LES DESSOUS DU NUMERIQUE

Claire Margolinas
IUFM d'Auvergne & Université Blaise Pascal
de Clermont-Ferrand, Equipe Démathé, INRP, France
claire.margolinas@univ-bpclermont.fr

Olivier Rivière
IUFM d'Auvergne & Université Blaise Pascal
de Clermont-Ferrand, Equipe Démathé, INRP, France
olivier.riviere@univ-bpclermont.fr

RESUME

L'objectif de l'atelier était double :

- (a) de réfléchir aux difficultés des élèves qui ont été mises en évidence par l'équipe Démathé « Développement des mathématiques à l'école » INRP, en partenariat avec l'IUFM d'Auvergne à partir notamment de documents vidéos réalisés,
- (b) d'envisager des possibilités d'usages du cédérom en formation d'enseignants.

Les difficultés concernent « les dessous du numérique » c'est-à-dire « en deçà des connaissances numériques bien identifiées par les professeurs » ? C'est en particulier celles liées à l'énumération, en référence aux travaux de Joël Briand (Briand, 1999 et 1993) qui ont été travaillées. Pour mieux comprendre les difficultés liées à l'énumération, une situation d'observation (de la moyenne section au CM2) où l'énumération intervient seule, ou principalement, a été présentée.

L'équipe Démathé « Développement des mathématiques à l'école » est une équipe de l'INRP, en partenariat avec l'IUFM d'Auvergne. Depuis 2003, nous avons notamment développé un document (cédérom, Hatier 2009) destiné aux professeurs de l'école primaire, qui concerne « Les dessous du numérique » c'est-à-dire, en deçà des connaissances numériques bien identifiées par les professeurs, les connaissances qui posent problème aux élèves dans la résolution de problèmes du domaine numérique ou d'autres. Nous nous sommes appuyés sur des recherches existantes (Briand, 1999; Briand, Loubet, & Salin, 2004), que nous avons complétées sur certains points. Nous avons proposé aux participants (a) de réfléchir aux difficultés des élèves telles que nous les mettons en évidence, à partir notamment de

documents vidéos que nous avons réalisés ; (b) d'envisager des possibilités d'usages du cédérom en formation d'enseignants.

1. Une démarche de développement

1.1. Différents points de vue sur la recherche et le développement

Selon les pays et selon les disciplines, les traditions de recherche dans les différentes didactiques entretiennent des relations plus ou moins étroites avec le développement et l'innovation. En France et en mathématiques, il est courant de distinguer assez nettement des recherches fondamentales qui, en didactique comme dans d'autres disciplines, cherchent à augmenter nos connaissances sur les phénomènes qui se produisent dans l'enseignement des mathématiques, de recherches appliquées qui cherchent à produire des développements dans les pratiques d'enseignement (Margolinas, 2005).

Ces distinctions ne règlent pas la question des relations entre la recherche fondamentale et la recherche de développement. En effet, la recherche fondamentale a souvent recours à l'ingénierie pour produire des résultats, situation qui conduit nécessairement à affronter la réalité des classes et à construire, pour ces classes, des séquences qui sont parfois interprétées comme des « propositions didactiques » susceptibles, avec certaines adaptations, d'être proposées pour être mises en application dans les classes ordinaires, en contradiction même avec les intentions de leurs auteurs (Brousseau, 1998).

C'est sans doute à cause de cette apparente proximité entre ingénierie et pratique de classe qu'un schéma classique pour décrire les relations entre recherche fondamentale et développement peut se résumer ainsi (Margolinas, Mercier, & René de Cotret, 2007) : on imagine – idéalement – une sorte de chaîne descendante de la recherche fondamentale à l'ingénierie, au développement et à l'enseignement qui, pour sa part, fournit en retour une partie des questions pour la recherche fondamentale. Sans que ce schéma ne se trouve jamais écrit tel quel, il semble sous-jacent à certaines conceptions des relations entre recherche et enseignement, il n'y a qu'à penser aux discours sur la « théorie », la « pratique » et « l'articulation théorie-pratique » pour s'en convaincre.

Notre démarche1 est assez différente. En effet, nous faisons l'hypothèse que suffisamment de documents destinés à la classe (manuels, livres du maître, fichiers etc.) sont disponibles à l'heure actuelle, mais que les professeurs peuvent avoir, sur certains sujets, des difficultés à

[1] Groupe Développement des Mathématiques à l'Ecole (Démathé), INRP, dont la composition est variable depuis sa création en 2003.

nourrir des choix didactiques cohérents dans les situations variées dans lesquelles ils se trouvent : compréhension de stratégies des élèves dans certaines situations, réponses directes à des questions d'élèves, choix dans les situations proposées par les manuels, planification et organisation de l'enseignement, etc. Une telle démarche nous conduit à rechercher, dans les travaux de recherche fondamentale, les éléments épistémologiques de compréhension des savoirs mathématiques qui, le plus souvent, n'ont fait l'objet d'aucune diffusion en direction des professeurs et à nous demander comment une telle diffusion pourrait être possible.
C'est le résultat d'une telle démarche que nous esquissons ici.

1.2. L'énumération

Le premier sujet que nous avons décidé de traiter concerne l'énumération, nous nous référons donc à (Briand, 1999), dont la thèse sous la direction de Guy Brousseau (Briand, 1993) a exploré ce concept :

> « […] pour contrôler une situation de comptage, l'enfant doit faire fonctionner une connaissance (l'énumération) qui se réfère à l'exploration de la collection et qui conditionne complètement le bon déroulement de l'activité » (p. 52)

Il décrit alors le cas d'un élève qui doit compter le nombre d'éléments (des arbres dessinés sur une feuille de papier) et qui n'y parvient pas, alors qu'il connaît la comptine. Voici comment l'auteur analyse cette difficulté :

> « Quelle est la nature du problème qui se pose à cet élève ? Ce ne sont pas les connaissances relatives au nombre qui sont en cause. L'enfant échoue alors qu'il dispose de la suite numérique et d'un procédé d'exploration relativement bien organisé (deux chemins). Il s'agit donc d'une absence de connaissance (l'énumération) qui se manifeste par une absence de synchronisation effective entre une connaissance numérique et une organisation conjointe de la collection et qui empêche l'inventaire de la collection. » (p. 53)

Briand donne alors une description de l'activité :

> « Pour compter le nombre d'éléments d'une collection finie montrée, l'élève doit nécessairement :
>
> - *Etre capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.*
> - *Choisir un élément d'une collection*
> - *Enoncer un mot nombre (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mot-nombres).*
> - *Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.*
> - *Concevoir la collection des objets non encore choisis.*
> - *Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.*
> - *Savoir que l'on a choisi le dernier élément.*

- *Enoncer le dernier mot-nombre. » (p. 53)*

Les étapes en italiques caractérisent une connaissance non enseignée que Briand appelle énumération. Cette mise en évidence utilisée par l'auteur montre l'importance de ces étapes souvent ignorées par rapport à celles qui font intervenir les « mot-nombres » (seulement 3 et 8).

On retiendra que l'énumération est l'action d'organisation d'une collection qui permet de la parcourir d'une façon systématique et donc ordonnée.

L'énumération est nécessaire au comptage, mais ne dépend pas de la connaissance de la comptine. Briand a montré qu'il existait des situations d'énumération sans comptage et que l'énumération était enseignable (Briand et al., 2004). C'est dans le cadre de ces situations d'énumération « pures » qu'il a raffiné l'analyse des variables concernant l'énumération.

Son analyse permet notamment de comprendre les difficultés en jeu dans des items d'évaluation désormais classiques, tels que ceux que l'on peut trouver sur le site du ministère de l'éducation nationale en France2. Les élèves qui doivent « compter les ronds » placés en ligne (14 ronds) ou en désordre (8 ronds) présentent des difficultés d'énumération : ils sautent des ronds ou comptent le même plusieurs fois, le plus souvent sans difficulté dans l'énoncé de la comptine numérique. On remarque au passage que les concepteurs de cette évaluation ont choisi un nombre de ronds à compter « dans le désordre » (variable qui complique l'énumération) presque la moitié du nombre de ronds « en ligne ». Dans ces conditions, on obtient les mêmes résultats dans les deux configurations.

1.3. Une question de forme… et de fond

Notre démarche consiste à produire des documents pour le professeur, or les descriptions comme celles ci-dessus ne nous semblent pas nécessairement appropriées, pour plusieurs raisons. Tout d'abord il n'est pas facile de se représenter précisément ce qu'implique chacune des étapes de l'énumération. Ensuite le professeur ne s'intéresse à cette question qu'au travers de difficultés constatées chez des élèves, or dans cette description, même si ces difficultés sont évoquées, il faut tout de même les reconstruire.

C'est pourquoi, sans que cela relève d'une « mode » ou d'une intention au départ, nous avons décidé d'opter pour une forme de CD-Rom pour notre document. En effet, il est très facile, à l'aide d'un clip vidéo, de montrer les actions effectives des élèves dans des tâches d'énumération, là où la description est malaisée (Margolinas, Wozniak, De Redon, & Rivière,

[2] http://www.banqoutils.education.gouv.fr/fic/ECPCAB01.pdf (Consulté le 13 avril 2008).

2007). De plus, l'insertion de clips vidéo permet au professeur de se trouver, comme dans la classe, en situation d'observation des actions des élèves, ainsi, ce qu'il pourra mieux comprendre au travers de notre document pourra sans doute plus facilement être réinvesti en classe en situation.

C'est bien parce que cette dimension d'observation nous semble au cœur du travail du professeur (Margolinas, 2002) que nous avons opté pour cette forme. En effet, nous pensons que l'observation des difficultés des élèves est un moteur de développement des pratiques des professeurs, ce que nous a confirmé une enquête (Margolinas & Wozniak, accepté) que nous avons réalisée.

Rendre compte de ce travail dans un texte n'est pas aisé, tant la forme adoptée est importante dans le cadre de notre travail ; dans la suite de ce texte, nous en donnerons néanmoins quelques éléments.

2. L'importance de l'énumération dans les apprentissages

2.1. L'énumération et les autres disciplines

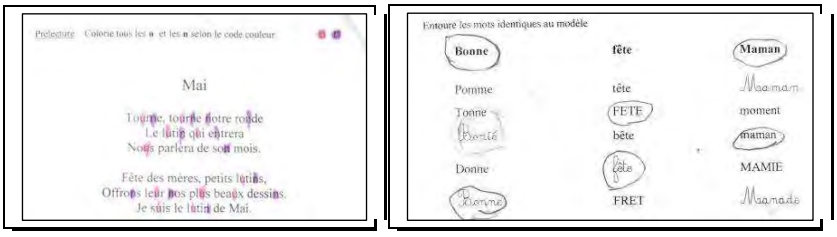

Figure 1 – L'énumération en prélecture

L'énumération intervient rarement isolée d'une autre activité, dans un premier temps, nous l'avons rencontrée dans le cadre du dénombrement. En fait, elle n'est pas réservée au domaine des mathématiques. Il y a de très nombreuses activités durant lesquelles il faut parcourir une collection de façon ordonnée et contrôlée.

Voici deux exemples très typiques en prélecture, que nous avons recueillis en grande section de maternelle (élèves de 5-6 ans), au mois de mai. Dans le premier il faut retrouver des lettres suivant un modèle. Il faut donc parcourir toute la collection des lettres pour retrouver les lettres u et n du modèle. Dans le second, il faut parcourir toute la collection des mots pour retrouver le mot du modèle. Cette deuxième fiche cache en fait une autre activité d'énumération, car les enfants ne savent pas lire. Quand ils considèrent un mot, ils doivent comparer les lettres de ce mot avec les lettres du modèle, une par une, dans l'ordre.

Dans nos observations en maternelle, nous avons remarqué que, pour les élèves les plus faibles, pour lesquels la reconnaissance de la lettre ou du mot est déjà difficile, le parcours de

la collection des lettres ou des mots ne va pas de soi non plus. Ils sont confrontés à une double difficulté : celle de la lecture, qui est repérée par le professeur, et celle de l'énumération, qui n'est souvent pas considérée.

Avec cette clé d'observation, il est possible de voir de l'énumération partout… effectivement, énumérer est une activité très courante, combinée avec toute sorte d'autres activités, qu'elles soient ou non mathématiques.

2.2. Recherche d'une situation

Pour mieux comprendre les difficultés liées à l'énumération, il peut être important de les observer dans des situations où l'énumération intervient seule (ou principalement), alors que nous venons de voir que l'énumération intervient dans de nombreuses situations où elle est liée à d'autres connaissances et, de ce fait, souvent mal identifiée. Nous avons conçu une telle situation, destinée à l'observation.

Une situation d'énumération nécessite la construction d'un parcours ordonné et contrôlé. La difficulté, surtout si on cherche une situation sans dénombrement, c'est de trouver un moyen de valider ce parcours. Notre solution (le lecteur pourra en trouver d'autres, nous n'en doutons pas !) consiste à disposer de petits objets (des morceaux de sucres, dans le CD-Rom) sur une table et à les cacher sous de petits « chapeaux » de papiers (voir figure 2).

Figure 2- Une situation d'énumération

L'élève doit récupérer tous les sucres cachés sous les chapeaux, pour cela, il doit soulever un seul chapeau, prendre le sucre, le déposer dans la boîte et replacer le chapeau au même endroit (l'emplacement est marqué par une croix sur la feuille). S'il soulève un chapeau et ne trouve pas de sucre, il a perdu. Quand l'élève annonce qu'il a terminé, on enlève tous les chapeaux, si tous les sucres ont bien été trouvés, l'élève a gagné.

2.3. Observation d'une situation d'énumération

Nous avons observé des élèves hors classe dans cette situation de la moyenne section de maternelle (élèves de 4-5 ans) au CM2 (élèves de 10-11 ans). Notons tout d'abord qu'il y a une très grande diversité des réussites et des échecs (des élèves jeunes réussissent, des élèves

âgés échouent), ce qui est caractéristique d'une connaissance qui, n'étant pas enseignée, évolue peu. Par ailleurs, les stratégies des élèves montrent bien une organisation plus ou moins efficace.

Certains élèves (comme Olivia, 8 ans) soulèvent des chapeaux dans l'ensemble de la feuille sans organisation visible. Leur échec est prévisible.

La plupart des élèves qui réussissent traitent séparément deux sous-collections : une sous-collection composée des cinq éléments à gauche sur la figure 2 et une sous-collection composée des dix éléments restants. La sous-collection de gauche, peu nombreuse, est énumérée assez simplement. Par contre, beaucoup d'élèves ont des difficultés avec la sous-collection de droite de dix éléments.

Ceux qui réussissent parcourent cette sous-collection en ayant recours aux deux organisations sous-jacentes à la raison graphique (Goody, 1977/1979) : les lignes et les colonnes. La reconnaissance de ces organisations permet de comprendre que l'énumération n'est pas « naturelle », mais qu'elle se construit : c'est une connaissance. Elle permet aussi de considérer l'agencement des points à énumérer comme un jeu de variables : plus cet agencement est proche d'une organisation facile à identifier, comme celle des lignes ou des colonnes, plus l'énumération est simple.

Cette analyse nous semble importante pour le professeur. Elle permet, dans une tâche où l'énumération intervient (pas nécessairement isolément) de repérer les difficultés qui lui sont spécifiques, ce qui permet au professeur de prendre des décisions. En effet, si l'objet du travail n'est pas l'énumération et qu'elle n'intervient que comme une gêne, le professeur peut modifier l'exercice à l'avance pour simplifier l'énumération. Au contraire, quand il souhaite que les élèves travaillent les connaissances d'énumération, il peut laisser celle-ci à leur charge pour qu'ils s'y essayent. Il peut aussi, quand il le juge opportun, montrer aux élèves qu'il est possible d'organiser l'énumération en s'appuyant sur des formes de base (comme ligne et colonne). En effet, même s'il est possible d'enseigner l'énumération, comme l'a montré Briand, il est possible aussi d'être attentif, comme pour les autres connaissances, à permettre son apprentissage, même dans des situations non spécifiques. Les situations ordinairement vécues à l'école maternelle en donnent de très fréquentes occasions.

Ce qui est important ici, c'est que nous montrons, dans le cas de l'énumération, que la « capacité à s'organiser », qui est souvent décrite par les professeurs comme une « propriété de l'élève » (celui-ci s'organise mal !), est en fait une connaissance, qui peut être travaillée.

Ce qui nous semble important également, c'est que cette analyse ne préjuge pas d'une forme d'enseignement, celle-ci est à la charge du professeur. Notre travail cherche à donner des clés d'observation des difficultés des élèves pour les professeurs, qui puissent les conduire à prendre des décisions qui prennent mieux en compte les connaissances en jeu, telles qu'elles ont été mises en évidence par les recherches en didactique des mathématiques. Par contre, nous ne cherchons pas à intervenir sur les formes d'enseignement, qui ont bien entendu aussi leur importance. Nous pensons en effet qu'il peut être important d'aider les professeurs à trouver des formes d'enseignement plus efficaces, mais qu'il est aussi essentiel de leur fournir de meilleurs instruments de choix pour nourrir leur pratique.

3. Les gestes de l'activité mathématique

Le travail que nous présentons ici peut sembler trivial ; en effet, l'organisation des collections est parfois considérée comme une activité qui va de soi, une « simple » difficulté à organiser ses actions. Pour comprendre ces difficultés, il faut en effet s'intéresser de façon précise à ce que l'élève fait avec ses mains, où il dépose les objets qu'il a à traiter. On est bien loin de la preuve, de l'argumentation, encore moins de la démonstration, qui donnent aux mathématiques ses lettres de noblesse !

Notre intérêt ne s'exerce pourtant pas au hasard, puisque Guy Brousseau (1998, résumé des travaux entrepris depuis les années 60) a montré l'importance des modèles implicites d'action qui sont les générateurs des connaissances.

Pourtant, d'une façon plus générale, les gestes de l'activité mathématique, dans leur dimension matérielle, ne sont souvent pas considérés comme relevant d'apprentissages et encore moins d'un enseignement. On constate ainsi que trop souvent le maniement d'instruments aussi simples que la règle, pour ne pas parler des ciseaux, est négligé dans le cadre scolaire, le professeur déplorant leur mauvais usage, sans pour autant entreprendre d'action effective pour en améliorer l'efficacité.

Tout se passe comme si l'élève aurait du apprendre ailleurs, dans l'environnement social et principalement la famille, certains gestes nécessaires pour sa réussite dans l'accomplissement des tâches scolaires. Et pourtant, nous montrons que ce n'est pas le cas. Il y a là une source de malentendu, voire de méfiance, entre l'école et les familles, dont les origines sont sans doute multiples, l'une d'elle pouvant être recherchée dans les interactions entre les modifications des pratiques sociales et les impératifs scolaires (Margolinas, René de Cotret, & Giroux, 2006). Le cas de l'organisation des collections nous paraît assez emblématique de ces

tensions, en effet, si la famille implique les enfants par exemple dans certaines tâches ménagères, comme cela a pu être le cas plus fréquemment autrefois, non pas pour apprendre quoi que ce soit aux enfants, mais pour partager certains travaux fastidieux, il est possible que ces situations fournissent aux enfants des occasions d'organiser des collections complexes (le tri des pierre dans les paquets de lentilles, par exemple), l'école n'a alors pas la charge spécifique d'organiser cette rencontre entre l'élève et ces types de situations.

Ainsi, l'impression de « trivialité » des connaissances liées à l'organisation des collections et à l'énumération est peut-être à mettre en relation avec une non légitimité historique de ces connaissances dans le cadre scolaire, que les transformations sociales obligent à reconsidérer.

4. Conclusion

Le CD-Rom que nous avons présenté est conçu *a priori* comme le premier élément d'une collection dont nous espérons qu'elle pourra un jour s'enrichir (sachant que malheureusement chaque élaboration prend beaucoup de temps). La difficulté de notre travail est que ce document, qui développe des éléments d'analyses épistémologique et didactique du travail de l'élève, est destiné à l'auto-formation des professeurs des écoles. L'ambition est modeste, puisque nous ne traitons qu'un tout petit aspect des mathématiques à l'école.

Néanmoins, les interactions avec les participants de l'atelier permettent d'envisager que d'autres aspects du métier de professeur, voire du rapport aux mathématiques pourraient être également visés.

En effet, nous montrons d'une part qu'il faut douter du caractère purement personnel de certaines qualités (savoir s'organiser) ce qui peut conduire à considérer différemment certaines difficultés récurrentes des élèves. Nous montrons d'autre part la nécessité de développer des mécanismes d'observation et des éléments d'analyse de ces difficultés.

Références bibliographiques

BRIAND, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

BRIAND, J. (1999). *Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(1), 41-76.

BRIAND, J., LOUBET, M., & SALIN, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris, Hatier.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

GOODY, J. (1977/1979). *La raison graphique* (J. Bazin & A. Bensa, Trans.). Paris, Les éditions de minuit.

MARGOLINAS, C. (2002). *Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur*. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (pp. 141-156).* Grenoble, La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS, C. (2005). *Essai de généalogie en didactique des mathématiques.* Revue suisse des sciences de l'éducation, 27(3), 343-360.

MARGOLINAS, C., MERCIER, A., & RENE DE COTRET, S. (2007). *Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire*. In L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas & A. Mercier (Eds.), *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques? Actes des journées mathématiques INRP 14 et 15 juin 2006 (pp. 25-36).* Lyon, INRP.

MARGOLINAS, C., RENE DE COTRET, S., & GIROUX, J. (2006). *Transformation de situations sociales et leurs conséquences sur certaines connaissances en jeu en contexte scolaire.* Paper presented at the L'école, lieu de tensions et de médiations : Quels effets sur les pratiques scolaires ? Actes du colloque international de l'AFEC, Lille.

MARGOLINAS, C., & WOZNIAK, F. (accepté). *Usage des manuels dans le travail du professeur : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire*. *Revue des sciences de l'éducation.* Numéro spécial: Les manuels scolaires : réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissages des élèves.

MARGOLINAS, C., WOZNIAK, F., DE REDON, M.-C., & RIVIERE, O. (2007). *Les mathématiques à l'école ? Plus complexe qu'il n'y paraît ! Le cas de l'énumération de la maternelle... au lycée.* Bulletin de l'APMEP, 471, 483-496