

PRODUCTION DE PREUVES ET RESOLUTION DE PROBLEMES ARITHMETIQUES AU CM

Jacques DOUAIRE

Formateur IUFM de Versailles

Université de Cergy-Pontoise

Equipe ERMEL, INRP

Jacques.Douaire@wanadoo.fr

Résumé

Quelles sont les preuves que peuvent produire des élèves de Cours Moyen dans la résolution de problèmes arithmétiques ? Quelles justifications et critiques peuvent-ils formuler lors des phases de validation ? Cette communication aborde les raisonnements élaborés par les élèves et les problèmes et situations didactiques expérimentés dans des classes situées en ZEP.

I – PRESENTATION

Les résultats et méthodes exposés ici sont issus de plusieurs travaux sur les preuves et les argumentations développées par les élèves du cycle 3 qui ont été conduits d'abord dans le cadre des recherches menées à l'INRP, principalement avec l'équipe ERMEL entre 1994 et 1997 (cf ERMEL 1999 a), puis approfondis dans le cadre de la thèse que j'ai soutenue en 2006 à Paris VII.

Constats initiaux

A l'école primaire, plusieurs systèmes de validation coexistent : la validation pratique par le recours à des objets réels ou représentés, la simple vérification du respect des données et contraintes de l'énoncé mais aussi la production de preuves intellectuelles s'appuyant sur des raisonnements et des propriétés notamment quand les autres types de validation deviennent impossibles. Le développement de ces preuves intellectuelles (cf. Balacheff 1988) suppose le recours à des situations les rendant nécessaires et à la mise en œuvre de débats où elles puissent être formulées et critiquées au moyen d'arguments mathématiques produits par les élèves eux-mêmes, mais où le maître est le garant des conclusions. Le travail de preuve comporte donc à la fois la formulation de propositions personnelles qui deviennent publiques, la constitution progressive de critères de preuve et l'établissement de la vérité selon ces critères.

Les programmes pour l'école primaire posent la question de la preuve, mais aussi du rôle de l'argumentation dans l'accès à des raisonnements mathématiques. L'importance des interactions langagières dans la construction des savoirs disciplinaires y est aussi mise en évidence. Dans la pratique, la mise en œuvre de situations de preuve est souvent

difficile pour des enseignants du primaire, tant au niveau de l'analyse préalable des enjeux scientifiques spécifiques aux mathématiques, par delà les aspects sociaux ou langagiers des débats, que dans la conduite même de ces débats. L'utilisation par des enseignants qui ne sont pas des spécialistes de la discipline, dans des conditions ordinaires, de situations qui garantissent une réelle activité mathématique de preuve des élèves, suppose la robustesse de ces dispositifs d'enseignement.

Recherches conduites

Lors de la recherche sur les apprentissages numériques «Apprentissages mathématiques et argumentation au cycle 3 » (INRP 1994-1997), nous avons constaté que les élèves étaient capables de prendre conscience de la nécessité de prouver - de ne pas en rester à un simple constat ou à une affirmation sans justification - et qu'ils pouvaient élaborer des preuves compatibles avec des critères mathématiques (cf. ERMEL 1999 a). Nous avons aussi constaté que pour produire ou critiquer des justifications, ils étaient capables de développer une argumentation en mathématiques qui avait, comme toute argumentation scientifique, une double finalité : établir la justesse d'une affirmation et convaincre un auditoire (ici celui que forme la communauté que constitue la classe).

Dans le cadre de ma thèse («Analyse didactique des processus de preuve dans le domaine numérique au cycle 3 ») j'ai privilégié trois objets d'analyse : les raisonnements et les arguments élaborés par les élèves, les problèmes et les situations didactiques, la gestion des phases de validation par les enseignants.

2- PROBLEMES DE PREUVE

Les problèmes étudiés sont des « problèmes-ouverts » dont la finalité est double. D'une part développer des stratégies de recherche : apprendre à gérer des procédures par essais successifs (garder la trace des essais, en identifier les variations, anticiper des ajustements au voisinage du but), formuler des conjectures, émettre des hypothèses, et d'autre part permettre aux élèves de produire des preuves. Dans ce type de problèmes toutes les informations nécessaires à leur compréhension sont présentes dans un énoncé relativement court. Ces problèmes ont aussi été choisis de façon à ce que les enjeux relatifs à la preuve n'interfèrent pas avec des connaissances en cours d'acquisition au CM, par exemple la division ou les nombres décimaux, afin de ne pas mettre en valeur des procédures que seuls quelques élèves auraient déjà pu acquérir, ou qui réduiraient le débat à l'expression des seuls élèves dont la compétence en mathématiques est reconnue. Les problèmes numériques choisis sont de plusieurs types :

1) Problèmes de recherche de toutes les possibilités

Par exemple, atteindre 97 en ajoutant des multiples de 3 et de 8 (*Golf* au CM1). Dans ce problème, après avoir produit des solutions, les élèves ont à prouver qu'ils les ont toutes trouvées. Il y a quatre solutions pour les valeurs 97, 3 et 8 : $3 \times 3 + 8 \times 11$; $3 \times 11 + 8 \times 8$; $3 \times 19 + 8 \times 5$; $3 \times 27 + 8 \times 2$.

2) Problèmes à deux contraintes

Plusieurs situations de ce type ont été proposées ; j'en citerai ici deux, l'une destinée au CM1 (*Les trois nombres qui se suivent* : trouver trois nombres entiers qui se suivent dont on connaît la somme), l'autre au CM2 (*Somme et Différence* : trouver deux nombres entiers dont on connaît la somme et la différence).

Dans la situation *Les trois nombres qui se suivent*, après avoir résolu le problème pour des valeurs qui admettent une solution et pour laquelle la validation s'appuie sur la simple vérification des contraintes de l'énoncé, deux problèmes de preuve peuvent être proposés : la preuve d'une impossibilité - que nous exposerons ici - et celle des conditions d'existence d'une solution. Pour prouver une impossibilité, les élèves ont à trouver trois nombres entiers qui se suivent dont la somme est 25, puis, une fois que le constat a été établi qu'aucune solution entière n'a été trouvée, les élèves produisent, individuellement, par écrit, une proposition justifiant à leurs yeux cette impossibilité. Ces propositions sont ensuite débattues collectivement.

Dans la situation *Somme et différence*, lorsque la somme et la différence sont toutes les deux paires, ou toutes les deux impaires, il y a une solution, sinon le problème est impossible. Après avoir résolu le problème pour des valeurs qui admettent une solution, les élèves ont à prouver l'impossibilité de trouver une solution avec des nombres entiers pour deux valeurs particulières (avec S impaire et D paire ou l'inverse). La preuve de cette impossibilité est demandée une fois que les élèves constatent qu'ils ne trouvent pas de solution. Un autre problème porte sur la recherche de tous les nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent.

3) Des problèmes d'optimisation

Dans la situation *Le plus grand produit* (CM1 ou CM2), les élèves ont à chercher, parmi les décompositions additives d'un nombre en nombres entiers, celle(s) dont le produit des termes est le plus grand. Par exemple pour 10, la décomposition $3+3+2+2$ donnera le produit $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$. La preuve de la solution s'appuie sur plusieurs propriétés : la décomposition ne comporte ni de 0 ni de 1 (ces propriétés sont des évidences au CM et s'appuient sur des savoirs connus), la décomposition ne comporte pas de nombre supérieur ou égal à 5, car pour de tels nombres, il existe des décompositions dont le produit des termes est plus grand (pour 5, $3 \times 2 = 6$). Elle ne comporte donc que des 2 des 3 ou des 4 et lorsque le nombre de 2 est égal ou supérieur à trois, on remplace trois 2 par deux 3 sans modifier la somme mais en améliorant le produit. Les preuves de ces propositions prennent donc appui sur l'énoncé de résultats numériques.

4) Problèmes de dénombrement

Dans la situation *Cordes* (CM2), les élèves ont à trouver le nombre de cordes reliant 210 points sur un cercle, après avoir cherché pour 6 points et 10 points.

En résumé, les élèves ont à prouver, selon les problèmes :

- l'impossibilité d'une solution pour certaine(s) valeur(s). Par exemple dans *Les trois nombres qui se suivent* : « Pourquoi il n'y a pas de solution pour 25 ? »
- l'unicité d'une solution pour certaine(s) valeur(s) des données
- l'exhaustivité des solutions, par exemple : « quels sont les nombres qui sont la somme de trois nombres qui se suivent ? »
- l'optimalité d'une solution, comme dans la situation *Le plus grand produit*.

3. ANALYSE DES PREUVES PRODUITES

L'analyse des preuves produites dans ces situations durant plusieurs années dans 8 classes de CM1 ou de CM2 s'appuie, selon le problème posé, sur les productions écrites des élèves (résultats, procédures, propositions, justifications élaborées) ainsi que des échanges oraux produits lors des mises en commun où les propositions sont débattues.

Selon les problèmes, les preuves relèvent de deux grands types. Pour certains problèmes la preuve peut être établie par un raisonnement garantissant l'exhaustivité des solutions numériques ; pour d'autres problèmes la preuve suppose la production de nouvelles propositions.

1) Preuves basées sur une organisation d'essais

Pour **prouver l'exhaustivité des solutions** produites, comme par exemple dans le problème *Golf* (atteindre 97 en ajoutant des multiples de 3 et de 8), l'élève doit identifier les solutions identiques et les solutions différentes et pouvoir en produire des nouvelles. En premier il est nécessaire qu'il formule la solution en nombre de 3 et nombre de 8 ; en particulier l'élève doit repérer les solutions présentant le même nombre de 3 et le même nombre de 8. Par exemple il devra reconnaître que deux sommes comportant onze 8 et trois 3 écrits dans un ordre différent correspondent à la même solution. Il lui est aussi possible de faire des échanges $3 \times 8 = 8 \times 3$ par exemple passer de $97 = 11 \times 8 + 3 \times 3$ à $97 = 8 \times 8 + 11 \times 3$.

Cette réorganisation d'essais de calculs sert aussi pour **prouver une impossibilité**, en assurant un encadrement par exemple pour *Les trois nombres qui se suivent* (preuve de l'impossibilité pour 25 en l'encadrant entre $7+8+9=24$ et $8+9+10=27$). Certaines de ces tentatives de preuve fondées sur une organisation des calculs demeurent partielles ; pour l'exemple précédent, certains élèves produisent simplement le début d'encadrement $7+8+9=24$ et concluent ensuite à l'impossibilité.

Dans les deux cas, l'efficacité de la gestion des procédures par essais dépend de l'écart entre le premier essai et le but à atteindre. Elle est fonction de l'interprétation de cet écart pour l'évolution des essais suivants : évolution des essais se rapprochant ou non du but ; choix de valeurs permettant de réduire rapidement les écarts et donc le nombre de calculs, ou production de toutes les valeurs intermédiaires, avec un risque accru d'erreurs de calculs qui peuvent aussi handicaper ces stratégies.

Ces réorganisations supposent en général de fixer une des variables et de faire parcourir à l'autre un ensemble de valeurs. Dans ces cas, la réduction de l'ensemble des solutions peut être déterminée directement à partir d'un raisonnement sur des valeurs numériques particulières. Il s'agit donc d'une définition du champ des possibles justifiée par un raisonnement garantissant l'exhaustivité.

Dans ces différents types de problèmes il y a une continuité entre les procédures produites pour la résolution (en général des essais de calculs prenant en compte une des contraintes avec vérification sur la deuxième) et les procédures produites pour la preuve (de l'exhaustivité ou de l'impossibilité par encadrement) : il s'agit de réorganiser (et compléter) des essais de calculs produits antérieurement.

2) Preuves nécessitant l'élaboration de propositions puis leur critique

Elles portent sur la validité de propositions visant un degré de généralité et non pas simplement des procédures produites pour des valeurs particulières. Plusieurs niveaux peuvent être distingués suivant que ces propositions constituent : une formulation complète de la solution (proposition nécessaire et suffisante), une proposition nécessaire mais non suffisante constituant une étape importante de la solution, comme par exemple « il faut prendre des nombres plus petit que 5 » (*Le plus grand produit*), une proposition vraie mais ne conduisant seule à la solution, comme par exemple la formulation du rôle du 1 « il ne faut pas prendre de 1 » (*Le plus grand produit*), une proposition ambiguë ou imprécise, une proposition erronée, ou une proposition décrivant simplement la tâche (« il faut multiplier les nombres... »).

Les justifications produites par les élèves pour les propositions formulées antérieurement peuvent aussi être classées en plusieurs catégories.

En premier, les preuves valides que constituent des justifications nécessaires et suffisantes, par appel à une propriété ou un raisonnement, notamment la production d'un contre-exemple ; puis les justifications nécessaires mais non suffisantes et les justifications dont le statut n'est pas encore déterminé (justification s'appuyant sur une propriété vraie et probante, mais ni reconnue par la classe, ni prouvée par l'élève).

Parmi les justifications non valides, certaines s'appuient sur une propriété erronée ou sur une propriété vraie mais non probante car sans rapport avec la proposition (affirmer que 25 n'est pas la somme de trois nombres qui se suivent car 25 est impair), ou sur une expérience cruciale, ou basée sur des exemples, ou relevant de l'empirisme naïf. D'autres se limitent à une description de la tâche ou font simplement référence à une expérience scolaire.

Dans ce second type de problèmes, il peut y avoir une rupture entre les procédures utilisées pour la recherche de solutions pour des valeurs particulières, par exemple trouver le plus grand produit pour 10, et des procédures de preuve faisant appel à des propriétés qui n'ont pas été réactualisées lors de la phase de résolution précédente.

3) Résultats sur deux années

L'étude des productions des mêmes vingt et un élèves durant deux années successives, met en évidence leurs capacités à élaborer des preuves, ainsi que la diversité des preuves produites.

Relativement aux **procédures fondées sur la réorganisation d'essais de calculs**, celles ne prenant pas en compte les données du problème sont exceptionnelles et en y ajoutant les non réponses elles représentent moins de 5% de l'ensemble. Les procédures permettant d'établir la solution ou de l'approcher sont aussi fréquentes que celles cohérentes avec le problème mais ne présentant pas une stabilité ou une organisation suffisante pour y parvenir. Certaines difficultés sont liées à la mise en œuvre de procédures par essais de couples de nombres : erreur de calcul, absence de bilan, interprétation erronée des résultats... Ces difficultés ne sont pas spécifiques aux problèmes de preuve et leur maîtrise constitue d'ailleurs un des objectifs de ces situations visant à développer des stratégies de recherche chez les élèves du cycle 3, en particulier l'identification de ce qui varie dans les essais successifs.

Relativement aux **justifications produites**, nous avons pu constater leur qualité. En effet d'une part, il n'y a pas de justification extra-mathématique, et d'autre part, l'ensemble des justifications redondantes ou rappelant la tâche constituent moins de 10% des réponses. Sur l'ensemble des problèmes sollicitant la production de justifications il y a un peu moins de la moitié d'entre elles qui sont probantes et plus du tiers de justifications partielles ou nécessitant d'être elles-mêmes explicitées.

En résumé, si de nombreux élèves réussissent à produire des preuves, notamment des justifications, qui sont tout à fait compatibles avec ce qui peut être attendu à ce niveau compte tenu des limites langagières, tous n'ont pas progressé de la même manière durant ces deux années. Mais les problèmes de preuve proposés ont aussi contribué à développer des procédures de calcul.

4.REMARQUES SUR LES SITUATIONS

Les écarts constatés dans certaines situations entre les preuves produites et celles attendues sont liés notamment à plusieurs causes. Citons en trois parmi d'autres :

1) L'absence d'enjeu de preuve, liée à une évidence partagée

Par exemple, dans le problème *Somme et différence*, la formulation par une élève qu'il n'y a pas de solution parce que l'un des nombres (la somme) est paire et l'autre (la différence) est impaire constitue une proposition qui rencontre l'adhésion de toute la classe, car elle prend appui sur les nombreux essais que les élèves ont produits sans pouvoir aboutir. Seuls quelques-uns croient nécessaire de produire une justification de l'impossibilité qui soit fondée sur un encadrement des solutions par des calculs.

2) La poursuite des calculs sur des valeurs particulières

Nous avons vu que dans certaines situations il y avait une rupture organisée entre une première phase où les élèves produisaient des solutions particulières, dépourvues d'enjeu de preuve, et les phases de preuve. Un risque réside dans le maintien par certains élèves d'un intérêt centré sur la production de solutions particulières au détriment de formulations de solutions plus générales.

3) Les exigences de précision

Une contrainte constante aux situations de preuve portant sur un problème général est la nécessité pour le maître de faire abandonner des formulations imprécises car les significations que leur accorde chaque élève peuvent être différentes. Par exemple le terme « petit nombre » (*Le plus grand produit*) utilisé par un élève recouvre un champ différent pour un autre, sans qu'ils perçoivent cette ambiguïté.

5.CONCLUSIONS

Trois pistes me paraîtraient intéressantes à approfondir. La première porterait sur l'analyse de la continuité des processus de preuve développés au primaire et au collège. Il serait utile de regarder plus finement cette évolution des processus de preuves et de la conception associée de l'établissement de la vérité en mathématiques, à ces niveaux de fin de l'école primaire et du début du collège. Cette étude pourrait prendre plus largement en compte les interactions produites, au moyen de débats argumentatifs au sein de petits groupes d'élèves, lors de la formulation de conjectures ou de la production de preuve. Toutefois la question se pose de l'articulation entre cette problématique et celle de la conception de la démonstration, de son apprentissage et de l'articulation avec des argumentations mathématiques (sur ce point voir Pedemonte 2002).

Une seconde question de recherche porte sur l'analyse des conditions, relatives aux dispositifs de formation, permettant la maîtrise des compétences professionnelles en jeu dans les mises en commun.

Une troisième question de recherche, qui n'est pas sans rapport avec la première, consisterait à prolonger ce qui a été présenté ici pour le choix des problèmes et à élaborer une structuration du champ de problèmes arithmétiques susceptibles de permettre le développement des processus de preuve.

BIBLIOGRAPHIE

Balacheff N. (1988), Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves du Collège . Thèse d'Etat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Douaire J. (2006), Analyse didactique des processus de preuve dans le domaine numérique au cycle 3 de l'école primaire. Thèse, Université Paris VII.

Douaire J, Elalouf M.-L., Pommier P. (2005), « La gestion des mises en commun en mathématiques, en sciences et en observation réfléchie de la langue au cycle 3 : savoirs professionnels et spécificités disciplinaires » *Grand N* n°75.

Douaire J. (coordination) (2004), *Argumentation et disciplines scolaires* (INRP 329 p.)

Douaire J., Argaud H.-C., Dussuc M.-P., Hubert C. (2003), « Gestion des mises en commun par des maîtres débutants » in *Faire des maths en classe ? Didactique et*

analyse de pratiques enseignantes (coordination Colomb J., Douaire J., Noirfalise R. ADIREM/INRP).

Douaire J., Hubert C. (2001), « Mises en commun et argumentation en mathématiques » *Grand N* n° 68

Equipe ERMEL (1999 a), *Vrai ? Faux ? ... On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3* (coordination Douaire J. et Hubert C. INRP).

Equipe ERMEL, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM2* (1999 b) ; *CM1* (1997) ; Hatier.

Pedemonte B. (2002), Etude didactique et cognitive des rapports entre l'argumentation et la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques. Thèse Université Joseph Fourier (Grenoble I) et Université de Gênes.