Eugène COMIN
Lycée Arnault Daniel
DAESL Bordeaux 2

Proportionnalité et fonction linéaire

Effets didactiques des dépendances entre école, collège et lycée

Introduction et problématique

Proportionnalité et fonction linéaire sont deux approches de la linéarité qui se réfèrent à deux cultures différentes : l'arithmétique des grandeurs enseignée à l'école et au collège, l'algèbre initiée au collège puis au lycée. Or il semble que l'enseignement secondaire peine à construire une clôture des savoirs arithmétiques élémentaires tout en préparant les apprentissages futurs de l'algèbre. Dans ces conditions, les connaissances développées par l'enseignement secondaire permettent-elles aux futurs professeurs des écoles d'avoir un contrôle sur ce qu'ils ont à enseigner à l'école primaire ? En particulier, l'enseignement des fonctions apporte-t-il des connaissances algébriques aux élèves qui reformulent et prolongent les savoirs arithmétiques de la proportionnalité ?

Dans cet atelier, nous avons repris des questions et des exercices ayant fait l'objet d'enquêtes auprès de professeurs des écoles et d'élèves de seconde pour alimenter une réflexion sur les questions suivantes :

1) Peut-on enseigner la proportionnalité sans les grandeurs, sans la notion de rapport ?
2) Les connaissances des élèves de seconde sur les fonctions linéaires et affines peuvent-elles pallier la disparition de tout un pan de culture de l'arithmétique des grandeurs ?
3) Une introduction des fonctions en seconde qui clôture les connaissances sur la proportionnalité est-elle possible ?

Sans reprendre les discussions qui ont eu lieu lors de l'atelier, cet article explicite les éléments sur lesquels nous nous sommes appuyés, à savoir les résultats de ces enquêtes et leur analyse.

1 Peut-on enseigner la proportionnalité sans les grandeurs ? sans la notion de rapport ?

Au collège, la réforme des « mathématiques modernes » avait exclu des programmes les notions de grandeur, de rapport et de proportionnalité. La linéarité, réduite à l'étude de relations numériques, n'avait pas suppléé à cette disparition comme le montre les résultats d'une enquête (Comin 2000-2002) que nous reprenons partiellement ci-après.

1 - 1 Les conceptions des professeurs

Les questions construites autour des concepts de rapport, de nombre et de proportionnalité ont été soumises, au mois de février 1997, à des instituteurs et professeurs des écoles en activité qui ont remis 38 questionnaires complétés.

Dans cet atelier nous avons analysé certaines de ces questions et commenté les réponses obtenues lors de l'enquête. Les fréquences de réponses aux différents items sont données en

pourcentages calculés sur les 38 réponses. Nous ne reproduisons ici que quelques résultats accompagnés de quelques commentaires.

1 – 1 - 1 Rapports et nombres

Les déclarations suivantes sont-elles acceptables pour le professeur ?	
"6 est la règle qui permet de passer de 9 à 54. "	OUI **32** NON **58**
"6 est le coefficient de proportionnalité des nombres 9 et 54."	OUI **66** NON **21**
"Un rapport peut toujours être représenté par une fraction."	OUI **79** NON **11**

Les maîtres qui ne disposent pas du terme « rapport »[1] utilisent soit un terme trop général : « règle » soit un terme trop spécifique : « fraction, coefficient de proportionnalité ».

La confusion entre « rapport » et « fraction » (confortée par l'expression « écriture fractionnaire » qui figure dans les programmes de collège depuis 1985) a une incidence sur la compréhension des structures numériques comme le montrent les questions suivantes :

Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case de votre choix :			
$\frac{5}{7}$ est un nombre rationnel.	VRAI **42**	FAUX **11**	JE NE SAIS PAS **45**
$\frac{5}{7}$ est un nombre décimal.	VRAI **50**	FAUX **37**	JE NE SAIS PAS **11**
Tout rationnel est décimal.	VRAI **11**	FAUX **47**	JE NE SAIS PAS **39**
Tout décimal est rationnel.	VRAI **39**	FAUX **18**	JE NE SAIS PAS **39**

Comment expliquer qu'un nombre est rationnel ou ne l'est pas, qu'un rapport est décimal ou ne l'est pas si l'on ne dispose pas du concept de fraction et de pratiques opératoires pour écrire ces nombres sous différentes formes : fraction irréductible, fraction décimale, écriture de position, etc.,

De même, la confusion entre « rapport » et « coefficient de proportionnalité » ne permet pas de discriminer les différentes fonctions des nombres dans un tableau de proportionnalité :

Cochez les cases de votre choix:

8	12	16
24	36	48

Dans le tableau ci-contre, chacun des nombres suivants est :	3	2	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
un coefficient de proportionnalité	**79**	**18**	**11**	**37**	**8**	**11**
un rapport	**11**	**3**	**0**	**50**	**18**	**16**
un quotient	**29**	**5**	**3**	**16**	**8**	**5**

[1] Dans les manuels scolaires du siècle dernier, les définitions de rapport ressemblent à la suivante : « Le rapport de deux éléments d'une même grandeur est le nombre qui mesure l'une d'elles quand on prend l'autre pour unité ». Par conséquent un rapport n'est pas nécessairement rationnel. Or une fraction est une écriture où figurent deux entiers séparés par un trait appelé « barre de fraction ». Un nombre est rationnel s'il admet une telle écriture.

Rapport : 47% des maîtres interrogés n'ont jamais choisi le mot « rapport », ce mot tend à disparaître de leur vocabulaire. 11% des maîtres interrogés ont appelé à tort « coefficient de proportionnalité » le nombre « 6 » mais aucun d'eux ne lui attribue le nom de « rapport ».

Coefficient de proportionnalité : 79% des maîtres interrogés disent que 3 est un coefficient de proportionnalité alors que seulement 37% disent que $\frac{1}{3}$ en est un ; par conséquent au moins 42% ne voient de coefficient de proportionnalité dans une application linéaire que si celui-ci est un entier naturel.
21% des maîtres interrogés appellent « coefficient de proportionnalité » au moins un des quatre nombres : $2; 6; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}$, qui n'en sont pas.

Il est difficile de discriminer une situation de proportionnalité d'une situation de non proportionnalité en utilisant le vocabulaire de la proportionnalité. Ce sont les situations qui fixent le vocabulaire ; un rapport peut s'appeler : « coefficient de proportionnalité », « opérateur », « quotient », « multiplicateur », « mesure », etc. …, en fonction du rôle qu'il joue dans la situation.

Conclusion :

Le concept de rapport devient déliquescent. La disparition du mot « rapport » rend difficiles les explications qui permettent de différencier la nature des nombres et leurs fonctions dans différentes situations.
On va voir que ce vide va être en partie comblé par un usage inadéquat du vocabulaire de la proportionnalité, ce qui va engendrer des conceptions fausses de la proportionnalité[2].

1 – 1 – 2 Proportionnalité et fonction linéaire

Voici un exercice qui a été proposé à des élèves de CM2 : "Pour obtenir 10 kilogrammes de sel marin, il faut faire évaporer 310 litres d'eau de mer. Quelle quantité d'eau de mer faut-il faire évaporer pour obtenir 15 kilogrammes de sel marin ? "	
Les déclarations suivantes sont-elles acceptables pour le professeur ?	
"Le nombre de kilogrammes de sel marin est proportionnel au nombre de litres d'eau de mer."	OUI **74** NON **8**
"La proportion de sel dans l'eau est 1 pour 31."	OUI **63** NON **13**
"La situation est de proportionnalité : car on peut trouver la réponse avec une règle de trois. car on peut faire un tableau de proportionnalité. car on décide qu'il en est ainsi. "	 OUI **68** NON **11** OUI **74** NON **5** OUI **11** NON **47**
Si vous aviez à rédiger une solution de l'exercice, que proposeriez-vous à vos élèves ? proportion : **0** ; retour à l'unité : **21** ; fonction linéaire : **0** ; tableau de proportionnalité : **34**	

[2] La proportionnalité décrit une relation entre grandeurs. Une grandeur est tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Une grandeur est mesurable si le rapport entre deux de ses éléments a du sens (est numérisable). La température n'est pas une grandeur mesurable alors que masse et volume le sont. Deux grandeurs mesurables sont proportionnelles si tout rapport entre deux éléments de l'une d'elles est égal au rapport des deux éléments homologues de l'autre.

Les maîtres ont du mal à justifier le choix du modèle proportionnel. La méthode de réduction à l'unité porte en elle sa propre justification par les calculs qu'elle conduit à effectuer sur les grandeurs accompagnées de leurs unités. Le tableau de proportionnalité n'est pas directement constructible sans un repérage des grandeurs. La compréhension d'une situation de proportionnalité nécessite un raisonnement sur les grandeurs et dans une vérification, le tableau sert à rejeter mais pas à valider le choix de la proportionnalité.

Aucun maître ne propose une stratégie qui fasse appel à la notion de fonction linéaire pour résoudre l'exercice. Les différents systèmes d'ostensifs ne sont pas interchangeables mais attachés aux situations qui les ont fait naître comme le montre aussi l'exemple suivant.

3	7
f(3)	f(7)

Si f désigne une fonction linéaire alors le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité. VRAI **47** FAUX **11** JE NE SAIS PAS **32**

La reconnaissance d'un tableau de proportionnalité dans le tableau d'une fonction linéaire quand les valeurs numériques n'y figurent pas explicitement, nécessite l'interprétation du mot linéaire sans avoir recours aux nombres. Pour certains maîtres un tableau de proportionnalité ne doit contenir que des valeurs numériques explicites. (13% des maîtres interrogés estiment même que dans un tableau de proportionnalité ne peuvent figurer que des nombres entiers.)

D'autres résultats montrent la nécessité d'une transposition didactique entre les différents modèles.

Les déclarations suivantes sont-elles acceptables **:**

"$\frac{4}{6}, \frac{18}{27}$ et $\frac{14}{21}$ déterminent la même proportion." OUI **76** NON **13** JE NE SAIS PAS **11**

"Les suites (4, 18, 14) et (6, 27, 21) sont proportionnelles." OUI **53** NON **24** JE NE SAIS PAS **21**

"$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ est une proportion". VRAI **47** FAUX **11** JE NE SAIS PAS **29**

L'analyse des réponses montre qu'au moins un tiers des maîtres interrogés connaissent les deux acceptions du mot « proportion » mais ils attribuent néanmoins à ce mot le sens courant de rapport dans un contexte mathématique.

Remarque : dans les programmes actuels (de collège ou de STG), le mot « proportion » désigne le rapport de l'effectif d'une sous population A de E à l'effectif de la population E ($p = \frac{n_A}{n_E}$) nommé aussi fréquence (nombre qui résulte de ce rapport).

Conclusion :

La disparition des grandeurs comme objet d'enseignement en mathématiques limite la proportionnalité à l'étude des relations entre nombres. Mais, les analyses montrent l'indépendance du modèle « fonction linéaire » et des modèles issus de « l'arithmétique élémentaire ». La fonction linéaire n'a pas permis de reformuler les savoirs sur la proportionnalité contrairement à ce que laissaient espérer les programmes de 1968.

1 – 1 - 3 Nombres et proportionnalité

Les déclarations suivantes sont-elles acceptables pour le professeur ?	
"Le quotient de 54 par 9 est 6."	OUI **92** NON **3**
"54 est un multiple de 9. "	OUI **97** NON **0**
"54 et 9 sont proportionnels. "	OUI **55** NON **29**
"6 est le coefficient de proportionnalité des nombres 9 et 54."	OUI **66** NON **21**
"Quand le reste de la division euclidienne de deux nombres naturels est nul, ces deux nombres sont proportionnels."	OUI **63** NON **26**
"Un coefficient de proportionnalité est un entier."	OUI **16** NON **76**

Si une fraction représente un entier alors :			
le numérateur est un multiple du dénominateur.	VRAI **95**	FAUX **3**	JE NE SAIS PAS **3**
le numérateur est un diviseur du dénominateur.	VRAI **13**	FAUX **82**	JE NE SAIS PAS **5**
le numérateur et le dénominateur sont proportionnels.	VRAI **63**	FAUX **18**	JE NE SAIS PAS **13**

Nombres proportionnels

Les notions de multiple et diviseur perdurent mais le vocabulaire de la proportionnalité vient se superposer à celui spécifique de ces notions pour décrire les relations entre familles de nombres entiers. Il s'ensuit une confusion d'où émerge une conception fausse de « nombres proportionnels » qui cohabite avec les concepts de multiples et diviseurs.

Seulement 18% des maîtres rejettent clairement l'idée que deux nombres puissent être proportionnels. A une exception près, les maîtres qui répondent « VRAI » à « le numérateur et le dénominateur sont proportionnels », ont répondu « VRAI » à « le numérateur est un multiple du dénominateur ». Ces deux formulations ne s'excluent pas. Certains maîtres acceptent d'utiliser le vocabulaire de la proportionnalité pour dire que deux nombres sont dans un rapport multiple alors qu'ils connaissent les mots « diviseur » et « multiple ». Les différents vocabulaires cohabitent et s'interpénètrent.

Coefficient de proportionnalité

Une utilisation erronée de l'expression « coefficient de proportionnalité » s'inscrit dans cette conception fausse de l'idée de proportionnalité. Les réponses aux questions précédentes sont corrélées entre elles ; leur groupement caractérise cette conception de proportionnalité entre entiers.

Il est important de remarquer que les questions ne séparent pas les individus. En particulier, on ne peut pas isoler une sous population qui utiliserait systématiquement le vocabulaire de manière correcte. Les difficultés observées ne caractérisent pas les maîtres.

L'absence d'une culture précise conduit chacun d'eux à faire un usage inapproprié de termes sur une question ou sur une autre.

Conclusion :

La proportionnalité a son origine dans l'étude des grandeurs. L'expression très ancienne « nombres proportionnels » faisait référence à des mesures de grandeurs[3] mais lue par des gens qui ne connaissent pas l'arithmétique des grandeurs elle peut être perçue comme signifiant une relation particulière entre nombres abstraits. En particulier, le primaire étant le lieu privilégié de l'étude des entiers et de la proportionnalité, il s'ensuit l'idée que la proportionnalité doit décrire une relation particulière entre entiers.

1 - 2 Bilan et explications

Les professeurs ne disposent plus de mots précis pour décrire les notions de rapport, de proportionnalité et les pratiques qui les incluent. Il en résulte une grande ambiguïté dans l'usage qu'ils font de certains termes comme « proportion, rapport, proportionnalité, coefficient de proportionnalité, fraction, … » allant jusqu'à des confusions dans les concepts.

On voit apparaître l'interpénétration des vocabulaires de l'arithmétique actuelle d'une part (multiple, diviseur, quotient, reste, fraction, …) et ce qui reste de l'arithmétique ancienne d'autre part (proportion, proportionnel, …). Or le vocabulaire de l'arithmétique ancienne qui traitait des grandeurs ne peut pas être repris dans le vocabulaire moderne puisque la notion de grandeur a disparu des mathématiques modernes. Le vocabulaire de substitution aurait dû être celui des fonctions linéaires (application, image, antécédent, coefficient de linéarité, …), mais les insuffisances de la transposition didactique des mathématiques dites modernes et les réactions qu'elles ont provoquées, ont fait disparaître du vocabulaire de l'école primaire, les termes qui lui seraient nécessaires : élément, classe, couple, graphe, etc.

Les difficultés observées ne sont pas des caractéristiques de professeurs mais un fait culturel. Pour l'expliquer, nous avons étudié l'évolution des conditions d'enseignement de la proportionnalité.

a) Evolution de l'histoire de la proportionnalité

La construction moderne des nombres et des fonctions ignore totalement la proportionnalité et les grandeurs. Les mathématiciens définissent les nombres par les structures algébriques. La définition formelle de fonction privilégie l'idée de correspondance terme à terme entre éléments de deux ensembles. La fonction linéaire résume toutes les relations de proportionnalité ; elle n'est qu'un exemple banal de fonction. L'algèbre rend caduque l'usage et le vocabulaire de la proportionnalité.

b) Evolution des programmes

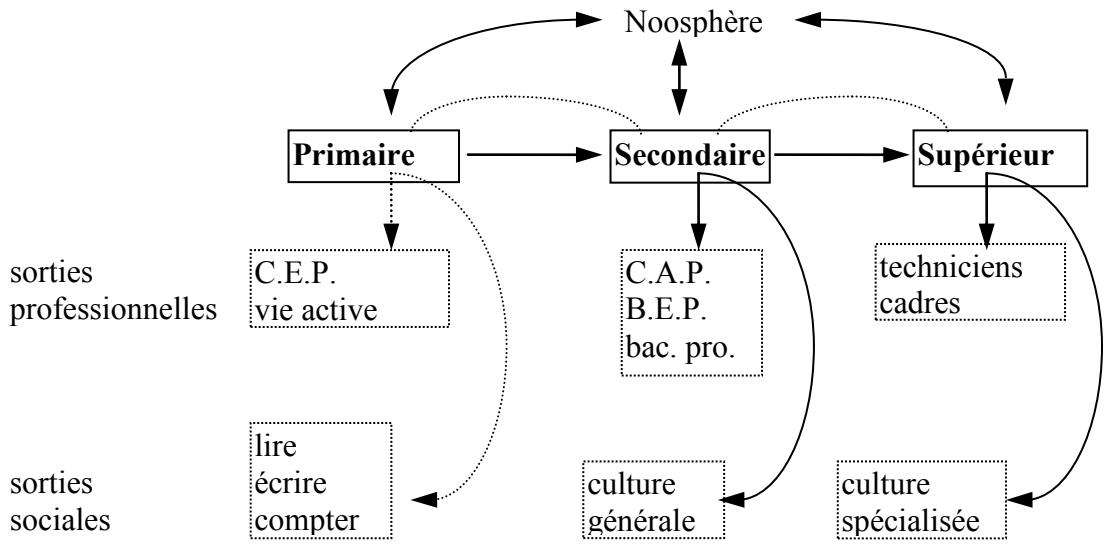
[3] Deux grandeurs mesurables sont proportionnelles si la correspondance entre leurs mesures est une fonction linéaire. Le coefficient de cette fonction linéaire est aussi appelé « coefficient de proportionnalité » ; il dépend des unités de mesures.

Les mathématiques modernes s'imposent à la noosphère et à l'école avec les réformes des années 1970. La noosphère, sous l'influence de la sphère savante n'est plus en mesure d'assurer son rôle de régulateur. Les connaissances de la proportionnalité n'ont plus fait l'objet de transpositions et ont ainsi disparu des contenus de l'enseignement du secondaire.
Les changements de contenus à enseigner auraient nécessité l'explication des réformes correspondantes pour une transposition d'une genèse axiomatique en une genèse didactique avertie.
c) Evolution des contraintes interinstitutionnelles
Chaque institution adapte ses instruments mathématiques aux problèmes qu'elle traite et aux conditions dans lesquelles elle le fait. L'école essaie d'adapter ses pratiques et ses conceptions de la proportionnalité à la nouvelle organisation des savoirs savants tout en assurant la pérennité des connaissances anciennes sous le contrôle de la noosphère.
Les dysfonctionnements que nous avons observés sont l'indice d'une évolution non régulée des rapports entre l'institution savante, l'institution scolaire et la noosphère.
Les changements curriculaires se sont faits sur la base de convictions idéologiques générées par une réorganisation des savoirs savants au détriment d'une réflexion sur ce qui est nécessaire à la culture, à la société, à la genèse des premiers savoirs mathématiques.

d) Pourquoi le système scolaire est-il resté aveugle aux conséquences de ce choix épistémologique ?

L'enseignement de la proportionnalité est conditionné par les attentes des différentes institutions scolaires et sociétales.

Le schéma suivant illustre l'évolution de l'environnement institutionnel de l'école primaire :



Primaire :

Avant la scolarité obligatoire jusqu'à 16 ans, l'école primaire préparait les élèves à la vie active. Les connaissances de l'arithmétique élémentaire et de la proportionnalité étaient adaptées aux différentes professions auxquelles se destinaient ces élèves.

Cette mission conférait à l'école primaire une identité, un statut social, une importance reconnue par la société toute entière. De ce fait les autres institutions scolaires portaient un regard attentif sur les pratiques et les contenus de l'enseignement élémentaire.

Secondaire :
Le secondaire devait assurer la formation des futurs instituteurs et donc tenir compte des contenus d'enseignement du primaire. L'arithmétique avait une place importante dans l'enseignement secondaire. La théorie des rapports et proportions a été maintenue dans les écoles normales jusqu'en 1970. En même temps le secondaire préparait les élèves à l'enseignement supérieur, lieu privilégié de l'algèbre. Ainsi arithmétique et algèbre devaient «cohabiter » dans le secondaire. (Certains manuels scolaires traitaient le même problème séparément par l'arithmétique puis par l'algèbre.)

La société a changé. Tous les élèves entrent en classe de sixième et 80% d'une classe d'âge doit atteindre le niveau du baccalauréat.
La seule sortie du primaire est le collège. L'école primaire n'est plus que la propédeutique du collège ; ce qu'elle fait ou ce qu'elle devrait faire « va de soi » pour les autres institutions scolaires qui de ce fait l'ignorent. Or le primaire ne peut traiter correctement la proportionnalité que si elle est présente dans le secondaire car les connaissances des professeurs des écoles dépendent de ce qu'ils apprennent dans le secondaire.

Mais le secondaire, principalement orienté vers les études longues, est lui-même assujetti au supérieur et n'a aucune raison d'enseigner l'arithmétique élémentaire. Il ne prépare plus les futurs professeurs des écoles.

Cet assujettissement de chaque niveau d'enseignement au niveau supérieur a des conséquences sur le fonctionnement des institutions scolaires. Il contribue à leur isolement et les oblige à un fonctionnement autonome. Or c'est l'usage effectif d'une connaissance à travers des pratiques communes à différentes institutions qui assure sa pérennité et sa diffusion dans la société.

Conclusion
Les changements curriculaires résultent de l'évolution des savoirs savants mais aussi des attentes des différentes institutions scolaires et sociétales. Il en résulte une évolution rapide des contenus d'enseignement qui nécessite une analyse périodique des pratiques des élèves et des professeurs.
En particulier, nous nous demandons si les connaissances actuelles des élèves de seconde sur les fonctions linéaires et affines peuvent suppléer celles de l'arithmétique des grandeurs et de la proportionnalité ?

2 La fonction linéaire reformule-t-elle les connaissances de la proportionnalité?

Il semble qu'on assiste ces dernières années à une résurgence de la proportionnalité dans l'enseignement obligatoire. Sa timide réapparition dans les programmes de collège s'accompagne-t-elle d'une prise en charge des grandeurs par l'enseignement de l'algèbre ?

Pour tester les connaissances des élèves entrant en seconde et plus précisément pour voir s'ils mobilisent des registres spécifiques à l'arithmétique ou à l'algèbre et avec quel succès, l'exercice standard suivant a été soumis à une classe de seconde pendant deux années scolaires consécutives : 2005-06 et 2006-07.

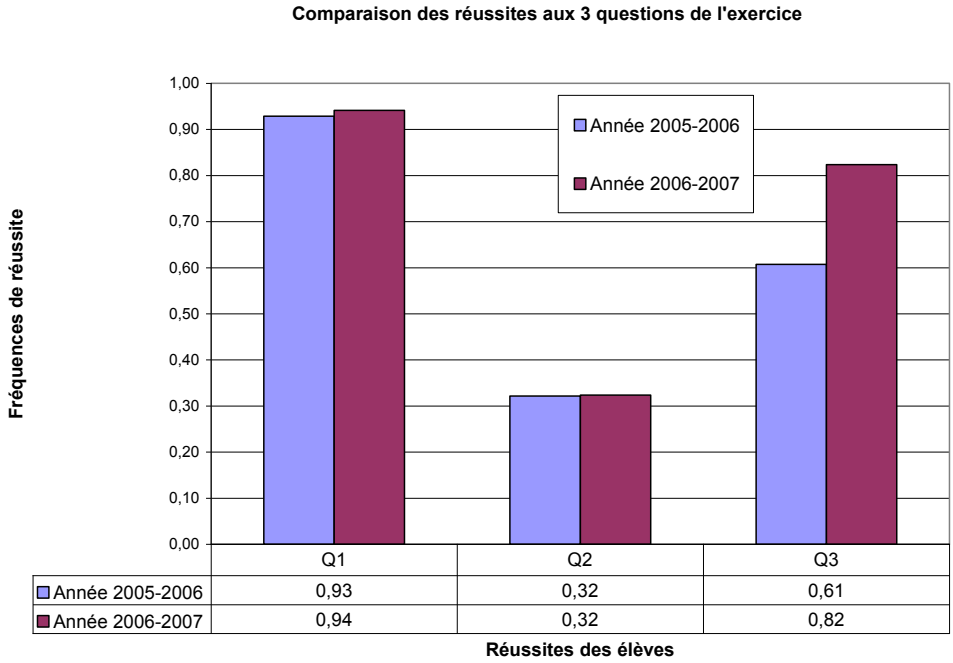
« *Pendant les soldes un magasin accorde 16% de remise sur les prix affichés.*

1) *Un article est affiché 35 €, quel sera le prix payé ? Justifier en écrivant vos calculs.*
2) *Un article est payé 21 €, quel était le prix affiché ? Justifier en écrivant vos calculs.*
3) *Le commerçant a accordé 7,2 € de remise sur un article. Quel était le prix affiché de cet article ? Justifier en écrivant vos calculs*. »

Les participants à l'atelier étaient invités à analyser cet exercice et à commenter les techniques résolutoires des élèves.

2 – 1 Stabilité dans les réponses des élèves

Les fréquences de réussite à chacune des trois questions sont très proches pour les deux années scolaires comme le montre l'histogramme suivant :



	Q1	Q2	Q3
Année 2005-2006	0,93	0,32	0,61
Année 2006-2007	0,94	0,32	0,82

Seule la question 3 fait apparaître une différence entre les fréquences de réussites des deux années. Un test avec la variable normale donne une probabilité de 0,0574 de dépasser cette différence entre deux échantillons indépendants.[4]

Par contre, on pouvait s'attendre aux écarts de réussite entre les trois questions :

La question 1 peut se résoudre par un calcul direct du prix payé ou par un calcul intermédiaire du montant de la remise.

La question 2 nécessite la mise en œuvre d'une fonction réciproque (l'erreur classique consiste à calculer la remise sur le prix payé) et de ce fait on pourrait penser que les élèves ayant une approche algébrique du problème sont mieux armés pour donner une réponse juste.

[4] Cf. annexe 1 pour détails des résultats statistiques.

La question 3 nécessite aussi la mise en œuvre d'une fonction réciproque mais qui peut-être déterminée directement à partir du pourcentage de remise donné dans la consigne.

2 - 2 Analyse des réponses des élèves de l'année 2006-07

Les réponses des 34 élèves font apparaître une grande diversité de formulations (d'écritures) mais les méthodes de résolution peuvent être groupées autour de quatre techniques :

Fonction linéaire de coefficient 0,84 : (FLP, FLPI)

On peut penser que les élèves qui ont une approche algébrique du problème utilisent la fonction linéaire de coefficient 0,84 (FLP) à la question 1 et sa réciproque (FLPI) à la question 2. Or une seule élève utilise cet opérateur avec succès à la question 1 mais échoue à la question 2. Deux autres élèves prennent conscience de l'intérêt de cette fonction à la question 2 et utilisent directement sa réciproque (FLPI) avec succès.

Fonction linéaire de coefficient 0,16 : (FLR, FLRI)

28 élèves utilisent la fonction linéaire de coefficient 0,16 (FLR) et 17 d'entre eux utilisent la réciproque de cette fonction (FLRI).

Parmi les 28 élèves, 26 réussissent la question 1 en calculant le montant de la remise puis le montant à payer par différence.

Parmi les 17 élèves, 16 réussissent la question 3 ; 15 échouent à la question 2 car presque tous calculent la remise sur le prix payé (c'est-à-dire 16% de 21€).

Fonction linéaire et équation : (FLR et EQ)

Neuf élèves font une mise en équation (EQ) en utilisant la fonction linéaire de coefficient 0,16 (FLR) ; mais six d'entre eux échouent à la question 2 et trois d'entre eux échouent à la question 3.

Proportion et équation : (P et EQ)

Sept élèves écrivent une proportion (P) où figure une inconnue et réalisent ainsi une mise en équation (EQ) pour chacune des trois questions. Ces sept élèves réussissent la question 1 et la question 3 ; mais deux d'entre eux échouent à la question 2 car ils calculent la remise sur le prix payé.

Pour résumer, reprenons les techniques et réussites question par question :

A la question 1, tous les élèves, sauf 2, calculent le montant de la remise, soit avec la fonction de coefficient 0,16 (FLR), soit avec une mise en équation proportionnelle (P et EQ).

La question 2 est réussie soit par ceux qui utilisent la réciproque de la fonction de coefficient 0,84 (FLPI) soit par ceux qui font une mise en équation proportionnelle (P et EQ).

Les élèves qui réussissent la question 3 utilisent soit la réciproque de la fonction de coefficient 0,16 (FLRI), soit la fonction directe de coefficient 0,16 mais avec une mise en équation (FLR et EQ), soit une mise en équation avec une proportion (P et EQ).

La question 3 est mieux réussie que la question 2, probablement parce qu'elle peut être résolue en utilisant la réciproque d'une fonction linéaire donnée dans la consigne.

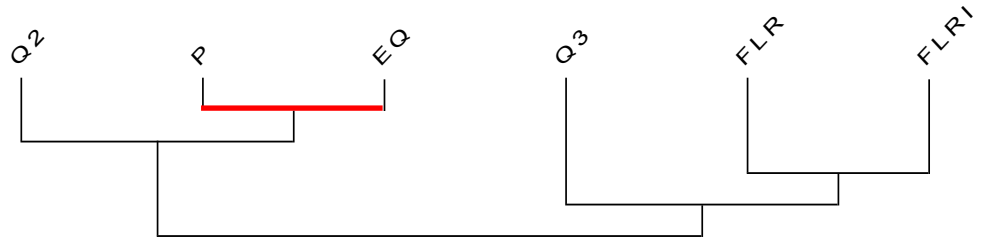
On pourrait espérer, de la part d'élèves de seconde, des techniques utilisant la fonction linéaire :

Question 1 : $35 \times 0{,}84 = 29{,}4$ (1 seul élève utilise cette technique)

Question 2 : $21 \div 0{,}84 = 25$ (2 élèves utilisent cette technique)

Question 3 : 7,2÷0,16=45 (17 élèves utilisent cette technique)
En fait, peu d'élèves (moins de la moitié) utilisent la fonctionnalité de la réciproque d'une fonction linéaire.

L'arbre de similarité suivant montre une proximité des caractères P et EQ avec la question 2, et une proximité des caractères FLR et FLRI avec la question 3. Ces proximités confirment les remarques précédentes : la question 2 est principalement réussie par les élèves qui font une mise en équation proportionnelle alors que la question 3 est aussi réussie par ceux qui utilisent la fonction de coefficient 0,16 ou sa réciproque.



Arbre dessimilarités : C:\Documentsand Settings\xxxx\Mesdocuments\test-seconde-2006-chic.csv

L'écriture d'une proportion relève bien d'une technique propre à l'arithmétique, mais l'usage d'une inconnue pour la mise en équation proportionnelle s'apparente davantage à une résolution algébrique car elle utilise le signe « = » et une lettre « *x* ». Les élèves qui ont un « pied dans l'algèbre » ont plus de facilités à faire cette mise en équation proportionnelle que ceux qui sont restés dans une conception arithmétique des mathématiques. Peut-être cette mise en équation proportionnelle pourrait-elle être un outil de transposition entre l'arithmétique et l'algèbre.

Le concept de fonction n'est pas spécifique à l'algèbre. Il peut s'élaborer dans le cadre arithmétique avec les notions de dépendance et de correspondance entre grandeurs. Les élèves utilisent le coefficient de proportionnalité (0,16), sans parler de fonction linéaire, mais de manière adaptée à la question 3.

Nous retiendrons que ces deux objets de savoir que sont « la mise en équation proportionnelle » et « la fonction linéaire » présentent, de par la diversité de leurs praxéologies, une grande adaptabilité autant au cadre arithmétique qu'au cadre algébrique. Ils apparaissent comme des maillons dans la chaîne des connaissances des élèves, suffisamment maniables pour faciliter la dialectique nécessaire au passage de l'arithmétique à l'algèbre.

2 - 3 Conclusion

Ces observations tendent à montrer que ce que l'enseignement de l'algèbre fait gagner en généralité n'améliore pas l'extension du champ d'utilisation de la proportionnalité : les connaissances relatives à la proportionnalité semblent attachées à certaines situations culturellement reconnues, et les techniques utilisées par les élèves semblent dépendantes des problèmes qui les ont vu naître.
Les élèves ne peuvent pas transférer d'eux-mêmes leurs connaissances d'un cadre à un autre.
Si la linéarité se limite à l'étude de relations numériques, elle ne peut pas reformuler les connaissances de la proportionnalité. Il incombe donc aux professeurs d'organiser un travail de transposition pour que la fonction linéaire apparaisse comme un objet de savoir qui

résume, unifie et réfléchit la diversité des connaissances des élèves sur la notion de proportionnalité.

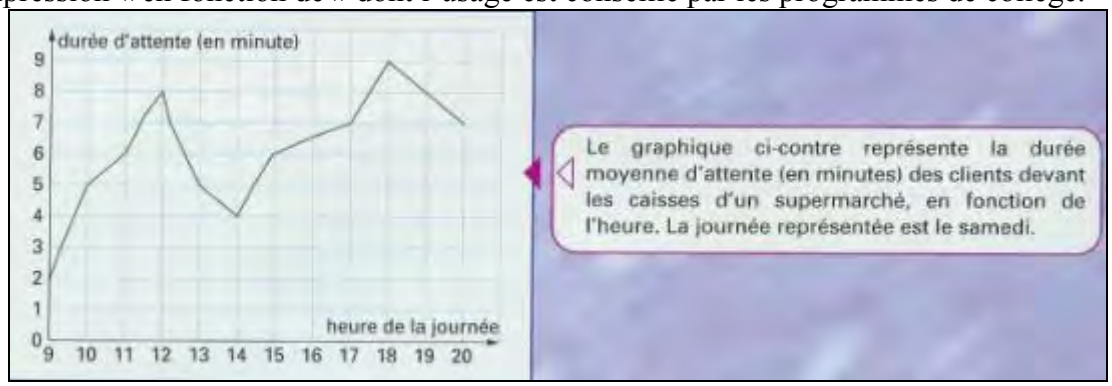
3 Un enseignement des fonctions en seconde qui clôture les connaissances de la proportionnalité est-il possible ?

Nous avons comparé deux introductions de la notion de fonction en seconde qui révèlent des choix épistémologiques différents ; les pratiques d'enseignement qui en découlent, peuvent générer chez les élèves des connaissances différentes pour un même objet de savoir.

3 - 1 Présentation formelle et institutionnalisation dans le cadre numérique

Le premier exemple est extrait du manuel « Repère, math 2de, Hachette Education, 2004 ».
La présentation de deux activités introductives au chapitre « Généralités sur les fonctions » est caractéristique d'une triple classification suivant le cadre, la nature des fonctions et leurs représentations.

Sur la page de gauche figure une activité intitulée « Etude d'une fonction sans calculatrice ». Il s'agit en fait d'un relevé statistique représenté par une courbe où figurent les unités de grandeurs. Il est accompagné d'un commentaire utilisant le vocabulaire des grandeurs et l'expression « en fonction de » dont l'usage est conseillé par les programmes de collège.



La situation est ensuite retraduite en utilisant les ostensifs propres à l'algèbre : $f, t, f(t)$; puis les questions sont étiquetées avec de nouvelles expressions : ensemble de définition, image, antécédent, etc. Il est probable qu'un élève novice aura des difficultés à les mettre en relation avec les formulations en termes de grandeurs.

Le superviseur d'un supermarché affiche des renseignements à l'entrée de son magasin, notamment le graphique d'une fonction f qui à chaque instant t de la journée, associe le temps d'attente $f(t)$ aux caisses.

1 Ensemble de définition
Quels sont les horaires d'ouverture du magasin ?

2 Image par f
Quel est le temps d'attente à 14 h 00 ?
Quelle est l'image de 10 par f ?
Indiquer la valeur de $f(19)$.

3 Antécédents par f
À quelle heure attend-on 5 minutes ?
Ces heures sont les antécédents de 5.
Quels sont les antécédents de 7 ? de 1 ? de 9 ?

L'introduction du lexique spécifique de l'algèbre n'est pas nécessitée par cette situation puisque les élèves disposent déjà du vocabulaire des grandeurs pour formuler.
L'activité n'est qu'un alibi pour institutionnaliser les éléments de savoir mentionnés dans le programme : *f*, *f(t)*, *ensemble de définition, image, antécédent, équation, inéquation, sens de variation, tableau de variations, min, max*. Ils ne sont pas utiles à l'élève qui peut répondre aux questions en termes de grandeurs, mais ils vont permettre au professeur de décrire, dans le cadre numérique, l'activité suivante qui est en vis-à-vis de la première sur la page de droite.

Cette deuxième activité est intitulée : « Etude d'une fonction avec calculatrice ». Les auteurs y proposent deux exercices sur les fonctions définies par des formules algébriques : $f(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}$ et $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{2}{x})$. Ces formules désignent le type de fonctions (fonctions rationnelles) en même temps qu'elles décrivent l'algorithme qui permet la mise en correspondance des nombres. Les auteurs placent ces exercices dans le cadre numérique (x et $f(x)$ sont des variables réelles) en utilisant le vocabulaire introduit dans l'activité précédente. Reprenons le premier exercice :

A. On considère la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par $f(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}$.

1 Calculer $f(x)$ pour les valeurs de x suivantes :
0 ; 1 ; −2 et 3.

2 En déduire si les points suivants sont situés sur la représentation graphique de f :
$O(0\,;0)$; $A\left(1\,;-\dfrac{1}{6}\right)$; $B\left(-2\,;\dfrac{-6}{5}\right)$; $C(3\,;-0{,}6)$.

3 Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$							

4 Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $f(x)=1$?

La formule $f(x) = \frac{-2x}{x^2+1}$ établit formellement le graphe de la fonction, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x; \frac{-2x}{x^2+1})$ lorsque x parcourt **R**. Elle ne résume pas la structure d'une situation ; elle dit à l'élève, qui connaît les règles du calcul algébrique, quelle procédure il doit suivre pour déterminer le correspondant de n'importe quel nombre réel. L'essentiel des tâches consiste à faire ces calculs puis à encadrer et déterminer un minimum.
Cette activité de découverte ne diffère pas des exercices d'application qui suivent le cours.

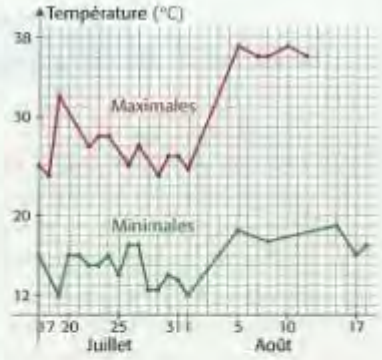
En résumé, dans ce manuel, le passage du cadre arithmétique au cadre numérique, d'une relation entre grandeurs à une relation entre nombres abstraits n'est pas organisé. La première activité institutionnalise d'emblée les objets et le vocabulaire qui vont permettre au professeur de faire fonctionner les algorithmes de la deuxième, mais la signification que l'élève peut donner à cette deuxième activité, qui se limite à un jeu de calcul formel sur les nombres, ne se nourrit pas de la relation entre grandeurs décrite dans la première activité.

3 - 2 Du modèle implicite d'action dans le cadre des grandeurs à l'usage canonique d'une formule algébrique

Le deuxième exemple est extrait du manuel « Maths seconde ; édition 2004 ; collection Indice ; Bordas ». Les deux premières activités qui introduisent le chapitre « Généralités sur les fonctions », marquent la différence d'approche didactique de ce manuel par rapport au précédent.

L'activité 1 intitulée « Canicule », décrit, dans le cadre des grandeurs (dates et températures), une fonction du hasard (des observations), avec des courbes de températures.

Le graphique fournit l'évolution, en un lieu donné, des températures maximales et minimales en degrés Celsius au cours de la période du 17 juillet au 17 août 2003.



1.a. Quelles sont ces températures et leur écart le 1er août ?
b. Durant quelle période les maximales ont-elles dépassé 30 °C ?
c. Quelle est la température la plus élevée observée ? À quelle date a-t-elle été relevée ? Quelle fut, ce jour-là, la température minimale ?

2. Le 5 août, la température maximale a été de 37 °C et la température minimale de 19 °C. L'écart de température était donc de 18 °C.
a. Calculer l'écart de température le 15 août.
b. Quel jour l'écart de température a-t-il été le plus faible ? Le plus important ?

L'élève doit faire des lectures graphiques de valeurs, d'extrema, d'écarts …
Les questions sont formulées avec le vocabulaire des grandeurs et les réponses attendues sont des grandeurs mesurées. L'idée de variation est sous-jacente. Les auteurs ne cherchent pas à introduire le vocabulaire des fonctions mais restent dans le cadre des grandeurs.

L'activité 2, intitulée « Aire de la baignade », décrit dans le cadre des grandeurs (longueurs et aires) une fonction déterministe (performative). Les questions introduisent progressivement les quatre représentants d'une fonction : programme, formule, tableau, représentation graphique.

Le responsable d'un parc municipal, situé au bord d'une large rivière, veut aménager une aire de baignade surveillée de forme rectangulaire. Il dispose d'un cordon flottant de 160 m de longueur et de deux bouées A et B. On se propose de déterminer comment placer les bouées A et B pour que l'aire de baignade soit maximale.

1. Si la distance de la bouée A à la rive est de 25 m, quelle est la longueur de la zone de baignade ? Quelle est alors son aire ?

2.a. Montrer que la distance x (en m) de la bouée A à la rive varie entre 0 et 80 m.
b. Expliquer pourquoi la longueur de la zone de baignade est égale à $160 - 2x$.
On désigne par $A(x)$ l'aire, en m², de cette zone. Cette aire est donnée en fonction de x. Vérifier que $A(x) = x(160 - 2x)$.

3. Calculer $A(x)$ pour x variant de 0 à 80, de 10 en 10.

4. Dessiner la représentation graphique correspondante.
On choisira, sur l'axe des abscisses, 1 cm pour représenter 10 m et, sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour représenter 400 m².

La première question est formulée en termes de grandeurs. Elle conduit l'élève à construire un **programme** pour calculer une aire en fonction d'une longueur dont la mesure est donnée et accompagnée de son unité ($25m$).
La deuxième question est une reprise de la première mais ici la distance inconnue est désignée par la lettre x accompagnée de l'unité de grandeur entre parenthèses (*en m*). Les questions intermédiaires conduisent l'élève à **résumer le programme de calcul par une formule arithmétique** : $A(x) = x(160 - x)$.
Dans la question 3, cette formule peut aussi être comprise comme **une formule algébrique** qui résume un algorithme de calcul (on peut oublier les unités de grandeurs) et qui permet de construire un **tableau de valeurs numériques** indépendamment des grandeurs.
La question 4 invite l'élève à récupérer les valeurs numériques de la question précédente pour construire une **représentation graphique**.
On repère bien, dans cette activité, les quatre représentants d'une fonction : programme, formule, tableau de valeurs, courbe représentative. Le passage des grandeurs aux nombres (d'un cadre à l'autre) se fait via la formule en oubliant les unités. On voit que les auteurs tentent d'abstraire une relation numérique d'une relation entre grandeurs en faisant glisser le vocabulaire du cadre des grandeurs vers le cadre numérique.

Commentaires
Ces deux manuels nous semblent caractériser deux approches didactiques différentes de la notion de fonction.

Dans le premier, les auteurs institutionnalisent, dans la première activité, les objets qui permettent de mettre en œuvre le concept numérique de fonction dans la deuxième activité.

Dans le deuxième manuel, les auteurs n'établissent pas de lien entre l'activité 1 et l'activité 2. Dans l'activité 1, ils proposent un recueil de données statistiques représentées par un graphique. Les températures relevées chaque jour sont le fait du hasard ; il n'y a pas de relation de cause à effet entre la date et la température. On ne peut pas prévoir la température qu'il fera tel jour. La représentation d'une telle situation peut se faire a posteriori avec un tableau de valeurs où figurent les unités ou avec une représentation graphique de ces valeurs ; mais une telle situation ne peut pas se résumer par une formule. Il n'y a pas de raison de « passer à l'algèbre » ; l'élève ne peut décrire cette correspondance fortuite avec le vocabulaire des fonctions que s'il a préalablement conceptualisé la notion de fonction. Les situations qui résultent du hasard ne sont pas propices à une dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre.

Dans les situations déterministes, cette dialectique est facilitée par les différents rôles que peut jouer la formule. Dans le cadre des grandeurs, elle peut résumer le programme de calcul d'une mesure en fonction d'une autre comme dans l'activité intitulée « aire de la baignade ». Elle peut aussi modéliser une classe de situations, et ainsi, d'outil de calcul devenir un objet de savoir institutionnel ; par exemple la formule qui donne l'aire d'un triangle renvoie à plusieurs situations et questions de géométrie élémentaire. Dans le cadre algébrique, la formule peut décrire une relation numérique particulière en résumant l'algorithme de calcul correspondant ou modéliser une classe de situations (par exemple, la relation $y=ax$ regroupe toutes les situations de proportionnalité). Elle peut aussi être considérée comme l'élément d'un ensemble structuré (par exemple ax est un élément de l'anneau des polynômes).

Ainsi la formule est un outil-objet constitutif de l'organisation mathématique du cadre des grandeurs mais aussi un outil-objet du cadre de l'algèbre. De plus elle permet d'établir un pont entre ces deux cadres. D'outil résolutoire dans le cadre des grandeurs, elle devient un objet de l'algèbre comme dans l'activité « aire de la baignade ». Réciproquement, chaque formule algébrique renvoie à une classe de situations arithmétiques ; par exemple, la fonction linéaire renvoie à toutes les situations de proportionnalité propres au cadre des grandeurs.
La formule est donc un maillon réversible dans des chaînes de connaissances qui permet à l'élève d'entretenir une dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre. Elle fonctionne comme un « transposon » qui résume, modélise et « réfléchit » (au sens piagétien d'abstraction réfléchissante) les savoirs sur les grandeurs.

Conclusion

Une analyse succincte des activités des manuels semble confirmer que le passage des grandeurs à l'algèbre est facilité par le recours aux fonctions déterministes, mieux qu'avec des fonctions du hasard. Mais nous avons vu aussi que l'action du professeur est limitée par la culture de l'institution à laquelle il appartient. Ce qu'il peut faire dépend de ses connaissances mais aussi des contraintes institutionnelles.
Il incombe donc à la noosphère d'organiser un curriculum qui permette d'« homogénéiser» les connaissances de la linéarité en arithmétique et en algèbre au collège afin que les futurs professeurs des écoles disposent de moyens de contrôler ce qu'ils ont à enseigner aux niveaux élémentaires.

Bibliographie

Comin E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : Université de Bordeaux 1.
Comin E. (2002). *L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 22, n°2-3, p.141.
Comin E. (2005). *Variables et fonctions, du collège au lycée*. Petit x n°67.
Comin E. (2008). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions*. Non encore publié.

Annexe : Les résultats des élèves de seconde aux questions sur les pourcentages

Le tableau suivant donne les nombres de réussites en 2005-06 et 2006-07 :

	Réussites	Echecs	Total
2005-06	17	11	28
2006-07	28	6	34

Si P_1 et P_2 désignent les fréquences de réussites des deux années, alors les effectifs permettent de supposer que ces deux variables aléatoires suivent une loi normale de moyenne estimée

$p_0 = \frac{17+28}{28+34} \approx 0{,}726$. Alors D=P_1-P_2 suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type

$\sigma(D) = \sqrt{\frac{0{,}726 \times 0{,}274}{28} + \frac{0{,}726 \times 0{,}274}{34}} \approx 0{,}114$, donc $\frac{\mathrm{d}}{\sigma(\mathrm{D})}$ suit une loi normale centrée réduite. Or $\frac{d}{\sigma(D)} \approx \frac{\frac{17}{28} - \frac{28}{34}}{0{,}114} \approx 1{,}898$ □

La probabilité que la valeur absolue de la variable normale centrée et réduite dépasse 1,9 est 0,0574.