulier – celui de l'écriture d'une division, autrement dit d'une opération qui à deux nombres, 32 et 5, en fait correspondre deux autres, 6 et 2 –, il est nécessaire de préciser sa spécificité par rapport aux résultats intermédiaires. Ainsi, 6 est le plus grand nombre par lequel on peut multiplier 5 pour s'approcher de 32, en s'appuyant par exemple pour cela sur le résultat de l'expérience matérielle – c'est le nombre maximum de nougats que l'on peut mettre dans chacun des 5 tas –, et s'appelle le quotient ; et la différence entre 5×6 et 32 est appelée le reste, car c'est ce qu'il reste après partage,
- pour que le résultat numérique apparaisse comme pouvant informer sur la question posée dans « la situation des nougats », le lien entre le quotient comme plus grand nombre par lequel on peut multiplier 5 pour s'approcher de 32, et le nombre maximum de nougats que l'on peut mettre dans chacun des 5 tas, ainsi que le lien entre le reste de la division et ce qu'il reste après partage, doivent être rendu visibles. Ces liens permettent d'envisager la division de deux entiers comme technique pour prévoir le

résultat d'un partage équitable. Pour justifier l'utilisation d'une telle technique, le recours à des situations où l'usage de techniques empiriques est fastidieux serait assurément souhaitable. On rencontre en ce point l'une des dimensions technologiques de la technique, qui a pour fonction de la justifier et la rendre compréhensible, et dont l'escamotage ne peut guère que rendre plus difficile l'apprentissage.

L'élaboration des techniques que la résolution de ce problème aura permis de faire émerger sous la conduite du professeur n'en est encore qu'au stade de l'ébauche et nécessite, pour un apprentissage effectif, d'être poursuivie. Un assortiment d'activités et d'exercices permet d'assurer l'accompagnement de ce moment didactique. Les savoir-faire à travailler sont essentiellement les suivants :

- reconnaissance d'une situation qui pourra se résoudre en cherchant le quotient et le reste d'une division (question Q' 2),
- recherche du quotient et du reste de la division d'un entier par un autre entier grâce à des multiplications successives (question Q' 1).

Les exercices proposés dans le livret élève peuvent, à cet effet, être utilisés après une indispensable analyse préalable permettant de préciser quels objectifs d'entraînement ils autorisent la réalisation.

II. 2. Dans une autre collection :

Nous nous intéressons à la séquence des pages 96 et 97 de l'ouvrage « J'apprends les maths », CE2, édition Retz, 2001.

Voir document de référence en ANNEXE 3.

Dans le livre du maître correspondant, page 132, on relève l'information suivante : « *L'enseignant annonce aux élèves qu'ils vont apprendre aujourd'hui une nouvelle opération. …On va calculer 163 divisé par 25.* »

Dans ce cas, le type de tâches que l'on apprend à accomplir appartient donc clairement au domaine numérique : « chercher combien de fois *b* dans *a* » ou « diviser *a* par *b* ». Dans cette proposition d'ouvrage, on s'intéresse d'entrée de jeu à la réponse à la question Q' 1.

La technique du calcul du quotient et du reste dans la division euclidienne de deux entiers se construit en s'appuyant sur une situation de partage en éléments identiques ; mais celle-ci n'est qu'un outil technologique permettant d'élaborer la technique de calcul du quotient et du reste. La technique numérique de recherche des multiples du quotient qui sont inférieurs au dividende, est immédiatement utilisée. Elle est facilitée par le choix de quotients égaux à 25, 10 ou 5, et le vocabulaire utilisé : « *On cherche combien de fois la petite longueur est contenue dans la grande* » soit, «*combien de fois il y a 25 mm dans 163 mm* ». La technique de partage grâce au compas a déjà été travaillée dans des leçons précédentes. Elle est très vite disqualifiée et, en cours de séance, le recours au compas n'est utilisé que pour valider les résultats numériques ; la situation de référence assure le rôle d'échafaudage qui permet la construction visée. Elle est abandonnée lorsque la construction est achevée.

En revanche dans cette séquence, la question Q' 2 n'est pas travaillée explicitement, et il faudra chercher dans d'autres séquences l'étude de classes de problèmes auxquels la modélisation par la division euclidienne permet de répondre ; en justifiant alors le recours à cet outil.

II. 3. Ce que nous montrent les fragments d'analyses de ces deux séquences :

Dans ces séquences, comme dans la séquence sur l'introduction de la multiplication, l'enseignant doit **organiser le passage des élèves du problème initial,** portant sur une expérience matérielle, **à un autre problème**, portant quant à lui sur une expérience numérique. Il s'agit donc d'un changement de cadre correspondant au **passage du système étudié à son modèle mathématique.**

L'organisation didactique qui permet de mettre en place un tel changement de cadre doit amener les élèves à **se détacher du contexte du problème initial à résoudre,** tout en s'appuyant sur le travail fait dans ce contexte pour produire des éléments technologiques permettant l'élaboration des techniques numériques visées. Elle doit aussi permettre d'**identifier la catégorie de problèmes auxquels appartient le problème initial** afin de **motiver la construction de praxéologies propres au modèle et qui le constituent.**

B. Un phénomène récurrent

Dans le cadre de l'élaboration d'un contenu de formation mathématique des professeurs d'école, les analyses qui ont pu être conduites à partir d'extraits d'ouvrages scolaires de

collections variées, et sur l'ensemble des thèmes abordés à l'école primaire, font apparaître des similitudes importantes quant aux schémas d'étude proposés.
Donnons rapidement un dernier exemple : il porte sur l'introduction des fractions. Que l'introduction soit faite :

- à partir de la construction d'une nouvelle unité de mesure, comme le préconise la séquence 22, extraite de l'ouvrage « Place aux maths ! », CM1, éditions Bordas, 2004, ANNEXE 4, ou,
- à partir de l'évocation d'une nouvelle opération, « la division où on partage le reste », comme le préconise la séquence de la page 58, extraite de l'ouvrage « J'apprends les maths », CE2, édition Retz, 2001, ANNEXE 5,

le détachement du contexte ayant donné lieu à des comptes rendus sous forme de fractions reste à assurer afin que ces écritures deviennent des nombres ; c'est-à-dire des « êtres mathématiques » que l'on peut comparer, additionner, soustraire, …
Dans le premier cas, même si Sami affirme que des symboles comme ¾ permettent de « mesurer la longueur des sauts des enfants », ces symboles ne sont, à ce point de l'étude, que des comptes rendus de partages d'un segment à l'aide d'un guide âne, élaboré lors de la leçon précédente, et permettant de repérer et garder en mémoire la position d'un point sur ce segment. Un travail didactique reste à mener pour que ces ostensifs deviennent des mesures.

Dans le second cas, l'écriture 7/3 = 2 + 1/3 est aussi le compte rendu d'une expérience de partage équitable où le reste est, à son tour, partagé. Si, dans cette séquence un début de travail sur l'étude de la question Q″ 2, « comment déterminer qu'une situation peut donner lieu à un compte rendu avec une division fraction ? », est amorcé, il faudra attendre que le symbole a/b soit identifié à « a fois 1/b », quelques leçons plus loin, pour pouvoir utiliser les expériences matérielles qui ont été faites, comme des éléments technologiques pour construire l'arithmétique des rationnels.

Dans les différentes organisations didactiques évoquées plus haut :

- un problème que les élèves savent en général résoudre dans le cadre matériel où il est posé leur est proposé mais il pourrait aussi se résoudre, après modélisation numérique, en ayant recours à l'opération ou aux nouveaux nombres dont l'étude est visée,

- les manipulations matérielles conduisant à la résolution du problème permettent l'introduction d'un **compte rendu d'activité utilisant des nombres entiers et dont l'écriture est la même que celle de l'opération ou des nouveaux nombres dont l'étude est visée**.
- un certain travail doit être fait pour **justifier la pertinence de l'usage d'un certain type de compte rendu numérique pour un certain type de problème** : quels sont les caractères spécifiques des situations pouvant donner lieu à un tel compte rendu ? C'est l'objet des réponses à des questions de type Q 2,
- un certain travail doit être fait pour **détacher ces ostensifs du contexte qui a permis leur émergence et débuter la construction d'une organisation praxéologique dans le cadre numérique** ? C'est l'objet des réponses à des questions du type Q 1.

Dans la progression proposée par N. et G. Brousseau (1987), pour la construction des décimaux, le maître annonce explicitement le passage de l'expérience matérielle – en ce cas la reconnaissance de l'épaisseur de feuilles de papiers – à des expériences numériques. Il annonce, page 20 de la brochure, « *8/100, 9/45, … sont-ils des nombres ? Ce que nous avons fabriqué pour mesurer des épaisseurs est-ce que c'est des nombres ?* », et plus loin : « *pour décider si ce sont des nombres, il faut essayer de faire des opérations, par exemple des additions, proposez m'en* ». Dans un premier temps, les élèves accumulent les expériences matérielles leur permettant de trouver la somme et la différence de deux fractions, ainsi que le produit et la division par un entier ; tout ceci dans le cadre où les fractions représentent des épaisseurs de feuilles de papier, et sans qu' « *aucune technique dans le cas de fractions quelconques ne soit encore formulée* ». Ces fractions serviront ensuite pour mesurer différents types de grandeurs et résoudre des problèmes de manipulation de grandeurs : comparaison, égalité, évaluation de réunions… Au cours des activités proposées durant cette longue progression, le maître fait émerger les règles de comparaison et d'opérations sur les fractions. Le passage du cadre matériel au cadre numérique est de ce fait géré par le maître qui enseigne, en collaboration avec les élèves qui affrontent les situations choisies par le maître.

Les analyses didactiques que nous avons menées sur les manuels scolaires et les livres du maître font apparaître le caractère lacunaire des éléments mis à disposition des professeurs d'école par les auteurs d'ouvrages pour la gestion des séquences qu'ils proposent. Ce n'est pas l'essentiel de notre propos : nous le répétons nous ne visons pas l'évaluation du travail des auteurs qui se situe dans un champ de contraintes éditoriales et de culture didactique qui n'est pas le nôtre.

Nous souhaitons montrer que **l'utilisation des outils que la didactique des mathématiques** met à disposition des enseignants permet d'analyser les matériaux qu'ils ont à leur disposition. Cette analyse nous apparaît incontournable **pour orienter les choix d'enseignement des mathématiques**, conjointement avec d'autres considérations : connaissance de ses élèves, organisation des classes en cours unique ou non, possibilités offertes ou refusées par la ou les écoles dans lesquelles on exerce, choix personnels, etc.

Une des dimensions attachées au métier d'enseignant réside en ce qu'il engage celui qui s'y livre dans des **tâches de conception préalable de l'enseignement –** les préparations **–** dispensé aux élèves ; en cela il se distingue des métiers d'exécution. Pour ces tâches de conception, les manuels scolaires constituent l'un des types d'outils, parmi d'autres, mis à disposition des enseignants et très largement utilisés : citons aussi les programmes et documents d'accompagnement ou d'application, les revues à destination des enseignants de l'école élémentaire, les ouvrages plus théoriques qu'ils soient de mathématiques ou de didactique des mathématiques, etc. **Disposer, en tant que savoir professionnel pour l'exercice du métier, de connaissances mathématiques et didactiques, permet un usage réfléchi et des choix raisonnés parmi les propositions d'enseignement rencontrées** au gré des lectures ; et notamment des lectures de manuels scolaires. Le problème de la définition du cadre institutionnel permettant l'acquisition, en formation initiale et/ou continue de ce type de connaissances, reste posé.

Bibliographie

BLANC J.-P., BRAMAND P., DEBU P., GELY J., PEYNICHOU D., VARGAS A. (2002) *Pour comprendre les mathématiques CE1,* Paris : Editions Hachette.

BLANC J.-P., BRAMAND P., DEBU P., GELY J., PEYNICHOU D., VARGAS A. (2002) *Pour comprendre les mathématiques CE2,* Paris : Editions Hachette.

BROUSSEAU N. et G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence,* Bordeaux : Edition IREM de Bordeaux.

BRISSIAUD R., CLERC P., OUZOULIAS A. (2001) *J'apprends les maths CE2*, Paris : Editions Retz.

BRISSIAUD R., CLERC P., OUZOULIAS A. (2001) *J'apprends les maths CM1*, Paris : Editions Retz.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* , Vol. 19, n° 2, pp. 221-266.

CHEVALLARD Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, in *Actes de l'Université d'été de La Rochelle,* pp. 89- 118, édition coordonnée par NOIRFALISE R., Aubière : Edition IREM de Clermont Ferrand.

CIRADE G. (2006) *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*, Thèse de doctorat, Université d'Aix Marseille I.

HELAYEL J., BOUZY J. P., DEGRET P., DELUCHI-JOUBERT M. C., FAURE A. et B., FOURNIE C., TRESALLET E. (2002) *Place aux maths ! CM1,* Paris : Editions Bordas.

LEBEGUE H. (1956) *Sur la mesure des longueurs*, Paris : Editions Gauthier-Villars.

MATHERON Y. et NOIRFALISE A. (2008) *Formation initiale et continue des professeurs d'école en Mathématiques,* ouvrage à paraître.

MEN (2002) Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle 2 et cycle 3, Scéren CNDP.