LE FICHIER « ÉVARISTE-ÉCOLE »

Nicole TOUSSAINT
nicoletoussaint@wanadoo.fr

Résumé
Le fichier « Evariste-Ecole » est un recueil de problèmes issus de différentes compétitions mathématiques et il constitue, à ce titre, une réserve de problèmes destinés à des élèves de cycle 2 et de cycle 3. Ces problèmes entrent tout à fait dans la rubrique des « Problèmes pour chercher » du document d'accompagnement des programmes de 2002 de l'école primaire.

Les documents d'application des programmes de mathématiques de l'École (cycle 2 et cycle 3) insistent sur l'importance et la nécessité de la résolution de problèmes à l'École.

1°) Problèmes pour apprendre :

- problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance,
- problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer,
- problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances.

2°) Problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher ; en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte.

C'est sur ce dernier type de problèmes qu'a porté l'atelier avec le rappel des points essentiels du document d'accompagnement des programmes de l'École « *Les problèmes pour chercher* » et la présentation du fichier « *Évariste – École* »

Le document d'accompagnement de ces programmes, « *Les problèmes pour chercher* », explicite les objectifs et les modalités de mise en œuvre de ce type de problèmes et montre ce que pourrait être le déroulement d'une séance de résolution de tels problèmes à partir d'un exemple traité : « Un épisode de recherche, en actes ».

Rappelons ici :

1°) les objectifs visés :

- développer des capacités à faire face à des situations inédites ;
- prendre conscience de la puissance de ses connaissances ;
- valoriser des comportements et des méthodes essentiels (initiative, esprit critique, organisation, méthode, communication) ;

- argumenter pour convaincre, valider ou réfuter ; la raison l'emporte sur la passion ou sur la « loi du plus fort ou du plus grand nombre » ;

- développer la citoyenneté : travail de groupe, entraide, échange d'idées, écoute et respect de l'autre.

2°) les différentes tâches que les élèves sont amenés à assurer dans le cadre de la résolution de tels problèmes :

- faire des hypothèses, les tester ;
- élaborer une démarche pertinente afin de produire une solution personnelle ;
- vérifier par soi-même les résultats obtenus ;
- formuler une réponse dans les termes du problème ;
- expliquer ses méthodes, les mettre en débat, argumenter.

I – PRÉSENTATION DE LA STRUCTURE DU FICHIER

Le fichier « *Évariste – École* » que nous avons réalisé à partir de différentes compétitions mathématiques, comporte 60 problèmes pour le cycle 2 et 120 problèmes pour le cycle 3. Les fiches-problèmes peuvent être photocopiées sur des feuilles cartonnées et massicotées pour réaliser un fichier. Le recto des fiches comporte le texte du problème et les dessins éventuels liés au problème ; le verso, destiné aux enseignants, contient la solution, des coups de pouces à donner éventuellement aux élèves et des idées d'exploitation et de prolongements du problème.

Un livret de huit pages contient, outre des extraits des documents d'accompagnement précités et des explications sur une utilisation possible du fichier, deux index :

- un index par thèmes, les thèmes ayant été choisis au plus près de la typologie des rubriques des problèmes dans les programmes officiels : numérique, mesure, géométrie, espace, pavage, dénombrement, logique et recherche, ce dernier thème regroupant plutôt des problèmes inclassables dans les thèmes précédents. Ils sont repérés sur chaque fiche par un logo spécifique ; le thème « Numérique » se taille bien sûr la part du lion !
- un index par notions (notions abordées dans la résolution du problème).

Parmi tous les problèmes que les différentes compétitions mathématiques nous ont proposés, nous avons choisi ceux qui nous paraissaient les plus riches, en recouvrant au mieux l'ensemble des thèmes et en veillant à la variété des situations dans un même thème. Les apports mathématiques permis au niveau de l'exploitation du problème et les possibilités de prolongements intéressants ont prévalu aussi au choix des problèmes.

II – MISE EN SITUATION DE RECHERCHE DES PARTICIPANTS

Les participants ont ensuite été invités à rechercher eux-mêmes quelques problèmes afin de se mettre dans la situation d'élèves de l'école primaire. Il s'agit donc de trouver des procédures **non expertes** pour résoudre ces problèmes.

Le problème des « croquettes » est un des exemples cités dans le document d'accompagnement du ministère. La procédure experte serait la résolution d'un système de 5 équations à 5 inconnues, ce qui dépasse largement les compétences mêmes des élèves du collège. C'est parfois pour cette raison que des enseignants refusent de donner de tels problèmes à leurs élèves.

Croquettes

100 croquettes ont été réparties dans 5 assiettes.
Dans la 1re et la 2e assiettes, ensemble, il y a 52 croquettes.
Dans la 2e et la 3e assiettes, ensemble, il y a 43 croquettes.
Dans la 3e et la 4e assiettes, ensemble, il y a 34 croquettes.
Dans la 4e et la 5e assiettes, ensemble, il y a 30 croquettes.
Combien de croquettes y a-t-il dans chaque assiette ?

2ème rallye mathématique romand – 1994 (fin de cycle 2, cycle 3)

Ce problème est très riche : les procédures vont des essais et ajustements aux raisonnements. En voici quelques-unes.

Procédure par essais et ajustements :

L'élève décide par exemple que la première assiette contient 25 croquettes. Il en déduit que la deuxième assiette contient 52 – 25 = 27 croquettes, et de proche en proche, la troisième 16, la quatrième 18 et la dernière 12. En faisant le total, il trouve 98 croquettes. Voyant qu'il manque deux croquettes au total il peut, a priori, penser qu'en ajoutant deux croquettes à la première assiette, il obtiendra le nombre voulu. Il doit donc vérifier son hypothèse en recommençant le calcul avec 27 croquettes dans la première assiette. Les calculs successifs donnent 27, 25, 18, 16 et 14, ce qui donne bien un total de 100.

On le voit, dans cette procédure, l'élève doit prendre des initiatives, faire des hypothèses, respecter les consignes et vérifier les résultats obtenus.

L'exploitation de cette solution avec toute la classe est l'occasion de justifier que la règle: « *Il me manque deux croquettes au total, donc j'en ajoute deux dans la première assiette* » est tout à fait correcte. Pour cela, le maître peut proposer aux élèves un autre ajout, une croquette seulement, par exemple, et leur demander de voir si la règle édictée se vérifie encore. Un troisième essai peut conforter la règle ; mais est-on sûr qu'elle est toujours vraie ?

On suppose :	A = 26	52
donc	B = 26	
	C = 17	34
	D = 17	
	E = 13	
Total :	99	

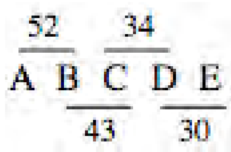
Il ne s'agit pas ici de faire un calcul algébrique pour la justifier ; mais une observation des calculs intermédiaires avec une présentation comme celle ci-contre permet d'en être convaincu. Quelle que soit la valeur attribuée à A, la situation fait que la somme A + B + C + D reste constante et égale à 86. **Si, donc, on ajoute une croquette au contenu de A**, B en a une de moins, C en a une de plus, D en a une de moins et **E en a donc une de plus** puisque D + E est constant et égal à 30.

Procédures par raisonnement

Pour des besoins de concision dans ce qui suit, nous désignerons, comme précédemment, par A, B, C, D et E les contenus des cinq assiettes de la première à la cinquième. Les élèves, bien sûr, n'ont pas à utiliser nécessairement de telles représentations, ni à formuler leur solution comme cela est fait ici.

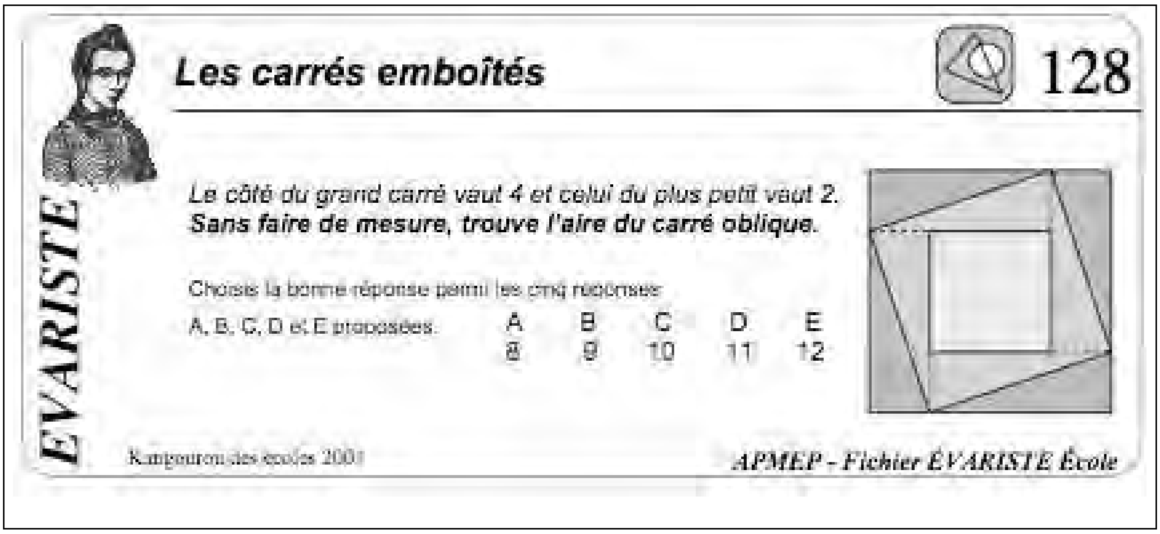
1°) En effectuant la somme des quantités données, 52 + 43 + 34 + 30 = 159, on compte deux fois les contenus des deuxième, troisième et quatrième assiettes. Ainsi, B + C + D = 159 – 100 = 59. Or on sait que B + C = 43. On en déduit que D = 16 et, de proche en proche les autres contenus.

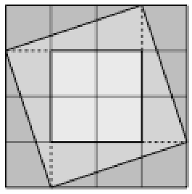
2°) Un petit schéma, comme celui ci-contre, représentant les assiettes et leurs contenus deux par deux, donne l'idée d'effecteur les sommes suivantes : (A + B) + (C + D) = 52 + 34 = 86. Donc E = 100 – 86 = 14. De proche en proche, on obtient alors les contenus des autres assiettes.



À la suite de cette recherche et de l'exploitation précédente, un prolongement possible pourrait être le problème suivant : « Et s'il y avait 6 assiettes ? ». Le maître propose alors, par exemple cette nouvelle situation : 100 croquettes réparties dans 6 assiettes, les contenus de deux en deux étant 32, 33, 32, 30 et 36. Les élèves sont alors confrontés au fait que, contrairement à la situation précédente, les essais qu'ils peuvent faire conviennent, ce qu'ils peuvent expliquer à la suite de l'exploitation du problème précédent. Les élèves ou le maître peuvent alors se poser la question : quels sont les nombres de croquettes possibles dans la première assiette ?

Les problèmes suivants proposés aussi dans cet atelier sont extraits de la partie cycle 3 de la brochure « *Évariste-École* » et pris dans différents thèmes.





Le logo (à gauche du numéro) indique qu'il s'agit d'un problème de géométrie. Là aussi, plusieurs stratégies de résolution sont apparues :

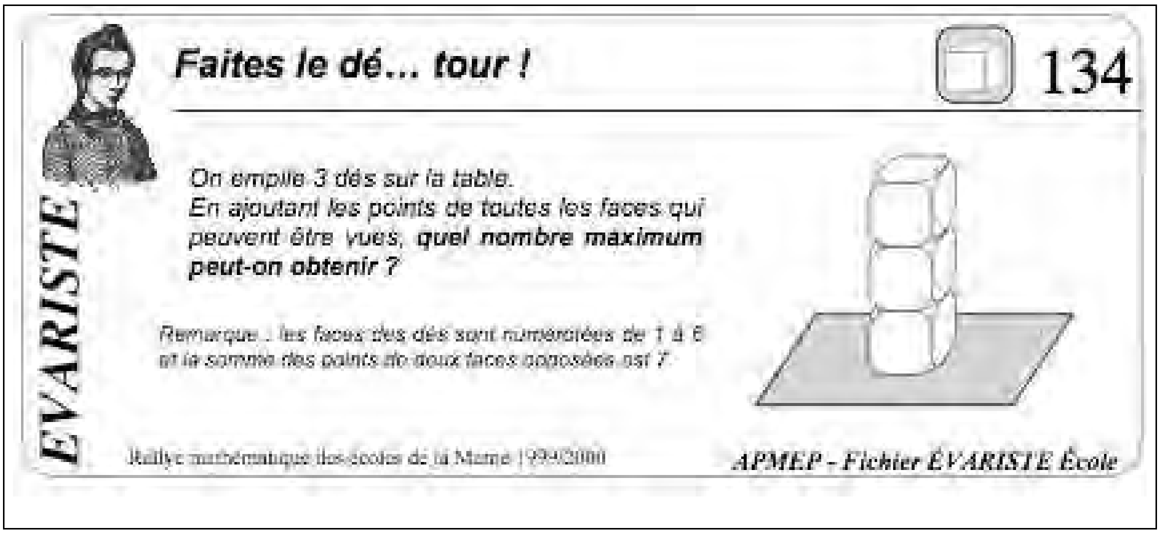
1°) Utilisation d'un quadrillage ; en regroupant les triangles rectangles gris moyen deux par deux, on observe que leur aire est celle de deux rectangles de trois carreaux chacun, soit 6 carreaux. L'aire du carré oblique est donc de 10 carreaux

2°) L'aire du grand carré étant de 16 carreaux et celle du petit de 4 carreaux, l'aire de la couronne est donc de 12 carreaux. Or les contours du carré oblique partagent cette couronne en deux zones d'aires égales, aire de 6 carreaux. L'aire du carré oblique est donc celle du carré central plus 6 ou celle du grand carré moins 6.

3°) Une autre stratégie consiste à déterminer les longueurs des côtés des triangles rectangles et, comme précédemment, à regrouper ces triangles rectangles par deux pour calculer l'aire des rectangles obtenus.

Le débat a aussi porté sur le fait que ce problème est présenté sous la forme d'un QCM. Il apparaît qu'il ne faut pas en abuser, mais pas non plus les proscrire. En effet, la nature du QCM permet de développer d'autres stratégies, en particulier celle par analyse des réponses proposées et élimination de celles qui ne conviennent pas. Par exemple, dans la situation proposée, les élèves pourraient peut-être faire appel à la parité pour éliminer les réponses B et D.

L'exploitation de ce problème avec toute la classe réside surtout dans l'explicitation par les élèves des démarches utilisées. La projection du dessin au tableau avec un rétroprojecteur facilite ici grandement les échanges.



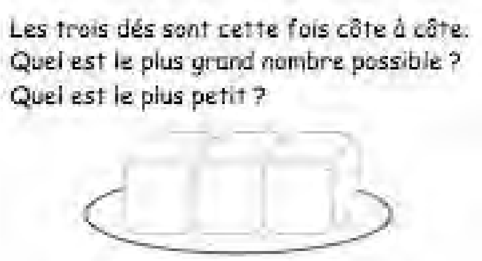
Problème de géométrie dans l'espace : certains participants ont discuté pour savoir s'il fallait prendre en compte toutes les faces du solide formé par les trois dés ou non. Après une lecture attentive de l'énoncé, il est apparu aux yeux de tous qu'il n'y avait aucune confusion possible et que, par conséquent, ces problèmes constituent aussi l'occasion de pratiquer une lecture beaucoup plus fine que celle d'un roman.

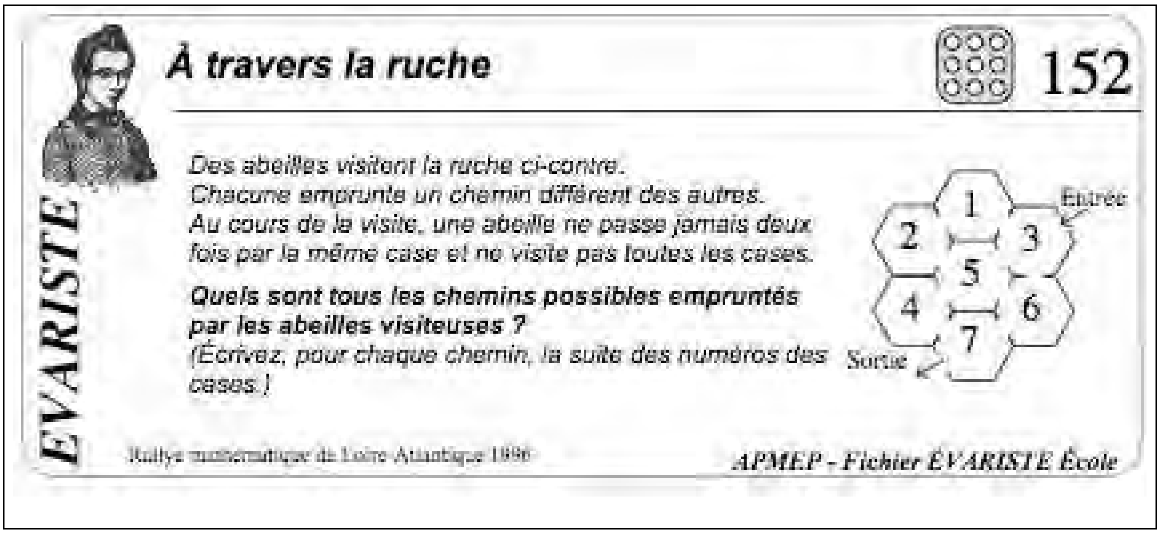
En ce qui concerne les procédures, il apparaît que l'information : « *La somme des points de deux faces opposées est égale à 7* » n'est pas complètement exploitée. Les élèves éprouvent en effet le besoin de choisir des points sur les faces visibles et de déterminer ceux des faces opposées.

La solution qu'on peut qualifier d'experte, mais accessible tout de même à des élèves de cycle 3, réside dans l'observation de six paires de faces opposées qui donnent donc $6 \times 7 = 42$ points quels que soient les points qui sont sur les faces et de choisir le maximum de points (6) sur la face du dessus, ce qui donne un total de 48 points.

En exploitation de ce problème, on peut demander aux élèves le nombre minimum qu'on peut obtenir, nombre qui est donc 43.

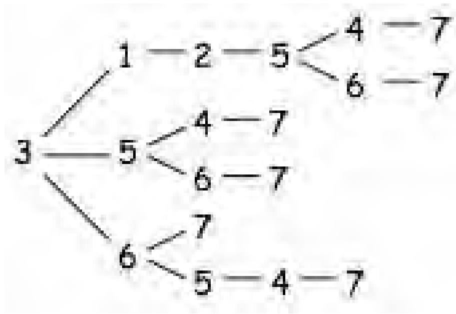
Le prolongement donné dans le fichier « Évariste-École » propose le problème ci-contre. La recherche faite sur le problème précédent rend plus aisée la résolution de celui-ci. Les trois paires de faces opposées donnent obligatoirement 21, quelles qu'elles soient. Il faut donc mettre le maximum ou le minimum de points sur les faces du dessus et des extrémités : trois 6 et deux 5 pour le maximum et trois 1 et deux 2 pour le minimum.



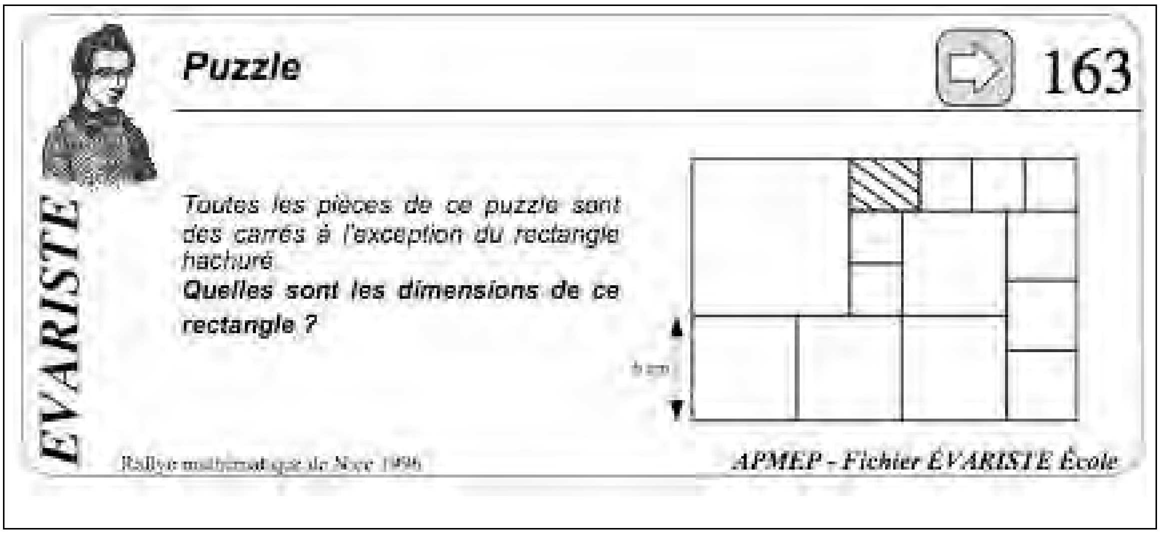


Ce logo est celui du thème « dénombrement ». Une fiche annexe à photocopier aux élèves et qui comporte plusieurs exemplaires de la ruche leur permet de dessiner les différents chemins qu'ils trouvent et de les comparer entre eux.

Le problème essentiel que les élèves doivent résoudre est de savoir s'ils ont obtenu tous les chemins. L'exploitation de ce problème peut alors consister à leur montrer comment on peut construire un « arbre » pour résoudre ce problème.



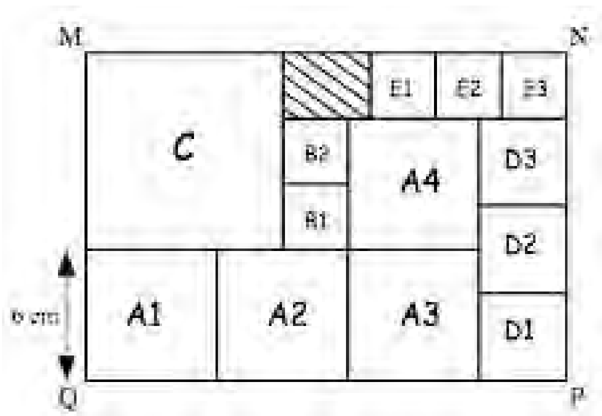
Quelles sont les possibilités au départ de la case 3 ? Puis à partir des cases 1, 5 et 6 ? La structure d'arbre est une aide à la recherche exhaustive de toutes les possibilités. L'arbre ci-contre donne les six chemins possibles.



Ce logo signale les problèmes classés dans le thème « Logique ». Même si tous les problèmes font appel au raisonnement, certains requièrent plus que d'autres une démarche déductive. Celui-ci en fait partie.

Le dessin est conforme aux dimensions réelles (à l'échelle), ce qui facilite la recherche des élèves. Mais il pourrait très bien être fait à main levée, les propriétés données suffisant à sa résolution. C'est donc bien un problème qui fait complètement appel au raisonnement.

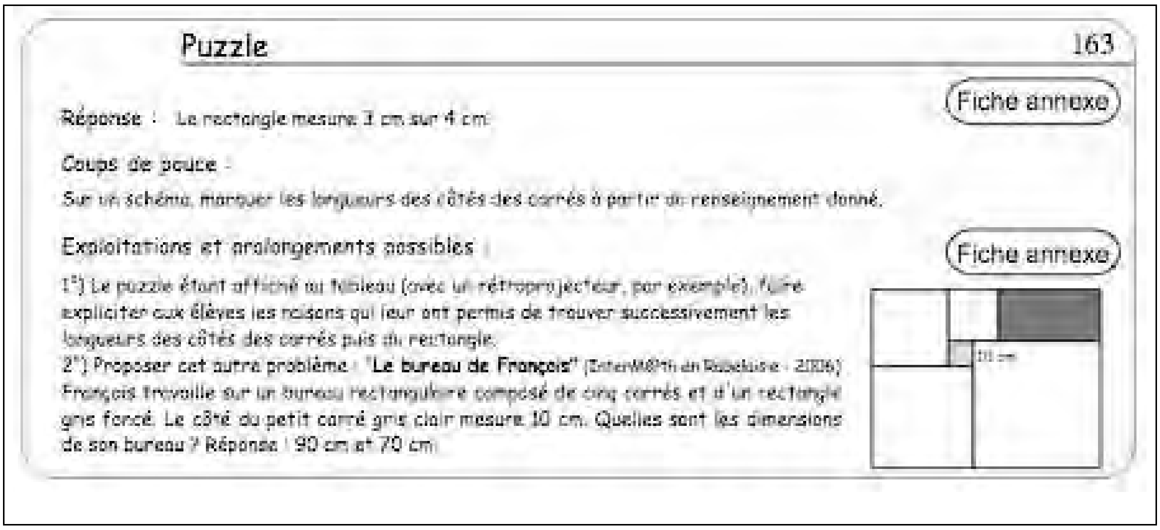
1°) Le premier résultat obtenu est que les côtés des carrés A mesurent 6 cm. En comparant le côté du carré A4 avec ceux des carrés B, on en déduit que les côtés des carrés B mesurent 3 cm. Le côté du carré C mesure donc 12 cm – 3 cm = 9 cm. D'où MQ = 15 cm. On en déduit que le petit côté du rectangle hachuré mesure 15 cm – 12 cm = 3 cm, ce qui est aussi la mesure des côtés des carrés E.



2°) En comparant les côtés des carrés A3 et A4 avec les côtés des carrés D, on en déduit que les côtés des carrés D mesurent 4 cm et donc que QP = 3 x 6 cm + 4 cm = 22 cm. Le deuxième côté du rectangle hachuré mesure donc 22 cm – 9 cm – 3 x 3 cm = 4 cm. **Les dimensions du rectangle hachuré sont donc 3 cm et 4 cm**.

D'autres cheminements sont possibles. En présentant à toute la classe leurs solutions, les élèves sont amenés à argumenter, en particulier à la demande de leurs camarades. En effet, les différents résultats de la solution précédente ont été annoncés de façon succincte et nécessitent davantage d'explications de la part des élèves.

En prolongement de ce problème, le verso de la fiche propose le problème ci-dessous.


Puzzle 163

Fiche annexe

Réponse : Le rectangle mesure 3 cm sur 4 cm.

Coups de pouce :

Sur un schéma, marquer les longueurs des côtés des carrés à partir du renseignement donné.

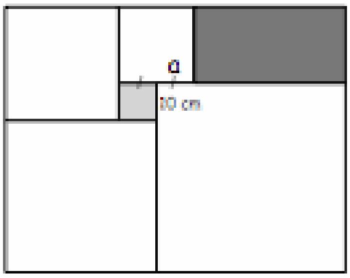
Exploitations et prolongements possibles :

Fiche annexe

1°) Le puzzle étant affiché au tableau (avec un rétroprojecteur, par exemple), faire expliciter aux élèves les raisons qui leur ont permis de trouver successivement les longueurs des côtés des carrés puis du rectangle.
2°) Proposer cet autre problème : **"Le bureau de François"** (EnterMaths en Rabelaisie - 2006)
François travaille sur un bureau rectangulaire composé de cinq carrés et d'un rectangle gris foncé. Le côté du petit carré gris clair mesure 10 cm. Quelles sont les dimensions de son bureau ? Réponse : 90 cm et 70 cm.

Les participants à l'atelier ont vite remarqué qu'il n'y a pas qu'une solution à ce problème, par suite d'un oubli de codage d'égalité de longueurs de deux segments ! Mais les élèves se poseraient sans doute moins de questions, ce qui n'excuse en rien notre oubli puisque nous leur expliquons qu'ils ne doivent pas prendre des données qui ne seraient pas écrites dans les énoncés !

Voici le dessin tel qu'il aurait dû être. Nous y faisons figurer cependant la lettre a qui désigne la mesure inconnue du dessin sans le codage. Avec cette inconnue, les dimensions du rectangle sont 50 + 2a et 70 + 2a. Si donc a = 10 cm, les dimensions du rectangle sont celles attendues : 70 cm et 90 cm.



Les problèmes du fichier « Évariste-École » tirés de différents rallyes et compétitions mathématiques font tout à fait partie de la catégorie des « Problèmes pour chercher ». Bien sûr, comme nous l'avons vu, le rôle du maître est primordial.

Il se situe au niveau du choix du problème dans la progression car, même si l'objectif est la recherche de la solution, ces problèmes font tout de même appel à des notions mathématiques.

Il se situe aussi au niveau de ses interventions dans la phase de recherche où, involontairement, il risque d'aiguiller les élèves vers une procédure connue alors que les élèves nous étonnent souvent avec des procédures inattendues correctes. Même si nous proposons pour chaque problème des coups de pouce, les meilleurs sont ceux que le maître apporte en fonction de la recherche des élèves, comme nous le rappelons dans le document d'accompagnement.

Il se situe enfin au niveau de l'exploitation du problème au cours de la mise en commun des solutions en gérant les échanges entre les élèves, en les amenant à analyser les difficulté rencontrées et à repérer les procédures intéressantes qui pourront être réinvesties au niveau des prolongements au problème traité.

Pour ce dernier point, nous ne pouvons que conseiller d'aller lire « **Les modalités de mise en œuvre du problème pour chercher** » de la partie « ***Les problèmes pour chercher*** » du document d'accompagnement des programmes du primaire.

BIBLIOGRAPHIE

DOCUMENTS D'APPLICATION DES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES DU CYCLE 2 ET DU CYCLE 3 — COLLECTION ECOLE, scérÉn

DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT DES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES DU PRIMAIRE : *Les problèmes pour chercher.*

BAREIL H. (2006) *Présentation du fichier « Evariste- Ecole »*, Bulletin Vert de l'APMEP, **467**, 876-879.

CHARNAY R. (2007) *Rubrique « A signaler »*, Grand N, IREM de Grenoble, **79**, 113-115.