

LA MODELISATION DANS UNE PERSPECTIVE DE FORMATION ET D'ENSEIGNEMENT

Robert ADJIAGE

MCF, IUFM d'Alsace

LISEC EA 2310

robert.adjiage@alsace.iufm.fr

Richard CABASSUT

PIUFM, IUFM d'Alsace

Didirem Paris 7

richard.cabassut@alsace.iufm.fr

Résumé

Le thème traité portera sur des tâches de modélisation et sur leur scénarisation dans un cursus d'enseignement à l'école primaire et de formation des professeurs des écoles.

Dans un premier temps, on introduira les principaux concepts et enjeux des tâches de modélisation dans une perspective d'enseignement, de formation et d'apprentissage (Blum, 2004). On rappellera le contexte institutionnel (PISA, recommandations du parlement européen, socle commun...) qui a contribué à mettre au premier plan les tâches de modélisation. On apportera enfin quelques commentaires personnels. Dans un deuxième temps, les participants seront invités à analyser, en groupes, différentes tâches de modélisation. Enfin, dans un troisième temps, les différentes productions seront discutées collectivement. Pour conclure, on invitera les participants à préciser les incontournables d'un scénario de formation continue à la modélisation.

Après un exposé théorique sur le sujet, les participants à cet atelier sont invités à résoudre des problèmes de modélisation puis à s'interroger sur leur pertinence à figurer dans un cursus d'enseignement à l'école primaire et de formation, initiale et continuée, des professeurs des écoles. Au-delà de l'analyse de ces tâches et de leur scénarisation, les participants sont amenés à préciser leur conception de la modélisation et sa place dans l'enseignement à l'école et en formation.

I – CONCEPTS ET ENJEUX DES TACHES DE MODELISATION

Cette première partie est menée sous forme d'exposé interactif. Un cadre conceptuel, essentiellement issu des travaux d'ICMI 2004, est présenté aux participants. Ce cadre constitue une base de discussion avec l'ensemble du groupe. Les travaux personnels des animateurs, engagés dans un projet européen sur le sujet (COMENIUS LEMA), ainsi que les remarques et analyses des participants, relativisent les conceptions issues d'ICMI. La chaîne de valorisation de la modélisation comme moyen privilégié de « faire » des mathématiques et d'évaluer les acquisitions est précisé à travers les recommandations européennes et PISA.

I – 1 Les sources

Les documents auxquels se réfèrent les animateurs sont brièvement présentés et commentés. Quatre sources sont examinées.

- Discussion Document ICMI (International Commission on Mathematical Instruction).
- Ressources COMENIUS LEMA (Learning and Education in and through Modelling and Applications), projet européen visant à développer un cours de formation des maîtres à la modélisation.
- Sites officiels (OCDE-PISA, Parlement Européen, MEN...).
- Publications et travaux personnels des animateurs.

I – 2 Premières définitions (ICMI 2004)

- La modélisation s'appuie plutôt sur un processus menant de la réalité aux mathématiques.
- L'application s'appuie plutôt sur un processus menant des mathématiques à la réalité.

I – 3 Chaîne de valorisation

La modélisation est un sujet d'importance, pris en compte et étudié par de nombreux didacticiens, et présent dans diverses conférences internationales depuis plusieurs décennies. Citons par exemple : Freudenthal (années 70) ; Niss, 1987 ; Blum et al. 1989 ; Galbraith et al., 1990 ; Lesh et al., 2002 ; Comité scientifique des IREM, 2003. On assiste néanmoins à sa promotion accélérée au cours des dernières années. Que s'est-il passé ? On trouve au départ de ce processus une demande du ministère de l'Education danois (projet KOM, 2002) de réorganisation des curricula scolaires. Le projet KOM a été piloté par M. Niss. Il s'appuie sur deux idées directrices :

- Dans une société de plus en plus dépendante de modèles mathématiques, donner aux élèves les moyens mathématiques de comprendre le monde pour développer leur esprit citoyen. D'où le centrage sur l'acquisition de compétences plus que sur la transmission de connaissances
- Pédagogie du projet : enseigner les mathématiques comme réponse à un besoin issu des exigences du monde.

Suite à une demande de l'OCDE, M. Niss pilotera la partie mathématique du projet PISA d'évaluations internationales. Sa conception de l'enseignement des mathématiques a été déterminante dans les choix qui ont présidé à la sélection des items de cette évaluation. Ainsi, la compétence mathématique de base mise au premier plan par PISA (OCDE, 2006, p. 73) est « la capacité d'un individu à identifier, comprendre, le rôle que les mathématiques jouent dans le monde... d'utiliser les mathématiques... en tant que citoyen constructif, concerné et réflexif. ». Le parlement européen (2006, Annexe p.7) a repris cette option à son compte en émettant des recommandations parmi lesquelles on trouve en bonne place : « La compétence mathématique est l'aptitude à développer et appliquer un raisonnement mathématique en vue de résoudre divers

problèmes de la vie quotidienne ». Les résultats obtenus par leurs élèves à PISA, jugés insatisfaisants par certaines nations européennes majeures, pourraient avoir eu un effet non négligeable sur la teneur de ces recommandations. Enfin, en France, le socle commun dont le préambule mentionne qu'il « se réfère... aux évaluations internationales, notamment... PISA. », précise (2006, pp. 9-10) : « La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité. ». La modélisation apparaît donc comme un sujet d'étude didactique sérieuse, que la conjoncture a néanmoins propulsé sur le devant de la scène. L'impact de PISA, qui n'est qu'une mesure parmi d'autres de la performance des élèves, semble avoir été déterminant dans cette promotion.

I – 4 Processus de modélisation

Le « *discussion document* » d'ICMI 2004 précise les différentes phases du processus de modélisation que nous déclinons ci-dessous :

- Point de départ, une situation du monde réel ;
- On l'épure, on la structure, on la précise ;
- Formulation d'un modèle qui est toujours ancré dans le monde réel ;
- Mathématisation :
 - Soit saisie d'un modèle mathématique disponible ;
 - Soit élaboration d'un modèle mathématique adéquat ;
- Traitement mathématique avec production de résultats ;
- Interprétation des résultats en fonction de la situation réelle d'origine ;
- Validation du modèle par la pertinence des résultats ;
- Le cas échéant, reprise de tout le processus avec un modèle rectifié ou tout à fait différent ;
- Le problème d'origine est reformulé et communiqué.

Nous y retrouvons le solide ancrage dans le monde réel préconisé par la chaîne de valorisation. Ce qui est un choix, et non une nécessité de la définition d'un processus de modélisation. Rappelons que des acceptions plus larges ont été proposées, notamment au colloque de la COPIRELEM 2007 (voir par exemple Duperret ou Orange), que nous pourrions synthétiser par : modéliser, c'est substituer des choses (objets ou relations) à d'autres choses dans un but explicatif et/ou prédictif. « Les mathématiques ont-elles pour objet de « décrire » la réalité, ou ne se contentent-elles pas d'une action intellectuelle sur une réalité déjà abstraite ? » (Duperret, COPIRELEM, 2007).

I – 5 Thèmes d'étude

Le « *discussion document* » d'ICMI 2004 propose ensuite de délimiter le champ de recherche sur la modélisation. Il propose pour cela la définition générale d'un thème

d'étude (« *issue* ») comme surface d'un espace à deux dimensions : niveau scolaire x domaine (Figure 1), puis quatre perspectives (Figure 2) d'où il est possible d'examiner un thème d'étude, et enfin un cadre pour la formulation d'un thème d'étude décliné en un défi et un questionnement.

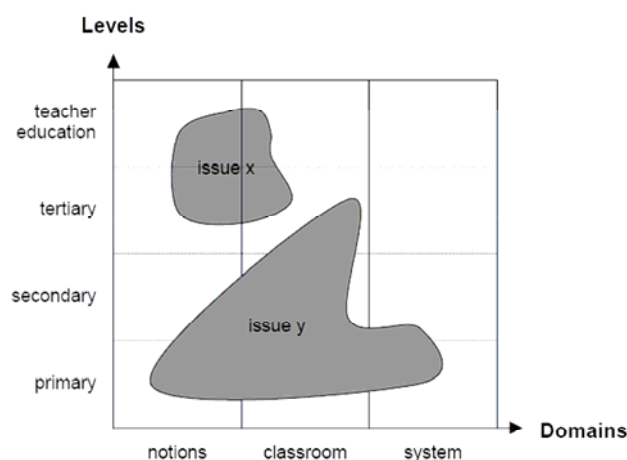


Figure 1: The "reality" of applications and modelling

Figure 1 (extraite de Blum, 2004)



Figure 2 (extraite de Blum, 2004)

Par exemple, le thème 1, épistémologie, se décline comme suit :

–**Défi** : caractériser l'activité d'applications/modélisation en termes de fondements, de ruptures, de continuités, d'obstacles...

–**Questionnement (extraits)**

- Quelles sont les composantes du processus de modélisation ?
- Quelles parties des mathématiques sont les moins susceptibles d'être représentées dans le champ de la modélisation et inversement ?
- Y a-t-il des caractéristiques communes aux champs de la modélisation et de la preuve ?
- Qu'est-ce que la généralisation et le transfert dans un travail inter-contextes ?

D'autres thèmes d'étude sont proposés parmi lesquels on trouve : Authenticité et familiarité, Redresser l'image des mathématiques, Curricula existants et à venir, Evaluations spécifiques des compétences et des programmes du champ de la modélisation.

Dans la partie II de l'atelier, les participants seront invités à rattacher les tâches de modélisation qui leur seront soumises à un des thèmes d'étude ci-dessus, à situer ces tâches dans l'espace de la Figure 1, et enfin à adopter successivement, dans leur analyse de tâche, le point de vue d'un enseignant du primaire puis d'un formateur de professeurs d'école.

I – 6 Quelques commentaires

La modélisation a été mise sur le devant de la scène au terme d'un processus de valorisation que nous avons rappelé en I-3. Une conséquence fâcheuse de ce processus est la tentation de définir des programmes d'enseignement à partir des standards de réussite à PISA. Dans ce schéma, l'enseignement ne vise plus l'acquisition de savoirs et savoir-faire structurés par l'épistémologie d'une discipline. Il vise l'acquisition de compétences destinées à rendre les élèves performants à PISA. Quant aux savoirs, ils risquent de se réduire à des moyens occasionnels d'acquérir de la compétence ! L'évaluation est alors au centre du processus d'enseignement au lieu d'en être à la sortie. La modélisation quant à elle, vue comme processus de mathématisation du réel, risque d'apparaître comme un simple maillon de ce dispositif.

Pour nous, un curriculum doit s'appuyer sur la cohérence et la cohésion mathématique de paliers qui structurent l'apprentissage en termes d'obstacles, de continuités et de ruptures. Dans le domaine numérique, on distingue ainsi quatre champs de connaissances/compétences qui ont été étudiés et continuent à l'être par les didacticiens.

–Etude des entiers : substitution des nombres aux quantités et opérations sur les nombres, formation de mots et de phrases mathématiques le long d'une ligne d'écriture.

–Etude des nombres rationnels comme rapports de **deux** entiers : nécessité de briser en **deux** la ligne d'écriture pour la formation des mots et des phrases mathématiques.

–Etude de l'algèbre : redésignation par des variables de quantités exprimées dans des registres numériques, verbaux, schématiques, autres... ; réduction du lexique par élimination de variables « redondantes » (expression de variables en fonction d'autres variables) ; formation et traitement d'expressions différentes mais référentiellement équivalentes (si $4x - 1 = 3 + x$, alors $3x = 4$).

–Etude des fonctions : introduction des objets-fonctions, apparition de nouvelles opérations (composition des fonctions) et de nouveaux traitements (limite, dérivation...) des phrases mathématiques.

Notre projet de formateurs est de regarder la modélisation comme un moyen parmi d'autres d'acquérir des connaissances/compétences dans un de ces quatre champs. Notre projet de chercheur est d'étudier les effets de l'introduction substantielle de tâches de modélisation dans l'enseignement.

Nous avons étudié toutes sortes de tâches de modélisation, pour la plupart élaborées et expérimentées par des chercheurs et formateurs européens. Ces tâches ont pour caractéristique principale d'être très ouvertes (pas ou très peu de données numériques) et toutes ancrées dans le monde réel. Elles débouchent donc sur un recueil de données qu'il s'agit de traiter en mobilisant un modèle mathématique éprouvé, le plus fréquent étant celui de la proportionnalité. Très peu de tâches nécessitent l'élaboration d'un modèle mathématique pas encore abordé.

Nous avons proposé à des élèves de différents niveaux de l'école élémentaire ces tâches de modélisation. Nos premières conclusions sont que :

- elles dynamisent les classes ;
- elles fonctionnent à tout le moins comme d'excellents révélateurs de déficit d'apprentissage et facilitent les remédiations en offrant des références contextuelles ;
- elles déstabilisent l'enseignant et tendent à augmenter son interventionnisme, parfois de façon intempestive, ce qui est le contraire du but recherché ! D'où la nécessité d'une formation à la modélisation ;
- pour fonctionner comme moyen d'acquérir des connaissances / compétences, ces tâches devraient déboucher sur l'élaboration d'un modèle mathématique et pas seulement sur l'application d'un modèle déjà disponible. D'où la nécessité de concevoir de nouvelles tâches de modélisation intégrant cette contrainte.

La partie II « travaux pratiques » de l'atelier sollicite la contribution du groupe pour prolonger l'analyse de tâches de modélisation expérimentées et évaluer leur pertinence à être intégrées à un enseignement ou une formation.

II – ANALYSE PAR GROUPES DE TACHES DE MODELISATION ET DISCUSSION

II – 1 Tâches de modélisation à analyser

Différentes tâches sont proposées à l'analyse que l'on pourra relier aux thèmes d'étude abordés dans la partie précédente, et notamment l'authenticité, la faisabilité à un niveau donné, la validation des résultats des élèves, les compétences sollicitées et de leur évaluation, la nécessité pour les élèves d'élaborer un modèle mathématique ou de saisir un modèle disponible, l'épistémologie, l'intention de « redresser » l'image des maths, les principes pédagogiques adéquats à un enseignement des applications ou de la modélisation. On pourra adopter successivement le point de vue d'un enseignant du primaire puis d'un formateur de professeurs d'école.

II – 1.1 Le géant

Quelle est la taille approchée de la silhouette, dont on peut voir seulement un pied?



Cette photo a été prise dans un parc de loisirs.

II – 1.2 Le bouchon

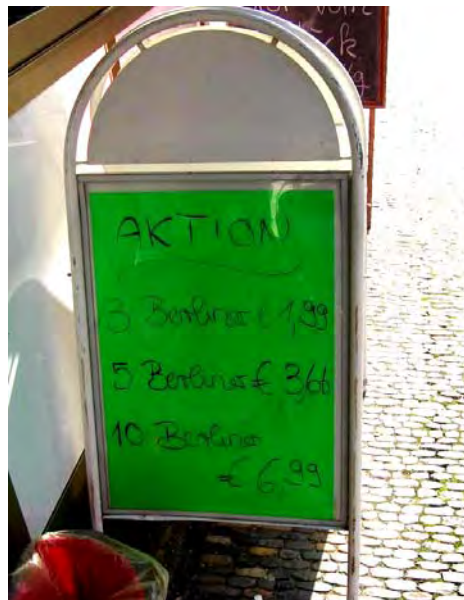
Sur l'autoroute, à l'entrée de Strasbourg, il y a un accident juste avant la sortie Baggersee. La circulation est bloquée entre La Vigie et Baggersee. Combien de véhicules sont bloqués?

II – 1.3 La course

Dans la cour de récréation il y a deux arbres, un petit et un grand, et un mur. On organise une course : chaque élève part du petit arbre; il va toucher le mur; puis il doit toucher le grand arbre ; enfin il retourne toucher le petit arbre. Où toucher le mur pour être le plus rapide?

II – 1.4 Les Berliner

Anne est en vacances dans la Forêt Noire. Elle trouve une offre spéciale pour un type de pâtisserie appelée « Berliner » comme vous pouvez le voir sur la photo. Le boulanger propose le gâteau à 0,80€ l'unité. Si vous étiez le boulanger, auriez-vous proposé les mêmes prix sur l'affiche?



II – 1.4 Le rebond

A quelle hauteur rebondit une balle de tennis, si on la lâche d'une hauteur de 10 mètres?

II – 2 Analyse des tâches et discussion

Voici un rapide résumé des échanges qui ont eu lieu dans l'atelier, concernant l'analyse des tâches de modélisation des exemples précédents.

Pour la tâche du géant, le support semble authentique. En revanche, la question posée représente-t-elle un « vrai » problème, en comparaison par exemple avec la situation du puzzle de Brousseau ? Différentes compétences semblent sollicitées relatives à la proportionnalité ou aux approximations. La mise en œuvre paraît possible au CM1. Mais cette situation est-elle un bon outil pour l'apprentissage de la proportionnalité ? N'est-elle pas trop riche ? Le risque n'est-il pas de la prendre comme situation d'apprentissage ?

Pour cette tâche, le but principal n'est pas la résolution de problème ou l'apprentissage d'une notion, mais prioritairement apprendre à modéliser le réel. Mais peut-on enseigner la modélisation ? La modélisation est-elle un but en soi ou n'est-elle qu'un moyen de savoir ?

Pour la tâche des Berliner, l'authenticité dépend du niveau des élèves, du contexte social, de la mise en situation pour l'enseignement, de la formulation de l'énoncé. Ici selon qu'on se place du point de vue du boulanger ou de celui du client, l'approche est différente.

Pour réaliser cette tâche, il faut combiner un savoir mathématique (par exemple sur la proportionnalité) et un savoir de la vie quotidienne (le prix payé est en général proportionnel à la quantité achetée). Cependant le modèle de la proportionnalité n'est pas toujours le modèle dominant dans la vie quotidienne. Ici le boulanger a peut-être appliqué des lois du commerce qui indiquent qu'il y a des seuils psychologiques de prix qui attirent plus le client que les règles de proportionnalité sur le prix payé.

L'enseignant doit scénariser l'articulation des savoirs mathématiques et de la vie quotidienne. Mais il peut y avoir différentes conceptualisations de la réalité et les mathématiques ne se construisent pas uniquement en confrontant les élèves à des situations « authentiques ».

Dans la tâche du rebond, la validation du modèle de la proportionnalité rappelle celle des sciences expérimentales. On observe deux sortes de modèles : un modèle mathématique à chercher dans le répertoire des modèles mathématiques, et un modèle explicatif de cette situation, construit pour résoudre le problème. On observe que la vérification, possible dans la tâche du rebond, n'est pas possible dans la tâche du géant. Cependant former à la modélisation, ce n'est pas enseigner le syncrétisme physique-réalité.

Pour la tâche de la course, on remarque qu'elle est dangereuse à faire réaliser par des élèves qui doivent courir en direction d'un mur. La vitesse est un élément perturbateur. Les connaissances mathématiques en jeu sont relatives à la symétrie axiale et à l'inégalité triangulaire. Au niveau du cycle 3, est-il souhaitable de poser ce problème qui paraît difficile à comprendre? La situation apparaît bien lourde au niveau heuristique. Quel modèle mathématique permet de comprendre la notion de plus courte distance à l'école primaire? N'est-ce pas une situation pseudo-réelle, bien dans la tradition française ? Un des intérêts est de pouvoir invalider des faux modèles.

III – CONCLUSION

Le temps manquant, il n'a pas été possible de développer le projet Lema et l'atelier s'est conclu sur le questionnement suivant : Quels sont les incontournables d'un scénario de formation continue à la modélisation ?

Différentes propositions ont été discutées. Nous en donnons un bref aperçu ci-dessous.

–Pour proposer un scénario de formation, il convient que le formateur ait choisi sa définition de la modélisation et qu'il s'y tienne.

–Pour un problème donné, il convient que formateur et formé aient conscience que plusieurs modélisations sont possibles et que tout processus de traitement du problème passe par un choix entre ces possibles.

–Les formés doivent traiter eux-mêmes les problèmes de modélisation qu'ils proposeront à leurs élèves.

–Un formé doit percevoir qu'un objet mathématique peut être considéré tantôt comme indépendant de la réalité, tantôt comme susceptible d'interpréter la réalité.

–Il convient que l'élève dispose d'une base de modèles mathématiques pouvant avoir été acquis à travers des activités de modélisation fonctionnant comme situation-problème.

–Un modèle peut être vu comme la forme opérationnelle d’objets mathématiques et des traitements associés. Cette définition ne préjuge en rien de l’ancrage de ces derniers : réel tangible, domaine mathématique ...

Bibliographie

BLUM W. (2004) ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. Educational Studies in Mathematics. Volume 51, N° 1-2. <http://www.springerlink.com/content/p11244802942w921/>

BOEN (2006) Socle commun de connaissances et de compétences, *bulletin officiel de l'éducation nationale* n° 29 du 20 juillet 2006.

CABASSUT R. (2006) Exemples de modélisation à l'école primaire allemande : quels enjeux pour la formation des maîtres? in *Actes su 24^e colloque Copirelem*, Dourdan, 119-120

KUZNIAK A. (2006) Diversité des mathématiques enseignées « ici et ailleurs » , in *Actes du 23^e colloque Copirelem*, Strasbourg, 47-66.

LEMA Learning and Education in and through Modelling and Application
<http://www.lemma-project.org>

MAASS K. (2005) “Barriers and Opportunities for the Integration of modelling in Mathematics Classes- Results of an Empirical Study”. *Teaching Mathematics and its Applications* Vol 24 61-74.

OCDE (2006), *Assessing scientific, reading, and mathematical literacy*,
<http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/63/35/37464175.pdf>

PARLEMENT EUROPÉEN (2006) *Compétences clés pour l'éducation et la formation tout au long de la vie*, <http://www.europarl.europa.eu/sides/getDoc.do?pubRef=-//EP//NONSGML+TA+P6-TA-2006-0365+0+DOC+PDF+V0//FR>

PETER-KOOP A. (2002). Real-world problem solving in small Groups : Interaction patterns of third and fourth graders. In B.Barton, C. Irwin, M. Pfannkuch, & M. O. J. Thomas (Eds.), *Mathematics education in the South Pacific* (Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Research Group of Australasia, Auckland, pp. 559- 566). Sydney: MERGA.

MINISTERE de l'EDUCATION (2006) *Le socle commun des connaissances et des compétences*, Direction Générale de l'enseignement scolaire,
<http://media.education.gouv.fr/file/51/3/3513.pdf>