QUELS SAVOIRS MATHEMATIQUES DANS LES PROBLEMES POUR CHERCHER A L'ECOLE ELEMENTAIRE ? LE CAS DES PROBLEMES D'OPTIMISATION AU CYCLE 3.

Magali HERSANT
IUFM des Pays de Loire, CREN, Université de Nantes
Yves THOMAS
IUFM des Pays de la Loire, Université de Nantes

Résumé

Notre atelier s'est appuyé sur les travaux du groupe « Des problèmes pour chercher à l'école primaire » (Groupe PPC, 2006 et Thomas, 2008). L'objectif était d'amener les participants à une réflexion sur les savoirs mathématiques qui peuvent être en jeu dans la résolution de ces problèmes. Pour cela, après un bref rappel du cadre officiel (MEN, 2005), nous avons d'abord invité les participants à résoudre des problèmes d'optimisation élaborés au sein de notre groupe de travail et destinés à des élèves de cycle 3. Puis, le travail a concerné les savoirs mathématiques en jeu dans ces problèmes : nous avons demandé aux participants quels savoirs mathématiques ils identifiaient dans ces problèmes et avons précisé notre point de vue sur cette question, en l'illustrant par des observations que nous avons effectuées dans des classes.

Dans ce compte-rendu, nous présentons les problèmes étudiés lors de l'atelier et les savoirs mathématiques que nous y identifions.

Introduction

Depuis quatre années, nous élaborons des « problèmes pour chercher » (PPC dans la suite du texte) et des scénarii pour ces problèmes au sein au sein du groupe « Problèmes pour chercher » composé d'enseignants du premier degré, de formateurs et d'enseignants chercheurs[1]. L'évolution de notre questionnement nous a conduit à travailler ces deux dernières années sur des problèmes (discrets) d'optimisation pour le cycle 3 qui mettent en jeu à la fois :

- des savoirs mathématiques relatifs à la recherche et à la résolution de problème ;

[1] Ce groupe, dont la responsable est Magali Hersant, rassemble en 2007-2008 Catherine Argant, Valérie Aubry, Marie Boudeau, Denis Butlen, Geneviève Dron, Yves Thomas, Raymond Torrent. Ses travaux s'inscrivent dans la recherche INRP dirigée par Christian Orange « Pratiques et mises en textes des savoirs ».

- des savoirs que nous nommons curriculaires plus clairement identifiables dans l'une des rubriques du programme de mathématiques à l'école élémentaire (par exemple : sur l'alignement, sur l'aire…).

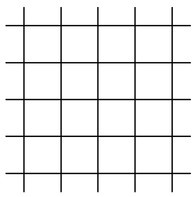
L'identification des savoirs en jeu dans ces problèmes n'est pas toujours évidente et notre objectif, dans cet atelier, était d'amener les participants à réfléchir sur cette question. Pour cela nous nous sommes appuyés sur quatre problèmes. Nous avons demandé aux participants d'abord de les résoudre puis d'indiquer les savoirs mathématiques qu'ils y identifiaient comme enjeu d'apprentissage pour des élèves de cycle 3. Lors de l'échange qui a suivi ce travail, prenant en particulier appui sur des observations réalisées en classes, nous avons précisé les savoirs que nous considérons comme enjeu d'apprentissage dans ces problèmes soit parce que les élèves doivent les mobiliser, soit parce qu'ils doivent les construire ou soit parce qu'ils doivent les modifier. Ce texte reprend ces éléments après une présentation des problèmes et des commentaires sur ces problèmes, relatifs aux conclusions auxquelles on peut aboutir avec les élèves et aux mathématiques.

1. Présentation des problèmes

Les formulations des problèmes sont les mêmes que celles utilisées avec des élèves de cycle 3. Nous encourageons vivement les lecteurs à les résoudre avant de poursuivre leur lecture.

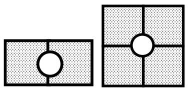
Pas trois points alignés.

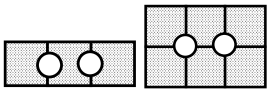
Placez le plus possible de points sur les intersections de cette grille sans former aucun alignement de trois points.



Gommettes

On dispose d'un grand nombre de carrés en carton et de gommettes rondes collantes avec lesquelles on assemble ces carrés.

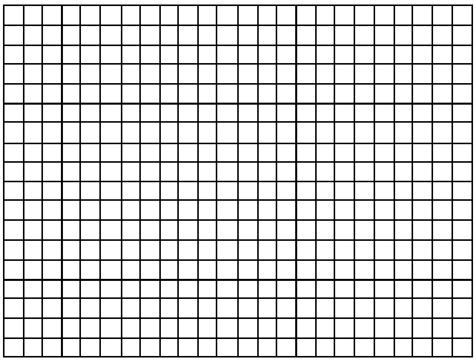
Voici deux assemblages possibles avec une seule gommette : 

Voici deux assemblages possibles avec 2 gommettes : 

Vous disposez de 6 gommettes, assemblez le plus possible de cartons en un seul bloc avec ces 6 gommettes.

Etiquettes

Dans cette grille 18×24, découpez le plus possible d'étiquettes 5×7.



Neuf nombres.

On écrit une suite de 9 nombres entiers différents supérieurs à 1, respectant la contrainte suivante : quand deux nombres sont voisins, l'un des deux est multiple de l'autre.

Le but est que le plus grand nombre de la liste ne soit pas trop grand.

Les formulations des énoncés orientent volontairement d'abord vers l'action, la réalisation d'essais, c'est-à-dire vers une sorte de « bricolage ». Toutefois, *in fine*, la résolution de ces problèmes repose sur une articulation et des allers-retours entre des essais effectifs pour proposer ou améliorer une solution et un raisonnement en partie détaché de l'action qui permet d'envisager des raisons intellectuelles et une preuve. Pour résumer cette dynamique, nous parlons d'articulation entre démarche empirique et démarche déductive. Ce caractère commun des problèmes permet d'envisager un scénario en trois temps pour leur réalisation en classe :

1. une recherche empirique (individuelle, en petits groupes puis en groupe classe) permet d'obtenir une ou des meilleure(s) solution(s) de la classe ;
2. lorsque l'amélioration empirique de la ou des solutions s'essouffle, il s'agit de savoir si « ça vaut la peine de chercher encore » pour basculer vers la recherche de raisons et le raisonnement déductif, au besoin articulé avec la recherche empirique précédente ;
3. la conclusion permet de faire la synthèse sur l'état de résolution du problème, selon les problèmes et les travaux des élèves, elle permet de clore ou pas le problème.

2. *Conclusions possibles au cycle 3 et remarques mathématiques*

Certains de ces problèmes appellent des commentaires soit par rapport à l'état des recherches en mathématiques à leur sujet, soit par rapport à leur passation en classe, ce que nous faisons dans ce paragraphe. Nous indiquons aussi les conclusions auxquelles peut parvenir une classe de cycle 3, en une ou deux séances. Cela ne signifie pas que chaque élève est capable de produire cette conclusion sur le problème, mais qu'elle est élaborée collectivement par la classe. La rédaction de la conclusion proposée ici ne respecte pas la chronologie de résolution du problème en classe et d'élaboration des différents éléments de la solution. Cette conclusion sur le problème correspond le plus souvent à une preuve mais pas toujours, comme nous le verrons pour *Etiquettes*.

Pour les problèmes *Gommettes* et *Etiquette*s, nous invitons aussi le lecteur à consulter l'article de Thomas (Thomas, 2007) dans la revue *Grand N*.

Pas trois points alignés

Conclusion. Sur chacune des lignes, on peut placer au plus deux points. Donc on peut placer au plus $2 \times 5 = 10$ points sur la grille 5×5. De plus, comme, on peut effectivement placer 10 points, par exemple de la façon suivante (figure 1), la solution du problème est 10.

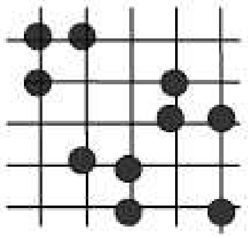


Figure 1

Commentaires. Ce problème, sous sa forme générique (*i.e.* avec une grille $n \times n$) est connu des mathématiciens sous le nom de *No Three in line.* Il n'est pas résolu pour n grand ; on dispose seulement d'une conjecture (voir par exemple le site : http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/no3in/readme.html).

Pour les classes de CE2, on peut proposer d'abord une grille 4×4 où il est plus facile de trouver une disposition qui correspond à la solution optimale.

Gommettes

Conclusion. Avec chaque gommette on peut assembler au plus 4 carrés. Ainsi, la première gommette permet d'assembler 4 carrés. Avec la deuxième, puisqu'il faut que les nouveaux carrés tiennent ensemble et soient reliés au bloc déjà constitué, on ne peut ajouter que trois nouvelles gommettes et ainsi de suite. Donc avec 6 gommettes, on peut assembler au plus 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 soit 19 gommettes, par exemple de l'une des façons suivantes (figure 2).

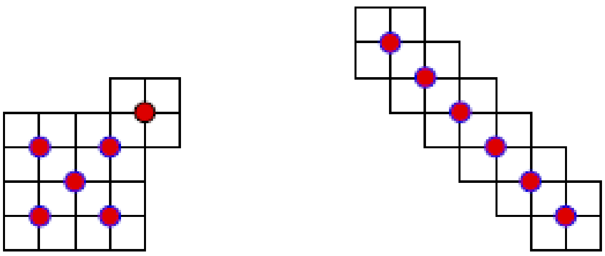


Figure 2

Commentaires. Dans ce problème, la taille relative des gommettes et des cartons joue un rôle essentiel (Thomas, 2007) et détermine d'une certaine façon un axiome de base sur lequel il faudra se mettre d'accord avec les élèves : avec une gommette on peut associer au plus 4 carrés.

On peut modifier le nombre de gommettes dont on dispose mais cela n'est pas très intéressant puisqu'une généralisation du problème est possible.

Etiquettes

Conclusion. On peut placer 11 étiquettes de la façon suivante (figure 3). On ne sait pas si on peut en placer 12. En effet, le nombre de carreaux de la grille est 432 et pour placer 12 étiquettes, 420 carreaux sont nécessaires, mais cela ne suffit pas pour dire qu'on peut effectivement placer 12 étiquettes. Par exemple, on ne peut placer aucune étiquette sur une grille de 4 carreaux sur 100 alors qu'il y a 400 carreaux.

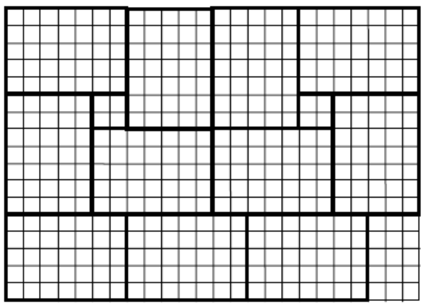


Figure 3

Commentaires. Nous avons toujours renoncé à fournir une preuve de l'impossibilité de placer 12 étiquettes dans les classes. Pour les élèves, le problème 18×24 reste donc ouvert tandis que le problème 17×24 (avec les mêmes étiquettes) est clos. La preuve réside dans l'impossibilité d'obtenir 18 comme somme de 5 et de 7. Chaque rangée de 18 carreaux comporte donc (du moins si on convient que les étiquettes sont découpées en suivant le quadrillage) au maximum 17 carreaux occupés par les étiquettes. Le nombre de carreaux occupé par les étiquettes est donc inférieur ou égal à 17 × 24, ce qui ne permet pas d'en placer 12.

Plus généralement, les problèmes de ce type, avec une grille de taille $n \times n'$ et des étiquettes de taille $p\times p'$ (avec n, n', p et p' entiers et p (resp. p') inférieur à n (resp. n')), sont connus sous le nom de « rectangles packing ». Ils sont classés comme des problèmes Non déterministes Polynomiaux Durs (NP durs) c'est-à-dire qu'ils sont résolubles (en théorie) en un temps polynomial si l'on dispose d'une infinité d'ordinateurs qui travaillent en parallèle ! Cependant, pour certaines valeurs numériques, la résolution à la main est possible, comme nous venons de le voir.

Neuf nombres

Conclusion. Il y a 11 entiers compris entre 2 et 12. 7 et 11 n'ont ni multiple ni diviseur parmi ces entiers, il reste donc 9 entiers possibles : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 et 12. Par ailleurs, la suite 5, 10, 2, 8, 4, 12, 6, 3, 9 convient. La solution du problème est donc 12.

3. Pourquoi avoir choisi ces problèmes ?

Les solutions de ces problèmes reposent principalement sur une articulation entre des arguments du registre (au sens de Orange, 2005) empirique et des arguments du registre déductif. Ceci provient d'une part de la formulation des consignes qui favorise une approche expérimentale des problèmes et d'autre part de la nature même des problèmes qui permet un encadrement progressif dans N de la valeur numérique maximale qui répond au problème. Ces caractéristiques ont été déterminantes dans notre choix de ces problèmes pour deux types de raisons.

Nous souhaitons permettre à tous les élèves de s'engager dans la résolution du problème et de faire des mathématiques un peu différentes de celles qu'ils fréquentent le plus souvent (c'est à dire la plupart du temps dans une classe) pour contribuer à réassurer certains élèves « modestes » en mathématiques et, plus généralement, à élargir la représentation que les élèves ont des mathématiques.

Ces problèmes discrets d'optimisation permettent de répondre à ces objectifs d'abord car ils ne ressemblent pas tous à des problèmes d'arithmétique ou de géométrie et risquent donc, moins que certains autres PPC (comme par exemple celui où connaissant le nombre de têtes et de pattes, il faut trouver le nombre de poules et de lapin, cité dans les documents d'accompagnement), d'être rejetés par des élèves « modestes » en mathématiques. Mais surtout, ces problèmes peuvent être initialement formulés de façon à inciter les élèves à « bricoler », expérimenter, manipuler… comme nous l'avons fait, ce qui leur permet de proposer une solution au problème. Dans les classes, nous avons en effet observé que tous les élèves proposent une « solution » et que la majeure partie d'entre-eux s'autorise à parler lors des phases collectives. Enfin, par leur nature et leur formulation, ces problèmes permettent de dépasser l'opposition juste / faux pour entrer dans une démarche de problématisation qui articule trois possibilités : pertinent au regard des contraintes du problème, non pertinent et optimal (meilleure solution possible).

Nous avons aussi choisi ces problèmes car ils permettent de travailler au cycle 3 sur l'argumentation et la preuve en accord avec notre représentation de l'activité de recherche en mathématiques. Il nous semble en effet essentiel que les élèves rencontrent dès l'école primaire, puis en 6ème et 5ème, des situations de mathématiques où ils sont amenés à argumenter, sans quoi leur idée de la preuve mathématique risque de se réduire à celle de démonstration formelle. Pour nous, l'activité de recherche d'un problème de mathématiques est une articulation entre « expériences mathématiques » (au sens de Chevallard, 1992), conjectures et preuves, qui situe la résolution de problèmes mathématiques comme une activité expérimentale complémentaire de la maîtrise d'un certain nombre de savoirs plus techniques (Perrin, 2007).

Pour autant, nous sommes réservés quant aux possibilités de développer chez les élèves de cycle 3 des compétences méthodologiques, valables pour tous les problèmes de mathématiques à partir d'un travail sur des problèmes assez différents. C'est pourquoi, nous nous sommes restreints à un seul champ, celui des problèmes discrets d'optimisation, qui permet de travailler plus spécifiquement certains savoirs liés à la résolution d'un problème de mathématiques.

4. Quels savoirs dans ces problèmes ?

La recherche de ces problèmes nécessite de mettre en œuvre, d'une part des savoirs relatifs à la résolution d'un problème mathématique communs aux quatre problèmes et, d'autre part, des savoirs curriculaires plus spécifiques à chacun des problèmes.

Savoirs sur la recherche et la résolution d'un problème de mathématiques

• *Dépasser sa conviction, son intuition, pour établir et formuler une conjecture qu'on cherchera à prouver*

Ces problèmes sont choisis pour que les élèves « expérimentent » dans un premier temps pour poser le « vrai » problème et se faire une idée de la solution. Par exemple, dans *Pas trois* *points alignés*, cela consiste à placer le plus possible de points sur la grille, à vérifier qu'il n'y a pas d'alignements de trois points, et à recommencer ou essayer de placer encore plus de points sur la grille. Après un temps de recherche plus ou moins long, des élèves pensent que sur la grille 5 × 5 distribuée, on ne peut pas disposer plus de 10 points sans en aligner 3. Cela permet de formuler une conjecture. Nous souhaitons que les élèves ressentent l'intérêt et les limites de leurs expériences empiriques.

- *Comprendre que l'impossibilité mathématique est autre chose que l'impossibilité empirique.*

Il s'agit plus précisément de savoir que l'argument « c'est impossible car j'ai beaucoup cherché et je n'ai pas trouvé » n'est pas recevable comme une preuve mathématique, ce qui n'est pas si évident pour des élèves de cycle 3, en particulier au début du cycle. Là encore, nous souhaitons que les élèves ressentent les limites de leur démarche empirique et la nécessité de passer à un raisonnement déductif.

- *Une preuve mathématique ne correspond pas toujours à un raisonnement hypothético-déductif*

Il s'agit d'éviter que les élèves aient une idée stéréotypée de la preuve en mathématiques en les faisant travailler sur des problèmes différents de ce point de vue.

Certaines preuves demandent d'articuler les registres empirique et déductif. Par exemple, la preuve de *Pas trois points alignés* repose d'une part, sur le fait qu'il est impossible de placer plus de 10 points sur une grille 5×5 (résultat d'un raisonnement hypothético-décuctif) et d'autre part, sur le fait qu'on dispose effectivement d'une solution à 10 (résultat empirique). Cela est étroitement lié aux problèmes d'optimisation. Dans le problème *Gommettes,* cette articulation n'est pas aussi évidente car la démarche de résolution peut être plus axiomatisée, comme on l'observe chez certains élèves. Il est convenu avec les élèves qu'avec une gommette on peut associer au plus 4 cartons. Certains élèves en déduisent le corollaire suivant (plus ou moins explicité par les élèves) « avec chaque nouvelle gommette on peut ajouter 3 cartons à l'assemblage existant ». La preuve repose alors entièrement sur un raisonnement hypothético-déductif.

- *Distinguer le possible, l'impossible et l'indéterminé.*

Les problèmes *Etiquettes* et *Pas trois points alignés* peuvent rester non résolus à la fin de la séquence avec les élèves de cycle 3. C'est le cas pour *Pas trois points alignés* si les élèves n’ont pas réussi à positionner 10 points sur la grille. Nous pensons qu’il n’est pas alors souhaitable de leur livrer immédiatement la solution et préférons les laisser chercher encore quelques jours avant de la donner. Par ailleurs, nous précisons aussi aux élèves que ce problème est encore non résolu par les mathématiciens pour les grandes grilles. Pour *Etiquettes* (grille 18 × 24), nous indiquons aux élèves trois choses : on est sûr qu’on peut découper 11 étiquettes (on a trouvé une disposition qui le permet), on est sûr qu’on ne peut pas en découper 13 (13×7×5 = 455 et 18×24 = 432), on ne sait pas si on peut placer 12 étiquettes. Cette distinction entre le possible (mathématiquement prouvé), l’impossible (mathématiquement prouvé) et l’indéterminé, pour une durée plus ou moins longue, qui est très liée à la nature du problème, permet de montrer aux élèves :

- que résoudre un problème ne se résume pas à effectuer un calcul (on le voit en particulier avec *Etiquettes*) ;
- qu’un problème mathématique n’a pas toujours de solution connue ;
- qu’il est autorisé de dire qu’on n’a pas résolu le problème (c’est même préférable à dire n’importe quoi) ;
- que lorsqu’on cherche un problème, il est important de bien distinguer ce dont on est sûr (le possible, l’impossible qu’on a réussi à prouver) et ce dont on doute (la part indéterminée du problème) d’une part car cela permet d’organiser la recherche, et, d’autre part, car cette distinction constitue, du point de vue des mathématiques, une étape de la résolution du problème.

Ces aspects sont fondamentaux dans l’activité mathématique.

- *A propos d’heuristique*

Du point de vue de l’heuristique, ces problèmes sont assez différents. Nous ne donnerons ici que quelques éléments pour permettre une première réflexion.

Dans *Gommettes*, la première disposition qui vient à l’esprit joue un rôle déterminant dans la résolution du problème, à la fois pour l’aspect empirique et pour l’aspect déductif. Ainsi, quand un élève dispose d’emblée les cartons en escalier (ce que nous avons observé chez certains élèves), cela rend plus facile la preuve qui « colle » alors à la démarche empirique : avec la première gommette, j’associe 4 cartons, avec la deuxième, j’en ajoute 3, ….. Au contraire, certains élèves s’enferment dans des dispositions linéaires qui limitent la recherche. Un point à retenir peut être que, lors de la recherche empirique, il est souvent fécond d’avoir des exemples assez différents, de regarder les fonctionnements aux limites.

Pour *Neuf nombres*, les élèves pensent souvent à débuter la suite par un petit nombre et à la multiplier par un petit nombre. C'est une idée intéressante qu'il faut savoir dépasser pour arriver à la solution optimale. Pour *Pas trois points alignés*, le travail préalable sur une grille 4 × 4 n'aide en rien la recherche d'une disposition optimale pour une grille 5 × 5. Cette idée, qui n'est pas aberrante en soi, est une véritable impasse. En effet, si on ajoute une ligne et une colonne à une grille 4×4, on ne peut placer qu'un seul nouveau point sans avoir d'alignement de trois points. Par ailleurs, il est parfois impossible de compléter une grille 5 × 5 à neuf points en une grille à 10 points.

Est-ce que « savoir renoncer à son idée de départ », y compris si elle est heuristiquement fondée, est un savoir sur la résolution de problèmes ? Est-ce que les élèves peuvent apprendre cela avec nos problèmes ?

Savoirs sur des notions mathématiques bien identifiées dans les programmes

Nous venons de le voir, ces problèmes permettent de travailler des savoirs communs sur la résolution de problème. Cependant, ils ne présentent toutefois pas le même intérêt quant aux apprentissages potentiels des élèves en termes de savoirs curriculaires. En effet, comme nous allons le voir, certains d'entre eux permettent, en plus des savoirs sur la recherche et la résolution d'un problème, de revisiter des savoirs curriculaires ou de préparer certains apprentissages futurs. Ces problèmes sont de notre point de vue, et pour les raisons développées en introduction, plus intéressants à réaliser en classe.

Supprimé : -

- *Des savoirs sur l'alignement et la notion de pente dans* Pas trois points alignés

Pour s'engager dans la résolution du problème, il est nécessaire de savoir ce que sont des points alignés ou du moins d'en avoir une première idée. Les échanges entre les élèves amènent le plus souvent à rappeler que deux points sont toujours alignés, même si l'un est sur la Terre et l'autre sur Mars. Nos observations en classe montrent de plus que, pour certains élèves de cycle 3, l'alignement des points correspond à l'alignement selon les lignes, les colonnes ou les diagonales des petits carrés du quadrillage (conception 1). Cette conception de l'alignement est probablement liée à la prégnance des lignes et des colonnes sur un quadrillage, ajoutée au fait que les élèves associent aussi la situation au jeu « puissance 4 ».

Elle émerge souvent au cours du débat entre les élèves sur la validité des propositions et est modifiée (au moins dans le temps de la séance) en « trois points sont alignés s'ils sont sur un même bord d'une règle » (conception 2). Dans une classe, nous avons observé un débat entre deux élèves de conceptions différentes (1 et 2) à ce sujet, qui a clairement amené l'un deux à passer de la conception 1 à la conception 2. Par ailleurs, dans plusieurs classes, des élèves ont posé la question : « a-t-on le droit d'aligner deux points ? ». C'est une autre occasion d'enrichir leurs connaissances sur l'alignement. Ainsi ce problème permet de revisiter une connaissance ancienne et de modifier une conception erronée.

Pour trouver des dispositions de points sur les grilles et vérifier si une production est correcte, il est nécessaire de déterminer, de nombreuses fois, si des points sont alignés. Cela amène les élèves à développer des connaissances nouvelles sur l'alignement. Par exemple, dans une classe où l'enseignante avait rappelé comment vérifier un alignement avec une règle, nous avons observé que, petit à petit, les élèves ont abandonné la règle pour vérifier perceptivement, et de façon correcte, les alignements lors du travail individuel ou en petits groupes. De plus, le travail en groupe classe sur des productions affichées au tableau amène aussi certains élèves à une connaissance « vectorielle » implicite de l'alignement. Nommons A, B, C les trois points qui font l'objet de la vérification et qui sont, par exemple disposés de la façon suivante (figure 5). Les élèves repèrent si les triangles rectangles d'hypoténuse [AB] et [BC] sont superposables et utilisent ainsi implicitement la notion de pente d'une droite pour repérer des alignements.

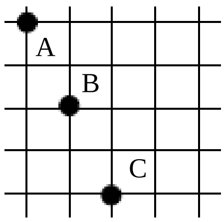


Figure 4

- *Des savoirs algébriques dans Gommettes*

Ce problème, moins riche que les autres du point de vue des savoirs curriculaires qu'il met en jeu, permet toutefois de (re)mettre en relation l'addition itérée et la multiplication. En effet, il est intéressant, et certains élèves le font spontanément, de transformer l'écriture additive 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 en une écriture multiplicative du type 4 + 5 × 3 ou encore 4 + (6 – 1)× 3. Avec ces écritures, la récurrence qui permet de résoudre le problème et le caractère algébrique du problème apparaissent. Cela permet d'envisager une résolution du problème en général.

- *Des savoirs sur pavage et aire dans* Etiquettes

Lorsqu'ils cherchent empiriquement à disposer le plus possible d'étiquettes sur la grille, la plupart du temps, les élèves disposent ou représentent les étiquettes en utilisant les mesures des côtés d'une étiquette, mais leur activité consiste à essayer de paver une surface (grandeur) avec une autre surface (grandeur). Un pavage cesse lorsqu'on ne peut plus disposer de nouvelle étiquette sur la grille sans débordement. Ainsi, dans cette étape du travail, des propriétés de comparaison d'aires apparaissent peu et de façon très implicite dans le cadre des grandeurs (Douady, 1986).

Ensuite, lorsqu'il s'agit de savoir si les solutions obtenues empiriquement peuvent être améliorées, le travail bascule vers le cadre numérique. L'aire est alors une mesure obtenue par multiplication et pour savoir combien au plus on pourrait placer d'étiquettes, on effectue soit une suite de multiplications, soit une division euclidienne pour trouver la borne supérieure de l'ensemble des pavages possibles. Mais cela ne donne pas toujours la garantie que l'on puisse effectivement paver la grille avec le quotient obtenu d'étiquettes. En particulier, ce n'est pas parce que l'aire de la grille est de 432 u² et que, par additivité, l'aire de 12 étiquettes est de 420 u² que l'on pourra paver la grille avec 12 étiquettes. Ce problème est donc une occasion de mettre en œuvre l'additivité de l'aire et de montrer que :

- le pavage d'une surface S1 avec une surface S2 n'est pas toujours possible même si l'aire de S2 est inférieure à celle de S1 ;
- si le quotient de la division euclidienne de l'aire de S2 par l'aire de S1 est *n*, il n'est pas sûr que l'on puisse paver S1 avec *n* fois la surface S2.

Cette dernière propriété est particulièrement importante car elle distingue l'aire de la longueur (pour les segments) qui est la première grandeur étudiée en mathématiques.

- *Des savoirs sur les multiples et les nombres premiers dans* 9 nombres

Ce problème demande bien entendu de disposer d'une première définition du mot « multiple ». Nous avons observé que les élèves de cycle 3 interprètent le plus souvent la consigne « quand deux nombres sont voisins, l'un des deux nombres est multiple de l'autre » comme « tous les nombres sont dans la même table » et ne raisonnent pas nombre par nombre. Ainsi, ils arrivent alors à des suites comme 24, 12, 6, 2, 10, 20, 4, 8, 16 où tous les nombres de la liste sont dans la table de 2 et où la liste est composées de trois sous-listes de multiples « pas trop grands » d'un même nombre : d'abord trois multiples de 6, puis trois multiples de 2, puis trois multiples de 4. Pour améliorer la solution, il faut envisager l'énoncé de la façon suivante : « quand deux nombres sont voisins, l'un des deux est dans la table de l'autre », ce qui permet d'envisager chaque voisin d'un nombre soit comme un diviseur, soit comme un multiple de ce nombre et de produire, par exemple la suite : 4, 12, 6, 2, 10, 5, 15, 3, 9. L'amélioration des solutions passe souvent par la décomposition multiplicative de nombres et ce faisant, le constat que certains nombres comme 2, 3, 5, 7, 11… ne sont dans aucune table de multiplication autre que la leur. Les élèves découvrent ou redécouvrent alors des nombres aux propriétés particulières. Pour justifier que 12 est bien le plus petit des plus grands nombres des suites possibles, il faut expliciter cette propriété qui a pu fonctionner de façon implicite lors de la recherche empirique.

Conclusion

L'analyse précédente montre qu'il y a une certaine richesse dans ces problèmes quant aux savoirs curriculaires qu'ils permettent de revisiter, richesse à laquelle nous tenons tant que la question des possibilités d'apprentissages généraux sur la résolution de problèmes n'est pas tranchée (voir les articles de Sarrazy, 1997 et Robert, 1996), sur ce point). Ces problèmes sont aussi riches du point de vue des savoirs sur la recherche et la résolution de problèmes en mathématiques. Cependant, cette double richesse est aussi source de difficultés et de questions, en particulier en ce qui concerne la clôture des séances et les institutionnalisations. Quels savoirs institutionnaliser ? Quels choix faire ? Comment hiérarchiser ces savoirs ? Par ailleurs, les savoirs sur la recherche et la résolution d'un problème mathématique sont peut-être moins faciles à institutionnaliser à l'école primaire, en particulier car ils ne sont pas forcément très familiers des professeurs des écoles.

Références bibliographiques

Chevallard Y., 1992, Le caractère expérimental de l'activité mathématique, *Petit x. 30.* p. 5-15

Douady, 1986, Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherche en didactique des mathématiques, 7.2,* p. 5-31

Groupe PPC, 2006, *Des problèmes pour chercher à l'école primaire*, IUFM des Pays de la Loire et IREM de Nantes

MEN, 2005, Les problèmes pour chercher, *Documents d'accompagnement des programmes*

Orange C., 2005, Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques, Les Sciences de l'éducation. Pour l'ère nouvelle. Vol. 38, n° 3, 2005, p69-94.

Perrin D., 2007, L'expérimentation en mathématiques : quelques exemples, *Actes du XXXIIIème colloque sur la formation des maîtres*, p. 37-72.

Robert A., 1996, Prise en compte du méta en didactique des maths, *Recherches en didactique des mathématiques*, 16. 2, p. 145-175

Sarrazy B., Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques, 17. 2, p. 135-166

Thomas Y., 2007, Gommettes et étiquettes, des problèmes pour chercher, *Grand N* 80, p. 29-41