

DE LA RESTAURATION DE FIGURES A LA REDACTION D'UN PROGRAMME DE CONSTRUCTION. LE PROBLEME DE L'ELEVE, LE PROBLEME DU MAITRE

Marc GODIN

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN

IUFM Nord - Pas-de-Calais¹

Résumé

Au cours de cet atelier, après une brève présentation de la problématique et de ce que nous appelons restauration de figure, les participants ont été invités à restaurer des figures pour analyser les variables didactiques d'une telle activité, ses potentialités en termes d'apprentissage des élèves et les choix qui s'offrent au maître pour l'organiser. Les questions ont été discutées à partir de quelques exemples étudiés dans notre groupe de recherche et mis en œuvre au cycle 3.

INTRODUCTION

A propos des figures planes, les programmes d'avril 2007² de l'école élémentaire énoncent, en référence au socle commun, les connaissances et « capacités » suivantes à atteindre au cours du cycle 3.

¹ L'atelier présenté ici doit beaucoup au travail d'un groupe de recherche soutenu par l'IUFM Nord - Pas-de-Calais et auquel participent ou ont participé Frédéric Brechenmacher, Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Bachir Keskessa, Anne-Cécile Mathé, Odile Verbaere ainsi que des maîtres formateurs et conseillers pédagogiques.

² Les programmes de 2002 ou de 2007 étaient en vigueur au moment de la réalisation des séances en classe. Les programmes de 2008 ne diffèrent pas beaucoup dans le domaine des figures planes : ils reprennent, sans les détailler, les rubriques des programmes de 2002 en ajoutant le parallélogramme à la liste des figures. Dépourvus de commentaires, ils donnent comme objectif de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 « de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure », phrase extraite presque mot pour mot des documents d'application de 2002. La résolution de problèmes n'étant plus une rubrique à part, ils indiquent aussi des problèmes dans le domaine de la géométrie : « Les problèmes de reproduction ou de construction de configurations géométriques diverses mobilisent la connaissance des figures usuelles. Ils sont l'occasion d'utiliser à bon escient le vocabulaire spécifique et les démarches de mesurage et de tracé. »

5.3 Figures planes : triangle (et cas particuliers), carré, rectangle, losange, cercle

- connaître et savoir utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : triangle, triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral, carré, rectangle, losange, cercle ; sommet, côté ; centre, rayon et diamètre pour le cercle.

- reconnaître de manière perceptive une figure plane (en particulier dans une configuration plus complexe), en donner le nom, vérifier son existence en ayant recours aux propriétés et aux instruments ;
- décomposer une figure en figures plus simples ;
- tracer une figure (sur papier uni, quadrillé ou pointé), soit à partir d'un modèle, soit à partir d'une description, d'un programme de construction ou d'un dessin à main levée ;
- tracer un cercle dont on connaît le centre et le rayon ;
- *décrire une figure en vue de l'identifier dans un lot de figures ou de la faire reproduire sans équivoque.*

Les activités habituellement proposées aux élèves pour atteindre ces capacités comprennent la reproduction de figures à partir d'un modèle, la rédaction d'un programme de construction à partir d'une figure et la réalisation d'un programme de construction, éventuellement dans un jeu d'échanges entre émetteur et récepteur, le tout en utilisant la règle graduée, l'équerre et le compas³. En général, la taille de la figure à obtenir est fixée par la donnée de mesures à moins que la figure ne soit à reproduire à l'identique. Qu'est-ce qui change dans l'activité des élèves et du maître si, au lieu de donner des mesures, on fournit des éléments de la figure cible et qu'au lieu de fournir une règle graduée, on fournit aux élèves une règle non graduée « informable » (i.e. sur laquelle on peut écrire et effacer pour reporter des longueurs) ? Cette activité relève de ce que nous appelons « restauration de figure ».

Quel est le travail de l'élève pour restaurer une figure ? Pour écrire un message permettant à un autre élève de le faire ? Comment peut-on jouer sur les variables didactiques pour amener les élèves à mettre en oeuvre les connaissances géométriques du programme ?

Quel est le travail du maître pour mettre en œuvre et gérer une telle activité dans sa classe ? Comment « piloter » ses choix (au niveau de la préparation et la gestion de sa classe) pour aider ses élèves à acquérir les connaissances et capacités du programme et à développer un rapport opératoire aux figures géométriques ? Quelles connaissances géométriques lui sont utiles, nécessaires pour cela ?

Notre recherche part de l'hypothèse qu'il est possible d'utiliser l'étude, la production ou la reproduction de figures géométriques comme un milieu ou un domaine de travail où peuvent se construire les connaissances attendues à l'école élémentaire mais aussi un rapport à la géométrie et à l'usage des instruments plus conforme à ce qui est attendu au collège ; la restauration de figures, par le jeu sur les variables didactiques qu'elle permet, est un moyen de mise en œuvre de cette hypothèse.

³ La gomme n'est pas reconnue comme un instrument de géométrie, mais effacer des lignes déjà tracées joue un rôle fondamental pour l'analyse des situations de reproduction ou de restauration. Les dépassements de lignes sont-ils ou ne sont-ils pas acceptés ? La gomme est une variable didactique méconnue.

Après une brève présentation de la problématique et de ce que nous appelons restauration de figure, les participants de l'atelier ont été invités à restaurer des figures pour analyser les variables didactiques d'une telle activité, ses potentialités en termes d'apprentissage des élèves et les choix qui s'offrent au maître pour l'organiser. Les questions ci-dessus ont été ensuite discutées à partir de quelques exemples étudiés dans notre groupe de recherche et mis en œuvre au cycle 3.

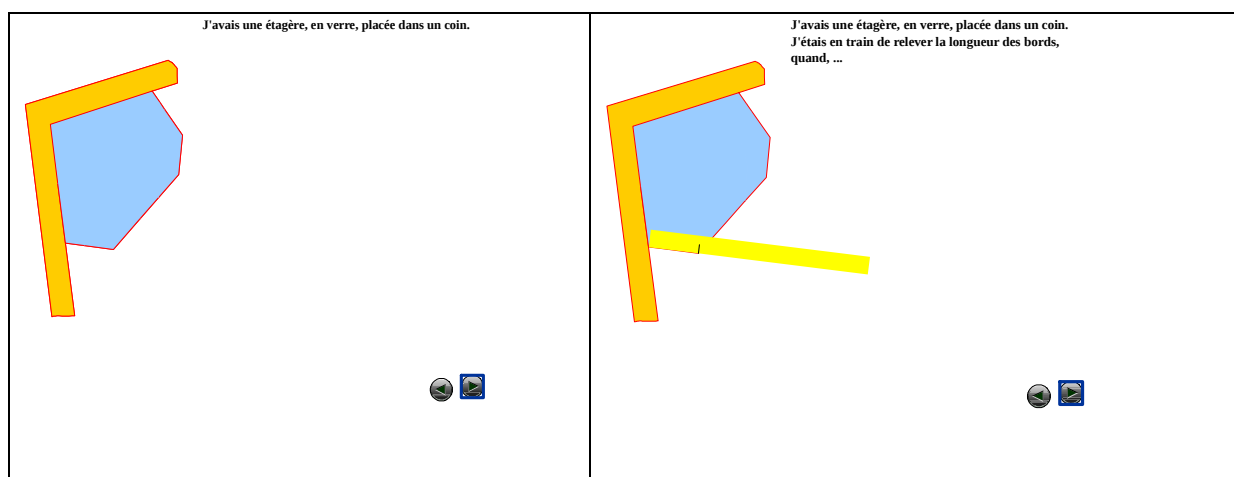
I - LA RESTAURATION DE FIGURE

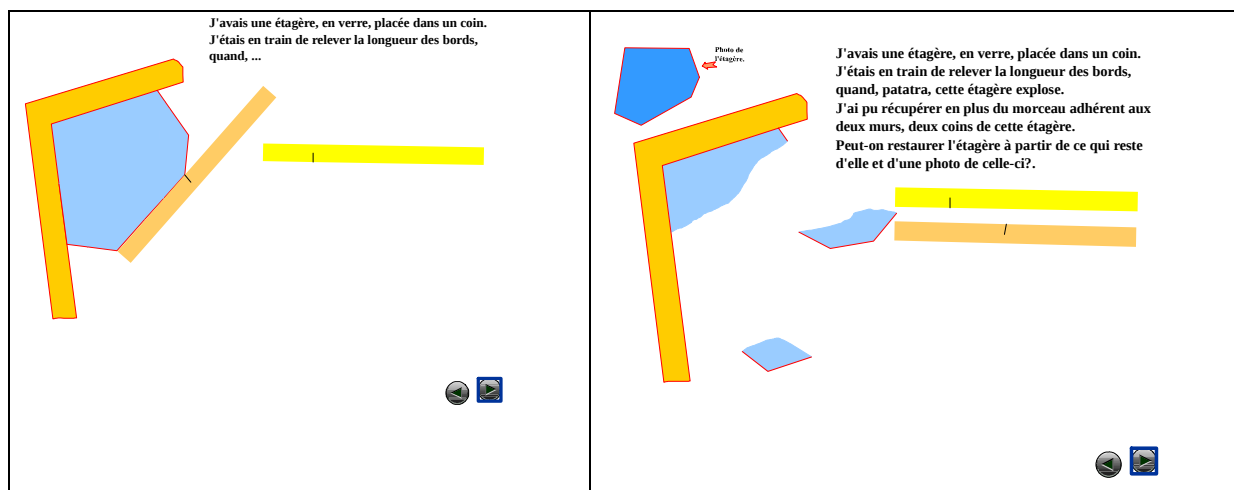
La restauration de figures planes consiste à reproduire une figure modèle à partir d'une amorce à l'aide d'instruments. Il s'agit donc de travailler, non pas sur une figure, mais sur la différence entre deux figures : le modèle et l'amorce (éventuellement en plusieurs morceaux). La reproduction de figure correspond au cas où l'amorce est vide et où les instruments autorisés sont la règle et le compas. Nous parlons de restauration si l'amorce n'est pas vide ou réduite à un point et plus particulièrement si elle est 2D (donc comprend plus qu'un segment) ou si un instrument est 2D (gabarit, morceau de surface voire équerre). Le cas des figures sur papier quadrillé n'est pas considéré ici.

I. 1. Activités proposées aux participants pour entrer dans la restauration de figure

I.1.1. L'étagère

J'avais une étagère en verre placée dans un coin. J'étais en train de relever la longueur des bords quand, patatras, cette étagère explose. J'ai pu récupérer, en plus du morceau adhérent aux deux murs, deux coins de cette étagère. Peut-on restaurer l'étagère à partir des morceaux qui restent et d'une photo ?



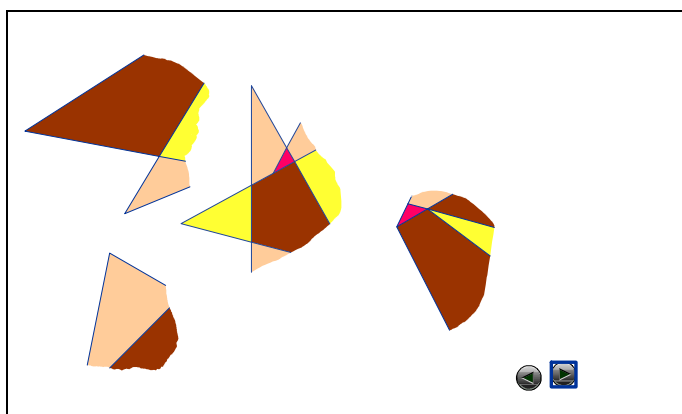


Barème à considérer : tout trait⁴ tracé est gratuit, tout trait effacé avec une gomme est gratuit, toute utilisation d'instrument coûte une fortune sauf un instrument qui permette de reporter une longueur.

Bref, qui fera le moins de reports pour restaurer l'étagère ?

1.1.2. Le puzzle par superposition

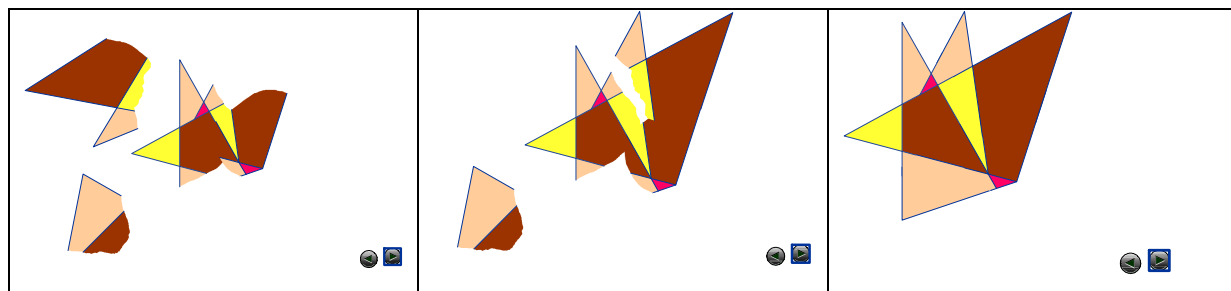
Reproduire une figure (surface) à partir de plusieurs exemplaires déchirés de cette figure.



Les exemples traités nous ont fourni deux cas de restauration de figure.

- Le second cas concerne les puzzles par superposition. La restauration se fait par superposition en utilisant des morceaux qui ne proviennent pas d'un unique modèle. On peut cependant être amené à compléter en traçant des traits à la règle.

⁴ Dans tout ce texte, « trait » est à considérer comme synonyme de « trait droit ».



- Le premier cas concerne les puzzles par juxtaposition dont on a perdu un morceau (ou plusieurs) comme pour l'étagère. C'est le cas que nous développerons dans la suite.

I. 2. Les variables des situations de restauration

I.2.1. L'activité de restauration dépend des instruments disponibles et de leur coût

L'introduction d'un coût à l'utilisation des instruments permet la réussite par des procédures diverses, qui demandent plus ou moins de connaissances géométriques, mais incite à utiliser certains instruments plutôt que d'autres et donc à développer des connaissances géométriques, pour obtenir les effets graphiques voulus, avec des instruments dont l'utilisation est moins immédiate, à partir des connaissances anciennes des élèves. En modifiant le barème relatif aux utilisations des instruments de tracé ou d'effacement de tracé, on peut donc agir sur les procédures de tracé des élèves. De même, suivant l'amorce, il y a plus ou moins de connaissances à mettre en jeu pour restaurer la figure.

I.2.2. L'activité de restauration dépend de l'amorce

Un trait est nécessaire.	Deux traits sont nécessaires et ça déborde.	Deux traits et un report de longueur.	Trois traits et deux reports de longueur.

Nous reviendrons sur l'analyse des relations entre amorce et figure.

I.2.3. L'activité de restauration dépend du choix de la figure

Pour créer un support, un maître pourrait en plus considérer une figure dans laquelle une relation est cachée et indépendante du choix de l'amorce. Nous verrons, plus loin, des exemples de figures symétriques qui, bien entendu, ont des propriétés cachées.

Les variables, pour une activité de restauration, concernent essentiellement : la figure, l'amorce, les instruments, le barème associé aux instruments pour estimer le coût de la restauration et les exigences d'écriture.

I.3. Analyse des relations amorce - figure

La reconnaissance d'un problème de restauration commence par la reconnaissance d'une figure comme sous-figure d'une autre. La reconnaissance de l'amorce comme une partie de la figure, peut, selon la consigne donnée et selon les procédures mises en œuvre par les élèves, être une reconnaissance visuelle, être acceptée comme une donnée, être vérifiée en utilisant un transparent (par exemple : le transparent de la figure qui servira pour valider l'activité de restauration), être vérifiée en utilisant des instruments. Le choix par le maître de donner à la figure et à l'amorce des orientations différentes écarte la possibilité d'une démarche visuelle par translation.

Les relations entre la figure à restaurer et son amorce orientent l'analyse de la restauration. La détermination de ce que l'on cherche à construire en fonction de ce que l'on a, pose le problème de la restauration qui est fonction non de la figure seule mais de la différence entre l'amorce et la figure, ce que nous appellerons la figure-différence. C'est l'analyse de cette différence qui importe pour choisir une restauration relative à un niveau d'enseignement donné. Évidemment, si l'amorce est insignifiante, les propriétés géométriques de la figure constituent l'essentiel des propriétés à restaurer.

I.4. Réflexion sur les instruments permettant une restauration de figure

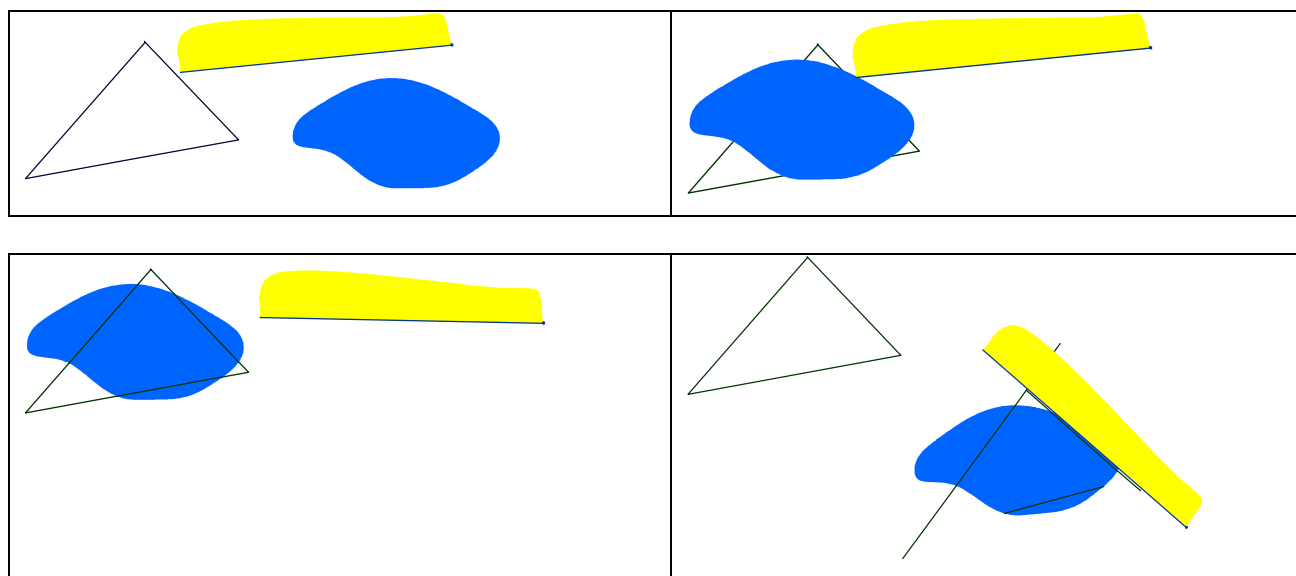
Quand nous parlons d'instrument, nous pensons aux instruments usuels : règle non graduée, équerre, compas, mais aussi aux gabarits, pochoirs, calque, morceau de papier ayant ou non des bords droits, quadrillage. Nous ne mentionnons pas les instruments de mesure car les activités que nous considérons ne nécessitent que des reports de longueurs, sans passer par les nombres. En principe la règle graduée n'est pas disponible. Le report de longueur peut se faire avec une règle informable (sur laquelle on peut écrire). Nous parlons de report de longueur si ce report se fait sur une droite déjà tracée sinon ce report ne peut se faire qu'en traçant un arc de cercle, donc une ligne, avec un compas.

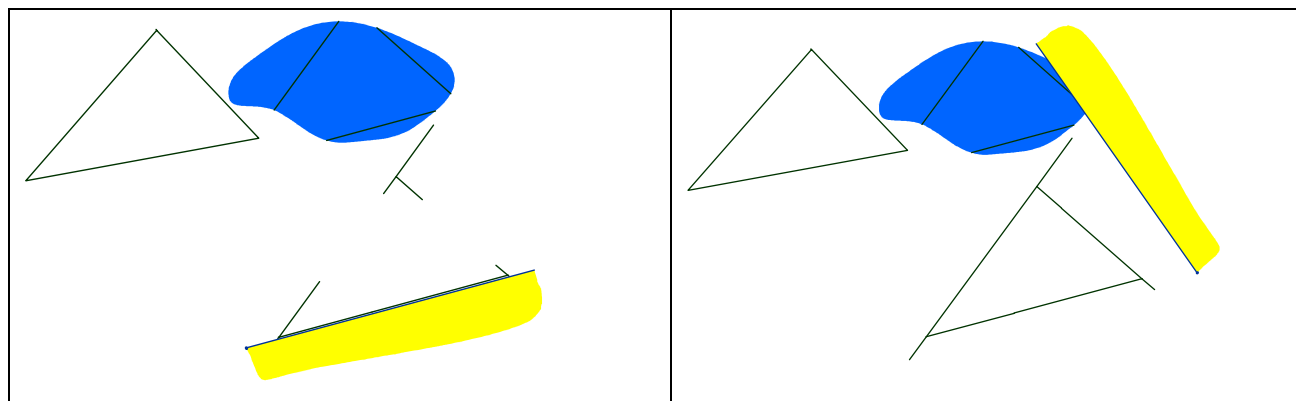
Duval (1995) a pointé l'importance de la notion de dimension dans l'appréhension perceptive des figures : les surfaces, unités visuelles 2D apparaissent plus directement au premier coup d'œil ; l'appréhension des unités visuelles 1D (lignes) ou 0D (points) nécessite

une déconstruction de la figure. Cette sensibilité aux dimensions se retrouve dans l'utilisation des instruments.

Le gabarit et le pochoir permettent de reproduire une surface, nous dirons que ce sont des instruments 2D. La règle et le compas sont des instruments qui permettent de tracer des lignes (1D) ; un point, unité visuelle sans dimension (0D), est obtenu par l'intersection de deux lignes. L'équerre est plus ambiguë : elle permet de contrôler et de produire des angles droits (coins de carrés ou de rectangles, unités visuelles 2D) mais aussi de tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné, soit la production d'un élément 1D avec 2 contraintes, l'une portant sur un élément 1D (alignement à contrôler), l'autre sur un élément 0D (point qui doit se trouver sur l'autre côté de l'angle droit). Remarquons d'ailleurs que le compas est lui aussi un instrument multiple : il permet de tracer des lignes (1D) et, quand on ferme le tracé, de produire un cercle, unité visuelle 2D, et aussi de reporter des longueurs donc de placer des points (0D) sur une ligne déjà tracée. Ces différents usages des instruments sont à construire chez les élèves. On peut envisager une progression de situations de restauration pour aider les élèves à passer des instruments 2D aux instruments 1D.

Pour illustrer ce propos, nous donnons ci-dessous un exemple d'états montrant l'évolution d'une procédure de reproduction d'un triangle, unité visuelle 2D déconstruite en trois unités visuelles 1D et reconstruite à partir de ces trois unités visuelles. Pour plus d'informations, on pourra se reporter à Duval et Godin (2006) et Duval, Godin et Perrin (2005).





Un objectif de l'école primaire est d'amener les élèves à décomposer une figure en unités visuelles de dimensions 1 et 0, et cet objectif peut être atteint par la donnée des « instruments de tracé » qui permettent de tracer des lignes et d'en obtenir des intersections.

II - LE TRAVAIL DU MAÎTRE

Le travail du maître qui met en œuvre une activité de restauration, en tenant compte des capacités des élèves, pour les aider à construire des connaissances géométriques est multiple.

Regardons dans quelques directions :

- le choix de l'activité de restauration : la figure, l'amorce, les instruments, les consignes, ...
- la gestion de l'analyse de la restauration par les élèves (collective ou non),
- la gestion des écritures additives du coût de fabrication d'une figure restaurée (comparaison ou non),
- la gestion des demandes d'écrits relatifs à une restauration et des exigences relatives à ces écrits : rédaction d'un programme de restauration, de reproduction ou de construction (rédaction d'un algorithme de tracé, et ou, rédaction d'une description).

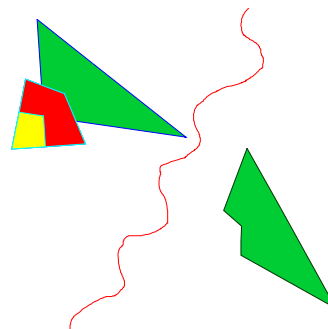
II. 1. Préparation par le maître de l'analyse d'une restauration

Avant de regarder la gestion de l'analyse d'une restauration menée par un élève, il faut regarder l'analyse à mener pour générer une restauration, pour choisir une restauration ou pour modifier une restauration. Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que l'analyse d'une restauration suppose l'analyse de la figure, l'analyse des relations amorce-figure et l'analyse des relations figure-amorce-instruments. Le maître a besoin de ces analyses pour choisir une restauration et se préparer à aider certains élèves (ceux qui seraient en difficulté) à analyser la restauration sans le faire à leur place. Aux choix guidés par l'analyse purement didactique que

nous avons menée, il pourra ajouter des éléments matériels pour aider les élèves à respecter les consignes de la restauration ; par exemple, la séparation entre la figure modèle et la figure à restaurer peut être matérialisée par une frontière et les activités de chaque côté de cette frontière ne seront pas les mêmes, des couleurs peuvent aider à repérer les éléments qui se correspondent sur le modèle et l'amorce, etc.

II. 2. Gestion de l'analyse d'une restauration par les élèves. Exemple en CE2

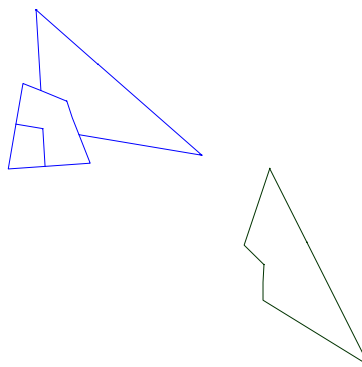
Ici la figure modèle et la figure à restaurer sont séparées par une frontière.



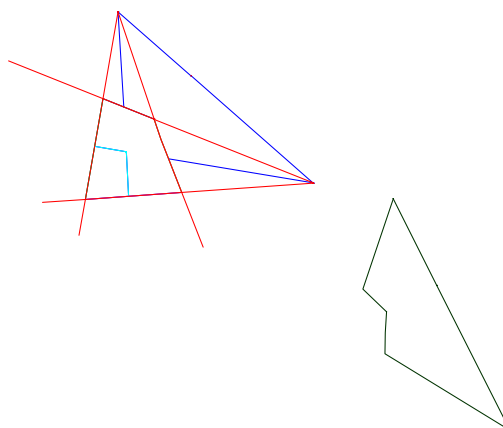
Comment un enseignant peut-il aider un élève dans sa tâche d'analyse de la restauration ? Le premier problème est d'amener un élève, ayant deux figures devant lui, à comprendre la consigne (donc à distinguer figure-modèle, figure-amorce, figure-différence). Un moyen d'aider les élèves, mis en place dans cette classe, est l'utilisation de couleurs : les élèves cherchent les éléments qui se correspondent sur l'amorce et la figure modèle et les tracent de la même couleur. Les segments sont portés par des droites, les élèves ont l'habitude de prolonger les segments pour voir les droites. Les aides apportées (questionnement), comme la mise en commun, portent sur l'explicitation de la différence : identification des droites qui manquent sur l'amorce puis, sur les moyens de les obtenir (sur le modèle) à partir d'éléments déjà présents sur l'amorce (décomposition de la différence) avant de les construire (recomposition de la différence). La décomposition de la différence en vue de sa reconstitution est orientée par les instruments disponibles qui imposent une déconstruction dimensionnelle.

Quelques étapes sur un exemple de restauration :

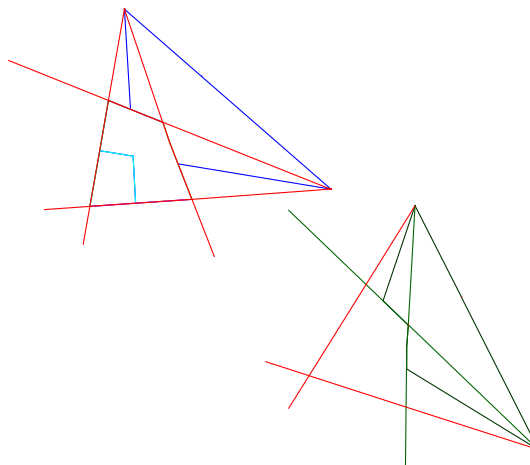
- Décompositions de la figure-différence (orientées par la présence des instruments disponibles et d'un coût d'utilisation de ces instruments, *exemple : 1 euro pour une règle permettant de tracer un trait, 5 euros pour un report de longueur,...*)



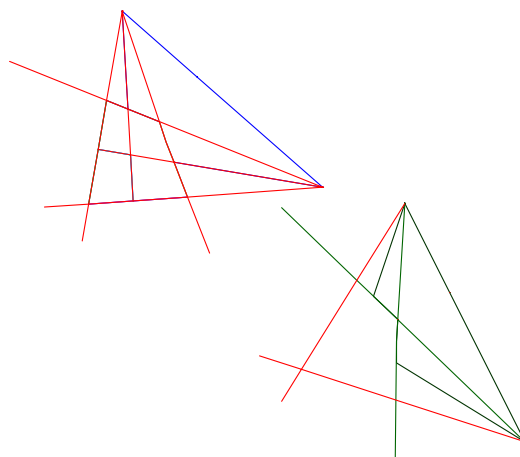
- Détermination de relations entre la figure-différence et les deux autres figures.



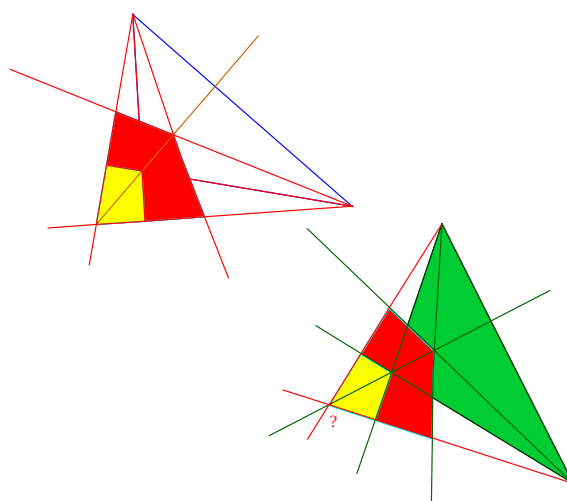
- Déconstruction, de ces relations et des figures, en unités visuelles (ou en propriétés géométriques) compatibles avec les instruments disponibles (ou avec les théorèmes disponibles).



- Reconstruction de cette figure-différence (enrichissement de la figure-amorce) à l'aide des instruments disponibles.



- Validation en utilisant un transparent conçu par le maître et mis à disposition de l'élève au moment opportun.



- Coût qui s'exprime par une écriture additive générée au fur et à mesure de l'enrichissement de l'amorce.
- Moindre coût, il est question d'envisager un gain du coût en mettant en cause une première procédure.
- Écriture d'un algorithme de restauration, à partir d'une écriture additive du coût, élaborer un récit des tracés réalisés.

$$1 + 1 + 5 + \dots$$

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

J'ai tracé la droite... puis ...

La dernière étape correspond à la formulation qui prépare l'écriture d'un programme de construction en utilisant le vocabulaire de la géométrie. Si la capacité de restaurer une figure montre une capacité à décomposer une figure en unités visuelles de dimension 1, cette

capacité doit en effet être complétée par une expression d'un algorithme de restauration, l'expression du coût en termes d'instruments joue un rôle d'intermédiaire pour l'expression en termes géométriques.

II.3. la gestion des écritures additives du coût de fabrication d'une figure

Demander aux élèves d'évaluer le coût de leur production permet de :

- produire l'ossature d'un algorithme,
- déterminer un algorithme de moindre coût,
- modifier l'algorithme par modification du coût des instruments.

L'activité d'évaluation du coût d'une procédure est particulièrement intéressante dans la gestion d'un groupe d'élèves, chacun cherchant un minimum. Mais l'activité de rédaction ne va pas de soi. Quand rédiger ? Pendant ou après les actions de tracé ? Il y a nécessité dans l'autocontrôle de cette rédaction d'une réflexion sur un algorithme mis en jeu. Les activités de notre groupe de recherche sont insuffisantes pour affirmer d'autres propos.

Nous présentons maintenant un exemple de l'effet que peut avoir le calcul du coût : il s'agit d'une séquence menée sur la symétrie en CM2 en mai 2008.

III - UN EXEMPLE AU CM2

Avant la séquence relative aux figures symétriques

Le maître de cette classe a, entre autres, développé plusieurs activités de restauration :

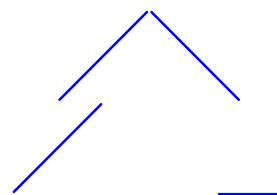
- d'un polygone à la règle et à l'équerre,
- de patrons à la règle et au compas : patron de l'octaèdre régulier,
- d'une figure composée de cercles : le yin et le yang qui, pour certains élèves, amène à la construction du milieu au compas.

Quelques éléments sur la séquence

La notion de figure symétrique a été introduite avec un calque et avec un pliage à la première séance. Les figures proposées sont triées : il y a celles qui, dessinées sur un calque, sont superposables à elles-mêmes, à l'endroit comme à l'envers du calque, ces figures peuvent être aussi pliées en deux parties qui viennent l'une sur l'autre.

Pour la deuxième séance de trois quarts d'heure en demi groupe, le maître a prévu deux activités :

- la première pour rappeler la séance précédente : un élève est envoyé au rétroprojecteur avec un stylo et un transparent pour compléter la figure ci contre et la rendre symétrique ;

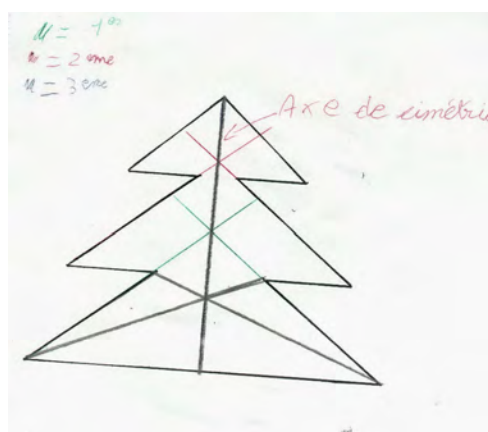


- la seconde sur la construction de l'axe de symétrie d'une figure symétrique : on vérifie que la figure (le sapin) est symétrique en retournant le calque. Dans la classe on sait que cette figure possède un axe de symétrie. Il est question de tracer cet axe avec le barème ci-contre.

Instruments	Coûts en euros
transparent	700
trait passant par deux points de la figure	0
trait obtenu par prolongement d'un trait de la figure	1
report de longueur	5
Equerre	700

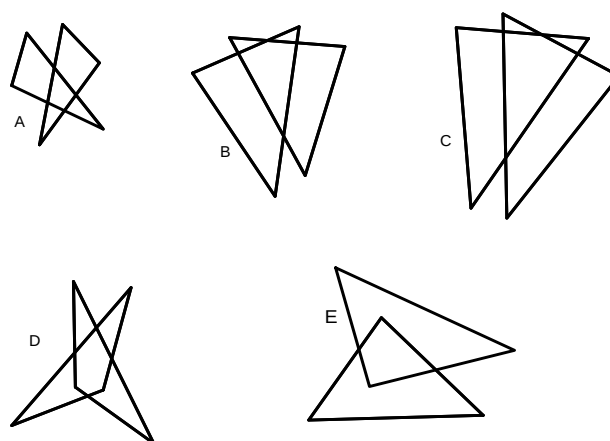
Après quelques essais, beaucoup d'élèves réussissent à faire passer le coût de la restauration de 700 à 0 euros.

Voici un écrit de synthèse :



Pour la troisième séance, les élèves ont réalisé deux activités sur le tri de figures symétriques (dans l'une d'elles, il s'agit de voir si des papillons stylisés obtenus par assemblage de triangles sont symétriques ou non).

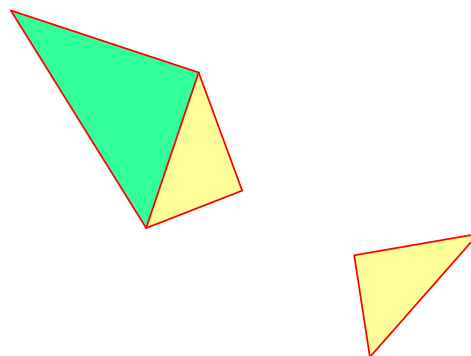
L'objectif est ici de voir si certaines lignes se croisent bien sur une droite qui serait un axe de symétrie si la figure est symétrique.



Deux figures en forme de papillon ne sont pas symétriques, lesquelles?

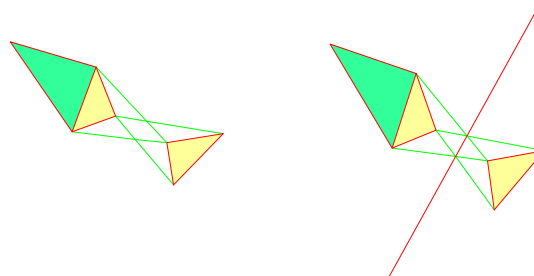
La quatrième séance reprend la restauration d'une figure symétrique mais avec une présentation surface de la figure (voir figure ci-contre). Le barème est le suivant :

- pliage, calque, équerre : 200 points
- prolongement d'un segment existant : 1 point
- tracé d'un nouveau trait : 0 point
- report de longueur : 5 points

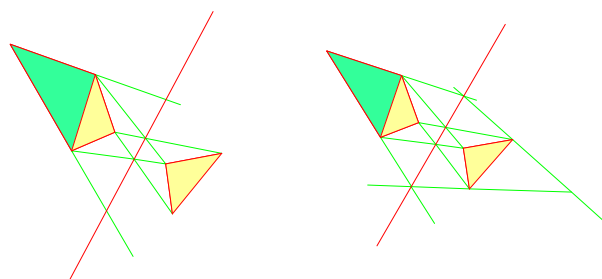


Ici la procédure la plus économique coûte 2 points :

On peut obtenir l'axe de symétrie gratuitement en faisant apparaître les points d'intersection avec leur symétrique de deux segments qui joignent des sommets des petits triangles (un sur l'amorce, un sur le modèle) qui ne se correspondent pas dans la symétrie.



Ensuite le prolongement des deux côtés du grand triangle donne deux points de l'axe qu'il suffit de joindre aux points convenables du petit triangle de l'amorce.



Pour cette restauration de la figure symétrique, signalons la procédure utilisée par une jeune roumaine, très peu scolarisée, (non francophone, le problème lui est montré par geste à l'aide du calque de validation), qui, exceptionnellement présente dans la classe, découpe dans du papier l'assemblage des deux triangles, fait glisser cet assemblage en essayant de superposer les deux triangles jaunes ; n'y arrivant pas, découpe l'assemblage selon le côté commun, se sert du gabarit du triangle vert non retourné pour achever le travail, constate que cela ne convient pas et regarde ce que font les autres.

Dans le premier groupe, la difficulté principale est d'imaginer la position approximative de l'axe de symétrie avant de pouvoir commencer à le construire ; pour le

deuxième groupe, le problème est surtout de construire cet axe de symétrie en se remémorant la séance précédente.

Un élève venant d'une école sénégalaise, ayant acquis des pratiques du travail sur les figures symétriques sur quadrillage, trace l'axe de symétrie en construisant des points équidistants de deux points symétriques (remarque : c'est correct mais la résolution du problème en construisant l'axe de cette manière n'est pas la plus économique).

Pendant la mise en commun, trois regards sur la figure à restaurer sont présents : le maître privilégie les points et non les lignes de la figure (pour des raisons de désignation des objets géométriques : c'est en se servant du nom des points qu'il nomme les lignes) alors que la préoccupation des élèves (sauf de la petite roumaine qui cherchait à poser des surfaces) était de construire des lignes. La confrontation de ces trois regards n'est pas explicitée ; il semble bien que personne n'ait perçu le problème comme réduit à la construction d'un point, et la procédure utilisant la construction de l'axe de symétrie semble, pour le maître, la procédure la moins coûteuse pour le barème proposé.

IV - RETOUR SUR LES HYPOTHESES DE LA RECHERCHE

Notre recherche part de l'hypothèse qu'il est possible d'utiliser l'étude, la production ou la reproduction de figures géométriques comme un milieu ou un domaine de travail où peuvent se construire les connaissances attendues à l'école élémentaire mais aussi un rapport à la géométrie et à l'usage des instruments plus conforme à ce qui est attendu au collège.

Dans l'analyse des difficultés des élèves de collège, on oppose souvent la perception à la déduction à partir d'axiomes et de théorèmes. Cependant, l'usage des instruments, peu valorisé au collège, ne relève pas que de la perception : les instruments sont utilisés pour guider, outiller la perception, et leur usage nécessite la mise en œuvre de propriétés géométriques. En effet, les instruments géométriques usuels permettent de produire et de contrôler des propriétés visuelles dans l'espace graphique, propriétés visuelles qui se traduisent par des propriétés géométriques dans le modèle théorique.

Un autre élément nous a paru important à identifier dans le regard qu'on porte sur les figures, c'est celui de dimension : dans la géométrie pratiquée habituellement à l'école primaire, les figures peuvent le plus souvent être vues comme des assemblages de surfaces, donc composées d'unités visuelles 2D ; les lignes qui interviennent sont le plus souvent des bords de ces surfaces et les points, des sommets. Dans la géométrie du collège, appuyée sur des définitions et théorèmes, avec une axiomatique sous-jacente, la vision en termes de lignes

et de points sera essentielle et il faudra être capable de changer de regard sur la figure et, à travers une surface, être capable de voir non seulement les lignes éventuellement infinies (droites, cercles) qui supportent ses bords, mais aussi des lignes qui ne sont pas tracées et sont définies par certains de ses points ou des points non visibles qu'on pourrait obtenir par intersection de telles lignes.

Nous retenons ainsi deux points importants pour l'entrée dans la géométrie et pour faire progresser les connaissances des élèves en primaire et au début du collège : **d'une part, un jeu de cadres entre espace graphique des tracés avec des instruments matériels et espace géométrique des objets et propriétés du modèle théorique de l'espace réel** (comme le décrivent, par exemple, Berthelot et Salin (1992) dans la problématique spatio-géométrique) ; **d'autre part, une éducation au changement de regard et en particulier au changement de dimensions sur les figures**. Le premier terme correspond à des conditions ou contraintes repérées depuis longtemps et appréhendées de différentes manières ; le second a été identifié par notre équipe. Ces deux éléments peuvent être mis en œuvre dans des activités pour les élèves à travers le tracé de figures avec des instruments car les instruments permettent à la fois de jouer entre les cadres de l'espace graphique et de l'espace géométrique et de jouer sur les dimensions des unités visuelles à prendre en compte. Un troisième point important est la place accordée aux mesures : dans l'enseignement usuel, on fixe la taille des figures et il y a un recours massif aux mesures de longueur et donc aux nombres. Nous faisons de plus l'hypothèse que **le travail sur les grandeurs géométriques sans recours à la mesure** (nous distinguons donc le report de longueur avec un instrument de report, de la mesure d'une longueur avec une règle graduée) **amène à conceptualiser les objets géométriques ainsi que les opérations sur les grandeurs**. Nous pensons donc qu'un tel travail aura des effets positifs sur la résolution de problèmes mettant en jeu les mesures de ces grandeurs. Les problèmes et les instruments proposés aux élèves mettent en jeu des reports de longueur plutôt que des mesures.

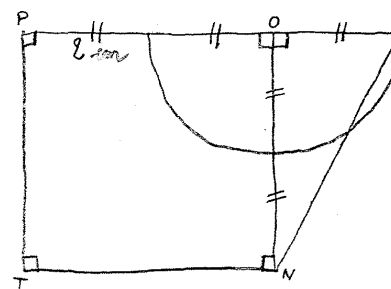
V - LES QUESTIONS ET PERSPECTIVES POUR LA FORMATION DES MAÎTRES

V. 1. Distance avec les pratiques ordinaires

Les observations que nous avons menées montrent que le jeu sur les variables a bien l'effet attendu sur les élèves mais que l'usage de telles situations amène d'une part, un changement du contrat didactique qui nécessite un temps d'adaptation, d'autre part,

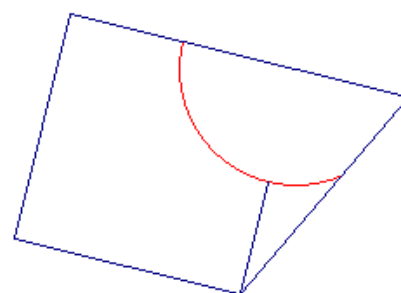
l'identification par les maîtres des moyens de gestion des situations permettant notamment de faire le lien avec le vocabulaire géométrique et l'usage des instruments usuels. Le travail des élèves est modifié : nous avons pu constater à plusieurs reprises que l'introduction de ce type de tâche, même dans un cas simple, produit une rupture du contrat didactique habituel dans la classe. Par exemple, nous avons préparé avec des PE2 dans le cadre d'Ateliers de Développement de Pratiques Pédagogiques en juin 2006 des séances qu'ils ont mises en œuvre dans une classe de CM2 avec une bonne expertise en géométrie.

Nous avons pu vérifier cette expertise lors de la première séance, menée par le maître formateur titulaire de la classe. Il s'agissait de construire aux instruments, des figures données par un dessin à main levée, codées et portant des indications de mesure « après avoir repéré certaines propriétés selon les indications fournies par les codages et les mesures ». Huit figures étaient proposées ; nous reproduisons ci-contre la figure 7.



L'utilisation de la gomme est découragée dans les habitudes de la classe et le maître, en donnant la consigne, rappelle que normalement elle ne sert à rien. Les connaissances géométriques des élèves se manifestent dans le choix de l'ordre des tracés et l'utilisation experte des instruments. Chaque groupe d'élèves a deux figures à reproduire mais la majorité des élèves de la classe ont traité correctement 3 voire 4 figures de ce type pendant la séance.

Pour la séance suivante les stagiaires ont proposé des restaurations de figures⁵. La première avait été obtenue en apportant une légère modification à une figure trouvée dans un manuel, et qui se trouvait très proche de la figure 7 du maître (non traitée à la première séance). Un côté du carré était fourni en guise d'amorce.



Cette figure, considérée comme simple par les stagiaires, avait été proposée à toute la classe, pour servir d'introduction avant des activités différenciées selon les élèves ; mais elle a pourtant posé des problèmes aux élèves qui se sont trouvés désorientés. Plusieurs éléments de leurs habitudes devaient être remis en question : les propriétés à utiliser n'étaient pas fournies, il fallait les identifier sur la figure et, pour cela, tracer des lignes supplémentaires sur le modèle ; ces lignes devraient aussi être reproduites sur l'amorce et donc, il devenait presque

⁵ Nous conservons le terme « restauration », même avec une amorce de dimension 1 comme ici.

nécessaire⁶ d'utiliser la gomme puisque, sur la figure finale, il manque une partie du carré qu'on aura tracé pendant la construction. De plus, aucune mesure n'était fournie ; c'est l'identification de rapports et le report de longueurs qui devaient être utilisés pour reproduire la figure. Une des différences fondamentales avec le contrat usuel est donc que l'analyse de la figure en vue de sa reproduction nécessite d'une part, le tracé de lignes définies par les points de la figure donnée mais non visibles sur le modèle, d'autre part, la recherche de rapports de longueurs. Les lignes ajoutées le sont pour permettre la construction de points nécessaires à la réalisation d'une succession de tracés avec les instruments à partir de l'amorce pour obtenir la figure modèle. C'est la mise en évidence de ces lignes, de ces points et de ces rapports qui oblige à un changement de regard sur la figure modèle.

On voit ici qu'un petit changement, apporté à un exercice proposé dans un manuel, peut changer assez nettement la tâche des élèves. Même si l'on n'attend pas que le maître puisse produire lui-même les figures, les amorces ou les règles de coût, il doit avoir une connaissance suffisante de leur effet possible sur les connaissances mises en œuvre par les élèves pour interpréter correctement leurs procédures et gérer la classe dans le sens du progrès de leurs connaissances géométriques. Il doit, en particulier, avoir des connaissances géométriques suffisamment sûres et flexibles pour reconnaître les savoirs géométriques à l'œuvre dans les procédures et productions des élèves, dans leurs formulations incomplètes et maladroites, de façon à pouvoir les faire évoluer sans glisser vers l'obtention d'un résultat final satisfaisant mais non relié aux connaissances initiales des élèves.

V.2. Leviers pour faire évoluer les pratiques des enseignants et points de résistance

V.2.1. Attrait pour la résolution de problèmes et difficulté à repérer les savoirs géométriques en jeu

Les situations proposées en formation continue ou en formation initiale ont en général rencontré beaucoup de succès parce que les maîtres ont été séduits par l'aspect résolution de problèmes : il y a beaucoup de ressources de résolution de problèmes dans le domaine numérique, mais les maîtres sont souvent démunis pour trouver des situations problématiques en géométrie.

⁶ Ne pas l'utiliser reste possible mais c'est beaucoup plus complexe au niveau de l'ordre des tracés à réaliser et de la conception des tracés eux-mêmes : il ne s'agit plus de figures (carré, triangle, demi-cercle) et de leur disposition spatiale mais de segments liés par des relations.

Cependant, au-delà du premier enthousiasme, les maîtres s'interrogent sur les contenus des programmes qu'ils peuvent travailler de cette façon. Ils ont du mal à identifier des savoirs à formuler avec les élèves, à écrire dans le cahier et à réinvestir.

V.2.2. Difficulté à distinguer la grandeur géométrique « longueur » de sa mesure

Cette difficulté peut se manifester de deux manières, par une confusion et par une pratique.

Une confusion fréquente entre reporter une longueur et mesurer une longueur

Alors qu'un maître fait disparaître volontairement, dans sa classe, les règles graduées, celui-ci pourra utiliser inconsciemment l'expression « mesure de longueur » pour « report de longueur ».

Hypothèse pour comprendre ce lapsus persistant : certes, la règle graduée peut être utilisée pour reporter une longueur, celle-ci portant suffisamment d'inscriptions peut se substituer à une règle sur laquelle on devra porter des inscriptions pour reporter une longueur. Mais, il y a un risque de confusion pour des élèves de Cycle 2 car ils ont souvent une pratique limitée de la mesure : une pratique non pas comme un rapport de longueur (un segment de 3 cm est trois fois plus grand qu'un segment de 1 cm, ce qui implique des reports de longueur) mais comme un repérage d'un trait par un nombre d'une graduation (ici 3 sur une règle graduée en cm).

Une pratique banalisée : accepter la construction du milieu d'un segment en utilisant la mesure

Si les élèves vérifient qu'un point partage un segment en deux segments de même longueur, la construction d'un milieu est le plus souvent obtenue par une procédure non géométrique de type mesure-calcul-mesure et bien que des textes officiels de 2002 ou 2007 indiquent des procédures géométriques possibles, ces pratiques non géométriques persistent et sont même souvent les seules présentes.

V.2.3. Une première piste : introduire de petites modifications dans les pratiques usuelles

Nous avons d'abord pris en compte les contraintes de la formation, tant initiale que continue, qui ne donne que des durées très courtes de formation. Nous avons ainsi pensé que l'introduction d'une petite modification dans les pratiques usuelles, telles qu'on peut les observer dans les manuels, pouvait amener les maîtres à s'interroger sur leurs pratiques et à les faire évoluer. Cette piste a été tentée en formation initiale et en formation continue (voir ci-

dessus). Même si nos résultats sont trop ponctuels pour qu'on puisse en tirer des conclusions générales, il nous semble que l'étude peut être poursuivie en formation initiale mais que c'est sans doute tout à fait insuffisant en formation continue pour faire évoluer des pratiques installées : une déstabilisation des pratiques usuelles ne peut être profitable que si elle contient les moyens de rééquilibrer assez vite sur une nouvelle pratique stable.

V.2.4. Perspective : mettre en place et étudier des modules reliés explicitement aux programmes du primaire

Cette année, le travail avec les maîtres d'une école d'application nous a permis de mieux cerner les besoins des maîtres et les possibilités d'évolution des pratiques. Cela nous amène à considérer la nécessité d'étudier la mise en œuvre de progressions sur quelques sujets comme nous avons commencé à le faire avec la symétrie orthogonale.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Berthelot R. et Salin M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n° 10, 5-53.

Duval R. & Godin M. (2006). Les changements de regard nécessaires sur les figures *Grand N* n° 76.

Duval R., Godin M. & Perrin-Glorian M.-J. (2005). Reproduction de figures à l'école élémentaire in Castela et Houdement (éds) *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, 5-89, ARDM, IREM Paris 7.

Keskessa B., Perrin-Glorian M.J. & Delplace J.R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N*, n° 79, 33-60.

Offre B., Perrin-Glorian M.J. & Verbaere O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N* n° 77, 7-34, et *Petit x* n° 72, 6-39.