PLIAGES ET CONSTRUCTIONS A LA REGLE ET AU COMPAS

Françoise JORE
Maître de conférences, UNIVERSITE CATHOLIQUE DE L'OUEST, ANGERS.
Didirem Paris 7 & Cream UCO
jore@uco.fr

Résumé
La proposition qui est faite ici consiste à exploiter un travail autour de deux types d'activités : d'une part des pliages, nécessitant la mise en œuvre consciente de propriétés géométriques, d'autre part des constructions à la règle et au compas avec la rédaction et la justification des scénarios de construction correspondants. Ces activités sont l'occasion avec les PE1 de revoir bon nombre de théorèmes de géométrie en acte, c'est-à-dire en les utilisant pour effectuer une construction. Ce type d'activité, non habituel, permet à tous les étudiants de s'investir dans la tâche proposée, quel que soit leur niveau de compétences, souvent très hétérogène.

Dans le cadre du concours de recrutement de professeurs des écoles, les étudiants doivent être capables d'effectuer des démonstrations simples, qui relèvent du collège. Cela nécessite entre autre de maîtriser un minimum de théorèmes de géométrie euclidienne de fait peu mobilisables, voire parfois non disponibles, souvent non opérationnels pour les PE1. Par ailleurs, de nombreux sujets de concours demandent aux candidats d'effectuer des constructions à la règle et au compas. Dans certains cas, la rédaction d'un scénario de construction est également demandée. Indépendamment du concours, « rédiger un scénario de construction » fait partie des compétences travaillées au cycle 3, et par conséquent doit être maîtrisé par les futurs enseignants. Or le temps de formation est toujours limité. Il s'agit donc de profiter au mieux du faible temps dont le formateur dispose pour mettre en place toutes ces compétences.

I – PLIAGES

Avant de travailler sur les scénarios de construction et donc en particulier sur le langage géométrique, un premier travail est proposé aux PE1 en début de formation en géométrie autour des pliages. Les objectifs de cette activité sont multiples :

- permettre aux PE1 de revoir définitions et propriétés de quelques objets du plan (triangles particuliers, quadrilatères, …) ;
- proposer une tâche qui n'est pas routinisée, et qui donc oblige les étudiants à réfléchir. La solution du problème ne consiste pas en l'application d'une technique rodée : ils n'ont en général jamais rencontré cette tâche ;
- faire en sorte que les propriétés des objets soient un outil incontournable pour accomplir la tâche proposée. Il ne s'agit pas seulement d'énoncer des propriétés, mais surtout de les utiliser comme outil pour effectuer la construction demandée ;

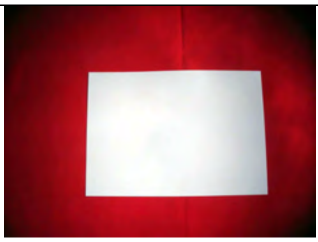
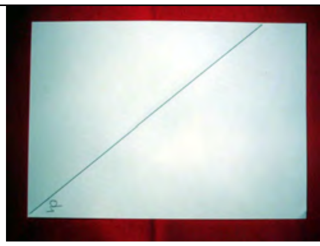
- donner l'occasion aux étudiants en difficulté en mathématiques de rentrer dans une activité de démonstration s'en vraiment s'en apercevoir ;

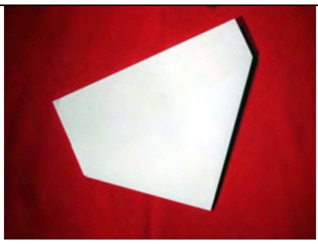
- mettre les étudiants scientifiques dans une situation qui les déstabilise un peu, qui les oblige à réfléchir, qui ne leur permette pas de reproduire trop rapidement un discours par ailleurs bien assimilé. Il faut qu'eux aussi aient quelque chose à apprendre, une compétence à développer.

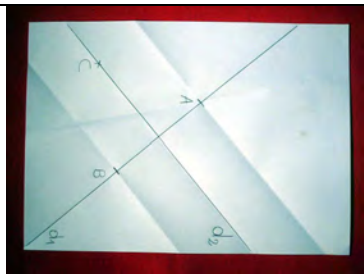
La consigne proposée est ainsi la suivante : « Prendre une feuille de papier. Par pliage, sans utiliser les habituels instruments de géométrie, obtenir un triangle rectangle, puis un triangle isocèle. »

Ces deux constructions n'ont pour but que de s'approprier la consigne et le fonctionnement de cette activité. Elle est réalisée sans difficulté par tous les étudiants. Il est ensuite demandé aux étudiants de construire de la même manière un triangle équilatéral. Un élément est alors ajouté : « Préciser les définitions ou propriétés utilisées qui permettent de justifier la construction ».

Une démarche possible est la suivante :

		
Prendre une feuille	Plier en deux	On obtient une droite d_1

		
Plier à nouveau en deux afin d'obtenir une perpendiculaire à d_1	La droite d_2 est perpendiculaire à d_1	Replier à nouveau pour déterminer deux points sur d_1 équidistants de d_2

		
A et B sont deux points de d_1 équidistants de d_2	Plier en A de sorte d'amener B sur d_2	On a ainsi déterminé sur d_2 un point C équidistant de A et B.

La définition seule du triangle équilatéral (triangle avec des côtés isométriques) ne suffit pas pour effectuer la construction par pliage. Dans la construction ci-dessus proposée, une propriété est utilisée : le troisième sommet du triangle équilatéral est sur la médiatrice du segment constitué par les deux premiers. Cette propriété est ainsi un outil pour accomplir la tâche.

Une autre procédure est souvent proposée par quelques étudiants : « Plier la feuille en deux. On obtient un angle plat. Partager cet angle plat en trois angles superposables. Ces angles de sommet O mesurent alors 60°. Plier à nouveau pour obtenir la bissectrice d'un des angles obtenu et placer deux points A et B équidistants de O sur les côtés de l'angle ». Le triangle AOB est isocèle avec un angle de 60° : il est donc équilatéral. Cette fois, une autre propriété est utilisée : un triangle isocèle avec un angle de 60° est un triangle équilatéral.

D'autres pliages peuvent être proposés : obtenir un triangle isocèle et rectangle, des angles de 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90 °, la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle, la hauteur d'un triangle, un carré, un losange, un parallélogramme, un cerf-volant, un hexagone, deux droites parallèles, une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné, etc.

II – CONSTRUCTIONS A LA REGLE ET AU COMPAS

Après cette première activité, une autre consigne, plus habituelle, est proposée aux étudiants : il s'agit d'effectuer des constructions à la règle et au compas. Cette fois, non seulement les étudiants doivent faire, mais ils doivent également être capables de décrire ce qu'ils ont fait. Un scénario de leur construction leur est en effet demandé. Par ailleurs, comme dans l'activité précédente, après avoir effectué la construction, les étudiants doivent la justifier. Il s'agit donc de repérer les éléments construits, les hypothèses liées à la construction choisie, puis appliquer définitions, propriétés, théorèmes pour démontrer que l'objet construit a bien les propriétés annoncées.

II – 1.1 première étape : construction, rédaction du scénario puis justification

La première construction proposée aux étudiants est celle d'un triangle rectangle. La mise en commun des procédures utilisées est alors mise en place avec le dispositif suivant :

d1. Un étudiant dicte au formateur un scénario de construction.

d2. Le formateur effectue au fur et à mesure la construction avec Cabri-géomètre, en faisant dans certains cas reformuler la consigne.

d3. L'étudiant, éventuellement aidé du groupe, explicite les propriétés qui justifient la construction effectuée.

Les objectifs, explicites ou implicites, sont multiples.

Les éléments d1 et d2 permettent explicitement de travailler la rédaction d'un scénario de construction. Celui-ci doit avoir plusieurs caractéristiques :

- Il doit être donné dans l'ordre. Si cet aspect pose parfois problème aux enfants, il ne pose en général pas de difficultés aux étudiants.

- Il ne doit pas être trop synthétique. Des expressions comme « tracer la médiatrice du segment [AB] » sont dans un premier temps refusées, et remplacées par la liste des actions élémentaires qui doivent être exécutées. Lorsqu'une procédure pour tracer une médiatrice à la règle et au compas par exemple est bien détaillée et justifiée, elle peut dans un second temps être utilisée comme une macro-construction. Au fur et à mesure que de nouvelles constructions sont explicitées et justifiées, elles viennent allonger la liste des objets constructibles directement.

- Il faut surtout que ce scénario soit complet, sans ambiguïté et sans redondance, ce qui est beaucoup plus difficile pour les étudiants. Je mets alors en évidence que la plupart du temps, ils ne disent pas tout parce qu'ils anticipent implicitement sur le tracé qu'ils veulent obtenir. Par exemple, le plus souvent, des arcs de cercle sont effectués. Mais il est difficile de décrire correctement un arc de cercle si on veut que son intersection par exemple avec un autre arc de cercle soit non vide ! Si les arcs de cercles sont correctement tracés, ce n'est pas grâce à la précision du scénario de construction, mais parce que les étudiants savent ce qu'ils doivent obtenir et anticipent grâce à l'image mentale qu'ils ont de la construction avant même que celle-ci ne soit effectuée. Il est donc proposé de tracer systématiquement le cercle complet, même si concrètement seul un arc « bien placé » suffit.

- Par ailleurs, le langage utilisé dans le scénario doit être un langage qui décrit les objets géométriques créés, et non les actions et instruments utilisés pour les construire. On cherche par exemple à remplacer : « Je trace un segment [DC]. Avec mon compas, je pose ma pointe sur D et je fais un écartement plus grand que la moitié de mon segment. Je trace mon arc » par « Tracer un segment [DC]. Tracer un cercle de centre D et de rayon supérieur à la moitié de la longueur DC ».

Ce travail est explicitement mis en place pour faire évoluer la compétence de rédaction d'un scénario de construction. Les étudiants se rendent compte qu'ils sont capables d'effectuer une construction, mais qu'ils ont de réelles difficultés pour la décrire. L'accent est mis sur le fait qu'ils doivent maîtriser cette compétence dans le cadre de l'épreuve de mathématiques du concours de recrutement des professeurs des écoles, mais également que cette compétence peut (-doit-) être travaillée au cycle 3[1], et qu'ils doivent donc la développer pour eux-mêmes en formation pour aider les élèves à la développer lorsqu'ils seront en classe. Du point de vue des élèves de cycle 3, les étudiants qui ont effectué des suppléances ont l'impression que les élèves connaissent bien les objets du plan qui sont explicitement au programme : carré, rectangle, cercle par exemple. Ils considèrent que les élèves savent les nommer et les tracer, ce qui est pour eux l'essentiel. Ils prennent soudain conscience que si eux-mêmes n'utilisent pas spontanément les mots *cercle*, *centre*, *rayon*, dans une telle activité, il en va probablement de même pour les élèves. Ils constatent alors tout l'intérêt de l'activité de rédaction d'un scénario de construction, et s'aperçoivent que bien souvent ils n'en ont jamais fait faire à leurs élèves.

Implicitement, ce travail permet également de préparer les étudiants à se situer dans le cadre de la géométrie déductive. En effet, tant que le langage n'est pas géométrique, que les objets géométriques créés et utilisés ne sont pas clairement identifiés, il est difficile de s'intéresser à leurs propriétés.

Dans un second temps, en d3, les justifications sont détaillées, dans le but implicite de travailler la démonstration. Elles sont au départ souvent incomplètes : « on a tracé une médiatrice, donc le triangle est rectangle ». Mais si on leur demande pourquoi il s'agit bien d'une médiatrice, les habituels arguments sont : « parce qu'elle est perpendiculaire au segment et qu'elle passe par son milieu ». Petit à petit, il s'agit de mettre en place une méthodologie :

Méthodologie	Mise en œuvre dans la construction de la médiatrice à la règle non graduée et au compas
Repérage des caractéristiques de la construction	le compas permet de tracer des points à une distance constante du centre du cercle
	les intersections de deux cercles de même rayon donnent des points équidistants des centres de ces cercles
Repérage de l'objet géométrique construit, à partir de sa définition ou d'une propriété caractéristique	deux points équidistants des extrémités d'un segment définissent la médiatrice de ce segment
Repérage du théorème utilisé pour conclure	une propriété de la médiatrice est qu'elle est perpendiculaire au segment, ce qui permet de conclure que le triangle est rectangle

[1] On peut lire par exemple dans le programme de l'école primaire (BO n°5 du 12 avril 2007, page 129) : « décrire une figure en vue de l'identifier dans un lot de figures ou de la faire reproduire sans équivoque ».

Les propriétés des objets ne sont pas lues sur le dessin, mais obtenues par un raisonnement hypothético-déductif basé sur :

- la traduction de l'utilisation des instruments en propriétés des objets géométriques construits : le compas permet d'obtenir des points vérifiant une relation de distance avec le centre, la règle non graduée d'obtenir tous les points alignés avec deux points donnés ;

- les définitions et théorèmes de la géométrie euclidienne.

La seule différence avec le travail habituel de démonstration est la manière d'obtenir les hypothèses permettant d'initier le raisonnement : elles ne sont pas données dans un texte ou codées sur un dessin mais obtenues par cette traduction de l'utilisation des instruments. Il s'agit donc d'une première étape dans l'apprentissage de la démonstration. Dans le travail ultérieur sur la démonstration, les données initiales de l'énoncé remplaceront le repérage des caractéristiques de la construction.

Le repérage des caractéristiques de la construction, des définitions et théorèmes utilisés, est parfois difficile pour les étudiants, et souvent des informations sont seulement lues sur le dessin. Il s'agit alors à chaque fois d'expliciter que la caractéristique donnée n'est pas issue de la construction, mais de la lecture du dessin. Chaque prise d'information sur le dessin est ainsi repérée. Il s'agit notamment de montrer que, même dans une démarche a priori consciemment déductive, il est facile de se faire « piéger » par le dessin et d'y lire des informations. C'est ce que Parzysz nomme la « contamination du su par le perçu » [Parzysz. 2002]. Il est indispensable que le formateur soit très vigilant pour que le travail se situe bien toujours dans le cadre de la géométrie déductive, et non dans celui de la géométrie perceptive à un moment ou à un autre.

L'accent est mis auprès des étudiants sur le fait que :

- Les procédures qu'ils utilisent de manière plus ou moins automatisée pour effectuer des constructions doivent avoir une justification mathématique ;

- Les propriétés utilisées sont mobilisables pour tous mais le plus souvent non disponibles spontanément pour bon nombre d'étudiants ;

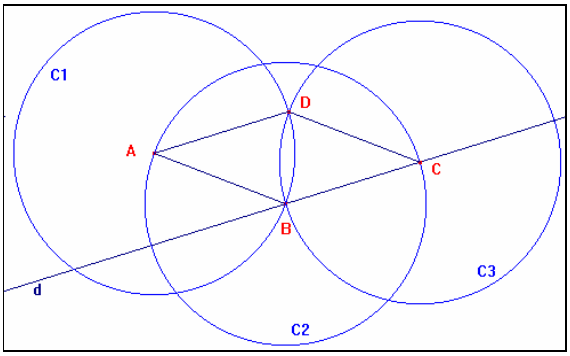
- Le travail essentiel à effectuer n'est pas d'emmagasiner des connaissances nouvelles (ils sont généralement capables de citer, voire même d'énoncer, pratiquement tous les théorèmes classiques de géométrie plane), mais de développer leur raisonnement géométrique en créant des liens entre les constructions qu'ils savent effectuer et les propriétés sous-jacentes.

La même démarche est reprise pour les autres procédures proposées par les étudiants, puis d'autres constructions sont traitées suivant le même dispositif : tracer une hauteur dans un triangle quelconque, tracer une bissectrice, tracer un carré, tracer un hexagone, un octogone, etc.

II – 1.2 deuxième étape : choix de la propriété avant d'effectuer la construction

Une nouvelle contrainte est alors apportée dans la consigne. Il ne s'agit plus d'effectuer une construction, mais autant de constructions différentes que possible pour un même objet. Considérons par exemple la consigne : « soit une droite d et un point A n'appartenant pas à d. Tracer la droite perpendiculaire à d passant par A. Trouver le plus de constructions différentes possibles »[2]. Cette fois, les constructions possibles sont très nombreuses[3]. Comme à la séance précédente, l'accent est mis sur la formulation des scénarios de construction, puis sur leur justification. Les hypothèses liées à la construction sont mises en évidence, puis les définitions et propriétés utilisées sont explicitées.

Considérons par exemple la construction suivante.



Scénario	Justification
Tracer un cercle C_1 de centre A, coupant la droite d. Soit B un des deux points d'intersection de C_1 et d.	
Tracer un cercle C_2 de centre B passant par A. Soit C un des deux points d'intersection de C_2 et de d.	On a donc : $BC = AB$
Tracer un cercle C_3 de centre C passant par B. Soit D le second point d'intersection de C_1 et C_3.	$CD = BC = AD$
	ABCD a quatre côtés de même longueur AB. C'est donc un losange. Ses côtés opposés sont donc parallèles. Or B et C sont sur d. Donc la

---

[2] Dans la cadre de l'atelier, la consigne est proposée sous forme de jeu : des groupes de 4 ou 5 sont formés et l'équipe qui gagne est celle qui a le plus de constructions différentes, avec les justifications correspondantes correctes.

[3] Le lecteur trouvera de nombreuses constructions détaillées dans [Jore, 2006, pages 389-397], disponible sur le net : http://www.ima.uco.fr/jore/

	droite (AD) est parallèle à d et passe par A.

Pour cette procédure, on met en évidence que :

- la construction est basée sur la définition du losange comme quadrilatère avec quatre côtés isométriques ;
- une propriété du losange permet ensuite de conclure que les côtés sont parallèles.

D'autres constructions sont proposées par les étudiants, et chaque fois le contrat pour le groupe est d'essayer d'établir leur justification.

En analysant les constructions proposées, on s'aperçoit que certaines ont été obtenues un peu par hasard, et le défi consiste alors à les justifier pour s'assurer que « ça marche toujours ». D'autres procédures au contraire ont manifestement été mises en place en cherchant à appliquer une propriété ou un théorème particuliers. La règle du jeu change alors pour devenir :

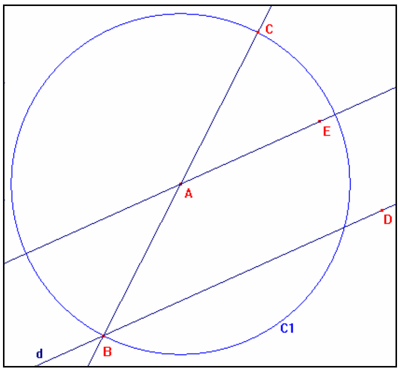
« Choisissez une situation dans laquelle vous savez qu'il y a des parallèles : une figure particulière ou un théorème de géométrie qui permet de conclure que sous telles hypothèses, deux droites sont parallèles, **puis** mettez en œuvre une construction dont vous avez ainsi à l'avance la justification ».

C'est le fait de demander des constructions différentes nombreuses qui amène à mettre en place cette nouvelle démarche.

A ce stade du dispositif, l'entrée par les figures, notamment les quadrilatères particuliers[4], a déjà été abondamment utilisée et c'est souvent plutôt l'entrée par les théorèmes qui est alors exploitée. Autrement dit, il s'agit de choisir un théorème qui permette une justification, puis de mettre en scène ce théorème pour élaborer une construction.

L'exemple est pris avec le théorème de la « droite des milieux ». Les étudiants sont invités à expliciter ce théorème - la « récitation » fonctionne en général très bien -, puis à l'**utiliser** pour construire deux droites parallèles, puis une droite parallèle à d passant par A. On obtient par exemple la procédure suivante :

[4] Si on trace un carré, un rectangle, un losange, un parallélogramme, on sait que l'on a des droites parallèles.



Scénario	Justification
Tracer un cercle de centre A qui coupe d en deux points. Soit B un de ces points.	$B \in d$
Tracer la droite (AB).	
Placer le point C à l'autre intersection de (AB) et du cercle.	A est donc le milieu de [BC]
Placer un point D sur d	$D \in d$
Placer le milieu E de [DC] (on peut utiliser une construction de la médiatrice à la règle et au compas).	E est le milieu de [DC]
Tracer la droite (AE).	(AE) est la droite qui joint les milieux des côtés [BC] et [CD] du triangle BCD. Elle est donc parallèle au côté [BD]. C'est donc une droite parallèle à d passant par A.

Cette mise en situation permet aux étudiants de s'approprier ainsi les propriétés et théorèmes énoncés. De nombreux théorèmes sont ainsi revus et utilisés pour inventer et justifier des constructions. Petit à petit, les étudiants effectuent des démonstrations. L'accent est mis sur le fait que pour être valable, la justification ne doit pas prendre des arguments sur le dessin, mais dans le scénario, qui est ici une manière de formuler les hypothèses.

Cette étape permet donc de développer plusieurs compétences :

- rédiger un scénario de construction ;
- repérer des hypothèses et établir une démonstration ;
- utiliser un théorème pour mettre en place une construction.

Ces activités sont ainsi l'occasion de raviver des connaissances et des compétences immédiatement utiles pour le concours. Les définitions et propriétés sont des outils pour résoudre le problème posé.

III – DEBAT DANS L'ATELIER

Plusieurs questions ont été soulevées par les participants lors de l'atelier et ont parfois entraîné un débat, en particulier autour du langage. La question fondamentale est celle de l'exigence que le formateur doit avoir sur les formulations des étudiants.

La première question concerne la verbalisation lors des pliages. Quelle place faut-il donner à cette verbalisation ? Quelles exigences faut-il avoir dans la rigueur de la description du pliage ? Deux points de vue se présentent :

- il faut profiter de toutes les occasions qui se présentent pour amener les étudiants à affiner leur langage, en particulier à utiliser le vocabulaire géométrique adapté à la situation ;

- les manipulations de pliage effectuées ne sont pas très habituelles et il ne suffit pas toujours de nommer l'objet construit ou ses propriétés pour savoir comment effectuer le pliage, il faut parfois décrire l'action qui est effectuée. Mais le langage spécifique des pliages n'est pas familier et l'énergie qu'il faudrait déployer pour le mettre en place ne se justifie peut-être pas dans le cadre de la préparation au CRPE.

Une seconde question concerne la rédaction des scénarios de construction pour les constructions à la règle et au compas. J'ai présenté lors de l'atelier quelques résultats de ma thèse, où je montre le langage utilisé par les PE1 dans ces activités. Le tableau ci-dessous montre le pourcentage d'étudiants qui utilisent tel mot dans tel scénario (l'analyse est faite sur 103 PE1) :

	Triangle rectangle	Droite parallèle
Cercle	35	46
Centre	22	47
Rayon	10	42
Intersection	23	37
Arc de cercle	27	20
Compas	66	50
Écartement, écart, ouverture	25	28
Pointe du compas, pointer	23	29
Reporter	13	28
Croisement, rencontre, se rejoindre	6	7
Joindre, rejoindre, relier, prolonger	10	15
En partant de, à partir de	10	25

Ce tableau montre que les étudiants utilisent beaucoup un vocabulaire qui décrit non pas l'objet géométrique tracé, mais le geste effectué et l'instrument utilisé pour obtenir ce tracé. Mon objectif est alors de remplacer un discours comme celui-ci :

> Je trace une droite d. Je prends 2 points sur cette droite que j'appelle D et E. Je prends mon compas je choisi un écartement quelconque. Je pointe le compas en D et je trace un arc de cercle de part et d'autre de la droite d, je garde le même écartement, je pointe en E et je fais un arc de cercle de part et d'autre de d. De part et d'autre de d les arcs de cercle se recoupe en F et en G. Je trace la droite passant par G et F, je l'appelle d'. des droites d et d' se coupent en B. Je choisi un point C sur d, puis un point A sur d'. Je relie ABC.

par :

> Soit une droite d. Soit D et E deux points de cette droite. Soient deux cercles de centres respectifs D et E et de même rayon, ayant deux points d'intersection F et G. Soit B l'intersection des droites d et (FG). Soit C un point de d et A un point de (FG), distincts de B. ABC est un triangle rectangle.

Il s'agit d'utiliser le vocabulaire mathématique pour être plus efficace, plus concis. Mais surtout, l'utilisation de ce langage est une première étape pour accéder aux concepts géométriques qui se cachent derrière les mots.

Une autre position est alors défendue : pourquoi une telle exigence dans la rédaction d'un scénario dès lors que celui-ci est compréhensible et fourni l'objet attendu ? Dans le cadre de la correction du CRPE, « si on aboutit à la bonne figure, on met les points ».

CONCLUSION

Cet atelier a été l'occasion de présenter des activités qui permettent simultanément de raviver des connaissances et des compétences géométriques variées immédiatement utiles pour le concours (définitions, propriétés, théorèmes, procédures de construction à la règle et au compas) mais aussi sur le terrain (rédaction de scénarios de construction). Ces définitions, propriétés, théorèmes sont des outils pour résoudre les problèmes posés, ce qui doit permettre une meilleure appropriation de la part des étudiants. D'autres pistes sont à explorer pour améliorer la rédaction des scénarios de construction, en particulier l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique fournissant des scénarios de construction.

BIBLIOGRAPHIE

JORE F. (2006) *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

PARZYSZ B. (2002) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, 99-110, in *Actes du XXVIII^e colloque COPIRELEM*, Ed Presses Universitaires d'Orléans.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2007) *Programmes de l'école primaire*. BOEN hors série n°5. Paris : CNDP.