ÉLÉMENTS POUR LA FORMATION INITIALE DES PROFESSEURS D'ECOLE À PARTIR DE L'ALGORITHME DE KAPREKAR

Jean-Claude Rauscher

Maître de conférences, IUFM d'Alsace
DIDIREM Paris 7

Jc.Rauscher@wanadoo.fr

Résumé

L'algorithme de D.R. Kaprekar, mathématicien indien de Devlali, publié en 1949 peut être le support d'une aventure, riche d'étonnements et de réflexions mathématiques. Dans le cadre de cet atelier, les participants ont vécu cette aventure qui donne lieu à des démarches d'observations, d'expérimentations, de communications et de validations tant au niveau de formateurs que d'étudiants et d'élèves de cycle trois, de collège et de lycée. Parallèlement, les apports de ce support dans le cadre de la formation initiale de futurs professeurs ont été discutés et mis en lumière : présentation et mise en œuvre de démarches d'enseignement des mathématiques (Brousseau 1972), repérage des finalités de l'enseignement des mathématiques (G. Vergnaud, 1987), réactualisation des connaissances de la numération, repérage de l'importance de la prise en compte de différents registres d'écriture en mathématique (R. Duval, 1995), prise de conscience de modalités de pensée chez les élèves (C. De Block-Docq, 1994).

I – L'ALGORITHME DE KAPREKAR ET LA QUESTION DE SON UTILISATION

Les travaux du mathématicien autodidacte D.R. Kaprekar sur les nombres entiers, relayés par Martin Gardner, continuent d'une part à questionner mathématiciens et informaticiens et d'autre part donnent des supports d'activités pour les enseignants en mathématique. Il en est ainsi de l'algorithme dit de Kaprekar publié en 1949 qui consiste à choisir un nombre entier n écrit généralement en base 10 et de former le plus grand et le plus petit nombre à l'aide des chiffres de n . Au nombre n on associe ensuite la différence $K(n)$ de ces deux nombres et on recommence le processus avec les chiffres de $K(n)$. Cet algorithme génère des phénomènes remarquables. Ils sont parfois présentés dans le cadre de mathématiques dites récréatives. Les questions qu'ils suscitent servent aussi de supports pour des activités d'apprentissages en classe. Comme exemple, citons la proposition de Gérard Chauvat (1980), qui s'appuie sur l'algorithme pour développer des activités en « Arithmétique élémentaire en classe de 5^{ème} » utilisant la notion de classes d'équivalence. L'arithmétique ayant retrouvé une place explicite dans les classes de lycée, on les trouve aussi évoqué dans des manuels scolaires de terminale S. Pour ma part j'ai rencontré cet algorithme à partir d'une idée « d'activité » du manuel de 6^{ème} de l'IREM de Strasbourg (1986). C'est à partir de là que j'ai élaboré et mis à l'épreuve des séquences d'enseignement comportant pour les élèves de collège des phases

d'observations, de conjectures d'expérimentations et de preuves. Par la suite, j'ai utilisé ce travail comme support de formation en PE et PLC.

La motivation des participants à cet atelier était double. Pour certains, qui avaient déjà entendu parlé de cet algorithme sans le connaître précisément, il s'agissait de l'appliquer effectivement. Pour tous ensuite, il s'agissait de savoir ce qui est possible de faire avec cet algorithme dans le cadre de classes de cycle 3 ou de collège et dans le cadre de la formation PE ou PLC. Bien entendu, l'intérêt est de dépasser le côté simplement spectaculaire ou récréatif des phénomènes qu'il génère. C'est dans cette perspective que j'ai conçu un déroulement pour l'atelier qui permettait dans un premier temps de découvrir ce support puis de l'interroger comme support de formation, avec l'éclairage aussi de mes expériences dans ce domaine. Le déroulement de l'atelier sera décrit dans la partie II.

Voici les dimensions qui seront abordés ensuite dans le compte rendu.

À un premier degré, les activités qui s'appuient sur l'algorithme de Kaprekar provoquent chez les élèves et les étudiants des démarches d'observations, d'expérimentations, de communications et de validations (G. Brousseau, 1972) dans les domaines de la numération. J'ai eu maintes fois l'occasion de le vivre avec des élèves de début de collège et par la suite avec des étudiants se destinant à l'enseignement (professorat d'école ou de lycée collège). Cette fois ci j'ai partagé cette aventure avec les formateurs de mathématiques en IUFM qui ont participé à cet atelier. Il sera rendu compte de leurs observations, de leurs surprises, de leurs questions.

A un deuxième degré, ces activités peuvent être analysées en termes d'apports dans les apprentissages pour les élèves de fin de cycle 3 et en collège. Habituellement, je mène cette analyse avec les futurs professeurs en formation initiale. Ici, nous l'avons menée entre collègues formateurs : que peuvent apprendre les élèves à partir de cette activité et quels scénarios d'enseignement en classe sont les plus susceptibles de favoriser ces apprentissages ? L'analyse se base sur ma propre expérience et a été enrichie par les apports des uns et des autres.

Enfin on peut analyser ces activités en termes d'apports pour la formation des futurs professeurs tant au point de vue des contenus mathématiques sous-jacents, question importante pour les étudiants préparant le concours qu'au point de vue, tout aussi important pour eux, de questions d'enseignement des mathématiques à l'école et au collège.

II – LE DEROULEMENT DE L'ATELIER

Pour commencer, les participants à l'atelier ont découvert et exploré le fonctionnement de l'algorithme de Kaprekar pour trois chiffres à partir du programme de calcul suivant :

- 1) *Choisir un nombre entier de trois chiffres.*
- 2) *A l'aide de ces trois chiffres, fabriquer le nombre entier le plus grand possible.*
- 3) *A l'aide de ces trois chiffres, fabriquer le nombre entier le plus petit possible.*
- 4) *Calculer la différence des nombres obtenus en 2) et 3)*

5) *Recommencer (à partir de l'instruction 2) avec le résultat obtenu. etc.*

Après cette exploration, l'analyse du support et de sa richesse a été amorcée individuellement par écrit autour des points suivants :

- *Réactions et questions par rapport au support et par rapport au comportement du groupe de participants*
- *Connaissances et compétences qu'il peut développer chez les élèves*
- *Connaissances et compétences qu'il peut développer chez les étudiants et PE*
- *Modalités de formation envisageables pour exploiter cette situation.*

Au cours de cet atelier, j'ai eu l'occasion de rapporter et de soumettre à analyse la façon dont pour ma part j'exploitais cette situation avec des élèves de collège puis ensuite avec des étudiants se destinant à l'enseignement. L'écrit individuel initial a permis à tout un chacun de se faire une idée a priori et de nourrir les présentations et discussions qui ont suivi.

III – QUE FAIRE AVEC CET ALGORITHME DANS LE CADRE DE L'ENSEIGNEMENT EN CYCLE 3 ET AU COLLEGE ?

III – 1 La découverte de l'algorithme et de ses effets par les participants

Au cours de l'atelier, dans cette phase de découverte de l'algorithme, la surprise a joué à plein, tout comme elle joue habituellement dans un groupe de cycle 3 ou de collège : l'étonnement se lit sur les visages lorsque l'on s'aperçoit que les suites se stabilisent sur 495, on consulte ses voisins pour confirmer cette observation, etc... Quelques réactions écrites à ce sujet :

- *« C'est étonnant ! Peut-on généraliser à 2, 4, ..., n chiffres ? Démonstration ? »*
- *« Étonnant ! Le résultat se stabilise. Pourquoi ? Est-ce qu'on peut généraliser ? »*
- *« C'est magique ! Ça marche toujours ? Comment ça marche ? »*

Mais on remarque dans ces réactions écrites, une attitude qui est spécifique de personnes qui ont pratiqué des mathématiques : il y a d'emblée un souci de savoir si cette observation peut se généraliser et de chercher des explications ou de démontrer. On rencontre évidemment souvent ces réactions chez les étudiants ou en lycée. Les forums sur internet, les activités présentées dans des manuels de lycée, ou même de collège (Chauvat; 1980) à ce sujet, se focalisent exclusivement sur la résolution de ces questions mathématiques.

III – 2 Une piste sans issue ?

À partir de la constatation initiale, il s'agit pour un professeur de décider comment il va poursuivre l'activité. En l'occurrence, la question est de savoir si cette préoccupation de prouver cette stabilisation peut être partagée d'emblée avec les élèves. C'est ce que semblent penser a priori plusieurs participants de l'atelier qui trouvent globalement ce support « *très motivant pour les élèves et intéressant pour les inciter à poursuivre une recherche* ». Un autre participant précise : « *Il s'agit de trouver des règles, les vérifier, puis les prouver ; s'interroger sur le pourquoi ? comment ? toujours ?* ». Néanmoins cette perspective est relativisée par certains qui évoquent bien « *l'apparition d'un fait expérimental pour les élèves* » mais qui soulignent que « *le désir de preuve peut être suscité mais que tout dépend du rapport des élèves à l'expérience* ». Pour ma part, mes observations en classe me font adhérer complètement à cette prudence au niveau d'un cycle 3 ou du collège. En effet l'étonnement des élèves ne se transforme pas immédiatement en désir manifeste de comprendre le pourquoi de ce phénomène. Il y a un étonnement, certes, mais qui se rapporte plutôt à une certaine vision des mathématiques à cet âge : « *c'est magique !* » ; une magie très vite intégrée : « *C'est comme ça !* ». Van Hiele à propos d'expériences en géométrie relève que « *les enfants s'étonnent plus de ce qui ne va pas que de ce qui va* » (rapporté par DE BLOCK-DOCK C. ; 1994). En l'occurrence beaucoup d'élèves sont plus sensibles aux ruptures et contres exemples de la règle observée qu'à son accomplissement. Ces ruptures et contres exemples suscitent en effet des questionnements spontanés : « *Pourquoi ça ne marche pas dans ce cas là ?* ». Il s'agit là d'une attitude qui, prise en compte par l'enseignant, permet de faire avancer les élèves dans leurs pensées plus sûrement qu'une injonction à « démontrer » la propriété. De plus, la situation proposée comporte un potentiel d'apprentissage concernant le calcul et la numération décimale qui risque d'être négligé si on focalise immédiatement et uniquement l'attention des élèves sur la démonstration. Ce potentiel fut d'emblée repéré par les participants à l'atelier : « *Cette situation est intéressante pour les élèves au niveau de la numération et du calcul (soustractions avec retenues) et pour comprendre ce qu'est un algorithme* » ; ou encore : « *Elle met en jeu la comparaison de nombres entiers, la connaissance du système décimal de position, la désignation écrites d'entiers* ».

Mais comment alors, à la fois faire progresser les élèves dans le domaine mathématiques pour les faire sortir de la pensée magique du « *c'est comme ça !* », et, parallèlement réactiver leurs connaissances dans le domaine du calcul et de la numération décimale ? Au cours de l'atelier, cette question étant installée, j'ai eu l'occasion de présenter ma façon de faire dans les classes de sixième, où je commençais pratiquement l'année avec cette activité en poursuivant ces deux objectifs.

Le fait de faire vivre cette activité aux participants de l'atelier comme je la faisais vivre avec des élèves et comme je la fais vivre avec des étudiants, nous a permis par la suite de continuer l'analyse des apports de l'activité pour les élèves et pour les futurs professeurs.

III – 3 Une façon d’exploiter la richesse potentielle de la situation avec des élèves

III – 3.1 Le travail sur les nombres à trois chiffres

Dans une première phase de travail qui peut s’étaler sur plusieurs séances, je demande aux élèves de m’annoncer les suites obtenues et les copie telles quelles au tableau. De cette façon, on obtient un corpus que l’on peut soumettre à l’observation de tous les élèves de la classe. En effet, outre la surprise initiale, il y a bien d’autres régularités à remarquer.

Remarque : la particularité des cas où on prend des nombres à trois chiffres identiques avait été évoquée préalablement par les élèves ($444-444=0$) et ces cas, en connaissance de cause, étaient écartés des corpus à explorer.

Voici un exemple de corpus (le nombre choisi au départ est encadré) :

547	;	297	;	693	;	594	;	495
962	;	693	;	594	;	495		
393	;	614	;	515	;	396	;	594 ; 495
666	;	0						
765	;	198	;	792	;	693	;	594 ; 495
409	;	891	;	693	;	594	;	495
836	;	495						
432	;	198	;	782	;	594	;	495

Afin que chaque élève puisse avoir l’occasion et le temps de faire cette exploration, cette observation est sollicitée par écrit individuel : « Ecrivez toutes les remarques que vous faites en observant les suites obtenues ? ». Quelques remarques sont ensuite transcrites au tableau. Le travail de la classe porte ensuite sur l’analyse de ces remarques.

L’attention est en particulier portée sur leurs formulations. Les nuances à propos de remarques a priori identiques permettent en effet d’explicitier quelques savoirs en jeu. Par exemple, la comparaison des trois remarques suivantes permettent de revenir sur le vocabulaire utilisé pour signaler la position des chiffres dans l’écriture d’un nombre et aussi sur la différence entre chiffre et nombre :

- « *Au milieu, il y a toujours un 9* »
- « *Le chiffre du milieu est toujours un 9* »
- « *Le chiffre des dizaines est 9* »
- « *Le nombre des dizaines est 9* »
- « *Dans la suite des nombres, le chiffre des centaines baisse d’une unité chaque fois* »

De même :

- « *Quand on additionne le premier et le dernier chiffre on obtient toujours 9* »
- « *Quand on additionne le chiffre des centaines et le chiffre des unités on obtient 9* »

Le mot « *toujours* » qui apparaît fréquemment dans les observations est intéressant, tout comme son absence. Des élèves mettront ce mot ou la généralité des affirmations en

question en relevant des contres exemples. Ces contres exemples peuvent être de différentes natures :

- Certains de ces contres exemples, inciteront les élèves à vérifier spontanément les résultats des calculs. Par exemple dans les lignes 3 et 8 de l'exemple de corpus, on trouve des contres exemples qui correspondent à des erreurs de calculs (pour la ligne 3 : erreur dans la soustraction pour le rang des dizaines dans les deux premières étapes ; pour la ligne 8 : erreur dans l'élaboration du plus petit nombre possible à partir des chiffres utilisés).
- D'autres contres exemples donneront l'occasion aux élèves de prendre conscience que les propriétés qu'ils ont remarquées ne sont pas vraies sur tout le corpus (ligne 4) ou ne sont même pas vraies sur l'ensemble des nombres d'une suite.

Dans un cas comme dans l'autre, ces contres exemples font passer les observations exprimées par les élèves du statut d'observation locale au statut d'observation dont il faut étudier le domaine de validité. Le pas qui consiste ensuite à donner le statut de conjecture à vérifier aux observations émises est alors possible et est franchi par bon nombre d'élèves. En particulier, la remarque qui consiste à dire que « *le dernier nombre de la suite est toujours 495, sauf pour les nombres de trois chiffres identiques* » est alors mise en question, laissant la place à une étude exhaustive des cas, soit systématique (le travail est partagé dans la classe), soit par classe d'équivalence de nombres (nombres ayant les mêmes chiffres en considérant le plus grand et le plus petit).

Un tel travail peut clore la première phase de travail avec les élèves. Mais en fonction de l'avancement de la réflexion de la classe, on peut demander aux élèves de chercher une explication au fait que le chiffre des dizaines des différences calculées est 9 par examen attentif des soustractions posées, explication que certains formulent plus ou moins complètement. C'est une occasion de revisiter l'algorithme de la soustraction posée : quand on fabrique le plus grand nombre et le plus petit, on a toujours le même chiffre pour la colonne des dizaines, pour la colonne des unités il y a toujours une retenue à reporter sur la colonne des dizaines puisqu'on enlève un nombre à un nombre plus petit. Il s'agit là d'une première preuve qui ne consiste pas à faire une étude exhaustive des cas. Un coin du voile de la magie de l'algorithme commence à se lever...

III – 3.2 « Un drôle de truc » et le travail avec les nombres à deux chiffres

La deuxième phase de travail qui pourra occuper plusieurs séances aussi, est amorcée à la fin de la première phase par l'installation d'une question que s'approprie avec curiosité les élèves. En effet lorsque je demande à un élève de m'annoncer le chiffre choisi, je lui annonce quasi immédiatement la suite des nombres qu'il a obtenu par application de l'algorithme de Kaprekar. Les élèves sont étonnés : « *Mais comment vous faites si vite, Monsieur ? Vous devez avoir un truc !* » Je leur dis qu'à la place du programme de calcul initial, j'utilise un autre programme, plus facile que je leur demande de trouver. Ils entament alors une recherche et les idées, souvent astucieuses, ne manquent pas. Mais en général leurs propositions ne marchent que sur une suite ou parfois même sur une partie seulement de la suite. Par exemple ils proposent de mettre 9 au milieu et d'ajouter 1 au chiffre des centaines et de retrancher 1 au chiffre des unités. Ces échecs leur permettent de prendre conscience qu'il s'agit de trouver « *un programme qui marche à tous les coups !* » Mais ce n'est pas chose aisée ! C'est pourquoi la suite du travail consistera à reprendre cette question pour l'algorithme de

Kaprekar avec des nombres à deux chiffres. Le travail à ce sujet passe d'abord par les mêmes étapes que pour l'algorithme appliqué aux nombres à trois chiffres.

1^{ère} étape : programme de calcul appliqué à plusieurs exemples.

Il s'agit d'une phase de travail individuel. Très vite les élèves remarquent que le nombre clé qui apparaît ici est le nombre 9 auquel on aboutit si l'on ne choisit pas un nombre de deux chiffres identiques. Mais ce résultat pose problème et laisse les élèves perplexes : la question est de savoir que faire lorsqu'un résultat de soustraction ne comporte qu'un seul chiffre, en l'occurrence 9. Certains élèves demandent ce qu'il faut faire dans ce cas. Il y a une décision à prendre ! Je ne réponds pas mais renvoie à différentes décisions possibles adoptées implicitement par d'autres élèves. Certains considèrent en fait que c'est fini puisqu'on n'est pas dans les conditions de réaliser l'étape suivante. D'autres calculent $9-9$ et leur suite finit par 0. Certains considèrent qu'ils ont deux chiffres 0 et 9 et continuent l'algorithme en calculant $90-9=81$. Ce sont les plus nombreux car ils sont focalisés sur le résultat de la soustraction posée qui leur donne comme résultat 09. Ils sont attentifs aux chiffres obtenus et non pas à l'aspect « nombre » du résultat. A la fin ils retombent sur 09 et comprennent qu'ils sont sur une boucle. Mais en fait, au-delà de ces différentes positions possibles, aucun élève n'adopte spontanément l'attitude d'explorer ce qui se passe suite à chacune des décisions possibles. En fait une telle attitude qui serait celle d'un chercheur en mathématique qui explore les limites de la formulation initiale de l'algorithme n'apparaît pas spontanément chez les élèves. C'est une synthèse collective explicitant toutes ces possibilités qui permet en fait de leur montrer qu'une telle liberté d'exploration est possible en mathématiques. Cette synthèse permet aussi de clore le débat et de prendre une décision collective qui est de considérer qu'on notera les suites jusqu'à ce qu'on obtienne 9.

2^{ème} étape : récolte d'un corpus et analyse.

Ici aussi ne figurent pas de cas où on prend des nombres constitués de deux chiffres identiques.

Voici un exemple de corpus et les remarques qu'il suscite chez les élèves :

49	;	45	;	9
67	;	9		
90	;	81	;	63
	;	27	;	45
	;	9		
28	;	54	;	9
62	;	36	;	27
	;	45	;	9
86	;	18	;	63
	;	27	;	45
	;	9		
19	;	72	;	45
	;	9		
73	;	36	;	27
	;	45	;	9

Remarques à propos de ces suites :

- « Elles finissent toutes par 9 »
- « Ce sont des nombres de la table de 9 »
- « La somme des chiffres des nombres est 9 »
- « Ce sont des multiples de 9 »

On peut remarquer des enjeux d'apprentissages semblables à ceux qui apparaissent lorsqu'on applique l'algorithme aux nombres à trois chiffres. En particulier la sensibilisation au problème de la formulation des remarques et à la généralisation des observations réalisées est à nouveau envisageable et une étude exhaustive des cas peut

confirmer les observations. Néanmoins les élèves ont ici l'occasion de travailler et d'approfondir plus particulièrement leurs connaissances sur des nombres plus familiers, nombres à deux chiffres, multiples de 9 etc.

3^{ème} étape : recherche d'un programme plus facile pour calculer la suite des nombres.

La situation avec les nombres à deux chiffres est encore mise à profit pour instiller à nouveau l'idée qu'un programme plus facile que le programme initial existe. Pour cela je montre à nouveau que je peux réciter la suite des nombres obtenus à partir du nombre initial choisi par les élèves et ceci quasi instantanément. Dans cette phase, j'invite les élèves à chercher le procédé qui permet de trouver la suite très rapidement sans recourir au programme initial. Les élèves tâtonnent et proposent des procédés qui sont discutés par la classe. Très souvent, ils donnent à nouveau des procédés qui ne sont valables que sur une partie d'une suite ou seulement sur certaines suites. Ils trouvent plus difficilement un procédé qui s'applique de façon générale. En fait, ils cherchent surtout des procédés basés sur l'obtention séparée de chaque chiffre des nombres de la suite. Certains de ces procédés sont valables. Comme par exemple :

- *pour trouver le premier chiffre (celui des dizaines), je calcule la différence des deux chiffres du nombre initial et je diminue le résultat de 1 ;*
- *pour trouver le deuxième chiffre (celui des unités), je calcule la différence de 9 et du premier chiffre.*

Plus rarement, ils cherchent des procédés qui permettent de trouver globalement le nombre de la suite. En fait, il arrive souvent que la recherche piétine. Pour débloquer la situation, on peut, sans donner la solution, rappeler que les nombres obtenus dans les suites sont des multiples de 9 et demander de repérer quels sont les multiples de 9 correspondants aux différents éléments d'une suite. Par exemple pour la suite issue de 53, à savoir 18, 63, 27, 45 et 9, on repère : $18=2 \times 9$, $63=7 \times 9$, $27=3 \times 9$, $45=5 \times 9$ et $9=1 \times 9$. Une fois que ce repérage figure au tableau, les élèves trouvent assez aisément le procédé. On leur demande de le rédiger sous forme de programme de calcul. En voici un exemple :

- *calculer la différence des deux chiffres du nombre initial ;*
- *multiplier cette différence par 9.*

Se pose alors la question de la validation de ces procédés. Les élèves auraient tendance à continuer à les entériner sans discussion. On peut alors leur rappeler que certains des procédés proposés précédemment ne se sont révélés que partiellement valables. Pour continuer le travail avec les élèves, la nécessité d'une validation étant partagée, le professeur peut alors envisager trois possibilités.

La première, non satisfaisante, est de dire qu'ils sont validés par des outils mathématiques qui ne sont pas encore à leur portée.

La deuxième, en revanche est à la portée de tous les élèves. Comme il y a un nombre raisonnable de cas à envisager (il y en a 82), une vérification exhaustive est à nouveau possible. La détermination des cas à envisager est déjà une tâche intéressante pour les élèves. Le travail peut ensuite être partagé dans la classe.

La troisième possibilité est de faire chercher aux élèves des preuves autres que des vérifications exhaustives. Nous entrons ici dans des démarches explicatives qui continuent à dévoiler les mystères de l'algorithme de Kaprekar. Mais ces démarches ne sont pas à la portée de l'ensemble des élèves et demande prudence de la part du

professeur. Mais très tôt néanmoins, on peut observer quelques propositions pertinentes, comme celle que nous allons maintenant évoquer à propos d'un algorithme qu'on trouve et qu'on justifie en se centrant sur l'algorithme de la soustraction posée à partir d'un exemple numérique précis comme ici à propos de 72-27 :

$$\begin{array}{r} 7 \quad \quad 12 \\ - 12 \quad \quad 7 \\ \hline 7-1-2 \quad 2+10-7 \end{array}$$

Tout comme on a pu montrer que dans le cas de l'algorithme appliqué aux nombres à trois chiffres, le chiffre des dizaines est toujours 9, on peut accéder ici à une explication en prenant conscience d'invariants en jeu dans la soustraction posée. En effet, quels que soient les exemples envisagés, la nécessité d'augmenter le chiffre des unités du nombre le plus grand d'une dizaine et de répercuter ce fait sur le chiffre des dizaines du nombre le plus petit en l'augmentant de 1 (qui représente une dizaine) se retrouve dans tous les cas à cause des contraintes fixées par l'algorithme de Kaprekar initial. Chaque fois en effet, puisque pour obtenir le nombre le plus grand, on relègue nécessairement le chiffre le plus petit au rang des unités et pour avoir le nombre le plus petit on relègue nécessairement le chiffre le plus grand au rang des unités. Il s'agit alors de traduire les effets de ces constatations sur l'algorithme de la soustraction posée en un programme de calcul qui est ici :

- pour trouver le chiffre des unités, j'ajoute 10 au plus petit des chiffres du nombre initial et je calcule la différence du résultat obtenu avec le plus grand des deux chiffres du nombre initial ;
- pour trouver le chiffre des dizaines, je calcule la différence des deux chiffres du nombre initial et je diminue le résultat de 1.

L'aventure avec des élèves de cycle 3 ou de début de collège peut s'arrêter ici, après être néanmoins revenu au cas de l'application de l'algorithme de Kaprekar aux nombres à trois chiffres et trouver alors de nouvelles remarques à faire ou de nouveaux programmes remplaçant l'algorithme initial (laissons au soin du lecteur cette petite recherche).

III – 3.3 Prolongements dans les classes ultérieures.

Le lecteur aura constaté que nous avons en fin de compte basculé dans une démarche de généralisation qui est au seuil de l'entrée dans le monde algébrique. De quoi reprendre et prolonger l'aventure avec des élèves plus avancés dans leur scolarité ! En effet, on peut aussi avoir l'idée de formaliser la situation en remplaçant les variables de la situation, à savoir les chiffres des nombres par des lettres, a et b par exemple. Cette formalisation permet de trouver la valeur de chacun des chiffres du nombre obtenu comme l'indique le schéma suivant :

$$\begin{array}{r} a \quad \quad 1b \\ - 1b \quad \quad a \\ \hline a-1-b \quad b+10-a \end{array}$$

Remarque : dans cette formalisation nous supposons évidemment que $a > b$ et donc que ab est le nombre le plus grand possible obtenu à partir des chiffres a et b . Ceci ne se fait pas d'emblée par les élèves, et même beaucoup d'étudiants se demandent s'il ne

faut pas considérer les deux cas $a > b$ et $b > a$ à partir du nombre initial ab choisi avant de comprendre qu'on aura considéré l'ensemble des cas en supposant a priori dans la formalisation algébrique de l'algorithme que $a > b$.

Malgré cette difficulté au départ, l'entrée dans ce monde algébrique fournit évidemment des outils puissants pour valider les programmes remplaçant l'algorithme initial ou pour trouver de nouveaux programmes. On se focalise ici sur l'algorithme de l'obtention séparée de chaque chiffre du nombre obtenu. Mais l'hétérogénéité des écritures utilisées pour formaliser la situation et la tentative de l'homogénéiser permettent d'envisager des issues intéressantes. En effet lorsqu'on écrit les nombres sous la forme ab et ba et le résultat obtenu sous la forme $\boxed{a-1-b}$ $\boxed{b+10-a}$, les lettres a et b ont des statuts différents. Dans le premier cas (ab et ba), elles désignent les chiffres des dizaines et des unités : il ne s'agit pas à proprement parler d'une écriture algébrique classique qui désignerait le produit des nombres a et b . Dans $(a-1-b)$ et $(b+10-a)$, en revanche, elles désignent les nombres a et b . Lorsqu'on essaye de donner la valeur du nombre dont le chiffre des dizaines est $\boxed{a-1-b}$ et le chiffre des unités est $\boxed{b+10-a}$ en fonction des nombres a et b , on est amené à écrire qu'il s'agit de $10(a-1-b)+(b+10-a)$. Une réduction, puis une factorisation de cette expression algébrique aboutit alors à $9(a-b)$ qui est une confirmation du programme qui se focalise non pas sur l'obtention de chaque chiffre du résultat de la soustraction mais sur le résultat comme nombre considéré globalement et non comme un assemblage de deux chiffres :

- calculer la différence des deux chiffres du nombre initial ;
- multiplier cette différence par 9.

De façon encore plus directe on a également une validation du procédé en transformant l'écriture ab désignant le nombre dont le chiffre des dizaines est a et le chiffre des unités b , en $10a + b$ et de ba en $10b + a$. En effet, la différence s'écrit alors $(10a + b) - (10b + a)$ qui donne $9(a-b)$.

Mais rappelons que nous sommes ici entrés dans un domaine où les démarches ne sont pas en général à la portée de jeunes élèves. L'expérience montre que dans les années ultérieures du collège et du lycée, de plus en plus d'élèves peuvent s'y engager. Il reste aux professeurs de déterminer les moments dans la scolarité de leurs élèves où cette aventure peut être tentée, aventure qui favorise et justifie l'entrée dans le monde algébrique.

Je finirai cette présentation des prolongements possibles en évoquant une autre dimension qui a été pensée par certains participants à l'atelier. Il s'agit d'une prise en compte des outils de calculs (calculatrices) ou de programmations qui pourrait accompagner, étayer, développer, enrichir les activités présentées. Ce point bien prometteur n'a pas été développé davantage dans l'atelier mais pourrait faire l'objet d'une nouvelle réflexion à propos de tâches à proposer aux élèves.

IV APPORTS DANS LE CADRE DE LA FORMATION DE FUTURS PROFESSEURS

IV – 1 Une situation d’homologie

Les participants de l’atelier et moi-même ayant eu l’occasion de vivre les développements que nous venons de décrire, en se projetant à la fois comme élèves, comme futurs professeurs et étant formateurs, nous avons pu élaborer ensemble progressivement un bilan des apports de cette situation dans le cadre de la formation des futurs professeurs. En fait il s’agit d’une situation d’homologie (au sens d’Houdement-Kuzniak, 1993) qui permet d’initier les futurs professeurs :

- à certains enjeux d’apprentissages pour les élèves de cycle 3 ou de collège ou chez eux-mêmes (en particulier pour les étudiants n’ayant pas un cursus d’études scientifiques)
- aux finalités de l’enseignement des mathématiques dans le cadre de la scolarité obligatoire
- à la théorie des situations et à certains phénomènes didactiques qu’elle décrit.

Passons en revue ces différentes dimensions.

IV – 2 Prise de conscience d’enjeux et d’obstacles dans les apprentissages

Nous soulignons ici principalement ce qui surprend en général les étudiants se destinant au professorat.

Il s’agit d’abord de savoirs concernant le domaine numérique et aussi le domaine algébrique :

- les principes et les sens des algorithmes utilisés pour poser une soustraction. C’est l’occasion de rappeler et distinguer les différentes techniques opératoires : la technique par emprunt, la technique des écarts constants, l’addition à trou.
- le fait que le même chiffre peut revêtir des significations différentes. Ainsi dans la technique de l’écart constant le 1 et le 3 figurants dans la colonne des unités forment treize alors que la même combinaison de signes dans la colonne des dizaines signifie 1+3 (que les maîtres demandent d’ailleurs parfois d’écrire non pas $_{1}3$ mais 3_{1}). Les étudiants mesurent ainsi la complexité des algorithmes des calculs posés :

$$\begin{array}{r} 7 \quad {}_13 \\ - \quad {}_13 \quad 7 \\ \hline 3 \quad 6 \end{array}$$

- les appréhensions différentes possibles par les élèves (et par eux-mêmes) des nombres écrits, soit comme des assemblages de chiffres ($36 =$ un 3 et un 6), soit comme des nombres (*trente-six*)
- la différence entre nombre et écriture des nombres à l’aide de chiffres
- les principes de la numération décimale : $36 = \text{trente-six} = 3 \text{ dizaines et } 6 \text{ unités} = 3 \times 10 + 6$. Il s’agit souvent là d’une redécouverte
- de façon plus générale la coexistence en mathématiques de différents cadres (numériques, algébriques) et de différents registres d’écriture et de traitements et leurs puissances. C’est particulièrement à l’occasion des prolongements de l’activité vers des horizons algébriques que s’opèrent ces prises de conscience : par exemple lorsqu’on se permet d’écrire un nombre à deux chiffres sous la forme générale ab puis $10a+b$. Une question qui trouvera difficilement réponse dans un des registres d’écriture se traitera plus facilement lorsqu’on aura traduit le problème dans un

autre. Les étudiants sont ainsi initiés au geste qui consiste à choisir le registre pertinent ou aisé pour résoudre une question (Duval, 1995).

Il s'agit d'autre part d'une activité qui permet d'installer chez les étudiants des questions et aussi, comme on a pu le constater, des éléments de réponses, à propos du raisonnement en mathématique :

- qu'est ce qu'une preuve ? Y a-t-il différents niveaux acceptables de preuves ?
- par quoi peut-on être convaincu ? Différence entre conviction d'ordre probabiliste et certitude ?
- est-ce que « convaincre » est différent de « prouver » ?
- quel est le statut d'un exemple ? Peut-il être « générique » ? (repérage d'invariants dans les exemples numériques)
- y a-t-il différentes façons de prouver en mathématiques ? Y a-t-il des manières de prouver qui ne nécessitent pas forcément l'application de théorèmes établis (preuve par l'étude exhaustive des cas)
- quelle est la place des contres exemples dans les processus de raisonnement et dans le chemin vers la prise de conscience de la nécessité de dépasser une constatation pour lui donner un statut de conjecture ?

Cette activité permet d'autre part, de développer des compétences dépassant le cadre des mathématiques. Les étudiants peuvent prendre conscience que les disciplines ne sont pas isolées mais sont en relation. Dans les activités décrites, les élèves sont en effet très vite amenés à développer leur sens de l'observation par l'organisation des résultats, le repérage et le tri des informations en vue d'émettre des remarques. Nous sommes là dans le domaine du développement de compétences générales bien utiles au-delà du domaine mathématique. La mise au point de la formulation des remarques, la lecture et la compréhension du programme de calcul initial et par la suite la rédaction d'un nouveau programme remplaçant le précédent confortent la maîtrise de la langue et de ses différentes fonctions : description, programmation....

IV – 3 Prise de conscience des finalités de l'enseignement des mathématiques

La prise de conscience par les étudiants des enjeux et des obstacles dans les apprentissages est pour moi l'occasion de faire avec eux un point sur la question essentielle des finalités de l'enseignement des mathématiques dans le cadre de la scolarité obligatoire. Préalablement à toutes les activités autour de l'algorithme de Kaprekar, je demande aux étudiants d'écrire pourquoi enseigner les mathématiques. Dans une synthèse menée collectivement les propositions sont classées et je propose alors aussi comme outil de classement la proposition de G. Vergnaud (1987). Il distingue :

- la transmission d'un patrimoine scientifique (les connaissances en mathématiques en l'occurrence)
- le développement de compétences au service de la vie quotidienne, d'autres disciplines et de professions
- le développement de la conceptualisation du réel (pour ma part je parle de la pensée des individus).

On a là un repérage possible des missions de l'école : mission de transmission de l'héritage de l'humanité, mission d'insertion sociale, mission de développement des

individus. Le fait que les étudiants aient pratiqué les activités liées à l'algorithme de Kaprekar me permet de leur demander de renseigner cette classification en se rapportant à ces activités. Ils ont ainsi l'occasion de formuler plus précisément des compétences et des savoirs en jeu dans cette situation et de les relier aux principales finalités. Voici quelques exemples : la notion d'écriture décimale des nombres apparaît comme un legs des humains à transmettre ; l'accès à la notion de conjecture à prouver fait partie du développement de la pensée ; la capacité de concevoir et de formuler des programmes se rapporte aussi au développement de la maîtrise de la langue.

Avec ce travail sur les finalités, c'est aussi l'occasion de prendre conscience de la difficulté d'enseigner les mathématiques qui est analysée par Vergnaud, à savoir, comment relier les trois pôles ? Par exemple, à quel moment du développement de la pensée des élèves peut-on les initier à la numération, aux outils algébriques, à la géométrie déductive ?

IV – 4 Initiation à la théorie des situations didactiques.

Que ce soit pour des élèves ou des étudiants, l'algorithme de Kaprekar crée très rapidement un corpus très riche de résultats qui permet d'émettre des observations qui sont formulées, discutées et améliorées au sein de la classe ou du groupe. Ces observations peuvent se transformer en conjectures. Ces conjectures donnent lieu à des activités de validation. Les étudiants ont ainsi l'occasion de vivre et de pointer des situations d'actions, de formulations et de validations proposées par Guy Brousseau (1972) pour décrire les processus d'acquisition de connaissance en mathématique.

Dans ce cadre, une première sensibilisation à la notion de contrat didactique peut être réalisée à partir de l'analyse de certains événements vécus dans le groupe ou rapportés par le formateur. Ainsi à partir de la tâche initiale qui est d'effectuer le programme de calcul proposé les attitudes des étudiants sont très différentes. Certains arrêtent leur activité dès le premier exemple lorsqu'ils tombent sur 495. D'autres continuent à prospecter et essaient pour d'autres nombres. Il en est de même pour les élèves dont certains s'arrêtent immédiatement, très satisfaits, parce qu'ils ont choisi au départ un nombre à trois chiffres identiques et s'écrient : « *j'ai fini le travail !* ». L'algorithme de Kaprekar est effectivement un support intéressant pour inciter à poursuivre une recherche. Mais cela ne va pas de soi pour tous les individus. On peut aussi attirer l'attention sur des attitudes très différentes lorsque les élèves ou les étudiants tombent sur la question qui se pose à propos de l'algorithme appliqué aux nombres à deux chiffres : « *Que faire lorsqu'on tombe sur 9 ?* ». Certains en font uniquement une question de règle à préciser et d'autres un champ de prospection. A travers ces différents exemples vécus ou rapportés, il est ainsi possible de sensibiliser les étudiants à la différence entre les enjeux qu'attribuent les apprenants aux tâches qui leur sont proposées.

Il est aussi possible d'orienter à partir de là les étudiants qui en auraient le goût et qui plus tard pourraient rejoindre la cohorte des chercheurs en didactique des mathématiques, vers un approfondissement de leurs connaissances des travaux de G. Brousseau et en particulier vers son introduction à la théorie des situations didactiques où il s'appuie sur la situation dite de la « *Course à 20* » pour analyser et modéliser les situations d'enseignement à partir des échanges entre les élèves, le professeur et le milieu (Brousseau, 1998, pp25-43).

V – CONCLUSION

Entre les extrêmes d'une utilisation assez réduite qui consisterait uniquement à en exhiber la curiosité et qui ne serait que l'occasion de s'exercer à la technique de la soustraction posée d'une part et la question non triviale du pourquoi de la stabilisation des suites d'autre part, l'algorithme de Kaprekar se révèle bien riche de potentialités d'apprentissages et de formation pour les futurs professeurs d'école. L'analyse de ces potentialités dans le cadre de l'atelier a permis d'en tracer les grandes lignes de force et aussi d'entrevoir quelques prolongements ou variantes qui nécessiteraient des réflexions et expérimentations supplémentaires : utilisation des outils de programmations ou de calculs et extension des observations aux bases autres que la base 10 par exemple.

De façon plus distanciée et pour se situer dans le thème du colloque, on peut constater qu'on a là un matériau qui permet de développer des démarches d'observations, d'expérimentations puis de validations mathématiques tant pour des élèves pour développer leurs apprentissages que pour la formation des professeurs. On peut remarquer qu'il ne s'agit pas ici d'une situation qui s'appuie sur « le réel » ou qui part d'un environnement quotidien extra scolaire des élèves : on est d'emblée sur le terrain mathématique, tout comme par exemple pour la « Course à 20 » (Brousseau, 1998). Mais on peut aussi remarquer que ce support permet de développer des compétences utiles en dehors de la discipline mathématique. Ces remarques sont donc une invitation à poursuivre et à compléter la réflexion initiée par le colloque : « Quelles mathématiques à l'Ecole ? ».

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU G. (1972) Processus de mathématisation, *Bulletin APMEP*, **282**, 418-429.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, éditions, Grenoble.

CHAUVAT G. (1980) Arithmétique élémentaire en classe de cinquième, *Plot*, **12**, 10-13.

DE BLOCK-DOCK C. (1994) Modalités de la pensée mathématique d'élèves de douze ans devant des problèmes de pavage, *Educational Studies in Mathematics*, **27**, 165-189.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.

HOUEMENT C., KUZNIAK A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **16/3**, 289-322.

IREM DE STRASBOURG (1986) *Mathématiques 6^{ème}*, Collection collèges dirigée par F.Mollet-Petit, Istra, Strasbourg.

VERGNAUD G. (1987) Réflexions sur les finalités de l'Enseignement des Mathématiques, *Gazette des mathématiciens*, **32**, 54-61.