INFLUENCE DE LA NATURE DE LA SITUATION SUR L'APPARITION, LE TRAITEMENT ET L'USAGE PAR L'ENSEIGNANT DES RAISONNEMENTS PRODUITS PAR LES ELEVES

ATELIER PROPOSE PAR

P. GIBEL, IUFM d'Aquitaine, LACES équipe DAESL

1. INTRODUCTION

Cet atelier a été proposé suite à une recherche sur les fonctions des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique, en mathématiques, à l'école primaire.
Nous commencerons par préciser ce que nous entendons par le terme « raisonnement » (§2). Bien que très employé par les enseignants de toutes les disciplines et par les chercheurs, il reçoit des acceptions très variées. De sorte que nous avons préféré définir directement notre objet et notre méthode d'étude pour classer les différentes formes de « raisonnements » qui nous intéressent. D'autant plus que nous définissons et classons les raisonnements suivant *leur fonction* dans la relation didactique, ce qui n'a pas été fait systématiquement jusqu'à présent. Nous définirons dans le (§3) la notion de situation-problème et nous justifierons le contexte et les raisons de cette étude.
Nous nous sommes limités dans cet atelier à l'analyse clinique d'une partie d'une leçon basée sur la mise en œuvre d'une situation-problème en arithmétique, que nous exposerons (§4) et dont nous décrirons le déroulement d'ensemble. Dans le (§5) nous analyserons les formes des raisonnements qui apparaissent lors des phases de recherche et de mise en commun. Nous étudierons alors (§6) les questions suivantes : la situation-problème proposée a-t-elle privilégié la production de raisonnements chez les élèves ? Quelle est la valeur de ces raisonnements ? Sont-ils associés à des apprentissages et à des acquisitions utiles ? Quels sont les choix didactiques de l'enseignant qui déterminent très fortement la présence, le sens et les possibilités réelles de traitements et d'utilisations des raisonnements des élèves ?

2. LES RAISONNEMENTS EN CLASSE

2. 1. La détermination d'un raisonnement produit par un sujet : notion de « situation »

Le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. Pour cette raison nous avons pris comme définition de base celle proposée par P. Oléron :

> « Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but ». (Le raisonnement, 1977, p. 9)

Par conséquent, pour affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement dont les éléments sont en (grande) partie implicites, il est nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être accepté comme « effectif ».
Souvent le professeur accepte des indices et les interprète davantage en fonction de leur utilité pour le déroulement de la leçon que de leur authenticité du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. L'observateur doit donc suivre une autre voie. Il convient qu'il montre que tel raisonnement complet dont il n'aperçoit qu'une partie ou que des indices est bien celui qu'il faut attribuer à son auteur.

Pour cela il convient de montrer que le supposé raisonnement

- pourrait être énoncé par le sujet ou, qu'au moins, la règle est connue de lui, le fait A est perçu par lui de telle ou telle façon ;
- est utile (il réduit une incertitude, par exemple, s'il y a doute car une autre règle aurait pu être appliquée) ; le lien ne doit pas être l'effet d'une cause, par un mécanisme qui échapperait au jugement et à la volonté du sujet ;
- est motivé par un avantage qu'il procure au sujet ; il est l'instrument d'une modification de son environnement qui lui parait favorable ;
- est motivé par des raisons « objectives », propres : arguments de pertinence, de cohérence, d'adéquation, d'adaptation, qui justifient ce raisonnement là (et pas un autre) par opposition à l'idonéité (la conformité aux attentes du professeur).

Parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques unes seulement – le moins possible - peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent que nous appelons « situation ». La situation est une partie seulement du « contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du professeur et elle comprend (mais pas seulement) une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet, ni à la connaissance qui la motive mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet.

Ce point de vue est un peu différent de celui qui prévaut légitimement chez les professeurs où les seuls raisonnements vraiment utilisables sont les raisonnements entièrement corrects. Un raisonnement faux n'est qu'assez exceptionnellement un objet d'étude.

La théorie des situations a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.

2.2. Les raisonnements effectifs

Les raisonnements que nous étudierons seront essentiellement modélisables par des inférences c'est-à-dire des relations de la forme « Si la condition A est réalisée, alors la condition B l'est (ou le sera) aussi »[1]. Mais cette définition doit être complétée car nous voulons pouvoir

- distinguer les raisonnements effectifs des citations,
- intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités aussi bien que par des déclarations,
- traiter les productions métamathématiques ou didactiques aussi bien que mathématiques,
- distinguer le sens d'un même raisonnement selon qu'il est produit pas un élève ou par un enseignant.

a) Un *raisonnement* est donc une relation R entre deux éléments A et B tel que :

- A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;
- B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;
- R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

[1] Bien que très utilisé dans le discours mathématique, le mot n'appartient ni à un langage mathématique, ni à la métamathématique proprement dite. En théorie des situations, la définition précise la fonction de ce type d'inférences suivant la « logique effective » initiée par P. Lorenzen (Metamathematik Institut AG Manheim 1962)

b) Un *raisonnement effectif* comprend de plus :
- un agent E (élève ou professeur) qui utilise la relation R,
- un projet déterminé par une situation $\mathbb{S}$ dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

On peut dire que pour réaliser le projet déterminé par la situation $\mathbb{S}$, le sujet utilise la relation R qui permet d'inférer B de la condition A. Ce projet peut être convenu et explicité par 'agent ou il peut lui être prêté par l'observateur à partir d'indices.

La définition devra à son tour être complétée pour permettre de distinguer les raisons de l'élève, celles du professeur et celles de l'observateur, et si on veut discuter formellement les modalités de l'analyse effectuée.

2.3. Première classification d'après la fonction et le type de situation

En conclusion du paragraphe précédent, un raisonnement est identifié par sa fonction dans une situation, par le rôle qu'il y joue. Cependant un raisonnement peut avoir des fonctions différentes, décider, informer, convaincre, expliquer. Elles sont différenciées par des modèles de situations mathématiques (d'action, de formulation, de preuve[2]…) généraux mais différents.

D'après ce qui précède, nous nous attendons à distinguer des formes – que nous appelons niveaux - plus ou moins dégénérées d'inférences, adaptées aux différents types de situations :

- raisonnements formels complets comportant une suite d'inférences correctement articulées et implicitement ou explicitement référées à la situation ou à un des répertoires admis par la classe (valides ou non) ; ce type de manifestation est caractéristique des situations de validation (niveau 3 : N3) ;
- raisonnements formellement incomplets, mais dont les parties manquantes peuvent être raisonnablement imputées à l'actant comme implicites, les conditions effectives ne justifiant pas la formulation complète ; ce type de raisonnement se manifeste principalement dans les situations de communication (niveau 2 : N2) ;
- raisonnements n'apparaissant pas formellement, mais qui peuvent être inférés à partir des décisions et des actions du sujet par l'observateur (ou par le professeur) comme modèles implicites d'action (théorèmes en actes) (niveau 1 : N1).

2. 4. Les fonctions didactiques des raisonnements selon les types de situations

De plus, à un moment donné du déroulement d'une leçon, on peut identifier, suivant les intentions des participants, un très grand nombre de situations plus ou moins « emboîtées ». Celles qui nous intéressent plus précisément sont celles qui émergent et qui influencent *le processus collectif* commun dont le professeur veut faire usage.

Le raisonnement effectif de l'élève dans la résolution d'un problème classique

Mais le raisonnement effectivement utilisé par l'élève est le résultat d'une activité mentale différente de la solution standard, et il répond à une situation S dont l'énoncé du problème n'est qu'une composante. L'élève agit pour trouver la solution demandée mais n'a pas à rendre compte de ses tentatives. Donc l'observateur, tout comme le professeur, doit interpréter ce qu'ont produit les élèves dans un système plus large et plus complexe, s'il veut avoir une chance d'interroger ou d'expliquer pourquoi ils ont produit tel ou tel raisonnement, qu'il soit correct et adéquat ou non. Aussi, pour analyser avec eux leurs productions, le professeur doit considérer, au moins implicitement, qu'ils sont confrontés à des conditions réelles plus ouvertes que le texte du problème (i. e. une Situation d'action dont le milieu est la situation objective). C'est à ce niveau qu'appartiennent les justifications tactiques, stratégiques, ou

[2] Brousseau 1997 Theory of Didactical Situations in Mathematics, p. 8 – 18

ergonomiques à propos du bien fondé, de l'adéquation, du choix des inférences ou de leur enchaînement qui ne figurent pas dans la solution standard.
On peut distinguer plusieurs cas suivant les possibilités effectives qui s'offrent à l'enseignant de justifier auprès de ses élèves la mise en œuvre de la solution standard (et de discréditer les solutions erronées).
Dans le premier cas, le professeur peut effectivement *justifier* la construction de la solution du problème par

- la mise en œuvre des connaissances acquises par les élèves (enseignées et supposées acquises),
- et par la considération des informations contenues dans la situation objective.

Dans le deuxième cas, il lui faut faire appel à un raisonnement original, mais logiquement réductible aux données et aux connaissances des élèves comme le cas précédent. Il a fait, volontairement ou non, un pari (gagné avec certains, perdus avec d'autres) sur leurs capacités heuristiques.
Dans le troisième cas, la solution fait appel à des conditions qui ne figuraient pas dans les connaissances acquises et qui n'étaient pas logiquement déductibles des données. Ce cas ne se produit guère avec les problèmes classiques, mais il peut survenir dans des situations « ouvertes ». La solution standard n'est pas constructible par les élèves seuls et le professeur doit à un moment ou à un autre intervenir pour la faire apparaître. Mais de plus, le professeur ne peut pas la faire apparaître comme une conséquence « raisonnée » de l'articulation des données du problème basée sur les connaissances (supposées) des élèves.
Dans les deux premiers cas, les conditions de la « situation objective » suffisent à expliquer et justifier chacune des productions, le projet correspondant peut alors être communiqué à l'ensemble des élèves. Le raisonnement est produit par l'élève comme une action « raisonnée » à partir des conditions qui définissent la situation objective à laquelle il est confronté[3]. Le raisonnement apparaît comme une *« raison de savoir » :* les raisonnements produits permettent de justifier la validité des connaissances par leurs rapports logiques avec d'autres, autrement dit par des raisons « internes » au savoir.
Dans le troisième cas, l'élève ne peut « admettre » la solution que sur la foi de l'autorité du professeur et en tout cas il ne peut pas y avoir d'apprentissage en situation autonome.

Le raisonnement comme cause et moyen d'apprentissage autonome,

Dans les deux premiers cas, le raisonnement peut être produit par les élèves, pour les besoins de la résolution, sans intervention, ni recours à l'enseignant :

- comme un moyen pour un ou plusieurs élèves d'établir leurs décisions dans des situations dites[4] « situations d'action » autonomes,
- comme un moyen d'appui un peu formel, pour préciser une information dans une simple communication,
- comme moyen de convaincre un ou des condisciples de la validité d'une déclaration, plus généralement pour justifier la validité d'une déclaration.

L'apprentissage d'un nouveau raisonnement est le résultat de sa promotion du statut de moyen particulier au problème donné à celui de moyen « universel » pour résoudre une famille de nouveaux problèmes et de son intégration dans le répertoire du sujet. En situation autonome, il s'agit d'une induction, mais elle est appuyée par une chaîne explicitable d'inférences.

[3] Le sujet (e) par l'usage de la règle R justifie que dans les conditions A, la conclusion ou la décision B s'impose à lui pour satisfaire la situation $\mathbb{S}$.
[4] en Théorie des Situations didactiques en Mathématiques

Dans le troisième cas, l'apprentissage autonome ne peut pas étayer cette intégration. Elle ne peut être que le résultat d'un enseignement.

3. LES SITUATIONS-PROBLEMES

Le développement des mathématiques et de leur enseignement a produit un nombre incalculable de problèmes propres à solliciter toutes sortes de formes de raisonnements. Mais l'enseignement direct des solutions et plus tard des méthodes de résolutions (*problem solving method*) tend à refermer ce que la notion même de problème tente d'ouvrir. L'ingénierie didactique (notamment celle issue de la TSDM) a produit de nombreuses situations complexes spécifiques des connaissances à enseigner en définissant les conditions propres à maintenir l'ouverture (l'incertitude nécessaire au raisonnement) du côté des élèves, tout en étant finalement assez certaines pour le professeur. Elles contiennent un ou plusieurs problèmes classiques mais les mettent en scène de façon à mobiliser d'autres causes et raisons de résolution et d'apprentissage que la seule validité mathématique. D'autres idées sont apparues allant dans le même sens : a) proposer des problèmes ouverts (dont le professeur ignore la solution) b) produire des situations à partir des problèmes classiques, à l'aide de dispositifs automatiques : habillages divers (*words problems*), mises en scène (*story problems*), évocations d'un environnement (*embeded context problems*), données absentes ou surabondantes, suppression des questions ou questions « absurdes », mise en débat des résolutions, mise en groupes des élèves… En même temps est apparu sous le nom de *« situations-problèmes »* une activité didactique globale dans laquelle les phases didactiques et les phases d'activité et d'apprentissage autonome ou quasi autonome s'entrelacent. Ce terme peut englober tous les autres. Mais il tend à diluer les possibilités de contrôler les vertus didactiques de chacune des phases. Une situation-problème peut ménager dans ses diverses étapes, des situations d'apprentissage autonome - ou supposées telles - nombreuses et inattendues. Mais le bon déroulement de ces phases d'apprentissage apparemment autonome dépend en principe des qualités réelles de la situation laissée aux élèves.
Nous cherchons à savoir dans quelle mesure des situations qui théoriquement ne peuvent pas être dévolues permettent néanmoins la production de raisonnements par les élèves. Les situations problèmes offrent des conditions de ce type.

3.1. Présentation des situations-problèmes

3.1.1. Origine

L'usage des situations problèmes, c'est-à-dire des problèmes ouverts s'est fortement répandu, en France, ces dernières années dans les classes de l'école primaire. Les raisons avancées sont bien connues :

- offrir aux élèves des « modèles » de situations de recherche ou de fonctionnement naturel des connaissances,
- stimuler le travail autonome, améliorer la motivation des élèves
- lutter contre l'apprentissage formel d'algorithmes appropriés à un champ limité d'exercices convenus, faire raisonner au lieu de simplement calculer.

L'utilisation des situations problèmes est susceptible de créer des conditions favorables à diverses sortes d'activités mathématiques qui paraissent difficiles à obtenir dans les situations classiques : poser des questions, rechercher des informations, en vérifier la pertinence et la plausibilité, organiser une suite d'activités…
Le problème classique et sa solution sont ainsi enchâssés dans un « contexte » en relation complexe avec la connaissance, objet de l'enseignement.
Les conditions effectives créées dans les situations-problèmes peuvent être très diverses : interactions autonomes avec un milieu matériel (par ex. figures géométriques) ou des

systèmes (par ex. informatique), interactions autonomes avec d'autres élèves (en groupes, petits ou grands), interactions didactiques avec le professeur…
Une situation-problème est un conglomérat de conditions décomposables en éléments plus simples qui correspondent aux divers types proposés dans la théorie des situations : situations d'*actions,* de *communication*, de *validation,* d'*institutionnalisation* ou de *dévolution*. Mais ces situations composantes peuvent apparaître de façon inopinée, sur une initiative inattendue d'un élève ou du professeur. Ce caractère potentiellement erratique des situations-problèmes contribue à donner au professeur une impression de grande liberté, de spontanéité, de naturel… Cette impression n'est probablement pas étrangère au succès de ces méthodes. Le savoir apparaît d'une façon qui ne semble pas intentionnelle, pas préparée…

3.1.3. Caractères, conditions, résultats.
Les conditions d'utilisation de ces situations problèmes sont très souples. Elles permettent une large gamme de choix didactiques qui stimulent aussi les professeurs, entre la dévolution radicale, la recherche dirigée et l'exposé magistral d'une maïeutique imaginaire.

3.1.4. Les raisons de la présente étude
En revanche on peut s'interroger sur les résultats de l'usage des situations-problèmes. Malgré la variété des méthodes didactiques qui peuvent accompagner cet usage, y a-t-il des caractères communs ? Quelle est l'activité réelle des élèves ? Quels bénéfices en tirent les élèves et les professeurs ? De quels outils dispose l'enseignant pour évaluer les acquis de l'élève ? Quels inconvénients ou quels risques présente cet usage ?
On peut en particulier s'interroger sur les avantages annoncés. Y a-t-il une augmentation qualitative et quantitative des raisonnements produits ?

3.2 Le contexte de la leçon observée
3.2.1. Le professeur, les élèves, et la formation des professeurs
L'enseignant a élaboré et proposé à ses élèves cet énoncé pour montrer aux enseignants en formation :
1) la richesse, l'originalité et la variété des raisonnements produits par les élèves par confrontation à la situation-problème ; il souhaite ainsi mettre en évidence les capacités réelles de ses élèves à produire des raisonnements dans des situations nouvelles ;
2) les capacités des élèves à formuler et à expliciter leurs raisonnements lorsqu'ils viennent présenter leur production lors de la phase de mise en commun ;
3) les arguments et les raisonnements logiques qu'il utilise afin de traiter les raisonnements des élèves ;
4) les moyens qu'il met en œuvre pour faire en sorte que les élèves réagissent aux raisonnements présentés par leurs camarades, et débattent de la validité et de la pertinence des raisonnements qui sous-tendent les productions.
Son objectif est donc de faire prendre conscience aux professeurs stagiaires de l'intérêt des situations-problèmes pour l'apprentissage et plus précisément l'usage du raisonnement.

3.2.2 Présentation – et défense obligatoire - des diverses stratégies didactiques

Cet enseignant a coutume de faire dévolution aux élèves de situations d'action, basées sur des ingénieries préalablement expérimentées, ayant fait l'objet de publications à destination des enseignants. Il justifie le choix de ce type de situation par le fait qu'elles permettent aux élèves :

- d'élaborer une ou plusieurs procédures, basées sur leur répertoire de connaissances,
- d'éprouver leur(s) procédure(s),
- de prendre conscience des décisions qui sous-tendent leur raisonnement.

En effet ces situations se caractérisent ainsi :

1. l'élève dispose du répertoire nécessaire pour concevoir les stratégies de base,
2. les connaissances nécessaires pour élaborer les stratégies de résolution ne sont pas trop éloignées du répertoire des élèves,
3. l'élève peut obtenir en réponse à son action les informations nécessaires à la résolution du problème,
4. l'élève peut déterminer par lui-même si le résultat obtenu est correct ou non,
5. l'élève peut faire plusieurs tentatives.

La phase de mise en commun des procédures permet alors aux élèves de revenir sur leurs procédures et d'analyser les décisions qui sous-tendent leur raisonnement. Notre étude permet d'établir que les élèves parviennent à utiliser les raisonnements, produits en situation d'action, comme arguments permettant de justifier la validité ou la non validité des productions.

Les intentions du professeur dans la conduite de la leçon observée sont d'une part de ne pas intervenir lors de la phase de recherche de manière à ce que le déroulement de cette phase soit semblable à celui d'une situation d'action, d'autre part d'intervenir à minima lors de la phase de présentation des productions, espérant ainsi amener les élèves à débattre de la validité et de la pertinence des raisonnements qui sous-tendent les productions.

4. LA LEÇON OBSERVEE

4.1 Les composantes de la situation

4.1.1. Le problème (la situation objective)

L'énoncé de la situation problème distribué par le maître en début de séance était rédigé ainsi :

> *« Une journée de ski à Gourette est organisée samedi pour les élèves du canton d'Oloron. Le Conseil Général décide pour cet événement exceptionnel de leur offrir les forfaits pour la journée.*
>
> *La station de Gourette propose les tarifs suivants :*
>
> | | |
> |---|---|
> | *216 forfaits :* | *1275€* |
> | *36 forfaits :* | *325€* |
> | *6 forfaits :* | *85€* |
>
> *979 enfants sont inscrits, mais au moment du départ, il y a 12 absents, malades bien sûr…*
>
> *Le comptable du Conseil Général se dit « Dommage pour ces petits, mais ce n'est pas grave ; et puis la dépense sera moins élevée. »*
>
> *Qu'en penses-tu ? »*

Le déroulement de la séquence, choisi par l'enseignant, suit un plan devenu très usuel en France : présentation de l'activité de recherche (phase 1), lecture de l'énoncé (phase 2), informations complémentaires, explication des termes de l'énoncé, discussion et explicitation de la question relative à l'énoncé (phase 3), recherche individuelle (phase 4) d'une durée de 10 minutes environ, constitution de groupes (phase 5), recherche en groupes et élaboration d'une production écrite (phase 6) d'une durée de 25 minutes environ, mise en commun des productions : chaque groupe vient tour à tour au tableau présenter sa production (phase 7).

La situation objective

C'est celle qui est décrite dans l'énoncé d'un problème, et dont l'élève doit s'occuper sans remettre en question la réalité de ce qui lui est ainsi présenté comme « objectif ».

Le texte proposé n'est pas un énoncé de problème au sens habituel puisqu'il ne comporte pas de question explicite. Ce procédé est parfois utilisé pour inciter les élèves à formuler eux-mêmes des questions et des conjectures, et ne pas se contenter de répondre à des questions déjà posées et parfois même déjà enseignées, ou à résoudre de façon standard des problèmes rituels. Mais ne pas poser de questions après l'exposé d'une certaine situation n'est justifiable, sur le plan des apprentissages, que

- si plusieurs questions *intéressantes* pour les élèves sont raisonnablement suggérées par la collection de déclarations qui fixent la situation objective,
- si le professeur accepte d'intervenir au cours de la détermination du problème et donc de la résolution, qui de ce fait ne peut plus autonome.

Alors que l'objectif affiché de cette méthode est d'ouvrir l'élève à des questions nouvelles et personnelles, ce dernier devient en fait plus dépendant de l'activité et des interventions du professeur qu'il ne l'aurait été dans un problème donné sous forme d'un énoncé classique.

Les élèves auront donc à comprendre que les renseignements fournis permettent de calculer la dépense totale sous deux hypothèses distinctes, que ces deux dépenses ne sont peut être pas égales et qu'il s'agit de les comparer. La seule question intéressante est la suivante « La dépense sera-t-elle plus élevée pour 979 élèves que pour 967 élèves (comme le suppose le comptable)? »

- Le cœur de la situation mathématique proposée est un problème d'optimisation et de programmation linéaire. Calculer le prix des forfaits nécessaires revient à calculer le minimum d'une fonctionnelle linéaire, correspondant au coût de la dépense pour un nombre d'enfants N fixé.

Si la fonctionnelle est notée $J(n_1,n_2,n_3)$ où n_1 désigne le nombre de groupements de 216 forfaits achetés, n_2 désigne le nombre de groupements de 36 forfaits achetés et n_3 désigne le nombre de groupements de 6 forfaits achetés, le coût de la dépense correspondante peut s'écrire sous la forme

$$J(n_1,n_2,n_3) = 1275\times n_1 + 325\times n_2 + 85\times n_3$$

La contrainte, où N désigne le nombre d'enfants, est une « contrainte inégalité »

$$n_1 \times 216 + n_2 x36 + n_3 \times 6 \geq N$$

traduisant le fait que le nombre de forfaits achetés doit être supérieur au nombre d'élèves N.

Il s'agit alors de calculer le minimum de $J(n_1, n_2, n_3)$ pour N donné donc de résoudre le problème d'optimisation linéaire avec contrainte suivant :

$$\begin{cases} \underset{n_1,n_2,n_3}{Min}\ J(n_1,n_2,n_3) = \underset{n_1,n_2,n_3}{Min}\ (1275\times n_1 + 325\times n_2 + 85\times n_3) \\ N - n_1\times 216 - n_2\times 36 - n_3\times 6 \leq 0 \end{cases}$$

La résolution de ce problème d'optimisation n'a évidemment de sens que pour n_1,n_2,n_3 entiers naturels. Le fait d'identifier le problème comme relevant de l'optimisation nous permet de repérer les alternatives ouvertes aux conceptions habituelles des élèves et les connaissances qui vont implicitement ou explicitement être mises en œuvre par les élèves dans la résolution.

- L'analyse mathématique de la situation montre l'influence de plusieurs variables didactiques. Pour chacune le professeur choisit des valeurs qui augmentent la complexité : le nombre de paramètres (8) et d'indéterminés (3) est très élevé et leur désignation verbale n'est ni simple ni familière aux élèves. De plus les valeurs des paramètres ne facilitent pas la compréhension ni la résolution :

  - Considérons tout d'abord le nombre de forfaits correspondant à chacun des groupements. Le choix des valeurs 1, 10, 100 se serait traduit par un travail sur la numération décimale, le choix des valeurs 6, 36, 216, c'est-à-dire d'une base 6, rend la tâche de l'élève beaucoup plus complexe. D'autant plus qu'une logique de la vente en gros exclut la vente de forfaits à l'unité.

  - Le nombre d'enfants présents le jour du départ (967) est très grand pour « justifier » l'usage de 3 types de forfaits. Il n'est pas divisible par 216, ni par 36, ni même par 6 ce qui rend la tâche de l'élève plus complexe.

  - Le nombre total d'enfants (979) justifie la remarque du Conseiller général mais double le nombre de calculs à effectuer.

4.1.2 La situation de recherche (la situation d'action autonome) Actions possibles et actions attendues

La solution « standard » attendue par l'enseignant est très complexe. Si nous considérons que chaque étape de la résolution « arithmétique scolaire » du problème constitue un « module », la solution se décompose en 5 modules, chacun d'eux exigeant plusieurs opérations :

Module 1 : Calcul du nombre d'enfants présents le jour du départ noté N_p, le nombre total d'enfants est noté N_t.

Module 2 : Comparaison des trois tarifs proposés en vue de les ordonner.

Module 3 : Recherche d'une organisation, manière de concevoir l'achat de N forfaits, $N \geq N_p$, en combinant les différents tarifs, permettant de minimiser la dépense.

Module 4 : Recherche d'une organisation, manière de concevoir l'achat de N forfaits, $N \geq N_t$, en combinant les différents tarifs, permettant de minimiser la dépense.

Module 5 : Calcul du montant de l'économie réalisée par le comptable : calcul de la différence.

La complexité des modules 3 présenté et 4 est particulièrement élevée comparée à celle des problèmes présentés habituellement en situations autonomes. On peut supposer que les modules 1 et 2, beaucoup plus simples sont destinés à permettre à des enfants faibles de faire quelque chose…

4.1.3. Les situations d'apprentissages autonomes

La situation des forfaits n'est pas une situation d'action autonome à cause de l'impossibilité théorique pour les élèves d'obtenir de façon autonome la solution du problème qui leur est proposé par le simple jeu de raisonnements légitimes. Ils n'ont ni le temps ni même la possibilité de s'y adapter. Aucune des justifications, en référence au milieu, ne pourra être valide.

Ce que l'enseignant ou l'élève prétendra légitimer par la situation ne le sera pas vraiment puisque la situation n'offre pas cette possibilité. Les élèves ne possèdent pas d'autres ressources que leurs connaissances ou leur imagination car ils ne recevront aucune information ni aucun contrôle « objectif ». Seules leur mémoire ou les interventions du professeur pourront leur faire voir que leurs hypothèses, leurs méthodes ou leurs conclusions ne sont pas valides. De plus la situation proposée n'offrant pas à l'élève de rétroactions, ce dernier ne sera pas en mesure, lors de la mise en commun, de déterminer la « valeur » de sa production. Cette condition augmente la complexité de la situation. On peut en conclure que cette situation ne pourra pas fonctionner de façon autonome.

Par conséquent tout va reposer sur l'enseignant lui-même, sur ses choix, sur ses décisions didactiques et finalement sur des arguments rhétoriques didactiques dans le cas où les élèves ne disposeraient pas d'une représentation correcte de « la situation objective » qui sert de milieu à leur action.

4.1.4. Les situations didactiques (phase par phase)

La complexité de la situation objective analysée ci-dessus fait apparaître celle de la situation didactique, permettant ainsi de prévoir les difficultés de l'enseignant relatives à la gestion de chacune des phases de la leçon durant lesquelles il devra nécessairement intervenir. Dans les conditions énoncées précédemment, un très grand nombre de responsabilités restent à la charge du professeur et ne sont pas effectivement partageables. Le professeur devra donc intervenir pour:

1) présenter aux élèves l'activité (phase 1),
2) expliciter certains termes si nécessaire (phase 3),
3) institutionnaliser la question (phase 3) de manière à déterminer complètement le problème objet de la recherche des élèves,
4) gérer la phase de mise en commun au cours de laquelle les élèves viendront exposer leur procédure (phase 7). Compte tenu de sa stratégie didactique, il devra faire émerger un plan de résolution avec les bribes de solutions qu'il peut espérer trouver comme productions des groupes. Il lui faudra, lors de la présentation des différents groupes, deviner les intentions et les interprétations parfois erronées de la situation pour les corriger au moment opportun.

   Le temps imparti à la réalisation de la tâche indiquée laissera peu de place pour une identification et une étude des connaissances nécessaires, pour un enseignement de la solution, ni pour aucun exercice réellement autonome.

   En conclusion nous nous attendons à voir apparaître dans les productions des élèves, de nombreuses questions et de nombreux éléments de « raisonnements », soit pour la conception de diverses composantes de la solution, soit pour l'organisation de la résolution, mais aucun qui entre dans un processus d'enseignement.

4.2. Le déroulement de la leçon :

4.2.1. La recherche et les écrits qui en résultent

L'activité de recherche est basée, dans la leçon observée, sur la recherche et l'explicitation de la question qui détermine complètement l'énoncé du problème (au sens classique du terme). Or les élèves n'ont pas été en mesure de percevoir l'enjeu (mathématique) de la situation problème et c'est l'enseignant qui a lui-même formulé la question « pensez-vous que cela coûte plus cher s'il y a 979 élèves ou 967 élèves ? ».

Les élèves ont produit des procédures, dans lesquelles apparaissent des calculs, nous essaierons de déterminer s'ils ont produit des raisonnements, et si oui de quels types ?

4.2.2 La phase de mise en commun

Notre analyse a priori nous avait fait supposer que le déroulement aurait du être catastrophique : la gestion de la phase didactique de mise en commun apparaissait d'autant

plus délicate que la réduction de la complexité reposait essentiellement sur le professeur : sur ses choix, sur ses décisions, sur ses interventions « opportunes ».
Or en visionnant l'enregistrement que nous n'avions pas vu avant l'analyse, nous avons dû constater que l'enseignant était parvenu à conduire sa classe sans se heurter à des difficultés « insurmontables ».

4.2.3 L'étonnement des observateurs
Un observateur extérieur, et en particulier les élèves professeurs qui pouvaient visionner le film ne trouvaient rien d'anormal. Cette divergence nous a conduit à examiner de plus près les connaissances et surtout les raisonnements qui apparaissent au cours de cette leçon. Qui les produit ? A quoi servent-ils? Quelles utilisations l'enseignant en fait-il ? A quels types d'arguments l'enseignant a-t-il recours pour gérer les raisonnements ? Les élèves sont-ils capables d'utiliser leurs raisonnements comme moyens de justification ? Qu'apprennent les élèves ?

5. LES RAISONNEMENTS OBSERVES, LEUR FONCTION ET LEUR USAGE

5.1 LES RAISONNEMENTS DANS LES PRODUCTIONS ECRITES

Le tableau ci dessous indique les formes de raisonnements qui sous-tendent les productions écrites, élaborées par chacun des groupes. Les raisonnements sont analysés en regard des différents modules qui constituent la solution attendue par l'enseignant.

Pour chaque groupe sont explicitées, dans le tableau 1, les procédures mises en œuvre en relation avec les modules correspondants.

Pour chaque production nous avons indiqué le modèle implicite d'action qui lui est associé.

Module	GROUPE 1 : XAVIER, SYLVAIN, YANNICK	GROUPE2 : MARINE, DEBORAH	GROUPE 3 : ALEXANDRE	GROUPE 4 : JULIEN
Mod. 1	Raisonnement N1 Non explicité	Raisonnement N2	Raisonnement N2	Raisonnement N2
Mod. 2				
Mod. 3		Raisonnement N2 Calcul, par excès, du nombre de forfaits achetés au tarif moyen (par lots de 36).	Raisonnement N3 Calcul, par excès, du nombre de forfaits achetés au tarif faible (par lots de 216). Procédure 3.3. Annexe 2	
Mod. 4	Raisonnement N2 Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.		Résultat déduit du module précédent, par analogie (l'achat est en fait identique à celui réalisé dans le module 3)	Raisonnement N2 Calcul du prix unitaire pour chacun des groupements. Il est obtenu en divisant le prix du lot par le nombre de forfaits correspondants. Le calcul, pour chacun des prix unitaires, de la dépense totale est obtenu par la proportionnalité.

Mod. 5	Raisonnement N3 Le calcul de l'économie réalisée est effectué en calculant le prix de 2 lots de 6.	Raisonnement N2 Le calcul de l'économie réalisée est effectué en calculant le prix de 2 lots de 6.	L'économie réalisée est nulle.	
Modèle implicite d'action	Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.	Les élèves utilisent le modèle de vente en gros. Pas de tentatives visant à minimiser la dépense.	L'élève utilise le modèle de vente en gros. Pas de tentatives visant à minimiser cette dépense.	L'élève utilise le modèle de la vente classique à l'unité pour chacune des propositions de vente. Il utilise le modèle de la proportionnalité.

Module	GROUPE 5	GROUPE 6	GROUPE 7	GROUPE 8
Mod. 1	Raisonnement N1 Non explicité	Raisonnement N2	Raisonnement N2	Raisonnement N2
Mod. 2	Raisonnement			
Mod. 3	Raisonnement Calcul par défaut du nombre, de forfaits au tarif faible (par lots de 216), puis par excès du nombre de forfaits restants au tarif moyen (par lots de 36).	Recherche des nombres de lots de 216 (par défaut), de 36 (par défaut) et de 6 (par excès) nécessaires pour les 967 élèves. Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.	(1) Calcul, par défaut, du nombre de forfaits achetés au tarif fort (par lots de 6), reste 1 élève. (2) Calcul par défaut du nombre de forfaits au tarif moyen (par lots de 36), et pour les restants calcul du nombre, par défaut, achetés au tarif fort, reste 1 élève. (3) Comparaison.	Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.
Mod. 4	Le résultat est déduit de celui obtenu au module 3.			.
Mod. 5	Raisonnement N_3		.	
Modèle implicite d'action	Les élèves utilisent le modèle de la vente en gros et parviennent à effectuer une combinaison des tarifs proposés.	Les élèves utilisent le modèle de vente à l'unité pour calculer la dépense totale alors qu'ils ont raisonné en terme de lots.	Les élèves utilisent le modèle de vente en gros. Tentatives de différentes organisations visant à minimiser la dépense.	Calcul du prix unitaire théorique d'un forfait au tarif fort. Le coût de la dépense totale est obtenu par la règle de la proportionnalité. Le prix d'un forfait est obtenu en divisant le prix d'un lot de 6 par 6.

Tableau 1

En conclusion il apparaît qu'une majorité d'élèves utilisent le *modèle de la situation commerciale classique* : l'acheteur achète la quantité de forfaits qu'il veut, à tarif constant.

Les prix par quantités différentes ne peuvent être par conséquent dans leur esprit que des prix proposés par des commerçants différents. Les quantités différentes leur apparaissent, à ce moment là, comme un artifice didactique pour leur faire calculer différents prix à l'unité. Même si certains d'entre eux pouvaient avoir une connaissance effective de la pratique de la vente en gros avec tarif dégressif, vraisemblablement les mots vont leur manquer pour exprimer « le prix – théorique - à l'unité, pour un achat groupé par tant ».

Dans le *modèle de la vente en gros avec tarif dégressif*, presque tous les « raisonnements » importés du modèle classique sont contredits : par exemple le prix effectif d'un objet ne sera pas le prix total divisé par le nombre d'objets, le nombre d'objets à acheter n'est peut être pas celui dont on a besoin etc. De sorte que les questions posées par le professeur lors de la mise en commun ne peuvent aboutir à une élucidation des difficultés.

L'analyse des différentes formes de raisonnements apparaissant dans les productions des élèves montre que l'enjeu réel de la situation problème, à savoir minimiser le coût de la dépense, n'a pas été perçu par une majorité d'entre eux.

Dans cette séquence, il apparaît clairement que la dévolution de la situation n'a pas fonctionné, les élèves n'ont pas été en mesure de prendre à leur charge la situation proposée. En effet lors de la mise en situation il apparaît que :

- les élèves ne disposent pas du répertoire de base pour concevoir les stratégies de base ;
- les élèves ne peuvent pas obtenir, en réponse à leurs actions, les informations nécessaires à la résolution du problème ;
- les élèves ne disposent pas des moyens en temps leur permettant de produire une solution compte tenu de la complexité de la solution standard ;
- les élèves ne peuvent déterminer par eux-mêmes si le résultat obtenu est ou non correct.

De plus

- l'énoncé ne fixe pas convenablement la situation objective et par conséquent conduit un grand nombre d'élèves à élaborer des modèles implicites erronés.

5.2. La transcription des interactions (phase de « mise en commun »)

Nous avons choisi de réaliser, au cours de cet atelier, l'analyse, en théorie didactique des situations mathématiques, d'un extrait de la transcription relative à la phase de présentation des productions des élèves (phase 7).

Nous avons analysé les interactions relatives à la présentation de la production d'un élève, Julien, ayant fait le choix de travailler seul.

La première colonne du tableau 2 indique le numéro de l'intervention, le premier nombre (4) indique qu'il s'agit du quatrième « groupe » venu présenter sa production, pour certaines interventions le minutage est précisé (avec pour origine le début de la phase de mise en commun). Dans la deuxième colonne figure le script. La troisième colonne concerne l'analyse de l'intervention en regard du projet du locuteur. La quatrième colonne tend à préciser la nature et la fonction de l'intervention.

N° Min.	**Texte**	**Commentaires**	**Analyse**	**Nature et fonction de l'intervention**
4.1 12'35	Julien : Bon j'ai commencé par faire… (1) j'ai fait 85 divisé par 6 (2) ça m'a donné 14,166 ; j'ai pris le 14 et puis j'ai vu… (3) j'ai fait pareil avec 325, enfin j'ai fait pareil, (4)	Un élève, Julien, vient présenter sa production. Julien décrit son calcul, sans définition, sans annonce de la variable calculée.		(1)Description directe d'une action (calcul) (2)Formulation d'un résultat (3)Evocation indirecte d'une action – par analogie - (4)Organisation de calcul Raisonnement d'organisation, local, oralisé.

	j’ai fait pareil avec les trois opérations			
4.2	M : (1) les trois propositions, (2) les groupements de forfaits.	L’enseignant reformule une partie de la déclaration pour mettre en place le vocabulaire.	L’E souhaite établir un lien entre les calculs effectués et la situation objective.	(1)Rectification de terminologie (2)Proposition de terminologie et Dénomination d’un résultat
4.3	Julien : (1) 325 divisé par 36 et 1275 divisé par 216 (2) puis alors, après j’ai fait…	Julien continue à dénoter ses calculs.		(1) Description directe d’une action (2) Organisation de calcul Raisonnement d’organisation, De l’élève, local, oralisé.
4.4	M : (1) Première conclusion après ces trois calculs ? Le maître s’adressant à la classe : Vous avez entendu les opérations qu’il a faites ? (2) Dans les trois conditions proposées quel est le prix d’un forfait c’est bien ça ?	L’enseignant interroge Julien pour savoir ce qu’il retire des calculs effectués. L’enseignant intervient pour apporter des explications visant à interpréter les calculs. Il indique la nature des résultats obtenus, « prix d’un forfait dans les trois conditions ».	L’E donne une interprétation de chacun des calculs effectués par Julien. Intention didactique : L’E souhaite s’appuyer sur les calculs de Julien pour « mettre en scène »les étapes du raisonnement qui sous-tendent la procédure 2-1 (Module 2).	(1) Evocation et dénomination de la position « en conclusion » d’un énoncé dans un raisonnement. Invitation à commenter ses résultats et à les placer par rapport à l’action. (2) Moyen rhétorique didactique : élément d’un raisonnement local explicite de l’E qui vise à replacer les calculs dans la perspective du module 2.
4.5	Julien : Ouais !			Agrément, approbation, accord
4.6	M :(1) Bon première conclusion après ça ?	L’enseignant interroge Julien sur ce qu’il retire des calculs effectués.	.	(1)Demande d’une inférence. L’E attend que l’élève continue son raisonnement et formule la conclusion.
4.7	Julien : Après j’ai fait...	Pas de réponse, Julien semble vouloir poursuivre sur le mode de la dénotation des calculs.		
4.8	M : Non, ta première conclusion après ça ? Quand tu as fait ces calculs tu t’es dis quoi ?	L’E réitère sa question.	L’E effectue une deuxième tentative, la finalité est identique à 4.4. La formulation est cependant plus précise.	Evocation de ce qu’est une conclusion invitation à commenter son résultat
4.9	Un élève : Lequel était le moins cher.	Un élève formule explicitement la	Un élève indique à Julien ce qui peut	Question sur une relation d’ordre.

		question de l'enseignant posée précédemment de façon implicite.	être tiré de ses calculs à savoir une comparaison de prix	Projet
4.10	Julien : Ouais ! Lequel était le moins cher…enfin non je ne pouvais pas voir…			Mais « lequel » ne désigne pas un objet défini. Explication passive. Impossibilité de réaliser un projet
4.11	Un élève : Mais si tu peux voir !	Un élève indique à Julien qu'il dispose de toutes les informations pour répondre.	L'élève le pousse à produire un raisonnement en lui indiquant qu'il dispose de tous les éléments pour conclure (i.e. comparer les prix)	Possibilité de réaliser un projet
4.12	Julien : (1) Oui c'était 1275, (2) (3) parce qu'il valait 5€ le forfait à peu près et puis (4) alors après j'ai essayé, enfin j'ai fait 979 moins 12, ça m'a fait 967 et puis après j'ai multiplié 967 par tous les, par tous les résultats des divisions	Julien donne la réponse attendue et poursuit la dénotation de ses calculs.	Julien formule la conclusion attendue dans la procédure 2-2. Il revient immédiatement à son raisonnement initial en dénotant ses calculs.	(1)Implicitement, la conclusion (2)Explication. (3)Estimation (4)Description directe d'une suite d'actions et organisation Raisonnement d'organisation, local, oralisé.
4.13	M : Pour trouver ?	Le maître interroge Julien sur la finalité de ses calculs.	L'E l'interroge sur la finalité de ses calculs.	Projet, demande de dénomination d'un résultat. Demande d'explication.
4.14	Julien : Pour trouver le prix de combien ça allait valoir.	Julien indique la finalité de ces calculs : calcule la dépense totale (pour les élèves présents).	Julien indique la finalité : calculer pour chacune des propositions le coût global.	Dénomination d'un résultat. Il indique la finalité de sa procédure.
4.15	M : Oui le prix…pour trouver lequel valait le moins cher.	Analyse P. part de la formulation de l'élève et la transforme : Julien a annoncé son intention de calculer le coût global (pour chacune des propositions), P se centre sur la comparaison des tarifs. Le modèle implicite d'action développé par Julien n'est pas conforme à l'attente de l'enseignant. Ce dernier va établir que les calculs effectués ne sont d'aucune utilité pour la comparaison des tarifs. Intention didactique : Faire rejeter les calculs en les faisant apparaître comme inutiles, redondants par rapport à la conclusion précédemment établie (procédure 2-2)		Moyen rhétorique didactique**. :** Elément d'un raisonnement local explicite de l'E qui vise à replacer les calculs dans la perspective du module 2. Rappel de subordination d'un résultat dans une tâche
4.16	Julien : Oui.			Accord
4.17	M : Et-tu as fait les trois calculs ?	L'enseignant souhaite faire		Effectivité d'une action

		prendre conscience à Julien que les calculs n'étaient pas nécessaires, un raisonnement aurait pu éviter de faire les calculs.		
4.18	Julien : Oui.			
4.19	M : C'était nécessaire ?			Appel à un jugement de valeur sur la pertinence ou l'adéquation d'un calcul.
4.20	Julien: Ben…ouais…			Accord
4.21	Un autre élève : Pour voir quel était le moins cher.			Rappel de subordination
4.22	M : Tu le savais pas avant ?	L'enseignant formule sa question afin que Julien revienne sur les raisons d'effectuer les calculs.	Le sens serait : « pouvais-tu le savoir à l'avance, sans avoir recours au calcul »c'est donc appel à un raisonnement direct.	Appel à l'anticipation du rôle d'un résultat dans une résolution. Appel à la formulation d'un raisonnement local (direct)
4.23	Julien : Oui je le savais…mais…	L'élève ne peut pas distinguer son opinion de la justification demandée par le professeur		
4.24	M : Bon et alors, résultat ?	L'enseignant redemande à Julien de formuler sa conclusion.		
4.25	Julien : Alors j'ai vu lequel était le moins cher et puis…			Modalité de validité : certitude mais subjectivité
4.26	M : Ca donne combien ?			
4.27	Julien : A mon avis c'est 967 fois 5 égal 4335.			Enoncé de la valeur subjective Formulation d'un résultat
4.28	M : Hum ! Pourquoi 4300 ? 5 fois 900 ?	L'enseignant interroge Julien sur l'ordre de grandeur du résultat de la multiplication. *		Mise en cause du résultat (mais pas de sa pertinence). Indication sur la nature et du lieu de l'erreur : le 3. Indication sur la cause de l'erreur. Demande de justification.
4.29	Julien : 36 000…euh ! 3600.			Mode de calcul mental, erreur de table, règle des zéro
4.30	Un élève : 5000…4500.			Indice que 9 fois 5 est calculé comme 10 fois 5 moins 5 : étayage

4.31	Julien : Oui 4500.			Accord
4.32	M : Et 5 fois 967, 4300…Il y a comme un petit défaut !	L'enseignant contrarie le résultat annoncé par Julien. Il a relevé l'erreur sans cependant la corriger.		
4.33	Julien : Oui 4500.			
4.34	M : En tous cas, le moins cher serait le prix d'un forfait vendu par 216 multiplié par le nombre d'élèves, le nombre d'enfants, 967, qu'est-ce que vous en dites ?	Le maître reformule la procédure de Julien en la synthétisant. Il souhaite mettre en débat la procédure de Julien, il souhaite l'éprouver. Il essaie de « replacer » le problème, il utilise un conditionnel.	Le professeur se heurte ainsi au mur d'un changement de modèle : les mots « vendus par 216 n'ont pas le sens qui serait nécessaire pour comprendre. Le renvoi aux élèves est voué à l'échec	Réinterprétation du calcul de l'enfant Replacement dans la perspective de la résolution du problème et de la mise en débat. Répétition de la donnée « fautive » Demande de commentaire qui indique que le calcul n'est pas satisfaisant. Moyen rhétorique didactique Raisonnement global d'organisation conditionnel. Mise en débat.
4.35	Les élèves : inaudible			
4.36	M : C'est sans doute vrai, mais quoi ?			Raisonnement conditionnel : admettons (que ce que nous disons est vrai) Appel à réexaminer la méthode de calcul. Justifie la méthode, le calcul Demande de justifications**.**
4.37	Mélanie : A condition…			*Repérage d'une condition*
4.38	M : Oui Mélanie…	Encouragement de l'enseignant plein d'espoir		
4.39	Mélanie : Tu as calculé les autres pour savoir si c'était…Pourquoi tu as de suite pris celui-là ? Tu as essayé les autres ?	Il s'agit là d'une objection formaliste, la division n'est pas comprise.	Mais Mélanie croit que la justification doit porter sur le choix des valeurs non sur la méthode de calcul.	Demande de justification Demande d'explication
4.40	Julien : J'ai fait 85 parce que c'était le premier.			
4.41	M : Oui…			
4.42	Julien : Je ne sais pas moi…			
4.43	M : Tu comprends que c'était le moins cher mais tu n'as pas essayé les autres.	Intervention injustifiée.	Le professeur voudrait faire passer les élèves du « modèle de la vente à l'unité	

			(vente ordinaire) à celui de la vente en gros avec tarifs dégressifs, mais ne sait pas comment susciter ce passage.	
4.44	Julien : Si j'ai tout essayé, si j'ai essayé 85 divisé par 6 et les autres, et sur les trois j'ai vu que c'était 1275 divisé par 216 qui marchait.			Explication active. Explication visant à justifier sa procédure. Déclaration d'exhaustivité des calculs possibles (dans le modèle de la vente ordinaire)
4.45	M : 1275 divisé par 216 puis ensuite multiplié par 979, bon…et Alexandre qu'est-ce que tu en dis par rapport à ta proposition ?	L'enseignant reformule la procédure et interroge Alexandre (qui a correctement interprété les données de l'énoncé) afin qu'il réagisse au modèle implicite développé par Julien.	Appel	Moyen rhétorique didactique. : extraction de la partie douteuse du raisonnement.
4.46	Alexandre : J'en dis que c'est vrai…		Alexandre reste dans le cadre de l'hypothèse « vente ordinaire »	Assertion (dans le cadre d'un modèle implicite).
4.47	M : Donc on achète, on va à la caisse de la station et on demande, on demande 967 forfaits au prix de 1275 divisé par 216, bon c'est bien ça ?	Troisième formulation de l'enseignant, tentative de mise en débat.		Confrontation à un milieu (supposé suffisamment familier pour « imposer » des contradictions.
4.48	Les élèves : Oui.			Agrément
4.49	M : Bon… et bien voilà.	Renoncement provisoire de l'enseignant, Julien retourne à sa place.	L'échec de la tentative est avéré	Le milieu n'envoie aucune des rétroactions espérées.

TABLEAU 2

5.3. Discussion

Les raisonnements qui apparaissent dans la production écrite de Julien (Annexe 1) sont des raisonnements de niveau 2 : les justifications et les explications relatives aux calculs effectués (posés) ne sont pas fournies par son auteur. Cependant l'analyse du modèle implicite d'action correspondant (tableau 1) nous permet d'identifier le modèle mathématique et la représentation que Julien a de la situation objective. Son modèle est celui de la situation commerciale classique, basé sur la vente de forfaits à l'unité, correspondant au modèle mathématique de la proportionnalité.

La transcription (tableau 2) montre que Julien, lors de la phase de présentation, procède à une dénotation de ses calculs, sans fournir à la classe davantage d'explication sur la finalité des opérations posées. De ce fait son projet n'est pas accessible à l'ensemble des élèves, rendant nécessaire une intervention de l'enseignant. En procédant ainsi il offre à l'enseignant la possibilité de proposer une interprétation de ses calculs qui ne correspond pas nécessairement à son projet initial. Notre analyse établit que l'enseignant utilise à de multiples reprises des moyens rhétoriques didactiques, tels que nous les avons définis (§2). Ainsi il réussit à détourner le projet initial de Julien au profit du sien qui vise à élaborer, à partir des calculs posés, le raisonnement qui sous-tend le module 2 de la solution standard.
De plus cette analyse met en évidence le fait que l'enseignant essaye de mettre en débat, à plusieurs reprises, la validité des procédures présentées, plus précisément la validité des décisions sur lesquelles reposent les raisonnements des élèves. Cependant ses tentatives échouent les unes après les autres. Bien qu'il choisisse d'interroger des élèves, dont la représentation de la situation objective est conforme à ses attentes, afin de faire invalider les représentations erronées inhérentes aux productions présentées, ceux-ci ne mettent pas en défaut les décisions erronées sur lesquelles reposent les productions. Par exemple dans l'analyse de la présentation de Julien, l'enseignant interroge Alexandre, dont le modèle implicite d'action est correct (tableau 1), cependant celui-ci ne met nullement en défaut la représentation que Julien a du milieu objectif.
Par conséquent l'analyse de la transcription permet de mettre en lumière :

- d'une part les moyens rhétoriques utilisés par l'enseignant pour détourner habilement les raisonnements de Julien afin de produire les éléments correspondant aux modules de la solution attendue,
- d'autre part les difficultés auxquelles se trouve confronté l'enseignant lorsqu'il souhaite amener les élèves à débattre de la validité des décisions qui sous-tendent les raisonnements des élèves.

Nous avons choisi de travailler, lors de cet atelier, cette partie de la transcription car elle est représentative des moyens didactiques mis en œuvre par l'enseignant pour traiter les raisonnements des élèves.

6. CONCLUSIONS ET CONJECTURES

6.1. Les raisonnements produits

L'objet de l'analyse est l'étude de l'influence de certains caractères de la situation proposée aux élèves sur l'élaboration des différents raisonnements, leurs usages et les possibilités de leurs traitements qui s'offrent à l'enseignant lors de la phase de présentation des productions.

L'identification des différents "niveaux" de raisonnements apparaissant dans les productions des élèves (tableau 1) montre que les raisonnements élaborés par les élèves ne sont pas très nombreux, ne relèvent pas d'une grande complexité si l'on se réfère au nombre de calculs produits et au nombre d'étapes du raisonnement global, et sont pour la plupart de niveau 2. De plus l'identification des modèles implicites d'action, raisonnement de niveau 1 qui sous-tendent chacune des productions, n'est pas une tâche particulièrement difficile pour les observateurs ni même pour l'enseignant. Cependant cette reconnaissance des modèles utilisés par les élèves nécessite d'avoir effectué au préalable une analyse a priori des comportements, des difficultés et des procédures susceptibles d'apparaître lors des différentes phases du déroulement de la leçon[5].

[5] Dans les situations d'actions ayant fait l'objet de publications destinées aux professeurs, figure nécessairement une analyse didactique de la situation qui comporte d'une part une analyse a priori, des comportements, des

L'analyse détaillée de la phase de mise en commun[6], dont le tableau 2, est une partie représentative des différents types et des différentes formes d'interactions, vise à relever les différents types d'arguments utilisés par l'enseignant pour essayer de prendre en compte et de traiter les raisonnements des élèves. Cette analyse montre que l'enseignant se trouve démuni en ce qui concerne le traitement effectif des raisonnements produits, c'est à dire l'utilisation de raisonnements logiques en relation directe avec la situation objective pour répondre aux raisonnements des élèves. En effet il ne parvient à prendre en compte les raisonnements produits et à les faire partager à l'ensemble de la classe, de plus les tentatives de mises en débat de la validité des productions se révèlent à chaque fois infructueuses.
Ce qui nous conduit à une première conjecture : ce qui limite l'enseignant dans les possibilités qui s'offrent à lui de prendre en compte, de faire expliciter et de traiter les raisonnements des élèves, ce n'est pas tant leur complexité mais un autre caractère lié à la nature même de la situation proposée aux élèves.

6.2. Les effets de la leçon sur les comportements et les apprentissages des élèves

6.2.1. Sur la validité des raisonnements et sur la conviction des élèves

Il apparaît à de nombreuses reprises, dans l'analyse complète de la transcription, que les élèves ayant produit un raisonnement basé sur une représentation conforme aux attentes de l'enseignant, n'ont pas pris conscience des conditions qui définissent le milieu objectif. En effet ils ne parviennent pas lors de la phase de présentation de leur production à formuler les raisons qui les ont conduit à élaborer celle-ci, ni même à réagir aux raisonnements de leurs camarades lorsque ces derniers sont basés sur des représentations erronées de la situation objective.
Ceci peut en partie apparaître comme résultant du fait que la situation n'offre pas aux élèves la possibilité d'éprouver leurs décisions : le milieu objectif ne renvoie à l'élève aucune rétroaction, par conséquent ce dernier n'est pas en mesure de valider ou d'invalider son raisonnement, et donc de revenir sur les décisions qui sous-tendent son modèle implicite d'action, ni sur sa représentation du milieu objectif.

6.2.3. Sur les répertoires des élèves : action, langage, opinions

L'élève n'étant pas en mesure de porter un jugement sur sa « production », il ne peut pas utiliser le raisonnement qu'il a produit, comme un argument, en situation de débat. Le débat entre pairs, souhaité par l'enseignant, est ici hors de portée des élèves.

6.3. Les effets sur le processus didactique

6.3.1. La dévolution

Les décisions qui sous-tendent l'élaboration de chacun de ces modèles sont étroitement liées à la représentation que l'élève se fait du milieu objectif. Or la situation objective proposée est telle que l'élève est confronté à un milieu dont il doit imaginer les règles de fonctionnement.
Le milieu objectif n'étant pas clairement défini, ceci a pour conséquence de conduire les élèves à des représentations différentes de la situation objective et donc à l'élaboration de modèles implicites d'action différents.
Par conséquent la situation objective ne peut pas être dévolue aux élèves, i.e. ceux-ci ne peuvent pas remettre en cause leur modèle commercial de la vente à l'unité adopté par une majorité d'entre eux, ni même calculer les résultats des différents choix possibles.

---

difficultés et des raisonnements susceptibles d'apparaître lors du déroulement de la leçon, d'autre part une analyse détaillée des comportements et des productions lors des différentes phases.

[6] L'analyse complète de la phase de mise en commun est proposée dans la thèse de P. Gibel « Fonctions et statuts des raisonnements dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire » (2004)

6.3.2. Les corrections didactiques

L'analyse complète montre que l'enseignant ne parvient pas à faire expliciter aux élèves, venus présenter leur production, les raisons sur lesquelles repose leur modèle implicite d'action. Aussi l'enseignant, pour éviter une situation de blocage, liée au fait que les élèves ne comprennent pas les décisions prises par leurs pairs, est contraint d'utiliser des procédés rhétoriques, linguistiques, sémiologiques, désignés dans notre analyse, comme des « moyens rhétoriques didactiques » tels que nous les avons identifiés, à de multiples reprises, dans l'analyse présentée (tableau 2). Ces moyens permettent à l'enseignant de détourner le projet initial de l'élève au profit du sien, c'est-à-dire l'établissement de certains modules de la solution attendue. Cependant les raisons effectives qui justifient l'élaboration du module ne sont pas données à voir aux élèves : celles qui sous-tendent et qui justifient la mise en relation des données de l'énoncé dans la réalisation du module sont cachées.

De plus les élèves qui ont produit le raisonnement initial n'ont aucun retour sur les choix qu'ils ont effectués et ne peuvent donc prendre conscience du caractère erroné de leur représentation et de leurs décisions.

6.3.3. L'évaluation

La situation objective ne peut être dévolue aux élèves, par conséquent l'enseignant ne peut évaluer les capacités des élèves à mobiliser et à utiliser leurs connaissances pour produire le raisonnement attendu.

6.3.4. L'institutionnalisation des apprentissages

Le professeur ne peut pas faire apparaître l'élaboration de chacun des modules de la solution standard comme une conséquence raisonnée de l'articulation des données de la situation objective basée sur les connaissances supposées des élèves. En conséquence d'une part il est contraint d'utiliser des moyens rhétoriques didactiques pour répondre aux raisonnements des élèves, d'autre part il ne peut institutionnaliser les connaissances utilisées par les élèves, inhérentes aux calculs posés par les élèves (multiplication, division euclidienne, quotient décimal) puisqu'il ne peut pas les extraire de la situation proposée aux élèves.

L'analyse complète de la transcription met en lumière l'impossibilité pour l'enseignant de relever et de faire partager les différentes organisations (c'est-à-dire les différents moyens de concevoir l'achat des forfaits conformément à la vente en gros), conformes à ses attentes, qui apparaissent dans certaines productions.

Par conséquent si la prise en compte et le traitement des raisonnements pose des difficultés à l'enseignant pour parvenir à élaborer la solution standard, ce n'est pas tant par la complexité des raisonnements produits, mais essentiellement parce que son projet n'est pas visible par l'ensemble des élèves.

De plus une des conséquences de la pratique de l'enseignant, plus précisément du recours à l'usage de moyens rhétoriques, est que les élèves n'ont pas eu, lors de la phase de mise en commun, de retour sur les raisonnements qu'ils ont produits, ils n'ont pas non plus pris conscience du projet d'apprentissage ni même de la manière d'élaborer la solution attendue.

Par conséquent cette situation-problème n'a pas permis aux élèves de progresser dans leur pratique du raisonnement.

Il n'apparaît aucun savoir mathématique nouveau susceptible d'être institutionnalisé, d'ailleurs aucun temps n'est réservé par le professeur pour « extraire » ce qui peut être retenu de cette « leçon ». Par contre elle présente l'avantage, de soumettre à l'étude, des utilisations originales de relations commerciales.

7. CONCLUSION

L'étude montre que les élèves, confrontés à la situation-problème élaborée et conduite par le maître, ont certes produit des raisonnements, cependant la plupart d'entre eux n'ont pas progressé dans la pratique du raisonnement. En effet ils n'ont pas eu de retour sur leur raisonnement, du point de vue de sa validité, de sa pertinence ou de son adéquation puisque l'enseignant n'a pas été en mesure de le traiter. En effet pour répondre aux raisonnements qui sous-tendent une majorité des productions présentées lors de la mise en commun, l'enseignant n'a pu utiliser de raisonnements logiques s'appuyant sur la situation objective, il a été contraint d'avoir recours à des moyens rhétoriques.

Or ce n'est pas la complexité des raisonnements produits qui contraint l'enseignant à utiliser ce type de moyens pour traiter les raisonnements, mais le fait que la situation-problème ne puisse pas être dévolue aux élèves. Il en résulte que ce n'est pas la gestion de l'enseignant qui est remise en cause par cette étude, c'est la nature de la situation, élaborée par l'enseignant, qui limite très fortement les possibilités de prendre réellement en compte les raisonnements des élèves.

La situation objective proposée ne permet pas à l'enseignant

- de faire partager à l'ensemble des élèves les raisons effectives qui ont conduit chacun d'eux à élaborer des modèles implicites d'actions et à prendre certaines décisions dans le cadre des modèles correspondants,
- de faire percevoir aux élèves les justifications de l'élaboration des modules, correspondant aux principales étapes de la solution standard c'est-à-dire l'organisation de la solution en différents modules,
- de faire partager aux élèves le raisonnement qui sous-tend chacun des modules de la solution.

Dans le cas où la situation est telle que l'enseignant a la possibilité de faire dévolution à ses élèves d'une situation d'action « autonome » (*self content situation*) alors la Théorie des Situations Didactiques en Mathématique permet de prévoir, pour l'enseignant la possibilité de se référer, lors de l'analyse des productions des élèves, à la situation objective. En effet ces derniers peuvent développer leurs stratégies personnelles et leurs propres raisonnements en fonction des situations auxquelles ils se sont confrontés. Cela permet à l'enseignant de ne pas être contraint d'avoir recours à des moyens didactiques rhétoriques pour effectuer un traitement des raisonnements produits par les élèves

Dans le cas contraire, l'enseignant est tenu d'apporter des informations, des feed-back sur les raisonnements des élèves sur la base d'un projet qui n'est pas visible par l'ensemble d'entre eux, et c'est là que le professeur va être contraint d'utiliser des moyens rhétoriques didactiques. En effet les arguments développés par l'enseignant et les élèves ne pourront se référer à la situation objective.

BIBLIOGRAPHIE

BALACHEFF, N., «Processus de preuve en situation de validation », dans *Educational Studies in Mathematics* 18(2), pp 147-176.

BROIN D.: 2002, «Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires », Thèse soutenue à l'Université Bordeaux I.

BROUSSEAU, G.: 1986, « Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques », dans *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Volume 7(2), Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, pp 33-115.

BROUSSEAU, G.: 1988 «La relation didactique : le milieu », dans *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Volume 9(3), Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, pp 309-336

BROUSSEAU, G.:1989, «Le contrat didactique : le milieu», dans *Recherches en Didactique des Mathématiques* Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.

G. BROUSSEAU, P.GIBEL (2005), "*Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations* ", vol 59, p13-58, Educational Studies in Mathematics, KLUWER.

BROUSSEAU G.:1997 "Theory of Didactical Situations in Mathematics", *Mathematics Education Library* Kluwer academic publishers.

COULTARD, SINCLAIR :1975 , « Towards an analysis of discourse, the english used by teachers », Oxford University Press.

GIBEL P. (2008) « Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques à l'école primaire », Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg.

GIBEL P. (2006) " Raisonnement et argumentation. Analyse des différentes formes et fonctions des raisonnements des élèves en situation de débat à l'école primaire ", Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone 2006, Université de Sherbrooke, Canada.

GRIZE, J.B.:1974, « Recherches sur le discours et l'argumentation », Droz.

GRIZE J.B.:1982 , « De la logique à l'argumentation », Droz.

GRIZE J.B., PIERAUT-LE-BONNIEC G., « La contradiction. Essai sur les opérations de la pensée », Paris, Presses Universitaires de France.

MARGOLINAS C. :1993 « De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques », La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS, C. et STEINBRING, H.: 1994, « Double analyse d'un épisode : cercle épistémologique et structuration du milieu », dans *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp 240-257.

MOPONDI, B. :1995, « Les explications en classe de mathématiques »,*dans Recherches en Didactique des Mathématiques*, Volume 1(3), Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, pp7-52.

MOREIRA, M., «Le traitement de la vérité mathématique à l'école», Thèse Université Bordeaux I.

OLERON P.:1977, «Le raisonnement», dans Presses Universitaires de France.

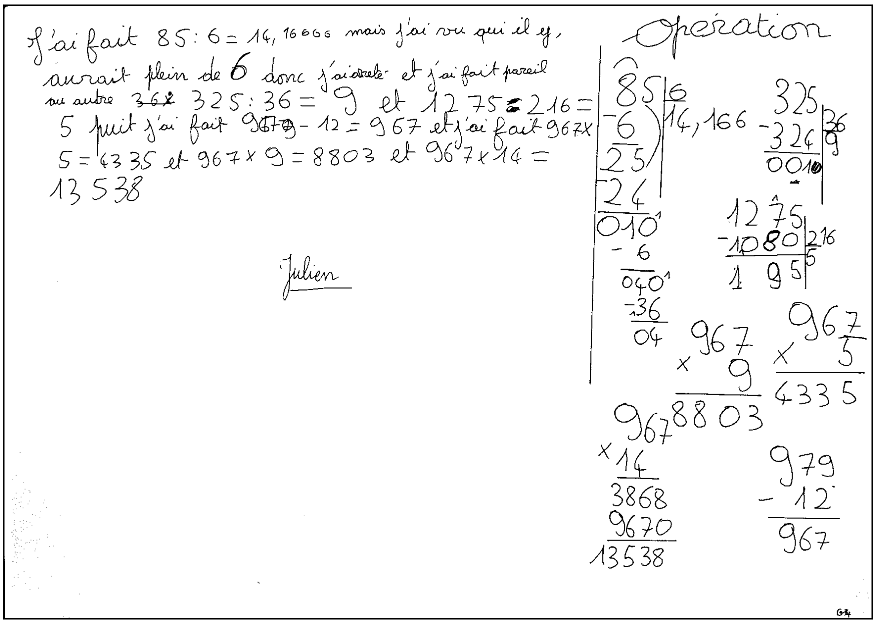
PERELMAN C. :1970, « Le champ de l'argumentation», dans Presses Universitaires de France.

PERELMAN C., OLBRECHTS-TYTECA L :1976, « Traité de l'argumentation », Institut de Sociologie, 3° éd..

ROBRIEUX J.J. :1993 « Eléments de Rhétorique et d'Argumentation », Dunod

8. ANNEXES

ANNEXE 1 Production de Julien



J'ai fait 85 : 6 = 14,16666 mais j'ai vu qu'il y aurait plein de 6 donc j'ai arrêté et j'ai fait pareil au autre ~~36x~~ 325 : 36 = 9 et 1275 : 216 = 5 puit j'ai fait 979 - 12 = 967 et j'ai fait 967 x 5 = 4335 et 967 x 9 = 8803 et 967 x 14 = 13538

Julien

Opération