COMMENT EXPLOITER LES PROBLEMES DE PAVAGES DU PLAN POUR LA FORMATION DES PE ET PLC EN GEOMETRIE ?

Jean-Claude RAUSCHER
Maître de conférence (retraité)
Groupe Apprentissages en Contextes Didactiques, IUFM d'Alsace
jc.rauscher@wanadoo.fr

Claude MAURIN
PIUFM, IUFM Aix-Marseille, site d'Avignon
Maurinsdesmaures@wanadoo.fr

Résumé
Que ce soit pour des élèves ou des professeurs en formation, la question de l'élaboration de pavages du plan à l'aide de polygones (réguliers ou pas) débouche rapidement sur des problèmes qui engagent les connaissances en géométrie et permettent de réfléchir aux modes de validation dans ce domaine. A partir de quelques uns de ces problèmes utilisés à l'origine par Christine De Block Dock (1994) dans une expérimentation avec des élèves de douze ans, l'atelier visait à procéder à l'analyse des enjeux de la formation des enseignants en géométrie que ces situations permettent d'aborder en fonction des publics visés (PE1, PE2, PLC, formation initiale ou continue…). Au préalable les participants ont amorcé la résolution de ces problèmes afin d'en reconnaître les contours mathématiques. Comme promis aux participants, le compte rendu de cet atelier est complété par la présentation d'une activité présentée par Claude Maurin à des PE2 et destinée à des élèves de cycle 3 (« Les triangles jumeaux ») et par la description des modalités utilisées par Jean-Claude Rauscher avec des étudiants (licence ou PE1) se destinant à l'enseignement et par les observations qui ont pu être faites dans ce cadre.

Genèse de la proposition d'atelier et contenu du compte rendu (Jean-Claude Rauscher).

La présentation et l'analyse d'un enseignement expérimental qui a été conçu et mis en œuvre à Bruxelles avec des élèves de douze ans (De Blok Dock, 1994) m'ont inspiré dans la conception et la réalisation d'une formation proposée principalement (1998 à 2007) dans le cadre d'un cours avec des étudiants d'une licence pluridisciplinaire, mais aussi avec des PE1 (Professeur des Ecoles, première année) dans le cadre de la préparation du concours CERPE. Les problèmes de création de pavages du plan à l'aide de polygones qui sont au cœur de cet enseignement expérimental sont proposés aux étudiants. La résolution de ces problèmes engage rapidement les connaissances en géométrie et permet de réfléchir aux modes de validation dans ce domaine. En fait il s'agit d'une situation d'homologie (au sens d'Houdement-Kuzniak, 1993) qui, au-delà des contenus mathématiques en jeu, permet d'aborder avec les étudiants des questions d'enseignement et d'apprentissage en géométrie à l'école et au collège. L'activité mathématique que déploient alors les étudiants leur permet non seulement de s'interroger sur leurs propres connaissances et modes de validation mais aussi de comprendre les modalités de pensée d'élèves analysées finement par Christine de Block Dock.

Après une présentation de cette formation dans le cadre d'un atelier mené avec mon collègue Claude Maurin au séminaire de formation des nouveaux formateurs organisé par la COPIRELEM à Istres en novembre 2007, nous avons à nouveau proposé un atelier au colloque de Bombannes 2008. Mais Claude m'a proposé d'en redéfinir entièrement le canevas (partie I) afin de laisser plus d'initiatives aux participants comme il se doit dans le cadre d'un atelier. Les problèmes de pavages considérés constituaient en effet un support riche pour permettre aux participants de développer et de partager leurs propres réflexions et suggestions quant à son intérêt pour la formation des enseignants en mathématiques, PE (Professeur des Ecoles) et PLC (Professeur des Lycées et Collèges) confondus. Le résultat est très riche en apports que nous essayerons de synthétiser et de restituer au mieux dans ce compte rendu (partie II). Il sera complété par la description d'une activité conçue par Claude Maurin prévue pour des élèves de cycle 3 et présentée à des stagiaires PE2, « Les triangles jumeaux », inspirée par les problèmes de pavages du plan (partie III). Par ailleurs comme cela était un peu prévisible, le temps a manqué pour communiquer aux participants mon expérience de formation avec des étudiants à l'ULP et l'IUFM de Strasbourg, ce qui était pourtant prévu dans la proposition d'atelier. Ce manque sera réparé ici dans la partie IV. Nous finirons enfin ce compte rendu en ouvrant vers quelques questions de formation (Partie V).

Le compte rendu de l'atelier comporte donc successivement *:*
- I) Le canevas de l'atelier
- II) Le compte rendu du travail des groupes
- III) Une proposition d'activité en cycle 3 : « Les triangles jumeaux » (C Maurin)
- IV) La présentation de la formation proposée à des étudiants de licence pluridisciplinaire à l'ULP de Strasbourg et les principales observations liées (JC Rauscher)
- V) Une conclusion qui ouvre sur quelques questions de formation.

I – LE CANEVAS DE L'ATELIER

1er temps : présentation de l'objet de l'atelier.

2ème temps : présentation des problèmes de pavage et du matériel.

Présentation du matériel mis à disposition :

Pour les problèmes 1 et 2, des jeux de polygones réguliers en carton de 3, 4, 5, 6 et 8 côtés. Les côtés des différents polygones ont même mesure de façon à permettre des pavages en juxtaposant les côtés. Pour le problème 3, un jeu de triangles en carton est à disposition. Les triangles sont isométriques mais quelconques et de façon semblable un jeu correspondant à un quadrilatère quelconque est aussi à disposition.

Les problèmes proposés :

Problème 1. *Donner la liste de tous les polygones réguliers qui permettent de paver le plan (il s'agit de trouver tous les pavages réguliers possibles, c'est-à-dire ne*

comportant qu'une seule sorte de polygone et en ne se limitant pas aux exemples de polygones réguliers pour lesquels ils disposent de gabarits en carton).
Problème 2. *Pavages semi-réguliers (constitués de plusieurs sortes de polygones réguliers, tous les nœuds étant entourés de manière identique) : trouver des exemples de pavages semi-réguliers ; un pavage constitué autour de ses nœuds par un octogone, un hexagone et un pentagone est-il possible ?*
Problème 3. *Paver avec des polygones non-réguliers isométriques : est-ce possible ? Prospecter. Formuler des conditions. On pourra rapidement se centrer sur le cas des quadrilatères quelconques, puis des triangles. Autre question qui surgit lorsqu'on a répondu à la précédente : de combien de façons différentes peut-on paver le plan avec un triangle quelconque ?*

3ème temps : temps de résolution en petits groupes des problèmes puis mise en commun et synthèse des démarches mathématiques qui permettent d'y répondre.

4ème temps : les groupes constitués autour des trois questions précédentes se remettent au travail sur les questions orientées vers la formation : *avec quel public envisagez-vous de pouvoir utiliser ces situations ? avec quels objectifs ? de quelles manières ?*

5ème temps : amorce d'une synthèse menée par les animateurs (à propos des questions orientées vers la formation) prenant en compte : les propositions des groupes ; les apports théoriques (nature des géométries en jeu, appréhension des modes de pensée des élèves et des étudiants) ; les expériences des animateurs. *Remarque : ce dernier temps se réalisera en fait essentiellement dans le compte rendu présent destiné aux actes du colloque.*

II –COMPTE RENDU DU TRAVAIL DES GROUPES

II – 1 Approches des contours mathématiques des problèmes posés.

Une remarque préalable : il est clair que les problèmes de pavages soulèvent des développements mathématiques théoriques susceptibles de passionner les participants indépendamment de toute considération de leur utilisation dans le cadre des formations initiales ou continues à l'IUFM. Ces questions justifieraient à elles seules peut-être plus qu'une séance unique de travail. Mais le temps consacré à cet atelier étant assez court pour des questions d'organisation du planning du colloque, nous n'avons pu leur consacrer qu'un moment de travail assez bref. Ce moment était destiné surtout à prendre ou reprendre conscience des contours mathématiques de ces problèmes de pavage avant de s'attaquer à l'exploration et à l'analyse du potentiel de formation qu'ils recèlent. Pour explorer les trois questions proposées, les groupes ont commencé par quelques essais à l'aide du matériel qui était à leur disposition (polygones en carton, possibilité de dessiner). Dans les trois cas, ce travail de recherche a été guidé et s'est ensuite rapidement formalisé par les connaissances mathématiques des participants. Comme on le verra, certaines questions posées dans le cadre de ces problèmes ont été complètement résolues alors que pour d'autres, le temps a manqué pour dépasser un stade exploratoire (néanmoins avancé).

II – 1.1 *Le problème de l'existence de pavages réguliers (problème 1)*

Le fait que l'on puisse paver le plan avec un triangle équilatéral, un carré et un hexagone ne fait pas débat. La question est de savoir si on peut réaliser un pavage avec un autre polygone régulier. Pour répondre à cette question, les participants ont présenté à peu de choses près, un raisonnement qui déplace le problème dans un cadre numérique prenant en compte les contraintes géométriques :
Pour qu'un pavage soit possible, il faut pouvoir placer un nombre entier de fois un angle au sommet de ce polygone. Or la formule qui donne la valeur d'un angle d'un polygone régulier de n côtés (rapidement retrouvée évidemment par les formateurs) est $(n-2)\pi/n$. Autour d'un nœud, il faut donc pouvoir juxtaposer un nombre entier de fois un tel angle pour couvrir exactement 2π radians. $2n/(n-2)$ doit donc être un nombre entier, qui correspond en l'occurrence au nombre de polygones réguliers de n côtés placés autour d'un nœud. Comme $(2n/n-2) = 2 + 4/(n - 2)$, cela n'est possible, en dehors du cas $n = 0$, qu'avec $n = 3$, $n = 4$ et $n = 6$ qui sont les seules valeurs de n permettant à $(n - 2)$ d'être un diviseur de 4 : au-delà de $n =6$, $2n/(n-2)$ reste supérieur à 2, mais inférieur à 3.

II – 1.2 *Le problème de la création de pavages semi-réguliers (problème 2)*

Au-delà du pavage 8-8-4 sur lequel on tombe quasi immédiatement, le problème se prête à une exploration des combinaisons possibles des polygones réguliers : les essais utilisant les polygones en carton furent naturellement nombreux. La question de l'existence d'un pavage juxtaposant un hexagone, un pentagone et un octogone réguliers fut immédiatement résolue par le calcul de la somme des angles respectifs. Mais au-delà de ces exemples ou contre-exemples trouvés par manipulations s'ouvre aussi la question d'une recherche plus systématique et finalement, là aussi, exhaustive des pavages semi-réguliers. Cette question posée par les participants a été abordée dans les groupes par la transposition de la recherche des combinaisons possibles dans le cadre arithmétique en mettant le problème en équations du type $n2\pi/6 + m2\pi/4 + p2\pi/3 = 2\pi$ ou plus systématiquement en posant la question de la juxtaposition de k polygones autour d'un nœud sous la forme d'une équation générale : Σ *(de i=1 à k) des* $\alpha_i = 2\pi$, où α_i est la mesure en radian de l'angle du polygone i. En remplaçant α_i par sa valeur en fonction du nombre n_i de côtés du polygone i, s'esquisse alors une recherche dans le cadre arithmétique, recherche qui n'a pas été menée à son terme lors de l'atelier. En fait en allant jusqu'au bout de cette démarche, il s'avère qu'il existe exactement 8 pavages semi-réguliers (théorème de Kepler en 1619 à propos des pavages appelés « archimédiens »). Une indication et une référence pour le lecteur à ce sujet : dans ses diverses prospections de problèmes innovants, le groupe EXPRIME (2008) a eu l'occasion de développer une démonstration de ce théorème à partir du problème dit des « fractions égyptiennes ».

II – 1.3 *Le problème des pavages à partir d'un polygone non-régulier (problème 3)*

La recherche d'exemples qui cette fois ci se manifestait par des croquis fut abondante. Elle s'est aussi enrichie ici par la considération du groupe des isométries du plan. En particulier ce fut le cas pour la recherche des différentes façons de paver le plan avec un triangle quelconque. Mais là aussi, le temps disponible n'a pas permis de dépasser le stade de l'amorce d'une exploration.

II – 2 Analyse du potentiel de formation que recèlent les problèmes posés.

Dans la phase précédente on a pris la mesure de la richesse des questions mathématiques que suscitent les problèmes de pavages considérés. Dans la phase suivante, il s'agissait de considérer le potentiel de formation que recèle ce support. Quelles connaissances permet-il de développer chez les enseignants et de quelles manières ? Pour répondre à ces questions les participants ont été amenés à distinguer les différents publics auxquels les formations s'adressent (professeurs d'école ou de lycée-collège) et les différents moments de formation jalonnant leurs formations (formation initiale ou continue). Pour rendre compte des nombreuses propositions (qui figureront en italique) et des discussions animées qu'elles suscitèrent, nous indiquerons ces précisions mais proposons essentiellement un classement qui distingue les différents objets de développement que l'on peut considérer dans une formation professionnelle d'enseignants de mathématiques :

- connaissance des contenus mathématiques
- connaissance des démarches en mathématique
- connaissance des enjeux et des obstacles dans les apprentissages chez les élèves
- connaissances permettant d'élaborer des modalités d'enseignement en adéquation avec les apprentissages visés.

Ces points esquissent en gros une gradation qui part des conditions au départ nécessaires (mais non suffisantes) pour enseigner les mathématiques pour préciser ensuite les conditions d'une formation professionnelle plus complète.

II – 2.1 *Connaissances des contenus mathématiques.*

Les étudiants PE qui viennent de différentes filières universitaires et qui se destinent au professorat d'école ont tout particulièrement besoin de se réapproprier (ou de découvrir) certains contenus mathématiques. A un degré différent, il en est de même pour les étudiants PLC qui par manque de pratiques récentes ont parfois oublié quelques rudiments, en géométrie en particulier. Pour cela les problèmes de pavages sont aux yeux des participants une occasion propice pour *« revoir divers objets mathématiques usuels ».* Quelques aspects plus précis sont brièvement évoqués sur les transparents écrits par les participants : *« propriétés des polygones » « angles » « notion de plan » « divers quadrilatères » « réactiver les transformations » « mobilisation de certains théorèmes en géométrie ».* La notion d'aire est aussi évoquée parce que le matériel considéré peut donner lieu à des problèmes basés sur le « *théorème de Jonas Bolyai, 1830 : soit A et B deux polygones de même aire ; alors A et B sont équivalent par découpage et recollement ».* On peut consulter à ce sujet un article de JP Friedelmeyer (2008).

II – 2.2 *Connaissances des démarches en mathématique.*

Si les participants n'ont pas davantage détaillé les contenus mathématiques en jeu dans les problèmes de pavages, ils ont en revanche surtout mis en avant le fait que ces problèmes s'appuyant sur des gabarits de polygones en carton permettaient de s'interroger sur la nature des mathématiques : *«Démarche expérimentale en math : qu'est-ce que faire des maths ? » ; « Proposition pour les licences pluridisciplinaires : sujet de mémoire, laisser se poser des questions à partir du matériel. Avez vous fait des maths en vous posant ces questions ? »* Il est alors souligné que ce support permet d'appréhender avec les formés des aspects importants de l'activité mathématique que nous classerons en trois points comme suit :

- la nature des validations :

Ce support met en jeu un *« aller-retour entre monde physique et mathématique »* et pose la question de *« la place de la manipulation ».* *« Les gestes physiques et intellectuels deviennent de plus en plus proches »* et dans le cadre d'une formation initiale de PE non expert en mathématique ce jeu fait ainsi *« comprendre le rôle de la démonstration avec sa force de conviction qui permet de valider, d'anticiper, qui permet d'éviter le retour à l'expérience ».* Il est souligné à partir d'observations en formation que la question de la place de la manipulation dans les procédures de validation se pose peut être différemment dans le cadre de PLC de mathématiques : *« Pourquoi les PLC ne manipulent pas : refus, mépris pour l'expérimental, reniement de leur connaissance ? Alors que la manipulation va donner des pistes pour la démonstration et qu'on arrive ainsi à réconcilier expérimental et démonstration ».* Il y a alors l'occasion de mettre en lumière ce qui se joue dans une géométrie experte entre *« dessin et figure ».* Dans un cas comme dans l'autre (PE ou PLC) le support permet ainsi de mettre en évidence un cheminement qui mène de *« l'expérimentation vers la preuve ».* Ce cheminement pour les PE est plus précisément décrit par les participants : devant les limites de leurs explorations, les étudiants ou stagiaires sont acculés à passer d'un *« ce n'est pas possible car je n'ai pas réussi »* à un *« ce n'est pas parce que je n'ai pas réussi que ce n'est pas possible »* ou encore recourir à l'approche mathématique, non familière au départ, de chercher une *« méthode pour montrer que ce n'est pas possible de… ».*
Un tel cheminement est aussi envisageable dans le cadre de la formation continue du premier degré : *« Une question à poser serait : avec quel type de quadrilatères peut-on paver le plan ? Cela permet de revisiter les quadrilatères et favorise un aller-retour constant entre le monde physique et le monde mathématique, entre le comment et le pourquoi. En FC le parcours part des carrés puis se particularisera avec les rectangles, les parallélogrammes, les trapèzes, avant d'assumer le saut vers les quadrilatères quelconques (les certitudes s'effaceront) les gestes physiques et intellectuels de plus en plus proches, le comment est associé au pourquoi (somme des angles = 360°). »*

- la logique :

En concomitance avec la question des sources de validation et grâce encore à la dimension expérimentale des activités, les problèmes de pavages permettent de centrer l'attention sur la logique en œuvre dans les raisonnements et la logique présidant aux classements des objets en mathématiques. Par l'expérimentation les étudiants effectuent une *« exploration des possibles »* qui ouvre la voie à la recherche d'exemples et de contre-exemples ainsi qu'à *« la formulation de conditions »* dont il faudra examiner le statut : *« nécessité ou… ».* D'autre part, dans la recherche des possibilités de paver le plan avec des quadrilatères par exemple, les étudiants peuvent procéder à un *« balayage des quadrilatères particuliers avec abandon successif de propriétés ».*

- l'aspect heuristique :

Ce qui transparaît dans toute l'analyse du potentiel de formation du support considéré est que toutes ces découvertes et ces cheminements se font grâce à la dimension heuristique qui sous-tend les activités. En effet, cette dimension est constamment soulignée à travers les mots comme *« balayage » « exploration » « expérimentation » « force de conviction » « validation ».* Cette dimension est bien sûr un moyen qui permet le développement des connaissances mais elle est aussi évoquée comme un aspect essentiel du travail en mathématique en offrant potentiellement aux étudiants *« la joie intellectuelle d'avoir trouvé quelque chose ».*

II – 2.3 *Connaissance des enjeux d'apprentissages chez les élèves.*

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré le développement des connaissances des étudiants eux mêmes, développement qui est une première condition nécessaire pour enseigner les mathématiques. Maintenant, nous allons envisager le support de formation du point de vue de son potentiel de sensibilisation aux apprentissages en jeu chez les élèves. Une grande partie des éléments qu'on peut relever à ce sujet ont déjà été cités précédemment : les apprentissages que font les étudiants sont souvent des apprentissages auxquels seront confrontés les élèves. Ils ont souvent été évoqués par les participants comme faisant partie des apprentissages des élèves à pointer avec les stagiaires PE2 ou PLC2. Il en va ainsi de l'approche des objets usuels en géométrie ou de notions concernant les grandeurs (aire) mais aussi de l'initiation aux modes de validations, aux démarches de modélisation et à la logique.
Il a en outre été souligné par les participants que *« l'activité qui consiste à paver le plan avec des triangles en carton puis de faire un dessin de ce pavage (prolonger les lignes, repérer les alignements) est une activité de modélisation »*. On peut à ce sujet diriger le lecteur vers un article de Grand N (Duval & Gaudin, 2005) qui fait état de l'importance de prendre en compte des apprentissages sur l'appréhension visuelle des figures en géométrie (avec des jeux entre les surfaces (d2), les lignes (d1) et les points (d0)).

II – 2.4 *Connaissances permettant d'élaborer des modalités d'enseignement en adéquation avec les apprentissages visés.*

Après nous être centrés sur les connaissances des apprentissages en jeu chez les élèves, nous en venons maintenant au potentiel de sensibilisation aux questions d'enseignement qu'offre le support de formation considéré. Ces questions sont autant d'outils destinés à servir aux enseignants ou futurs enseignants pour élaborer leur travail avec les élèves. La revue de ces questions est complétée par plusieurs suggestions d'activités à proposer aux élèves en adéquation avec les apprentissages repérés précédemment.

Une première question est celle des démarches d'apprentissage induites par les situations qu'on propose aux élèves. Ici les étudiants sont confrontés à la résolution de problèmes qui leur permet de développer des connaissances. Les étudiants peuvent alors comprendre que ce genre de situation qu'ils ont vécu peut se transférer aux élèves. En l'occurrence les participants ont souligné que les PE2 seraient amenés à analyser la *« part de la situation qui serait transférable en classe ».* En particulier dans ces situations l'attention peut être portée sur *« les ruptures et déstabilisations (passage des polygones particuliers aux polygones quelconques) »* qu'elles provoquent et qui sont des moteurs pour faire avancer le travail des élèves.

Dans ce cadre la question de *« l'importance du rôle de la manipulation »* dans les activités des élèves paraît abordable dans les formations pour dépasser les conceptions naïves à ce sujet. Rappelons, qu'il a déjà été souligné à partir d'observations en formation que la question de la place de la manipulation dans les procédures de validation se pose peut être différemment dans le cadre des PE2 qui auraient tendance à faire une confiance aveugle à la manipulation et les PLC de mathématique qui au contraire auraient tendance à la brider.

En relation avec les points précédents l'organisation du travail de la classe peut-être posée *: « Avec des PE2 ou des PLC2 c'est l'occasion d'aborder la question de l'intérêt du travail en groupes ».*

Une autre question qui a été évoquée est la question du choix du matériel : matériel découpé par les élèves eux-mêmes (ou étudiants eux-mêmes), matériel construit par les élèves eux-mêmes (ou étudiants eux-mêmes), matériel prédécoupé par les formateurs, polydrons en plastique, ou logiciel de géométrie dynamique ? On peut alors sensibiliser les stagiaires au fait que les questions qui surgiront de la situation varieront en fonction du matériel proposé. *« Avec les cartons découpés qui ne s'ajustent pas bien ou les polydrons qui ne s'emboîtent pas bien est-ce que cela signifie qu'on ne peut pas faire un pavage ? »* Ou encore : *« Avec un logiciel de géométrie tel que « apprenti-géomètre » de Nicolas Rouche certaines questions risquent d'être tuées : par exemple le logiciel ne permettra pas de juxtaposer en un point un hexagone, un octogone et un pentagone réguliers. Tout dépend de la question qu'on pose pour aller de l'expérimentation vers la preuve. »*

Les pavages du plan paraissent aussi être une occasion d'évoquer l'aspect multidisciplinaire que peuvent revêtir les activités proposées aux élèves : *« En FC 1er degré : lien avec les arts plastiques, frises du type Escher».* Mais à part cet aspect, remarquons que ni la notion d'interdisciplinarité (activités mathématiques permettant d'étayer les apprentissages dans d'autres disciplines comme en français par exemple) ni la notion de transdisciplinarité (apprentissages qui seraient généraux) n'ont été évoquées par cet atelier qui, certainement sans les ignorer, est resté centré sur la question de l'enseignement des mathématiques.

En relation avec ces connaissances relatives aux pratiques d'enseignement et avec le repérage des enjeux d'apprentissages, les participants à l'atelier ont eu l'occasion d'évoquer quelques activités pour les élèves qu'on peut proposer selon le cas, dans le cadre de formations PE2, PLC2 ou en FC. Dans le paragraphe suivant nous en faisons le tour, qui sera prolongé par la partie III concernant *« les triangles jumeaux »* proposée par Claude Maurin.

II – 2.5 *Suggestions d'activités à proposer aux élèves.*

La plupart des problèmes de pavage proposés au départ aux participants pour qu'ils en analysent le potentiel de formation, sont bien sûr transférables, selon les cas, à l'école ou au collège. Rappelons-en deux exemples formulés par les participants :

- Au collège, le problème qui consiste à examiner la possibilité de réaliser un pavage semi-régulier avec des hexagones, des octogones et des pentagones réguliers *« oblige à dépasser la manipulation »* et débouche avec les élèves sur la recherche d'une démonstration.
- *« L'activité qui consiste à paver le plan avec des triangles en carton puis de faire un dessin de ce pavage (prolonger les lignes, repérer les alignements) est une activité de modélisation »* qu'on peut proposer à l'école primaire. Rappelons l'article déjà signalé de Duval & Gaudin, (2005) : il propose des activités que l'on peut développer avec les élèves à ce propos.

Mais le cadre initial proposé a aussi généré chez les participants de nouvelles idées d'activités. En voici trois exemples.

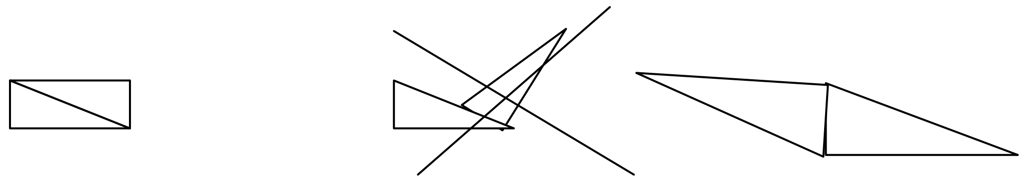
- Premier exemple. Un groupe de participants s'adressant virtuellement à des PE2 a cherché à voir comment ces stagiaires pourraient transposer, au niveau des élèves, le problème complexe de la recherche des combinaisons possibles pour juxtaposer des angles autour d'un nœud pour constituer un pavage semi-régulier *: « Cycle 2 : problèmes du type comment décomposer un nombre en somme d'entiers. Comment faire 28€ avec des pièces de 1€, de 2€ et des billets de 5€ ? ».* Ils voient dans ce problème l'analogie entre les deux situations : *« C'est une résolution de problème qui met en jeu les mathématiques et qui amène une démarche de modélisation »*

- Deuxième exemple. Des activités de recomposition de surfaces par découpage, déplacement et recollement permettent d'aborder la notion d'aire à l'école et au collège. Ces activités sont basées sur *le « théorème de Jonas Bolyai, 1830 : soit A et B deux polygones de même aire ; alors A et B sont équivalent par découpage et recollement ».* L'article déjà cité de JP Friedelemeyer (2008) pourra donner des idées à ce sujet.
- Troisième exemple proposé. Problème de la duplication du carré : comment découper 2 carrés identiques pour les réassembler en un seul carré. Il s'agit de découper chaque carré en 2 triangles isocèle et recoller, mais comment être sûr d'avoir obtenu un carré ? Selon le niveau scolaire concerné la validation peut se faire de façon instrumentée ou par une démonstration (en collège ou PE1). Voir à ce sujet un développement plus complet dans l'article de Claude Maurin (2008).

III – UNE PROPOSITION D'ACTIVITE EN CYCLE 3 : « LES TRIANGLES JUMEAUX » (CLAUDE MAURIN).

Cette activité élaborée à l'intention d'un groupe de PE2, a été vécue par les PE2, puis analysée pour être mise en œuvre dans des classes de cycle 3. Elle a comme point de départ la prise en compte des difficultés des élèves à percevoir les particularités d'une figure (ici les triangles particuliers) fondée sur l'analyse de certaines de ses propriétés.
En faisant le pari que les particularités manipulatoires ont un caractère plus accessible aux élèves que les propriétés qui les justifient, la proposition consiste à utiliser un matériel qui va permettre de faire apparaître certaines particularités et de susciter un questionnement à ce sujet.

Le matériel proposé, appelé « triangles jumeaux », est formé de deux triangles isométriques découpés dans du carton. Une de leur face (la même pour les deux triangles) est hachurée pour la distinguer de l'autre face.
La consigne qui est donnée avec ce matériel est de chercher à faire le plus grand nombre de figures différentes possibles en accolant les deux triangles jumeaux par un de leurs côtés de même longueur et en faisant coïncider leurs sommets, mais sans superposer les deux formes cartonnées (chacune se trouvant dans un des deux demi-plans ayant pour frontière la droite qui porte leur côté commun).
Des exemples d'assemblages acceptables et non acceptables sont fournis aux élèves afin que la contrainte portant sur les conditions d'assemblage soit bien comprise.



<u>Première phase exploratoire</u> : Les élèves travaillent par groupes de deux, chaque groupe reçoit la même paire de triangles jumeaux quelconques et dispose d'une grande feuille

sur laquelle il doit dessiner au marqueur les contours d'un assemblage chaque fois qu'il obtient une forme nouvelle.

Après un temps de recherche suffisant une mise en commun est organisée pour savoir qui a trouvé le plus grand nombre de formes possibles.

<u>Analyse géométrique des possibles</u> : Les deux triangles jumeaux quelconques peuvent être assemblés par chacun de leurs trois côtés, pour un côté donné l'assemblage peut se faire soit en faisant implicitement intervenir une symétrie centrale, on obtient alors un parallélogramme, soit en faisant implicitement intervenir une symétrie orthogonale (retournement), on obtient alors un « cerf-volant ». Chacun de ces deux assemblages peut à son tour subir un retournement, pour les parallélogrammes le contour de la figure retournée ne coïncide pas avec le contour de la figure initiale car le parallélogramme quelconque ne possède pas d'axe de symétrie, par contre, pour les « cerfs-volants » qui possèdent un axe de symétrie, le contour de la figure retournée coïncide avec le contour de la figure initiale.
Cela pose un inévitable problème de dénombrement : faut-il considérer qu'on obtient neuf contours différents ou seulement six contours différents en considérant que le retournement d'une forme plane ne modifie pas la forme de cette figure ? Tout dépend de la façon dont il sera répondu à cette question.
Le but de la mise en commun n'est pas forcément de parvenir à la liste exhaustive de tous les assemblages possibles. On se contentera de vérifier que tous les assemblages proposés sont bien différents, en ayant éventuellement recours à du papier calque, et de remarquer que tous les assemblages obtenus sont des quadrilatères.
On peut tout de même s'attendre à ce que surgisse la question pointée précédemment. C'est la classe avec l'aide du maître qui choisira sa façon d'y répondre. Une fois la convention fixée on s'efforcera de s'y tenir. On peut toutefois avoir une préférence pour choisir de distinguer une forme de son retournement quand celui-ci ne coïncide pas avec la forme initiale car cette distinction permet de particulariser les figures qui possèdent au moins un axe de symétrie (comme le cerf-volant).
Un affichage rassemblant les assemblages obtenus par l'ensemble de la classe pourra être conservé pour établir des comparaisons avec la deuxième phase.

<u>Deuxième phase</u> : Découverte de certains triangles particuliers

Le maître peut choisir de ne travailler qu'avec un seul et même type de triangle particulier pour tous les groupes de la classe, ce qui semble préférable, ou bien de proposer des triangles particuliers différents simultanément aux différents groupes de la classe.

<u>Découverte des particularités des triangles rectangles</u> : Les élèves qui reçoivent des triangles rectangles jumeaux découvrent qu'avec ce type de triangles ils peuvent obtenir par assemblage des rectangles (ce qui justifiera le nom de ces triangles particuliers quand on les nommera), des cerfs-volants mais aussi de nouveaux triangles, ce qui ne produisait pas avec les triangles jumeaux quelconques. Le maître va souligner cette particularité manipulatoire au moment de la mise en commun et le débat sera lancé sur les raisons qui la provoquent.
Les élèves pourront dire avec leurs propres mots ce qu'ils pensent avoir découvert.
A l'issue du débat le maître proposera à chaque groupe de fabriquer une paire de triangles jumeaux permettant d'obtenir un nouveau triangle par assemblage.
Un bilan sera fait sur les réussites et les échecs des différents groupes et le maître pourra institutionnaliser la notion d'angle droit et de triangle rectangle. La recherche d'un

moyen fiable permettant d'obtenir des angles droits débouchera sur l'équerre en papier dont la construction (partage de l'angle plat en deux angles superposables) permet de justifier les assemblages des triangles rectangles. Le lien sera établi avec les équerres du commerce qui sont toutes des triangles rectangles comme on pourra le vérifier par association avec leur jumeau après retournement et observation des contours.

Découverte des particularités des triangles isocèles : C'est par le nombre réduit d'assemblages différents que ces triangles vont se particulariser. En effet quand on les assemble par leur base on obtient un losange, que l'assemblage se fasse par symétrie centrale ou par symétrie axiale, de plus ce losange se retourne dans son contour. Quand on les assemble par un de leurs côtés de même longueur, on obtient soit un parallélogramme (avec une face hachurée et une face non hachurée), soit un cerf-volant (avec les deux faces hachurées ou non hachurées). Ce dernier assemblage se retourne dans son contour, par contre le parallélogramme pose un problème d'orientation et ne se retourne pas dans son contour. On ne peut donc pas trouver plus de quatre assemblages différents. La comparaison avec l'affichage des assemblages obtenus lors de la phase exploratoire permettra de souligner leur particularité.
Le maître pourra interroger les élèves sur les raisons qui font que le nombre de formes différentes obtenues par assemblage des deux triangles isocèles est moins important qu'avec deux triangles jumeaux quelconques. On pourra comparer les assemblages par la base des triangles isocèles avec les assemblages obtenus avec deux triangles quelconques : le premier (losange) se retourne dans son contour l'autre (parallélogramme quelconque) ne se retourne pas dans son contour. De la même façon on pourra observer que les « cerfs-volants » obtenus en assemblant les deux triangles isocèles par un de leurs deux côtés de même longueur sont directement superposables quel que soit le côté choisi. Ces différents constats amèneront les élèves à émettre des hypothèses sur les particularités des triangles isocèles, et l'égalité des longueurs de deux de leurs côtés devrait apparaître.
Pour tenter de valider l'hypothèse émise, le maître proposera de construire deux nouveaux triangles jumeaux ayant deux côtés de même longueur afin d'expérimenter leurs assemblages et les comparer aux assemblages précédents.
Le problème de construction soulevé : « Comment construire un triangle ayant deux côtés de même longueur ? » pourra être résolu collectivement et chaque groupe pourra construire sa propre paire de triangles jumeaux isocèles pour expérimenter ses propres assemblages.
Cette nouvelle phase expérimentale confirmera l'hypothèse émise puisque les assemblages obtenus par chaque groupe auront les mêmes particularités que celles constatées au départ. Les triangles construits dans les différents groupes n'ayant pas tous la même forme, on pourra conclure que les particularités des assemblages reposent sur une propriété commune à tous les triangles, celle d'avoir deux côtés de même longueur.
Le maître pourra alors institutionnaliser la notion de triangle isocèle.
Cette institutionnalisation pourra être accompagnée d'une autre découverte manipulatoire : chacun des triangles isocèles se retourne dans son propre contour. Le maître pourra associer cette propriété à l'existence d'un axe de symétrie dans chaque triangle isocèle que les élèves pourront faire apparaître par pliage.
Il pourra éventuellement faire le choix de travailler de façon plus large sur les figures ayant un axe de symétrie et tester leur retournement dans leur contour de façon expérimentale, mais ce faisant, s'il accroît l'approche expérimentale que ses élèves auront de la géométrie plane, il dépasse les programmes de géométrie en vigueur au

cycle 3 (BO n°3 du 19 juin 2008) qui ne préconisent, au CE2, que le recours au pliage ou au papier calque pour vérifier qu'une figure possède un ou plusieurs axe de symétrie.

Découverte des particularités des triangles équilatéraux : Les triangles jumeaux équilatéraux possèdent une particularité encore plus étonnante, puisque quel que soit l'assemblage réalisé on obtient toujours le même losange. Il n'y a donc qu'un seul assemblage possible !
Le débat fera sans doute surgir le fait que les trois côtés du triangle équilatéral sont de même longueur, mais sa fabrication par pliage est compliquée et difficile à justifier, sa construction de type règle/compas, bien que compatible avec les programmes de géométrie du CM2 - *« savoir reproduire un triangle à l'aide d'instruments »* (BO n°3 du 19 juin 2008) - devient un vrai problème de géométrie pour des élèves de cycle 3, encore peu aguerris à l'utilisation du compas pour résoudre de tels problèmes. Toutefois la motivation des élèves pour obtenir de tels triangles pourra sans doute leur permettre de surmonter la difficulté de leur construction. Le même protocole d'expérimentation que celui utilisé dans le cas des triangles isocèles pourra être suivi, chaque groupe construisant sa propre paire de triangles jumeaux équilatéraux avec laquelle il vérifie qu'il n'obtient qu'une seule forme d'assemblage.

Le maître pourra institutionnaliser la notion de triangle équilatéral et faire constater aux élèves que chaque triangle équilatéral se retourne dans son contour et possède trois axes de symétrie. On pourra constater que, contrairement aux triangles rectangles ou aux triangles isocèles qui pouvaient avoir des formes différentes, tous les triangles équilatéraux ont « la même forme », ils sont seulement de tailles différentes. Chacun est un agrandissement ou une réduction d'un autre, plusieurs observations pouvant être faites dans cette direction qui éveilleront les élèves aux propriétés de parallélisme et d'égalité d'angles.

Le travail sur les triangles particuliers peut se prolonger avec la découverte des triangles rectangles isocèles qui peuvent apparaître à partir du découpage d'un carré suivant sa diagonale, les élèves pourront aussi découvrir l'impossibilité de rendre un triangle à la fois rectangle et équilatéral.

Conclusion :

Cette activité centrée sur les triangles jumeaux permet évidemment d'établir des liens entres les différents quadrilatères obtenus par assemblage des deux triangles et les particularités de ces triangles : rectangles et triangles rectangles, losange et triangles isocèles ou équilatéraux, carrés et triangles rectangles isocèles.
Elle est construite sur un socle expérimental dont on peut penser qu'il interpelle davantage les élèves que des analyses de propriétés de figures qu'ils n'associent pas toujours à une particularité observable au moment où ils les étudient.
Cette approche manipulatoire ne vaut que par le questionnement qu'elle suscite à propos de ce que certaines figurent permettent alors que d'autres ne le permettent pas. Si les élèves parviennent, à propos des particularités qu'ils constatent, à se poser la question du pourquoi, nous faisons avec eux un pas vers une démarche mathématique qui leur ouvre la voie vers une approche raisonnée de la géométrie.

IV – DESCRIPTION ET ANALYSE DE LA FORMATION PROPOSEE A DES ETUDIANTS DE LICENCE PLURIDISCIPLINAIRE A L'ULP DE STRASBOURG ET PRINCIPALES OBSERVATIONS (JEAN-CLAUDE RAUSCHER).

Remarque préalable :
Cette formation initiale basée sur la résolution de problèmes de pavages s'adosse en grande partie sur un travail mené par Christine De Blok Dock. Elle présente ce travail dans un article du numéro 27 de la revue « Educational Studies in Mathematics », (De Block Dock, 1994). Pour l'information du lecteur et pour la compréhension de ce paragraphe IV nous avons jugé utile de lui proposer un compte rendu de l'essentiel de la richesse du travail de Christine De Block Dock. En nous référant le plus fidèlement possible à son article nous y décrivons l'enseignement qu'elle a proposé aux élèves de douze ans et nous y rappelons les éléments essentiels de ses observations conduisant à l'analyse des modalités de pensée en mathématique des élèves concernés. Le lecteur intéressé trouvera ce compte rendu dans l'annexe II.

Après cette remarque préalable nous pouvons maintenant aborder la description et l'analyse de la formation proposée aux étudiants à Strasbourg. Le travail se répartit environ sur quatre ou cinq séances. Tout comme dans l'expérience avec les élèves rapportée par Christine De Block Dock, il s'agit d'une petite aventure, d'un fil rouge assez souple, avec ses rebondissements.
Après une séance consacrée à la présentation du projet, le contenu des séances s'inspire essentiellement du cheminement des activités proposées aux élèves par Christine de Block Dock. A chaque séance les étudiants sont confrontés à des problèmes liés aux questions de pavage du plan. Mais parallèlement il sera chaque fois demandé aux étudiants d'une part de faire le bilan des notions de géométrie en jeu et d'autre part de prendre du recul par rapport à leurs activités pour analyser et comparer les procédures qu'ils développent. Ce travail permet aussi aux étudiants de réfléchir aux problèmes d'apprentissages des élèves en prenant connaissance des démarches de pensées mathématiques développées par des élèves et rapportées par Christine De Bloc Dock. Ce cheminement réserve des surprises aux étudiants, mais aussi, comme nous le verrons, au formateur qui tout en ayant ses objectifs s'adapte aux réactions intéressantes mais parfois imprévisibles de ses étudiants. Le temps utilisé pour chaque séance varie en fonction des tâches à effectuer, de la réaction des étudiants, mais aussi du fait qu'une partie du travail s'effectue ou non en dehors des heures de cours. Il faut dire que le contexte institutionnel dans lequel se déroule la formation est évidemment une variable à prendre en compte pour adapter les modalités de travail proposées aux étudiants. Dans le cadre du cours de licence je disposais d'un confort de temps et en général d'une disponibilité d'esprit de la part des étudiants que je ne retrouvais pas forcément d'emblée dans le cadre de la préparation du concours. La description et l'analyse du travail que je ferai correspond à la formation que j'ai assurée dans le cadre d'une licence pluridisciplinaire. Il s'agissait majoritairement d'étudiants visant par la suite une carrière de professeurs d'école après deux premières années de cursus en biologie, géologie, chimie ou physique. Les groupes comportaient selon les années de 40 à 60 étudiants. Cet effectif assez important n'empêchait pas le développement d'un travail « interactif », les étudiants travaillant alternativement individuellement, par petits groupes de voisinage ou en grand groupe pour des synthèses. Voici une description des différentes phases de travail accompagnée des observations que j'ai pu faire.

1ère phase : préparation du matériel, un premier contact avec la géométrie et présentation du projet de formation.

Lors d'une première séance (assez courte) :

- une feuille est distribuée avec un carré, un triangle équilatéral, et aussi un pentagone, un hexagone et un octogone réguliers (annexe, feuille 1). Sur le document donné, plusieurs polygones réguliers différents sont représentés, mais les côtés de ces polygones ont tous une longueur commune. Le contenu de cette feuille sera à décrire et à commenter.
- il est demandé à chaque étudiant de confectionner, pour la prochaine séance, un jeu de polygones en carton identiques aux polygones figurant sur le document distribué (une dizaine de triangles, une dizaine de carrés etc..).
- il est dit que ce matériel servira à faire des activités de pavages en référence à l'expérimentation réalisée avec des élèves de douze ans à Bruxelles. Les objectifs de ce travail sont annoncés : visiter ou revisiter des notions de géométrie, réfléchir aux méthodes de raisonnement en usage en géométrie, aborder des questions d'enseignement et d'apprentissage en géométrie à l'école et au collège.

La distribution du document où figurent les différents polygones est une première occasion pour les étudiants de retrouver quelques notions de géométrie. L'appel à décrire le contenu de ce document provoque en particulier l'évocation de la notion de « polygone régulier » et permet de la préciser collectivement. En effet, lorsqu'on prend le soin de leur en faire écrire une définition, il apparaît systématiquement qu'un grand nombre d'entre eux ne pensent qu'à la contrainte concernant l'isométrie des côtés. La production par les étudiants ou le formateur d'exemples de figures à 4 ou 5 côtés respectant exclusivement cette contrainte, ou a contrario ne respectant que la contrainte concernant l'isométrie des angles est l'occasion de continuer à explorer et à interroger le rapport entre isométrie des côtés et des angles.

2ème phase : problèmes de pavages du plan à l'aide de polygones réguliers.

A l'aide de leurs jeux de polygones en carton, les étudiants doivent :
1) Répondre à la question suivante : « Avec quels polygones réguliers peut-on paver le plan ? ». (Il s'agit de trouver tous les pavages réguliers possibles, c'est-à-dire ne comportant qu'une seule sorte de polygone et en ne se limitant pas aux exemples de polygones réguliers pour lesquels ils disposent de gabarits en carton).
2) Chercher des pavages semi-réguliers ou mixtes c'est-à-dire faits de plusieurs sortes de polygones réguliers (tous les nœuds doivent être entourés de manière identique).

Le travail commence inévitablement par la nécessité rapidement exprimée par les étudiants de définir ce qu'est en l'occurrence un « pavage » et en particulier « un pavage du plan », expression qui les laisse souvent perplexe car ils imaginent le pavage d'une surface bien délimitée. Ces précisions étant données, les étudiants font de nombreux essais avec leurs gabarits. Le travail sur les deux questions, données simultanément, s'étale en général sur deux séances.

En ce qui concerne la première question le *« tous »* de l'énoncé, qui implique qu'on dépasse le stade de la manipulation des gabarits en carton, n'est pas d'emblée assimilé. Lorsque son sens est à nouveau expliqué, les étudiants prennent enfin la mesure de la nature mathématique de la question ! Remarque : au cours du traitement de cette question par les étudiants, je stimule et observe l'avancée de leurs réflexions en ponctuant les séances (en cours ou en fin de séance) par la question suivante : *« A ce stade, pensez vous qu'en dehors des cas du triangle équilatéral, du carré et de l'hexagone, il existe d'autres polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan ?*

Quel est le degré de certitude de votre avis : « absolument certain », « assez certain », « incertain » ? Argumentez si possible votre avis.

Pour commencer, les étudiants font en général des conjectures sur la valeur des angles intérieurs. Par exemple, ils se placent dans un cadre numérique : *« Ce sont des diviseurs de 360 ! »* Mais le statut de cette condition n'est pas encore clair : est-ce une condition nécessaire ou une condition suffisante ? Parfois, pour relancer la réflexion à ce sujet, je demande ce qui se passerait si on prenait un polygone régulier ayant des angles de 10°, ou encore si c'est la même chose quand on considère la valeur des angles en grades ou radians. Ils reviennent aux contraintes du problème géométrique avec l'idée qu'il est nécessaire de pouvoir juxtaposer autour d'un nœud un nombre entier de fois l'angle intérieur d'un polygone pour que le pavage soit possible. A ce moment là très peu d'étudiants pensent que les possibilités de pavage avec des polygones réguliers se limitent aux trois exemples trouvés avec les gabarits en carton. Ils pensent plutôt qu'il y a forcément d'autres cas possibles. Cette intime conviction est souvent argumentée par une pensée d'ordre probabiliste fondée sur le fait qu'il existe une infinité de polygones réguliers. L'idée d'envisager un polygone régulier à 12 côtés peut faire avancer la réflexion comme le montre cette déclaration d'une étudiante à ce sujet relevée lors d'une séance : *« Il y aura forcément un vide quand on essaye de juxtaposer ; plus on augmente le nombre de côtés, plus on se rapproche d'un cercle, or avec des disques on ne peut pas paver le plan, il reste des vides ».*

Ici on a le passage de manipulations matérielles à des spéculations abstraites, passage étayé par des intuitions se basant sur des expériences ou des configurations connues. A ce moment les avis dans le groupe ont commencé à bouger mais il restait encore beaucoup d'étudiants incertains. Parfois les étudiants émettent l'idée que plus il y a de côtés plus l'angle est grand et donc on n'arrivera pas à caser tous ces angles autour d'un point. Ce jour là le problème n'a pas avancé et j'ai abandonné la question à ce point pour poursuivre le travail autour des pavages mixtes, ce qui a permis de se centrer sur les angles et de reprendre ensuite la question de l'existence des pavages réguliers. D'une année à l'autre l'histoire n'est jamais complètement écrite d'avance….

En ce qui concerne la création de pavages semi-réguliers, tout comme les enfants, les étudiants sont dans un premier temps souvent attirés par la création de jolies compositions (des « fleurs » avec des pétales par exemple) jouant non seulement sur l'occupation du plan mais aussi sur l'arrangement des couleurs dans lesquelles certains ont confectionné les polygones. Les étudiants font des essais et après un tour du groupe on récolte les propositions : 6-3-6-3 ; 4-3-4-3-3 ; 8-6-5 ; 6-4-3-4 ; etc (description des paysages autour des nœuds, chaque chiffre désignant un polygone régulier par son nombre de côtés). Je demande aux étudiants de vérifier les configurations proposées à l'aide des gabarits et alors certains disent rencontrer des problèmes du côté de la proposition 8-6-5. Certains pensent que ces problèmes viennent des limites matérielles du découpage des cartons, d'autres sont sûrs que ce pavage mixte n'est pas possible et qu'il faut le vérifier par le calcul des angles. Ce questionnement débouche donc sur la connaissance ou le calcul des angles dans les polygones réguliers en jeu. Cet épisode prend un certain temps et n'est pas facile pour tous mais il est l'occasion pour beaucoup de rafraîchir leurs connaissances en géométrie. Le verdict tombe : 135° + 120°+ 108° ne font pas 360° mais 363°! Je prolonge le travail en demandant aux étudiants aussi d'exprimer la valeur α_n des angles d'un polygone régulier de n côtés en fonction de n.

Avec ces outils on peut alors reprendre la question de l'existence des pavages réguliers. En l'occurrence l'attention portée aux angles a permis aux étudiants de reprendre l'idée émise que plus il y a de côtés plus le polygone se rapproche d'un cercle en la transformant en « plus il y a de côtés, plus les angles sont grands » et raisonner sur la

taille du vide à combler pour compléter le pavage autour d'un nœud et se rendre compte que le pavage avec des hexagones constitue une limite : au delà des hexagones réguliers l'espace à combler ne pourrait accueillir un troisième polygone lorsqu'on aura déjà placé deux polygones réguliers. La formule qui donne la valeur de α_n en fonction de n permet aussi de trouver une issue formellement correcte à la question. Il s'agit d'exprimer la question de la place manquante sous forme d'inéquation.
Par ailleurs la question de la construction des polygones réguliers sera reprise par la suite et donnera lieu au développement de connaissances en géométrie : programmes de construction des polygones réguliers, développement du langage, prise de conscience que pour construire un polygone régulier il y a une entrée possible par les côtés ou par les rayons, calcul du rayon en fonction des côtés ou inversement etc.
Mais avant cela, les étudiants sont conviés à considérer les pavages avec des polygones non réguliers.

3ème phase, problèmes de pavages du plan avec des polygones non réguliers.

Le passage aux pavages du plan par des polygones non réguliers a deux objets. D'une part il s'agit de montrer aux étudiants comment dans l'expérience relatée par Christine de Block Dock, les enfants qui ne possédaient pas dans un premier temps l'outil du calcul général des angles dans les polygones réguliers ont pu ainsi y accéder eux aussi pour trancher la question de l'existence du pavage 5-6-8. D'autre part ces problèmes de pavages à l'aide de polygones non réguliers donnent l'occasion aux étudiants de continuer à consolider leurs connaissances en géométrie et dans le domaine de la logique.
Pour cela, les étudiants sont d'abord invités à :

- imaginer des pavages avec des polygones non réguliers isométriques, libre à eux de les décrire, de les dessiner, de les construire
- formuler par écrit les conditions sur les polygones qui rendent les pavages possibles.

Les exemples fusent : pavage à l'aide d'un rectangle, d'un losange, d'un parallélogramme, d'un trapèze rectangle, d'un trapèze quelconque, d'un triangle isocèle, d'un triangle rectangle etc. Les affirmations concernant les conditions s'affichent : *« On peut paver le plan si le polygone est symétrique, possède un axe ou un centre de symétrie, des angles droits.. »* ou bien *« Il faut que… ».* La comparaison des formulations proposées permet aux étudiants de s'interroger s'ils énoncent là des conditions nécessaires ou des conditions suffisantes. C'est aussi l'occasion de statuer sur la validité de ces conditions en se référant aux exemples de pavages évoqués : *« Non il n'est pas nécessaire que le polygone ait un axe de symétrie puisqu'on peut paver avec un trapèze quelconque » ; « Non le fait qu'un polygone ait un axe de symétrie n'est pas une condition suffisante : pour preuve on ne peut paver à l'aide d'un octogone (régulier) ou d'un pentagone (régulier) »*
Le fait qu'on puisse paver le plan à l'aide d'un triangle quelconque n'est en général pas évoqué par les étudiants qui expriment leur scepticisme (comme les enfants) sur la possibilité de paver avec des polygones qui n'auraient aucune particularité. Néanmoins il arrive parfois qu'un étudiant pense à cette possibilité en la justifiant par le fait qu'avec deux triangles isométriques on peut constituer un parallélogramme. Dans un cas comme dans l'autre, en découpant des triangles isométriques (isolés) figurant sur une feuille préparée (annexe, feuille 2), les étudiants ont alors l'occasion de constater qu'ils arrivent bien à paver le plan avec un triangle quelconque. Remarque : question qui ne se posait pas avec les polygones réguliers, il faut préciser ici que le retournement des

gabarits est permis. Le cas du pavage à l'aide d'un quadrilatère quelconque, qui suscite a priori un scepticisme encore plus grand, est pareillement exploré (annexe, feuille 3).
A ce moment là du travail, les étudiants peuvent saisir comment les élèves ont eu accès au fait que la somme des angles d'un triangle ou d'un quadrilatère est égale respectivement à 180° et 360°. Ils voient aussi comment par triangulation, ils accèdent à la valeur de la somme des angles d'un pentagone et peuvent calculer la valeur de l'angle d'un pentagone régulier.

4ème phase : pavages du plan avec un triangle quelconque, mise en jeu des symétries centrales et axiales.

La question posée aux étudiants est la suivante :
« De combien de façon peut-on paver le plan avec un triangle quelconque ? »
Il y a 4 pavages possibles (annexe, feuille 4) s'obtenant respectivement par les symétries centrales par rapport au milieu des côtés des triangles et par les symétries orthogonales par rapport aux côtés des triangles. Trois symétries centrales, trois symétries axiales : on pourrait imaginer que cela aboutit à six pavages. Mais les pavages qui s'effectuent à partir des symétries centrales par rapport aux milieux des côtés ne correspondent qu'à un seul pavage (ce n'est pas d'emblée évident pour les étudiants). En revanche, on obtient bien trois pavages différents pour les symétries axiales
A priori les étudiants n'imaginent pas qu'il y a plusieurs façons d'agencer les triangles, ou bien s'imaginent au contraire qu'il y a un grand nombre de pavages possibles. Cette recherche prend alors beaucoup de temps si on désire que les étudiants la mènent de façon autonome jusqu'à son terme, sans donner aucune indication. Au hasard des manipulations mais en tenant compte du fait que les côtés de même longueur doivent se juxtaposer et que les retournements des gabarits sont permis, les étudiants trouvent néanmoins l'un ou l'autre des pavages possibles. En mettant alors en commun les propositions, et en les analysant, on peut mettre en évidence les transformations qui les structurent et permettre aux étudiants d'achever la recherche.
Ce travail permet par la suite de reprendre de façon plus générale les connaissances des étudiants concernant les isométries du plan.
Remarque : c'est cette activité de pavages du plan à l'aide de triangles isométriques qui est à la base de l'activité destinée à des élèves du cycle 3 que Claude Maurin présente dans la partie III de notre compte–rendu.

5ème phase : synthèse à propos du développement de la pensée en géométrie et des modes de validation en géométrie.

C'est l'occasion avec les étudiants de revenir sur leurs cheminements en interrogeant les types de preuves et de raisonnements que les étudiants ont rencontrés tout comme les élèves : d'abord empiriques, puis des enchaînements d'arguments empiriques en opposition (du point de vue des paradigmes géométriques en jeu), mais aussi en continuité (du point de vue des dimensions intuitives des démarches) avec des « démonstrations » se basant sur un corpus de propriétés et de définitions. C'est à cette occasion aussi que je peux les sensibiliser (en PE1 plus particulièrement) à la différenciation des paradigmes dans lesquels on peut se situer en géométrie (Houdement et Kuzniak, 2006) en particulier par l'examen de certains exercices qui offrent un support adéquat pour cela (Kuzniak et Rauscher, 2004)

En se référant à l'expérience décrite par Christine De Block Dock, est abordée la question des méthodes d'enseignement des mathématiques. Ici est mis en exergue une

méthode qui engage les élèves dans une démarche mathématique en leur proposant un milieu, qui comme le décrit Wittmann (1981), suscite :
- des opérations sur une riche variété d'exemples et de modèles qui permettent l'élaboration de conjectures et le développement de l'intuition (stade de l'intuition)
- des réflexions sur ces premières activités pour trouver des formulations générales, des résultats, les tester, les améliorer, les prouver (stade du raisonnement)
- des analyses des concepts, des théorèmes et des preuves (stade du formalisme).

V – UNE CONCLUSION QUI OUVRE SUR QUELQUES QUESTIONS DE FORMATION.

Le titre du colloque était « Enseigner les mathématiques : où est le problème ? ». On peut dire que dans notre atelier nous avons eu largement l'occasion de faire éclater ce singulier en une multitude de questions concernant la formation des maîtres qui s'appuie sur la résolution de problèmes de pavages. Quels sont les contenus mathématiques sous-jacents à ce support ? Quelles sont les connaissances et démarches mathématiques que les étudiants peuvent développer à partir de ces problèmes ? Quels gestes professionnels peuvent-ils acquérir ensuite : analyse des enjeux d'apprentissage en géométrie, des modalités d'enseignement en adéquation avec ces enjeux ? Pour une large part le travail en atelier a permis d'accéder à quelques éléments de réponse.

Conclusion optimiste donc, que nous aurions néanmoins envie de prolonger par un appel à poser et à aborder certaines questions de forme et de fond à propos de la formation des maîtres. Une première concerne le temps consacré à la formation : comment prendre en compte les diverses contraintes de temps auxquelles sont soumises les formations selon les contextes institutionnels. Autre question, comment prendre en compte dans de telles modalités de formation l'injonction faite par les institutions de la définir en se référant à une liste de compétences ? Mais il est vrai qu'à ce sujet une question est peut-être à ouvrir : c'est la question de l'explicitation avec ou par les étudiants des connaissances qu'ils ont pu développer de façon souvent implicite dans les activités. Ces remarques sont une invitation à poursuivre et à compléter le travail d'analyse suscité par la question posée par le titre du colloque, question que nous poserions alors sous la forme suivante : «Formation des enseignants à partir de la résolution de problèmes : où est le problème ? »

BIBLIOGRAPHIE

DE BLOCK-DOCK C. (1994) Modalités de la pensée mathématique d'élèves de douze ans devant des problèmes de pavage*, Educational Studies in Mathematics*, **27**, 165-189.

DUVAL R. & GAUDIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures**,** Grand N**, 76,** IREM de Grenoble

EXPRIME (2008) « EXpérimenter des PRoblèmes Innovants en Mathématique à l'Ecole » ; INRP- IREM Lyon- LEPS-LIRDHIST de l'université Claude Bernard de Lyon ; lien internet : http://educmath.inrp.fr/applet/exprime/fregco2.pdf .

FRIEDELMEYER J.P. (2008), Equidécomposabilité des polygones plans, *L'ouvert*, **117***,* IREM de Strasbourg.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **16/3**, 289-322.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A., (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives **11**, 175-193*

KUZNIAK A., RAUSCHER J-C., (2004) - *Processus de formation de Professeurs d'Ecole et anamnèse géométrique.* Actes du XXXème colloque COPIRELEM, Avignon, 19, 20 et 21 mai 2003 , Université de la Méditerrranée, 231-248

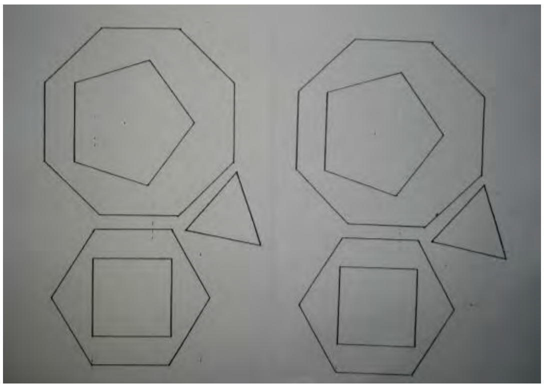
MAURIN C. (2008), Mesurer ? pour quoi faire ? deux exemples de situation pour des élèves de CM2 et 6ème, *Grand N,* 81*,* IREM de Grenoble.

VERGNAUD G. (1987) *Réflexions sur les finalités de l'Enseignement des Mathématiques,* Gazette des mathématiciens , **32**, 54-61).

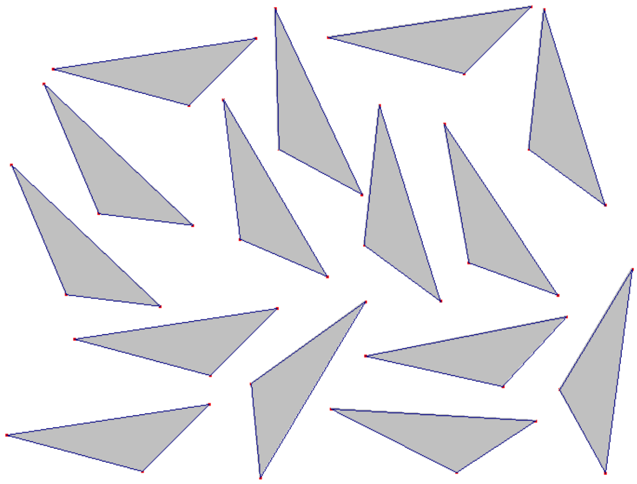
WITTMANN E. (1981) The complementary roles of intuitive and reflectives thinking in mathematics taeching, Educational Studies in Mathematics, **12**, 389-397

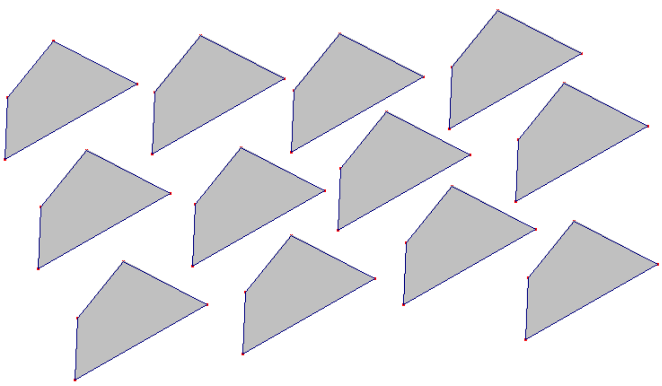
ANNEXE 1

Feuille 1

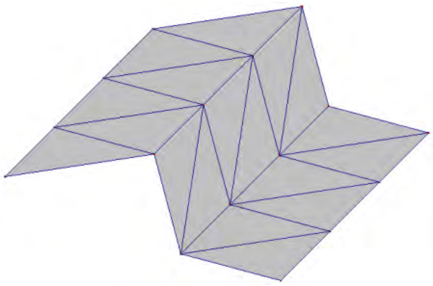
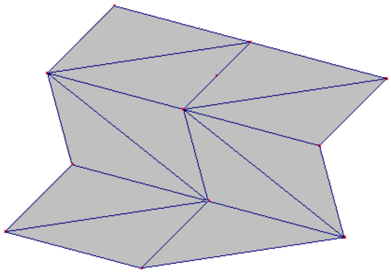
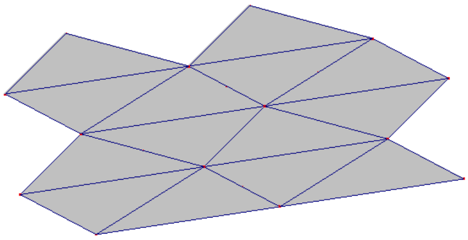
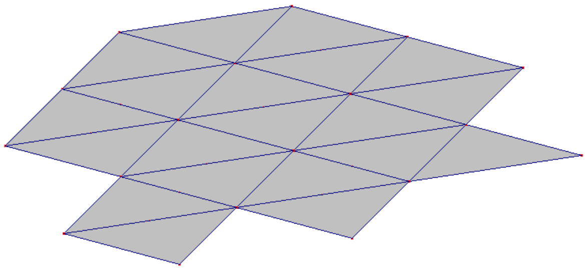


Feuilles 2 et 3





Feuille 4

ANNEXE 2

Compte rendu du travail de Christine De Block Dock (1994) : « Modalités de la pensée mathématique d'élèves de douze ans devant des problèmes de pavage »

Dans cet article (De Block-Dock, 1994), l'auteur analyse un enseignement dans lequel des élèves de douze ans ont traité des problèmes de pavages polygonaux et progressé à cette occasion dans leur apprentissage de la géométrie plane. L'analyse porte principalement sur les processus de pensée des élèves confrontés à la résolution de ces problèmes.

1. Modalités de l'enseignement analysé.

Conception :
L'élaboration de la séquence d'enseignement a été inspirée par la conception selon laquelle la résolution de problèmes et le lent travail d'organisation d'un champ de questions conduisent à un apprentissage plus profond, plus proche du sens que des exposés de théories organisées. Pour la plupart des recherches proposées, les élèves ont d'abord travaillé par petits groupes et ont ensuite communiqué leurs résultats lors de synthèses orales auxquelles toute la classe participait et pendant lesquelles l'enseignant donnait les explications nécessaires et fixait les acquis.

Le déroulement de l'enseignement :
- **1ère étape** : dessiner librement des pavages observés ou imaginés.

Il s'agit d'une étape de familiarisation.
- **2ème étape** : trouver « tous » les pavages possibles avec des polygones réguliers. Pour cela on donne des triangles équilatéraux, des carrés, des pentagones, des hexagones et des octogones réguliers en carton.

Le « tous » de l'énoncé est important parce qu'il implique que la recherche dépasse le stade « manipulatoire ». Il n'est pas facilement compris dans un premier temps. Lors de la synthèse l'existence de trois pavages réguliers est admise par tous (professeur compris). Cette constatation permet de trouver la valeur de l'angle intérieur du carré, du triangle équilatéral et de l'hexagone régulier (on suppose que le tour autour d'un point fait 360°). Les élèves arrivent à expliquer la non-existence d'autres pavages réguliers au-delà de l'hexagone par le fait que l'angle intérieur croît avec le nombre de côtés.
- **3ème étape** : avec le même jeu de polygones en carton on demande aux élèves de chercher des pavages faits de plusieurs sortes de polygones réguliers (tous les nœuds doivent être entourés de manière identique). On parle de pavages semi réguliers.

De nombreux essais sont effectués. Le pavage avec des octogones et les carrés avaient déjà été obtenus lors de la recherche avec les octogones uniquement. Les élèves peuvent ainsi en déduire la valeur de l'angle intérieur de l'octogone. Un essai pose problème : celui où un pentagone, un octogone régulier et un hexagone environnent un nœud. Les élèves ne sont pas sûrs de sa validité et pour cause puisque la somme angulaire fait 363°. Mais ils ne le savent pas puisqu'ils ne connaissent pas la valeur de l'angle du pentagone. Il faut donc trouver un moyen pour l'obtenir et ce besoin va servir de fil conducteur pour la suite.
- **4ème étape** : dessiner deux des pavages semi-réguliers et avant cela dessiner les polygones réguliers qui le composent.
- **5ème étape** : paver avec des polygones non-réguliers isométriques non fournis.

Au bout d'un certain temps, la recherche est circonscrite à celle de tous les pavages possibles avec des triangles isométriques découpés dans du carton. Lors de la synthèse, introduction des différentes isométries qui associent deux triangles des pavages.

- **6ème étape** : il est demandé aux élèves de s'intéresser aux problèmes d'angles dans ces nouveaux pavages.

Les élèves peuvent ainsi aboutir à la valeur de la somme des angles d'un triangle. Il y a ici un changement de point de vue pour les élèves car on ne s'intéresse plus à la valeur d'un angle mais à une somme. De manière analogue, par le biais d'un pavage par des quadrilatères quelconques, les élèves découvrent que la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360°.

- **7ème étape** : il est demandé aux élèves de trouver la somme des angles d'un pentagone.

Les élèves ne peuvent plus s'appuyer sur un pavage : il faut penser à trianguler le pentagone.

- **8ème étape** : reprise de la question de l'existence du pavage 5-6-8.

Les élèves disposent maintenant des outils pour trancher en calculant la somme angulaire autour d'un nœud.

2 Evolution de la pensée mathématique des élèves.

Au cours de cet enseignement, il a pu être observé que les élèves ont développé leurs connaissances et leurs savoirs à propos des polygones réguliers ou quelconques (définition d'un pavage régulier, semi-régulier, somme des angles, valeurs des angles etc.) et que plus largement, ils ont eu l'occasion d'affiner certaines notions de géométrie plane : cercles, positions de droites, isométries, etc.
Mais les modalités de cet enseignement qui laissent de nombreux moments d'initiative aux élèves ont surtout permis d'observer l'évolution de la pensée mathématique des élèves. Les informations et explications circulaient sans blocage majeur et la classe est apparue comme un groupe intellectuellement assez homogène. Bien qu'il se soit agi de la construction de savoirs individuels, ce ne fût pour aucun élève la construction individuelle de son savoir. Les observateurs présents dans la classe ont relevé de leur mieux les contributions des élèves. Toutes les données disponibles ont permis l'analyse de l'évolution de la pensée mathématique susceptible d'avoir été partagée par une majorité d'élèves.

Christine de Block-Dock annonce que son analyse essaye de discerner et de décrire les modalités de cette pensée plutôt que des étapes. En effet, même si ces modalités sont présentées dans un ordre d'abstraction croissante, les plus primitives ne disparaissent pas pour faire place aux suivantes : elles coexistent avec elles et continuent à jouer un rôle utile. Globalement, comme nous allons le voir se dessine un mouvement qui amène la pensée des élèves à se détacher du contexte concret qui l'a nourrie pour accéder à un niveau plus abstrait et une organisation plus globale.

Pensée instantanée et pensée discursive.
Principalement Christine de Block-Dock distingue deux registres par lesquels peuvent se repérer les modalités de la pensée et son évolution :

- La pensée instantanée qui agit par flashs, qui globalise les données sans les discerner. Elle a cours dans la vie quotidienne mais joue un rôle considérable en mathématique.
- La pensée discursive qui atteint le but où elle tend par une série d'opérations partielles intermédiaires. Il s'agit de la pensée qui procède par enchaînement d'idées. Elle a peu cours dans le quotidien et n'est pas « naturelle » pour un enfant.

L'analyse passe alors en revue les occasions et les manifestations d'abord de la pensée instantanée puis de la pensée discursive dans les problèmes de pavages proposés aux élèves.

La pensée instantanée.

Avant d'arriver au stade où elle procède par enchaînements d'idées, la pensée saisit les données dans un mouvement unique qui les globalise pour y déceler rapidement des relations.

Les actions lors de la création des pavages.

La construction de pavages à l'aide de polygones en carton est guidée par ce que H. Wallon (1970) appelle « l'intelligence des situations » qui correspond à une perception globale d'un ensemble de circonstances matérielles et actions relevant des capacités sensori-motrices. Cette intelligence comporte des « intuitions variables appropriées aux circonstances ». Ainsi dans le cas de la création de pavages il s'agit de *:*

- juxtaposer des segments d'égales longueurs
- compléter l'environnement d'un nœud
- comparer par juxtaposition, superposition : constat d'égalité ou d'inégalité.
- utiliser implicitement les règles naturelles d'additivité des angles, de longueurs, d'aires etc.
- compléter les figures en anticipant… *« je continue comme ça… »*

Constats aboutissant aux structures géométriques visuelles.

Les élèves connaissent certaines figures sans savoir les définir. Ils observent spontanément certaines relations constitutives de ces figures : *« Dans un losange les angles opposés ont même longueur »*. Ils reconnaissent des polygones réguliers dans des pavages formés à partir d'autres polygones réguliers : dans la juxtaposition de triangles équilatéraux ils reconnaissent des hexagones, ils reconnaissent le carré qui manque lorsqu'on accole des octogones.

Ces constats portent sur les objets à fortes symétries.

De ces constats, les figures acquièrent une **structure géométrique visuelle**. Chaque figure est perçue comme un agrégat de propriétés coexistantes sans relations explicites de dépendance.

Conjectures générales.

Les élèves essayent dans un mouvement unique de trouver une loi générale ou de détecter des relations simples entre les objets :

- nombre pair de côtés = pavage régulier : « pour créer des pavages avec des polygones réguliers d'une seule sorte, ça va pour les polygones ayant un nombre pair de côtés + le triangle équilatéral,
- pour inscrire un dodécagone dans un cercle, il suffit de reporter le demi-rayon,
- pour un triangle quelconque, il n'y a qu'un seul pavage avec des symétries orthogonales puisqu'il n'y en a qu'un avec des symétries centrales.

Tous ces énoncés sont issus d'un mouvement spontané de la pensée aux prises avec un champ de phénomènes.

Contrairement aux constats précédents ces énoncés sont en général faux. Dans un premier temps, avant que beaucoup de cas n'aient pu être examinés, les élèves s'aventurent à conjecturer des régularités qui sont parmi celles qui s'imposent le plus spontanément à l'esprit. La pensée suit « la ligne de plus grande pente ». Au moment où ils abordent une problématique, ils manifestent une certaine tolérance aux contradictions :

- ils ajoutent par exemple le cas des triangles équilatéraux aux cas des polygones réguliers ayant un nombre pair de côtés

- cas de la proportionnalité dans le cas du dodécagone
- principe d'analogie dans le cas des symétries

La plupart des conjectures fausses ont été rejetées par les élèves par la suite lors de travaux plus approfondis. Elles sont cependant très utiles dans l'évolution du raisonnement parce qu'elles sont sources de contradictions qui stimulent des échanges et servent de point d'ancrage à la réflexion.
Les constats se font en général sur une seule figure que le regard embrasse.
Les conjectures se font sur un couple d'objets (dodécagone, hexagone par exemple), ou sur une famille infinie d'objets (nombres pairs) accessible à la pensée.

La pensée discursive.
La pensée discursive est la pensée qui procède par enchaînements.

La pensée discursive à l'œuvre dans les dessins.
Nécessité d'aller au-delà de la reconnaissance de la figure :
- analyser les propriétés de la figure
- choisir et ordonner les propriétés utilisables en vue de la reconstituer (synthèse) et tenir compte des possibilités des instruments.

Comment cela se passe-t-il ? Devant un dessin à exécuter, les élèves n'ont pas immédiatement à l'esprit un projet complet. Leur pensée ne devance que d'un peu l'exécution. Une première étape erronée enclenche une réflexion débouchant vers une deuxième étape etc.
La pensée discursive à longue échéance est pilotée par une vue globale, mais elle s'exécute par petits paquets d'opérations minutieuses, ces étapes intermédiaires régies par une démarche d'analyse/synthèse portant sur la globalité du pavage.
L'activité du dessin force à prendre en compte de nombreuses propriétés et leurs relations.
Cette maturation conceptuelle n'est pas liée à un besoin logique de la matière mais à un objectif précis de reproduction et se fait donc spontanément.

La pensée discursive à l'œuvre dans les réalisations de pavages par les cartons.
Bien que chronologiquement les pavages aient été construits avec les cartons avant d'être dessinés, ces constructions nécessitent une abstraction plus forte : rien ne laisse, en dehors des pavages classiques, imaginer une loi de formation. L'objectif est abstrait : il faut réaliser des pavages. La pensée doit précéder une vision. Mais là le matériel en carton facilite les choses et permet aux élèves d'anticiper :
- pour les pavages simples, pas de problèmes
- mais après, il y a nécessité d'analyser les paramètres en jeu : élément de symétrie, orientation, longueur des côtés. Ici aussi il y a une dialectique entre action et réflexion. Il y a une gradation des difficultés : le problème de la création de pavages réguliers donne assez vite des solutions, alors que pour les pavages semi-réguliers se pose la question de l'isométrie des paysages aux nœuds et que pour les pavages avec des figures non régulières (dont les côtés sont de longueurs différentes) se posent des problèmes d'orientation.

Cette gradation permet de passer d'essais sauvages, sans qu'il y ait analyse, à une prise en compte ordonnée des variables en jeu et des contraintes.
Et les élèves sont ici amenés à se poser des questions à propos de ce qui ne va pas (pavage 5-6-8). Ils passent donc à une analyse plus globale sur les questions d'existence des pavages.

Preuves brèves :

Dans le cas de pavages, la pensée discursive intervient de façon implicite avec un objet concret à élaborer. Mais la pensée discursive s'exprime explicitement à travers de courtes preuves :

- formulée spontanément par les élèves
- en réponse à des questions du professeur

Sur quoi s'appuient ces argumentations ? Sur certains constats : les structures géométriques visuelles interviennent comme sources d'arguments. Exemples *: « on peut paver avec un assemblage de polygones réguliers qui a la forme d'une rosace hexagonale parce que l'hexagone régulier pave. »* ou encore : *« un trapèze rectangle pave car deux exemplaires adéquatement accolés forment un rectangle ».* Ces énoncés ont été formulés avant d'être vérifiées expérimentalement. Ce sont des preuves brèves : deux faits enchaînés ou le deuxième fait se justifie par l'existence d'un pavage antérieur.

L'étude des angles permet d'élaborer des preuves plus longues et dont les sources ne sont plus toutes empiriques. Pour établir l'énoncé : « L'angle du triangle équilatéral vaut 60°, celui de l'hexagone régulier 120° » les élèves s'appuient sur :

- des constats d'existence empirique des pavages où les polygones sont impliqués
- la connaissance de la valeur angulaire totale en un point (360°)
- l'égalité des angles intérieurs des polygones réguliers (implicite).

De même pour la somme des angles d'un triangle : constat empirique, d'existence d'un pavage, constat de la présence des angles en double exemplaire autour d'un nœud, connaissance de la valeur angulaire en un point.

Mais pour que cet enchaînement soit une vraie preuve, il faut que les arguments évoqués aient une portée générale. Les élèves n'en sont pas spontanément conscients. C'est le professeur qui les invite à s'interroger sur la validité pour d'autres triangles.

Preuves plus élaborées

Elles font appel à des preuves moins immédiates, des enchaînements plus longs, des arguments empiriques plus lointains, ou des propositions déjà prouvées.

Exemple pour prouver qu'il n'y a que trois polygones réguliers qui pavent le plan :

- pour l'heptagone, il n'y a plus de place pour intercaler un troisième exemplaire
- les angles intérieurs croissent avec le nombre de côtés
- donc aucun polygone ayant un nombre de côtés supérieurs à 6 ne peut paver le plan
- le cas du pentagone est traité expérimentalement

Exemple pour la question de l'existence du pavage 5-6-8 :

Ce problème a été le fil motivant à travers les activités. Le statut de ce problème n'a pas toujours été très clair pour les élèves. Dans un premier temps les élèves attribuent l'emboîtement difficile à des problèmes matériels (découpage, difficulté de poser).

Piaget note que l'échec (ce qui ne va pas) est attribué successivement à :

- à des objets extérieurs (ciseaux ici)
- à la résistance des objets eux-mêmes
- à l'action des sujets
- et enfin seulement à la prévision du sujet qui est remise en cause

En l'occurrence ce problème fut l'occasion d'un débat animé : qu'est ce qui fait qu'on accepte un assemblage et pas un autre ? Aucun critère objectif, si ce n'est un consensus dans les cas admis et des avis partagés dans le cas qui donne lieu à controverse. Cette controverse donne lieu à un renversement de perspective : les élèves acceptent de déterminer l'angle du pentagone régulier par une autre voie, la déduction théorique à laquelle ils aboutissent finalement. De plus les élèves qui ont pu prendre assez de recul ont pu réaliser qu'il serait contradictoire d'accepter simultanément l'existence des pavages de triangles quelconques et celle de l'assemblage 5-6-8. Il y a donc là une occasion d'être sensibilisé à une démarche de modélisation et de théorisation pour réduire une contradiction.

Finalement on peut observer dans cet enseignement une évolution dans les types de preuves :

- d'abord empiriques
- puis un enchaînement d'arguments empiriques
- enchaînements plus longs

La pensée des élèves va finalement vers un détachement du contexte concret qui l'a nourrie pour accéder à un niveau plus abstrait et une organisation plus globale.
Chritine De Block-Dock se réfère ici à Wittmann (1981), qui part de la supposition que l'enseignement des mathématiques n'a pas pour modèle une lecture des mathématiques mais une activité en mathématiques. Pour lui trois types d'activités sont nécessaires pour développer la pensée mathématique :

- des opérations sur une riche variété d'exemples et de modèles qui permettent l'élaboration de conjectures et le développement de l'intuition (stade de l'intuition)
- des réflexions sur ces premières activités pour trouver des formulations générales, des résultats, les tester, les améliorer, les prouver (stade du raisonnement)
- des analyses des concepts, des théorèmes et des preuves (stade du formalisme)