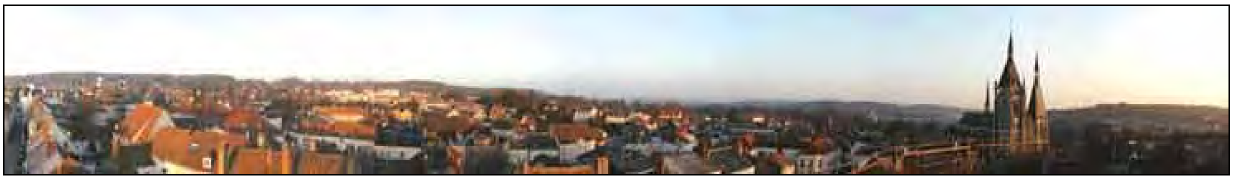
XXXIIIème Colloque COPIRELEM

Des Professeurs et des Formateurs
de Mathématiques chargés
de la Formation des Maîtres

Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?



Dourdan 8, 9 et 10 juin 2006

COPIRELEM

IREM Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques PARIS 7

iufm de l'académie de Versailles

ÉLABORATION DE SUJETS DE CONCOURS POUR LE CERPE

Nicole BONNET
Professeur de mathématiques, IUFM de Bourgogne
IREM de Dijon
nicole.bonnet@dijon.iufm.fr

Pierre EYSSERIC
Professeur de mathématiques, IUFM d'Aix-Marseille
IREM de Marseille
p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr

Arnaud SIMARD
Maître de Conférences, IUFM de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques, Université de Besançon
arnaud.simard@fcomte.iufm.fr

Résumé
Chaque année, la COPIRELEM publie des annales corrigées des sujets de mathématiques du CERPE. Celles-ci sont conçues comme un double outil de préparation au concours pour les étudiants et de formation pour les futurs PE.
Ce travail nous donne l'occasion d'une réflexion critique sur les sujets proposés, sur les questions pertinentes à poser pour sélectionner ceux qui enseigneront les mathématiques dans les écoles, sur les réponses que l'on peut attendre des candidats et sur les compléments de formation à apporter sur les thèmes abordés dans les sujets.
En 2005, notre publication comportait, en plus des annales, des propositions d'exercices construits dans la perspective du nouveau concours.
L'atelier du colloque se situe dans le prolongement de ces travaux et vise à engager une réflexion sur une tâche à laquelle tout formateur de PE sera un jour confronté : l'élaboration d'un sujet du CERPE.
Dans un premier temps, nous avons proposé aux participants, répartis en trois groupes, de construire l'énoncé et le corrigé d'un exercice de mathématiques accompagné de questions complémentaires. Chaque groupe a travaillé sur un thème mathématique différent à partir d'une base de données constituée d'exercices extraits de concours blancs donnés en 2005-06 dans différents IUFM.
Dans un deuxième temps, nous avons confronté les différents exercices élaborés dans les groupes et tenté d'expliciter les critères ayant orienté les différents choix faits.
La durée de l'atelier n'a pas permis d'aller au bout de cette confrontation sur l'ensemble des exercices. Il n'a donc pas été possible de réfléchir à la question de l'assemblage de ces trois exercices en un sujet complet.
Les exercices élaborés dans cet atelier ont été repris par les équipes chargées de la rédaction des annales COPIRELEM du CERPE 2006 et publiés dans celles-ci.

L'atelier s'articule autour de trois pôles :
- **la division euclidienne ;**
- **les constructions géométriques ;**
- **fractions et décimaux**.

Pour chacun d'eux, un corpus d'exercices issus de concours blancs donnés dans différents IUFM au cours de l'année 2005-06 a été proposé aux participants. Il constitue une base de travail pour élaborer un énoncé d'exercice de type concours accompagné de sa question complémentaire. Il est aussi prévu d'en rédiger le corrigé.

Les trois corpus proposés dans l'atelier sont reproduits en annexe, à la fin de ce compte-rendu.

Chaque thème a été pris en charge par un groupe de 5 à 6 personnes avec un des animateurs de l'atelier.

Ci dessous, dans une première partie, nous donnons un aperçu des échanges qui ont eu lieu au sein de l'atelier avant que chaque groupe ne s'engage dans la tâche d'élaboration d'un exercice de concours. Ceux-ci ont fait apparaître des points de vue parfois divergents sur ce que devrait être un « bon sujet » de mathématiques pour le CERPE.

Ensuite, nous relatons le travail des trois groupes et présentons leurs productions.

I – RÉFLEXIONS DES COLLÈGUES CONCERNANT LA CRÉATION DE SUJETS

Il nous est très difficile de faire la synthèse des échanges ayant eu lieu dans l'atelier. Aussi, nous nous contenterons de reproduire, en les regroupant par thèmes, les principaux points qui y ont été évoqués. Certains ont fait rapidement consensus ; d'autres, au contraire, ont été l'objet de débats et les nombreuses questions soulevées restent ouvertes.

Néanmoins, ces discussions ont fait ressortir la nécessité de poursuivre une réflexion collective sur cette question des sujets, afin de construire, à travers eux une culture commune des formateurs et de préciser la place du concours dans le processus de formation des PE.

I – 1 Le contenu de l'évaluation

Le nouveau cadrage du concours rend obligatoire que les questions didactiques soient liées à un exercice théorique. De fait, les exercices avec questions complémentaires concernent en majeure partie le cycle 3. Les sujets n'évaluent donc qu'une partie du programme de l'école.

Des questions se posent :

-Y a-t-il une volonté délibérée de proposer des sujets généraux, voire un peu flous pour que les candidats IUFM ne soient pas avantagés ?

- Comment rendre un sujet effectivement discriminant ?

I – 2 L'articulation entre exercice de mathématique et question complémentaire

Les liaisons entre partie théorique et partie didactique sont généralement peu évidentes, certains des participants les qualifient même de « tirées par les cheveux ».

D'où les interrogations :

- Peut-on traiter les questions complémentaires en faisant l'impasse sur les questions théoriques ?

- La réponse aux questions complémentaires peut-elle avoir une incidence sur la résolution des questions théoriques (donner des idées…) ?

De plus, la nouvelle structure des sujets pose le problème de la compétence – selon l'origine professionnelle - des correcteurs… donc de la validité de l'évaluation. On relate le cas d'une académie où, avant la session 2006, chaque correcteur corrigeait seulement une partie des copies (soit la partie théorique, soit la partie didactique) en fonction de sa compétence. Aujourd'hui, le même correcteur doit corriger l'ensemble des questions… Il devrait donc être compétent à la fois sur les questions de mathématiques et sur celles relatives à leur enseignement.

I – 3 L'implicite dans les sujets

On relève beaucoup d'implicite dans les questions posées en général.

Doit-on et peut-on tout préciser dans les questions (pour lever les implicites) ?

Généralement, les concepteurs de sujets partent d'une réponse pour construire la question. Les candidats, eux, partent de la question pour construire la réponse ! On observe souvent un écart important entre la réponse attendue par le concepteur et celle donnée par le candidat. Cet écart provient-il des implicites contenus dans la question ?

I – 4 Préparer à un concours ou former des PE ?

Certaines précisions s'imposent :

Qu'est-ce qu'un concours de recrutement ? Discrimination des meilleurs candidats ou formation ? Les deux sont-ils conciliables ?

Le concours ne doit pas laisser s'installer des idées fausses. Or, ce peut être l'effet induit par des questions où l'on demande les objectifs d'une séance, laissant ainsi croire au futur PE que les objectifs sont contenus dans le document.

II – AXE DIVISION EUCLIDIENNE

Dans un premier temps, les collègues ont pris connaissance des trois exercices du corpus proposé et ont fait des remarques. Nous les rapportons ci-dessous.

II – 1 Concernant le sujet d'Aix

II – 1.1 Partie théorique

La formulation est jugée « ampoulée » : langage trop formel, usage de lettres systématique. Il y a trop de « pièges » : par exemple des confusions de désignations entre objet et quantité G, g… et N qui exprime un nombre d'ampoules. Les collègues relèvent de grandes incohérences.

Il est également dit que l'exercice apparaît trop discriminant : il ne serait traité intégralement par personne. Effectivement, après avoir interrogé un collègue d'Aix, il reconnaît que le sujet a désemparé les étudiants.

La question 2 a) où il est demandé : « quelle est <u>l'opération qui permet de calculer</u> G en fonction de N ? » a longuement été discutée. Tout d'abord, dans la réponse, ce n'est pas une opération qui est attendue et ensuite, la formulation est non adéquate : il ne s'agit pas de « calculer », mais plutôt d' «exprimer ».

Le sujet a été jugé trop difficile pour des étudiants PE1 qui sont souvent en rupture avec les mathématiques. Dans l'atelier, il a fallu 10 minutes à trois professeurs qui ont travaillé ensemble pour le résoudre ! Il faut écrire les formules dans un sens, puis, pour résoudre, les transformer dans un autre sens.

Le manque de progressivité a également été critiqué : on sait tout faire ou rien faire. De plus, il n'y a pas de réelle ligne directrice dans l'énoncé qui ne semble qu'un prétexte pour arriver aux questions complémentaires.

Le réel enjeu du problème est la numération où la division euclidienne constitue l'outil indispensable pour démontrer le théorème d'existence et d'unicité de l'écriture des nombres entiers dans une base donnée. Un collègue indique qu'il faisait « cela » il y a quelques années, mais que maintenant, il préfère permettre aux étudiants de comprendre la numération avec des manipulations de jetons par exemple dont on fait des paquets.

II – 1.2 Questions complémentaires

Comme il est indiqué plus haut, il s'agit du thème de la numération. De la discussion, il est ressorti que les objets choisis - trombones et boites de trombones - n'étaient pas judicieux. En effet, sur l'annexe 1, le collier de 10 trombones prend plus de place que la boite de 1000 ! Or, comme l'aspect visuel est privilégié dans cette fiche, les représentations proposées à l'étude posent un réel problème.

La production de l'élève Florent est questionnée. *Il compte les dessins et a perdu le sens : il ne voit pas ce que « ça » représente*. Est-il intéressant d'avoir une image aussi compliquée, d'avoir autant d'éléments quand on veut travailler la numération ? l'énergie de l'élève est absorbée par le travail de visualisation !

En conclusion, les collègues pensent que ce sujet doit être totalement refait. Ils estiment qu'il ne faudrait pas le donner « tel que » à des PE1. La reprise de ce sujet demanderait un travail conséquent qu'il n'est pas possible d'entreprendre dans le temps limité de cet atelier.

II – 2 Concernant le sujet de Troyes

II – 2.1 Partie théorique

Le sujet est qualifié d'intéressant, mais il est indiqué qu'il a déjà été largement diffusé auparavant.

L'ordre des questions a été discuté. En effet, il est plus facile de s'engager dans une procédure pour la question c que pour la question b. Des questions formulées de cette manière risquent d' engager les étudiants à utiliser des procédures identiques à celles des élèves et à ne pas percevoir le concept sous jacent.

II – 2.2 Questions complémentaires

Il a été relevé que la première question était plus mathématique que didactique. Un court débat a eu lieu sur la question de la séparation stricte ou non entre questions théoriques et questions didactiques. Peut-on placer des questions mathématiques dans la partie « questions complémentaires » ?

Une critique virulente a été faite sur la question b ; en effet, les procédures attendues sont hors de portée d'un élève de CE2. Il est décidé que si ce sujet était choisi, une modification s'imposera.

II – 3 Concernant le sujet de Toulouse

En ce qui concerne la partie théorique, le groupe a estimé qu'il s'agissait d'un exercice classique, incontournable en PE1. Cependant, il conviendrait de le proposer en formation - par petits morceaux, après un travail sur les diviseurs communs - plutôt qu'en concours blanc.

Pour une nouvelle collègue, la question 1 n'apparaissait pas purement mathématique, mais constituait un problème de recherche. Les autres collègues présents ne partagent pas cet avis. Un débat s'en est suivi sur les divers types de problèmes de l'école élémentaire.

Les participants ont également estimé que le contenu des questions complémentaires était incontournable en formation.

II – 4 La production du groupe

Le choix restait entre les exercices des sujets de Toulouse et celui de Troyes. D'un commun accord, les collègues ont choisi celui de Troyes. Un cahier des charges a été élaboré avant la rédaction du sujet. Il faudrait que celui-ci mette en évidence :

- la connaissance de l'opération division euclidienne (savoir- faire) ;
- la capacité à savoir l'utiliser dans la résolution d'un problème ;
- la capacité à passer à une formalisation ;
- les connaissances arithmétiques.

Il faudrait aussi changer les valeurs numériques (ne pas laisser 23, mais par exemple choisir 7).

Voici le sujet produit :

Exercice (4 points)

Une grande importance sera accordée à la rédaction et aux explications données.
Pour cet exercice, la calculatrice n'est pas autorisée.

1. Parmi les trois nombres suivants : 4 316, 17 034 et 68 901 quels sont les multiples de 17 ? Justifier en écrivant les calculs effectués et expliciter votre démarche.
2. Une puce fait des sauts réguliers de 17 sur une piste numérotée qui peut être prolongée. Par exemple, si elle part de la case 8 et fait deux sauts, elle arrive sur la case 42.
   a) En partant de 23 584 et en faisant des sauts de 17, la puce peut-elle atteindre la case 23 692 ?
   b) En partant de 2 688 et en faisant des sauts de 17, la puce peut-elle atteindre la case 40 598 ?

3. D'une façon générale, si a et b sont deux entiers naturels donnés (a < b), indiquer un procédé général permettant de prévoir s'il est possible d'atteindre b à partir de a en en faisant des sauts de 17.

4.
   a) Quel est le plus petit entier naturel à partir duquel, en faisant des sauts de 17, la puce peut atteindre 52 200 ? Justifier votre réponse.
   b) Quelle est la case la plus proche de 5 000 d'où la puce doit partir pour atteindre effectivement 32 600 ? Justifier votre réponse

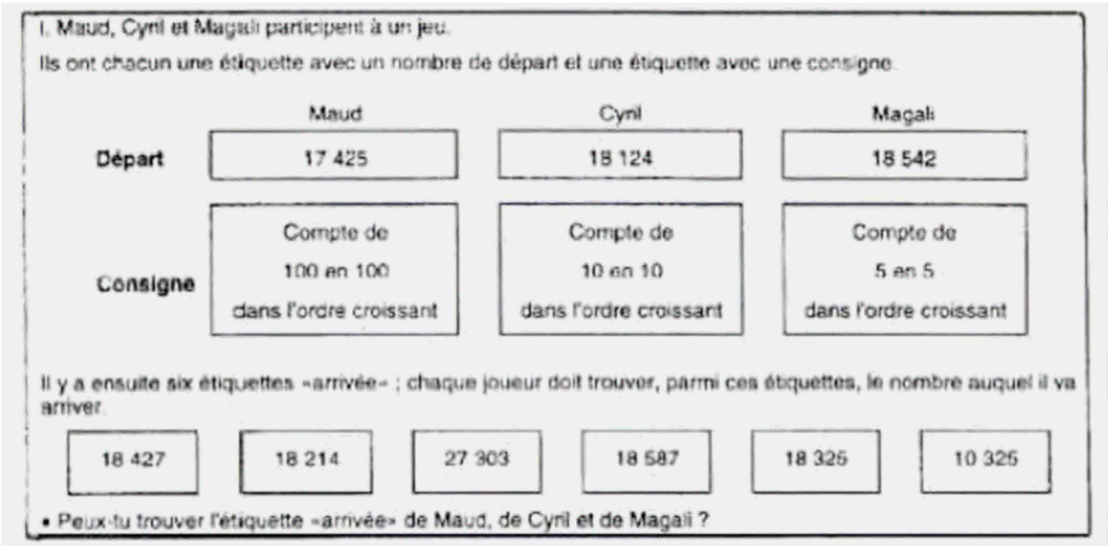
Question complémentaire : (4 points)

1 .Un enseignant de CM2 a donné à chacun de ses élèves l'un des trois exercices suivants :

a) On compte de 17 en 17 : en partant de 0, est-il possible d'atteindre le nombre 4 316 ?
b) On compte de 17 en 17 : en partant de 23 584, est-il possible d'atteindre le nombre 23 692 ?
c) On compte de 17 en 17 : en partant de 2 688, est-il possible d'atteindre le nombre 40 598 ?

Il a constaté que les procédures utilisées par les élèves ayant obtenu rapidement des réponses correctes étaient significativement différentes selon l'exercice traité. Expliquer pourquoi ces différences étaient prévisibles.

2. Le document suivant est adapté du manuel « Maths CE2 », Collection Thévenet, Bordas, 2004



I. Maud, Cyril et Magali participent à un jeu.

Ils ont chacun une étiquette avec un nombre de départ et une étiquette avec une consigne.

	Maud	Cyril	Magali
Départ	17 425	18 124	18 542
Consigne	Compte de 100 en 100 dans l'ordre croissant	Compte de 10 en 10 dans l'ordre croissant	Compte de 5 en 5 dans l'ordre croissant

Il y a ensuite six étiquettes «arrivée» ; chaque joueur doit trouver, parmi ces étiquettes, le nombre auquel il va arriver.

18 427	18 214	27 303	18 587	18 325	10 325

• Peux-tu trouver l'étiquette «arrivée» de Maud, de Cyril et de Magali ?

a) Justifier le fait que cet exercice puisse être donné à des élèves de CE2.
b) Proposer, pour chaque problème posé aux personnages du livre (Maud, Cyril et Magali) une procédure autre que celle qui correspond au comptage de n en n qui permettrait de déterminer dans chaque cas, de façon rapide, l'étiquette « arrivée ». Pourrait-on attendre cette procédure d'un élève de CE2 ?

III – AXE CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Les quatre exercices du corpus proposé ont été choisis pour leurs similarités. En effet les sujets de Dijon et de Lyon sont basés sur le même exercice d'évaluation d'entrée en 6°. Les parties théoriques diffèrent. Les questions complémentaires portent sur des productions d'élèves et là encore, les questions diffèrent. Il en est de même pour les sujets de Reims et Troyes.

Dans un premier temps, les collègues lisent et résolvent les quatre exercices avant de faire des remarques sur chacun d'eux.

III – 1 Concernant le sujet de Dijon

Ce sujet est jugé long et fastidieux. Le nombre d'annexes est trop important. Les codes sont difficiles à utiliser. Même s'il s'agit d'un travail que tout enseignant rencontrera, il ne paraît pas très adapté au concours. La difficulté d'un sujet ne doit pas résider dans la multiplicité des annexes. La relation entre la partie mathématique et la partie didactique est illusoire.

L'intérêt d'un tel sujet est unanimement reconnu mais il semble plus intéressant de le reprendre en travaux dirigés en formation.

III – 2 Concernant le sujet de Lyon

Ce sujet semble plus pertinent que celui de Dijon au niveau d'un concours de recrutement. Mais la partie mathématique semble relativement pauvre et devrait donc être remanier. Le lien entre la partie mathématique et la partie didactique est flagrant : les candidats résolvent le même exercice que celui donné aux élèves, mais, de ce fait, les questions mathématiques apparaissent trop « légères ». Par ailleurs, les questions complémentaires sont jugées trop évasives. Il faut essayer d'être plus précis.

III – 3 Concernant les sujets de Reims et de Troyes

Ces deux sujets ont été rapidement écartés, les collègues ayant choisi de travailler sur les sujets de Lyon et Dijon. Il est tout de même à noter que les sujets de Reims et Troyes proposent une analyse de productions d'élèves très différentes. Pour Troyes, ce sont des productions réelles. Pour Reims, les productions sont réalisées à l'ordinateur. On remarquera également que le sujet de Troyes n'est pas compréhensible au niveau de la question 8 (il manque l'énoncé de l'exercice proposé aux élèves, est-ce un oubli ou est-ce volontaire ?).

III – 4 La production du groupe

III – 4.1 Élaboration du sujet « construction géométrique »

Le choix du groupe est de partir du sujet de Lyon et de le retravailler en incluant des parties du sujet de Dijon.

La discussion est amorcée sur la pertinence des questions théoriques du sujet de Lyon.

- Est-ce trop facile ? Les instruments sont-ils à préciser ?
- Faut-il préciser que les traits de constructions doivent être apparents ?
- Qu'entend-on par programme de construction ?
- Quels sont les incontournables d'un programme de construction ?
- Doit-on attendre les étapes de construction d'une médiatrice ou simplement une phrase du type « construire la médiatrice » ?
- La question 1-4 comporte deux sous questions. Il faut dissocier les questions pour que chaque question ne comporte qu'une réponse.
- Comment reposer la question 1-4 ? La justification est-elle à demander ? Quelle justification est-on en droit d'attendre ? Cette dernière question est plus en rapport avec le corrigé.

La seconde partie de la discussion porte sur la question complémentaire :

- La construction d'une droite parallèle ou d'une perpendiculaire à la règle et au compas sont-elles des compétences qui relèvent de la sixième ?
- La première question complémentaire de Lyon est critiquée. Quelle réponse est-on en droit d'attendre d'un candidat ? A priori, il ne s'agit que de reprendre les étapes de la construction demandée à l'élève, alors quel est l'intérêt de cette question ? Les collègues décident de supprimer cette question.
- Il est décidé de questionner les candidats sur les procédures des élèves de cycle 3 face à l'exercice proposé. Dans un premier temps, les collèges s'interrogent sur

l'implicite suivant : lorsque l'on demande aux candidats d'imaginer des procédures d'élèves, implicitement on pense aux procédures qui aboutissent à la bonne solution. Qu'en est-il des procédures qui ne mènent pas au résultat escompté ? Ce sont toujours des procédures mais doit-on les envisager ? Il semble alors pertinent d'essayer de lever l'ambiguïté. De même, les procédures attendues peuvent être de différents ordres. Il semble alors important de préciser « procédure experte » ou « procédure attendue ». Ces deux termes n'étant pas équivalents, lequel choisir ? Quelle est l'influence de ces termes sur les réponses attendues des candidats ?

- Lorsque l'on parle des questions posées aux élèves, parle-t-on des tâches dévolues à l'élève ?
- Les productions des élèves sont choisies en fonction de leur intérêt parmi les productions analysées dans les sujets de Lyon et de Dijon. Chacune des 8 productions est analysée. Le groupe décide de ne retenir que trois productions : deux de Dijon et une de Lyon. L'accent est mis sur les éléments intéressants que fournissent ces productions. Les commentaires concernant ces productions sont donnés dans le corrigé fourni du problème proposé (voir annexe 6).
- La seconde question complémentaire concerne l'analyse précise des productions. Il s'agit de demander au candidat de repérer les erreurs et de les analyser. Une discussion s'engage sur les termes à employer. « Repérer », « décrire », « identifier »…Quel terme choisir ? Les participants ne veulent pas que les candidats se limitent à préciser où sont les erreurs mais ils veulent également que les candidats décrivent de manière précise l'erreur. Doit-on demander également des origines possibles de ces erreurs, sachant que ce type de question apporte généralement des réponses floues ?
- Les collègues trouvent que ce type d'exercice se prête bien à une question complémentaire concernant les TICE. Ils décident alors d'inclure une question sur les logiciels de géométrie dynamique. La discussion qui s'engage concerne le type de question à poser et le type de question que l'on peut retrouver dans les sujets. A priori ces questions sont toujours critiquables ? Peut-on poser des questions précises sur l'utilisation d'un logiciel ? Tous les logiciels sont-ils à connaître ? Les logiciels ont-ils tous les mêmes caractéristiques (historiques, commandes cachées, menus déroulant…) ? Peut-on citer des noms de logiciels ?…Les collègues décident de poser une question sur l'intérêt de l'utilisation d'un logiciel quelconque de géométrie dynamique pour ce genre d'exercice.

III – 4.2 Le sujet produit

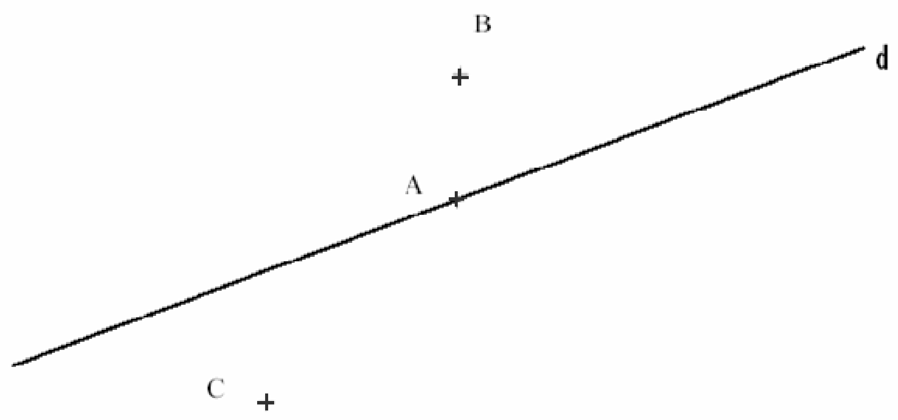
<u>Partie I : Partie théorique</u>

1) Sur l'annexe I , **à rendre avec votre copie,** réaliser la construction suivante, en n'utilisant que la règle non graduée et le compas: (Laisser les traits de construction apparents).

<u>Étape A</u> : Tracer la droite passant par C et qui est perpendiculaire à d.
<u>Étape B</u> : Tracer la droite passant par B et qui est parallèle à d.
<u>Étape C</u> : Tracer les triangles rectangles isocèles d' hypoténuse [AC].
<u>Étape D</u> : Construire un triangle AIJ isocèle de sommet principal I, tel que I est un point de d et B est le pied de la hauteur issue de A (c'est à dire que B est l'intersection de la hauteur issue de A avec le côté opposé).

2) Pour l'étape D, y a t'il plusieurs possibilités ? justifier.[1]
3) Écrire un programme de construction pour les étapes C et D.

Partie II : Question complémentaire
Cet exercice a été donné lors d'une évaluation à l'entrée en sixième :



1. Trace la droite qui passe par les points A et C.
2. Trace la droite qui passe par C et qui est perpendiculaire à la droite **d**.
3. Trace la droite qui passe par B et qui est parallèle à la droite **d**.
4. Trace le cercle de centre B passant par A.
5. Trace le cercle de diamètre [AC].

Vous trouverez en annexes les travaux de trois élèves.

a) Quelles procédures (expertes ? exigibles ?) sont attendues d'un élève de fin de cycle 3 pour répondre aux (tâches des) questions 2 et 5. En citer 2 pour chacune des questions.

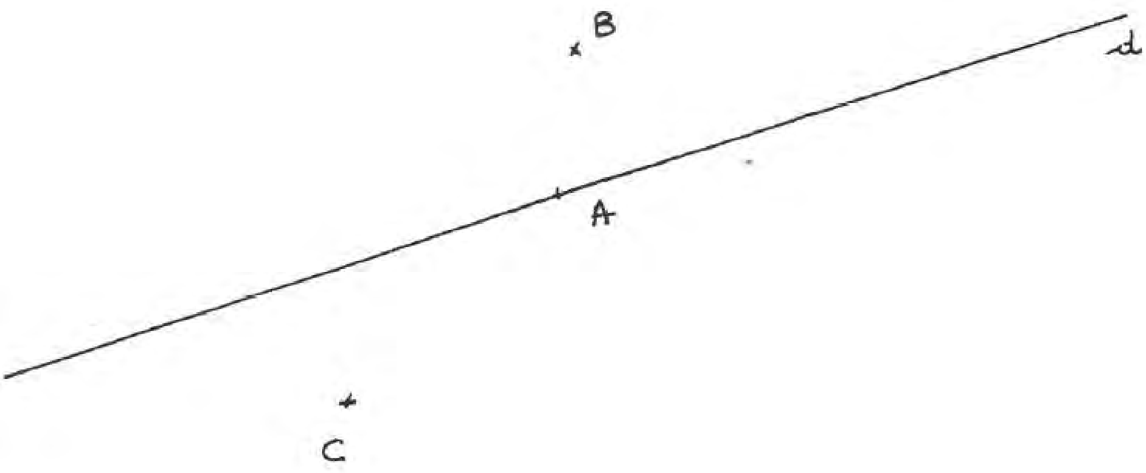
b) Repérer (décrire ? identifier ?) et analyser (faire des hypothèses sur les origines ?) les différentes erreurs pour chaque production.

c) Pour quelle construction l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique serait-il pertinent ? Justifier. (Justifier l'apport du logiciel de géométrie dynamique par rapport à l'environnement « papier-crayon »).

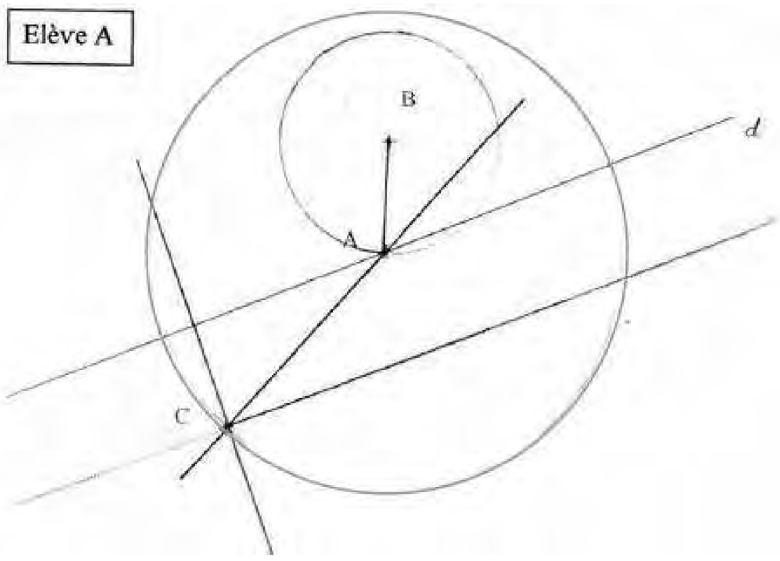
[1] Les éléments qui figurent ici en caractères rouges dans le texte de cet exercice ainsi que dans le corrigé proposé correspondent à ceux qui étaient encore l'objet de débat à la fin de l'atelier.

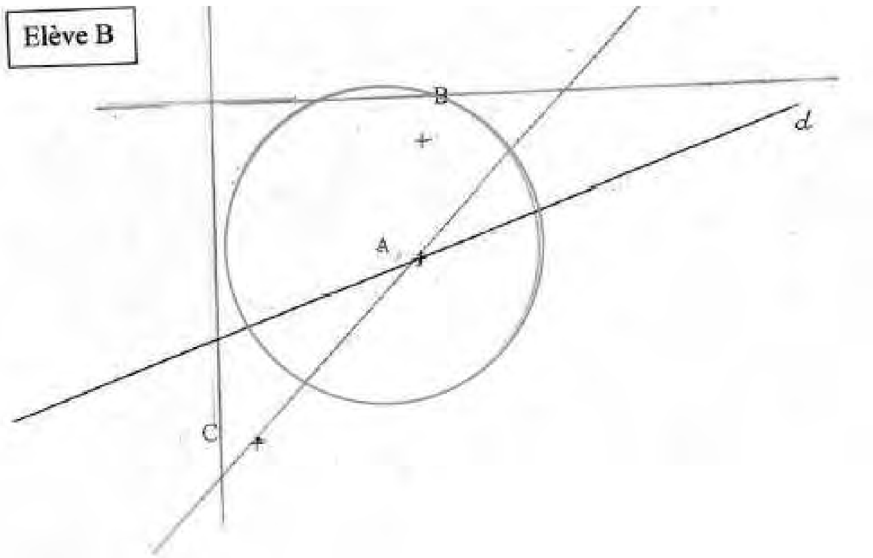
ANNEXE I *à rendre avec la copie*

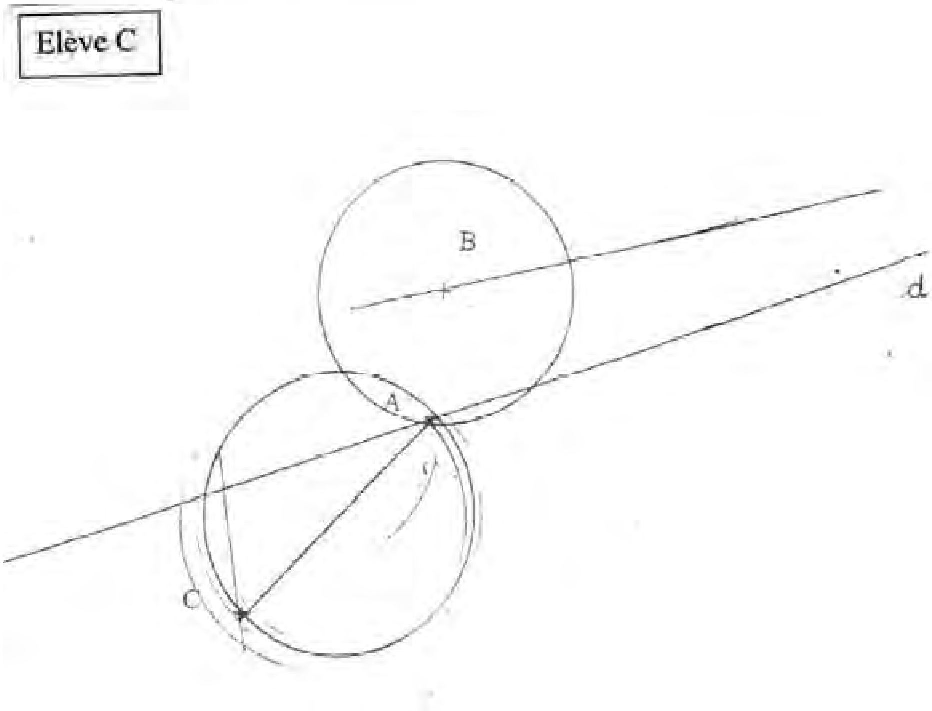
Nom section



Elève A







III – 4.3 Élaboration du corrigé « construction géométrique »

Les discussions concernant le corrigé commencent par une mise au point sur la manière dont est corrigé le concours dans les différentes académies. Il est clair que chaque académie est autonome et que rien n'est clairement cadré. Certaines académies acceptent les professeurs d'IUFM en tant que correcteurs, certaines les refusent. Les corrigés envoyés par le ministère servent de base de travail mais chaque commission académique produit son propre corrigé et ce dernier n'est pas disponible (document interne). Le recrutement des correcteurs est une question sensible.

Dans le cadre de travail que nous nous sommes fixés, il s'agit de produire un corrigé qui s'adresse aux PE qui préparent le concours. Le manque de temps pour réaliser un corrigé formateur dans le cadre de cet atelier est manifeste. Les collègues s'orientent donc pour un corrigé sommaire et soumis à un questionnement basé sur les corrigés proposés par Lyon et Dijon.

Les questions de la partie théorique sont laissées de côté. Seules les questions complémentaires sont discutées. En particulier :

- Les procédures attendues basées uniquement sur le perceptif sont-elles des procédures à attendre d'un élève ? Même si ces procédures peuvent donner le résultat, elles ne correspondent pas à une attente claire au niveau mathématique.
- Les productions d'élèves sont résumées sous forme de tableau. La question posée aux candidats demande de relever les erreurs. Doit-on préciser l'absence d'erreur ?

III – 4.4 Le corrigé produit

Question complémentaire :

Question a)

- Pour la question 2

Procédure 1 : Tracer à main levée une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné avec un contrôle perceptif.
Procédure 2 : Tracer à l'aide de l'équerre.
Procédure 3 : Utiliser le pliage.

- Pour la question 5

Construire (trouver ?) le milieu du segment *[AC]*, puis tracer le cercle.
Procédure 1 : Par mesurage et calcul (avec ou sans calculatrice).
Procédure 2 : Par pliage.
Procédure 3 : De manière perceptive uniquement.

Question b)

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5
Élève A	Correct	Correct	Tracé d'une parallèle à *d* passant par C et non par B. Il semble qu'il l'ai tracer à l'équerre.	Correct (il trace le rayon[AB])	Confusion rayon diamètre.
Élève B	Tracé imprécis	Confusion « verticale » et « perpendiculaire ». La droite passe par la lettre « C » et pas par le point « C ».	Confusion « horizontale » et « parallèle ». La droite passe par la lettre « B » et pas par le point « B ».	Il trace le cercle de centre la lettre B et passant par la lettre A. Inversion des lettres.	Non réponse.
Élève C	Segment au lieu d'une droite	Contrôle perceptif pour le tracé de la perpendiculaire ou d'une « verticale ».	Perceptif incorrect.	Correct mais imprécis.	Après différents essais il trace perceptivement le cercle sans se soucier du centre.

Question c)

Il s'agit de la question 5 *(« Trace le cercle de diamètre [AC] »*). Un logiciel de géométrie dynamique permet de voir si l'élève construit le milieu du segment pour avoir le centre du cercle. Le logiciel permet de mettre en défaut la recherche perceptive du cercle de diamètre [AC] ; la validation se fait par déplacement d'un des points de la figure et vérification de la « robustesse » de la construction.

IV – AXE FRACTIONS ET DÉCIMAUX

Ce groupe a poursuivi la discussion générale amorcée en début d'atelier sur les critères à respecter pour construire un « bon sujet ». Les questions ci-dessous ont servi de guide dans la construction d'un exercice combinant, en les modifiant, certaines questions théoriques du sujet d'Aix aux questions didactiques du sujet de Nice.

- Quel lien entre l'exercice de mathématiques et la question complémentaire ?

- Quelle quantité de documents peut-on raisonnablement proposer dans un exercice ? La question complémentaire du sujet d'Aix apparaît comme caricaturale avec sept pages de document pour deux questions.

Pour rendre le sujet discriminant :

- Vérifier les compétences du programme du concours : couvrir au mieux le programme en évitant de poser plusieurs fois la même question. On rencontre cet écueil dans les sujets d'Aix , du Havre et de Besançon.
- Lecture et connaissance des IO : attention aux questions qui font encore débat entre nous et qui trouveront davantage leur place dans la formation des PE2 comme les choix à faire au cycle 3 entre les différents significations de $\frac{a}{b}$ (voir le sujet d'Aix).
- Évaluer la compétence à mettre en œuvre une solution originale : donner une place au travail sans appui sur un algorithme.
- Des concepts à tester : problème de densité des décimaux…

Le sujet de Besançon est jugé beaucoup trop formel : on risque de décourager des candidats qui ne seraient pas forcément de mauvais PE.

L'ordre des questions est important : ne pas commencer par les questions les plus difficiles !

Éviter les questions qui commencent par « que peut-on dire ? » qui s'avèrent souvent trop ouvertes et difficiles à évaluer.

Le sujet produit

1) Indiquer deux méthodes possibles permettant de dire si une fraction représente un nombre décimal.

2) Parmi les quatre fractions suivantes, quelles sont celles qui représentent un nombre décimal ? Justifier la réponse.

$\frac{54}{1350}$; $\frac{5}{700}$; $\frac{17}{1024}$; $\frac{50}{1375}$.

3) Quels sont tous les nombres entiers naturels *n* pour lesquels la fraction $\frac{n}{1050}$ représente un nombre décimal ? Justifier la réponse.

4) Montrer que l'on peut donner, <u>sans calcul,</u> l'écriture à virgule du nombre $\frac{41}{333}$ à partir de l'égalité : $41 = 333 \times 0{,}123 + 0{,}041$.

5) Les nombres représentés par les fractions $\frac{342}{27777500}$ et $\frac{41}{3330000}$ sont-ils égaux ?

Justifier la réponse :

- En utilisant seulement les écritures fractionnaires.
- En utilisant les écritures à virgule de ces nombres.

Question complémentaire :

1. Voici 4 règles erronées utilisées par des élèves pour ranger des nombres décimaux :

   <u>Règle 1 :</u>
   On ne tient pas compte de la virgule : les nombres décimaux sont considérés comme des nombres entiers sur lesquels est plaquée la virgule.
   <u>Règle 2 :</u>
   La règle de comparaison des nombres entiers est appliquée aux parties décimales considérées seules.
   <u>Règle 3 :</u>
   À parties entières égales, le plus grand des deux nombres est celui qui a le plus de chiffres après la virgule.
   <u>Règle 4 :</u>
   À parties entières égales, le plus petit des deux nombres est celui qui a le plus de chiffres après la virgule.

   1. Donner, pour chacune des quatre règles, une liste de trois nombres décimaux tels que l'application de la règle réalise un rangement exact.
   2. Donner, pour chacune des quatre règles, une liste de deux nombres décimaux tels que l'application de la règle réalise un rangement faux.
   3. Quelle liste de trois nombres décimaux peut proposer un maître pour mettre en échec aussi bien la règle 3 que la règle 4 ?

2. Dans le cadre de l'école primaire, les élèves pensent fréquemment que : « Multiplier un nombre non nul et différent de 1, c'est l'augmenter. ».

   a. Formuler une hypothèse pour expliquer cette conception erronée des élèves.
   b. Un maître dispose-t-il, dans le cadre du programme, d'exemples pour invalider cette proposition ? Justifier la réponse.

3. Un élève a fait la multiplication ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 1\,1,4 \\ \times\ 5,3 \\ \hline 3\,4\,2 \\ 5\,7\,0 \\ \hline 6\,0\,4,2 \end{array}$$

A partir de quelle classe peut-on rencontrer une telle production ? Justifier la réponse.
Formuler une hypothèse d'interprétation de cette erreur.

V – POUR CONCLURE

Le travail de l'atelier s'est terminé par une discussion collective autour de la production du sous-groupe « constructions géométriques » dont voici les principaux éléments :

- Est-il nécessaire de demander une justification de chaque construction ? Pour les étapes A et B il faut préciser qu'il faut laisser les traits de construction apparents (sans plus, cela n'a jamais posé de problème lors des corrections).
- Quel est le lien entre les deux parties ?
- La partie mathématique est-elle vraiment consistante ?
- A propos de la question 1 étape D, il est préférable d'appeler le triangle IAS au lieu de AIS.
- A propos des questions de Dijon : différence de performance entre les tracés des perpendiculaires et des parallèles. La question est fine, elle n'est pas à poser au concours mais à réserver à la formation.
- Le catalogue des erreurs des élèves à l'école élémentaire n'est pas vraiment défini.
- Il faut expliciter davantage le corpus de connaissances exigibles chez le PE pour l'analyse des erreurs.
- Voir les compétences pour lesquelles il est intéressant de proposer des analyses d'erreurs.
- A propos des erreurs, il est à noter l'importance du verbe « analyser ». Deux tâches sont à réaliser : repérer et analyser. Le barème doit distinguer ces deux critères. Le verbe « analyser » comporte-t-il l'implicite « faire des hypothèses sur les origines », « décrire puis catégoriser » ?
- A propos des erreurs : « décrire » semble préférable à « repérer ».
- Discussion autour du codage utilisé dans les évaluations nationales.

L'atelier, s'il a pu déboucher sur de réelles productions, a surtout permis de pointer de nombreuses questions qui mériteraient d'être reprises au cours des prochains colloques.
En effet, il reste encore beaucoup d'implicites à lever quant à nos attentes de formateurs relativement aux sujets du CERPE. Pour évaluer le plus « justement » possibles les compétences attendues des candidats, il faudrait parvenir à définir plus clairement celles-ci avec les modalités de leur évaluation. Un immense chantier, mais aussi un défi pour renforcer la crédibilité de nos formations…

ANNEXE 1 – CORPUS RELATIF À LA DIVISION EUCLIDIENNE

Exercice 4 d’un concours blanc de Toulouse en 2005-06

Le texte de l’exercice proposé

Ses annexes

Le corrigé de cet exercice

Exercice 1 d’un concours blanc de Troyes en 2005-06

Le texte de l’exercice proposé

Le corrigé de cet exercice

Exercice 3 d’un concours blanc d’Aix-Marseille en 2005-06

Le texte de l’exercice proposé

Ses annexes

Le corrigé de cet exercice

ANNEXE 2 – CORPUS RELATIF AUX CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Exercice 2 d'un concours blanc de Dijon en 2005-06

Le texte de l'exercice proposé

Ses annexes

Le corrigé de cet exercice

Exercice 3 d'un concours blanc de Lyon en 2005-06

Le texte de l'exercice proposé

Ses annexes

Le corrigé de cet exercice

Exercice 3 d'un concours blanc de Reims en 2005-06

Le texte de l'exercice proposé

Ses annexes

Le corrigé de cet exercice

Exercice 1 d'un concours blanc de Troyes en 2005-06

Le texte de l'exercice proposé

Le corrigé de cet exercice

ANNEXE 3 – CORPUS RELATIF AUX FRACTIONS ET AUX DÉCIMAUX

Exercice 1 d'un concours blanc du Havre en 2005-06

Le texte de l'exercice proposé

Le corrigé de cet exercice

Exercice 3 d'un concours blanc de Besançon en 2005-06

Le texte de l'exercice proposé

Le corrigé de cet exercice

Exercice 1 d'un concours blanc d'Aix-Marseille en 2005-06

Le texte de l'exercice proposé

Ses annexes

Le corrigé de cet exercice

Partie didactique d'un concours blanc de Nice en 1994-95

Le texte de l'exercice proposé

Le corrigé de cet exercice

ÉNONCÉ TOULOUSE – DIVISION EUCLIDIENNE 3,5 + 4 POINTS

1. La partie de droite de cette division a été effacée. On demande de la retrouver *(les justifications ne sont pas demandées).*

```
529565 |
 2466  |------
  2225 |
   542 |
```

2. On a oublié une "division", on sait que le dividende était plus petit que 300, que le quotient était 82 et le reste 47. Quels pourraient être le dividende et le diviseur ?

3. Le quotient de 2 entiers naturels est 6 et le reste est 47. La somme des 2 entiers et du reste est 591. Quels sont les deux entiers ?

4. On veut calculer une valeur approchée au dixième près par défaut du quotient de 129 par17 en utilisant une calculatrice dont la seule touche d'opération disponible est celle de la soustraction *(les touches des autres opérations ne fonctionnent pas).* Proposer une démarche.

Question complémentaire : Procédures de division euclidienne

1) au CM1

Dans la première séance sur la division euclidienne proposée dans une classe de CM1, le maître propose aux élèves le problème suivant :

> Un aviculteur a ramassé 105 œufs. Il les place dans des boîtes contenant chacune 12 œufs.
> Combien de boîtes peut-il remplir ?
> Tous les œufs seront-ils rangés ?

Après une reformulation collective de l'énoncé, un temps de travail individuel, les élèves rédigent une solution par groupes de 4 ou 5 élèves.
Le productions des différents groupes de la classe sont dans l'annexe 2.
Les procédures sont ensuite comparées et le maître dit aux élèves qu'ils viennent de traiter un problème de division et donne le vocabulaire spécifique : "quotient" et "reste".

a) Quel est l'objectif du maître dans cette première séance ?

b) Classez les procédures des différents groupes en les caractérisant.

c) Après avoir observé les procédures des groupes B, D, E et F, le maître se propose d'amener les élèves à faire évoluer la procédure du groupe F. Pour cela, il veut modifier le problème de l'aviculteur. Proposez un énoncé que pourrait utiliser le maître. Justifiez votre proposition en explicitant les variables didactiques sur lesquelles vous avez agi.

d) En fin de séquence, le maître donne aux élèves l'aide-mémoire de l'annexe 3.
Donnez un titre pertinent pour chacune des 4 étapes de cet aide-mémoire

2) au CM2 : exercices de l'annexe 4

a) Quelle est, précisément la connaissance mathématique visée dans ces exercices sur la division.

b) Situez les objectifs de ces exercices dans les programmes de mathématiques du cycle 3 et dites si vous trouvez ces exercices adaptés.

Annexes de cet exercice Corrigé Retour

ANNEXES TOULOUSE – DIVISION EUCLIDIENNE

Annexe 2

12 + 12 24 + 12 36 + 12 48 + 12 60 60 + 12 72 + 12 84 + 12 ~~96~~ ~~+ 12~~ ~~108~~ Il remplit 8 boîtes. Il reste 9 œufs GROUPE A	105 - 12 93 81 - 12 69 57 - 12 45 33 - 12 21 93 - 12 81 69 - 12 57 45 - 12 33 21 - 12 09 8 boîtes sont remplies 9 œufs ne sont pas rangés GROUPE B	12 +12 +12 +12 +12 +12 72 72 +12 84 + 12 ~~96~~ ~~+ 12~~ ~~108~~ 96 + 9 = 105 Il y a 8 boîtes de 12. Il reste 9 œufs GROUPE C
12 x 6 72 12 x 9 108 12 x 8 96 105 – 96 = 9 Il remplit 8 boîtes. Il reste 9 œufs GROUPE D	105 - 12 93 - 12 69 - 24 45 45 - 24 21 - 12 9 Il y a 8 boîtes. 9 œufs ne sont pas rangés. GROUPE E	105 - 36 069 - 36 33 - 24 9 Il peut remplir 8 boîtes. 9 œufs vont rester. GROUPE F

[Énoncé de cet exercice] [Corrigé] [Retour]

Annexe 3
Extrait d'"objectif calcul CM1" (Hatier – 2001)

La division : technique

Exemple : 4 732 ÷ 16.

a Pour commencer, trouve le nombre de chiffres du quotient.
16 × 100 < 4 732 < 16 × 1 000
Le quotient est compris entre 100 et 1 000. Ce sera un nombre de 3 chiffres.
Indique le nombre de chiffres avec des points.

b Puis construis le répertoire de 16.
16 × 1 = 16
16 × 2 = 32
16 × 3 = 48
16 × 4 = 64
16 × 5 = 80
16 × 6 = 96
16 × 7 = 112
16 × 8 = 128
16 × 9 = 144

c Ensuite pose la division.

les centaines	$\boxed{47}32$	16
2 centaines de fois 16 ←	− 3 2 0 0	2 9 5
les dizaines	$\boxed{153}2$	• • • ←
9 dizaines de fois 16 ←	− 1 4 4 0	unités
les unités	$0\boxed{92}$	dizaines
5 fois 16 ←	− 8 0	centaines
	1 2	

d Enfin, écris l'égalité qui traduit l'opération que tu viens de faire:
4 732 = (16 × 295) + 12
Cette égalité te permet de vérifier si ton opération est juste et de conclure :
le quotient de 4 732 ÷ 16 est 295 et le reste est 12, car 12 < 16.

Annexe 4
Extrait de Cap math CM2 (Hatier - 2004)

Chercher : Partages

La calculatrice est interdite

1 Un fil long de 26 m est partagé en 4 morceaux de même longueur.
Quelle est la longueur exacte, en mètres, de chaque morceau ?

2 Douze personnes ont dîné dans un restaurant anglais. Elles décident de se partager l'addition qui s'élève à 225 livres sterling.
Combien chaque personne doit-elle payer ?

3 Un bloc de 120 feuilles de papier a une épaisseur de 15 mm.
Quelle est, en millimètres, l'épaisseur exacte d'une telle feuille de papier ?

Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

CORRIGÉ TOULOUSE – DIVISION EUCLIDIENNE

1.

$$\begin{array}{r|l} 529565 & \underline{561} \\ \underline{-5049} & 943 \\ 2466 & \\ \underline{-2244} & \\ 2225 & \\ \underline{-1683} & \\ 542 & \end{array}$$

$5049 = 3^3 \times 11 \times 17$ $2244 = 2^2 \times 3 \times 11 \times 17$ $1683 = 3^2 \times 11 \times 17$

Le 3 nombres précédents sont des multiples du diviseur cherché. Ce diviseur doit être supérieur au reste 542. Il n'y a que le plus grand diviseur commun de ces 3 nombres qui convienne : 561, c'est le diviseur. Il suffit de faire la division pour trouver le quotient.

1 point

2. Il n'y a pas de solution puisqu'il faudrait trouver pour le diviseur un nombre supérieur au reste, 47 et dont le produit par 82 soit inférieur à 300.

Le premier diviseur possible, 48 est tel que 82 x 48 = 3936 qui est supérieur à 300.

0,5 point

3. Écrivons les égalités données par l'énoncé :

En résolvant le système, on trouve a = 473 et b = 71.

Les deux entiers sont donc 473 et 71.

On vérifie que dans la division euclidienne de 473 par 71 le quotient est 6 et le reste 47.

La somme de 473, de 71 et de 47 est bien 591.

1 point

4. On peut décomposer le travail en deux étapes :

On peut d'abord faire des soustractions successives de 17 en en comptant le nombre, tant que c'est possible : c'est la recherche de la partie entière du quotient.

129 – 17 = 112 n = 1
112 – 17 = 95 n = 2
95 – 17 = 78 n = 3
78 – 17 = 61 n = 4
61 – 17 = 44 n = 5
44 – 17 = 27 n = 6
27 – 17 = 10 n = 7 alors 129 = 7 x 17 + 10

Ensuite, on va chercher la partie décimale (les dixièmes) à partir du reste, l'entier 10 qui vaut 100 dixièmes. On refait des soustractions successives de 17.

100 – 17 = 83 n = 1
83 – 17 = 66 n = 2
66 – 17 = 49 n = 3
49 – 17 = 32 n = 4
32 – 17 = 15 n = 5 alors 100 = 5 x 17 + 15 ou $10 = \frac{5}{10} \times 17 + \frac{15}{10}$

On a trouvé 129 = 7,5 x 17 + 1,5

Une valeur approchée au dixième près par défaut du quotient est 7,5.

1 point

Question complémentaire

1) au CM1

a) L'objectif du maître est de repérer les procédures personnelles utilisées par ses élèves pour résoudre des situations de division : il s'agit d'une évaluation diagnostique avant d'amener les élèves vers la notion de division euclidienne.
0,5 point

b) On peut distinguer 4 classes de procédures, chacune d'entre elles permettant de résoudre le problème: procédure par addition réitérée, par soustraction réitérée, par soustraction de multiples, procédure multiplicative
Procédure par addition réitérée : les groupes A et C. Il s'agit de l'addition réitérée de 12 jusqu'à ce que la somme dépasse 105, là ils reviennent au terme précédent, 96. Le groupe A ne justifie pas le reste, le groupe C le justifie en donnant une addition qui permet de trouver le complément de 96 à 105. Les deux résultats sont justes, les deux groupes ont bien compté le nombre fois que 12 était ajouté, pour avoir le quotient, 8.
Procédure par soustraction réitérée : le groupe B. Il s'agit de soustraire 12 tant qu'on peut. La dernière différence donne le reste. Le nombre de fois qu'on enlève 12 indique le quotient. Le groupe interprète bien les calculs.
Procédure par soustraction de multiples : les groupes E et F. Les élèves soustraient 12 ou des multiples de 12, 24 ou 36 qui correspondent à 2 ou 3 boîtes d'œufs. Le dernier calcul donne le reste. Les élèves interprètent bien leurs calculs.
Procédure multiplicative : Le groupe D encadre 105 par des multiples de 12, il tâtonne en posant plusieurs multiplications pas 12. Le reste est trouvé en soustrayant 8 x 12 à 105. Bonne interprétation des calculs.
1 point

c) En fait, "en mettant de côté" les stratégies additives des groupes A et C, seules restent les procédures de soustractions du diviseur ou de multiples de celui-ci. "Améliorer" la procédure du groupe F, c'est amener les élèves à diminuer le nombre de soustractions en retranchant un multiple du diviseur mieux adapté. On demande de modifier le problème de l'aviculteur, donc de garder la situation de base en l'adaptant en fonction du nouvel objectif.
Pour l'obtenir, plusieurs moyens sont possibles :
modifier les variables numériques, et principalement le quotient à déterminer ;
donner aux élèves un répertoire des multiples du diviseur qui leur facilite la recherche des multiples successifs à retrancher ;
limiter le nombre maximal d'opérations possibles
Une proposition : "L'aviculteur a ramassé 2475 œufs. Combien de boîtes de 12 œufs peut-il remplir ? Combien d'œufs reste-t-il ?"
Justification : En choisissant un quotient assez grand (il est égal à 206 !) les additions réitérées ou les soustractions réitérées du diviseur lui-même n'ont plus de chance de vivre. De plus les deux premiers chiffres du dividende laissent nettement apparaître un multiple simple et commode du diviseur : 2400 c'est 24 x 100 ou 12 x 200, ou encore 2 fois
12 x 100. Cela devrait inciter les élèves à retrancher 2400 au dividende. Du reste partiel 75 il reste à retrancher 72, c'est à dire 6 fois 12 (là encore les premiers chiffres sont identiques...).
Les variables didactiques sur lesquelles on a agi sont donc : la taille des nombres (plus exactement la taille du quotient), les relations arithmétiques entre le dividende

et le diviseur (facilitant le repérage de multiples du diviseur faciles à soustraire au dividende).
1 point : énoncé 0,5, justification 0,25, variables explicitées 0,25

d) Titres des différentes étapes :
a) Détermination du nombre de chiffres du quotient,
b) Construction du répertoire de 16,
Pose de la division avec la potence,
Vérification de la division.
0,5 point

2) Au CM2

a) il s'agit de calculer un quotient exact décimal, dans une situation de division-partition, pour chacun de ces trois exercices. 0,5 point

b) Les documents d'application de cycle 3 (cités ci-dessous) indiquent que le quotient décimal n'est pas une compétence exigible en cycle 3 mais que cette notion peut être travaillée en résolution de problème en utilisant des procédures personnelles dans le cadre du calcul réfléchi. Des problèmes qui favorisent le recours à un quotient décimal peuvent être des problèmes sur les mesures ou la monnaie.
Les exercices de CM2 proposés dans l'annexe sont donc en adéquation avec le programme.
Extrait du document d'application de cycle 3 :
" Le calcul d'un quotient décimal issu de la division de deux entiers ou d'un décimal par un entier n'est […] pas une compétence exigible au cycle 3. Mais, des situations où les élèves sont conduits à chercher ce type de résultat par des procédures personnelles doivent être proposées.
Par exemple, s'il s'agit de partager équitablement 203 euros entre 5 personnes, les procédures suivantes peuvent être utilisées :
– convertir les 203 euros en 20 300 centimes, puis effectuer la division ;
– donner 40 euros à chacun, puis convertir les 3 euros restants en 300 centimes pour terminer le partage ;
– poser la division de 203 par 5, puis convertir le reste (3 unités) en 30 dixièmes pour poursuivre le calcul.
Dans tous les cas, on reste au niveau d'un calcul réfléchi explicite, sans viser la mise en place d'un automatisme. La calculatrice peut également être utilisée lorsque, par exemple, le calcul de la division de 203 par 5 a été reconnu comme pertinent, l'attention des élèves devant être
attirée sur l'interprétation du résultat affiché, notamment sur les chiffres significatifs de la partie décimale."
0,5 point

Énoncé de cet exercice Annexes de cet exercice Retour

ÉNONCÉ TROYES – DIVISION EUCLIDIENNE 4 + 4 POINTS

1. a. En partant de 17 584 et en comptant de 23 en 23, peut-on atteindre le nombre 17 692 ? Justifier votre réponse.
b. En partant de 2 197 et en comptant de 23 en 23, peut-on atteindre le nombre 31 600 ? Justifier votre réponse.
c. En partant de 0 et en comptant de 23 en 23, peut-on atteindre le nombre 5 727 ? Justifier votre réponse.
2. D'une façon générale, si a et b sont deux entiers naturels donnés (a < b), indiquer un procédé général et rapide (couper rapide) permettant de prévoir s'il est possible d'atteindre b à partir de a en comptant (couper en comptant) en faisant des sauts de 23 en 23.
3. Quel est le plus petit entier naturel à partir duquel, en comptant de 23 en 23, on peut atteindre 31 600 ? Justifiez votre réponse.

Questions complémentaires

1. Un enseignant de CM2 a donné à chacun de ses élèves l'un des trois exercices suivants :
   a. On compte de 23 en 23 ; en partant de 17 584, est-il possible d'atteindre le nombre 17 692 ?
   b. On compte de 23 en 23 ; en partant de 2 197, est-il possible d'atteindre le nombre 31 600 ?
   c. On compte de 23 en 23 ; en partant de 0, est-il possible d'atteindre le nombre 5 727 ?

   Il a constaté que les procédures utilisées par les élèves ayant obtenu rapidement des réponses correctes étaient significativement différentes selon l'exercice traité. Expliquer pourquoi ces différences étaient prévisibles.
2. Le document suivant est adapté du manuel « Maths CE2 », Collection Thévenet, Bordas, 2004.

1. Maud, Cyril et Magali participent à un jeu.
Ils ont chacun une étiquette avec un nombre de départ et une étiquette avec une consigne.

	Maud	Cyril	Magali
Départ	17 425	18 124	18 542
Consigne	Compte de 100 en 100 dans l'ordre croissant	Compte de 10 en 10 dans l'ordre croissant	Compte de 5 en 5 dans l'ordre croissant

Il y a ensuite six étiquettes «arrivée» ; chaque joueur doit trouver, parmi ces étiquettes, le nombre auquel il va arriver.

18 427	18 214	27 303	18 587	18 325	10 325

• Peux-tu trouver l'étiquette «arrivée» de Maud, de Cyril et de Magali ?

   a. Quels sont les éléments mathématiques communs entre cet exercice et ceux de la question précédente ?
   b. Quelle est la variable essentielle qui permet de donner cet exercice à des élèves dès le CE2 ?

c. Proposer, pour chaque problème posé aux personnages du livre (Maud, Cyril et Magali) une procédure autre que celle qui correspond à la consigne et qui permettrait à des élèves de CE2 de déterminer dans chaque cas, de façon rapide, l'étiquette « arrivée ».

Corrigé de cet exercice Retour

CORRIGÉ TROYES – DIVISION EUCLIDIENNE

1. a. 17 692 - 17 584 = 108 et 108 = 23 × 4 + 16 car 23 × 2 = 46 et 46 × 2 = 92
donc 17 584 + 23 × 4 < 17 692 < 17 584 + 23 × 5 et donc en partant de 17 584 et en comptant de 23 en 23, on n'atteindra pas 17 692.

b. 31 600 – 2197 = 29 403 et 29 403 = 23 × 1278 + 9

Poser la division ou tout autre calcul probant sur la copie !!!

donc 2 197 + 23 × 1278 < 31 600 < 2 197 + 23 × 1279 et donc en partant de 2 197 et en comptant de 23 en 23, on n'atteindra pas 31 600.

c. 5 727 = 23 × 249 donc en partant de 0 et en comptant de 23 en 23, on atteindra bien 5 727.

Poser la division ou tout autre calcul probant sur la copie !!!

Certains ont aussi remarqué que = 5,75 et que 5 750 – 23 = 5 727
car = 11,5 et la moitié de 11,5 est 5,75 donc × 1 000 = 5 750 c'est-à-dire 23 × 250 = 5 750 ce qui prouve ainsi que 5 727 = 23 × 249 sans poser de divisions… D'autres procédures étaient possibles du type de celle du a.

2. D'une façon générale, pour prévoir si on peut atteindre b à partir de a en comptant de 23 en 23, il suffit d'effectuer la division de b – a par 23. Si le reste est nul, on peut le faire et si le reste est non nul, on ne peut pas.

3. 31 600 = 23 × 1373 + 21 Le plus petit entier naturel cherché est donc 21.

Poser la division ou tout autre calcul probant sur la copie !!!

Questions complémentaires

1. Les différences de procédures étaient effectivement prévisibles car :

- de 17 584 à 17 692, l'écart est petit et il est donc possible pour une majorité d'élèves de faire des additions répétées (au maximum cinq) pour trouver la réponse,
- de 2 197 à 31 600, la procédure experte (cf 1. b) est difficile en CM2 (cet exercice est le plus difficile des trois) car il ne s'agit pas ici d'une situation classique de division qui est habituellement pour les élèves une situation de partage équitable. Il est donc plus probable que les élèves vont ajouter à 2 197 des multiples de 23 (230, 2 300, 23 000…) jusqu'à obtenir 31 600 comme y incite l'énoncé…
- de 0 à 5 727, on peut bien sûr envisager la procédure précédente, mais aussi on peut poser la division qui est un peu plus facile à reconnaître dans cet exercice que dans le précédent. Du fait que l'on commence à 0, les élèves peuvent peut-être reconnaître qu'il s'agit de faire des paquets de 23.

2. a. Il s'agit encore :
de compter de n en n à partir d'un entier donné,
de travailler sur de grands nombres,
dans les deux cas, la procédure "experte" conduit à effectuer une division (posée ou non).

b. La variable essentielle est le choix de n dans le comptage de n en n : en CE2, il y a n = 100, 10 ou 5 (compétences de fin de cycle 2) alors qu'en CM2, il y a n = 23.
c. Pour Maud, on peut chercher les nombres se terminant par 25, car compter de 100 en 100 ne modifie pas les deux derniers chiffres, et garder celui qui est plus grand que 17 425 c'est-à-dire 18 325.

Pour Cyril, on peut chercher les nombres se terminant par 4, car compter de 10 en 10 ne modifie pas le dernier chiffre, (et garder celui qui est plus grand que 18 124) c'est-à-dire 18 214.

Pour Magali, on peut chercher les nombres se terminant par 2 ou 7, car compter de 5 en 5 à partir d'un entier se terminant par 2 donne pour dernier chiffre 2 ou 7, et garder celui qui est plus grand que 18 542 c'est-à-dire 18 587.

Énoncé de cet exercice Retour

ÉNONCÉ AIX-EN-PROVENCE – DIVISION EUCLIDIENNE 4 + 5,5 POINTS

Une usine de matériel électrique emballe les ampoules qui lui sont commandées dans trois sortes d'emballages :

Petits cartons contenant p ampoules,
Moyens cartons contenant m ampoules avec m entier multiple de p,
Gros cartons contenant g ampoules avec g entier multiple de m.

1) Justifiez le fait que les quantités commandées doivent obligatoirement être des multiples de p.

Soit N le nombre d'ampoules commandées. On cherche à utiliser le plus possible de gros cartons de préférence aux moyens cartons, et de moyens cartons de préférence aux petits cartons.

On notera G, (resp. M et P) le nombre de gros (resp. moyens et petits) cartons utilisés.

2) a) Dans le cas où g = 200 ; m = 50 et p = 10, quelle est l'opération qui permet de calculer G en fonction de N ? Quelle opération faut-il faire ensuite pour obtenir M et P en fonction de N ?

Application numérique : calculer G, M et P pour N = 192 310.

b) Dans le cas où g = 1000 ; m = 100 et p = 10, expliquer comment on peut obtenir les nombres P, M et G sans calcul à partir du nombre N.

Application numérique : calculer G, M et P pour N = 40 520.

3) a) Dans le cas général, quelle est l'opération qui permet de calculer G en fonction de N ?

Quelle opération faut-il faire ensuite pour obtenir M et P en fonction de N ?

b) Dans le cas où $m = p^2$ et $g = p^3$, quelle est l'écriture du nombre N qui permet d'obtenir les nombres P, M et G ?

Application numérique : Trouver cette écriture pour N = 19 824 et p = 12.

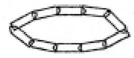
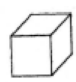
QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES :

Il a été proposé en septembre à des élèves de deuxième année de cycle III l'activité «trombones» décrite dans l'ouvrage ERMEL : apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1 de chez Hatier :

LES TROMBONES

Dans cette situation, chaque élève doit déterminer **le nombre d'éléments d'une collection** semi-organisée et dessinée sur une feuille individuelle (cf. annexe 1)

Les élèves disposent des informations suivantes :

- Chaque trombone est matérialisé par 
- Chaque collier contient 10 trombones et est matérialisé par 
- Chaque sachet transparent contient 10 colliers et est matérialisé par 
- Chaque boîte contient 10 sachets et est matérialisée par 

Deux élèves n'ont pu mener la tâche à son terme ou bien ont produit des résultats erronés (leurs productions constituent l'annexe 2 - documents 1 et 2).

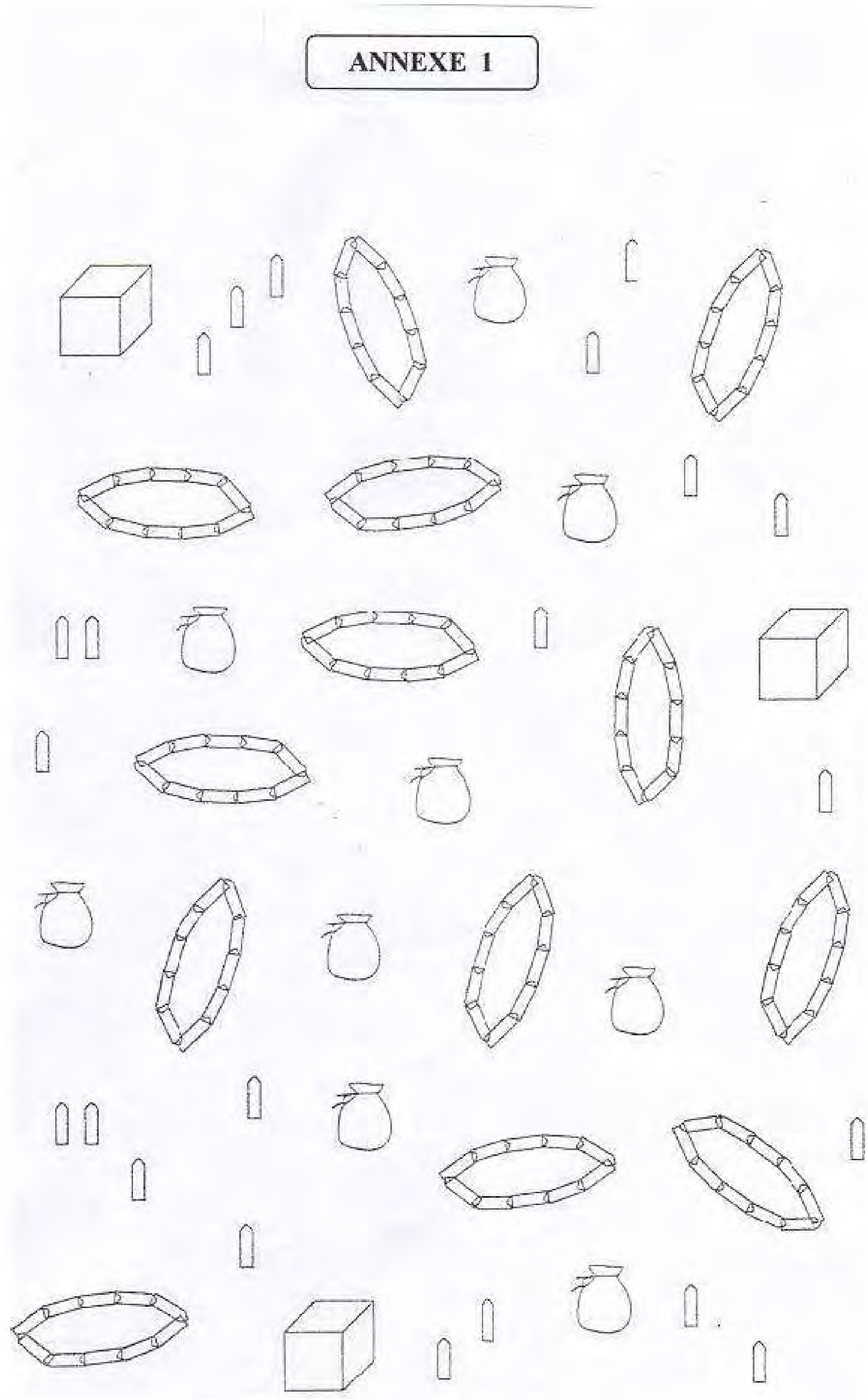
1. Quelles sont les connaissances mathématiques visées dans cette activité ?

2. a) Donner deux procédures correctes qu'un élève peut utiliser pour déterminer le nombre de trombones par sachet et le nombre de trombones par boîte.

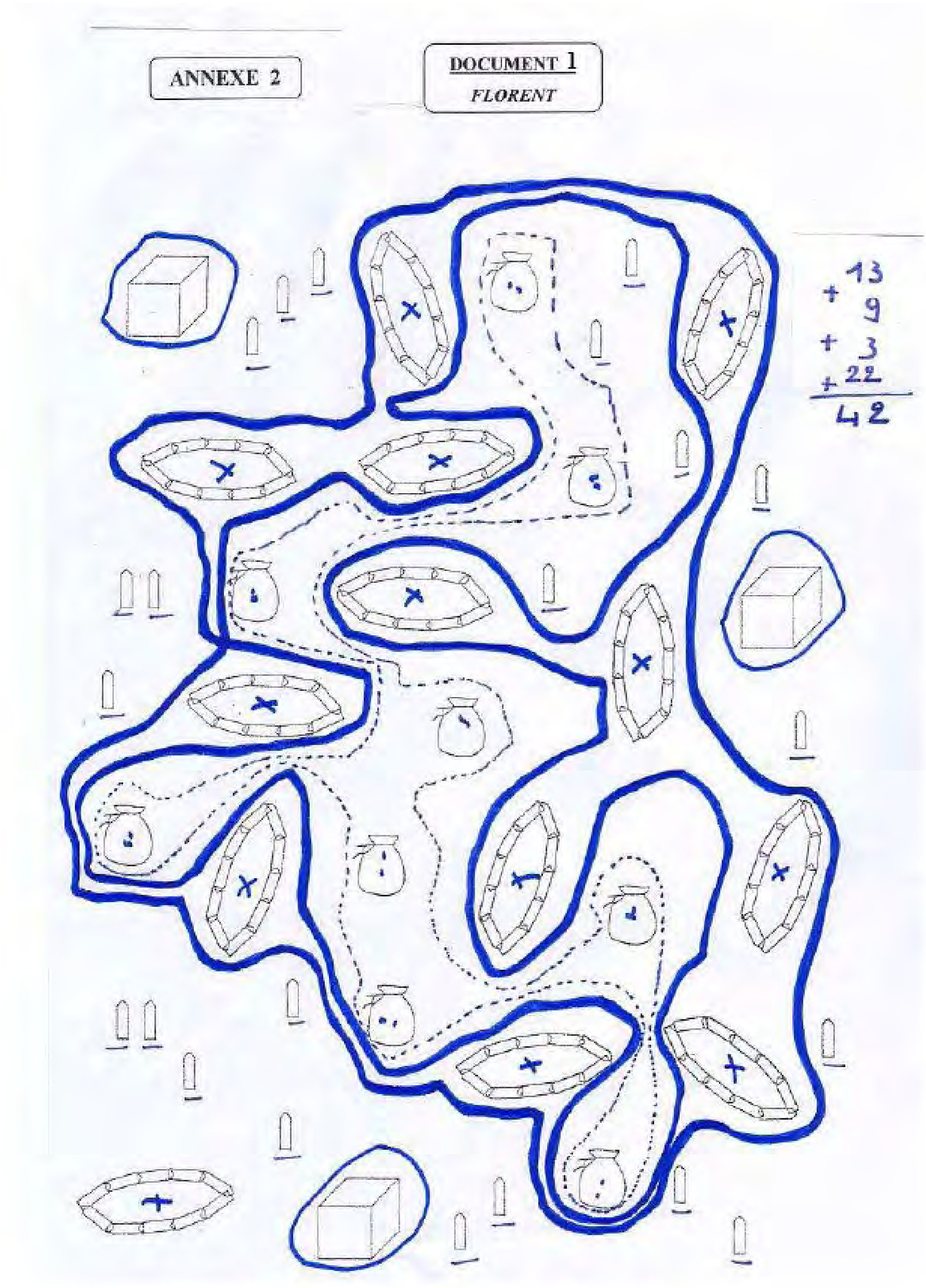
b) Décrire deux procédures correctes qu'un élève peut utiliser pour déterminer le nombre total de trombones, s'il a commencé par dénombrer les différentes collections.
3. Comment justifieriez-vous la place de cette activité dans une classe de CM1 ?
4. Analyser les productions de ces deux élèves.
5. Est-il pertinent d'utiliser la calculatrice pour l'acquisition des connaissances visées dans cette activité ?

Annexes de cet exercice Corrigé Retour

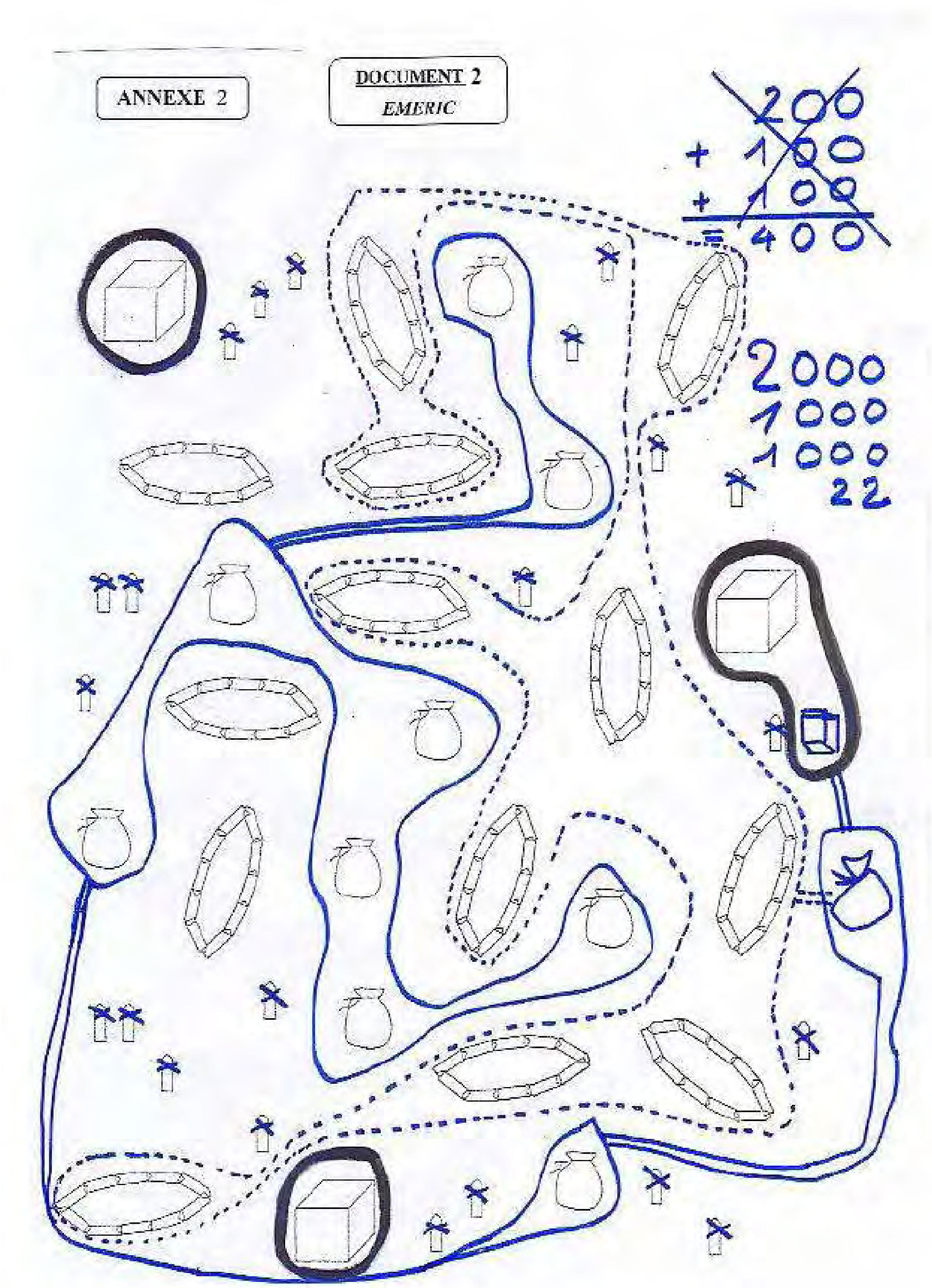
ANNEXES AIX-EN-PROVENCE – DIVISION EUCLIDIENNE



Énoncé de cet exercice Corrigé Retour



Énoncé de cet exercice Corrigé Retour



Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

CORRIGÉ AIX-EN-PROVENCE – DIVISION EUCLIDIENNE

Une usine de matériel électrique emballe les ampoules qui lui sont commandées dans trois sortes d'emballages :

Petits cartons contenant p ampoules,
Moyens cartons contenant m ampoules avec m entier multiple de p,
Gros cartons contenant g ampoules avec g entier multiple de m.

1) Justifiez le fait que les quantités commandées doivent obligatoirement être des multiples de p.

On va commander les ampoules par nombres entiers de cartons :
Les petits cartons contiennent p ampoules.
Les moyens cartons contiennent un nombre d'ampoules m qui est multiple de p.
Les gros cartons contiennent un nombre d'ampoules qui est multiple de m, donc multiple de p (m multiple de p, donc m de la forme $a \times p$; g multiple de m donc de la forme $b \times m$, soit $b \times a \times p$, donc g multiple de p).
Donc tout carton contient un nombre d'ampoules multiple de p.
Le nombre d'ampoules commandées est la somme de trois multiples de p, donc est lui-même un multiple de p.
Barème : 1 point

Soit N le nombre d'ampoules commandées. On cherche à utiliser le plus possible de gros cartons de préférence aux moyens cartons, et de moyens cartons de préférence aux petits cartons.
On notera G, (resp. M et P) le nombre de gros (resp. moyens et petits) cartons utilisés.

2) a) Dans le cas où g = 200 ; m = 50 et p = 10, quelle est l'opération qui permet de calculer G en fonction de N ? Quelle opération faut-il faire ensuite pour obtenir M et P en fonction de N ?

On cherche à utiliser le plus possible de gros cartons, c'est à dire qu'on recherche le plus nombre de paquets de 200 réalisables avec N ampoules.
On obtiendra donc G à partir de N en effectuant la division euclidienne de N par 200 :
$N = 200 \times G + R$ avec $R < 200$.
Ensuite, on cherche le nombre maximum de paquets de 50 réalisables avec les R ampoules qui restent une fois les gros cartons réalisés ; on effectue donc la division euclidienne de R par 50 : $R = 50 \times M + R'$ avec $R' < 50$.
Le quotient nous donne le nombre M de moyens cartons.
Le reste R' nous donne le nombre d'ampoules à emballer dans les petits cartons, donc P est le nombre de dizaines de R' (ou encore le quotient de R' par 10).
Barème : 1 point

Application numérique : calculer G, M et P pour N = 192 310.
$192\,310 = 961 \times 200 + 110$ donc $G = 961$
$110 = 2 \times 50 + 10$ donc $M = 2$ et $P = 1$.
Barème : 0,5 point

b) Dans le cas où g = 1000 ; m = 100 et p = 10, expliquer comment on peut obtenir les nombres P, M et G sans calcul à partir du nombre N.

Dans ce cas N est un multiple de 10.
Soit d son chiffre des dizaines et c son chiffres des centaines, on peut écrire :

$N = 1000.A + 100.c + 10.d$ avec A entier.
Sous cette écriture, il apparaît que :

$G = A$, c'est à dire que G est le nombre de milliers du nombre N,
$M = c$, c'est à dire que M est donné par la lecture du chiffre des centaines de N,
$P = d$, c'est à dire que P est donné par la lecture du chiffre des dizaines de N.

Barème : 1,5 point

Application numérique : calculer G, M et P pour N = 40 520.
$G = 40$ $M = 5$ $P = 2$
Barème : 0.5 point

3) a) Dans le cas général, quelle est l'opération qui permet de calculer G en fonction de N ?
Quelle opération faut-il faire ensuite pour obtenir M et P en fonction de N ?
Dans le cas général, on obtient G comme quotient de la division euclidienne de N par g :

$N = G \times g + R$ avec $R < g$

Ensuite on obtient M et P en effectuant la division euclidienne de R par m :

$R = M \times m + R'$ avec $R' < m$

M est le quotient de cette division et P le quotient du reste R' par p.
Barème : 1,5 point

b) Dans le cas où $m = p^2$ et $g = p^3$, quelle est l'écriture du nombre N qui permet d'obtenir les nombres P, M et G ?
On a : $N = G \times p^3 + M \times p^2 + P \times p$ avec $M < p$ et $P < p$
(si ces inégalités étaient fausses, on pourrait remplir un gros ou un moyen carton supplémentaire).
C'est donc l'écriture en base p du nombre N qui permet la lecture des nombres G, M et P ; en base p, l'écriture de N sera de la forme : $a_n \ldots a_3 a_2 a_1 0$.

Le chiffre a_1 immédiatement à gauche du 0 des unités donne le nombre P.
Le chiffre a_2 immédiatement à gauche de a_1 donne le nombre M.
Le nombre écrit à l'aide des chiffre immédiatement à gauche de a_2 (soit $a_n \ldots a_3$) donne G.

Application numérique : Trouver cette écriture pour N = 19 824 et p = 12.
$19\,824 = 11 \times 12^3 + 5 \times 12^2 + 8 \times 12$
Si on utilise les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A et B dans cet ordre écrire les nombres en base 12 l'écriture du nombre N sera : B580
On aura : 8 petits cartons (8 douzaines) ; 5 moyens cartons (5 grosses) et B (c'est à dire onze) gros cartons (onze douzaines de grosses).
Barème : 1,5 point

Question complémentaire :

1) Quelles sont les connaissances mathématiques visées dans cette activité ?

- Utiliser des groupements par 10, 100, 1000 pour dénombrer une collection.
- Utiliser l'écriture chiffrée en base 10.

Barème : 0,5 + 0,5 point

2) a) **Donner deux procédures correctes qu'un élève peut utiliser pour déterminer le nombre de trombones par sachet et le nombre de trombones par boîte.**

* Appui sur le résultat mémorisé : $10 \times 10 = 100$ (resp. $10 \times 100 = 1000$) ;
* Comptage de 10 en 10 : 10, 20, 30 … 90, 100 avec représentation éventuelle des 10 colliers (resp. de 100 en 100 …) ;
* Production d'une écriture additive : $10 + 10 + 10 + \ldots + 10 = 100$.

<u>Barème</u> : 2 points (1 par procédure correcte avec un maximum de 2 points)

b) **Décrire deux procédures correctes qu'un élève peut utiliser pour déterminer le nombre total de trombones, s'il a commencé par dénombrer les différentes collections.**

* Production d'une écriture additive ou mixte :
$1000 + 1000 + 1000 + 100 + 100 + \ldots + 100 + 10 + 10 + \ldots + 10 + 22$
ou $3 \times 1000 + 9 \times 100 + 13 \times 10 + 22$
puis calcul à la main ou avec une calculette.

* groupement-échange puis écriture directe du nombre :
22 trombones, c'est 2 colliers et 2 trombones,
13 colliers, c'est un sachet et 3 colliers,
10 sachets, c'est une boîte ;
soit 4 boîtes, 5 colliers et 2 trombones, c'est à dire 4052 trombones.

<u>Barème</u> : 2 points (1 par procédure correcte avec un maximum de 2 points)

3) **Comment justifieriez-vous la place de cette activité dans une classe de CM1 ?**

On peut proposer cette activité en début de CM1 avec deux objectifs :

- Diagnostic des élèves en difficulté sur l'utilisation de la numération chiffrée.
- Renforcement de la maîtrise de la numération décimale de position : traduction dans l'écriture chiffrée de l'organisation d'une collection en paquets de 10, 100, 1000, … (un travail sur les entiers nécessaire avant de pouvoir aborder les décimaux).

<u>Barème</u> : 2 points (1 pour l'idée d'évaluation diagnostique, 1 pour l'idée de renforcement, consolidation, entraînement)

4) **Analyser les productions de ces deux élèves.**

FLORENT :
Dénombrement des objets représentés.
Addition des nombres d'objets sans tenir compte de leur valeur.
<u>Barème</u> : 1,5 point

EMERIC :
Regroupement par paquets des éléments de même type.
Achève l'organisation de la collection en paquets de 10, 100, 1000 (sauf pour les 22 trombones).
Traduit cette organisation en écriture additive et positionnelle, mais ne tient pas compte des colliers restants.
<u>Barème</u> : 1,5 point

5) **Est-il pertinent d'utiliser la calculatrice pour l'acquisition des connaissances visées dans cette activité ?**

Autoriser la calculatrice risque de favoriser des procédures évitant la réalisation des groupements échanges. Il semble donc préférable de ne pas l'autoriser pour cette activité.

<u>Barème</u> : 1 point

Énoncé de cet exercice Annexes de cet exercice Retour

ÉNONCÉ DIJON – CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES 5 + 4 POINTS

Partie théorique

Dans cette partie, toutes les constructions se font à la règle non graduée et au compas en laissant les traits de construction visibles. Chaque élément de construction doit être justifié.
Par ailleurs toute réponse doit également être justifiée.
ABC est un triangle rectangle en C tel que AC = 8 cm et AB = 10 cm.

1. Calculer BC
2. En utilisant l'annexe 1 où un segment de 4 cm est tracé, construire le triangle ABC en laissant les traits de construction visibles.

Marquer un point F sur le segment [CA]
Tracer la droite passant par F et parallèle à la droite (CB). Cette droite coup (AB) en E.
On pose CF = x.
3. Exprimez AF en fonction de x, puis calculez AE, EB et FE en fonction de x
4. On trace alors le cercle (C1) de diamètre [AF] et le cercle (C2) de centre C qui passe par F.
a) A quelle condition le cercle (C2) aura t-il un rayon double de celui de (C1)
b) Quelle est alors la position du point E ?
5. a) Soit C' le symétrique de C par rapport à O milieu de [AB].
Quelle est la nature du quadrilatère ACBC'
b) Calculez la valeur du rapport $\frac{\text{aireECBF}}{\text{aireACBC'}}$ dans le cas où x = 4 cm

Questions complémentaires

Voir en annexe 2 l'exercice 16 issu du fichier d'évaluation d'entrée en $6^{\text{ième}}$, année 2005.
Il est précisé aux élèves qu'ils peuvent avoir besoin d'une règle graduée, d'une équerre et d'un compas.

1. Après examen des productions des élèves (voir en annexes 4 et 4 bis), pour chacun des items, précisez la nature de l'erreur commise (qui correspondrait aux codes 4, 6, 7 et 9) donnez également des hypothèses expliquant ces erreurs.
Remarque : les productions des élèves ont été réduites pour des raisons de mise en page. Mais l'annexe 1 est en grandeur réelle.
2. Inventoriez les procédures que peut mettre en œuvre un élève de cycle 3 pour répondre à l'item 44 (tracé d'une parallèle à une droite passant par un point donné).
3. Comment expliquez-vous la différence de pourcentage de réussite (code 1) entre les items 43 et 44. (voir annexe 5). Formuler trois hypothèses.

Annexes de cet exercice Corrigé Retour

ANNEXES DIJON – CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Annexe 1
à remettre avec votre copie

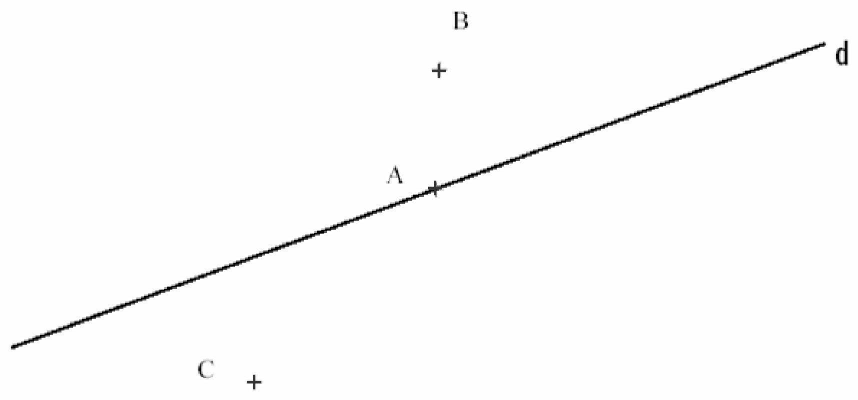
Nom, prénom, groupe
……………………………………

4 cm

Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

Annexe 2

Exercice 16



1. Trace la droite qui passe par les points A et C. 1 2 9 0 (42)
2. Trace la droite qui passe par C et qui est perpendiculaire à la droite **d**. 1 6 7 9 0 (43)
3. Trace la droite qui passe par B et qui est parallèle à la droite **d**. 1 6 7 9 0 (44)
4. Trace le cercle de centre B passant par A. 1 4 6 9 0 (45)
5. Trace le cercle de diamètre [AC]. 1 4 6 9 0 (46)

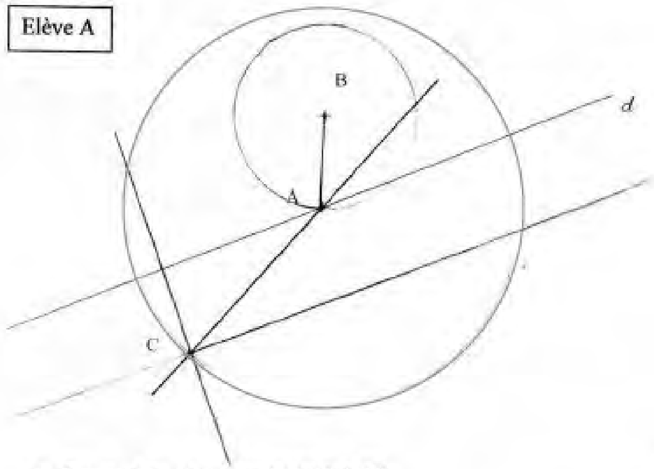
La signification des codes est la même pour tous les exercices du protocole.
Code 1 Réponse exacte attendue, procédure induite par l'énoncé.
Code 2 Réponse exacte : formulation moins attendue ou non exhaustive.
Code 3 Réponse incomplète sans élément erroné. On considère que l'objectif n'est pas atteint par l'élève
Code 4 Réponse partiellement exacte avec éléments erronés.
Code 5 Réponse pouvant être interprétée comme une mauvaise lecture de consigne.
Code 6 Réponse erronée spécifiée.
Code 7 Réponse erronée spécifiée.
Code 8 Réponse erronée spécifiée.
Code 9 Autre réponse erronée.
Code 0 Absence de réponse (l'élève est présent mais n'a pas répondu à la question ou à l'exercice).

Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

Annexe 4

Exercice 16

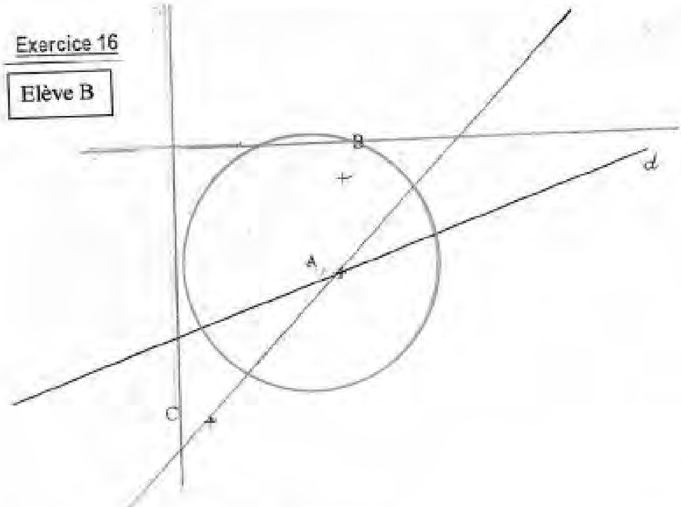
Elève A



1. Trace la droite qui passe par les points A et C.	1 2 9 0	42
2. Trace la droite qui passe par C et qui est perpendiculaire à la droite d.	1 6 7 9 0	43
3. Trace la droite qui passe par B et qui est parallèle à la droite d.	1 6 7 9 0	44
4. Trace le cercle de centre B passant par A.	1 4 6 9 0	45
5. Trace le cercle de diamètre [AC].	1 4 6 9 0	46

Exercice 16

Elève B

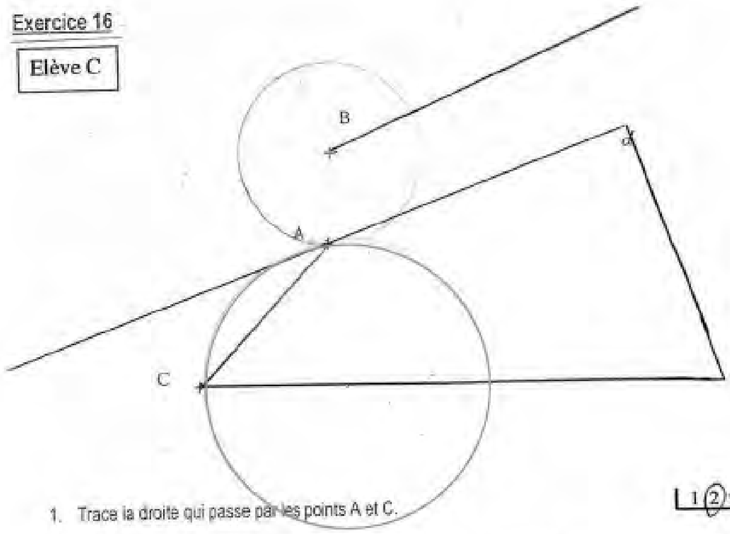


1. Trace la droite qui passe par les points A et C.	1 2 9 0	42
2. Trace la droite qui passe par C et qui est perpendiculaire à la droite d.	1 6 7 9 0	43
3. Trace la droite qui passe par B et qui est parallèle à la droite d.	1 6 7 9 0	44
4. Trace le cercle de centre B passant par A.	1 4 6 9 0	45
5. Trace le cercle de diamètre [AC].	1 4 6 9 0	46

Annexe 4 bis

Exercice 16

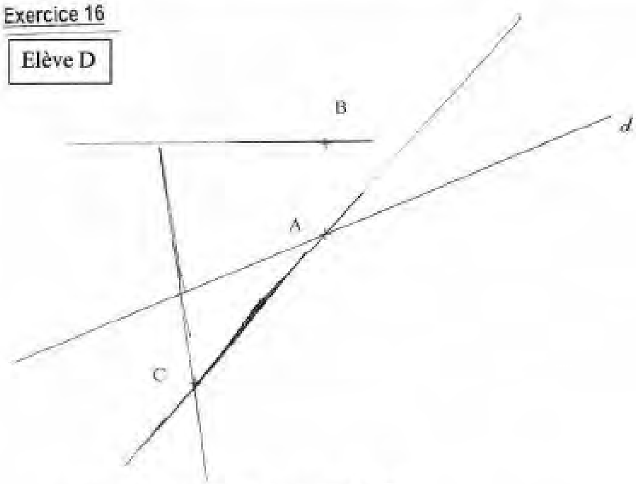
Elève C



1. Trace la droite qui passe par les points A et C. — 1 2 9 0 (42)
2. Trace la droite qui passe par C et qui est perpendiculaire à la droite *d*. — 1 6 7 9 0 (43)
3. Trace la droite qui passe par B et qui est parallèle à la droite *d*. — 1 6 7 9 0 (44)
4. Trace le cercle de centre B passant par A. — 1 4 6 9 0 (45)
5. Trace le cercle de diamètre [AC]. — 1 4 6 9 0 (46)

Exercice 16

Elève D



1. Trace la droite qui passe par les points A et C. — 1 2 9 0 (42)
2. Trace la droite qui passe par C et qui est perpendiculaire à la droite *d*. — 1 6 7 9 0 (43)
3. Trace la droite qui passe par B et qui est parallèle à la droite *d*. — 1 6 7 9 0 (44)
4. Trace le cercle de centre B passant par A. — 1 4 6 9 0 (45)
5. Trace le cercle de diamètre [AC]. — 1 4 6 9 0 (46)

Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

Résultats : Exercice 16 : Score de réussite national à l'exercice : 52,38 %

Annexe 5

item 042 code 1	53,70
code 2	39,67
code 9	3,44
code 0	3,19

item 043 code 1	38,87
code 6	5,65
code 7	9,39
code 9	31,98
code 0	14,11

item 044 code 1	50,22
code 6	6,26
code 7	7,35
code 9	22,06
code 0	14,11

item 045 code 1	63,61
code 4	1,41
code 6	3,10
code 9	7,35
code 0	24,53

item 046 code 1	15,84
code 4	1,11
code 6	23,09
code 9	9,52
code 0	50,44

Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

CORRIGÉ DIJON – CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Partie théorique (5 points)

ABC est un triangle rectangle en C tel que AC = 8 cm et AB = 10 cm.

1. **Calculer BC (0,5 point)**

Dans le triangle ABC rectangle en C, on peu appliquer le théorème de Pythagore : $AC^2 + CB^2 = AB^2$; d'où $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$ donc BC = 6

BC = 6 cm

2. **Construire le triangle en laissant les traits de construction visibles. Justifier la construction (1 point)**

Marquer un point F sur le segment [CA]

Tracer à la règle et au compas passant par F et parallèle à la droite (CB) coupe (CB) en E. On pose CF = x.

Construction : voir annexe 2

Description : il n'est pas très difficile d'obtenir 10 cm à partir de 4 cm. Il faut tracer 2 cm. Cela peut être fait en traçant la médiatrice du segment donné au départ de façon à obtenir son milieu.

ABC est un triangle rectangle en C donc C appartient au cercle de diamètre [AB]. On trace donc un segment de 10 cm. AC = 8 donc **C est sur l'arc de cercle de centre A et de rayon 8 cm.**

Le tracé de la parallèle à [CB] passant par F peut se faire selon la méthode dite du « parallélogramme »

***Remarques** :*

- un grand nombre d'étudiants ont ignoré cette description qui cependant n'était pas très complexe. Dommage.

- Il n'était nullement nécessaire d'appuyer la figure sur le segment déjà tracé, celui-ci ne servant que de référence.

3. Exprimez AF en fonction de x, puis calculez AE, EB et FE en fonction de x (1,25 points)

AF = AC – FC = **8 – x ;**

On a la configuration de Thalès dans les triangles AFE et ACB :

D'où : $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{FE}{CB}$

Des deux premiers rapports, on tire **AE** = $\frac{AF}{AC} \times AB$; d'où AE = $\frac{8-x}{8} \times 10 = \frac{5}{4}\mathbf{(8-x)}$

D'où **EB** = AB – AE = $10 - \frac{5}{4}(8-x) = \frac{40-40+5x}{4} = \frac{5}{4}\mathbf{x}$

Du premier et du dernier rapport, on tire FE = $\frac{AF}{AC} \times CB$; d'où **FE** = $\frac{8-x}{8} \times 6 = \frac{3}{4}\mathbf{(8-x)}$

***Remarque :** il est fort judicieux de simplifier au maximum les fractions et les résultats. Le correcteur n'est pas là pour terminer vos calculs.*

4. **On trace alors le cercle (C1) de diamètre [AF] et le cercle (C2) de centre C qui passe par F.**

a) A quelle condition le cercle (C2) aura t-il un rayon double de celui de (C1) (0,5 point)

Si (C1) a pour diamètre AF, son rayon vaut $\frac{8-x}{2}$

(C2) a pour rayon CF = x

Le rayon de (C2) sera le double de celui de (C1) si $2 \times \frac{8-x}{2} = x$ soit 8 – x = x soit 2x = 8

et **x = 4**

b) Quelle est alors la position du point E ? (0,25 point)

F étant au milieu de [AC], comme par construction, la droite (FE) est parallèle à [CB], la réciproque du théorème de Thalès (ou du théorème des milieux) permet d'affirmer que **E est au milieu de [AB].**

5. a) Soit C' le symétrique de C par rapport à O milieu de [AB]. Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' **(0,5 point)**

C'est **un rectangle** car ses diagonales sont égales (diamètres d'un même cercle) se coupent en leur milieu.

Remarque *: d'autres méthodes plus ou moins longues ont été trouvées…elles ont été appréciées à leur juste valeur.*

b) Calculez la valeur du rapport $\frac{\text{aireECBF}}{\text{aireACBC'}}$ dans le cas où x = 4 cm **(1 point)**

- le trapèze ECBF est un trapèze rectangle dont la grande base CB mesure 6 cm ; dans le cas où x = 4 cm, la petite base EF mesure 3 cm et la hauteur EC mesure 4 cm.

Aire ECBF = $\frac{(6+3)\text{x}4}{2} = 18$

- Aire ACBC' = 6 x 8 = 48

On a donc $\frac{\text{aireECBF}}{\text{aireACBC'}} = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$

Remarque : $\frac{3}{8}$ *est une valeur exacte, éviter de la transformer en valeur décimale. Ce n'est pas demandé et cela risque de vous nuire un jour où cette fraction ne sera pas un nombre décimal.*

Questions complémentaires (4 points)

Remarques préalables :

- *Il est fort malencontreux de changer les numéros des items. Évitez de le faire, cela rend la correction difficile et ne met pas le correcteur dans de bonnes dispositions.*
- *Éviter également de changer les mots ; un item n'est pas une « question », ni une « étape » quoique cette dernière dénomination serait moins incorrecte que la précédente car il s'agit d'une construction.*
- *Il n'est pas question non plus de critiquer la notation des items car cela n'est pas explicitement demandé. Ceux qui l'ont fait sont hors sujet.*
- *De même on vous demande de commenter les items qui ont obtenu les codes 4, 6, 7 et 9. on ne demande pas de commenter les autres codes.*
- *Il semble également plus pratique d'étudier élève par élève plutôt qu'item par item ce que nous avons fait dans ce corrigé.*
- ***Enfin dernière remarque qui est la plus importante : une analyse doit être la plus fine possible au sens que les propos suivants : « l'élève a fait une erreur d'inattention, l'élève n'a pas compris l'énoncé, l'élève ne comprend pas le vocabulaire, l'élève ne sait pas faire, l'élève ne sait pas utiliser les instruments, l'élève ne sait pas, l'élève n'a pas le matériel… » sont trop faibles ou trop basique pour signifier quelque chose et permettre au maître d'apporter des régulations constructives. Il convient d'évoquer des causalités, comme par exemple la référence au prototype (une parallèle est forcement horizontale) mais encore indiquer ce qui vraisemblablement a produit cette erreur à savoir : une pratique pédagogique défectueuse dans l'approche de la notion.***

1. **Après examen des productions des élèves, pour chacun des items, précisez la nature de l'erreur commise (qui correspondrait aux codes 4, 6, 7 et 9) donnez également des hypothèses expliquant ces erreurs.**

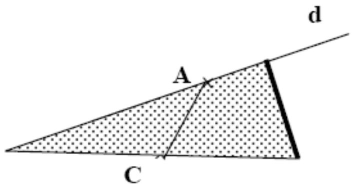
Élève A (0,5 point)

Item 43	Item 44	Item 45	Item 46
Réponse correcte	Code 9. **Description** : l'élève trace la droite qui passe par C et qui est parallèle à (d) au lieu de tracer la parallèle qui passe par B. **Hypothèse explicative :** cette erreur sur la lettre provient certainement du fait qu'il a lu celle-ci dans l'item précédent.	Réponse correcte. L'élève a même pris le soin de tracer le rayon du cercle.	Code 6. **Description** : l'élève trace le cercle de rayon AC. Il confond rayon et diamètre. **Hypothèse explicative** : la raison de cette erreur peut-être une répétition des gestes qu'il a fait dans la question précédente où on lui demandait de tracer un cercle de rayon donné. Autre hypothèse : le nombre important de données à prendre en compte pour réaliser cette figure, ajoutées à la maîtrise insuffisante de la notion de cercle joue également un rôle dans le mauvais pourcentage de réussite de l'item 46. il s'agit peut-être alors de surcharge cognitive.

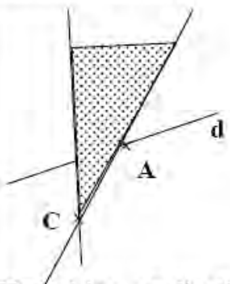
Elève B (1 point)

Item 43	Item 44	Item 45
Code 6. **Description** : L'élève trace une droite « verticale » ou lieu d'une perpendiculaire. De plus il assimile le point à la lettre qui le nomme ainsi la droite qu'il a tracée passe par la lettre C. **Hypothèse explicative :** cette confusion entre perpendiculaire et verticale semble due aux situations prototypiques de classe où souvent les droites (comme (d) sont tracées horizontalement par le maître. L'horizontale et la verticale sont deux directions naturellement privilégies dans la vie courante. Elles le sont aussi à l'école car les premiers exemples de droite perpendiculaire font référence à la vie courante (côtés du tableau, croisillons d'une fenêtre…). Les premiers dessins faits par le maître au tableau renforcent cette représentation, ce qui amène certains élèves à penser que tracer une perpendiculaire revient à tracer une verticale. D'autre part, la notion de « droit » peut être associée à celle de « vertical » dans l'expression « tiens toi droit »	Code 6. **Description** : L'élève trace une droite horizontale au lieu d'une parallèle. **Hypothèse** identique à la précédente **Description** : de plus il assimile le point à la lettre qui le nomme ainsi la droite qu'il a tracée passe par la lettre B. **Hypothèse explicative :** c'est une erreur liée à la confusion entre signifiant et signifié. Il est vrai que lorsqu'on place un point, la lettre le nommant occupe plus de place et se voit donc mieux que la croix qui le représente.	Code 6. **Description** : l'élève trace le cercle de centre A et de rayon AB (au lieu de tracer le cercle de centre B et de rayon AB. De plus il assimile le point à la lettre qui le nomme ainsi le cercle tracé passe par la lettre B et a pour centre la lettre A **Hypothèse explicative :** la cause de cette erreur est peut-être que le point A est plus visible que le point B car il est à l'intersection de deux droites.

Elève C (0,5 point)

Item 43	Item 44	Item 46
Code 9. **Description** : une perpendiculaire à (d) est tracée, mais elle ne passe pas par C. L'élève semble poser son équerre convenablement le long de la droite (d). la perpendiculaire ne passe pas par C, mais il ne se soucie pas de cela. Il semble suivre les bords de son équerre pour effectuer le tracé. La difficulté est de coordonner deux gestes : positionner correctement l'équerre et faire en sorte qu'elle passe par C. le positionnement de l'équerre est une difficulté pour cet élève.	Réponse jugée correcte bien que ce soit une demi droite et que le tracé soit approximatif.	Code 4. **Description** : l'élève trace un cercle de corde [AC] : il passe par A et C mais n'a pas pour diamètre [AC]. **Hypothèse explicative :** La détermination du centre du cercle demandé dans l'item n'étant pas simple, l'élève semble choisir un point un peu au hasard sur la droite horizontale qu'il a tracée certainement le long de son équerre. Le cercle passe bien par les deux points mais ce n'est pas un diamètre. L'erreur semble donc provenir de la difficulté à trouver le milieu du segment [AC]
 **Hypothèse explicative :** l'élève n'a pas acquis une image mentale qui permet d'anticiper où sera le tracé demandé. (Manque d'aptitude à mobiliser des images mentales anticipatrices) C'est seulement l'équerre qui le guide et qui lui fait provoquer des erreurs. On peut également remarquer que la notion de « droite n'est pas acquise car il trace des segments (item 42) ou des demi droites (item 44)		

Elève D (0,5 point)

Item 43	Item 44
Code 9. **Description** : Réponse assez approximative. On pourrait penser que l'élève a placé son équerre de manière incorrecte  **Hypothèse explicative :** l'élève tente de placer l'équerre comme le maître lui a montré, mais il n'a pas pris en compte le côté de l'équerre que l'on utilise pour le tracé.	Code 9. **Description** : la droite tracée par l'élève passe bien par B, mais il confond aussi parallèle et horizontale. **Hypothèse explicative :** hypothèse est certainement identique à ce qui a été dit pour l'élève B.

2. Inventoriez les procédures que peut mettre en œuvre un élève de cycle 3 pour répondre à l'item 44 (tracé d'une parallèle à une droite passant par un point donné). **(0,75 point à 1 point)**

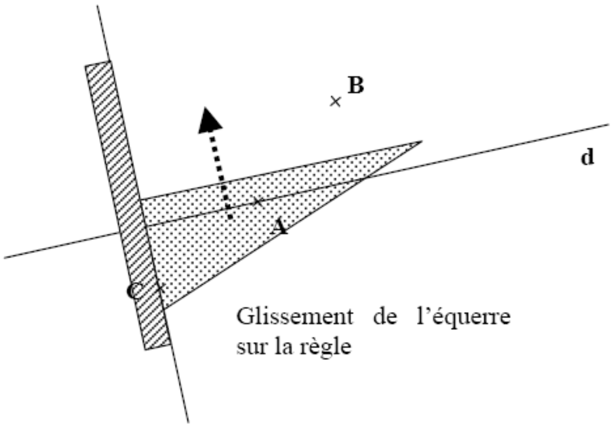
Pour tous les élèves qui ont tracé des parallèles, on peut se demander comment elles ont été tracées. S'agit-il simplement d'un glissement parallèle de la règle ? ou bien les élèves ont ils utilisé la règle et l'équerre ? On peut remarquer que l'élève doit alors avoir des connaissances mathématiques des compétences « manipulatoires » ou « psychomotrices » fines

Manifestement, aucun élève n'a ici tracé de parallèle en utilisant le compas.

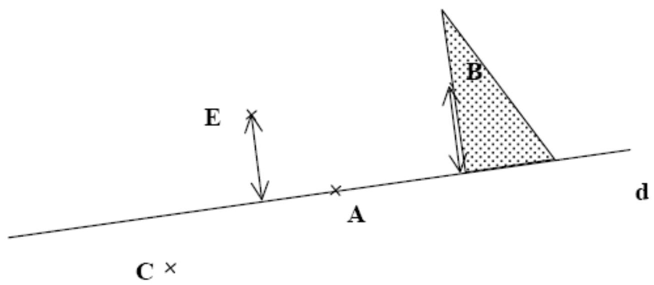
Le tracé de la parallèle « au jugé», par glissement semble être la procédure privilégiée par presque tous les élèves. Ce procédé est à rejeter car il est non précis. Cependant, c'est un bon moyen pour évaluer de façon perceptive l'exactitude d'un tracé.

Avec la règle et l'équerre, on a plusieurs procédures :

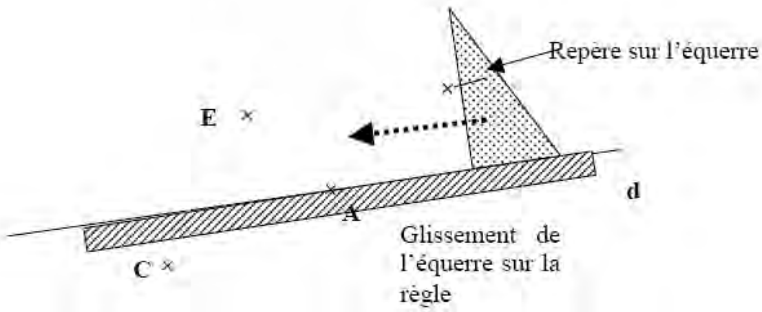
- Si l'item 43 est réussi, il s'agit de tracer la perpendiculaire à cette droite passant par B. **Utilisation de la double perpendicularité.**



- Si l'item 43 est échoué.
  - L'élève peut utiliser la règle plate comme « **bande** » en plaçant un bord de celle-ci sur la droite et en traçant la parallèle le long de l'autre bord.
  - Avec une règle de section carrée, l'élève peut placer celle-ci le long de la droite, suivi d'un ou plusieurs **pivotements de la règle** autour d'une arête avant de tracer la parallèle demandée
  - Il peut également placer un autre point E à une même distance de la droite d que B. Cela nécessite cependant un bon usage de l'équerre et il est alors utile de posséder une équerre graduée. Ou bien de reporter les mesures avec le compas (ce qui complique les manipulations). Tracer avec la règle la droite qui relie ces deux points E et B. on met là en œuvre la notion de **conservation des écarts**. Ce procédé semble à privilégier car il fait appel à la conception première du parallélisme qu'ont les élèves (droites d'écartement constant)



Il peut être utile de faire glisser l'équerre le long de la règle afin d'éviter les erreurs



***Remarque** : les deux premières procédures n'étant pas exactes, le maître devra privilégier cette dernière.*

Avec le compas : méthode du parallélogramme

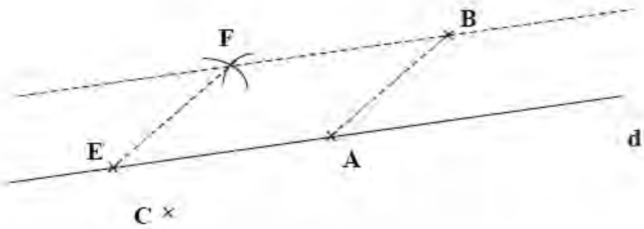
Placer un point E sur la droite d

Tracer un arc de cercle de centre E et de rayon AB

Tracer un arc de cercle de centre B et de rayon AE

Ces deux arcs se coupent en un point F

La droite cherchée et la droite (EB)



***Remarque :** dans ce genre de question, il n'est pas exclu d'évoquer les procédures élève, mais en spécifiant leur éventuel degré de pertinence.*

3. Comment expliquez-vous la différence de pourcentage de réussite (code 1) entre les items 43 et 44. Formuler trois hypothèses. **(0,75 point à 1 point)**

Les pourcentages montrent qu'il est plus difficile aux élèves de tracer une droite perpendiculaire à une autre passant par un point que de tracer une droite parallèle à une autre passant par un point.

Cependant, il n'est pas évident que le tracé de la parallèle (étant donné les difficultés exprimées dans la question précédente) ait été réalisé avec justesse. Le code 1 dans la notation l'item 45 semble n'avoir été mis que sur des indices perceptifs. La question précédente montre bien que le tracé d'une parallèle à un droite donnée, en un point donné est plus complexe que celui d'une perpendiculaire à une droite donnée en un point donné.

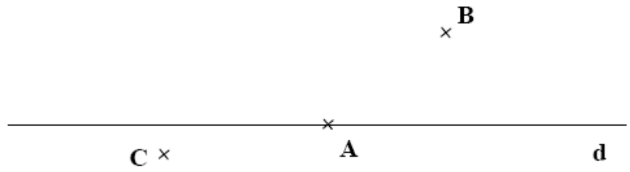
Hypothèse 1 : l'utilisation de l'équerre reste problématique pour beaucoup d'élève qui ne savent pas comment la placer pour avoir un angle droit, alors qu'il est aisé de faire glisser la règle (translation) pour tracer une parallèle (de manière peu précise, mais qui peut satisfaire un élève)

Hypothèse 2 : seul l'aspect perceptif (visuel) a été affecté d'un code 1 par l'enseignant et il est plus facile d'imaginer et d'anticiper le tracé d'une parallèle que d'une perpendiculaire.

Hypothèse 3 : la géométrie est encore délaissée par certains maîtres au détriment des problèmes numériques

Hypothèse 4 : le parallélisme est mieux perçu à l'œil que la perpendiculaire (rails du train, route qui défile en voiture…)

Hypothèse 5 : la position des de la figure donnée au départ n'est pas prototypique. On peut imaginer que si elle avait été la suivante, les items 43 et 44 auraient été mieux réussis



Hypothèse 6 : l'ordre des questions et leur grand nombre peut aussi jouer un rôle déterminant. Si l'item 43 avait été placé en premier, étant donné qu'il n'y avait pas encore de droite tracée, on peut supposer que la réussite aurait été meilleure.

Hypothèse 7 : on trace plus facilement une parallèle par la procédure élève classique qui consiste à faire simplement glisser la rège qu'une perpendiculaire par la procédure théorique habituelle avec l'équerre. (Ce qui tendrait à signifier que la procédure élève est plus performante que la procédure théorique)

Énoncé de cet exercice Annexes de cet exercice Retour

ÉNONCÉ LYON – CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES 3,5 + 3 POINTS

1°) Sur l'annexe I , **à rendre avec votre copie,** réaliser, en n'utilisant que la règle et le compas les constructions suivantes:

1. Tracer la droite passant par C et qui est perpendiculaire à d.
2. Tracer la droite passant par B et qui est parallèle à d.
3. Tracer les triangles rectangles isocèles d' hypoténuse [AC].
4. Construire un triangle AIJ isocèle de sommet principal I, tel que I est un point de d et B est le pied de la hauteur issue de A (c'est à dire que B est l'intersection de la hauteur issue de A avec le côté opposé). Y a – t – il plusieurs possibilités ?

2°) Décrire les étapes des deux constructions réalisées en 3 et 4.

3°) **Question complémentaire:**

Cet exercice a été donné lors d'une évaluation à l'entrée en sixième, avec les consignes suivantes (les élèves disposent de la règle, l'équerre, le compas, … et la calculatrice) :

1. Trace la droite qui passe par les points A et C.
2. Trace la droite qui passe par C et qui est perpendiculaire à la droite d.
3. Trace la droite qui passe par B et qui est parallèle à la droite d.
4. Trace le cercle de centre B passant par A.
5. Trace le cercle de diamètre [AC].

Vous trouverez en annexes II et III les travaux de quatre élèves.

a) Que cherche-t-on à évaluer?

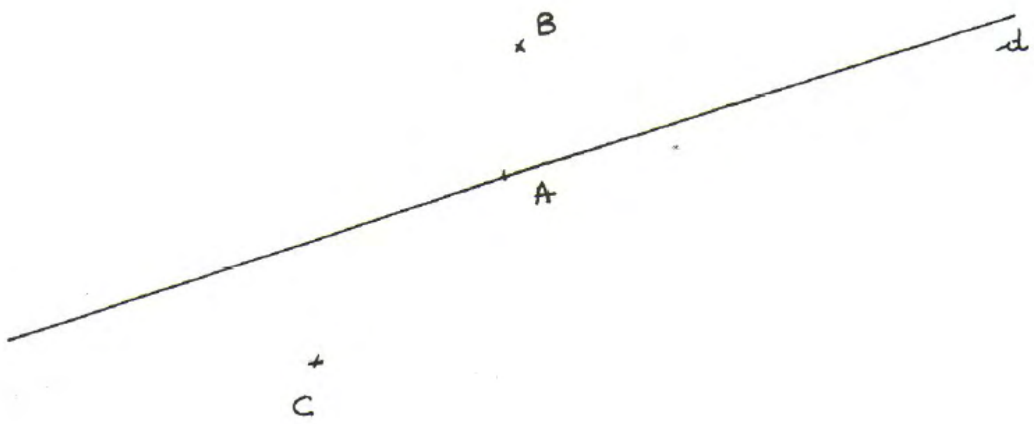
b) Repérer et analyser les différentes erreurs pour chaque production.

Annexes de cet exercice Corrigé Retour

ANNEXES LYON – CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

ANNEXE I *à rendre avec la copie*

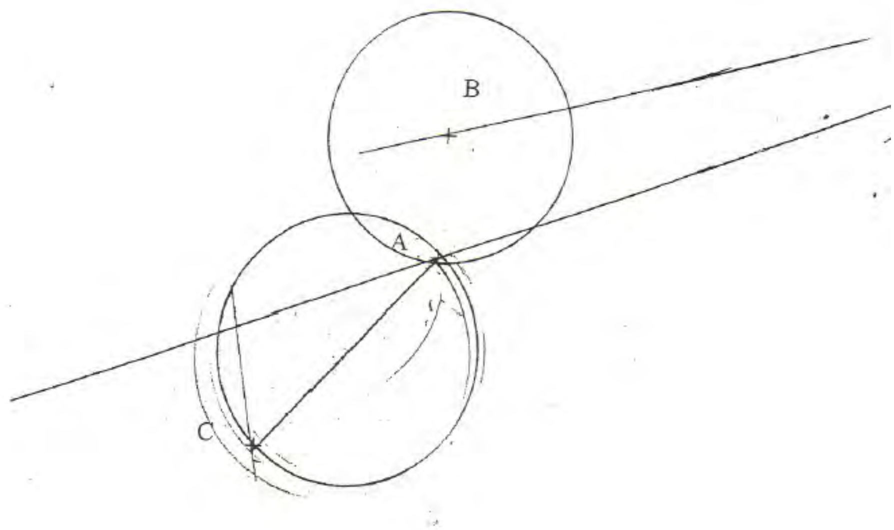
Nom section



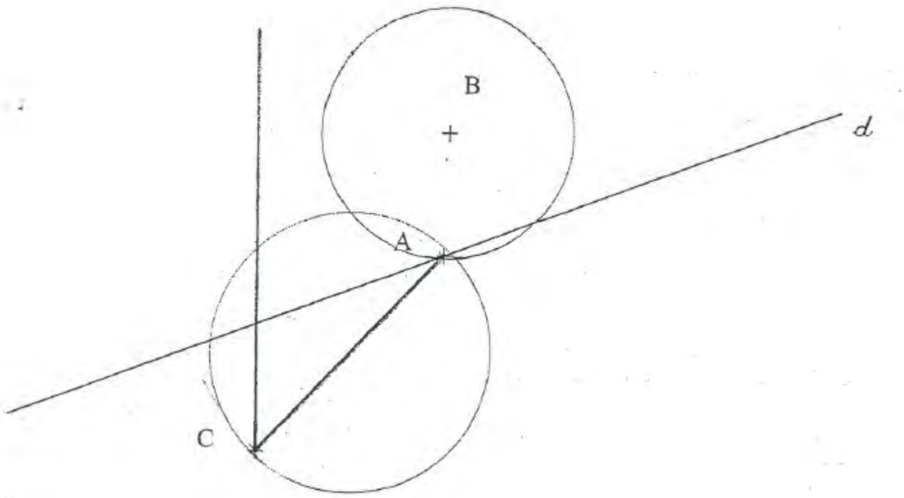
Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

Annexe II

ELEVE 1



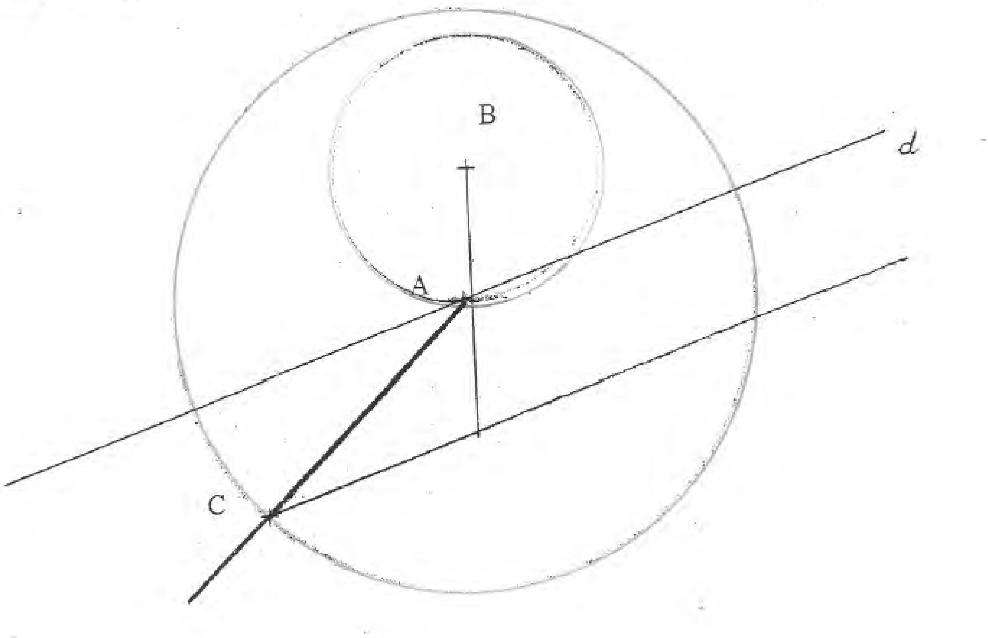
ELEVE 2



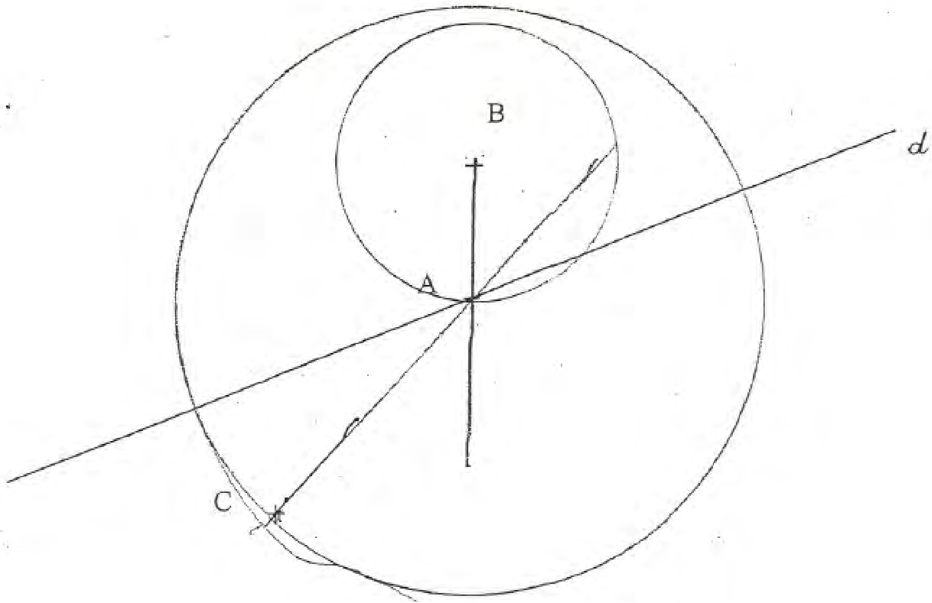
Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

Annexe III :

ELEVE 3



ELEVE 4



Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

CORRIGÉ LYON – CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

1) **0,25+0,25+0,5+1 points**

Cf. dessin (à photocopier)

2) Q3 **0,5 point**

Tracer la médiatrice de [AC]

Tracer le cercle de diamètre [AC], il coupe la médiatrice en 2 points

Joindre ces 2 points à A et C.

Il y a deux triangles possibles.

2) Q4 **1 point**

Tracer la droite (AB)

Tracer la droite h perpendiculaire en B à la droite (AB) elle coupe la droite d en I.

Tracer un cercle de centre I et de rayon IA il coupe la droite h en deux points J et J. Il y donc deux possibilités.

Joindre les points AIJ, puis AIJ'.

3 a) **1 point**

Compétences évaluées :

- Savoir utiliser les instruments usuels
- Savoir tracer une droite passant par deux points donnés
- Savoir tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné
- Savoir tracer une droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné
- Savoir tracer un cercle de centre donné passant par un point donné
- Savoir tracer un cercle dont on connaît un diamètre.3) b)

Énoncé de cet exercice Annexes de cet exercice Retour

2

3) b) **4 × 0,5 pt**

Elève 1 :

1• Droite (AC) : Il trace un segment au lieu d'une droite

Origine : Deux hypothèses :

- Dans un enseignement "ostensif " la distinction entre droite et segment ne peut venir que des différences au niveau de leur représentation or ces distinctions sont minimes.
- Lorsque l'élève lit la consigne on peut penser que pour lui ce qui est important c'est " droite " assimilée à " trait " et les points A et C.

2 • Droite perpendiculaire : Trace une droite

approximativement verticale au lieu de tracer une droite perpendiculaire

Origine : Utilisation d'un théorème en acte : « Un droite perpendiculaire à une droite donnée est verticale ».Ce théorème est induit par la représentation prototypique que s'est construit l'élève de deux droites perpendiculaires et éventuellement par le fait que "perpendiculaire " est associé à " angle droit " (association pertinente) et qu'angle droit est associé à " droit " au sens de " tiens toi droit " → vertical.

Comme la droite tracée n'est pas vraiment verticale on peut aussi évoquer une utilisation approximative de l'équerre qui ne serait pas placée exactement sur la droite (d) au moment du tracé.

3 • Droite parallèle : Tracé d'une droite qui passe par B et qui n'est pas exactement parallèle à (d)

Origine : Deux hypothèses :

- L'élève a tracé la droite au jugé en s'assurant seulement que les deux droites ne se coupent pas sur la page. Théorème en acte : « deux droites sont parallèles si elles ne se coupent dans la page ». Ce théorème est certainement induit par des exercices de reconnaissances de droites non parallèles et de l'argument entendu : « Elles ne sont pas parallèles car elles se coupent ».
- L'élève a utilisé maladroitement une procédure de glissement de la règle et il n'a pas jugé nécessaire de contrôler son résultat.

4 • Cercle de centre B : OK

5 •Cercle de diamètre [AC] : Recherche du centre du cercle en tâtonnant.

Origine : Cette procédure peut parfaitement permettre de réussir cette tâche. Si on estime que cette méthode n'est pas correcte c'est en référence à une exigence que l'on souhaite que les élèves s'approprient : pour tracer un cercle dont un diamètre est un segment donné il faut au préalable déterminer le milieu de ce segment. . Mais cette exigence a de la peine à prendre du sens pour certains élèves qui estiment qu'en tâtonnant cela fonctionne très bien. De plus dans les programmes de tracé que les élèves rencontrent il n'y a généralement pas de tracé intermédiaire non demandé comme ici.

Elève 2 :

1 • Comme l'élève A il assimile la droite à un segment.

2 • Plus encore que l'élève A il trace une droite verticale pour tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée.

3 • Il ne trace pas la droite parallèle.

Origine : Manque de temps ou bien il n'a pas de représentation de droites parallèles ou bien après avoir tracé la droite perpendiculaire à (d) il saute involontairement la ligne de l'instruction de tracé de la droite parallèle pour passer au cercle

4 • OK

5 • Imprécision de tracé due à l'ouverture du compas trop grande pour tracer le cercle.

Elève 3 :

1 • Tracé d'une demi – droite : Origine : Après avoir placé sa règle il place son crayon sur le point A (pour assurer la position de la règle) et part de ce point pour rejoindre C qu'il dépasse.

2 • Il trace une droite parallèle à (d).

Origine : Il confond « droites parallèles » et « droites perpendiculaires ». Cette confusion est classique et ce pour plusieurs raisons :

- ces deux notions sont généralement abordées en même temps.
- « perpendiculaires « t « parallèles » commencent par la même lettre.
- dans un enseignement ostensif elle ne prennent pas de sens pour l'élève.

3• Il trace une droite verticale passant par B. Origine : Cf. Confusion « parallèle » et « perpendiculaire » ci – dessus et assimilation « perpendiculaire » et « verticale » → Elève 1.

4• OK.

5 • Il a tracé un cercle de centre A passant par C.

Origine : L'élève est habitué à tracer des cercles de centre donné passant par un point donné, plutôt que des cercles de diamètre donné.

Elève 4 :

1 • Tracé d'une demi – droite d'origine C passant par A.

Origine cf. Elève 3 mais l'élève 4 a commencé par placer son crayon sur C.

2 • Il n'a pas exécuter la procédure 2.

Origine : De l'instruction 1 il a lu directement l'instruction 3.

3 • Il a tracé une droite verticale.

Origine : Confusion « droites parallèles « et « droites perpendiculaires » et « droites perpendiculaires « et « droites verticales ». Cf. Elève 3.

4 • OK

5 • Il a tracé un cercle de centre A passant par C.

Origine : Cf. Elève 4.

A noter un dérapage du compas.

Origine : Difficultés de motricité fine ou mauvaise qualité du compas !

Énoncé de cet exercice Annexes de cet exercice Retour

ÉNONCÉ REIMS – CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES 4 + 4 POINTS

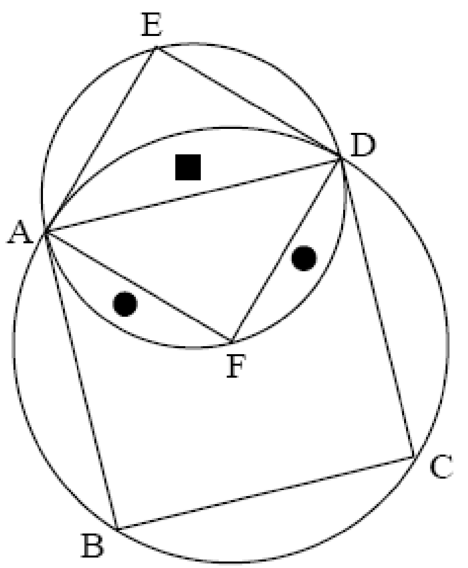


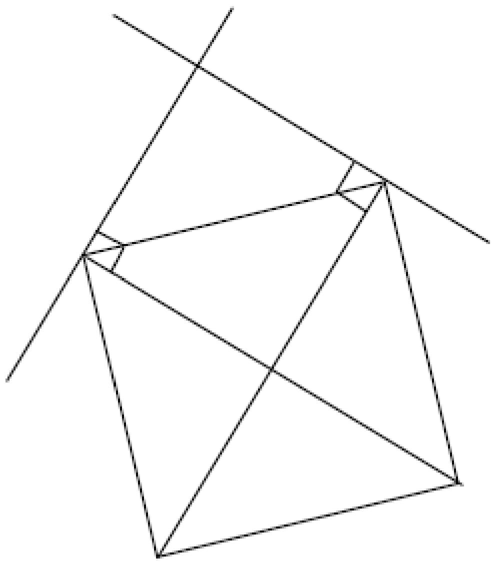
Figure 1

ABCD et AFDE sont des carrés.
Chaque cercle est circonscrit à un des carrés.

I. Étude de la construction de la figure 1

a) Justifier la méthode employée ci-dessous (figure 2) pour construire les points E et F à partir des points A, B, C, D.

Figure 2



b) Décrire une seconde méthode pour construire les points E et F à partir des points A, B, C, D.
Réaliser la construction sur la figure fournie en annexe 1 (à rendre avec la copie).

II. Quelques calculs d'aire relatifs à la figure 1

a) On note a la longueur AB. Calculer l'aire du carré AFDE en fonction de a.
b) On note S l'aire de la surface comprise entre l'arc AD (du cercle circonscrit au carré ABCD) et la corde AD (marquée d'un carré noir sur la figure 1) et S' l'aire de la surface

comprise entre l'arc AFD et les cordes AF et FD (marquée de deux ronds noirs sur la figure 1). Monsieur Hippo affirme que *S* et *S'* sont égales. Qu'en pensez vous ? Justifiez votre réponse.

III. Questions complémentaires

L'énoncé ci-dessous (figure 4) est tiré d'un manuel de l'école primaire (Hatier, 1994)

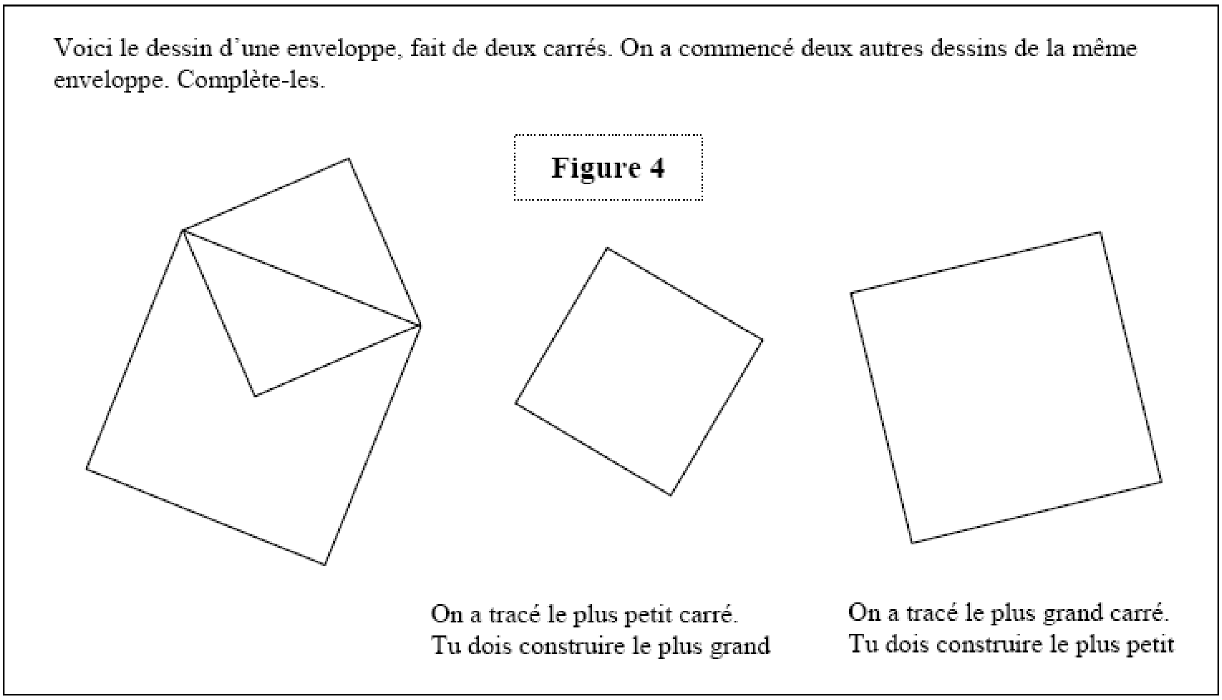

Voici le dessin d'une enveloppe, fait de deux carrés. On a commencé deux autres dessins de la même enveloppe. Complète-les.

Figure 4

On a tracé le plus petit carré.
Tu dois construire le plus grand

On a tracé le plus grand carré.
Tu dois construire le plus petit

a) A quel niveau de l'école élémentaire peut être proposé cet exercice ? Argumenter votre choix.

Dans la figure 5 de l'annexe 2 sont reproduites quatre productions d'élèves dans lesquelles les traits de construction sont apparents (les élèves avaient droit aux instruments habituels de tracé : règle graduée, équerre, compas).

b) Indiquer les constructions correctes. Pour celles-ci, justifier la validité de la procédure utilisée par l'élève.

c) Pour celles qui sont erronées, indiquer la procédure de l'élève. Préciser ce qui est pertinent dans sa démarche et comment corriger (au plus simple) ce qui ne l'est pas.

d) La méthode présentée plus haut, dont la justification a été demandée dans la question a) de la partie I, n'a été utilisée par aucun élève. Citer deux difficultés, du point de vue des élèves, qui s'opposent à la découverte de cette méthode.

Annexes de cet exercice Corrigé Retour

ANNEXES REIMS – CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

A RENDRE AVEC LA COPIE

NOM : PRENOM : GROUPE :

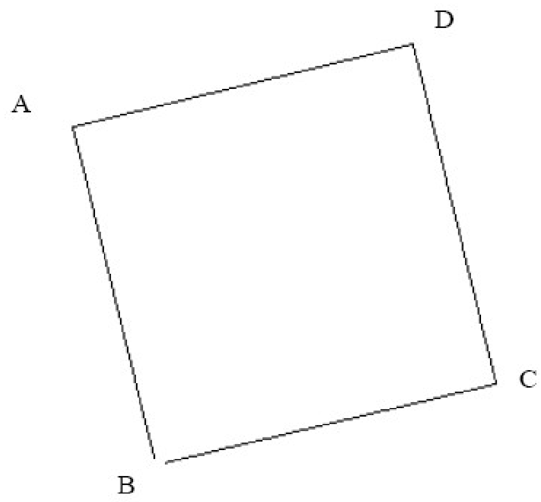


Figure 3

Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

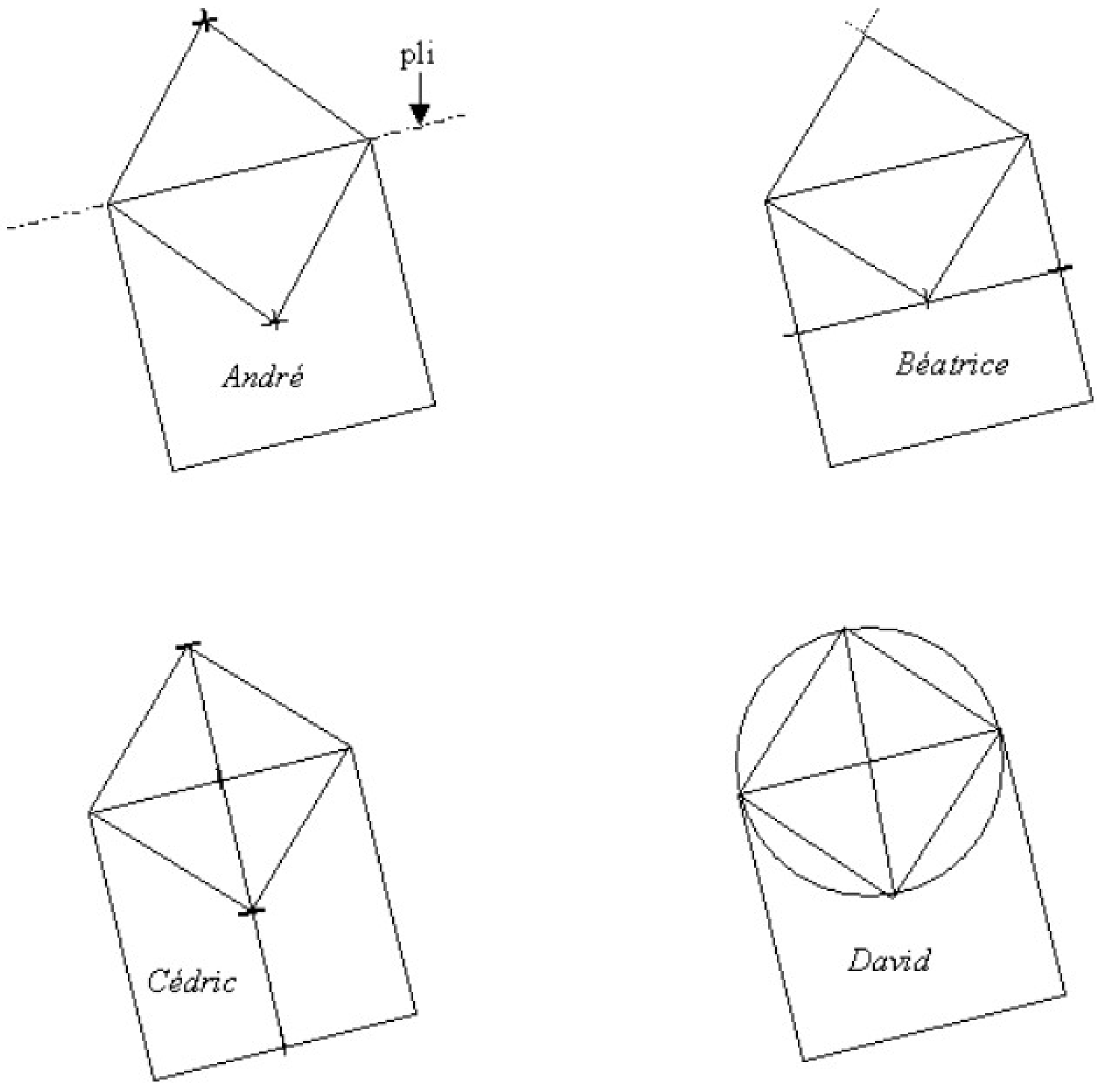


Figure 5

Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

CORRIGÉ REIMS – CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

I. Etude de la construction de la figure 1

a) Le point F a été construit comme point d'intersection des diagonales [AC] et [BD] du carré ABCD. Par conséquent les longueurs AF et FD sont égales et l'angle $\widehat{AFD}$ est droit.
Le point E a été construit comme point d'intersection de la perpendiculaire à (AF) passant par A et de la perpendiculaire à (FD) passant par D. Par conséquent les angles $\widehat{FDE}$ et $\widehat{EAF}$ sont droits.
Le quadrilatère AFDE ayant trois angles droits est un rectangle. De plus il a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un carré.

b) En voici une parmi d'autres : on construit la médiatrice Δ de [AD], elle coupe [AD] en son milieu I ; puis on trace le cercle de centre I et de rayon AI, il coupe Δ aux points E et F.

II. Quelques calculs d'aire relatifs à la figure 1

a) $AF = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$; d'où l'aire du carré AFDE est égale à : $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}a\right]^2 = \frac{1}{2}a^2$

b) Calculons l'aire Z du demi disque AFD de diamètre [AD] : $Z = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}AD\right)^2 = \pi\frac{a^2}{8}$.

Calculons l'aire Y du quart de disque AFD de centre F et de rayon FA : $Y = \frac{1}{4}\pi AF^2 = \frac{1}{4}\pi\frac{1}{2}a^2 = \pi\frac{a^2}{8}$.
On constate que $Z = Y$. En soustrayant à Z et Y l'aire du triangle AFD on déduit immédiatement que $S = S'$. Monsieur Hippo avait raison !

III. Questions complémentaires

a) La réussite de cet exercice nécessite la mise en œuvre de compétences (tracer la perpendiculaire à une droite passant par un point donné, trouver le milieu d'un segment, concevoir et réaliser un programme de construction) qui relèvent du cycle 3.

b) Les productions de Béatrice et Cédric sont correctes.
Pour décrire leurs procédures nous utilisons les notations de la figure 1.
Béatrice a construit les milieux des segments [AB] et [CD], puis le milieu du segment joignant ces milieux. Elle obtient ainsi le point F qui est le centre du carré ABCD. Elle trace ensuite les segments [AF] et [FD]. Enfin elle trace la perpendiculaire à (AF) passant par A et la perpendiculaire à (FD) passant par D, ces droites se coupant au point E. Son quadrilatère AFDE est bien un carré puisqu'il possède trois angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur.
Cédric a construit les milieux I et J des segments [AD] et [BC], puis a tracé le segment [IJ] et trouvé son milieu. Il a obtenu ainsi le point F qui est le centre du carré ABCD. Pour obtenir le point E il a prolongé le segment [IJ] d'une longueur égale à IF. Son quadrilatère AFDE est bien un carré puisque ses diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement et sont de même longueur.

c) André a tracé un losange non carré. Il a placé le point F sans doute au jugé, avec assez de précision pour que les distances FA et FD soient « sensiblement égales », puis a tracé les segments [FA] et [FD], avant de compléter la figure par symétrie par rapport à (AD) en utilisant la technique du pliage. (Cette procédure donnera en général un « cerf-volant », c'est uniquement parce qu'il a placé F sur la médiatrice de [AD] qu'il a obtenu un losange). Pour rectifier sa procédure il doit placer le point F exactement au centre du carré, en suivant par exemple la démarche de Cédric.

Remarques : la construction du symétrique d'un point avec règle et équerre relève du collège ; le fait que le dessin à réaliser représente une enveloppe peut inciter les élèves à utiliser la technique du pliage.

David a tracé un rectangle non carré. Tracer le cercle de diamètre [AD] est pertinent, mais il doit ensuite tracer le diamètre perpendiculaire à [AD] pour obtenir un carré.

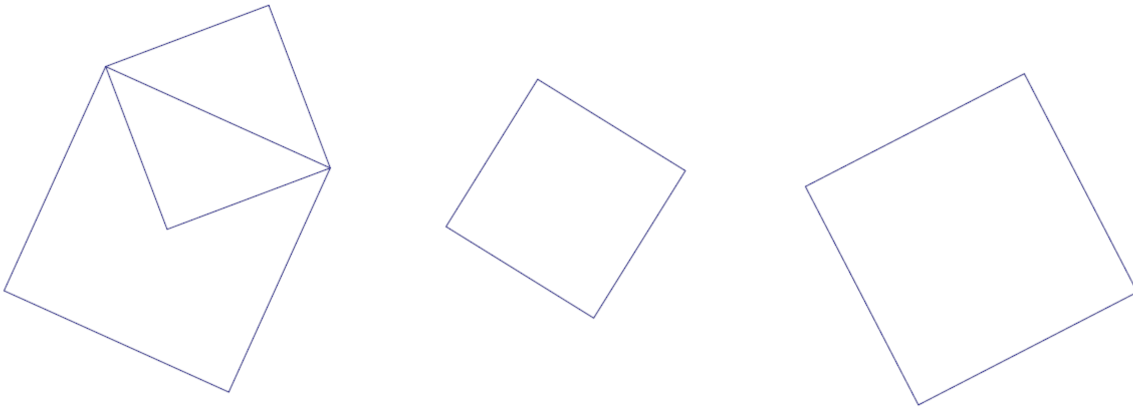
d) Voici deux difficultés qui peuvent expliquer la non utilisation par les élèves de la méthode dégagée dans la question a) de la partie I :
Elle s'appuie sur les propriétés des diagonales d'un carré (pour la construction du point F comme centre du carré ABCD) ce qui n'est pas exigible d'un élève de cycle 3.
Elle nécessite, lors de l'analyse du dessin de l'enveloppe à reproduire, de penser à prolonger les côtés du petit carré ; or ajouter des éléments à la figure fournie dans l'énoncé n'est pas une démarche courante pour un élève.

Énoncé de cet exercice Annexes de cet exercice Retour

ÉNONCÉ TROYES – CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES 4 + 4 POINTS

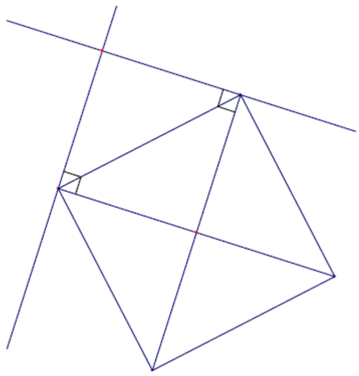
L'énoncé ci-dessous est tiré d'un manuel de l'école Primaire (Hatier, 1994).

Voici le dessin d'une enveloppe, fait de deux carrés. On a commencé deux autres dessins de la même enveloppe. Complète-les.



Dessin 1. On a tracé le plus petit carré
Tu dois construire le plus grand

Dessin 2. On a tracé le plus grand carré.
Tu dois construire le plus petit

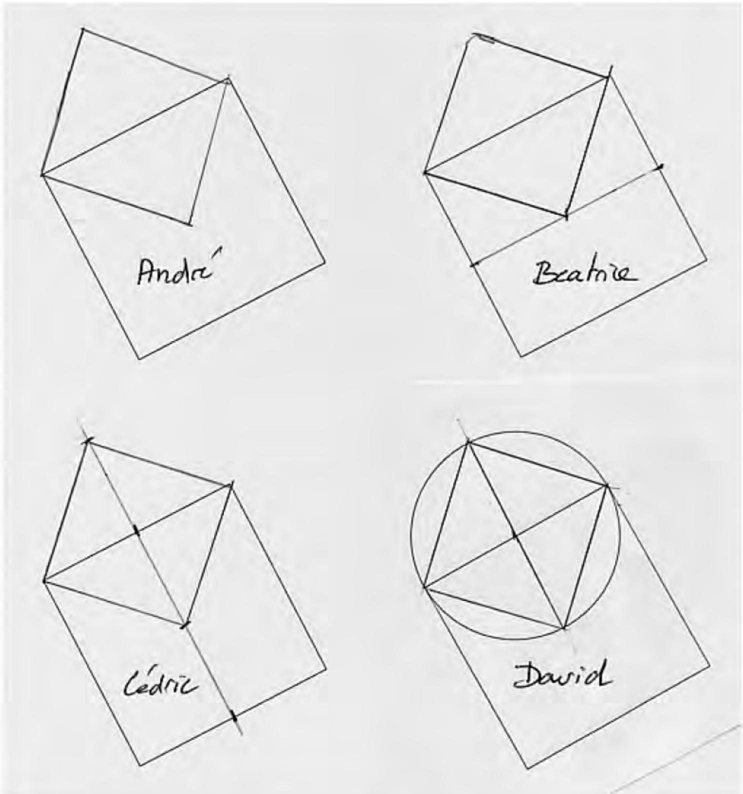


1. Justifier la méthode employée ci-contre, pour construire le « petit carré ».
2. Proposer une seconde méthode de construction de ce petit carré, à la règle non graduée et au compas, sur le dessin 2, ci-dessus. Laisser les traits de construction apparents.
3. Construire le « grand carré », sur le support ci-dessus, à la règle non graduée et au compas. Laisser les traits de construction apparents.

Questions complémentaires

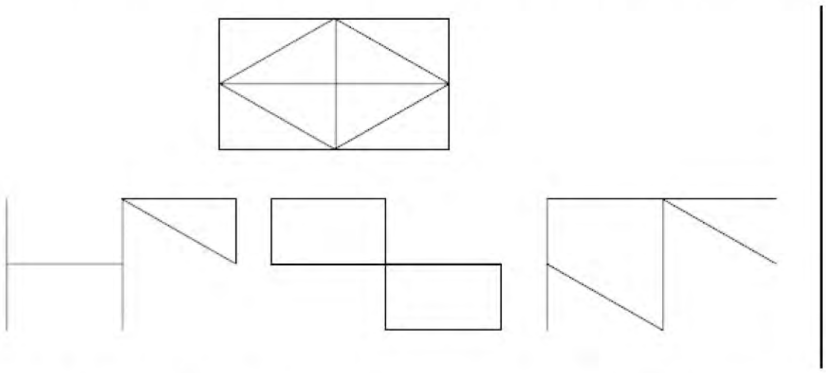
4. À quel niveau de l'école élémentaire peut être proposé cet exercice ? Argumenter votre choix.
5. Parmi les productions d'élèves suivantes (page 2), indiquer celle qui est correcte (les élèves avaient droit aux instrument habituels de tracé : règle graduée, compas, équerre)
6. Pour celles qui sont erronées, indiquer la procédure de l'élève. Indiquer ce qui est pertinent dans sa démarche, et comment corriger (au plus simple) les autres pas.

Corrigé Retour



7. La méthode de la question 1 de l'exercice, qu'on vous a demandé de justifier, n'a été utilisée par aucun élève. Citer deux obstacles, du point de vue des élèves, qui s'opposent à la découverte de cette méthode.

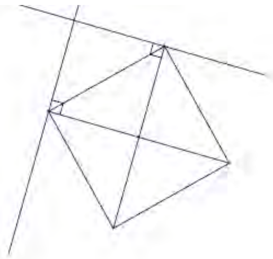
8. Indiquer quelles compétences met en œuvre cet exercice, proposé p. 76 du livret d'accompagnement des programmes 2002 :



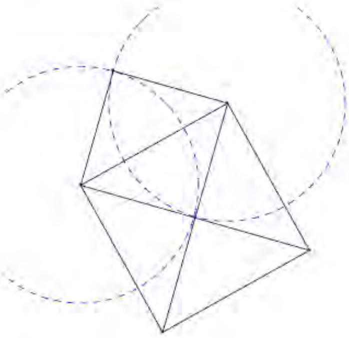
9. Dans l'esprit de cet exemple, proposer une variante de l'exercice initial (Hatier, 1994), permettant à un élève de Cycle 2 de le réaliser.

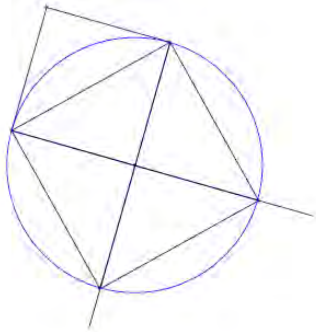
Corrigé Retour

CORRIGÉ TROYES – CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

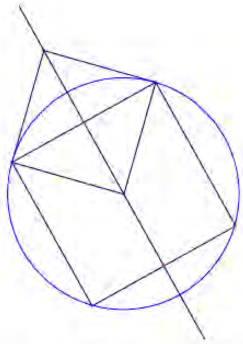


1. ABCD étant un carré, ses diagonales sont perpendiculaires : donc $\widehat{AOB}$ droit.
   D'après la construction, AOBE avait déjà deux angles droits ($\widehat{EAO}$ et $\widehat{EBO}$) ; ayant trois angle droits, il est un rectangle.
   De plus les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu, et ont même longueur : donc dans ABCD, on a OA = OB (demi diagonales)
   Le rectangle AOBE ayant deux côtés consécutifs de même longueur, c'est un carré.
2.
3.





Questions complémentaires



4. La construction des carrés sur papier uni est du ressort du cycle 3 ; la complexité de la construction, exigeant de percevoir d'abord le lien entre petit et grand carré (côtés de l'un = demi diagonales de l'autre) en fait plutôt un exercice de CM.
5. La construction de Cédric est correcte. Il a déterminé (par mesurage) les milieux K et J de deux côtés opposés, puis le milieu O de ces milieux, ce qui lui donne le centre du carré ABCD, et sur la médiatrice de [AB]. Dans le carré ABCD, OK égale un demi côté, soit AK ou KB. Donc, en reportant cette distance OK, par mesurage, sur cette médiatrice, à partir de K, de l'autre côté de (AB), il réalise un segment [EO] de même longueur que AB, et tel que [AB] et [EO] ont même milieu, et sont perpendiculaires.
6. André a réalisé un dessin conforme à sa représentation du carré, relativement correcte. Il a probablement utilisé la règle graduée, en tâtonnant à vue pour la position des côtés, peut-être en utilisant l'équerre pour les deux côtés de gauche (l'angle semble droit), tout en respectant la longueur commune. Mais il n'a visiblement pas perçu que les côtés du petit carré intérieurs au grand carré, en sont les demi diagonales. C'est cette propriété qu'il convient de lui faire percevoir, avant de reprendre sa construction, qu'il pourra continuer par exemple comme au 1).
   Béatrice a déterminé (par mesurage) les milieux de deux côtés opposés, puis le milieu O de ces milieux, ce qui lui donne le centre du carré ABCD (Cf. Cédric). Elle obtient donc bien les côtés AO et OB du petit carré. Mais il semble qu'elle ait terminé en posant l'équerre, un côté touchant A, l'autre B, et pivoté l'instrument jusqu'à une position satisfaisante à vue, pour enfin tracer en suivant le contour de l'angle droit de son équerre : ce qui peut expliquer la « rature » au sommet.
   David a déterminé (par mesurage) le milieu K de [AB], puis a tracé le cercle C(K ; KA), et une droite approximativement perpendiculaire à (AB), passant par K. Il considère les points d'intersection de cette droite et du cercle comme les deux autres sommets de son « carré ».
   Il utilise sans doute en acte la propriété suffisante : « diagonales de même longueur perpendiculaires en leur milieu ». Il peut donc conserver cette démarche, mais réaliser la droite passant par K, correctement à l'équerre.
7. Deux obstacles, s'opposent à la découverte de la méthode 1) :
   - *La perception des alignements* lorsque les droites ne sont pas matérialisées (le côté du petit carré n'est alors pas perçu comme une demi diagonale du grand).
   - *La conception des points d'un polygone comme intersection de deux droites*, ce qui exige de prolonger les tracés au-delà des mesures suffisantes pour les élèves : par exemple, E sera plus spontanément construit en traçant un segment de 3 cm perpendiculaire en A à (AO), et non comme point d'intersection de deux droites (les deux perpendiculaires tracées en 1)).

8. Cet exercice, proposé p. 76 du livret d'accompagnement des programmes 2002, fait compléter l'amorce d'un dessin modèle. Les compétences que l'on veut ici mettre en jeu sont :
   - Savoir identifier les éléments manquants par comparaison avec le modèle (reconnaître éventuellement des sous figures dans l'un, absentes dans l'autre)
   - Percevoir des alignements (segments dans le prolongement d'autres)
   - Percevoir un point comme intersection de deux prolongements de segments existants (les enfants de l'école primaire s'autorisant difficilement à tracer au-delà de ce qui est attendu ; par exemple, dans le dessin (Fig 1) ci-dessous, l'élève peut chercher plutôt à reconstruire des rectangles identiques accolés aux deux existants).
   - Savoir utiliser la règle plate graduée ou non, pour joindre deux points, ou prolonger un tracé.

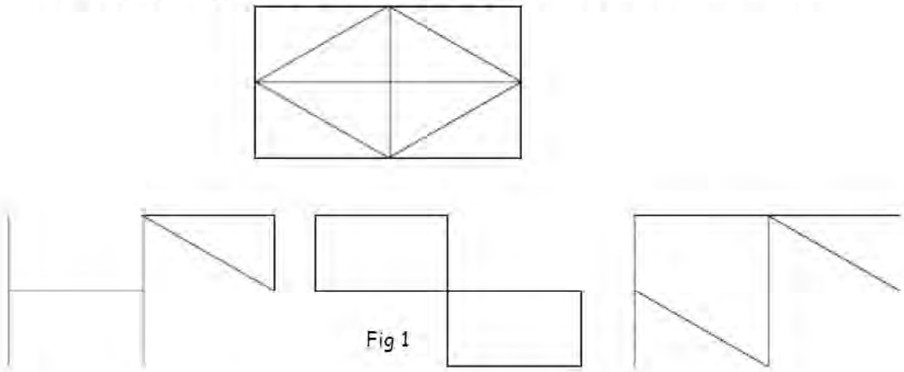
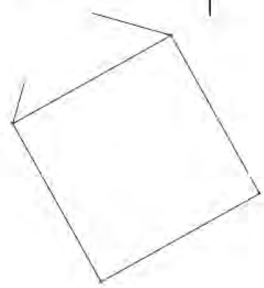


Fig 1

9. Dans l'esprit de cet exemple, et pour travailler à surmonter les obstacles cités en 7), l'exercice initial peut être modifié pour permettre à un élève de Cycle 2 de le réaliser, uniquement à la règle, en l'obligeant à s'appuyer sur l'observation d'alignements, et à déterminer des points comme intersection de prolongements : par exemple, sur le dessin ci-contre, l'élève n'a pas à utiliser l'équerre pour construire les angles droits, qui sont donnés. S'il perçoit l'alignement, sur le dessin initial, de A, O, C d'une part, et B, O, D. d'autre part, O et E peuvent tous deux être déterminés à la règle plate, à condition de s'autoriser à utiliser des prolongements, ou plus généralement, des lignes plus longues que le segment final attendu.



Énoncé de cet exercice Retour

ÉNONCÉ LE HAVRE – FRACTIONS ET DÉCIMAUX 3,5 POINTS

On considère le rationnel r dont l'écriture à virgule est r = 2,370370…, la période étant 370.

1. Décomposer 2368 et 999 en produit de facteurs premiers puis simplifier $\frac{2368}{999}$.

2. Écrire le rationnel r sous la forme d'une fraction irréductible.

3. a) Effectuer la division euclidienne de 64 par 27. En déduire l'écriture de $\frac{64}{27}$ sous la forme de la somme d'un entier naturel et d'une fraction irréductible inférieure à 1.

b) Effectuer la division euclidienne de 100 par 27.

En déduire que $\frac{64}{27} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{19}{270}$.

c) Déduire de l'égalité précédente le chiffre des dixièmes de $\frac{64}{27}$ et donner la valeur exacte de l'erreur commise en remplaçant $\frac{64}{27}$ par 2,3.

Corrigé Retour

CORRIGÉ LE HAVRE – FRACTIONS ET DÉCIMAUX

1) $2368 = 2^6 \times 37$ et $999 = 3^3 \times 37$, d'où $\frac{2368}{999} = \frac{64}{27}$

2) r = 2,370370…
d'où 1000 r = 2370,370370…
d'où 1000 r - r = 2370 - 2 = 2368
d'où 999 r = 2368. Par conséquent $r = \frac{2368}{999} = \frac{64}{27}$.

3) a) $64 = 27 \times 2 + 10$ (avec $10 \leq 27$). Donc $\frac{64}{27} = 2 + \frac{10}{27}$.

b) $100 = 27 \times 3 + 19$. (avec $19 < 27$). D'où $\frac{100}{27} = 3 + \frac{19}{27}$

et $\frac{64}{27} = 2 + \frac{1}{10} \times \frac{100}{27} = 2 + \frac{1}{10} \times \left(3 + \frac{19}{27} \right) = 2 + \frac{3}{10} + \frac{19}{270}$

c) Par conséquent $2 + \frac{3}{10} \leq \frac{64}{27} \leq 2 + \frac{4}{10}$.

Donc le chiffre des dixièmes de $\frac{64}{27}$ est 3.

$\frac{64}{27} - 2{,}3 = \frac{19}{270}$, l'erreur commise en remplaçant $\frac{64}{27}$ par 2,3 est donc $\frac{19}{270}$.

Énoncé de cet exercice Retour

ÉNONCÉ BESANÇON – FRACTIONS ET DÉCIMAUX 4 + 4 POINTS

Le but de l'exercice est de déterminer l'écriture décimale du nombre $\frac{64}{27}$ **sans effectuer de division autre que la division euclidienne et sans utilisation de la calculatrice**.

1. $\frac{64}{27}$ est-il un décimal? Un rationnel ? On justifiera les réponses.
2. Déterminer la partie entière de $\frac{64}{27}$. On justifiera la réponse. *(On rappelle que la partie entière d'un nombre est le plus grand entier inférieur ou égal à ce nombre.)*
3. a) Montrer que $\frac{64}{27} = \alpha + \frac{b}{27}$ où α est la partie entière calculée précédemment et où b est un entier naturel que l'on déterminera.

   b) En déduire β, le chiffre des dixièmes de l'écriture décimale de $\frac{64}{27}$.

   c) Montrer alors que $\frac{64}{27} = \alpha + \frac{\beta}{10} + \frac{c}{270}$ où c est un entier que l'on déterminera.

   d) En déduire un encadrement de $\frac{64}{27}$ d'amplitude $\frac{1}{10}$.
4. a) Réitérer la procédure amorcée aux questions précédentes pour déterminer le chiffre des centièmes. Quelle est la valeur exacte de l'erreur commise si l'on remplace $\frac{64}{27}$ par *2,37 ?*

   b) Montrer que le chiffre des millièmes est 0.

   c) En déduire le chiffre des dix millièmes.

   d) Conclure et donner une nouvelle justification de réponse à la question 1.

Questions complémentaires :

Un maître a donné dans sa classe l'exercice suivant (Place aux maths éd BORDAS) :

> *Complète avec des nombres entiers :*
>
> *a)* $\frac{7}{6} = ... + \frac{....}{6}$ *b)* $\frac{274}{100} = ... + \frac{74}{100}$
>
> *Complète avec des nombres entiers consécutifs :*
>
> *c)* $..... < \frac{7}{6} < .....$ *d)* $.... < \frac{274}{100} < ....$

5. a) Quel est le niveau de la classe à laquelle s'adresse cette activité ? (Justifiez)

   b) Quelle critique peut-on formuler au regard des programmes ?
6. a) Proposer un raisonnement conforme au programme qu'un élève peut mettre en place pour répondre aux questions a. et c.

   b) Proposer un raisonnement conforme au programme qu'un élève peut mettre en place pour répondre aux questions b. et d. On donnera une procédure différente de celle proposée en a).
7. Les réponses de deux élèves sont données dans l'annexe 3. Préciser pour chacun d'eux les erreurs commises.

Corrigé Retour

CORRIGÉ BESANÇON – FRACTIONS ET DÉCIMAUX

EXERCICE 3 *(8 points)*

1- $\frac{64}{27}$ est une fraction irréductible. Ce n'est pas un nombre décimal. La décomposition du dénominateur en facteur premier est : $27 = 3^3$. Cette décomposition fait apparaître un facteur autre que 2 ou 5. $\frac{64}{27}$ est le quotient de deux entiers, c'est donc un rationnel.

2- La division euclidienne de 64 par 27 donne : $64 = 2 \times 27 + 10$. Ainsi on en déduit que $\frac{64}{27} = 2 + \frac{10}{27}$. L'inégalité $\frac{10}{27} < 1$ permet d'écrire : $2 \leq \frac{64}{27} < 3$. La partie entière de $\frac{64}{27}$ est donc égale à 2.

3- a) La question 2. nous donne $\alpha = 2$ et $b = 10$.

3- b) Il s'agit de déterminer le nombre de dixième dans $\frac{10}{27}$ c'est à dire la partie entière de $\frac{100}{27}$. En effectuant la division euclidienne, on obtient : $100 = 3 \times 27 + 19$. On en déduit alors $\frac{100}{27} = 3 + \frac{19}{27}$. L'inégalité $\frac{19}{27} < 1$ nous permet de conclure que la partie entière de $\frac{100}{27}$ est égale à 3 et donc que $\beta = 3$.

3- c) D'après la question précédente on déduit : $\frac{64}{27} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{19}{270}$.

3- d) Par la question c. on obtient un encadrement d'amplitude $\frac{1}{10}$: $2{,}3 < \frac{64}{27} < 2{,}4$.

4- a) Le chiffre des centièmes est donné par le nombre de centième dans $\frac{19}{270}$ c'est à dire la partie entière de $\frac{1900}{270}$ $(= \frac{190}{27})$. La division euclidienne donne : $\frac{190}{27} = 7 + \frac{1}{27}$. Le chiffre des centièmes de $\frac{64}{27}$ est donc 7 et on a : $\frac{64}{27} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{100} \times \frac{1}{27}$. La valeur exacte de l'erreur commise en remplaçant $\frac{64}{27}$ par $2{,}37$ est $\frac{1}{2700}$.

4-b) On peut remarquer que $\frac{1}{27} < \frac{1}{10}$ et donc que $\frac{1}{2700} < \frac{1}{1000}$. Le chiffre des millièmes est donc 0.

4-c) Il s'agit de déterminer le chiffre des dix millièmes c'est à dire le nombre de dix millième dans $\frac{1}{2700}$ soit la partie entière de $\frac{10000}{2700}$ $(= \frac{100}{27})$. Le calcul effectué en 3.b. nous détermine le chiffre des dix millièmes : c'est 3.

Énoncé de cet exercice Retour

4-d) On déduit de la question précédente : $\frac{64}{27}=2+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{3}{10000}+\frac{19}{270000}$. La poursuite du processus de façon récurrente (utilisation des questions 4.a ; 4.b. ;3.c. en boucle) nous permet d'écrire $\frac{64}{27}=2,370370370.....$ L'écriture de $\frac{64}{27}$ admet donc un développement périodique illimité. On en déduit que $\frac{64}{27}$ n'est pas décimal et est rationnel.

<u>Questions complémentaires</u>

5- a) On peut proposer cette activité au cycle 3 en classe de CM2.

5- b) Les programmes précisent à plusieurs reprises que les raisonnements concernant les encadrements de fraction, les écritures sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 « peuvent être appuyés sur une utilisation des fractions dans le cadre de la mesure des longueurs ou des aires » ce qui n'est pas le cas dans ce type d'exercice (qui reste uniquement dans le cadre numérique).

6- a) Pour les questions a. et c. on peut proposer : « Dans $\frac{7}{6}$ (sept sixième), il y a $\frac{6}{6}$ et $\frac{1}{6}$. Or $\frac{6}{6}$ c'est 1. Donc $\frac{7}{6}=1+\frac{1}{6}$ et $1<\frac{7}{6}<2$ car $\frac{1}{6}$ est plus petit que 1. »

6- b) Pour les questions b. et d. on peut proposer : « $\frac{274}{100}=2,74=2+\frac{74}{100}$ et $2<2,74<3$ ».

7- <u>Analyse de productions :</u>

<u>Etienne</u>

a- Confusion entre $\frac{6}{6}$ et 6. Décomposition de $7 = 6+1$. L'erreur peut provenir de la lecture « six plus un sixième » écrit comme il se prononce $6+\frac{1}{6}$.

c- $\frac{1}{6}$ étant inférieur à 1, le plus petit entier précédent $\frac{7}{6}$ est 6 d'après a., le suivant est donc 7.

b- Même type d'erreur qu'en a.

d- A cela s'ajoute l'erreur de l'encadrement par deux centaines consécutives induite par le 200.

<u>Jean-Claude</u>

a- Pas d'erreur. Il y a réponse à la consigne, mais pas dans l'attente de l'enseignant.

c- Le 0 correspond au 0 du a. mais l'absence de réponse montre que $\frac{7}{6}$ n'est pas perçu comme un nombre.

b- Pas d'erreur.

d- Là encore, la fraction n'est pas perçue dans sa globalité comme un nombre. Seul le numérateur est pris en compte.

<u>Énoncé de cet exercice</u> <u>Retour</u>

ÉNONCÉ AIX – FRACTIONS ET DÉCIMAUX 4 + 3 POINTS

1) Parmi les fractions suivantes quelles sont celles qui représentent un nombre décimal ? Justifier la réponse et donner une fraction décimale associée à chaque décimal :
$\frac{54}{1350}$; $\frac{5}{700}$; $\frac{63}{280}$; $\frac{123}{1200}$; $\frac{50}{1375}$

2) Quelle condition faut-il imposer à l'entier n pour que la fraction $\frac{n}{1050}$ représente un nombre décimal ? Justifier la réponse.
3) Un étudiant cherche à savoir quelle est l'écriture décimale des nombres représentés par les fractions $\frac{342}{277775}$ et $\frac{41}{33300}$.
Il tape les quotients correspondants à chacune de ces deux écritures fractionnaires sur sa calculatrice dont l'écran n'affiche que huit chiffres, et il a la surprise de constater que dans les deux cas la machine affiche :0,0012312.
Que peut-on conjecturer sur la période des écritures décimales de ces deux nombres ? Comment pourrait-on le vérifier ?

Questions complémentaires :
Ces questions s'appuient sur les documents suivants proposés en annexes :

« J'apprends les maths CM1 » édité chez Retz en annexes 1 et 1bis.

« Diagonale CM1 » édité chez Nathan en annexes 2 et 2 bis.

« Pour comprendre les mathématiques CM1 » édité chez Hachette en annexe 3.

1) Quels sont les deux sens de la fraction $\frac{a}{b}$ auxquels les programmes de 2002 font référence ? Quel est celui qui est préconisé par les programmes du cycle 3 ?
2) Chacun des trois documents joints en annexe, présente l'introduction des fractions au cycle 3 dans un manuel différent. Déterminer, pour chacun des manuels, quel est l'aspect de la fraction qui est privilégié lors de cette présentation.

Annexes de cet exercice Corrigé Retour

ANNEXES AIX – FRACTIONS ET DÉCIMAUX

Annexe 1

Troisième période

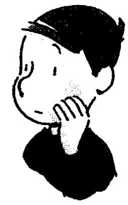
Arithmétique : la division-fraction ; les fractions (comparaisons, sommes) ; la technique écrite de la division (2e étape) ; la proportionnalité.
Géométrie et mesure : triangles ; parallélogrammes quelconques et particuliers ; aires.

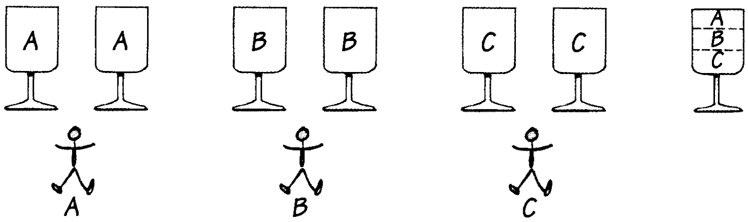
Je découvre

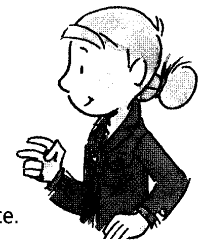
1 *Tu vas apprendre une nouvelle division, celle où l'on partage le reste.*

Problème : 7 verres de jus d'orange sont à partager entre 3 enfants.
Quelle sera la part de chaque enfant ?

C'est 7 divisé par 3. Mais attention, ici, il faut partager le reste !





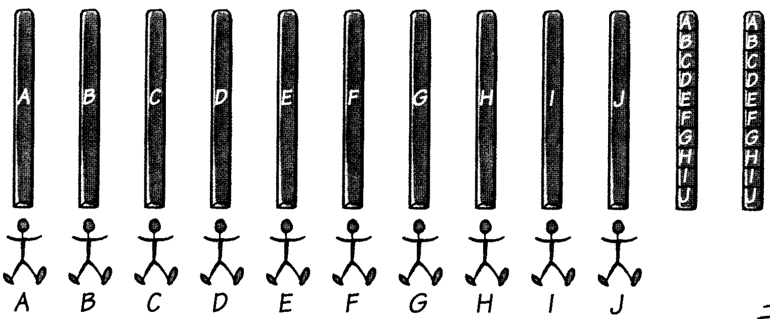


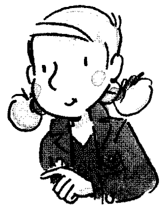
7 divisé par 3, c'est égal à 2 ... plus le reste 1, divisé par 3.
On écrit $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

Et s'il fallait partager 10 verres entre 3 enfants ? Écris l'égalité correspondante.

2 Problème : 12 barres de chocolat sont à partager entre 10 enfants.
Quelle sera la part de chaque enfant ?

C'est 12 divisé par 10. Mais attention, là aussi ...





12 divisé par 10, c'est égal à 1 ... plus le reste 2, divisé par 10.
On écrit $\frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10}$

Et s'il fallait partager 24 barres de chocolat entre 10 enfants ? Écris l'égalité correspondante.
Et s'il fallait partager 123 barres de chocolat entre 10 enfants ? Écris l'égalité correspondante.

1 à **3** L'écriture 7/3 désigne à la fois la division de 7 par 3 et la fraction « 7 tiers ». De sérieux arguments plaident en faveur d'une introduction de l'écriture *a*/*b* dans le sens « *a* divisé par *b* » (voir p. 4 et 5). Dans cette séquence, et jusqu'à la sq n° 61, on lira donc les écritures 7/3, 12/10, etc.,

Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

Annexe 1bis

SÉQUENCE **58**

Une nouvelle division et de nouveaux nombres

Calculs proposés par écrit au tableau

1. Divisions par 2 de $n < 200$ (voir p. 11).
2. Divisions par 3, 4... dans des cas (ceux de la sq n° 55) où q = 10, 25, 50, 100...

3 Problème : 13 tartelettes sont à partager équitablement entre 4 personnes.
Quelle sera la part de chaque personne ?

Dessine les tartelettes et effectue le partage. Écris l'égalité correspondante.

J'ai appris

$\frac{17}{3}$ se lit « **17 divisé par 3** » (tu apprendras bientôt une autre façon de le lire).

C'est une nouvelle division, la **division-fraction**, où l'on partage le reste.
Avec cette division, on peut écrire une égalité :

c'est le quotient de la division avec reste...

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$ *... mais le reste a été partagé.*

4 Calcule ces divisions-fractions.

$\frac{561}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{52}{10}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{702}{100}$
$\frac{103}{25}$	$\frac{109}{3}$	$\frac{35}{8}$	$\frac{4\,258}{5}$	$\frac{7\,041}{1\,000}$

5 **Problèmes**

Résous ces problèmes en indiquant si tu utilises la division avec reste ou la division-fraction.

1 ▶ On partage 7 brioches en 2 parts égales.
Combien de brioches y a-t-il dans chaque part ?

2 ▶ On répartit équitablement 13 billes entre 4 enfants.
Combien de billes aura chaque enfant ?

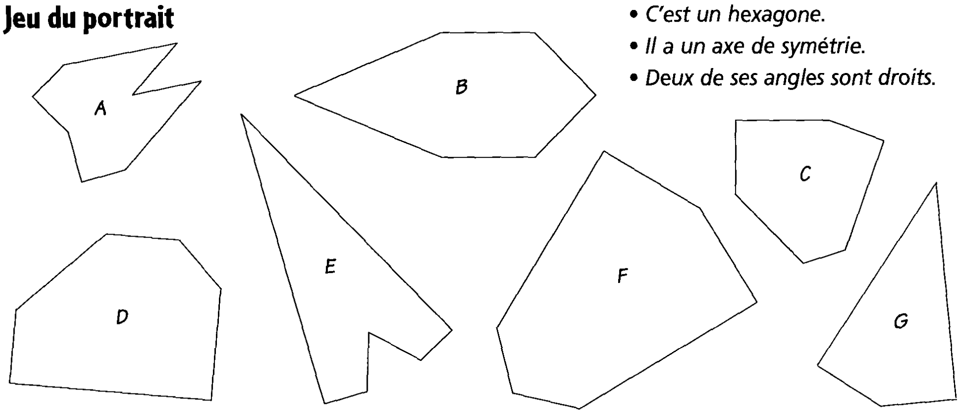
3 ▶ On partage équitablement 14 pains au lait entre 5 enfants.
Quelle sera la part d'un enfant ?

4 ▶ On partage équitablement 26 gaufrettes entre 3 frères.
Combien de gaufrettes chacun aura-t-il ?

Je deviens performant

A Jeu du portrait

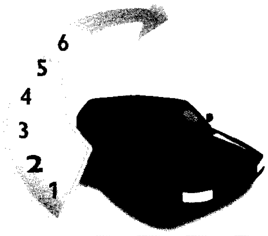
- *C'est un hexagone.*
- *Il a un axe de symétrie.*
- *Deux de ses angles sont droits.*



sous la forme « 7 divisé par 3 », « 12 divisé par 10 », etc. Si, cependant, des enfants les verbalisaient sous forme fractionnaire, comme le ferait le sens commun, on ne refuserait pas cette lecture, mais on ne l'institutionnaliserait pas et on ne chercherait pas à l'expliquer.

Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

Annexe 2

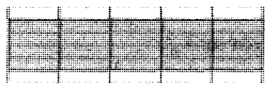


Les fractions (1)

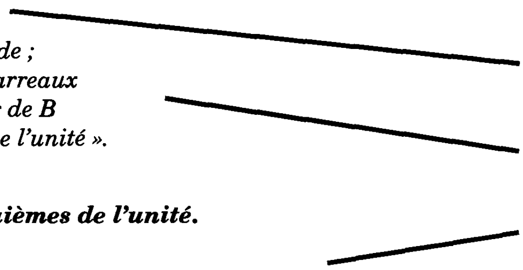
Avec les nombres...
Compléter : 123 = (12 x ☐) + 3
101 = (11 x ☐) + 2 143 = (11 x ☐) +

1 Activité

Pour mesurer les longueurs des segments A, B et C, Léo a utilisé une bande unité u formée de cinq carreaux du quadrillage de son cahier.



a Reproduis et découpe cette bande unité.
Mesure A avec cette unité ; complète :
A mesure ____ u.



- Pour mesurer B, Léo dit :
« J'ai essayé de reporter deux fois ma bande ; mais c'était trop grand. En utilisant les carreaux de ma bande, je peux dire que la longueur de B est égale à une unité et deux cinquièmes de l'unité ».

Explique ce que veut dire *deux cinquièmes de l'unité.*
2 cinquièmes de l'unité u s'écrit $\frac{2}{5}$ de u.

- **Écris un encadrement pour la longueur de C :** $\frac{\ }{5}$ de u < C < $\frac{\ }{5}$ de u.

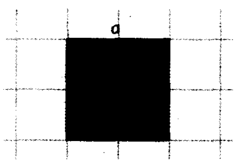
b Dessine sur ton cahier un segment E qui mesure 3 u et un segment F qui mesure $\frac{8}{5}$ de u.

$\frac{1}{5}$ (*un cinquième*) ; $\frac{2}{5}$ (*deux cinquièmes*) sont des **fractions**.

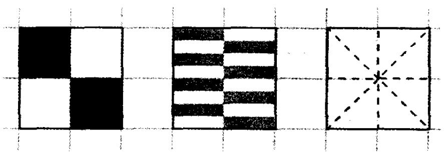
1 Exercices

a Ce carré colorié en rouge est choisi comme unité *a* de surface.
Dessine sur ton cahier deux carrés identiques.
Sur le premier, colorie en rouge une partie correspondant à $\frac{1}{4}$ de *a* ; sur le second, colorie en vert une partie correspondant à $\frac{3}{4}$ de *a*.

Écris ces deux fractions en lettres.



b Quelles fractions de *a* représentent les parties coloriées en bleu, vert et en jaune ?
Cléo affirme que chacune de ces parties coloriées représente la moitié de l'unité *a*.
Est-ce vrai ?
Écris la fraction que représente la moitié de *a*.
Comment lis-tu cette fraction ?



Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

Annexe 2bis

2 Voici une méthode qui permet de partager un segment en plusieurs parties égales.

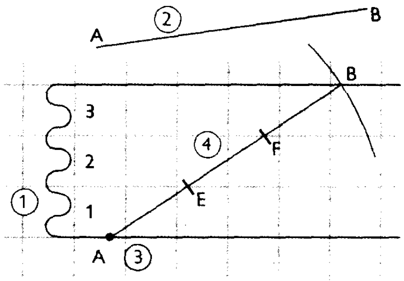
Par exemple, pour partager le segment AB en 3 parties égales :

① **Dessine sur ton cahier une bande à bords parallèles de 3 carreaux de largeur.**

② **Prends un écartement de compas égal à AB.**

③ **Place la pointe de ton compas sur un des bords de la bande et trace un arc de cercle jusqu'à ce qu'il recoupe l'autre bord de la bande.**

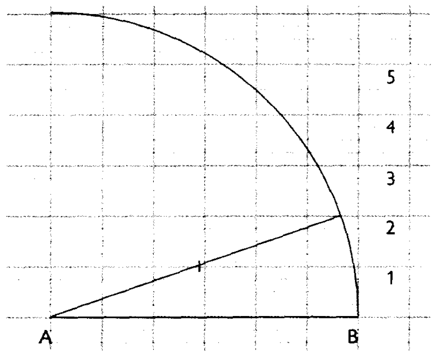
④ **Marque les points E et F en t'aidant des lignes de ta bande : tu obtiens les segments AE, EF et FB.**



- **Vérifie que les trois segments AE, EF et FB ont la même longueur. Complète à l'aide d'une fraction : AE = EF = FB = ... de AB.**

- **Sur ton cahier, dessine en rouge un segment mesurant $\frac{2}{3}$ de AB ; en bleu, un segment mesurant $\frac{4}{3}$ de AB.**

3 **Dessine un quart de cercle de centre A et de rayon AB et numérote les lignes de ton cahier comme ci-contre.**



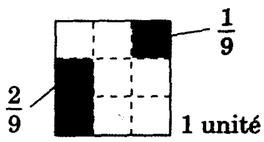
Le tracé du segment bleu permet d'obtenir deux segments mesurant $\frac{1}{2}$ de AB.

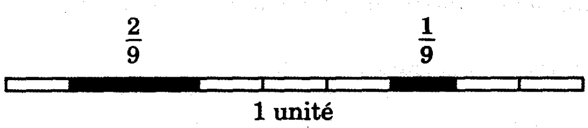
- **Complète la figure pour obtenir des segments mesurant $\frac{1}{3}$ de AB puis $\frac{1}{4}$ de AB.**

- **Trace un segment mesurant $\frac{4}{5}$ de AB.**

Je retiens bien

Des nombres nouveaux : les fractions





La fraction $\frac{2}{9}$ (deux neuvièmes) s'écrit aussi : $\frac{1}{9} + \frac{1}{9}$ ou $2 \times \frac{1}{9}$ ou $\frac{1}{9} \times 2$

Lire des fractions usuelles : $\frac{1}{2}$ → **un demi** $\frac{1}{3}$ → **un tiers** $\frac{1}{4}$ → **un quart**

Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

Annexe 3

35 De nouveaux nombres : les fractions (1)

Objectifs

- Notion de fraction.
- Utiliser une fraction pour exprimer la mesure d'un segment.
- Placer une fraction simple sur la droite numérique.

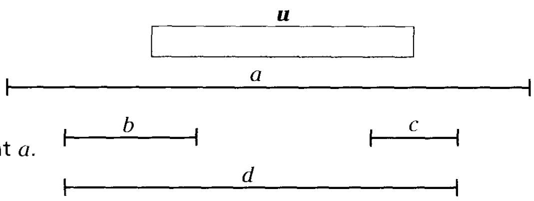
Calcul rapide

Somme de multiples de 100.

3 200 + 2 100 = 5 300

Piste de recherche

De nouveaux nombres

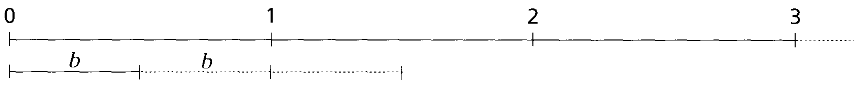


1. Reproduis exactement la bande unité $\boldsymbol{u}$ et découpe-la.
À l'aide de cette unité, mesure le segment a.

2. Mesure le segment b.

a. Peux-tu exprimer la mesure du segment b avec l'unité $\boldsymbol{u}$?

b. Sur ton cahier, trace une droite et gradue-la avec l'unité $\boldsymbol{u}$, comme ci-dessous :



Combien de fois faut-il reporter le segment b pour atteindre la graduation 1 ? pour atteindre les graduations 2 et 3 ?

Reproduis, puis complète le tableau ci-contre.

Pour obtenir l'unité $\boldsymbol{u}$, on reporte 2 fois le segment b.

La mesure du segment b s'écrit 1 : 2 ou $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}$ **est une fraction**. On lit : « un demi ».

On peut dire aussi que la longueur du segment b est $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$.

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ sont des fractions égales.

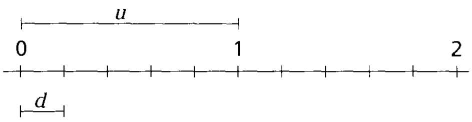
3. Fais le même travail avec les segments c et d.
Écris des fractions qui expriment leur mesure.

Segment b	
Nombre de reports	Graduation atteinte
2	1
4	....
....	....

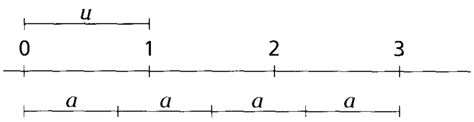
Segment d	
Nombre de reports	Graduation atteinte
2	3
....	....
....	....

Applications

1 En reportant 5 fois le segment d, on atteint la graduation 1.
Écris une mesure du segment d.



2 Observe la droite graduée.
Quelle est la longueur du segment a ?



3 Recopie et complète le tableau ci-contre.
Écris plusieurs fractions égales à la mesure du segment d.
Pour t'aider, tu peux tracer une droite et la graduer.

Segment d	
Nombre de reports	Graduation atteinte
3	4
....	8
9	....

92

Énoncé de cet exercice Corrigé Retour

CORRIGÉ AIX – FRACTIONS ET DÉCIMAUX

En analysant certaines copies, il semble important de rappeler :

1. **On appelle fraction décimale toute fraction d'entiers dont le dénominateur est une puissance de 10. <u>Exemple</u> : $\frac{23}{100}$. Par contre, la fraction $\frac{23}{20}$ n'est pas une fraction décimale car 20 n'est pas une puissance de 10 (il n'existe pas d'entiers p vérifiant $20 = 10^p$) ;**
2. **Un nombre rationnel qui peut être désigné à l'écrit par une fraction décimale est un nombre décimal ;**
3. **Un nombre rationnel dont la décomposition en facteurs premiers du dénominateur de son représentant réduit (*la fraction d'entiers irréductible*) ne contient que des puissances de 2 et / ou de 5 est un nombre décimal ;**
4. **Un nombre rationnel dont la décomposition en facteurs premiers du dénominateur de son représentant réduit (*la fraction d'entiers irréductible*) contient d'autres nombres premiers que 2 ou 5 n'est pas un nombre décimal**

1) 1.5pt

54/1350 = 2/50 = 4/100 est un décimal puisqu'il peut s écrire sous la forme d'une fraction décimale.

5/700 = 1/140 n'est pas décimal car 1/140 est une fraction irréductible et la décomposition en produit de facteurs premiers de 140 qui est $2^2 \times 5 \times 7$ contient d'autres facteurs que 2 et 5 : le nombre premier 7 (propriété 4 citée ci-dessus).

63/280 = 9/40 = 225/1000 est un décimal puisqu'il peut s écrire sous la forme d'une fraction décimale.

123/1200 = 41/400 = 1025/10 000 est un décimal puisqu'il peut s écrire sous la forme d'une fraction décimale.

50/1375 = 2/55 n'est pas décimal (voir plus haut propriété 4 : $55 = 5 \times 11$).

<u>Barème</u> :
3 décimaux (1pt avec la fraction décimale et –0.5 si 1erreur dans celle ci) et 2 rationnels non décimaux (0.5)

2)1pt

$1050 = 3 \times 7 \times 2 \times 5^2$. Pour que $\frac{n}{1050}$ désigne un nombre décimal il faut que le produit 3×7 disparaisse dans une simplification avec le numérateur n, il faut pour cela que n soit un multiple de 21 (*Si un nombre est multiple de 3 et 7 alors il est multiple de 21*).

<u>Remarque</u> : Le nombre zéro est un multiple de 31. Si n = 0 alors $\frac{n}{1050} = 0$ et zéro est bien un nombre décimal. La propriété est vraie quel que soit n, multiple entier naturel de 21.

3)1.5 pt

On peut conjecturer que les deux fractions sont égales.
Pour cela on peut calculer le produit des extrêmes et le produit des moyens : leur chiffre des unités étant différent, ces deux produits ne sont pas égaux. (Vous pouvez aussi déterminer ces deux produits à l'aide de votre calculatrice). La conjecture est donc fausse.
Ensuite on peut aussi conjecturer une période, par exemple (123) et essayer de retrouver l'écriture fractionnaire correspondant au rationnel dont une écriture décimale serait $0,00\overline{123}$. Ce nombre admet un développement décimal illimité périodique dont la période 123 admet trois chiffres

<u>Énoncé de cet exercice</u> <u>Annexes de cet exercice</u> <u>Retour</u>

Posons $X = 0{,}00\overline{123}$ alors $10^5\,X - 10^2\,X = 123$ soit $99\,000\,X = 123$. On en déduit :

$X = \dfrac{123}{99900} = \dfrac{41}{33300}$ c'est donc le 2$^{\text{ème}}$ rationnel que l'on retrouve ici.

On peut conjecturer une autre période, par exemple (12312) et essayer de retrouver l'écriture fractionnaire correspondant au rationnel : $0{,}00\overline{12312}$. Ce nombre admet un développement décimal illimité périodique dont la période 12312 admet cinq chiffres.

Posons $Y = 0{,}00\overline{12312}$ alors $10^7\,Y - 10^2\,Y = 12\,312$ et par suite $Y = \dfrac{12312}{9999900} = \dfrac{342}{277775}$. C'est donc le premier rationnel que l'on retrouve ici.

Autres techniques :

On peut chercher à connaître la suite de la partie décimale des 2 quotients.

Plusieurs procédures peuvent être proposées pour faire apparaître la période des suites décimales associées à chacun des deux rationnels.

- On peut effectuer la division « à la main » en s'aidant des chiffres affichés par la machine afin de repérer une répétition du reste à un facteur multiplicatif 10^{-n} près (voir plus loin).
- On peut multiplier la valeur de chacune des fractions par 1000 et voir sur la machine ce qui se produit pour les trois nouveaux chiffres qu'elle pourra afficher. Cela permet d'élaborer des conjectures mais ne fournit pas la certitude de la période.

On peut enfin utiliser la machine pour calculer la valeur des restes à un facteur multiplicatif 10^{-n} près

Pour $\dfrac{342}{277775}$:

- le premier chiffre 1 du quotient est obtenu après un reste, égal à 34 200 centièmes, soit 342 unités ;
- le reste précédant le second chiffre 1 du quotient est égal à : $342 - 277\,775 \times 0{,}00123 = 0{,}33675$;
- le reste suivant le dernier chiffre 2 au quotient est égal à $342 - 277\,775 \times 0{,}0012312 = 0{,}00342$.

Il est donc égal à 10^{-5} près au reste précédant le premier chiffre 1 au quotient et la période de la partie décimale est donc (12312).

	3	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**						**2 7 7 7 7 5**
-	2	7	7	7	7	5						0, 0 0 1 2 3 1 2
		6	$_1$4	$_1$2	$_1$2	5	0					
	-	$_1$5	$_1$5	$_1$5	5	5	0					
		0	8	6	7	$_1$0	$_1$0	$_1$0				
		-	8	3	$_1$3	$_1$3	$_1$2	5				
			0	3	$_1$3	$_1$6	$_1$7	$_1$5	$_1$0			
			-	$_1$2	$_1$7	$_1$7	$_1$7	$_1$7	5			
				0	5	8	9	7	5	0		
			-		5	5	5	5	5	0		
						3	**4**	**2**	**0**	**0**	0	Même dividende, on retrouve 123 123….

Remarque : on n'est pas obligé de calculer tous les restes partiels.

Pour 41/33300 :

- le premier chiffre 1 du quotient est obtenu après un reste égal à 4100 centièmes, soit 41 unités ;
- le reste précédant le second chiffre 1 du quotient est égal à : $41 - 33300 \times 0{,}00123 = 0{,}041$

Il s'agit donc du même reste à 10^{-3} près et la période est bien égale à (123).

Énoncé de cet exercice Annexes de cet exercice Retour

4 1 0 0 0	3 3 3 0 0
. . . . .	0, 0 0 1 2 3 1
. . . . .	
0 0 0 4 1	

Questions complémentaires de l'exercice 1

1) 1.5pt

Les programmes de 2002 font référence à deux sens différents de la notation $\frac{a}{b}$:

- le premier est celui qui s'appuie sur l'interprétation de $\frac{a}{b}$ comme a fois $\frac{1}{b}$ ce qui peut aussi s'écrire : $\frac{a}{b}$ - $= a \times \frac{1}{b}$, la fraction $\frac{1}{b}$ désignant le partage de l'unité en b parts identiques ;

Le « dénominateur » nomme le type de partage de l'unité (en parts égales) alors que le «numérateur» précise le nombre de parts qui sont reportées.

- le second est celui qui considère que la fraction $\frac{a}{b}$ désigne le quotient exact (rationnel) de l'entier a par l'entier b ce qui peut aussi s'écrire : $\frac{a}{b} \times b = a$.

Les documents d'application du programme du cycle 3 encouragent à introduire la notation fractionnaire en l'associant au premier de ces deux sens, le second étant davantage travaillé au collège.

Remarque :
On trouve dans le document d'accompagnement « Articulation école-collège » les passages suivants :
Au collège, notamment en Sixième, où la notion de quotient occupe une place centrale, la signification de l'écriture fractionnaire est étendue à la fraction considérée comme quotient : $\frac{3}{4}$ est conçue comme le nombre quotient de 3 par 4, nombre par lequel il faut multiplier 4 pour obtenir 3. Il appartient donc au professeur de collège de faire le lien entre les deux conceptions, celle utilisée à l'école élémentaire et celle qui est travaillée au collège, et de faire en sorte que le quotient a/b acquiert le statut de nombre, nombre qui peut être approché par un décimal.

2) 1.5 pt
Le document associé à l'annexe 1 présente l'écriture fractionnaire comme un moyen de partager le reste d'une division euclidienne pour achever un partage équitable. Cette présentation adopte délibérément le deuxième sens dans lequel la fraction décimale $\frac{2}{10}$ est explicitement présentée comme « 2 divisé par 10 ». Le « J'ai appris » de la page suivante confirme ce parti pris.
Pour juger de la conformité au programme, il faudrait avoir connaissance des autres pages de ce manuel consacrées à l'étude des fractions au cours du cycle 3 pour vérifier que la première définition de a/b est bien rencontrée et travaillée, puisque les programmes de collège précisent qu'elle doit être essentiellement travaillée au cycle 3.

Le document associé à l'annexe 2 présente l'écriture fractionnaire à partir de l'unité qui est partagée en autant de parts égales que l'indique le dénominateur, le numérateur indiquant le nombre de parts. Le

Énoncé de cet exercice   Annexes de cet exercice   Retour

quadrillage du cahier est présenté comme un outil permettant de partager une longueur donnée en parts d'égale longueur (guide âne).

Le document associé à l'annexe 3 présente l'écriture fractionnaire comme moyen d'exprimer le résultat d'un mesurage ; la fraction apparaît comme un rapport entre deux grandeurs, ce qui est plus proche du second sens que du premier.

Toutefois, dans le premier exemple il faut 2 longueurs b pour arriver à 1, donc b a pour mesure $\frac{1}{2}$, ce qui peut être considéré comme proche du premier sens.

Dans la foulée les fractions $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, ... sont présentées comme égales à $\frac{1}{2}$ sur la base d'un tableau de proportionnalité, ensuite il faut 3 longueurs c pour arriver à 1 , ce qui renvoie au cas précédent, mais il faut 2 longueurs d pour arriver à 3 et cela renvoie clairement à la deuxième définition de a/b. L'application 1 rejoint les cas de b et c, mais l'application 2 s'en écarte. Finalement cette introduction de l'écriture fractionnaire reste une introduction originale : elle s'appuie sur le sens « quotient de a par b » de la fraction présenté dans le cadre de la mesure ; il s'agit d'un travail sur la commensurabilité : longueurs ayant une commune mesure peu fréquent dans les pratiques de classe, mais qui occupe une place importante dans l'épistémologie des rationnels.

Énoncé de cet exercice Annexes de cet exercice Retour

ÉNONCÉ NICE – FRACTIONS ET DÉCIMAUX 5 POINTS

a. Voici 4 règles erronées selon lesquelles des élèves rangent les décimaux :

Règle 0 :

On ne tient pas compte de la virgule ; les nombres décimaux sont considérés comme des entiers sur lesquels est plaquée la virgule.

Règle 1 :

La règle de comparaison des entiers est appliquée aux parties décimales considérées seules.

Règle 2 :

A partie entière égale, le plus grand des deux nombres est celui qui a le plus de chiffres après la virgule.

Règle 3 :

A partie entière égale, le plus petit des deux nombres est celui qui a le plus de chiffres après la virgule.

1) Donner, pour chacune des quatre règles, une liste de 3 nombres décimaux tels que l'application de la règle réalise un rangement exact.
2) Donner, pour chacune des quatre règles, une liste de 2 nombres décimaux tels que l'application de la règle réalise un rangement faux.
3) Quelle liste de trois nombres décimaux peut proposer un maître pour mettre en échec aussi bien la règle 2 que la règle 3 ?

b. Le processus qui consiste à appliquer ses connaissances antérieures dans un nouveau domaine constitue parfois des obstacles et produit des erreurs.
Exemple : « Multiplier un nombre non nul et différent de 1, c'est augmenter. ».
Est-ce toujours vrai à l'école primaire ?

c. Comment interpréter ces erreurs ?

1.

$$\begin{array}{r} 11{,}4 \\ \underline{\times\ \ 5{,}3} \\ 342 \\ \underline{570\ } \\ 604{,}2 \end{array}$$

2. Un enfant place sur la droite numérique croissante 0,2 à gauche de 0,20.

Corrigé Retour

CORRIGÉ NICE – FRACTIONS ET DÉCIMAUX

A. 1 Le rangement 1,1 < 1,11 < 1,111 correct peut être également obtenu par application des règles 0, 1 et 2.

Pour la règle 3, le rangement obtenu 1,1001 < 1,101 < 1,11 est correct.

A. 2 Pour 10,1 et 1,11 : les règles 0 et 1 donnent 10,1 comme le plus petit.

Pour 1,101 et 1,11 : la règle 2 donne 1,101 comme plus grand.

Pour 1,1 et 1,11 : la règle 3 donne 1,11 comme plus petit.

A. 3 Le rangement 1,1 < 1,101 < 1,11 aurait donné 1,101 comme plus grand par application de la règle 2 et comme plus petit par application de la règle 3.

B. « Multiplier un nombre non nul et différent de 1, c'est augmenter. » n'est pas toujours vrai à l'école primaire. Par exemple, la multiplication d'un entier par 0,5 donne la moitié de cet entier.

C. 1 On peut interpréter cette erreur par l'application de la technique de l'addition des décimaux où il y a report de la virgule au résultat à la même place que pour les deux opérandes, ceux-ci étant préalablement disposés de façon à ce que les chiffres de même nature soient l'un au dessous de l'autre.

C. 2 On peut interpréter cette erreur par l'application de la règle de comparaison des entiers à la partie décimale. L'

Énoncé de cet exercice Retour

RETOUR AU PROGRAMME DE 1945 OU STATU QUO ? ET S'IL FALLAIT RÉPONDRE : NI L'UN, NI L'AUTRE ?

Rémi BRISSIAUD
MC de Psychologie à l'IUFM de Versailles
Equipe Compréhension Raisonnement Acquisition de Connaissances
Laboratoire Paragraphe
http://paragraphe.univ-paris8.fr/crac/
remi.brissiaud@wanadoo.fr

Résumé
Un vaste mouvement de réformes scolaires s'est développé dans la 2ième moitié du siècle dernier en mathématiques comme en français. Un bilan en serait contrasté mais il ne serait sûrement pas totalement négatif. Depuis plusieurs années, des forces sociales diverses s'organisent en vue d'obtenir un retour aux pratiques pédagogiques d'avant ce mouvement. En mathématiques, elles prônent un retour au programme de 1945 (enseignement des 4 opérations dès le CP, enseignement de la « règle de trois », etc.) et, en accord avec la Direction des Ecoles, divers enseignants expérimentent cette « réforme » dans plusieurs classes (http://grip.ujf-grenoble.fr/documents/slecc-juin2005.pdf.). L'impact de ce genre d'initiatives ne doit pas être sous-estimé. Dans le domaine de l'apprentissage de l'écrit, la campagne ministérielle en faveur du rétablissement de la « syllabique » a effectivement conduit à un changement des programmes de 2002. Et pourtant, concernant la lecture, ces programmes constituaient une excellente ligne de défense d'idées résultant d'un large débat au sein de la communauté des chercheurs et des pédagogues. Or, c'est loin d'être le cas des programmes de mathématiques (aucun psychologue de l'apprentissage, par exemple, ne faisait partie de la commission de spécialistes qui a élaboré ces programmes). L'atelier proposé avait pour but de définir et recenser ce qu'on pourrait appeler les « points-clés » de la pédagogie du nombre, des opérations et de la résolution de problèmes à l'école. Il s'agissait aussi, pour chacun de ces points-clés, de recenser ce que l'on en sait et ce que l'on en ignore. Cela devait permettre de définir un espace de liberté pédagogique qu'il conviendrait de défendre en cas d'offensive comme celle qui a eu lieu dans le domaine de la lecture.
Après la présentation du contexte politique et des questions en jeu, les participants ont pu, notamment à partir des divers documents fournis, débattre des problèmes, réels ou supposés, de l'enseignement actuel des mathématiques à l'école primaire et des controverses qu'il suscite.

I – PRÉSENTATION DE L'ATELIER

R. B. présente le contexte dans lequel il se situe précisant qu'il enseigne la psychologie cognitive de la lecture mais que ses recherches concernent toujours les mathématiques et leur apprentissage.

Il revient sur l'actualité du débat autour de la lecture, précisant que les programmes de 2002 (excellents) élaborés après un long processus de concertation ont servi à argumenter au cours de celui-ci. On assiste actuellement en mathématiques à l'équivalent de ce débat. Des personnes diverses alimentent les discussions : cellule de réflexion de l'UMP, Laurent Lafforgue, Michel Delord (1), plus généralement le GRIP (Groupe de Réflexion Interdisciplinaire sur les Programmes) (2)…

Les participants ne sont pas tous au fait des discussions actuelles et R. B. propose de restituer le contexte.

Avec André Ouzoulias qui travaille sur l'écrit, il tente de réhabiliter une méthode d'« écriture-lecture » de Freinet pour palier aux problèmes posés par l'orthographe en incitant au « doute orthographique ». Or ceci est incompatible, voire interdit avec ce qui est dit à propos de l'écrit dans les nouveaux programmes modifiés par De Robien, notamment du fait que cela exige de différer le travail sur la correspondance grapho-phonologique. Pourtant, bien que cette « pratique » se révèle difficile à mettre en œuvre pour un enseignant débutant, rien dans les connaissances scientifiques actuelles ne légitime de l'exclure de la classe et donc de la formation.

Du côté des mathématiques, c'est la même chose. Le 12 avril 2006, le ministre a déclaré qu'il ouvrait le chantier de la rénovation de la grammaire et du calcul. Une mission parlementaire, présidée par JM. Rolland, a procédé à de nombreuses auditions de diverses personnalités (dont Lafforgue, Demailly, Delord …) avant de publier un rapport sur « l'enseignement des disciplines scientifiques dans le primaire et le secondaire » (3). Selon ce rapport (p 35 à 37), un faux débat autour de la distinction savoirs / compétences en mathématiques serait engagé…

Son nom ayant été suggéré par Roland Goigoux, R. B. a été auditionné relativement à la question « quand poser une division ? ». Il lit aux participants ce que dit le rapport sur son audition (p 36).

Or, dans les recommandations finales du rapport, il est dit qu'il convient de « développer l'apprentissage des techniques opératoires des quatre opérations dès le CP. ». On relève ainsi un décalage entre cette conclusion et le contenu même du rapport. Il faut s'interroger : pourquoi ? une décision serait-elle déjà prise ?

S'appuyant sur les photocopies des documents, R. B. souligne un autre point inquiétant figurant, celui-là, dans la rédaction du « socle commun » : il faudrait « créer aussi tôt que possible des automatismes en calcul ».

On relève donc des éléments objectifs inquiétants. Or, selon RB, la référence aux programmes de 2002 pour les mathématiques (et contrairement à ceux pour la lecture) ne constituerait pas la meilleure défense, elle donnerait des armes à ceux qui souhaitent revenir aux programmes de 1945.

II – QUELQUES RESSOURCES UTILISÉES PAR LES PARTICIPANTS À L'ATELIER

Différents textes ont été distribués :

- Le programme du groupe de réflexion interdisciplinaire sur les programmes (GRIP) : un certain nombre de classes « expérimentent » ces programmes proches de ceux de 1923 (2).

- Le texte de 42 pages envoyé par R. B. (4) visant à montrer que l'on ne peut pas discuter de ces choses-là à la légère. Sa diffusion via le Café Pédagogique, la liste ARDM, avait pour but de provoquer le mouvement, le débat, le plus largement possible et assez vite. Au départ, il avait prévu de s'appuyer sur ces débats au cours de cet atelier.

- Les pages du rapport Rolland (3) consacrées à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire (pages 35-37 et recommandations finales).

- Les programmes de 1945 ainsi que leurs commentaires (5).

- Un texte mis en ligne sur le site de Delord dont l'auteur est Tannery et qui date de février 1904. Selon ce texte, les élèves n'ont pas à comprendre les raisons de tous les contenus que le maître leur enseigne : il est normal qu'ils lui fassent confiance et appliquent ce qu'il dit (6).

III – QUELQUES RÉACTIONS DES PARTICIPANTS À L'ATELIER

- Pourquoi ça prend ? … Un participant évoque Rachel Boutonnet … quelqu'un d'intelligent … maltraitée par l'inspection … ce qui a provoqué sa révolte … idem pour Marc Le Bris …

- On observe le même écho que dans le discours sur la sécurité … c'est l'entourage du ministre qui lui donne un point de vue sur l'éducation … des choses basées sur une expérience personnelle … pas de critères fondés…

- Les logiques des adultes diffèrent … ils ne se retrouvent pas dans les mêmes choses…

- Les programmes anciens n'avaient pas les mêmes visées.

- Quelles statistiques ? Comment évaluer ?… même la dictée … Thélot, PISA…

- Nécessité de tenir compte des résultats des années qui ont précédé.

- Comment comparer sur des tâches différentes ?… il y a des compétences qui ne sont plus travaillées …

- Les contenus d'apprentissages sont modifiés en fonction de quoi ? qui décide ? quand ? quoi ?… On ne pose pas la question : pourquoi tel contenu ? en fonction de quoi ? quelle idée ? évocation du citoyen ?

- Un participant (R. d'Enfert) indique que l'on ne peut pas lire le texte de Tannery avec les yeux de Delord. C'était, à l'origine, un écrit novateur, qui se démarquait du discours traditionnel … Delord a tendance à faire une utilisation orientée des textes anciens.

- Une autre participante évoque « l'utilité » des savoirs, en particulier celle de la division : à quel moment ? pour quoi ? à partir de quand ? qui ? … ce n'est pas la même chose que le calcul mental…

- R. B. souligne que les arguments utilisés pour légitimer des changements de programmes à travers l'histoire sont d'ordres divers … social, pédagogique, idéologique. Les frontières entre ces différentes types d'arguments ne sont pas étanches … il y a évidemment de l'idéologique dans le pédagogique… En 1970, il y avait quand même quelque chose de nouveau qui mériterait d'être analysé : l'irruption d'arguments didactiques au sens où ils s'appuient presque exclusivement sur l'épistémologie des mathématiques et sur la psychologie des apprentissages numériques.

- Il souligne qu'il serait intéressant de repérer ce qui constitue peut-être des points clés de l'enseignement des maths : ceux pour lesquels on observe un « mouvement de balancier » des choix pédagogiques les concernant. Par exemple, le comptage à l'école maternelle. Dans ERMEL 1977, le nombre n'est abordé qu'à partir de janvier au CP, le comptage est banni de l'école maternelle. R. B. cite D. Valentin[1] pour montrer qu'on assiste bien aujourd'hui à un « mouvement de balancier ». Un autre exemple est celui du signe « - » à l'école, qui est difficile à enseigner avec son statut mathématique, Longtemps, il n'a été introduit qu'au milieu du CE1. Il est à nouveau introduit aujourd'hui dès le CP. Est-il bien sûr que, tel qu'il est souvent enseigné aujourd'hui, ce soit toujours le meilleur choix ? Un autre exemple de prises de position extrêmes : le cas de la division. C'est le thème que l'atelier choisit d'approfondir le deuxième jour.

IIII – LE CAS DE LA DIVISION

R. B. apporte quelques précisions : l'algorithme favorise la conceptualisation de la division ; il apporte autre chose que le seul résultat (voir la division des polynômes). Le symbole renvoie à une équivalence entre plusieurs façons de faire. Avant 1970, au CP et au CE1, on n'enseignait pas « vraiment » la division, on enseignait le partage. Pourtant une même division, 152 : 3 par exemple, renvoie aussi bien à un scénario de partage (en trois) qu'à un scénario de groupement (par trois), sachant que les deux conduisent au même couple de nombres. Lorsqu'on propose d'enseigner précocement la division, il est bon de savoir de quoi on parle, s'il est seulement question d'enseigner la signification typique, celle qui est véhiculée par le langage quotidien (partager) ou dans un contexte scolaire, d'appréhender les deux usages (En cas du seul enseignement de la signification typique, attention à l'effet Jourdain ! cf G. Brousseau). R. B. préconise d'aborder avant le CE2 les deux types de situations mais pas l'équivalence entre les deux, et pas le vocabulaire « savant » … (« s'il est introduit trop tôt, dans son sens banal, on risque d'en tuer l'usage savant »). Au CE2, il devient possible de faire prendre conscience aux élèves que les deux sortes de situations peuvent être traitées de manière identique et donc d'introduire le symbolisme de la division.

Un autre exemple en géométrie, la distinction carré/rectangle permet de revenir sur cet effet : un enseignement trop précoce crée plus de difficultés qu'il n'en lève. Dans le langage quotidien, le mot « rectangle » est utilisé à un niveau de généralité trop bas (qui exclut les

[1] En référence à son ouvrage « Découvrir le monde avec les mathématiques, PS et MS », Hatier, 2006

carrés), ce qui crée une difficulté bien connue. Concernant le mot « rectangle », on ne peut pas changer le langage quotidien. Mais pour la division, on dispose de deux mots (diviser et partager) : pourquoi créer un effet « rectangle/carré » ? Peut-on parler d'obstacle didactique ?

Quand on introduit un savoir nouveau, il est utile de réfléchir au niveau de généralité auquel on l'introduit. Dans tous les cas, il est bon de s'entendre sur les mots. Le vocabulaire professionnel permet l'échange professionnel.

R. B. cite ERMEL et estime que les auteurs des chapitres sur la division se trompent quand ils écrivent qu'il n'existe pas de situation établissant le lien entre groupement et partage. En effet, un recodage sémantique d'une situation de partage en situation de groupement est possible dès le CE2 : lorsqu'on réalise un partage de *a* objets en *b* parts par une procédure de distribution, chaque tour de la distribution est un groupe de b et la valeur d'une part correspond au nombre de tours qu'il est possible de faire.

Du point de vue de la technique, un participant signale que les manuels « CAP Maths »[2] et « J'apprends les maths »[3] proposent la même. « Euromaths »[4], en revanche, privilégie la signification conduisant à retirer successivement des multiples du diviseur. Dans les classes, la technique opératoire usuelle est souvent introduite au CM1.

R. B. signale que divers chercheurs pensent que le thème de la résolution de problèmes a relégué au second plan la problématique de la conceptualisation et que c'est regrettable.

Est aussi évoquée l'ambiguïté des documents d'application des programmes autour des termes programmation, préparation, approche, construction, structuration…

Textes prescriptifs ? Espace de liberté ?

Par rapport à la formation : quelle est la place des manuels ?

---

[2] R. Charnay, Hatier

[3] R. Brissiaud, Retz

[4] ML. Peltier, Hatier

REFERENCES

(1) http://michel.delord.free.fr/

(2) http://grip.ujf-grenoble.fr/

(3) http://www.assemblee-nationale.fr/12/pdf/rap-info/i3061.pdf

(4) http://www.cafepedagogique.net/dossiers/contribs/brissiaud2.php

(5) http://michel.delord.free.fr/iocalc45.pdf

(6) http://michel.delord.free.fr/tan-sp.pdf

HÉTÉROGÉNÉITÉS ET DIFFÉRENCIATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN ZEP

Denis BUTLEN,
IUFM de Créteil, équipe DIDIREM, Université de Paris 7
Bernadette NGONO
IUFM de Rouen, équipe DIDIREM, Université de Paris 7

L'atelier s'est déroulé suivant le plan suivant :

I. Présentation de l'atelier

II. Première Partie : Exemples de sources potentielles de différenciation

III. Deuxième partie : Pratiques enseignantes avant la classe, illustration par l'analyse d'adaptations de ressources et de leurs effets potentiels

IV. Troisième partie : Pratiques enseignantes et différenciation pendant la classe, illustration par l'analyse d'un protocole de séance.

1 PRÉSENTATION DE L'ATELIER

1.1 L'ÉQUIPE

L'équipe est constituée d'un sous-groupe de l'équipe de recherche DIDIREM qui a mené différents travaux sur l'enseignement des mathématiques à des élèves issus de milieux socialement défavorisés qui s'inscrivent notamment dans un cadre plus large (RESEIDA).

Les supports utilisés au cours de l'atelier proviennent de travaux centrés d'une part sur les apprentissages des élèves de fin de l'école primaire et du début du collège et d'autre part sur les pratiques de Professeurs des Écoles enseignant dans des écoles classées en ZEP particulièrement défavorisées.

1.2 LE DÉROULEMENT DE L'ATELIER

L'atelier comporte deux parties : la première concerne davantage les apprentissages des élèves, la seconde, plus centrée sur le professeur comporte deux temps : l'analyse du travail du professeur avant la classe (élaboration du projet d'enseignement), l'analyse de l'activité du professeur pendant la classe.

Cette contribution reproduit le déroulement de l'atelier.

1.3 CADRE THÉORIQUE ET ÉLÉMENTS DE MÉTHODOLOGIE

Les activités présentées consistent en une relecture de travaux issus de recherches antérieures et s'appuient sur des corpus déjà analysés selon d'autres entrées.

Le déroulement de l'atelier essaie de restituer l'histoire de nos travaux respectifs et de rendre partiellement compte de recherches en cours sur la formation.

Ces travaux s'inscrivent principalement dans le cadre de la didactique des mathématiques tout en empruntant des éléments à d'autres champs disciplinaires : sociologie, psychologie cognitive, ergonomie cognitive, didactique professionnelle, socio-linguistique. Ils sont issus d'un doctorat (Didactique des Mathématiques) et d'une Habilitation à Diriger des Recherches (Sciences de l'Education).

L'expression « enseignement en ZEP » correspond à une démarche allant de l'étude des difficultés des élèves à celle des élèves en difficulté issus de milieux défavorisés. Cette démarche prend en compte d'autres déterminants que les contenus mathématiques (sociologiques, institutionnels, etc.). Elle est initialisée par des préoccupations de formation. En effet, les classes des écoles situées en ZEP constituent un secteur insuffisamment pris en compte dans la formation initiale des enseignants. Et ce, alors que les professeurs des écoles débutants y sont souvent directement affectés.

Les phénomènes analysés peuvent pour certains s'observer dans des classes « ordinaires », les conditions particulières des ZEP créant un effet de loupe pour le chercheur.

Les régularités observées peuvent s'interpréter comme des réponses en terme de pratiques à des contraintes et comme des modes d'investissement des marges de manœuvre qui restent à l'enseignant.

Nos recherches sur les pratiques enseignantes ont pour double but à moyen terme d'améliorer les apprentissages des élèves et d'accroître le confort de l'enseignant professionnel.

Dans la première partie relative aux apprentissages numériques des élèves, les supports proposés concernent les rapports qu'entretiennent sens et techniques. Il s'agit d'étudier les difficultés rencontrées par les élèves de milieux populaires : de les diagnostiquer, de les interpréter mais aussi de préciser des conditions permettant de les surmonter.

Dans la seconde partie, consacrée à l'analyse des pratiques de Professeurs des Écoles enseignant en ZEP et à la formation de ces pratiques, il s'agit d'étudier les adaptations effectuées par ceux-ci avant ou pendant la classe en vue de prendre en compte l'éventuelle hétérogénéité de leurs élèves. Il s'agit ainsi d'identifier des éléments à prendre en compte en formation.

2 PREMIÈRE PARTIE : EXEMPLES DE SOURCES POTENTIELLES DE DIFFÉRENCIATION

2.1 EXPOSÉ DE L'INTERVENANT

Dans un premier temps, nous présentons les travaux dont sont issus les supports étudiés. Il s'agit d'un diagnostic débouchant sur une typologie des procédures de calcul mental mis en œuvre par les élèves du CP au CM2. Ce diagnostic a permis dans un deuxième temps de construire deux dispositifs d'enseignement. Le premier a pour but d'agir sur les procédures et performances des élèves, notamment sur celles des élèves les plus en difficulté. Il a conduit à mettre en évidence des pré-requis nécessaires à la connaissance des nombres et de leurs écritures. Une première source de différenciation réside dans les rapports existant entre automatisme et adaptabilité au calcul. Les élèves les plus en difficulté mobilisent des procédures de calcul peu économiques mentalement mais plus sûres quand le support est écrit (simulation mentale de l'algorithme écrit, utilisation de la distributivité « simple » lors de calculs de produits …). Le dispositif montre qu'il est nécessaire d'installer et d'automatiser des modules de calcul élémentaires pour permettre à ces élèves d'échapper à l'automatisme et de mettre en œuvre des procédures de calcul plus adaptées aux nombres en jeu (procédures mobilisant des décompositions additives ou multiplicatives des nombres). Les apprentissages doivent donc dépasser un premier paradoxe : automatiser certains calculs pour échapper à l'automatisme et mobiliser des procédures plus expertes et plus appropriées aux nombres en jeu.

La seconde ingénierie généralise ce résultat en étudiant les liens entre la maîtrise des techniques de calcul mental et la résolution de problèmes numériques « standards ». Un entraînement régulier au calcul mental se traduit par une meilleure réussite des élèves dans la reconnaissance des opérations à effectuer lors de la résolution de problèmes numériques standards. Tout se passe comme si une plus grande habileté calculatoire libérait de « l'espace mental » au profit de la construction d'une représentation du problème. Cette plus grande disponibilité accélère le processus d'automatisation de la reconnaissance des opérations.

Toutefois nous avons constaté que ces ingénieries ne profitent pas à tous les élèves en difficulté en mathématiques. Il est possible d'expliquer ce résultat par une difficulté pour ces derniers à mesurer les enjeux des différentes situations de calcul, à comprendre quand il faut mettre en œuvre des automatismes et quand il faut inventer du nouveau et, plus généralement à appréhender les savoirs institutionnalisés le plus souvent localement. Il s'agit ici d'un exemple d'une source potentielle de différenciation. Celle-ci peut être renforcée par une certaine ambiguïté liée au statut de l'institutionnalisation dans les programmes de l'école primaire. A une différenciation de nature cognitive peut s'ajouter une source de différenciation de nature institutionnelle.

Ce constat nous a amené à mettre en œuvre une seconde ingénierie visant à amener les élèves en difficulté à effectuer ce « saut ». Cette dernière s'organise autour de trois leviers : une pratique régulière du calcul mental, la production d'écrits collectifs de type bilans de savoirs mathématiques et enfin l'explicitation de méthodes par le professeur.

Ce sont certains de ces écrits collectifs que les participants à l'atelier ont à analyser.

2.2 TRAVAIL PAR GROUPE : UN PREMIER POINT DE VUE SUR LA PRISE EN COMPTE DE LA DIFFÉRENCIATION DANS L'ENSEIGNEMENT

Les documents présentés sont analysés à partir d'une grille comportant deux entrées : la nature des énoncés (mathématique ou non), le degré de décontextualisation des énoncés mathématiques (exemple isolé, énoncé intermédiaire, énoncé formel).

Après une synthèse des travaux produits par les participants, les intervenants exposent les résultats de la recherche dont sont issus ces supports, notamment en montrant l'importance, face aux élèves en difficulté de ZEP, de prendre en compte dans l'enseignement l'existence de cheminements cognitifs différents. Deux exemples sont donnés : le passage nécessaire pour certains élèves par le générique, la construction d'outils heuristiques transitoires.

A cette occasion, une certaine conception de la pédagogie différenciée est soumise à la discussion. Elle consiste à s'appuyer sur les différences cognitives des élèves pour créer un savoir collectif accessible à tous les élèves, représentatif d'un apprentissage conséquent et producteur d'apprentissages potentiels ultérieurs. Ainsi l'enseignant se sert de l'hétérogénéité pour produire du savoir mais aussi pour réduire cette hétérogénéité et gérer plus aisément la classe.

3 DEUXIÈME PARTIE : PRATIQUES ENSEIGNANTES AVANT LA CLASSE ILLUSTRATION PAR L'ANALYSE D'ADAPTATIONS DE RESSOURCES ET DE LEURS EFFETS POTENTIELS

3.1 *PRÉSENTATION SUCCINCTE DE LA THÈSE DONT SONT ISSUS LES SUPPORTS*

La thèse[1] dont sont issus les travaux a consisté en l'étude et l'analyse de pratiques des professeurs enseignant les mathématiques en ZEP. Dans cette étude, nous avons cherché à établir un lien entre les pratiques observées et l'environnement social dans lequel elles prennent place, et à dégager leur complexité. Pour cela, nous nous sommes intéressée à la manière dont les professeurs s'approprient des contraintes institutionnelles (pédagogie du projet, différenciation, individualisation …) mais aussi aux représentations que ces professeurs ont de leurs élèves, des mathématiques et de leur enseignement dans le contexte étudié. Nous avons mis en évidence certains effets potentiels de ces pratiques sur les apprentissages des élèves.

Les pratiques langagières des élèves en difficulté font partie des facteurs pouvant influencer leurs apprentissages. Dans notre recherche, nous avons en particulier repéré certains choix effectués par les enseignants sur les textes mathématiques proposés à lire aux élèves, notamment pour exécuter une tâche, mais aussi pour apprendre. Selon Butlen et Descaves[2], la construction du sens dépend de l'appropriation de registres spécifiques constitutifs du langage mathématique, comme celui des écritures mathématiques. Ces dernières constituent l'apport social qui accélère l'apprentissage et l'appropriation du sens.

<u>Description des publics concernés</u>

En 1998, l'école regroupait des élèves dont plus de 98% des familles appartenaient à la catégorie socioprofessionnelle la plus défavorisée.

Les résultats aux évaluations nationales CE2-6ème en mathématiques étaient de 20 à 30 points en-dessous de la moyenne nationale, alors que le score moyen des écoles de ZEP est généralement de 10 points en dessous de cette moyenne.

Les professeurs, au nombre de 6 en 1998, avaient au moins cinq années d'ancienneté, dont trois dans cette école. Nous pouvions les considérer comme ayant des pratiques suffisamment stabilisées pour notre étude. Enfin, les élèves de l'école ne disposaient pas de manuels de mathématiques. Les situations qui leur étaient proposées faisaient l'objet d'une recomposition par les professeurs.

<u>Recueil des données</u>

Les résultats présentés ont été obtenus en particulier grâce à une méthodologie de recueil de données issue de la sociologie et alternant deux temps, d'abord une observation participante puis une observation faiblement participante, ceci sur une période de trois ans

Le premier temps (une année) a correspondu à une observation faiblement participante . Les observations de classe, les notes prises lors des réunions de travail avec les professeurs nous ont permis de recueillir certaines de leurs conceptions sur le potentiel cognitif des

---

[1] NGONO B. (2003) *Etude des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP, effets éventuels de ces pratiques sur les apprentissages,* doctorat de didactique des mathématiques, Université Paris VII, IREM Paris 7

[2] BUTLEN D., DESCAVES A., (1999), Introduction du symbolisme à la fin de l'école élémentaire et au début du collège, in IREM de Limoges, *Actes du XXVIème colloque inter-IREM de la COPIRELEM* in actes du XXVIème colloque Inter-IREM, pp.175-208

élèves, sur les mathématiques et leur enseignement dans le contexte de l'école. Dans un deuxième temps, à la demande des professeurs, nous avons intégré des éléments de formation sur des contenus mathématiques et didactiques. Pendant deux ans, nous avons continué à recenser leurs points de vue, à observer de nombreuses séances ordinaires, à recueillir certains documents (préparations, fiches de travail pour les élèves, cahiers d'élèves…). Nous avons ainsi pu mettre en rapport les conceptions déclarées et les pratiques d'enseignement observées, mettre à jour ce qui dans les pratiques nous semblait récurrent et résistant et proposer des hypothèses explicatives de ces constats.

Nous présentons ici quelques résultats obtenus au cours du deuxième temps de l'accompagnement. Rappelons qu'il s'agit d'une étude de cas et que toute généralisation hâtive serait abusive. Mais cette étude permet, nous semble-t-il, de mettre en évidence un certain nombre de phénomènes qui existent à des degrés divers dans de nombreuses écoles, classées en ZEP ou non, ou du moins dans certaines classes, ou même simplement pour certains élèves d'une classe.

3.2 PRÉSENTATION DE QUELQUES RÉSULTATS

Le point de vue des professeurs sur les capacités des élèves, sur ce qui convient à leurs élèves

Les professeurs semblent chercher à avoir une certaine “ connaissance ” de leurs élèves. Ils leur reconnaissent une grande hétérogénéité, mais développent un discours très général à leur sujet. Ils regrettent les propos péjoratifs tenus à l'extérieur de l'école sur les élèves de ZEP qui ne permettent pas à ceux-ci d'avoir une image de soi positive. Mais en même temps, leurs propres discours semblent confirmer ces opinions contre lesquelles ils se dressent.

Les élèves sont essentiellement caractérisés par leurs manques : manques de connaissances de base, de capitalisation de ce qui est appris, de concentration. Plusieurs professeurs semblent considérer que bon nombre de leurs élèves ne pourront pas *« s'en sortir »* et seront “ *condamnés* ” à rester dans leur milieu socio-économique.

Les professeurs semblent s'être dressé un inventaire des savoirs présumés de l'environnement socioculturel de leurs élèves pour répondre à leurs besoins. Ils proposent donc des situations qu'ils considèrent significatives pour eux en ayant recours à des contextes supposés familiers pour les énoncés de problèmes. Aucun manuel ne leur paraissant correspondre à leurs attentes, ils en consultent plusieurs et effectuent un tri de ce qui conviendrait le mieux à leurs élèves . Par ailleurs, les professeurs semblent avoir accumulé des expériences sur ce qui peut provoquer la frustration des élèves. D'après eux, leurs élèves, considérant une difficulté scolaire comme un danger, rejettent alors le travail et perturbent la classe.

Finalement, d'après les professeurs, les méthodes pédagogiques que suggèrent les textes officiels et la formation à l'IUFM se révèlent inadaptées . Ils revendiquent le droit de savoir mieux que quiconque ce qui convient à leurs élèves et s'estiment de ce fait parfois libres de changer les programmes officiels sur le plan des contenus, de la progression, du temps consacré aux apprentissages mathématiques.

Installation d'un cercle vicieux

Nous avons mis en évidence un cercle vicieux dans lequel se trouvent finalement entraînés les professeurs observés. D'une certaine manière, leurs représentations sur les élèves, sur les mathématiques qu'il faut enseigner à ces élèves, sur la manière dont il faut enseigner à ces élèves, sur le langage qui leur convient incitent les professeurs à aller rechercher dans le réservoir des injonctions institutionnelles des ressources leur permettant d'effectuer des choix. Outre la simplification des tâches, ces choix peuvent consister par exemple à créer des énoncés dans lesquels les élèves, ou leurs enseignants sont les personnages principaux, mais aussi à proposer dans des classes de niveau n des tâches d'une classe de niveau n-1, voire n-2.

Cependant ces choix s'avèrent finalement peu vecteurs d'apprentissage. Les élèves vont de nouveau échouer, ce qui va renforcer les représentations des professeurs, qui de nouveau vont essayer d'aller rechercher des ressources dans les injonctions institutionnelles.

Nous illustrons un de ces résultats en présentant un exemple d'adaptation de texte de manuel effectué par un professeur.

3.3 ILLUSTRATION DES RÉSULTATS OBTENUS : EXEMPLE D'ADAPTATION DE TEXTES DE MANUELS

Après un bref rappel sur la place de l'écrit en mathématiques, nous présentons un exemple d'adaptation d'un texte de manuel effectué par un professeur et effectué par un professeur.

Quelques rappels sur la place de l'écrit en mathématiques

Dans une classe de mathématiques, les élèves rencontrent des textes caractérisés par la présence de trois registres en interaction, langue naturelle, langage mathématique, et symbolisme, textes qu'ils ont à lire, à reproduire ou à produire. Par ailleurs, il est maintenant acquis que la résolution des problèmes joue un rôle essentiel dans l'apprentissage des mathématiques. Pour que cet apprentissage ait lieu, quatre grandes catégories de situations sont reconnues comme permettant à l'élève de faire évoluer son rapport au savoir (action, formulation, validation et institutionnalisation). Au cours de ces phases, le langage intervient à différents niveaux. Ainsi dans la phase d'action, le langage de l'élève intervient, en interaction avec le texte proposé par le professeur, en ce que l'élève essaie de comprendre ce texte, de mettre en œuvre un raisonnement, d'anticiper sur une stratégie de résolution et de l'appliquer. L'élève doit ensuite rédiger sa solution et communiquer son résultat. Enfin, le professeur doit expliciter le savoir en jeu afin que l'élève repère ce savoir (institutionnalisation), savoir explicité généralement à l'aide d'un écrit (aide-mémoire).

Ceci nous amène à considérer deux moments essentiels où intervient le professeur dans la construction des apprentissages des élèves par la résolution des problèmes. D'une part, c'est lui qui choisit les textes mathématiques que l'élève doit s'approprier dans la phase d'action. D'autre part, c'est lui qui en dernier recours produit le texte de l'institutionnalisation des savoirs. Ceci nous fait dire que les textes fournis par le professeur peuvent avoir deux fonctions, une fonction qui consiste à donner à lire pour agir au sens de l'action piagétienne (énoncés de problèmes, exercices d'entraînement…), et une fonction qui consiste à donner à lire pour apprendre (procédures, définitions, méthodes…à retenir). Par ailleurs, selon Alain Descaves[3] « *pour produire un écrit d'un certain type ou d'un certain genre, les élèves doivent être amenés à lire des écrits du même type et du même genre* ». Les écrits que les professeurs fournissent à leurs élèves apparaissent donc comme des observables capables de nous informer sur les apprentissages potentiels mathématiques mais aussi langagiers visés.

[3] DESCAVES A., (1992), *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*, Paris, Hachette

Par ailleurs, E. Bautier et A. Robert[4] étudient certains processus différenciateurs dans l'activité mathématique. Selon ces chercheurs, un comportement cognitif efficace dans la résolution d'un problème pourrait être l'activité de « transformation » de l'énoncé. Citant les travaux de Moscato[5], ces chercheurs évoquent ainsi deux types de transformation. Une transformation linguistique de type reformulation et une transformation logique correspondant à une analyse généralisante du problème. Par ailleurs, l'opération de transformation est liée au rapport que l'élève entretient avec le langage, à la nécessité pour lui de prendre en compte la fonction symbolique du langage, ce qui va l'aider à faire la paraphrase ou la reformulation de l'énoncé.

Travail par groupes

Dans l'atelier, nous avons proposé aux participants d'illustrer comment un professeur des écoles observées adapte des textes de manuels de mathématiques destinés à ses élèves.

Nous avons cherché à faire repérer par les participants la manière dont un professeur prend à sa charge une partie des transformations que devrait effectuer l'élève face à un problème, et ceci par des modifications qu'il introduit dans des textes mathématiques de manuels. Il s'est agi de mettre en évidence le fait que ces transformations sont de type linguistique et logique, qu'elles induisent une activité de l'élève pouvant aller jusqu'à une dénaturation du sens de cette activité. Les documents soumis aux participants sont des copies de cahiers d'élèves qui constituent les traces de ce que l'enseignante a proposé aux élèves, ainsi que la réponse d'un ou deux élèves. Ces documents (trois exemples) sont complétés par des extraits de manuels de mathématiques dont s'est certainement inspirée l'enseignante. L'étude et l'analyse de ces adaptations permettent aux participants d'inférer des effets potentiels sur les apprentissages des élèves**.** Nous avons précisé que nous n'avions pas d'éléments sur ce qui s'était effectivement passé pendant les séances, mais avons pu situer les pratiques de cet enseignant à partir de l'étude et de l'analyse d'autres protocoles.

Les participants ont eu à effectuer une analyse rapide de l'activité mathématique induite par le manuel, à identifier la nature des adaptations effectuées par l'enseignant, à analyser des effets potentiels sur la tâche de l'élève. Enfin, ils avaient à émettre des hypothèses sur ces adaptations. L'analyse de l'activité mathématique effective de l'élève pouvait être inférée à partir des traces des productions fournies. Une mise en commun des travaux suivie d'une synthèse a permis de mettre en évidence deux types principaux de transformation d'énoncés, l'une linguistique, la deuxième mathématique.

Exemple de transformation d'un texte de manuel : *les fractions dans la vie de tous les jours*

L'exercice 1 ci-dessous se trouve dans un manuel de CM2 de 1988, « Maths et calcul, Ed. Hachette ». Il fait partie d'une rubrique du manuel appelée « Exercices et problèmes d'application », rubrique qui suit une première partie appelée « Découverte ». Cette rubrique « découverte » propose plusieurs exercices au cours desquels les élèves apprennent à exprimer moyennant une unité donnée, la longueur d'un segment à l'aide d'une fraction, à construire des segments dont la longueur est exprimée à l'aide d'une fraction, à comparer et ranger des fractions simples, à associer une fraction à un point d'une droite graduée, à produire des

[4] BAUTIER-CASTAING E., ROBERT A., (1988), Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques, *Revue Française de Pédagogie* n°84, pp 13 – 20

[5] MOSCATO M. (1985), Raisonnement et langage, in DREVILLON J. et al., *Fonctionnement cognitif et individualité*, Bruxelles, Mardaga

écritures équivalentes de fractions et enfin à dégager une règle permettant de simplifier une fraction.

Ex. 1, Maths et calcul, CM2, Hachette, 1988, p. 84.	Adaptation par Stéphanie
Dans la vie courante, on entend souvent les phrases suivantes : *a)Donnez-moi un quart de beurre.* *b) Je voudrais un quart d'eau minérale.* *c) J'ai acheté un demi-litre d'eau minérale.* *d) J'ai bu un « demi » (de bière).* *e) Je viendrai dans trois quarts d'heure.* *f) J'ai atteint le quart de siècle.* ♦ *Peux-tu dire ce que signifie chacune de ces phrases ?* ♦ *Cherche d'autres phrases dans lesquelles on utilise des fractions et explique ce qu'elles signifient.*	Les fractions dans la vie de tous les jours : Dans la vie courante, on entend souvent les phrases suivantes : - *Donnez-moi un quart de beurre ;* - *Je prendrai un demi pain.* - *Il viendra dans trois quarts d'heure.* - *Pour aller à Paris en train, j'ai payé ma place demi-tarif.* - *Marie a acheté un demi litre de lait.* *A) Que signifie chacune de ces phrases. Aide toi des dessins*

Analyse de la tâche de l'élève avant modification de l'énoncé par Stéphanie

Considérons ce que dit le livre du maître « Math et Calcul », CM2, dont le corrigé est reproduit ci-dessous.

> *Justifier l'emploi de certaines fractions dans le langage courant.*
>
> a) *Quantité de beurre en g :* $\frac{1}{4}$ *de 1000 g ou 1000* $\times \frac{1}{4}$ *= 250*
>
> b) *Quantité d'eau minérale en cl :* $\frac{1}{4}$ *de 100 cl ou 100* $\times \frac{1}{4}$ *= 25*
>
> c) *Quantité d'eau minérale en cl :* $\frac{1}{2}$ *de 100 cl ou 100* $\times \frac{1}{2}$ *= 50*
>
> d) *Quantité de bière en cl :* $\frac{1}{2}$ *de 50 cl ou 50* $\times \frac{1}{2}$ *= 25 soit 25 cl*
>
> e) *Durée en min :* $\frac{3}{4}$ *d'heure ou 60* $\times \frac{3}{4}$ *= 45 soit 45 min*
>
> f) *Age en années :* $\frac{1}{4}$ *de 100 ans ou 100* $\times \frac{1}{4}$ *= 25 soit 25 ans.*

Le corrigé suggère que la situation avait pour but d'amener les élèves à considérer les fractions dans leur sens le plus courant, c'est à dire comme désignant des quantités par référence à une quantité standard (l'unité), ou encore comme désignant une relation entre deux quantités, l'une étant une référence à laquelle l'autre est comparée.

D'une certaine manière, cette situation devait permettre aux élèves de s'exprimer sur les usages et les notations diverses des fractions que l'on rencontre dans la vie courante, et à Stéphanie de se renseigner sur les conceptions des enfants relatives à ces usages courants, avant de se mettre d'accord avec les élèves sur ces utilisations de fractions pour désigner certaines mesures. Les grandeurs mesurées ici étaient les masses, les capacités et les durées, les unités standard étant alors le kg pour le beurre, le litre pour l'eau minérale, l'heure et le siècle pour les durées. Par ailleurs, il s'agissait aussi de savoir prendre une fraction d'un nombre, donc de mettre en évidence une stratégie de calcul. Les conversions en sous-multiples devaient permettre de mener ces calculs sur des entiers et d'obtenir des résultats entiers. Ainsi, les masses pouvaient être exprimées en grammes, les capacités en cl, les durées en minutes ou en années.

Etudions maintenant l'adaptation faite par Stéphanie, d'abord en ce qui concerne le texte et les consignes, avant d'étudier les écarts entre la tâche attendue par le manuel et celle attendue par Stéphanie.

Analyse de l'énoncé de Stéphanie et analyse *a priori* de la tâche de l'élève à partir de l'énoncé de Stéphanie

Si l'on considère l'adaptation faite par Stéphanie, nous pouvons noter deux changements dans la phrase introductive initiale, l'un de type linguistique, l'autre de type cognitif. Le changement de type linguistique concerne l'expression initiale « dans la vie courante ». Là où le manuel indique «*Dans la vie courante, on entend souvent les phrases suivantes* », Stéphanie a rajouté un titre comportant *« la vie de tous les jours »*. Tout se passe comme si Stéphanie avait souhaité supprimer tout risque de questionnement de la part des élèves face à l'expression « la vie courante » en la traduisant d'abord par l'expression « la vie de tous les jours ». Le changement cognitif porte sur la présence du terme « fractions » dans cette première phrase, alors que le texte initial attend des élèves qu'ils aient pris connaissance des six phrases, et ne fait intervenir ce terme que dans la deuxième consigne. Il nous semble qu'en procédant ainsi, Stéphanie ne laisse pas ses élèves rattacher d'eux-mêmes les phrases lues à cette notion comme pour leur éviter le traitement d'un trop grand nombre d'informations. Par ailleurs, le soulignement des deux phrases initiales peut être considéré comme ce que X. Roegiers[6] appelle « indice focalisateur », c'est à dire un indice qui attire l'attention sur les données pertinentes ou sur l'information importante dans la situation de départ ou encore détourne l'attention de l'information non pertinente. On peut se demander si Stéphanie, par ce soulignement ne cherche pas à concentrer l'attention des élèves sur un seul élément de chaque phrase, celui qui correspond à une fraction.

Par ailleurs, si Stéphanie a conservé les grandeurs initiales (masses, capacités, et durées), elle en a rajouté une autre (la monnaie). S'agissant des unités de mesure, elle a rejeté le siècle comme unité de mesure des durées, conservant l'heure. C'est aussi sur les référents que l'on constate des rejets puisque l'eau minérale et la bière ont disparu, remplacés par le lait pour les capacités, et le pain sans que l'on puisse savoir explicitement si, *a priori*, la masse devrait être prise en compte en ce qui le concerne. De même, certains pronoms personnels ont été remplacés. Ainsi le « je » du texte initial a été remplacé par « il » ou par « Marie ». *A priori*, on pourrait penser que Stéphanie vise les mêmes buts que ceux du manuel, c'est à dire amener les élèves à s'exprimer sur ces usages et notations des fractions, sur les unités de mesures à considérer, à effectuer des calculs pour traduire la signification de ces expressions courantes. Cependant, la consigne a changé. A la consigne initiale « *que signifie chacune de ces phrases* ? », Stéphanie a rajouté « *aide toi des dessins* » sans que l'on sache de quels dessins il s'agit. Par ailleurs, elle a supprimé l'activité de formulation qui consistait à chercher d'autres phrases dans lesquelles on utilise des fractions et à expliquer ce qu'elles signifient. Nous résumons dans le tableau ci-dessous les adaptations effectuées et le changement induit par ces transformations sur la tâche de l'élève.

[6] ROEGIERS X., (1998), *Les mathématiques à l'école élémentaire*, Tome 2, Paris-Bruxelles, De Boeck

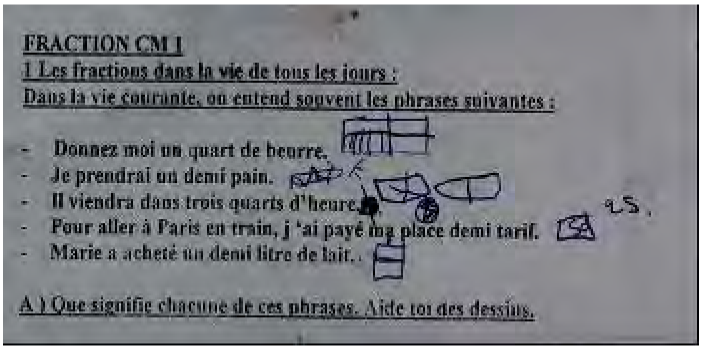
Changements de nature linguistique et cognitive

	Texte du manuel	Texte de Stéphanie
Introduction	Dans la vie courante, on entend souvent les phrases suivantes »	Les fractions dans la vie de tous les jours Dans la vie courante, on entend souvent les phrases suivantes
Référents	beurre, eau minérale, bière, heure, siècle	beurre, lait, pain, tarif, heure
Grandeurs en jeu	les masses les capacités les durées	masses, capacités, durées, monnaie
Unités	Kg, L, h, siècle	L, h, Kilogrammes ? francs ?

Etudions maintenant la tâche effective des élèves à partir de ce nouvel énoncé.

Analyse de la tâche effective des élèves repérée dans leurs productions à partir de l'énoncé de Stéphanie

Les traces des élèves repérées dans leurs cahiers montrent qu'ils ont effectué un travail de représentation des fractions lues dans le cadre de la mesure des aires, en choisissant des surfaces arbitraires évoquant la forme des référents du texte de Stéphanie, comme e montre l'exemple ci-dessous.


FRACTION CM 1
1 Les fractions dans la vie de tous les jours :
Dans la vie courante, on entend souvent les phrases suivantes :

- Donnez moi un quart de beurre.
- Je prendrai un demi pain.
- Il viendra dans trois quarts d'heure.
- Pour aller à Paris en train, j 'ai payé ma place demi tarif. 25.
- Marie a acheté un demi litre de lait.

A) Que signifie chacune de ces phrases. Aide toi des dessins.

Ainsi le beurre et le lait sont représentés par des rectangles partagés en deux ou en quatre parties dont les élèves ont hachuré les parts relatives en fonction de l'énoncé, les durées en heures sont représentées par un disque, et le pain par un dessin de même forme dont une moitié est hachurée. Les élèves semblent avoir hésité en ce qui concerne le tarif. Certains ont choisi un rectangle dont ils ont hachuré une moitié, d'autres ont choisi une somme arbitraire (50F) et ont calculé la moitié.

Les adaptations de Stéphanie ont ainsi induit eu changement à plusieurs niveaux, conduisant finalement à la simplification de la tâche de l'élève, que nous résumons dans le tableau ci-dessous

	Manuel de l'élève	Texte de Stéphanie
Consigne	* Peux-tu dire ce que signifie chacune de ces phrases ? * cherche d'autres phrases dans lesquelles on utilise des fractions et explique ce qu'elles signifient	« Que signifie chacune de ces phrases. Aide toi des dessins »
Tâche de l'élève	<u>Dans le registre des grandeurs</u> : - transformer des expressions mixtes (langue naturelle/écritures fractionnaires) en écritures mathématiques (fractions) - prendre une fraction d'un nombre - effectuer des conversions d'unités -effectuer des calculs sur des nombres entiers (division) - Formulation	<u>Action dans le registre des aires de figures planes</u> : - savoir représenter une fraction

A partir de l'adaptation faite par Stéphanie, toutes les grandeurs initiales, masses, capacités, durées et monnaie, ont généralement été remplacées par une seule, l'aire. La tâche d'expression des mesures à l'aide de nombres, précédée d'une tâche de conversion d'unités et d'une tâche de calcul sur ces mesures a été remplacée par une tâche de représentation de fractions. La tâche initiale induisait au moins des transformations d'expressions mixtes (langue naturelle et écritures fractionnaires) en écritures mathématiques (écritures fractionnaires, conversions d'unités de mesures et calculs). La transformation effective a eu lieu dans le registre des aires des figures planes.

3.4 CONCLUSION

Tout se passe comme si les enseignants cherchaient à prendre en compte la différenciation des élèves par rapport à un standard qui serait source de leurs difficultés. Ils tenteraient alors par divers moyens de diminuer les obstacles liés à l'interprétation des textes lus par ses élèves. En changeant les contextes pour les rendre plus proches du vécu des élèves, en faisant intervenir s'il le faut des expressions langagières qu'ils supposent proches du langage des élèves, en introduisant la répétition de certaines phrases pour faciliter la compréhension, en soulignant certaines parties du texte. La rencontre des élèves avec ces textes est d'autant plus régulière qu'ils ne disposent pas de manuel de mathématiques, ce qui nous permet de douter de la possibilité des élèves à faire la distinction entre ce que l'on peut appeler un texte standard, et d'autres textes.

Par ailleurs, ces modifications ne portent pas seulement sur les aspects linguistiques, mais transforment parfois profondément l'activité mathématique de l'élève.

Or les professeurs déploient beaucoup d'énergie pour mener ces modifications, ou créer d'autres énoncés, sans pouvoir toujours en mesurer les effets.

Il nous semble qu'une prise en compte de cet aspect en formation pourrait permettre aux futurs professeurs de rendre plus efficaces ces nécessaires adaptations, du moins de leur point de vue, au public des élèves de milieux défavorisés.

Ce travail a permis de mettre en évidence la manière dont les enseignants observés semblent vivre et interpréter diverses contraintes auxquelles ils sont soumis, dont celle non négligeable du contexte social de leur école. Les enseignants semblent pris dans un cercle vicieux dont une des caractéristiques est la nature des choix opérés sur les tâches mathématiques à destination des élèves. Or l'efficacité de certains choix en terme d'apprentissages potentiels pour les élèves peut être mise en doute alors même que les enseignants mettent tout en œuvre pour faire réussir ces derniers.

4 TROISIÈME PARTIE : PRATIQUES ENSEIGNANTES ET DIFFÉRENCIATION PENDANT LA CLASSE, ILLUSTRATION PAR L'ANALYSE D'UN PROTOCOLE DE SÉANCE

4.1 DÉROULEMENT

Les supports présentés sont issus de la même thèse que ceux de la partie 2 de B. Ngono. Il nous semble ici nécessaire de rappeler que nous avons mené une recherche selon un dispositif méthodologique en deux temps que nous résumons dans le tableau ci-dessous.

<u>Dispositif méthodologique de recueil de données</u>

	Diversité de contextes d'observation	Diversité de postures pour les enseignantes	Processus observés
Premier type d'accompagnement (1998-1999)	Réunions de travail (phase de décisions)	Des enseignantes autour d'un projet	Environnement mathématique prévu pour les élèves (discours)
	Ateliers de jeux mathématiques : séances extraordinaires	Une enseignante - avec ses élèves - avec divers élèves	Activité potentielle puis Activité réelle des élèves
	Réunions de travail (bilans et ajustements du projet	Des enseignantes autour d'un projet	Décalages entre décisions et mise en œuvre du projet
EVALUATION - MAI 99			
Deuxième type d'accompagnement (1999-2000 et 2000-2001)	Séances ordinaires dans une classe (CE2-CM1)	Une enseignante et ses élèves(CE2-CM1)	Activité potentielle des élèves (division euclidienne) -
	Réunions de travail sur les séances ordinaires	Des enseignantes échangeant sur leurs pratiques ordinaires - avant, - pendant, - après formation	Evolution de divers points de vue des enseignantes
	Séances ordinaires dans une classe CE2-CM1 CM1-CM2	une enseignante dans une classe à double niveau	Activité potentielle des élèves sur des éléments de la formation

Ainsi, lors du deuxième temps d'accompagnement, nous avons pu observer les enseignants dans leur classe avant formation, mener des séances de formation lors de stages, puis mener d'autres observations permettant de repérer ce qu'ils avaient choisi de reprendre parmi les éléments de formation et comment ils les avaient adaptés. Précisons que les contenus mathématiques de la formation étaient généralement choisis par les enseignants.

Comme le montre le tableau ci-dessous, de nombreuses questions parfois récurrentes ont été soulevées et traitées en géométrie pendant ces séances de travail avec les enseignants.

Dates	Les questions soulevées	Formation/informations
Octobre 99	Peut-on faire l'impasse sur l'inclusion des figures ? A quel moment les propriétés caractéristiques des parallélogrammes doivent être proposées ? Par quelles étapes passe-t-on ?	Progression en géométrie au cycle 3: les grandes lignes Travail sur l'inclusion des figures : les propriétés des parallélogrammes
Février 2000	Comment travailler sur les propriétés des figures lors des séances ordinaires ?Qu'est-ce qu'on institutionnalise ? quand institutionnaliser ?	La reproduction. Propriétés des quadrilatères Suggestions d'activités sur les propriétés des figures planes (jeu du portrait, situations de communication, dictées de figures) Progression et traces écrites associées .
novembre 2000	Reproduction d'une figure complexe la validation, les phases de synthèse les aides possibles la gestion de l'hétérogénéité	- Analyse de figures complexes dont la figure de base est un carré Variables didactiques d'une situation de reproduction Modes de gestion associés
mars 2001	que faire dans chacune des cases de la progression ? Comment sérier la tâche ?	Progression en géométrie plane, aller dans le détail *reproduction *associer des figures à des programmes : - situations de communication en géométrie

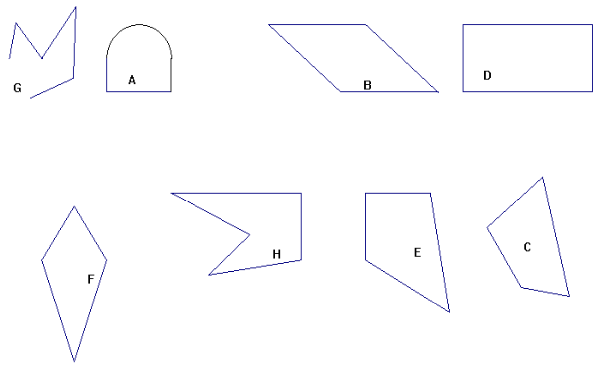
Stéphanie a choisi de proposer aux élèves de CM1 de sa classe à double niveau CE2-CM1 une situation de géométrie que nous avions étudiée et analysée en stage. Le protocole étudié en atelier correspond à cette séance.

4.2 TRAVAIL EN GROUPE

Les participants à l'atelier doivent étudier et analyser des extraits du protocole et mettre en évidence des contradictions auxquelles semble soumise la professeure, des réponses qu'elle apporte à ces contradictions, et les effets éventuels de ces réponses sur les apprentissages.

Présentation du document :

Stéphanie a représenté au tableau la série de polygones ci-dessous, les élèves ne disposent d'aucun autre document.



Reconstitution du déroulement de la séance de Stéphanie (protocole en annexe)

La reconstitution des enjeux des phases du déroulement de la séance de l'enseignante et de leur enchaînement permet de repérer une succession d'activités riches a priori, dans une articulation intéressante et de distinguer trois phases :

Première phase : distinguer les polygones des non-polygones, identifier les quadrilatères, mener un jeu de portrait sur les polygones permettant aux élèves de décrire et d'identifier un quadrilatère à partir de propriétés relatives aux côtés, aux axes de symétrie, à l'orthogonalité, à l'égalité de longueurs.

Deuxième phase : découvrir la notion de diagonale dans un quadrilatère

Troisième phase : Résoudre un problème : rechercher plusieurs quadrilatères ayant des diagonales perpendiculaires (CM1)

Par ailleurs, on peut noter une alternance au niveau des formes de travail permettant a priori de maintenir les élèves en constante activité. Les deux premières phases sont collectives. Selon les cas, c'est Stéphanie qui pose des questions pour lesquelles elle dispose de la réponse, et valide les réponses des élèves, ou bien ce sont les élèves qui posent des questions au professeur mais Stéphanie qui contrôle l'activité. Elle peut faire reformuler les questions, en refuser certaines, c'est aussi elle qui valide les réponses. La dernière phase est individuelle

Dans l'atelier, les participants sont amenés à identifier ces différentes phases, puis par groupe, à analyser la phase 3. Il s'agit en particulier :

- de repérer les élèves sollicités et le mode de sollicitation (collectif, public, individuel), d'identifier les aides proposées ;

- de mesurer les effets de ces sollicitations et aides sur le déroulement de la séance.

Bilan des analyses

Malgré le choix d'une situation potentiellement riche, le déroulement fait apparaître des difficultés de gestion, une individualisation forte créatrice d'hétérogénéité et d'incertitude sur le plan mathématique. La professeure a donné régulièrement une définition erronée de la diagonale d'un quadrilatère considérée tantôt comme un axe de symétrie, tantôt comme reliant des « côtés opposés ». Cette succession de définitions « floues » (peu précises, ou incorrectes) de la notion de diagonale constitue un obstacle à l'appropriation du problème pour de nombreux élèves. De même, pour résoudre le problème consistant à trouver des quadrilatères ayant des diagonales perpendiculaires, une procédure efficace pour l'élève pouvait être de construire deux segments perpendiculaires et de relier leurs extrémités ; le carré et le losange devenant alors des solutions particulières. Or dès la première minute, la professeure a suggéré aux élèves de construire un losange et de vérifier si les diagonales étaient perpendiculaires. L'activité mathématique de l'élève s'en est trouvée réduite à rechercher parmi les quadrilatères usuels, ceux qui vérifiaient la propriété.

Deux contradictions fortes peuvent être relevées.

La première contradiction se situe entre hétérogénéité et homogénéité, et permet de situer les difficultés de l'enseignante à gérer la différence de connaissances géométriques de ses élèves dont certains ignorent encore le sens du terme quadrilatère et doivent, au cours de la même séance, s'approprier des connaissances sur les propriétés des quadrilatères relatives à leurs côtés, mais aussi à leurs diagonales, alors même que d'autres sont déjà prêts à entrer dans le problème posé. L'analyse de la séance met ainsi en évidence comment l'enseignante « gomme » cette hétérogénéité, tend vers l'homogénéité en éludant certains obstacles. Or le principal obstacle est justement celui qui pourrait permettre aux élèves de renforcer leurs connaissances en géométrie. Cette redéfinition par le professeur de la tâche prescrite apparaît finalement comme une décision de refuser toute autre redéfinition de la tâche initiale par les élèves eux-mêmes. Lorsque la séance se termine, on constate que certains élèves ont recherché des quadrilatères sans propriété particulière, au lieu des polygones quelconques qu'ils construisaient au départ, d'autres ont tracé des diagonales de quadrilatères ou des quadrilatères ayant des axes de symétrie, d'autres encore ont construit des quadrilatères ayant des angles droits et enfin un dernier groupe a cherché parmi des quadrilatères connus, ceux qui ont des diagonales perpendiculaires.

Cette contradiction entre hétérogénéité et homogénéité va de pair avec une deuxième contradiction entre collectif et individuel. Les informations pouvant être données collectivement sont finalement peu porteuses de sens, notamment en ce qui concerne les définitions mathématiques nécessaires à la résolution du problème posé. C'est en individualisant fortement ses interventions auprès de certains élèves que la professeure tente de permettre à chacun d'exécuter une tâche qui s'avère comme nous l'avons vu différente selon les élèves, ce qui peut expliquer que la séance se termine sans mise en commun ni synthèse.

La synthèse rapide faite oralement ne tient compte que des productions de deux ou trois élèves ayant recherché parmi les quadrilatères connus, ceux qui ont des diagonales perpendiculaires. Finalement les solutions trouvées existent pour certaines au tableau (cerf-volant et losange), le carré étant alors la seule autre figure trouvée par ces élèves.

Signalons enfin que Stéphanie effectue un bilan très positif sur cette séance « *car les élèves ont travaillé* ». Effectivement, la séance a duré le temps « réglementaire » et les élèves ont tous été actifs et ont produit des figures. Ce bilan ne porte pas sur l'activité mathématique initialement prévue, ni sur toutes les tâches effectives des élèves, mais sur la gestion de la séance qui s'est déroulée sans heurt.

En définitive, nous nous demandons si le changement d'enjeu de la situation n'est pas lié au fait que Stéphanie a pu être déstabilisée par la rupture avec ce qui lui était familier, ce qui peut expliquer que les effets à court terme soit peu sensibles sur les tâches attendues des élèves. Nous pensons que les effets de la formation sur les pratiques de Stéphanie et de ses collègues ne peuvent pas être sensibles sur le court terme sur beaucoup de points à la fois et qu'il faut envisager une période plus longue pour des effets plus remarquables.

5 CONCLUSION

Les analyses présentées dans cet atelier concernent des études de cas très spécifiques. En effet, il s’agit notamment de l’analyse de pratiques de professeurs des écoles enseignant dans des écoles scolarisant un public particulièrement défavorisé. Elles ne doivent pas être généralisées de manière abusive.

Il n’est d’autre part pas possible de rendre compte de la complexité d’une pratique à partir d’un seul type de documents (cahiers d’élèves ou protocole). Nos analyses qui s’appuient sur un corpus plus important que nous n’avons pas pu présenter par manque de temps ont permis de restituer la logique de fonctionnement et les grands choix des enseignants concernés.

1 ANNEXES RELATIVES A LA DEUXIEME PARTIE

1.1 A. PREMIER EXEMPLE D'ADAPTATION

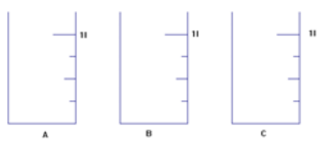
Extrait de manuel	Adaptation effectuée
Ex. 1, Maths et calcul, CM2, Hachette, 1988, p. 84. *Dans la vie courante, on entend souvent les phrases suivantes :* *a)Donnez-moi un quart de beurre.* *b) Je voudrais un quart d'eau minérale.* *c) J'ai acheté un demi-litre d'eau minérale.* *d) J'ai bu un « demi » (de bière).* *e) Je viendrai dans trois quarts d'heure.* *f) J'ai atteint le quart de siècle.* ♦ *Peux-tu dire ce que signifie chacune de ces phrases ?* ♦ *Cherche d'autres phrases dans lesquelles on utilise des fractions et explique ce qu'elles signifient.*	<u>Les fractions dans la vie de tous les jours</u> : <u>Dans la vie courante, on entend souvent les phrases suivantes</u> : - *Donnez-moi un quart de beurre ;* - *Je prendrai un demi pain.* - *Il viendra dans trois quarts d'heure.* - *Pour aller à Paris en train, j'ai payé ma place demi-tarif.* - *Marie a acheté un demi litre de lait.* *A) <u>Que signifie chacune de ces phrases</u>. Aide toi des dessins*

- Corrigé du livre du maître Maths et calcul, CM2, Hachette, 1988

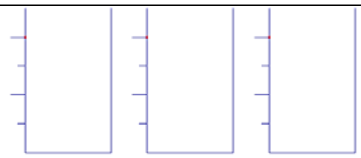
Justifier l'emploi de certaines fractions dans le langage courant.
a) Quantité de beurre en g : $\frac{1}{4}$ *de 1000 g ou 1000* $\times \frac{1}{4}$ *= 250g*
b) Quantité d'eau minérale en cl : $\frac{1}{4}$ *de 100 cl ou 100* $\times \frac{1}{4}$ *= 25cl*
c) Quantité d'eau minérale en cl : $\frac{1}{2}$ *de 100 cl ou 100* $\times \frac{1}{2}$ *= 50cl*
d) Quantité de bière en cl : $\frac{1}{2}$ *de 50 cl ou 50* $\times \frac{1}{2}$ *= 25 soit 25 cl*
e) Durée en min : $\frac{3}{4}$ *d'heure ou 60* $\times \frac{3}{4}$ *= 45 soit 45 min*
f) Age en années : $\frac{1}{4}$ *de 100 ans ou 100* $\times \frac{1}{4}$ *= 25 soit 25 ans.*

1.2 DEUXIEME EXEMPLE D'ADAPTATION

L'exercice 3 suivant correspond est tiré de la même page de manuel de l'élève p. 84, Maths et calcul, CM2, Hachette, 1988.



Enoncé du manuel	Adaptation de Stéphanie
Exercice 3. *Voici une recette pour préparer une boisson rafraîchissante.* *Mélanger* $\frac{3}{4}$ *de litre de jus d'orange,* $\frac{1}{2}$ *litre de jus de pamplemousse et* $\frac{1}{4}$ *de litre de lait.* *Reproduis les trois verres doseurs A, B, et C.* *a) Dans le verre A, indique le niveau du jus*	2). *<u>Voici une recette pour une boisson rafraîchissante</u>.* Mélanger 3/4 de jus d'orange, 1/2 litre de jus de pamplemousse et 1/4 de litre de lait.

d'orange. b) *Dans le verre B, indique le niveau du jus de pamplemousse.* c) *Dans le verre C, indique le niveau du lait.*	 A B C *Dans le verre A, indique le niveau de jus d'orange.* Dans le verre B, indique le niveau de jus de pamplemousse. *Dans le verre C, indique le niveau de lait.*

1.3 TROISIEME EXEMPLE D'ADAPTATION OU CREATION

<u>La famille fraction</u>

Complète à l'aide des fractions l'histoire suivante :

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{8}{10}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{24}{24}$ $\frac{3}{10}$

Aujourd'hui, Maman prépare un gâteau pour l'anniversaire de Charlotte. Elle prend --- de beurre et ---- litre de lait.

Son grand fils est dans la cuisine, mais ne l'aide pas. Depuis --- heure, il attend sa chérie. « Elle a déjà 30 minutes de retard ! » s'écrie t-il.

Charlotte, elle, est contente. Elle a eu --- en dictée. La grand-mère l'emmène chez l'oculiste car elle n'a que --- à son œil gauche. Sa grand-mère s'arrête au distributeur de billets ouvert --- heures.

Dans --- d'heure, le gâteau sera cuit et tout le monde pourra se régaler quand maman l'aura découpé en 6 parts égales.

0 Exemple d'un texte de manuel proche de celui de Stéphanie : Extrait du manuel « le nouveau Maths Elem, CM2 » Belin 2001

(Les trous sont représentés par des rectangles de couleur bleu dans le texte initial).

Exercice 7, p 73.

Complète le texte.

Utilise les nombres de la liste.

Charly doit faire les ------ fiches de son cahier de vacances. Il se dit : « j'ai déjà fait ------ fiches, c'est à dire un ------ des fiches. Il me reste ------ fiches à faire, c'est à dire les ------ de la totalité. Quand j'aurai fait ------ fiches de plus, j'en serai au ------ de mon cahier. **»**

Tiers **trois quarts** **deux tiers**
quart **demi**
cinq **soixante** **quinze** **quarante-cinq**

2 ANNEXE PARTIE 3

CE2-CM1 – Stéphanie - Déroulement de la séance du 4 avril 2000

1.	Sté	*Alors nous commençons tous ensemble et ensuite et pour les CE2 de Mme Lecomte, nous ne faisons pas géométrie ensemble, je vais vous donner une autre activité, je pense qu'elle vous plaira, puisqu'il s'agira aussi de construire un jeu. Qu'on pourra après tous utiliser ; mais là vous restez avec nous. Et alors je vais (*inaudible*) tout à l'heure*
2.	Sté	*Maîtresse*
3.	Sté	*Deux minutes*
4.	E	*Je suis un trich, je suis une tricheuse parce que j'ai déjà vu tout à l'heure*
5.	Sté	*Alors puisque certains*
6.	E	*Ça je sais*
7.	Sté	*Non, non, il y a d'autres CE2 donc je donne les consignes*
8.	Sté	*Des figures géométriques au tableau,* (elle découvre un pan du tableau*), parmi ces figures, il y a deux intrus*
9.	E	*Je les connais*
10.	E	*Moi aussi*
11.	E	*Maîtresse, il a triché maîtresse*
12.	Sté	*Chut*
13.	E	*Maîtresse, moi aussi*
14.	Sté	*1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (pour obtenir le calme)*
15.	Sté	*Alors, Mamadou*
16.	Mamad	*Parce que le A parce qu'il est arrondi, le G parce qu'il n'est pas fermé*
17.	Sté	*A quelle famille n'appartiennent pas ces deux figures , Mamadou ?*
18.	Mamad	*Parce que ce sont des polygones*
19.	Aïsha	*Maîtresse, ce sont tous des quadrilatères*
20.	Sté	*Alors, parmi tous ces polygones, l'un n'appartient pas à la famille des quadrilatères (*Stéphanie a effacé les non polygones*)*
21.		(Des élèves lèvent la main !)
22.	Sté	*Une, deux, trois (*compte les doigts levés)
23.	E	*Il y en a deux, maîtresse*
24.	E	*Non*
25.	Sté	*Lequel n'appartient pas à la famille des quadrilatères ? quatre, cinq*
26.	E	*Moi, maîtresse*
27.	Sté	*Cinq, six, attendez, je vois Chérif qui cherche*
28.	Sté	*Sept , Andy, tu as trouvé ?*
29.	Andy	*Non*
30.	E	*Maîtresse, il y en a deux qui font pas d'angle droit*
31.	Sté	*Laura, est-ce que tu as trouvé ? Lequel n'appartenait pas à la famille des quadrilatères ?*
32.	Aïsha	*Moi, maîtresse*
33.	Sté	*Alors, Aïsha*
34.	Aïsha	*Le H, parce qu'il a cinq côtés (* d'autres élèves répondent H en même temps)
35.	Sté	*Est-ce que tu es d'accord, Laura ? Tu as d'autres soucis dans la tête. Combien de côtés le polygone H a-t-il ?*
36.	Laura	*5 (d'autres élèves crient 5)*
37.	Sté	*5 côtés. Est-ce que c'est un quadrilatère ? (* à Laura)
38.	E	*Non*
39.	Sté	*Est-ce que c'est un polygone*
40.	E	*Non*
41.	E	*Si (plusieurs élèves)*
42.	Sté	*Est-ce qu'il appartient à la famille des polygones, Laura ?*
43.	E	*Oui, oui (* de nombreux élèves répondent*)*
44.	Sté	*Parce qu'il a des côtés, des sommets. Alors, parmi nos quadrilatères, j'inscris un petit nom ici (*dans sa main*) et en posant des questions vous devez deviner lequel*
45.	E	*Qu'est-ce qu'il faut faire ?*

46.	Sté	*Voilà, c'est ici* (montrant sa main*). Je vous écoute. Qui suis-je ?*
47.	E	*Silence lourd*
48.	Sté	*Donc le but du jeu, c'est de deviner le quadrilatère*
49.	E	*Eh, Eh,* (manifestations de compréhension*)*
50.	Sté	*Qui est inscrit, dont le numéro, le nom, la lettre est inscrit dans ma main. Pour cela, il faut poser des questions. Et bien sûr, vous n'avez pas le droit de demander « est-ce que c'est le D ? »)*
51.	Fati	*Maîtresse*
52.	Sté	*Alors Fatima*
53.	Fati	*Est-ce que c'est un carré ?*
54.	Sté	*Ce quadrilatère n'est pas un carré. Aïsha ?* (a levé la main *!)*
55.	Aïsha	*Combien a-t-il d'axes de symétrie ?*
56.	Sté	*Alors ce quadrilatère, alors demande « est-ce qu'il a des axes de symétrie ». Je ne répond que par oui ou non.*
57.	Aïsha	*Est-ce qu'il a des axes de symétrie ?*
58.	Sté	*Ce quadrilatère n'a pas d'axe de symétrie. Si on a trouvé, on lève la main, on vient me le dire dans l'oreille. Ce quadrilatère n'a pas d'axe de symétrie. Monsieur ?*
59.	Brice	*Est-ce qu'il a six côtés ?*
60.	Sté	*Est-ce qu'il a ?*
61.	Brice	*5 côtés ?*
62.	Sté	*Ce quadrilatère n'a pas 5 côtés parce que, Brice, un quadrilatère, tu entends quoi?*
63.	E	*Quatre*
64.	Sté	*Ben oui, quatre côtés, donc ça ne peut pas être celui-ci* (en montrant la figure au tableau*). Alors, ce quadrilatère n'a pas d'axe de symétrie*
65.	E	*Maîtresse, j'ai trouvé c'est quoi*
66.	Sté	*Pose une question*
67.	E	*Maîtresse*
68.	Sté	*Mamadou ?*
69.	Mamad	*Je sais euh*
70.	Sté	*Ah non, tu poses une question*
71.	Mamad	*Est-ce qu'il a deux côtés égaux ?*
72.	Sté	*Ce quadrilatère….Ah ; (prend le compas et compare les longueurs des côtés pour deux quadrilatères sur les cinq au tableau)*
73.	E	*Ah, ça y est maîtresse*
74.	Sté	*Je vais pas vous dire lequel (pendant qu'elle continue sa vérification)*
75.	Sté	*Ce quadrilatère a deux côtés consécutifs égaux. Mamadou, tu as trouvé ?*
76.	Mamad	*Le E*
77.	Sté	*Fatima ?*
78.	Fati	*Le E*
79.	Sté	*D'accord. Et qui plus est, qu'est-ce qu'il a le E ?*
80.	Mamad	*Deux côtés égaux*
81.	Sté	*Oui, deux côtés égaux*
82.	E	*Un angle droit (*plusieurs élèves*)*
83.	E	*Il y a même un angle droit*
84.	Sté	*Viens vérifier* (L'élève se déplace pour vérifier*)*
85.	Sté	*Ça vous convient mademoiselle ? Tenez, puisque vous êtes au tableau, vous me tracez les diagonales*
86.	E	*C'est à dire ?*
87.	Sté	*Euh, du quadrilatère B*
88.	E	*C'est à dire les diagonales ?*
89.	Sté	*Les diagonales*
90.	Aïsha	*Moi, maîtresse*
91.	Sté	*Aïsha*
92.		*(Aïsha vient au tableau)*
93.	Sté	*Apparemment ces diagonales correspondent aussi à des axes de symétrie. Je peux t'aider ? voilà*
94.	Sté	*Alors, qui vient tracer les diagonales de la figure C ? Ondine*
95.	E	*Il n'y en a pas*
96.	Sté	*Il n'y a pas de diagonale en C ?*
97.	E	*Oui*
98.	E	*C'est quoi les diagonales ?*
99.	Sté	*Ce sont les .. segments qui joignent les côtés opposés* (montrant les sommets concernés)
100.		(Ondine vient tracer les diagonales de C)

101.	Sté	*Voilà*
102.	Sté	*Adrien, puisque tu es debout, tu viens nous tracer les diagonales de la figure D. Quel nom porte-t-elle, la figure D ? Fatima, tu t'assieds ?*
103.	E	*Un rectangle*
104.	Sté	*Brenda ?*
105.	Aïsha	*Un carré, un rectangle*
106.	E	*Un rectangle*
107.	Sté	*Un rectangle* (Adrien vient au tableau et trace les médianes du rectangle *)* *Est-ce que ces segments passent par les sommets ?*
108.	E	*Non (*plusieurs réponses*)*
109.	Sté	*J'entends ?*
110.	E	*Non*
111.	Sté	*Est-ce que ce sont des diagonales ? Adrien, qu'est-ce que tu nous a tracé là ? Et encore tu t'es … Je pense que … qu'est-ce que tu voulais faire ? Qu'est-ce que tu nous a tracé ?*
112.	Mamad	*Un axe de symétrie*
113.	Sté	*Ouais. Parce que des diagonales, Adrien, qu'est-ce qu'elles joignent ?*
114.	Adrien	*Les sommets*
115.	Sté	*Les sommets opposés. Viens-tu tracer les diagonales ? (Adrien s'exécute). C'est à dire si ton rectangle s'appelle ABCD, tu traces AC et BD (* nomme les sommets du rectangle D par ABCD)
116.	E	*Comme un bande dessinée, BD.*
117.	Sté	*Bien, merci.* *(* énième chute d'un règle métallique*)*
118.	Sté	*Depuis hier, c'est la 4ème fois ; là, je suis désolée (à Mamadou). De quoi on a parlé hier ? qu'est-ce qu'on fait ? Alors, maintenant on se concentre. CE2 CM1, Adrien, je vous ai demandé ? Qu'est-ce que je viens de vous demander à l'instant ? Qu'est-ce que je vous ai demandé ? Mamadou ? Qu'est-ce que vous êtes venus tracer au tableau ?*
119.	Mamad	*Des axes de symétrie (*ainsi que d'autres élèves)
120.	Sté	*Des axes de symétrie ?*
121.	E	*Oui*
122.	Sté	*Est-ce que tu penses que dans cette figure il y a des axes de symétrie ? (montrant un quadrilatère quelconque)*
123.	E	*Non*
124.	Sté	*Non, parce que si on les plie, si on les pliait en suivant ces lignes (montre les diagonales), nous n'aurions absolument pas la même figure, enfin l'effet miroir. Qu'est-ce que je vous ai demandé de tracer là, Mamadou, Adrien ? Qu'est-ce que tu es venu tracer Adrien, au tableau ?*
125.	E	*Des diagonales*
126.	Sté	*Des diagonales, des diagonales dans les quadrilatères. Tu es d'accord Fatima ou tu préfères sortir ? Parce que là je suis en train de me fatiguer . Qu'est-ce que vous êtes venus tracer, les CM1, au tableau ?*
127.	E	*Les diagonales*
128.	Sté	*Les diagonales. Est-ce que vous pouvez regarder un petit peu les diagonales de la figure B ? Qu'est-ce qu'elles ont de particulier ?*
129.	E	*(Silence profond)*
130.	Sté	*Si l'on compare les diagonales de cette figure par rapport aux diagonales de celle-ci, quelle est la différence ?*
131.	E	*(Silence)*
132.	Sté	*Non, personne ne voit ? J'aimerais bien qu'on trouve. Regardez les diagonales de B et regardez les diagonales de la figure D.*
133.	E	*Ce ne sont pas les mêmes.*
134.	Sté	*Ce ne sont pas les mêmes. Qu'est-ce qui change ?*
135.	E	*(Silence)*
136.	Sté	*Je vais peut-être vous aider*
137.	Aïsha	*Parce que ceux-là ils sont …, parce qu'il y a des …angles droits*
138.	Sté	*Oui, il y en a combien, Aïsha ?*
139.	Aïsha	*4*
140.	Sté	*4 (et marque 4 angles droits à l'intersection des diagonales de D qui est un losange en position non prototypique du losange mais prototypique du parallélogramme). Et pour la figure D ?(rectangle) Allez. Ceux qui veulent, ceux qui discutent et qui nous gênent, vous choisissez, vous avez le choix. Ou bien vous participez, ou bien vous discutez dehors* (ouvre la porte*). Merci.* *Et si on regarde la figure D ?*

141. E (Silence)
142. Sté *Regardez les diagonales ? CM1, oui Brice ?*
143. Brice *Elles ne sont pas tracées à la même place*
144. Sté *Elles ne sont pas tracées à la même place. Qu'est-ce que tu entends par là ? Qu'est-ce qu'elles n'ont pas contrairement à celles-ci ?*
145. E *Déjà il y a une différence*
146. Brice *(s'explique mais inaudible)*
147. Sté *J'ai pas très bien compris parce que je pense qu'Adrien et… Il faut que tu sortes, Adrien. Je n'ai pas compris ce que tu expliquais Brice. Aïsha a dit que pour cette figure, les diagonales ont des angles ?*
148. E *Droits*
149. Sté *Droits. Et pour celle-ci ?(D)*
150. E *Il n'y en a pas (plusieurs réponses)*
151. Sté *Beh, c'est à vérifier. (vérifie à l'équerre) Est-ce que l'on a des angles droits ?*
152. Fati *Là c'est plus serré, que le losange, c'est plus large*
153. Sté *Ah le losange, c'est plus ? Attention !*
154. E *Il n'y a pas d'angle droit*
155. Sté *Il n'y a pas d'angle droit*
156. Fat *Oui mais le carré il est plus petit, que le losange, il est plus euh il est plus euh*
157. Sté *Le carré ? C'est un carré ça ?*
158. E *Rectangle*
159. Sté *Le rectangle est plus petit que le losange, est-ce que tu peux expliquer ce que tu veux dire ?*
160. E *Silence*
161. Sté *Fatima ?*
162. Fat *Quoi ?*
163. Sté *Qu'est –ce que ça veut dire le losange est plus grand que le rectangle ou que le rectangle est plus petit que le losange ? Je ne comprend pas, là.*
164. Fati *Ben, déjà le …le*
165. Aïsha *Mais non, parce que vous ne l'avez pas tracé de la même manière*
166. Sté *C'est à dire qu'ici j'ai pris des côtés qui font …(* prend la règle et mesure les côtés*) 40 centimètres et ici les côtés font 25 centimètres. (* rectangle et losange*). Est-ce que tu penses que ça changerait quelque chose pour les diagonales ?*
167. Aïsha *Mais non, ici vous n'avez pas tracé les , vous n'avez pas fait pareil (* montre au tableau les sommets du rectangle : ils sont nommés ABCD, alors que le losange n'est pas nommé)
168. Sté *Comme ça ? Regarde, ce sont bien les sommets ?* (désigne les sommets du losange B par A,B,C,D)
169. E *Mais là aussi vous n'avez pas fait pareil. (Aïsha montre le rectangle)*
170. Sté *Là ce sont les sommets opposés .*
171. Sté *Je vous ai tracé (*s'adresse à l'ensemble de la classe abandonnant Aïsha)…
Après, c'est vous qui travaillez. Je vous ai tracé les diagonales de F, comment sont-elles ces diagonales ? (F est un cerf–volant)
172. E *(inaudible)*
173. Sté *Qu'est-ce qu'elles ont ? «droites, qu'est-ce que ça veut dire ?*
174. E *Silence (* mais des bavardages isolés dans la classe*)*
175. Sté *Bien, voilà le but du travail. Les CE2, puisque de toutes les manières, certains font toute autre chose maintenant, les CE2 je vais vous demander de tracer des rectangles ayant des dimensions de toute …euh différentes. On peut rappeler que les rectangles ont combien d'angles droits ?*
176. E *4 (plusieurs réponses)*
177. Sté *4 angles droits et que ses deux côtés opposés sont ?*
178. E *Egaux*
179. Sté *Egaux, et que ces deux côtés AD et BC sont ?*
180. E *Egaux, bon.*
181. Sté *Les CM1, c'est plus difficile pour vous. Je vais vous demander de chercher des quadrilatères pour lesquels les diagonales forment des angles ?*
182. E *Droits*

183. Sté *Droits. Voilà. Bon, je vais l'écrire*.(n'écrit rien). *CM1, tous les quadrilatères dont les diagonales forment des angles droits et CE2 des rectangles de taille différente (en élevant la voix). Adrien, tu peux sortir, je suis fatiguée de ton attitude, merci (* Adrien sort*) et Fatima, si tu as envie de discuter avec lui, tu sors.*
184. Sté *Donc tous les quadrilatères dont les diagonales forment des angles droits. (*bavardages*) et Mamadou, ça vaut pour toi.*
185. Sté *Les CE2, là, je vais vous donner autre chose (* CE2 de Mme Lecomte*)*
186. E *Pourquoi ils font autre chose ?*
187. Sté *Parce qu'ils ne font pas la géométrie*
188. Sté *Rectangles pour les CE2. Pour ces trois fiches, je vous demande au crayon à papier de chercher toutes les valeurs. Au crayon à papier*
(s'adresse aux élèves de Mme Lecomte, les autres élèves s'activent, bavardages autour du matériel (feuilles) distribué, ou autres, rires au fond) *.Et Brice, il est ici, Brice, tu viens t'installer ici*(élève de Mme Lecomte*) et pour toutes ces fiches, donc je vous demande de chercher les résultats.*
189. E *Et tout ça, ça, ça ?*
190. Sté *Oui*
191. Sté *Oui, Sandra ? Est-ce que c'est les diagonales de ça ? (* Sandra s'est déplacée*)*
192. San *Je fais un losange*
193. Sté *Tu fais un losange ? et ensuite tu vas vérifier que les diagonales forment des ?*
194. San *Angles droits*
195. Sté *D'accord*
196. *Beaucoup de bavardages*
197. Sté *Un carré ? (s'adresse à Joe ? Un carré ou un rectangle ?*
198. Joe *Un rectangle*
199. Sté *Merci. Les diagonales, vous pouvez les faire en rouge hein .Oh attention aux angles droits là*
200. E *Maîtresse, il faut faire des rectangles ?*
201. E *Maîtresse on les écrit où ?*
202. E *On les écrit où les résultats ?*
203. Sté *En dessous*
204. E *On les écrit ici, regarde on les écrit ici (* rires et bruits divers*)*
205. E *Maîtresse, elle est où la règle ?*
206. Sté *Les règles, elles sont là-bas. Toi, va t'asseoir*
207. E *Elle est où la règle, maîtresse ?*
208. Sté *Tu vas prendre une règle là-bas, jeune homme (* en criant*) Tu te moques de qui ? (à Edwin qui se dirige en riant vers l'endroit désigné). Bien, les règles et les équerres sont là-bas. Andy, il a besoin de la sienne pour travailler.* (le bruit diminue)
209. E *Maîtresse, c'est ça les diagonales ?*
210. Sté *Non. CE2 ? Oui c'est bon.*
(circule dans la classe pour valider diverses productions). *Non, pas les triangles*
211. Aïsha *Maîtresse, je ne me rappelle plus qu'est-ce qu'on doit tracer*
212. Sté *Les diagonales et il faut qu'elles soient … il faut qu'elles aient ?*
213. Aïsha *4 côtés égaux*
214. Sté *4 côtés égaux ? Non*
215. Fatima *Euh euh*
216. Aïsha *4 angles droits*
217. Sté *Ou bien on va dire qu'il faut qu'elles soient per . ?*
218. Aïsha *Perpendiculaires*
219. Aïsha *Maîtresse, comme ça ?*
220. Sté *Voilà (* à côté, bavardages divers ; elle se dirige vers le groupe de Mme Lecomte, auquel Andy a été associé et qui aide ses camarades de l'autre classe à calculer les résultats des fiches, tout en construisant ses rectangles. Ils remplissent ensemble les fiches, s'interpellent pour tel ou tel résultat*)*
221. E *Neuf fois 8 ?*
222. E *Hein ?*
223. E *Neuf fois huit ?*
224. Sté *(à un CE2) ça fait 580, et ensuite tu fais (inaudible), il n'y a aucun problème. Chuut*
225. Cécilia *(* montre son travail*)*
226. Sté *Attention, diagonales ? Ah c'est malin ce que tu fais là*
227. Edwin *maîtresse, j'ai terminé*
228. (Bruits, discours inaudibles*)*

229.	Sté	*Est-ce que c'est un rectangle ? tu me montres que c'est un rectangle*
230.	Sté (à moi)	*Sandra elle a tracé elle a tracé euh, tiens Sandra, viens là avec ta feuille. Elle a tracé un quadrilatère, et pour que les diagonales soient perpendiculaires, elle a tracé ici* *(* Sandra trace un quadrilatère, puis les diagonales , ajuste ensuite pour obtenir l'orthogonalité des diagonales*)*
231.	E	*Maîtresse, et qu'est-ce qu'il faut faire à 79 ?*
232.	Sté	*(à Sandra) vérifie qu'il y a des angles droits. 79 c'est le pouilleux, c'est la carte qui reste toute seule*
233.	Sté	*Oui, d'accord, alors tu continueras 10 fois euh (* à un autre élève)
234.	Cécilia	*1 Maîtresse, maîtresse, maîtresse, je fais les diagonales ?*
235.	Sté	*Il faut qu'elles soient perpendiculaires*
236.	Cécilia	*C'est à dire*
237.	Sté	*Elles forment des angles droits, ah non, il faut qu'elles forment des angles droits.*
238.	E	*Maîtresse*
239.	Sté	*Et Cécilia, tu codes tes angles droits.*
240.	Cécilia	*C'est à dire ?*
241.	Sté	*C'est à dire est-ce euh* (montre le codage*) et en dessous tu écris rectangle.*
242.	Sté (à moi)	*Tu vois, elle passe tout de suite à la construction quand ça tourne comme ça, moi je euh, tu vois hein les consignes sont comprises*
243.	E	*Maîtresse, est-ce qu'il faut prendre la calculette ?*
244.	Sté	*Non, ah non,*
245.	E	*Tricheur*
246.	Sté	*La calculette, elle est ici, oh 159, 9 moins 1, 8, 5 moins 2, 3 et 1 moins 1 ?*
247.	E	*0*
248.	Sté	*Normalement ça supposait en vérité celle-là. 9 fois 2 ?*
249.	E	*18*
250.	Sté	*18, 6 fois 2, 12 et une retenue ?*
251.	E	*Inaudible*
252.	E	*Madame Ndoumbé?*
253.	Sté	*Oui, Edwin ?*
254.	Sté	*Essaie d'orienter différemment ?*
255.	E	*Maîtresse ?*
256.	E(	*Maîtresse regardez, j'ai plein d'angles droits*
257.	Sté	*Attention, il faut que ça soit les diagonales, est-ce que ce sont les diagonales ? Là tu as fait des axes de symétrie. Les diagonales, elles joignent les côtés opp ?*
258.	E	*Opposés*
259.	Sté	*Opposés, à ce moment-là vous appelez A, B, C, D, le quadrilatère et vous joignez AC et BD.(nomme elle-même les sommets sur la figure de l'élève Aïsha ou Fati assises ensemble)*
260.	San	*Maîtresse, elle est où, ma feuille ?*
261.	Sté	*Ah, mais je l'ai donnée (me reprend la feuille pour la rendre à l'élève)*
262.		*(beaucoup de bruit. En particulier on entend les élèves de Mme Lecomte auxquels se sont rajoutés d'autres élèves, faire des calculs à voix haute et discuter sur les résultats)*
263.	Aïsha	*Maîtresse, j'ai (inaudible)*
264.	Sté	*Alors, voici les diagonales du carré est-ce qu'elles forment des angles droits ?*
265.	E	*Oui*
266.	Sté	*Est-ce que le rectangle-là a des diagonales qui forment des angles droits ?*
267.	E	*Non*
268.	Sté	*Laura, je viens te voir*
269.	Sté	*Est-ce qu'il faut le faire … Attends, je vais te faire le début, tu regardes, d'accord ?*
270.	Laura	*D'accord*
271.	Sté	*Je vais essayer de t'aider*
272.	E	*Maîtresse, il faut regarder, moi je n'ai pas de triangle ; mais*
273.	Sté	*Est-ce que j'ai demandé des triangles ?*
274.	E	*Oh des rectangles*
275.	Sté	*Ah bon* (travaille avec Laura, bruits divers)
276.	E	*Mamadou*
277.	E	*Maîtresse*
278.	Sté	*Qu'est-ce que tu fais là-bas, Mamadou (*s'est rendue auprès des CE2 de Mme Lecomte)
279.	E	*Maîtresse*
280.	Sté	*Ah, on progresse, j'arrive (à Ondine)*
281.		Bavardages divers, on entend

- là 2 centimètres, 1600, maîtresse, 550, maîtresse, 5 fois 4 ça fait 20,maîtresse, …

282. Sté *Est-ce que tu as bien tracé les diagonales ?*
283. E *Maîtresse , maîtresse*
284. Sté *Oui*
285. E *Mamadou, il veut pas me rendre mes affaires*
286. E *Chérif, Chérif*
287. E *Maîtresse, Allison, elle m'embête*
288. E *Une petite ou une grande ?*
289. Sté *Comme tu veux, les dimensions que tu souhaites*
290. E *Maîtresse, j'en ai fait trois, là*
291. Sté *Est-ce que les diagonales sont perpendiculaires ?*
292. Fati *Non*
293. Sté *Non, parce que le rectangle*
294. Aïsha *Maîtresse, j'ai essayé le rectangle tout à l'heure et*
295. Sté *Essaie le losange ou le cerf-volant*
296. Aïsha *Je vais essayer le cerf-volant*
297. E *Maîtresse, regardez*
298. E *Maîtresse*
299. Sté *Mademoiselle ? Ah attends, on va voir ça*
300. Sté *Viens avec moi, Laura*
301. *(Bavardages divers dans la classe, les élèves échangent sur leur travail, interpellent Sté)*
302. Sté *Ah, est-ce que c'est un quadrilatère ? 1, 2, 3, 4 , 5. C'est un quadrilatè, c'est un …C'est une figure qui a combien de côtés ?*
303. Laura *Cinq*
304. Sté *Et aussi elle a ?*
305. Laura *Inaudible*
306. Sté *Et tu vas avoir fait des diagonales là. Alors ça n'est ni un, ça n'est ni un quadrilatère, ni une figure, les 4 côtés des diagonales font des angles ?*
307. E *Droits*
308. Sté *Ben voilà, ça ne va pas*
309. E *Maîtresse, maîtresse*
310. Sté *Oui, alors ; elles sont comment ces diagonales ?*
311. Mamad *Des angles droits*
312. Sté *Est-ce que les diagonales sont perpendiculaires ? Perpendiculaires, ça veut dire elles forment des angles ?*
313. Mamad *Droits*
314. Sté *Ben tu essaies de trouver un petit peu tout seul*
315. E *Maîtresse, maîtresse ?*
316. Sté *Oui ? Alors comment s'appelle cette figure ? (à Fatima)*
317. Fati *Le losange*
318. Sté *Ah,*
319. Fati *Un cerf volant*
320. Sté *Parce que le losange il a combien de côtés égaux ?*
321. Fati *4*
322. E *Maîtresse, maîtresse*
323. E *Maîtresse, quand on a fini, on met où ?*
324. E *Maîtresse, maîtresse*
325. E *Venez voir*
326. E *Maîtresse, est-ce qu'il en reste des trucs comme ça ?*
327. E *Maîtresse, maîtresse, qu'est-ce que c'est ?*
328. Sté *Le B , c'est le losange !*
329. E *Le losange, il a 4 côtés égaux*
330. Sté *Alors, on peut aussi essayer avec des quadrilatères quelconques hein ? (*s'adresse à toute la classe*) Regarde celui-ci, est-ce qu'il a des angles droits ? (*à un élève)
331. Sté (à moi) *Alors, pour l'instant aucun n'essaie de partir des segments, des diagonales perpendiculaires pour tracer ce qu'il faut, pour l'instant personne ne le fait hein !*
332. Fatima *Moi, ça y est, j'ai un losange*
333. Sté *Oui, très bien tu traces les diagonales*
334. Sté *Là c'est ce que je voulais vérifier et pour l'instant, personne n'a eu cette idée*
335. Aïsha *Maîtresse*

336. Sté *Oui ? Et comment tu fais pour tracer ces figures avec des diagonales ? perpendiculaires ?(*Aïsha)

337. Sté *Tu traces d'abord les droites comme ça ou les diagonales ?*

338. Aïsha *Je trace un trait comme ça (*une verticale*) et un trait comme ça(*une horizontale*)*

339. Sté *Tu as commencé par les côtés ou les diagonales ?*

340. Sté *Ah toi tu as commencé comme ça ?*

341. E *Maîtresse, maîtresse, maîtresse*

342. *(Bruits, bavardages en continu, interpellations diverses)*

343. Sté à Laura *Oui, il y a 4 côtés, bon, maintenant, où sont les diagonales ? Est-ce qu'elles ont des angles droits ? Non, ah mais oui, ça on l'a déjà fait, j'en veux plus de ça. Moi, je veux des diagonales qui aient des angles droits. Et c'est le losange.*

344. E *Maîtresse, c'est bon ça ?*

345. Sté *Aïsha, je te donne des cartes blanches ?*

346. Edwin *Moi aussi, maîtresse*

347. E *Maîtresse, ça y est*

348. E *Maîtresse, 115 moins 55 ça fait 60 ?*

349. Sté *115 moins 65 ?*

350. E *55*

351. E *50*

352. Sté *110 moins 50, 60*

353. E *55*

354. Sté *Dîtes, posez là, hein*

355. *(Bruits, fond sonore important)*

356. Sté *Une, deux, trois, quatre, cinq, je n'entends personne*

357. E *Maîtresse*

358. Sté *Je n'entends personne. Edwin, je sais que t'as travaillé. Les CM1, quels sont les quadrilatères qui ont des diagonales qui forment des angles droits. Qu'est-ce que vous avez trouvé comme quadrilatères ?*

359. E *Le cerf-volant*

360. Sté *Le cerf-volant, je suis d'accord*

361. E *Le losange*

362. Sté *Le losange, d'accord, et, et, est-ce que le rectangle a des angles droits ?*

363. E *Oui*

364. Sté *Des diagonales, pardon*

365. E *Non*

366. Sté *Et vous avez également, allez, une figure très connue, certains l'ont faite.*
(bavardages, elle est obligée d'élever la voix)

367. Aïsha *Un carré*

368. Sté *Un carré a aussi des diagonales qui forment des angles droits. Chuut*

369. Sté *Est-ce qu'il a des angles droits ? Est-ce que les diagonales ont des angles droits ? oui, c'est bien*

370. Sté *Ah, intéressant, mais les diagonales ? A, B, C, D* (nomme la figure de Joe qui est un trapèze isocèle*). Les diagonales sont ?*

371. Sté à moi *Ils me font euh… Joe, il me fait bien le quadrilatère et ils n'ont pas encore fait la notion de diagonale, eh bien il me fait des axes de symétrie (*me montre les médianes du trapèze isocèle tracées par Joe *) et il trouve que c'est perpendiculaire ! Mais non (* se tournant vers Joe) *les diagonales, elles joignent les côtés opposés, par contre, c'est très intéressant*

372. *(*Cris dans la classe, suite inaudible, bavardages, pendant qu'elle se déplace d'un élève à l'autre, les élèves continuent à s'interpeller pour diverses raisons, ou interpellent la maîtresse pour lui montrer leur travail, ceci pendant 4 à 5 minutes)

373. Sté (viens vers moi après avoir discuté avec un élève)*alors, quelque chose que je relève tout de suite, comme les diagonales sont perpendiculaires, angles droits veut dire c'est un carré.*

374. Sté à un E *Tu peux me faire un carré ? tiens avec … comme ça je vais être sure que tu connais bien le carré. Alors elles sont comment les diagonales ?*

375. E *(Inaudible)*

376. Sté *Voilà, et qu'est-ce qu'elles forment ?*

377. E (inaudible)

378. Sté *Tu es sure hein ? mais si l'angle droit c'est ça. Où est-ce que tu en vois, des angles droits ? Regarde, l'armoire elle a des angles droits, les portes en ont.*

379. Sté *Ah ! mademoiselle, tu ne m'as pas fait les diagonales, tu m'as fait des axes de symétrie, parce que les diagonales, elles joignent les côtés ? (à Laura)*

380. Laura *Opposés (* a tracé un carré et ses médianes)
381. Sté *Opposés, AC et BD , et là, c'est la même chose, A, B, C, D, il faut joindre AC, DB alors tu me fais ces diagonales et vérifie qu'elles sont perpendiculaires. (vacarme dans la classe, rires..)*
382. Sté *Euh, euh, j'ai des petits doutes là-dessus. Tu as commencé par les diagonales ou tu as fait la figure ?*
383. E (inaudible, Bavardages, bruits divers)
384. Sté *Ah !c'est bien, tu vois c'est tout sur les diagonales, il y a des axes de symétrie, il y a des diagonales, ça va pas tout ça. Donc qu'est-ce que ça veut dire si ça ne va pas ? (à Laura)*
385. Laura (inaudible*)*
386. Sté *Malheureusement on doit recommencer, avec le sourire en plus !*
387. Laura *Deux ?*
388. Sté *Beh oui, tu as fait un rectangle et un carré, et en plus le rectangle euh…*
389. Sté *Oui monsieur Chérif, je vois bien que tu souries un peu bizarrement là. Je vois bien qu'il y a le papier blanc, le papier uni, mais*
390. Sté *Non, mais par contre on indique pour les diagonales les angles ? (à un autre E)*
391. E *Droits*
392. Sté *Et on code sa carte*
393. Sté *Est-ce que les diagonales sont perpendiculaires ? est-ce qu'elles ont des angles droits ? à un élève)*
394. E *Non*
395. Sté *Alors, est-ce qu'on la garde ?*
396. E *Maîtresse, j'ai fini*
397. Sté *Alors maintenant tu vas découper tes cartes le plus , le plus proprement possible*
398. Sté (à moi) *C'est le jeu du pouilleux mais les données, elles sont déjà là*
399. E *On les découpe ? On découpe tous les carrés ?*
400. Sté *Les carrés ? Merci pour les carrés hein ? Va demander à Andy ce que c'est comme figure*
401. Sté *Oui madame, c'est bien. J'en voudrais bien une autre maintenant (à une autre)*
402. Sté *Alors qu'est-ce que c'est comme figure ?*
403. E *Maîtresse, j'ai fait mes constructions*
404. E *J'ai fini, maîtresse*
405. Sté *J'aimerais en avoir un euh, sur le côté, orienté différemment, sans s'occuper des lignes (de la fiche bristol)*
406. Sté *Ah, c'est toi O.L. (à Ondine)*
407. Sté *Ah, c'est toi la petite vilaine, tiens fais-moi un triangle, là, va faire un triangle là derrière*
408. Sté *Va faire un triangle, n'importe lequel, un triangle, Ondine, comme tu veux. … Tu peux faire un triangle avec un angle droit ?* (Echanges et bavardages divers dans la classe)
409. Sté *Alors, je vais ramasser les différentes fiches (bavardages, rires)*
410. Sté *Alors, CE2, vous mettez votre nom*
411. Sté (à moi) *Si tu veux regarder pour voir les erreurs qu'il y a, parce que nous après, on reprend ça, on enlève hein, forcément, carrément*
412. Sté *Maintenant je me fâche, copie,, copie Mamadou, Andy,…Brenda, tu es à ta place, maintenant*
413. *(Bavardages, promenades dans la classe)*
414. Sté *A part Edwin qui est debout, Brice il est assis, Laura tu t'assieds derrière*
415.
416. Sté *Pour sortir, vous êtes à vos places et silencieux.. Vous pouvez sortir*

Fin de la séance

<u>Commentaires de Stéphanie après la séance :</u>

Il faut regarder le travail des filles, donc c'est les recherches ; je trouve quand même que c'est fructueux. Il faut reprendre après. Jeudi, j'ai géométrie, normalement et comme je veux terminer ça pour vendredi en général on fait la séance le jeudi et on termine les cartes le vendredi. Mais je mettrai au tableau le … On va faire un petit bilan avec ceux qui ont les diagonales perpendiculaires et voir qu'on peut en faire des quelconques. Donc voilà, mon but à moi c'était de te montrer que ça fonctionnait parce que pour moi c'est quand même une bonne séance quand ça se passe comme ça parce que tout le monde travaille ; je trouve quand même qu'il y a des résultats assez intéressants, bon il y *a des choses à revoir mais ce sont quand même des CE2 et je trouve que lorsque je les entends, on a du vocabulaire géométrique d'utilisé ; on entend angles droits, côtés égaux, enfin même entre eux ; il y a un langage commun qui se met en place. Je trouve hein. C'est sûr que pour des élèves qui sont un petit peu limite, Cécilia elle a essayé beaucoup de traits et ce que j'ai aimé aussi c'est que les CM1 reprennent le compas pour travailler le losange.*

UN OBJET DE FORMATION PROFESSIONNELLE : L'USAGE D'UN MANUEL SCOLAIRE

Sophie Gobert
MC - IUFM Pays de la Loire (Nantes)

Problématique de travail proposée aux participants :
Les manuels scolaires, livres du maître et fichiers d'élèves, sont des médias majoritairement utilisés par les professeurs des écoles pour leur travail de préparation et le pilotage des situations d'enseignement. Les recherches en didactique des mathématiques se sont intéressées à ces ouvrages comme moyens d'accès à l'analyse de curriculums ou de leurs évolutions, voire à celle de pratiques globales d'enseignement. Les travaux et documents pour la formation développent, pour leur part, des grilles d'analyses des contenus et s'intéressent aux propositions didactiques des auteurs.
Le propos de l'atelier est d'examiner, de façon collective et dialectique, l'usage de ces instruments du travail de l'enseignant, situés à l'articulation des prescriptions officielles, des contraintes professionnelles, des analyses didactiques et des pratiques effectives. Plusieurs questions se posent, et sont posées, aux formateurs quant aux fonctions, rôles, attributs, vertus, inconvénients de tel ou tel manuel ou de ses usages ; et chacun, formateur débutant ou plus expérimenté, tente d'y répondre selon ses moyens. Il s'agira alors de mettre en commun nos connaissances empiriques, pragmatiques, ou scientifiques sur le sujet, à partir d'échanges, de mutualisations et de questionnement de nos activités.
Ainsi, l'ambition du travail proposé aux participants de l'atelier est d'envisager l'usage des manuels scolaires par les professeurs des écoles comme un objet de formation professionnelle, en tentant de clarifier des objectifs potentiels de formation et des dispositifs associés.

MODALITÉS DE FONCTIONNEMENT

Temps du jeudi après-midi (2h)

- Présentation de la problématique.
- Tour de table : questionnements et apports professionnels de chaque participant.
- Compléments d'informations.
- Écrit : questionnaire formateur associé à l'étude.

Temps du vendredi matin (1h30)

- Compte rendu des éléments de synthèse liés à la question des critères de choix, et autres informations.
- Point de synthèse sur quelques axes d'analyse de dispositifs.
- Travaux en groupe pour une avancée sur des questionnements plus ciblés.

PRÉSENTATION PLUS DÉTAILLÉE DU SUJET

Première justification de la proposition

La proposition de travail de cet atelier est issue du constat empirique de l'usage massif des manuels scolaires par les professeurs des écoles pour piloter leurs situations d'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Manuels scolaires pour le moment étant à prendre au sens large, puisqu'il peut aussi bien s'agir des fichiers d'élèves, que des livres du maître, ou d'autres ressources pédagogiques, et dont les usages recouvrent des modalités très diverses d'un professeur à un autre (cf. Chedlia, MPVannier, Roditi).

Mentionnons quelques caractéristiques de l'activité d'enseignement des mathématiques des professeurs des écoles pour appréhender cette dimension instrumentale du métier :
Les professeurs des écoles sont des **maîtres polyvalents**, à la fois sur les tâches qui leur incombent et sur les contraintes professionnelles de leur métier : la gestion d'un groupe, les enseignements disciplinaires, les contraintes institutionnelles, les relations aux parents, … L'approche développée par Jeannine Rogalski (2003) et Aline Robert (2001) sur les contraintes professionnelles et les marges de manœuvre est sans doute à exploiter aussi dans le premier degré.
Par ailleurs, quel que soit le degré d'expertise des professeurs des écoles concernant les mathématiques en tant que discipline (familiarité des connaissances et des techniques liées aux savoirs savants), l'enseignement les oblige à adopter des postures différentes, et les amène à intégrer des connaissances de nature diverse, de didactique, de psychologie, de pédagogie, … Ces connaissances ont subies elles-mêmes plusieurs **transpositions** entre les savoirs issus de la recherche et ceux redéfinis par l'enseignant pour une fonctionnalité orientée vers les apprentissages des élèves.
Enfin, une dimension non négligeable de l'apprentissage du métier d'enseignant correspond au peu de **temps de formation**, que ce soit en formation initiale ou continue, au regard du nombre d'années d'enseignement.

Ces trois raisons majeures, la polyvalence des tâches et des contraintes, les transpositions et négociations didactiques, et le peu de temps de formation, permettent de justifier l'intérêt que l'on peut porter à l'usage des manuels scolaires, du point de vue de l'étude des pratiques enseignantes. Se plaçant dans une perspective associant didactique des mathématiques et didactique professionnelle, nous considérons l'activité d'enseignement des mathématiques à l'école primaire, comme une activité médiatisée, instrumentée par un outil qu'est le manuel scolaire.

Seconde justification

Au niveau des travaux de recherche en didactique des mathématiques, nous ne disposons pas encore d'élément sur cette problématique, telle qu'elle est posée précédemment.
En effet, les manuels scolaires sont surtout considérés pour étudier des curricula, pour effectuer des comparaisons de contenus, pour analyser des phénomènes de transposition didactique ; ou pour effectuer des études comparatives de choix pédagogiques ou didactiques pour les progressions de telle ou telle notion, dans différents pays … Parfois les études portent sur les pratiques en considérant que les manuels permettent d'y avoir accès à travers la nature et les environnements des activités proposées. Mais cela concerne plutôt des époques

anciennes, quand les ressources et les pratiques n'étaient pas aussi multiples et protéiformes. Beaucoup plus rarement s'est posée la question du manuel scolaire comme un objet de formation professionnelle. C. Margolinas et T. Assude ont été amenées à faire le recensement des différents travaux menés autour de ces objets, et font bien apparaître ces trois dimensions d'étude : les savoirs, les pratiques, et la formation.
Concernant ce dernier point, elles mentionnent des résultats d'entretiens réalisés auprès de douze enseignants, mettant en évidence l'impact du travail en formation dans l'usage déterminé d'un manuel scolaire. Elles mettent en évidence l'importance de ce qui a fondé les premiers rapports aux manuels permettant de se les approprier de manière plus construite :
(en gras, nous soulignons)

> « Le plus frappant dans notre enquête est sans doute l'origine de ce fil conducteur. Tout se passe comme s'il y avait à l'origine un travail sur *un* document, le plus souvent un livre du maître ou en tout cas un document à destination des maîtres, rencontré et travaillé très tôt dans la carrière du professeur (souvent dans la formation initiale ou dans les premières années de carrière). **Ce document est l'objet d'un investissement très important de la part du professeur, à la fois en termes de quantité de travail mais aussi d'adhésion idéologique et didactique.** […] Les professeurs interrogés modifient bien tous les ans certains éléments de leur enseignement de mathématiques, mais tout se passe comme si ce travail, un peu à la manière du développement d'un cristal, s'effectuait toujours autour de cette première base, qui lui imprime sa forme et sa nature. Même quand la formation initiale est ancienne (trente ans pour plusieurs enseignants de notre corpus), **la *logique* qui a prévalu à la conception première d'un enseignement de mathématiques reste extrêmement stable** (même si le professeur s'est apparemment adapté aux programmes actuels et a adopté un manuel contemporain pour les élèves) et se révèle dans les choix du professeur. L'impact effectif de la formation initiale (parfois des premières années d'enseignement, surtout quand la formation initiale a d'une manière ou d'une autre fait défaut) semble donc très important quand on se centre, comme nous l'avons fait, sur le contenu en jeu en mathématiques. En particulier, **les documents qui sont présentés et étudiés en formation jouent souvent un rôle décisif comme modèle, notamment pour les progressions et la conception des mathématiques**. Il nous semble que ces constatations, si elles se vérifient dans une étude plus large, pourraient conduire à une réflexion spécifique sur la place de l'étude des documents (et notamment des manuels) dans la formation initiale, comme le préconise également Alain Choppin (dans Zakhartchouk, *op. cit.*). »

L'objectif de l'atelier est de commencer à penser en commun (formateurs de fonctions diverses) la question de la formation à l'usage d'un instrument qui fonde en grande partie l'activité de l'enseignant, dans ses pratiques, ses conceptions, son épistémologie, son enseignement des mathématiques. C'est un aspect de la professionnalisation que nous devons considérer.

COMPTE RENDU DU TOUR DE TABLE

Le tour de table a permis à chaque participant (nous étions une vingtaine) de s'exprimer sur les questions relatives à la problématique, faire part de son positionnement, son discours ou d'activités et de dispositifs proposés en formation initiale avec les PE2 ou en formation continue. J'ai choisi de conserver les expressions utilisées par les participants, et de les rassembler selon les points suivants :
- Constats de réalités et questions de formateurs
- Propositions d'activités
- Éléments de réflexion générale

Constats de réalités et questions de formateurs

Le manuel est une réalité de classe.
Il ne faut plus le nier, mais tout le temps le repositionner.
Au début je pensais qu'il ne fallait pas utiliser les manuels, et maintenant je pense que les PE2 doivent les utiliser, mais comment les former ?
Certains formateurs préconisent certains manuels et font acheter le livre du maître associé.
Le travail sur les livres du maître est une nécessité, mais si on n'en a pas ?
Une réalité fréquente du stage en responsabilité : l'absence du livre du maître.
En librairie ne sont disponibles souvent que les fichiers élèves, ou bien les spécimens envoyés. Le nombre de choix possibles est très important, parfois jusqu'à trente ouvrages, lesquels connaissons-nous en détail ?
Les gens sont demandeurs d'un titre.
Que dire et faire avec les fiches sur Internet ?
Comment distingue-t-on un bon manuel d'un mauvais manuel ?

Quelles stratégies de formation ? Comment aider les PE à s'approprier un ouvrage et à se distancier par rapport à lui ?
Pour une étude des manuels, de quels outils disposons nous en formation ?
Les manuels sont un outil mal intégré dans ma pratique de formateur.
Je fais des choses mais je ne sais pas ce que les PE2 en retiennent, j'ai l'impression de ne pas avoir de cadre.
Quel lien envisager avec le projet en stage filé, une journée en responsabilité par semaine dans la classe ?

Il y a quelques années lorsqu'on faisait référence à xxx, on entendait « Oh là là, c'est trop compliqué ! » maintenant, on voit plus fréquemment des enseignants en formation continue appuyant leur pratique sur l'usage de cet ouvrage et on entend plutôt « c'est pas mal ».
C'est mon avis, la plupart des manuels sont mauvais, donc j'en choisis un. Un tiers des PE2 achètent xxx et un PEIMF vient indiquer comment il l'utilise.
Que penser des effets de mode ? La mode xxx, la mode xxx, avec de nombreuses conférences sur le terrain, voire en IUFM ! Et si dans dix ans les manuels changent de formes, et si les programmes à nouveau changent, faut-il viser l'adoption d'un manuel spécifique ou bien développer des attitudes, des comportements, des moyens d'adaptation ?
J'ai un axiome de base : un manuel non, des manuels oui.
Quel que soit le manuel, il y a un enseignant.

Propositions d'activités en formation

Comparaison de progressions sur des thèmes

Intérêt pour certains formateurs, nuancé par d'autres collègues considérant que les outils d'analyse et de repérage relèvent d'une certaine expertise que les stagiaires n'ont pas. Activité de didacticiens, ou de formateurs, mais difficilement de stagiaires, à moins de les munir au préalable des moyens d'analyse, à partir des programmes et documents, ou bien d'éléments de synthèse de cours, …

Reconstitution de progressions

Sur un cycle et un thème, à partir d'un ensemble varié de manuels, zoom progression sur le niveau, zoom progression sur une séquence. Ce dispositif permet de voir qu'aucun manuel n'est satisfaisant pour toutes les notions. Sans recommandation spécifique, il permet d'observer une grande variété de collections.

Étude globale d'une architecture de manuel

Entrer dans l'architecture générale d'un manuel, en différenciant le livre de l'élève et le livre du maître, et pour le livre du maître, en considérant les divers aspects, ergonomiques, pédagogiques, didactiques, …

Comparaison de leçons avec tous les éléments livre du maître, livre de l'élève, ressources, et présence de PEIMFs

Comparaison des situations d'amorce (découverte, départ)

Analyse sur les utilisations des fichiers élèves

Repérage dans les manuels de « la durée dans l'apprentissage »

Aspect que l'on peut difficilement faire travailler aux PE2 autrement qu'avec ces outils.

Analyses d'erreurs

Travailler sur des extraits de manuels qui présentent des erreurs mathématiques ou des horreurs didactiques « ce qu'il ne faut surtout pas faire ».

Analyse de pratique professionnelle à partir de manuels

Présentation d'usages par un PEIMF

Analyse de livre du maître en vu d'élaborer des situations d'enseignement, en opposition avec des pratiques de PEIMF qui demandent de construire à partir de rien !

Réaliser une séquence avec un livre du maître très mauvais, ou bien en ne disposant que du fichier élève, ou en tirant au sort une ressource, …

Analyse de deux pages d'un manuel directement liés à une commande et contrainte de stage

avec ancrage sur les questions de définitions, propriétés, … sont elles cohérentes, rigoureuses, en cohérence avec les activités, … ?

Éléments de réflexion générale

La prise en compte de la différence : outil pour le maître, outil pour l'élève.
Distinguer des types de ressources : manuels, brochure, ouvrages, articles, sites, …
Penser différentes fonctions du manuel : planifier une progression à l'année, organiser une séquence sur une notion, préparer en détail un séance, disposer d'une banque d'exercices, trouver des idées d'activités, …
Pourquoi n'existe-t-il pas un manuel pour un cycle ? Cela peut donner des idées sur un travail à faire en formation.
La prise en compte des choix collectifs, entre enseignants, ou au sein d'une école.
Nécessité de clarifier des critères pour l'analyse.

<u>Axes d'études</u>

Certains points semblent nous permettre d'avancer dans nos questionnements :

- Le repérage de critères de choix ou d'analyse d'un manuel scolaire
- La précision quant aux dispositifs que nous pouvons mettre en place en tant que formateurs
- Les analyses et synthèses des questions que nous nous posons
- Des éléments d'informations, de connaissances, d'ouvrages spécifiques.

Pour le point concernant les critères, j'ai pu recenser les réponses des participants à la question : « Quels sont vos critères de choix pour conseiller tel ou tel manuel ? » :
Cf. Annexes 1 et 2.

Nous avons par ailleurs ciblé d'autres aspects pour la suite de notre travail de réflexion :
Quelles différences faisons-nous entre des activités de formation proposées au sein d'un module de type « cours » et au sein d'un dispositif d'alternance avec un travail en classe ?
Quelles compétences professionnelles devons-nous développer chez les PE ? Quels objectifs définissons-nous, au regard de quelles injonctions ? Quelles évaluations ?
Comment organisons-nous la hiérarchisation des textes, ressources pour le maître ?
Quel degré d'expertise, mathématique, didactique, ou professionnelle, est requis pour effectuer les tâches élaborées pour la formation ?

ÉLÉMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

ROBERT A. (2001) "Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant", *Recherches en didactique des mathématiques,* vol 21/1.2, 57-79.
ROBERT A. (2004) "Que cherchons-nous à comprendre dans les pratiques des enseignants ? Quelles analyses menons-nous ?" in M-L. PELTIER-BARBIER (dir.), *Dur d'enseigner en ZEP*, pp15-32, Grenoble, La pensée sauvage.
ROGALSKI J. (2003) "Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement ouvert", Recherches en didactique des mathématiques, vol 23/3, 342-388.
GOBERT S. (2005) « Articulation des contraintes professionnelles dans l'enseignement du premier degré et des pratiques de formation des professeurs des écoles », Actes du 5ème Colloque International Recherche et Formation, Former des enseignants professionnels : savoirs et compétences, Nantes, 14-15-16 février 2005.

ZAKHARTCHOUK J-M. (coord.), « Du bon usage des manuels », *Cahiers pédagogiques,* 1998, n°369, p. 7-58.

MARGOLINAS C., CANIVENC B., DE REDON M-C. , RIVIERE O., WOZNIAK F. « Que nous apprend le travail mathématique hors classe des professeurs pour la formation des maîtres ? », *Actes du XXXIe Congrès de la Copirelem*, CD-Rom, Toulouse : IREM, 2005.
BRUILLARD E. (sous la dir.) (2005) Manuels scolaires, regards croisés, SCEREN – CRDP de Basse-Normandie.

Annexe 1

Question Formateurs :
Quels sont vos critères de choix pour conseiller tel ou tel manuel ?

Questionnaire Formateurs - Recherche I.POEM - S. Gobert - CREN - juin 2006

	Nombre	Pourcentage
	22	*%*
Prise en compte des connaissances de didactiques sur les notions	**16**	73
Rigueur des contenus mathématiques	**10**	45
Conformité aux IO et docs.	**10**	45
Lisibilité du livre du maître	**7**	32
Présence d'un livre du maître	**6**	27
Intérêt des situations de découverte	**4**	18
Potentialité d'ouverture pour le maître	**3**	14
Autres	**3**	14
Éléments de différenciation	**3**	14
Place et rôle des différentes catégories de problèmes	**2**	9
Place d'un champ de travail (géométrie, calcul mental)	**2**	9
Exercices variés	**2**	9
Évaluation	**2**	9
Équilibre de la programmation	**2**	9
Auteurs, équipe de rédaction pluricatégorielle	**2**	9
Prix	**1**	5
Présence de matériel	**1**	5
Articulation manipulation/structuration	**1**	5
Aide-mémoire	**1**	5

Annexe 2

Question Enseignants : Utilisez-vous les documents d'accompagnement et d'application des programmes en mathématiques ?
Questionnaire Enseignants - Recherche I.POEM - S. Gobert - CREN - mai-juin 2006

	nombre	**%**
non	**28**	**54**
oui	**13**	**25**
rarement	**3**	**6**
oui/non	**1**	**2**
NR	7	13
total	52	100

Pour les nombres "arguments" ci-dessous
le % est le nombre de fois cité dans les 28 questionnaires,
un même questionnaire pouvant présenter plusieurs arguments,
le cumul des % dépasse 100

Arguments évoqués avec la réponse NON

total sur 28 (pour 54% de NON)	*28*	***%***
Pas de temps	7	**25**
Sans commentaire	7	**25**
N'en dispose pas	4	**14**
Absence de réflexe	4	**14**
Pas de besoin	3	**11**
Trop de documents	1	**4**
Pas de présentation préalable	1	**4**
Lecture rapide	1	**4**

Arguments évoqués avec la réponse OUI

total sur 13 (pour 25% de OUI)	*13*	***%***
Idées, outils : manipulations, démarches, pistes de recherche	4	**31**
Conformité IO (approches, esprit, …)	4	**31**
Aide aux progressions et programmations	4	**31**
Clarté relative aux objectifs de cycle	2	**15**

SITUATIONS DE FORMATION EN PE1 POUR ABORDER LA MODÉLISATION DE NOTIONS MATHÉMATIQUES

Michel Jaffrot
Formateur à l'IUFM des Pays de la Loire
Catherine Taveau
Formatrice à l'IUFM de Paris

Résumé :

A partir d'une situation proposée en PE1, la modélisation de savoirs mathématiques en formation a été questionnée. Après avoir analysé la situation des poignées de mains, les participants de l'atelier ont échangé autour des différents modèles proposés par les étudiants et, de fait, se sont interrogés sur la notion de modélisation.

Nous avons aussi recherché des situations potentielles de formation qui amèneraient, elles aussi, à une démarche de modélisation de savoirs mathématiques.

NOS OBJECTIFS DE TRAVAIL DANS L'ATELIER

Lors de cet atelier, notre intention a été de questionner la notion de modélisation dans le cadre de la formation en mathématiques des étudiants PE1. Nous nous sommes demandés si nous proposions des situations didactiques qui nécessitaient une modélisation ? Si oui, lesquelles ? Est-ce qu'elles étaient réellement des situations de modélisation ? Puis de quelle modélisation parlions nous ?

Ces questions nous ont donné l'occasion de débattre, entre nous formateurs, sur nos propres représentations de la « modélisation » et par conséquent de notre façon de la faire vivre en formation avec les étudiants PE1.

En d'autres termes, nous avons été amenés à nous interroger sur des questions fondamentales comme « c'est quoi les mathématiques pour moi ?» ou « c'est quoi enseigner les mathématiques ? » ou encore « c'est quoi former à l'enseignement des mathématiques ? ».

Cet atelier a été essentiellement un lieu de réflexion et d'échanges dans lequel quelques pistes de mise en œuvre ont été proposées mais où tout est encore à débattre, et ceci dans le cadre de la plus grande place donnée aux mathématiques dans le concours de recrutement des professeurs des écoles.

Ce compte rendu ne peut pas refléter la richesse des débats mais nous présentons les phases essentielles du travail mené.

MISE EN SITUATION

Pour illustrer notre réflexion, nous avons présenté une situation que nous avons fait vivre déjà plusieurs fois dans nos groupes PE1, la situation des poignées de mains, et que nous pensons être une situation de modélisation. Chaque fois, cette situation est proposée lors de la première séance de l'année avec nos étudiants.

Au sein de l'atelier, nous souhaitons aborder les questions suivantes : en quoi cette situation permet-elle de mobiliser un modèle déjà disponible pour résoudre le problème ou en quoi permet-elle de se placer dans un processus de modélisation ? Que signifie pour nous le terme de modélisation ? Quel est l'intérêt de faire vivre cette situation à des PE1 ? Quelle démarche de formation mettre en œuvre pour aborder ces notions ?

Présentation de la situation de formation

Cette situation intitulée *les poignées de mains* a été initiée par Michel Jaffrot.

Lors de la première séance de formation avec son groupe de PE1, le formateur, sans rien dire de plus, propose à chacun de se lever (le formateur y compris). Les " 35 " PE1 sont répartis en deux groupes bien séparés dans la salle et le formateur propose que dans chaque groupe "*on se dise bonjour*" de telle sorte que chacun échange une poignée de mains avec chacun (suivant les moments, le formateur donne aussi des poignées de mains, il montre ou il ne montre pas).
Ensuite chacun retourne à sa place et le formateur annonce qu'il va poser plusieurs questions qu'il notera au tableau, qu'il y aura d'abord un moment de travail individuel (5 à 10 minutes), puis un travail par petits groupes de quatre PE1 (environ de 30 minutes) qui devra aboutir à l'élaboration d'une affiche permettant de comprendre les réponses et les démarches. Ces affiches seront analysées avec l'ensemble des PE1 après la pause.
Voici les questions :

- *Combien de poignées de mains ont été échangées dans votre groupe ?*
- *Combien de poignées de mains auraient été échangées pour la salle entière (les 35 PE1) ?*
- *Combien de poignées de mains auraient été échangées si nous avions été le double de personnes ?*
- *Combien de poignées de mains auraient été échangées si nous avions été tous les PE1 du site (400 PE1 pour IUFM de Paris) ?*
- *Et peut-on aussi le savoir quelque soit le nombre de personnes dans le groupe ?*

Suite à l'exposition des affiches de chaque groupe, une présentation en est faite par les auteurs et des questions ou demandes d'explications sont exprimées. Le formateur organise le débat, facilite le questionnement, fait formuler les accords ou désaccords ainsi que les validations.

Puis le formateur valide et institutionnalise le savoir mathématique en jeu. Pour la séance suivante, il propose une série d'exercices (Annexe 3), posés dans un contexte différent, faisant appel, pour les résoudre, à cette nouvelle connaissance.

Dans un premier temps, nous avons proposé aux participants de l'atelier de faire une analyse a priori de la situation des poignées de mains en explorant différentes dimensions :

- du côté du vécu des PE1 ;
- du côté des mathématiques en jeu ;
- du côté des productions possibles ;
- et bien sûr, du côté de la modélisation.

Ces analyses ont été retranscrites sur des affiches (Annexe 1) et ont donné lieu à des échanges. Puis dans un second temps, nous avons présenté un choix d'affiches réalisées par nos PE1 (Annexe 2) et y avons apporté quelques éléments du vécu des mises en œuvre de cette situation dans nos groupes.

Voici une synthèse de ces deux moments de travail.

Analyse a priori

Concernant l'analyse a priori, plusieurs questions concernant la situation elle-même, proposée en première séance de formation PE1 ont alimenté le débat :

- Quels sont les objectifs visés, en termes de démarches et de contenus mathématiques, mais aussi pour la formation didactique (l'établissement du contrat avec le formateur) ?

- Quelle gestion des affiches produites par les groupes de PE1, et des nécessaires liens entre les différentes affiches ?

- Comment travailler le réinvestissement et le transfert ?

- La présentation de la situation peut-elle influencer les procédures ?

- Est-ce une situation d'homologie ?

- Peut-on transposer cette situation dans une classe de primaire (partie didactique du concours) ?

- Comment « gérer » les PE1 « faibles » en mathématiques, voire en souffrance ?

Il ressort des échanges, la certitude que cette situation permet d'aborder à la fois des contenus mathématiques et des notions de didactique. D'autre part, c'est une situation où les étudiants ne disposent pas généralement de technique connue et mettent en œuvre seulement des procédures personnelles très variées utilisant des registres de représentation différents.

Analyse des productions de PE1

Concernant la présentation des affiches produites par les PE1, voici quelques questions :

- Quelle exploitation en faire ? Faut-il les organiser en les classant ?

- Quelle est la réponse attendue ? La démarche ? Les résultats ? La formule ou les formules plus ou moins réduites ?

- Qui valide les productions ?

- Comment montrer le lien entre les différentes procédures, sachant qu'elles sont exprimées dans des registres de représentations différentes :

  • registre utilisant la langue naturelle (souvent utilisé par des PE1 ayant des difficultés en mathématiques mais étant à l'aise avec les mots pour « dire des choses »);

  • registre schématique (en diagramme cartésien ou graphe, en arbre) ;

  • registre symbolique (utilisation des expressions mathématiques, des formules…).

Donc comment aider les PE1 à passer d'un registre à l'autre ?

D'autres questions ont porté sur la gestion des affiches comportant des erreurs, sachant que certaines peuvent permettre de réfléchir sur le statut de la démonstration.

Enfin, comment éviter la déperdition des procédures entre la production de chaque individu et l'affiche du groupe ?

Nous rappelons que cette situation est proposée lors de notre première séance avec les PE1, car elle nous semble pouvoir illustrer deux idées :

C'est quoi faire des mathématiques ? Nous pensons que la richesse des procédures utilisées par les PE1 permet de modifier leurs représentations de la discipline et ainsi de se lancer plus confiants dans la formation que nous leur proposerons pour la préparation du concours.

Notre positionnement de formateur à l'IUFM. Nous sommes dans la pré-professionnalisation c'est-à-dire dans une démarche de revisite des savoirs mathématiques pour en donner du sens dans un objectif d'enseignement.

LA PLACE DE LA MODÉLISATION

Face à la situation des *poignées de mains*, nous avons recueilli des résolutions très différentes les unes des autres (Annexe 2) mais les formateurs, que nous sommes, souhaitent institutionnaliser aussi un savoir : un savoir mathématique et/ou un savoir méthodologique.

Finalement cette situation est-elle une situation adaptée à nos objectifs de formation ? Est-ce une occasion pour l'étudiant de remobiliser des connaissances en appliquant un modèle déjà disponible, ou est-ce une occasion de mettre en œuvre une démarche créant un nouveau modèle qui sera ensuite éprouvé et qui s'avérera pertinent ?

Que souhaitons-nous institutionnaliser à travers cette situation ? Une démarche de construction de modèles ou des savoirs mathématiques ?

Différentes démarches

Regardons ce que font les étudiants PE1. Nous avons recensé deux démarches différentes, en excluant les rares d'entre eux qui reconnaissent d'emblée un problème de dénombrement.

La première démarche consiste à dénombrer les poignées de mains. Ce peut être en augmentant un à un le nombre d'individus dans le groupe : 1 poignée de mains pour 2 individus, (1+2) poignées de mains si une $3^{\text{ème}}$ personne entre dans le groupe, (1+2+3) pour une $4^{\text{ème}}$ personne, etc. Cette démarche aboutit, pour *n* personnes, à la réponse suivante : *1 + 2 + 3 + 4 +………+ (n-1).* Ce peut être en ordonnant les individus du groupe de *n* personnes : le 1^{er} échange (*n-1*) poignées de mains, (*n-2*) pour le $2^{\text{ème}}$, etc jusqu'à 1 pour l'avant-dernier et 0 pour le dernier. Cette démarche aboutit à la réponse suivante : *(n-1) + (n-2) + … + 3 + 2 + 1.*

La deuxième démarche consiste à dénombrer les gestes effectués par chaque individu du groupe de *n* personnes. Chaque individu va tendre le bras à *(n-1)* autres personnes, soit pour *n* personnes, on obtient *n x (n-1)* bras tendus. Comme une poignée de mains correspond à deux bras tendus, le résultat s'obtient en prenant la moitié du résultat précédent $\frac{n(n-1)}{2}$.

Nous avons ici la mise en œuvre de la construction de deux modèles différents.

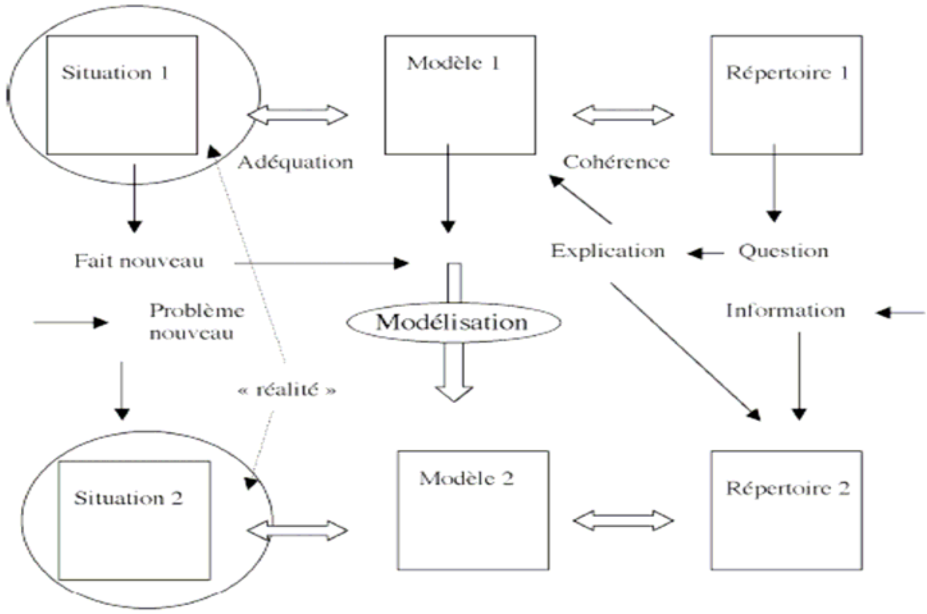
Par la combinatoire, il s'agit de trouver le nombre de combinaisons possibles de *deux* mains (une poignée) parmi *n* mains : $C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

On peut donc penser que chaque méthode de résolution est en elle-même l'aboutissement d'une modélisation de la situation ou l'application d'un modèle pour les étudiants « matheux ». En ce sens nous avons, par les procédures développées par les PE1 (Annexe 2), une illustration des propos tenus par Guy Brousseau dans la brochure de l'ADIREM concernant le thème de la modélisation[1].

[1] Guy Brousseau, (2003), *Quel type de savoirs mathématiques utilise-t-on dans la modélisation ?* dans la brochure éditée par le Comité Scientifique des IREM *La modélisation*, p.19.

Dynamique des modèles, modélisation (Guy Brousseau)

> **En élargissant l'étude des modèles aux situations en justifient l'usage, nous facilitons l'étude des processus qui en amènent l'apparition ou l'évolution.**
>
> **Un modèle est avancé par un actant pour répondre à une question ou à un problème, à l'aide de son répertoire de connaissances. Conformément à notre approche, la question et la réponse sont conditionnées par ce répertoire. Le meilleur modèle dans un répertoire peut ne pas l'être dans un autre ou même s'y avérer faux. Le fait pour un modèle d'être incorrect dans un répertoire et une situation donnée n'est pas contradictoire avec le fait qu'il soit « correct » dans une situation très voisine avec un répertoire différent.**
>
> **Nous avons ainsi le schéma de la modélisation suivant :**

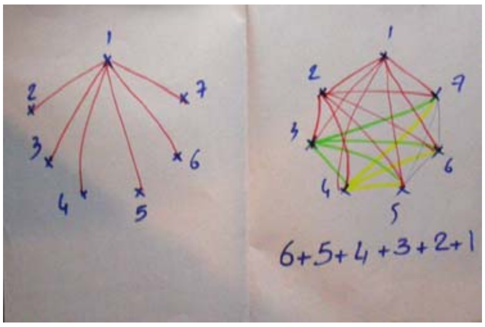


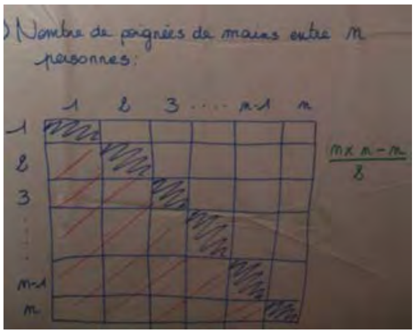
> **La résolution d'une situation S1 a appelé la construction d'un modèle M1 grâce à un répertoire R1. M1 est cohérent avec R1 et adéquat à S1. Survient alors une perturbation qui remet en cause le système S1, M1, R1 : l'agrégation d'un fait nouveau à S1 (passage de S1 à S'), l'adjonction d'une connaissance ou d'une question nouvelle (passage d'un répertoire R1 à un répertoire R'). Alors se repose l'examen de l'adéquation et de la consistance de M1. La confrontation aboutit parfois à la création d'un nouveau modèle M2 et parfois aussi à la création de R2, et parfois à une extension ou une réduction de S1 à S2. Nous appelons création aussi bien la modification que le remplacement.**
>
> **Ainsi la modélisation, en tant que fait " historique " est, pour un actant, le passage de la conception ou de l'usage d'un système S1, M1, R1 à un système S2, M2, R2, d'un candidat-modèle ou d'un modèle à un modèle différent.**

Ainsi pour une situation S_1, l'étudiant va élaborer une représentation R_1 qui sera considérée comme un « petit » modèle. Pour cette même situation, un autre étudiant élaborera une représentation R_2 qui sera aussi considérée comme un « petit » modèle, différent du précédent. Mais chacun de ces « petits » modèles se réfère à un modèle générique $\mathfrak{M}$.

Modélisation dans la situation des poignées de mains

Concernant la situation des *poignées de mains* si nous prenons la représentation sous la forme du tableau cartésien, la modélisation de la situation n'est pas du tout semblable à celle utilisant, par exemple, un graphe.





Le savoir mathématique construit n'est, de fait, pas de même nature dans chacune de ces modélisations même si cette situation se réfère à un modèle mathématique générateur.

Comme les affiches l'attestent, la spécificité de cette situation est qu'elle va générer globalement deux types de modélisations : celle qui amène à la solution de $\frac{n(n-1)}{2}$ en lien avec les productions n°1, 2, 4, 6, 7, 8 et 9 (Annexe 2), et celle qui amène à la solution *1 + 2 + 3 + 4 +………+ (n-1)* en lien avec les productions n°3, 5 et 10 (Annexe 2). Le lien d'une modélisation à l'autre n'est qu'une affaire d'astuce de calculs.

Institutionnalisation et transfert

Notre souci est donc de déterminer ce que nous souhaitons institutionnaliser : un savoir ou des savoirs mathématiques, une démarche d'investigation, différentes représentations ? Le débat au sein de l'atelier a montré que nous n'avions pas de réponse unique et collective à ces réponses.

D'autre part, l'analyse décrite ci-dessus, nous permet de comprendre pourquoi, contrairement à ce que nous pourrions penser, les PE1 n'effectuent pas de transfert immédiat pour résoudre les problèmes posés en Annexe 3.

Même s'ils ont pour objectif de réinvestir les savoirs institutionnalisés dans la situation des *poignées de mains,* et même s'ils se résolvent finalement tous par le calcul d'une formule proche de celle élaborée $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$, ces problèmes ne sont pas tous congruents et ne se réfèrent pas au même modèle mathématique.

Ainsi certains étudiants repèreront le même modèle pour ce qui est du *nombre de diagonales dans un polygone* ou *le nombre de droites passant par deux points*, comme étant le nombre de combinaisons possibles de deux points parmi *n* points, s'ils ont utilisé ce modèle pour résoudre la situation des *poignées de mains*. En revanche, le nombre de marches de l'escalier sera pour eux un nouveau problème, dont la conjecture amènera la résolution par la somme des *n* premiers nombres entiers.

De même, les étudiants ayant abouti à la solution arithmétique (*1 + 2 + 3 +……+ n*) n'appliqueront pas la formule pour résoudre les problèmes de l'Annexe 3.

Il est intéressant de constater que le recours à la connaissance mathématique construite dans la situation des *poignées de mains* est souvent proposée dans les sujets de mathématiques du CERPE alors qu'elle ne fait pas partie des savoirs enseignés au collège. Les auteurs pensent l'éprouver à partir d'une démarche de conjecture et la connaissance arithmétique de l'égalité suivante :

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ qui ne favorisera que les « matheux ».

D'AUTRES SITUATIONS…

Après l'étude de la situation des *poignées de mains,* le groupe a essayé de chercher d'autres situations de formation qui favoriseraient des conditions de modélisation mathématique.

Voici une liste non exhaustive proposée par les participants, soit de savoirs à construire, soit de situations existantes qui peuvent permettre à chacun d'entre nous d'aller explorer la pertinence du terme « modélisation » et de vérifier la transférabilité des savoirs construits dans d'autres problèmes posés.

- *Si les shadoks m'étaient comptés…*Mathilde Lahaye-Hitier, plot n°11, ed APMEP, 2005

- *Le pays de quatre,* O. Bassis, in Concepts clés et situations problèmes, Hachette éducation, 2003

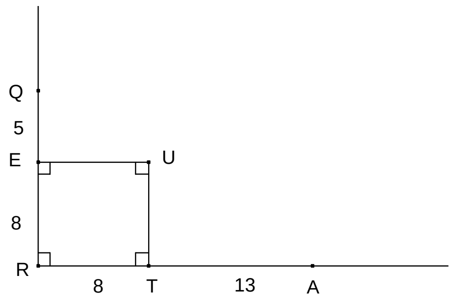
Deux situations autour de la numération de position

- *Concertum, la division en formation initiale*, H.Péault, in *Concertum, dix ans de formation des professeurs d'école en mathématiques,* Tome 2, Ed Arpeme,

- *La course à 20,* G. Brousseau in La théorie des situations didactiques, La pensée sauvage, Grenoble, 1998 ;

- Problème de l'alignement des points issus d'un sujet du CERPE de Bordeaux 94 ;

Les points Q, U et A sont-ils alignés ?



- Recherche du nombre de diviseurs d'un nombre ;

- Mise en équations et système d'équations avec sa résolution ;

- Finir les cercles à partir seulement d'arcs de cercle.

CONCLUSION

En guise de conclusion, nous voulions apporter notre témoignage sur l'impact du vécu de cette première séance avec nos PE1.

Nous pensons que la situation des *poignées de mains* reste, pour un très grand nombre des étudiants, une situation de référence de formation. Mais pour quelles raisons ? Pour la démarche de formation proposée ? Pour la surprise occasionnée chez ces étudiants ayant une autre représentation de l'enseignement des mathématiques ? Pour les savoirs abordés dans cette situation ? Pour le premier contact avec leur formateur de mathématiques (poids important dans l'admissibilité au CERPE) ?

En tout cas cette situation les marque tellement, qu'ils nous demandent les années suivantes si nous avons fait les *poignées de mains* avec nos PE1 de l'année.

Annexe 1 : les 4 affiches produites par les groupes

affiche 1

I – **Situation**
- énoncé simple, facilement compréhensible ;
- mise en situation réelle : expérimentation facile ;
- validation possible sur des petits nombres.

II – **Variables didactiques**
- taille des groupes ;
- expérimentation avant résolution ? oui /non
- outils à disposition : calculatrice – tableur.

III – **Techniques**
- dénombrement par expérience ;
- essais de formules de combinatoire (pour les matheux) ;
- utilisation de tableaux (genre Pythagore) ;
- représentations dessinées.

IV – **Objectifs**
- faire vivre une situation de recherche sans procédure experte .

V – **Modélisation**
- situation modélisable ;
- différence entre modélisation et représentation.

***affiche 2* – analyse a priori**

I – L**e savoir savant** :
- dénombrement (suite, combinaison, formule directe) ;
- représentation de données.

II **– Procédures**
- de la plus personnelle aux expertes (graphiques, dessins, manipulations…)

III – **Objectifs visés**
- créer une dynamique de groupe (1ère séance) ;
- présenter la modalité de formation par homologie (ici, la résolution de problème) ;
- mettre en évidence que les notions mathématiques sont des outils de résolution de problèmes concrets ;
- acquérir des compétences mathématiques et professionnelles.

affiche 3 – intentions du formateur

I – présenter l'année de préparation tout en bousculant leurs représentations sur l'enseignement des mathématiques.

II – **Objectifs**
- mettre en place le contrat didactique ;
- présenter une « nouvelle » notion mathématique.

III – **Analyse a priori**
- différentes procédures possibles (mimer, dessiner, calculer…) ;
- difficultés prévisibles (recherche individuelle difficile, travail de groupe, difficultés à modéliser…).

IV – P**erspectives**
- retour et analyse sur la situation vécue ;
- transposition dans une classe ;
- présentation du concours (volet didactique et volet mathématique).

affiche 4 – ce qu'on peut en « tirer » (PE1 / PE2 / FC) → institutionnalisation

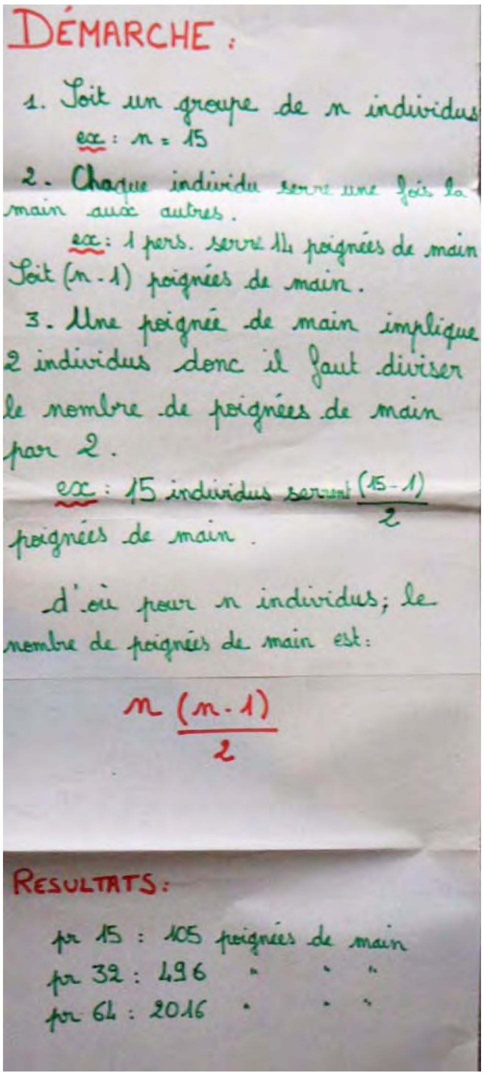
I – M**athématiques** (en PE1)
- intérêt de l'inconnue ;
- modèle mathématique ;
- contre-exemple pour invalider une formule.

II – **Didactique**

- « casser » les conceptions initiales sur les mathématiques :

→ place de la résolution de problèmes dans les programmes ;
- diversité des procédures (menant à la réussite ou non) (en PE2 ou FC) :
  → classer les procédures selon différents niveaux de procédures ;
  → hiérarchisation par rapport à la mise en œuvre ;
- rôle des schémas (en PE2 ou FC) ;
- situation de référence pour les problèmes de dénombrement ;
- changement de cadre (en PE2 ou FC)
  → physique / arithmétique
- intérêt du travail individuel suivi d'un travail de groupes (en PE2 ou FC) ;
- situation de réinvestissement (en PE1)
  → nombre de matchs disputés entre n équipes (formule championnat) ;
  → nombre de cordes à partir du nombre de points sur un cercle ;
  → nombre de diagonales d'un polygone à n côtés ;

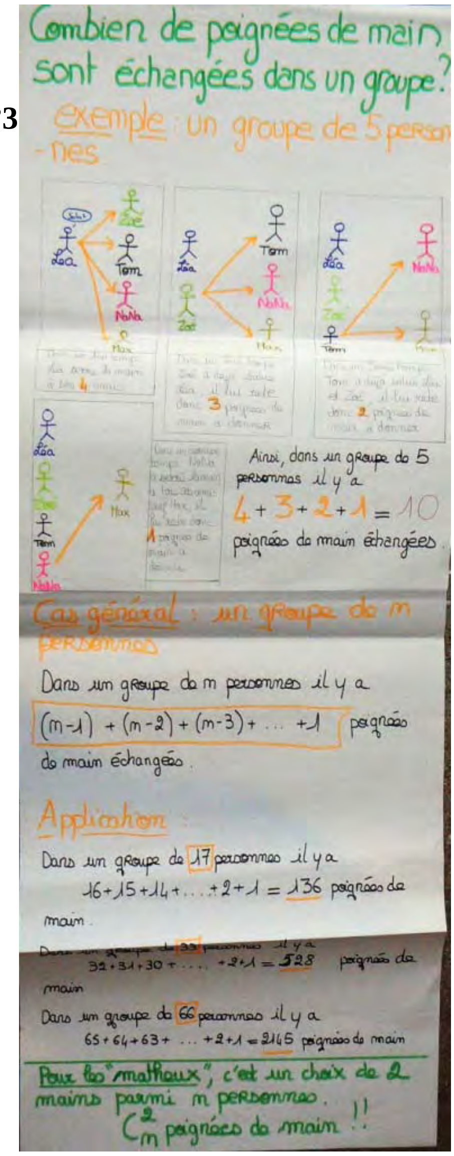
Annexe 2
Choix de quelques affiches produites par des PE1



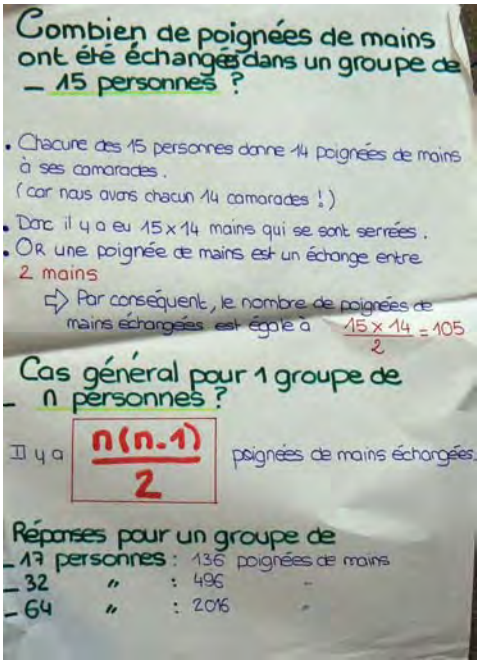
N°1

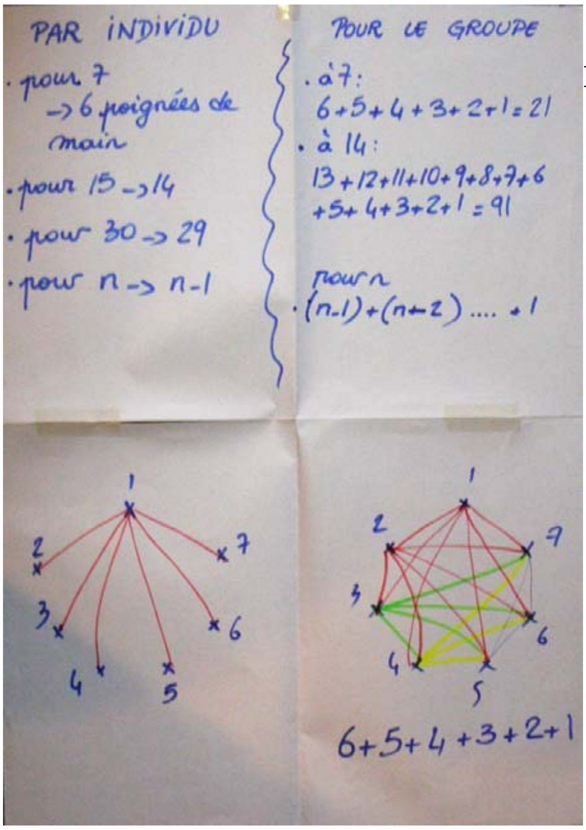
N°2

N°3

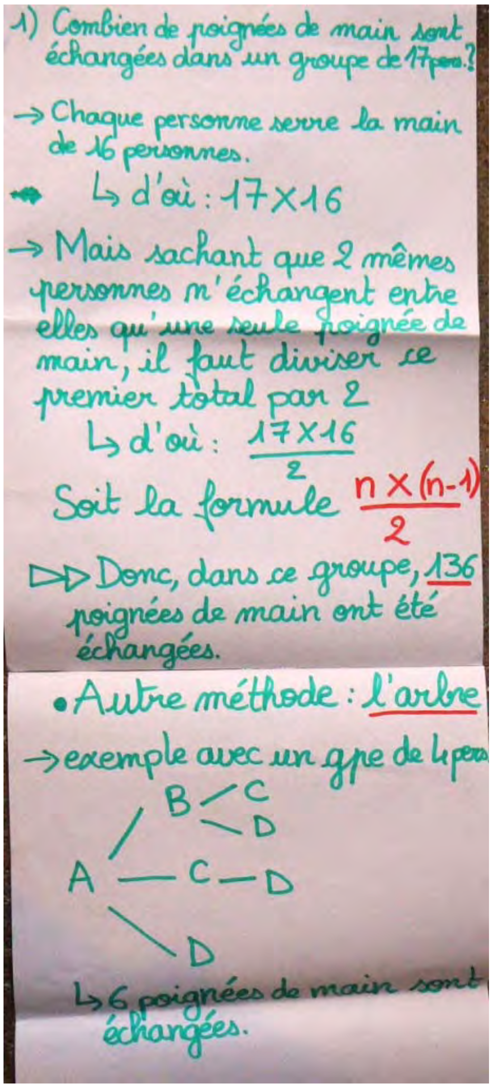


N°4

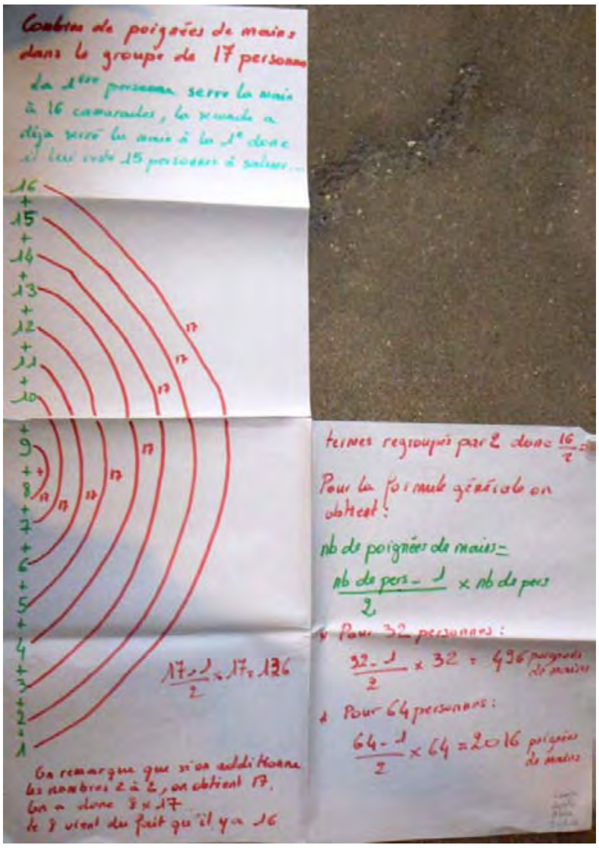



PAR INDIVIDU
. pour 7
→ 6 poignées de main
. pour 15 → 14
. pour 30 → 29
. pour n → n-1
POUR LE GROUPE
. à 7 :
6+5+4+3+2+1 = 21
. à 14 :
13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 91
pour n
. (n-1)+(n-2) .... +1
6+5+4+3+2+1

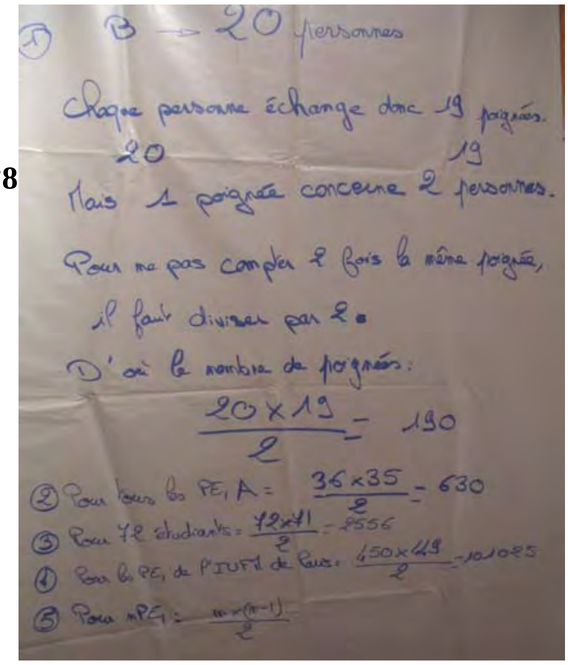
N°5


1) Combien de poignées de main sont échangées dans un groupe de 17 pers.?
→ Chaque personne serre la main de 16 personnes.
↳ d'où : 17×16
→ Mais sachant que 2 mêmes personnes n'échangent entre elles qu'une seule poignée de main, il faut diviser ce premier total par 2
↳ d'où : 17×16/2
Soit la formule n×(n-1)/2
▷▷ Donc, dans ce groupe, 136 poignées de main ont été échangées.
• Autre méthode : l'arbre
→ exemple avec un gpe de 4 pers
↳ 6 poignées de main sont échangées.

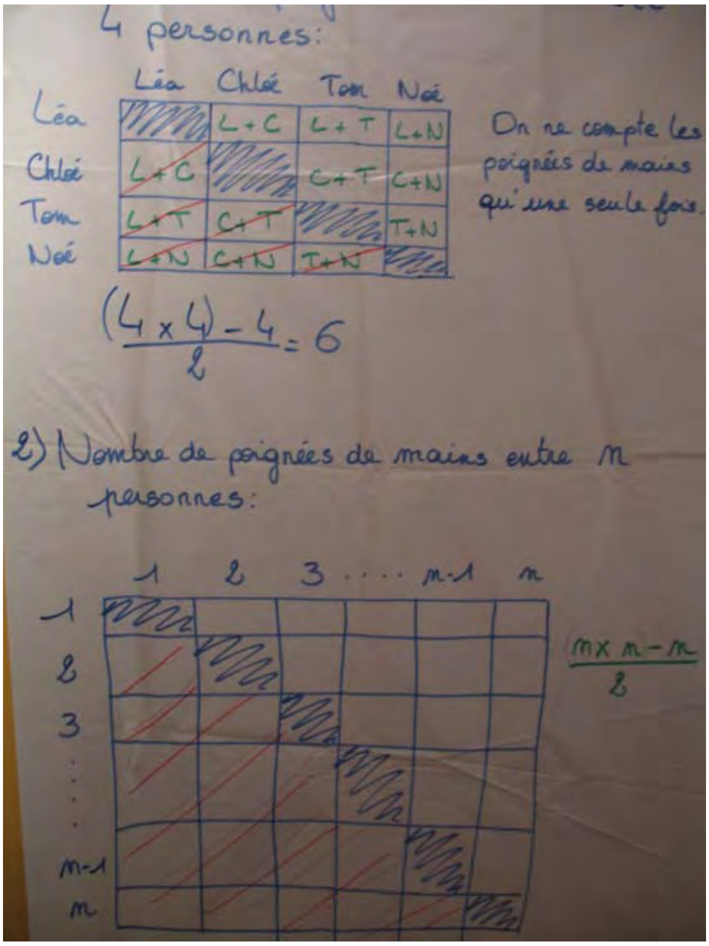
N°6


Combien de poignées de mains dans le groupe de 17 personnes
La 1ère personne serre la main à 16 camarades, la seconde a déjà serré la main à la 1e donc il lui reste 15 personnes à saluer...
17-1/2 × 17 = 136
termes regroupés par 2 donc 16/2
Pour la formule générale on obtient :
nb de poignées de mains = nb de pers − 1 / 2 × nb de pers
Pour 32 personnes : 32-1/2 × 32 = 496 poignées de mains
Pour 64 personnes : 64-1/2 × 64 = 2016 poignées de mains

N°7

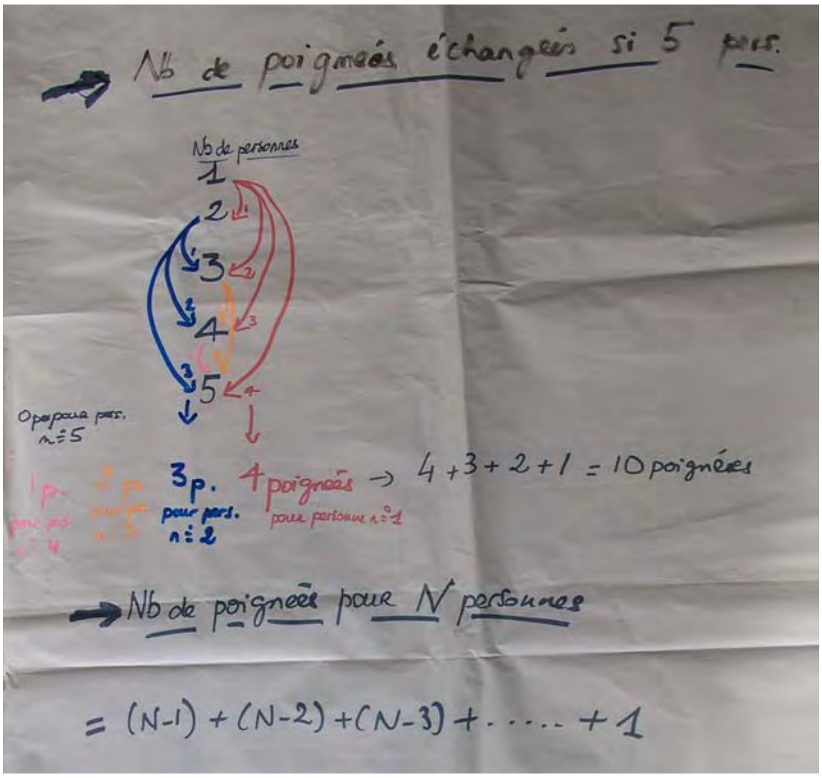

① B → 20 personnes
Chaque personne échange donc 19 poignées.
Mais 1 poignée concerne 2 personnes.
Pour ne pas compter 2 fois la même poignée, il faut diviser par 2.
D'où le nombre de poignées :
20×19/2 = 190
② Pour tous les PE, A = 36×35/2 = 630
③ Pour 72 étudiants = 72×71/2 = 2556
④ Pour les PE de l'IUFM de Paris : 450×449/2 = 101025
⑤ Pour n PE = n×(n−1)/2

N°8


4 personnes:
Léa Chloé Tom Noé
L+C L+T L+N
L+C C+T C+N
L+T C+T T+N
L+N C+N T+N
On ne compte les poignées de mains qu'une seule fois.
(4 x 4) - 4 / 2 = 6
2) Nombre de poignées de mains entre n personnes:
1 2 3 .... n-1 n
n x n - n / 2

N°9

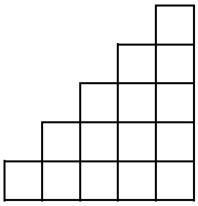
N°10


Nb de poignées échangées si 5 pers.
Nb de personnes
1 2 3 4 5
3 p. pour pers. n°2
4 poignées pour personne n°1
4 + 3 + 2 + 1 = 10 poignées
Nb de poignées pour N personnes
= (N-1) + (N-2) + (N-3) + ... + 1

Annexe 3
Exercices donnés aux PE1 à la suite de la situation des *poignées de mains*.
Réinvestissement ou situations nouvelles?

1) L'escalier

Cet escalier est formé de cubes et il a 5 marches.
Combien de cubes faudra-t-il pour construire un escalier de 10 marches ? Un escalier de 27 marches ? Un escalier de ***p*** marches ?



2) Les diagonales

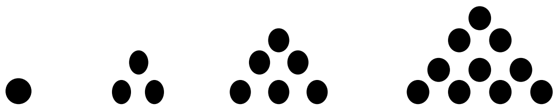
Quel est le nombre de diagonales d'un hexagone ? d'un décagone ? d'un polygone à ***n*** côtés ?

3)Points et lignes

Quel est le nombre de segments qui relient **N** points, sachant que 3 de ces points ne sont jamais alignés ?

4)Les nombres triangulaires

Un nombre est appelé « triangulaire » s'il peut représenter une quantité disposée sous la forme d'un triangle équilatéral. Par exemple :



1 **3** **6** **10** sont les premiers nombres triangulaires.
Donnez les six nombres triangulaires qui suivent le nombre triangulaire **10**. Quel est le 55ème nombre triangulaire ?

5) Le renard et les raisins

Un renard aimait manger les grains de raisins. Le premier jour il en mange 6, puis le 2ème jour il en mange 6 de plus que ce qu'il avait mangé le premier jour.
Ainsi de suite, tous les jours il mangeait 6 grains de plus que chaque jour précédent. Combien de jours lui faudra-t-il pour avoir mangé au total 1800 grains ?

Annexe 4

Modèle

selon le dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences
Dominique Lecourt, PUF, 1999

Le terme « modèle » présente une grande variété d'usages dans les sciences, de la logique aux sciences de la nature et sciences de l'homme. De plus, à travers la diversité des usages et des domaines, le sens oscille entre concret et abstrait, figuration et formalisme, image et équation, échantillon et étalon, réalisation matérielle et norme abstraite. Paradoxalement, cette équivocité essentielle est le trait permanent à travers tout le large spectre des différents usages.

1) Le sens originaire est celui de « maquette », le latin *modulus* étant un terme d'architecture désignant la mesure arbitraire servant à établir des rapports de proportion entre les parties d'un ouvrage. Par généralisation, « maquette » s'applique à toute matérialisation, en dimensions réduites ou grandeur nature, d'un dispositif architectural (édifice), mécanique (navire, avion) ou d'une autre nature (appareils électriques ou autres) dont ne sont reproduites, schématiquement, que les formes et propriétés reconnues essentielles au détriment des détails tenus pour accessoires. Une maquette est plus commodément soumise aux calculs, mesures et tests qui permettent d'améliorer la construction effective de l'objet ou du prototype correspondant. On trouve là, déjà, des caractéristiques générales des modèles, qui sont donc des réalisations ou des figurations utiles à l'avancement des connaissances et des technologies. Tout matériel qu'il puisse être, un modèle n'est pas un objet réel, mais un objet artificiel, qui appartient au registre de (invention. C'est un intermédiaire entre une situation qui nous paraît énigmatique et les questions que nous posons pour tâcher de réduire (énigme et comprendre la situation. Les modèles assument donc une fonction heuristique dans le processus de connaissance théorique ou technique. Dans cette fonction, René Thom observe que le modèle a un champ d'application qui dépasse largement la science et englobe des pratiques d'ajustement de nos moyens à nos buts et à nos désirs.

2) Un usage assez proche du précédent est celui qui a cours dans les amphithéâtres de physique et de biologie, où des processus naturels sont imités dans des conditions qui facilitent l'observation et l'étude. Ainsi les planétariums reproduisent la cinématique du système solaire en négligeant partiellement les proportions géométriques et en changeant sa dynamique : pour des raisons pratiques, on exagère les dimensions du soleil et des autres planètes par rapport à leurs distances et on remplace la gravitation comme moteur du système par un mécanisme artificiel comparable à celui d'une horloge. Autres exemples : la machine d'Atwood imitant la chute libre des graves sur une échelle de temps ralentie grâce à une forte réduction de la constante de gravitation ou un modèle de la circulation du sang où la force motrice du coeur est remplacée par une pompe.

3) La prédominance des modèles issus de la mécanique a pu inciter à associer à tout modèle une construction dans (espace respectant la loi d'inertie, les lois du choc, les principes de conservation, etc. Mais l'expérience physique peut être structurée selon d'autres lois que mécaniques. « Modèle » reçoit alors un tout autre sens, celui de schéma théorique, non matérialisé en général, qui n'est pas censé reproduire fidèlement un phénomène. Mais au contraire le simplifie suffisamment pour pouvoir l'analyser, l'expliquer (partiellement au moins) et en prédire (dans certaines marges) la répétition. Le modèle est un simple instrument d'intelligibilité sans prétention ontologique : il est aussitôt remplacé si l'on trouve un modèle meilleur. Ainsi les modèles d'un éther élastique, milieu de propagation des vibrations optiques, qui ont été rendus caduques par la théorie électromagnétique de la lumière, le modèle de Bohr pour expliquer le comportement de l'atome, qui ne marche bien que pour l'atome d'hydrogène, etc. Plus généralement, toute expérience de pensée constitue un modèle en ce sens. Et même toute théorie constituée peut servir de modèle à la constitution d'une théorie nouvelle.

4) C'est en ce sens qu'il a été fait systématiquement usage de la notion de modèle au XIX$^{\text{è}}$ s., du moins en physique. Comme le note S. Bachelard cet usage conscient n'est pas contingent. La mécanique, bien établie, a servi de réservoir de modèles, mécaniques ou théoriques, aux nouvelles sciences : électrostatique, électrodynamique, thermodynamique, électromagnétisme, etc. A côté de sa fonction heuristique, le modèle assume une fonction de garantie, de justification et de norme d'intelligibilité des faits et idées nouveaux. En même temps apparaît très clairement ce qui est au fondement de l'activité de modélisation : l'analogie. Par « analogie physique, écrit Maxwell, j'entends cette ressemblance partielle entre les lois d'une science et les lois d'une autre science qui fait que l'une des deux peut servir à illustrer l'autre ». Qu'une théorie puisse en illustrer une autre, en vertu d'identités formelles (les mêmes formes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles) suggère une notion de modèle assez large pour englober physique et mathématiques à la fois. D'ailleurs, la reconnaissance systématique de la polysémie d'une théorie advient d'abord en mathématiques, comme conséquence du développement de l'axiomatique, et elle n'a lieu ensuite en physique que grâce, précisément, à l'utilisation des concepts algébriques de groupe et d'invariance par tel ou tel groupe.

5) En mathématiques modèle s'emploie en deux sens nettement distincts et cependant corrélés, comme nous pouvons le pressentir déjà avec le texte de Maxwell et comme nous allons le montrer précisément. Le premier sens est caractérisé aujourd'hui de « logique

», bien qu'il soit apparu de façon informelle en mathématiques, et d'abord en géométrie. On a construit en effet, à la fin du XIX$^{\text{è°}}$ s., des modèles euclidiens des géométries non euclidiennes (Beltrami en 1868, Klein en 1871-1873 et Poincaré en 1891), c'est-à-dire des espaces euclidiens vérifiant les axiomes des géométries lobatchevskienne et riemannienne respectivement. Ces modèles ont assumé la double fonction justificative et heuristique : ils ont servi à fournir un contenu intuitif aux nouvelles géométries et une preuve (relative) de leur cohérence tout en permettant des applications mathématiques nouvelles. Poincaré (1854-1912) notamment atteste de la fécondité de la géométrie de Lobatchevski pour l'intégration des équations linéaires. Ainsi, un modèle est une représentation concrète dans une théorie familière d'énoncés et de relations, qui sont d'abord perçus comme purement formels. Plus généralement, un modèle d'un ou plusieurs énoncés est un ensemble d'éléments quelconques vérifiant ou, comme on dit encore, satisfaisant ces énoncés et illustrant de ce fait la structure déterminée par eux. C'est l'attribution d'un sens déterminé à des entités a priori sans signification tel que les énoncés formels soient vérifiés. Si l'on rappelle qu' « attribuer un sens » c'est « interpréter », on voit qu'un modèle est une interprétation de ces énoncés dans laquelle ceux-ci sont vrais. La question du contenu mathématiquement viable et non vide d'un formalisme (entité, équation théorie) cesse de se poser dès qu'on a un modèle de celui-ci. On a cessé de discuter du bien-fondé des nombres imaginaires et de se demander s'ils étaient bien des nombres au même titre que les nombres entiers ou les nombres réels une fois trouvée pour ces entités (au début du XIXè s.) une représentation par un couple de points du plan euclidien.

David Hilbert (1862-1943) généralisa l'usage de cette notion sémantique de modèle. En 1899, il systématise dans les, fondements de la géométrie la technique de constructions de modèles pour prouver la compatibilité ou l'indépendance mutuelle de certains axiomes. Ce faisant, il opère un décrochement important dans la compréhension de la notion de modèle. En effet, les modèles qu'il fabrique sont non pas des visualisations dans l'espace euclidien de théories plus abstraites ou moins familières mais des modes formels; construits à partir de résultats algébriques ou arithmétiques ou assez abstraits. La structure de géométrie non archimédienne, par exemple, est réalisée (vérifiée) dans un modèle inimaginable sans tout un savoir sur les formes algébriques et sur les sommes de carrés.

L'algèbre et l'arithmétique permettent ici de valider une construction géométrique alors que traditionnellement c'était plutôt l'inverse, la géométrie euclidienne: ayant toujours servi de cadre de représentation intuitive. Il en résulte. L'idée moderne qu'une géométrie est un modèle d'un certain langage formel, plutôt que la formalisation de propriétés idéalisées à partir de l'observation de l'espace sensible. C'était bien, du reste, l'idée mise en œuvre par Félix Klein (1849-1925), dès 1872, dans la formulation du problème qui commande « le programme d'Erlangen » et aboutit à la classification des différentes géométries en fonction des groupes de transformations : « Étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations, quelles sont « les figures » (en un sens analogique) de la multiplicité, qui demeurent invariantes par les transformations du groupe ? » Une géométrie est donc un ensemble de sous-ensembles d'éléments (de « figures ») demeurant invariants par certaines transformations.

C'est là la racine de la définition logique du terme modèle fournie par la théorie des modèles, qui est l'étude systématique des relations réciproques entre ensembles E d'énoncés et ensembles M de modèles de ces énoncés. On appelle langage formel L du calcul des prédicats du premier ordre la donnée de trois collections disjointes de symboles : symboles de relations, de fonctions et de constantes. Une réalisation R de L est constituée par la donnée d'un ensemble non vide d'individus et d'une fonction d'interprétation qui associe un sens déterminé respectivement aux symboles de constantes, de relations et de fonctions. Un modèle M d'un énoncé E de L est une réalisation R (on dit aussi une interprétation) où E est vrai. Une théorie mathématique spécifique (la théorie des groupes, la théorie des corps, la théorie des espaces vectoriels, etc.) est un langage formel interprété, et elle a généralement plusieurs modèles non forcément isomorphes, ainsi qu'on s'y est maintenant tout à fait habitué par familiarité avec les méthodes de l'analyse classique d'un côté, de l'analyse non standard de l'autre.

Le concept de modèle mathématique est souvent aussi utilisé en un deuxième sens, qui est le plus courant aujourd'hui et à donner lieu aux termes modernes de « modéliser » et de « modélisation ». Il désigne alors le processus inverse de celui que nous venons de décrire. Au lieu associer un sens déterminé et une illustration concrète à symboles et énoncés formels, il consiste à associer à un phénomène empirique un schéma symbolique, figurant de manière partielle et simplifiée les propriétés reconnues principales du phénomène et facilitant aussi bien l'expérimentation que la construction d'une théorie le concernant. A son tour,la théorie construite à partir du modèle peut être appréciée comme un «modèle théorique » , ainsi que le souligne M. Bunge. Modéliser c'est donc trouver les expressions mathématiques les équations qui « simulent », c'est-à-dire représentent schématiquement et analogiquement un processus physique, biologique, psychologique, économique, social, etc. Un grand nombre d'observations peuvent être synthétisées par un nombre relativement petit de paramètres : un modèle est forcément réducteur. La modélisation est, depuis toujours, au coeur de la physique mathématique : une série de Fourier avec un nombre fini de termes non nuls, par exemple, est une modélisation des fonctions périodiques, qui sont des modélisations des phénomènes de vibration, de diffusion, etc. Elle s'est étendue aux autres sciences après la Seconde Guerre mondiale, avec le développement de la recherche opérationnelle et de la théorie des jeux, appliquées pour représenter et faciliter l'organisation d'opérations militaires, d'échanges économiques, d'activités administratives, de flux de circulation dans une ville, etc. Les modèles sont des instruments, imparfaits et réducteurs, mais efficaces d'analyse de la réalité.

Dans certains cas, ils suppléent l'observation impossible : le retour au big-bang, par exemple, ne peut emprunter la voie expérimentale, mais seulement celle de la modélisation.

La modélisation, dont certains pensent qu'elle constitue une véritable révolution scientifique, a été rendue possible par le rapprochement physique et la collaboration des mathématiciens avec les physiciens, les ingénieurs, les biologistes, les psychologues, les sociologues, etc. La modélisation au confluent de plusieurs sciences et nécessite une approche pluridisciplinaire des problèmes. Aujourd'hui elle complétée par la simulation numérique et l'utilisation systématique d'images de synthèse. L'explosion informatique ainsi que les nouveaux paradigmes scientifiques apportés par la théorie des systèmes, la théorie des catastrophes, la théorie des fractals, la théorie du chaos, etc., ont favorisé la prolifération des modèles pour l'analyse de systèmes d'organisation complexe, physiques (systèmes dynamiques) ou humains (mécanismes de développement économique et culturel).

Il est certain que la pluralité des modèles - la polysémie- d'une théorie est une chose et la pluralité des énoncés non équivalents pour modéliser un processus empirique une autre. Il n'empêche que les deux sens du concept de modèle ne sont que les deux faces complémentaires d'une même activité : interpréter. C'est pourquoi les glissements qui sont fréquents mais rarement et pour ainsi dire jamais explicitement assumés, d'un sens à l'autre sont parfaitement légitimes. D'autant plus qu'il est fréquent que des modèles sémantiques d'un formalisme soient des modèles théoriques d'un processus empirique. Interpréter est inéluctable, qu'il s'agisse d'interpréter un formalisme, ou inversement d'interpréter mathématiquement un ensemble de données. D'une part, parce qu'un langage qui n'aurait pas de modèle n'a aucun intérêt, d'autre part et réciproquement, parce que l'expression n'est pas le miroir de l'expérience : « Nous ne pouvons prononcer une seule phrase qui traduise un pur fait d'expérience... toute traduction de l'expérience par des mots nous oblige à aller au-delà de l'expérience», comme le soulignait judicieusement Boltzmann. Aussi existe-t-il plusieurs manières défendables de concevoir ou d'expliquer le monde, plusieurs modèles du monde. On parle alors de « sous-détermination empirique » des théories, phénomène réciproque de leur polysémie. L'une et l'autre caractéristique impliquent une philosophie non réaliste de la science. Comme y insiste B. van Fraassen, notre discours, en particulier lorsqu'il traite de causalité et de nécessité, porte sur nos modèles du monde, plutôt que directement sur le monde.

En résumé, sous quelque aspect qu'on le prenne, un modèle fait toujours fonction de médiateur entre un champ théorique dont il est une interprétation et un champ empirique dont il est une formalisation. Sa double face abstraite-concrète le rend apte à remplir le double rôle d'illustration et de support de preuve d'une part, de paradigme et de support d'analogies d'autre part. Un modèle est à la fois la concrétisation opérationnelle d'analogies constatées ou supposées entre des domaines distincts et le terreau expérimental sur lequel peuvent naître de nouvelles analogies. L'efficacité cognitive, heuristique, prédictive et décisionnelle, ou comme on dit d'un terme générique la « pertinence » d'un modèle, ne peut être évaluée indépendamment des objectifs qui lui sont assignés, des stratégies de recherche, de décision et de planification dont il est l'instrument et qui dépendent elles-mêmes des lignes de force du champ socio-politique où elles sont définies.

- BACHELARD S. « Quelques aspects historiques des notions de modèle et de justification des modèles », Élaboration et justification des modèles, éd. P. Delattre & M. Thellier, Paris, Maloine, 1979, p. 3-19.

- BRISSAUD M., FORSÉ M. & ZIGHED A. éd., La Modélisation, confluent des sciences, Paris, Éd. du CNRS, 1990.

- BUNGE M., « Les Concepts de modèle», L'âge de la science, n' 3, juil.-sept. 1968, p. 165-180.

- DELATTRE P. & THELLIER M. éd., «Modélisation et scientificité », Élaboration et justification des modèles, Paris, Maloine, 1979, p. 21-29. FREUDENTHAL H., The concept and the role of the models in mathmatics and natural sciences, Dordrecht, Reidel, 1961.

- KLEIN F., Le programme d Erlangen texte all. dans les Mathematische Annalen, 43, 1893, p. 63-100 (trac. fr., réimpr., Paris, Gauthier Villars, 1974). - POINCARÉ H., La Science et l'hypothèse (1902), rééd. Paris, Flammarion, 1968, chap. III et IV. - SINACEUR H., Corps et modèles, Paris, Vrin, 1991, 4` partie. –

- TARSKI A., « Contributions to the theory of models » , Collected papers, III, Birkhàuser, 1986. - TARSKi A., MOSTOWSKi A. & RoQINSON R.M., Undecidable theories, Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1953 (« A general method in proofs of undecidability », chap. I). - Thom R., Modèles mathématiques de la morphogenèse, Pais, UGE, 1974. - VAN FRAASSLN B., Laws and symmetrie, Oxford Univ. Press, 1989 (trad. fr. C. Chevalley, Paris, Vrin, 1995). - WALLISER B., Systèmes et modèles. Introduction critique à fanalvse des systèmes; Paris, Le Seuil, 1977.

- Coll. : Article « Modèle » de l'Encyclopédia Universalis. --- « La Sémantique du terme modèle », La Sémantique dans les sciences, colloque de l'Académie internationale de philosophie des sciences, Paris. Beauchesne, 1978, p. 158-172.

Hourya SINACOEUR

Eléments de bibliographie

Conseil scientifique de l'ADIREM, *Modélisation*, IREM Paris 7, 2003.

APMEP, Bulletins verts n° 440 (mai juin 2002), n° 441 (sept-octobre 2002), n° 456 (janv-février 2005) et n° 458 (mai-juin 2005).

Péault H., *La division en formation initiale* in CONCERTUM : Dix ans de formation en mathématiques des professeurs des écoles, ARPEME, 2003.
Voir spécifiquement la situation didactique appelée *Concertum*.

Lecourt D., *Dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences, PUF, 1999.*

Modelling and Application in Mathematics Education, the 14th ICMI Study, Springer 2007.

MATHÉMATIQUES ET ART CONTEMPORAIN : UNE INTIMITÉ FORMATRICE

Marie-Lise PELTIER
Nathalie SAYAC

I- INTRODUCTION

Le point de vue développé dans cet atelier a été de faire vivre les liens entre les mathématiques et l'art contemporain et de réfléchir à la conception de séances éclairant ces liens. L'enjeu de cet atelier était de mieux comprendre, à travers la démarche conceptuelle de certains artistes contemporains, comment leurs œuvres pouvaient contribuer à enrichir les représentations des élèves et des professeurs sur certaines notions mathématiques, tant géométriques que numériques.
L'atelier a été organisé en deux périodes : la première, davantage construite autour des propriétés numériques, la seconde a concerné davantage la géométrie.
La perspective de travailler ce lien lors d'actions de formation continue en direction des PE a été évoquée à partir de l'analyse de documents issus de manuels scolaires.

II- MATHÉMATIQUES ET ART CONTEMPORAIN : QUELLES PERSPECTIVES ?

Pendant que la discussion se faisait autour des liens envisageables entre les mathématiques et l'Art Contemporain, un diaporama d'œuvres choisies (Malévitch, Kandinsky, Vassarely, Klee, Lhose, Morellet, Merz, Nemours, Noland, Stella, Max Bill, Toroni, Buren, Opalka, Venet, Sizonenko…), conçu pour donner à voir des perspectives de rapprochement entre ces deux domaines, a tourné en boucle sur l'écran de la salle.
Différents points de vue ont été exprimés. Certains conçoivent ces liens comme « naturels » dans la mesure où certains concepts sont partagés et identifiés comme communs aux deux domaines (les formes géométriques et notamment le carré qui a une place privilégiée dans l'art contemporain, les notions de parallélisme et d'orthogonalité avec Mondrian, etc.). Certains ont exprimé leur doute concernant des liens pouvant exister entre ces deux domaines et se sont interrogés sur la pertinence d'un tel questionnement.
Nous avons exprimé notre point de vue personnel qui se démarque, quelque peu, des approches habituelles sur cette question. En effet, il ne s'agit pas pour nous de détourner des œuvres d'art à des fins pédagogiques, mais plutôt, quand cela s'avère possible, de les décoder d'un point de vue mathématique en veillant à préserver leur dimension artistique première. Il nous semble en effet important de ne pas couper l'œuvre du milieu artistique qui la fait vivre et des intentions de l'artiste qui l'a conçue car bien souvent, l'analyse mathématique peut contribuer à renforcer ou expliquer la démarche de l'artiste. Nous rejoignons ici un des volets de l'enseignement des arts visuels : « *une approche culturelle articulée aux démarches de réalisations et centrée sur la rencontre avec des oeuvres et des artistes*[1] ».
Afin de permettre aux participants de cet atelier de se repérer dans les différents courants artistiques constituant l'art contemporain, nous avons évoqué quelques caractéristiques de ces

[1] Programme 2002 d'arts visuels pour le cycle 2

courants, tout en précisant bien que nous ne nous placions pas en tant qu'experts dans ce domaine, mais en simples néophytes[2].
Ainsi, ont été évoqués : *les Fauves* et leur recherche de l'expression par la couleur pure, le courant *Dada* où l'absurdité, l'irrationnel, l'aléatoire sont affirmés comme l'expression de la liberté totale, *L'abstraction* où la peinture n'emprunte plus ses formes au monde extérieur, mais se développe sur les bases de ce que l'artiste nomme « la nécessité intérieure » et le mouvement *De Stilj* qui a pour but d'élaborer un nouvel accomplissement de la forme, une perfection formelle au-delà de la simple représentation de la nature. Mais également le *Bahaus* qui met l'art au service du corps social, le *Surréalisme* porté par des artistes qui ne croyaient pas à la réalité visible et cherchaient par conséquent une réalité globale, le *Nouveau Réalisme* et sa réflexion autour des objets produits par la société de consommation et leur utilisation dans la création artistique, et finalement *l'art minimal* où la doctrine « le moins est le mieux » impose des formes simples, des structures élémentaires, et une certaine rigueur géométrique ainsi que *l'art conceptuel* qui privilégie l'idée créatrice au détriment de la réalisation effective de l'œuvre.

PREMIÈRE PARTIE : AUTOUR DE PROPRIÉTÉS NUMÉRIQUES

La première partie de cet atelier s'est organisée autour de l'analyse de quatre œuvres liées à des notions mathématiques spécifiques :
- **Piet Mondrian** (1872-1944) **:** autour du nombre d'or
- **Théo Van Doesburg** (1883-1931) : autour d'une progression numérique
- **Charles Bézie** (né en 1934) **:** autour de la suite de Fibonacci
- **François Morellet** (né en 1926) **:** autour du nombre π

Un temps a été laissé aux participants pour analyser les œuvres distribuées du simple point de vue mathématique et non d'un point de vue pédagogique. Il s'agissait pour nous de leur permettre d'appréhender la façon dont les artistes avaient utilisé la notion mathématique indiquée.

Nous donnons ici quelques indices permettant de décoder les œuvres choisies.

● **Piet Mondrian :** « Composition dans le losange avec deux lignes » 1931, *Huile sur toile, 80x80cm, Amsterdam*
Dans cette oeuvre très épurée, comme dans de nombreuses oeuvres de cet artiste, la composition s'appuie essentiellement sur l'utilisation du rapport d'or Φ, retrouvant ici une tradition présente dans l'art depuis des millénaires. L'œuvre est construite à partir d'un carré ABCD « posé sur sa pointe » de côté c et de centre I (le losange évoqué dans le titre de l'œuvre). Les lignes noires sont portées par deux côtés consécutifs d'un carré posé horizontalement. La longueur du côté de ce second carré est égale à $\Phi\times c/2$. La position de ce carré dans le carré ABCD est réalisée en superposant les « coupures d'or » de ses côtés sur les diagonales du carré ABCD de telle manière que leur intersection coïncide avec le point I.

● **Théo Van Doesburg :** « Composition arithmétique », 1930, *huile sur toile, Winterthour (Suisse)*
Théo van Doesburgh participe en 1917 avec Piet Mondrian à la fondation d'un groupe qui prendra le nom de la revue qu'il publie De Stijl (Le style) dans laquelle les artistes exposent leur nouvelle théorie : le néoplasticisme. L'œuvre « Composition arithmétique », composée de quatre

[2] Voir annexe 1

carrés noirs « posés sur leur pointe », de plus en plus petits en partant du bas à droite et allant en haut à gauche, suggère l'infini par une forme de mise en abîme utilisant des progressions géométriques. Chaque carré se trouve dans une zone en forme de « L retourné » de couleur beige rosée, ces zones sont délimitées par des horizontales et des verticales qui sont à la moitié du côté du carré, à la moitié de la moitié, etc. Les diagonales horizontales des carrés noirs sont placées au 2/3 ; 1/3 ; 1/6 ; 1/12 du côté vertical (il en est de même des diagonales verticales des carrés noirs)...

● **Charles Bézie :** « N° 1408 », 2005, *acrylique sur toile, 180 X 106 cm*
Cet artiste a toujours eu un rapport intuitif aux nombres qui lui permettent de travailler des « proportions humaines et parfaites ». Il peint des suites de nombres comme d'autres peuvent peindre des paysages, tout en ayant un souci d'harmonie. C'est certainement ce qui l'a amené à s'intéresser à la suite de Fibonacci et à produire toute une série d'œuvres autour de ce thème[3].
Le tableau proposé intègre doublement la suite de Fibonacci. En effet, la toile est divisée par une succession de traits ordonnés suivant ce principe, tant au niveau vertical (espacement des traits) qu'horizontal (longueur des traits).

● **François Morellet :** « Π ironicon » 2000 ; 1 = 10° et 1 = 2°
F Morellet est un artiste qui a toujours été attiré par les mathématiques et ses oeuvres témoignent indiscutablement de cet attrait. Il s'est particulièrement intéressé à la notion d'aléatoire qui la conduit peu à peu à utiliser les décimales de π pour mieux l'illustrer. Le tableau proposé fait partie d'une série d'œuvres construites en fonction d'un principe intégrant ces décimales. Il s'agit d'articuler des segments toujours de même longueur par une extrémité, suivant des mesures d'angles déterminées arbitrairement (par exemple 1→ 10°) mais en fonction des décimales de π. Ainsi, les deux premiers segments définiront un angle de **3**0°, les suivants **1**0°, puis **4**0°, à nouveau **1**0°, puis **5**0°, etc.

Ce qu'il y a d'étonnant avec des œuvres comme celles de F. Morellet, c'est qu'elles donnent à voir, au sens propre, des notions mathématiques qui existent à un niveau conceptuel, sans les trahir. Voir π, en visualisant à la fois son aspect infini et son aspect non périodique est enrichissant pour le mathématicien qui ne l'a jamais appréhendé de cette façon.

Ce qui nous intéresse également dans cette approche de l'art contemporain, c'est la façon dont des objets mathématiques ont traversé les temps et les périodes artistiques en évoluant, passant parfois du statut d'outil pour l'artiste au statut d'objet d'étude (notamment le nombre d'or qui a eu un rôle très important dans la création artistique à la Renaissance et qui est aujourd'hui utilisé par certains artistes comme support de création)

Pour clore cette première partie d'atelier, nous avons proposé aux participants de réaliser des « π ironicon » et explorer ainsi, guidé par un artiste contemporain, une notion mathématique qu'ils côtoient habituellement dans un autre cadre et à d'autres fins.

[3] Exposées ce printemps à la galerie Lahumière à Paris (www.lahumière.com)

DEUXIÈME PARTIE : AUTOUR DE PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES

La deuxième partie de l'atelier s'est davantage organisée autour de notions géométriques que l'on trouve également dans l'art contemporain. Suivant la même démarche que lors de la première partie de l'atelier, nous avons proposé aux participants de travailler sur des œuvres qui présentaient davantage de notions géométriques à analyser.

● **Laszlo Moholy-Nagy** (1885-1947) : autour de figures géométriques…
● **Joseph Albers** (1888-1976) : autour du carré…
● **Max Bill** (né en 1908) : autour des demi-cercles…
● **Victor Vasarely** (1908-1997) : autour des losanges…

Voici quelques éléments susceptibles de donner un éclairage mathématique à ces œuvres.

● **Laszlo Moholy-Nagy** : « Composition A II », 1924
L'oeuvre de Moholy-Nagy est composée de plusieurs figures planes imbriquées les unes dans les autres par un jeu de transparence et de couleurs. Dans un premier temps, on identifie les formes planes à des parallélogrammes et des cercles et l'on fait l'hypothèse qu'elles sont dupliquées par homothétie, de rapport inférieur à 1. Une analyse plus fine des éléments composant cette œuvre permet d'invalider ce premier décodage car les supposés parallélogrammes ne résistent pas au regard du mathématicien (longueurs différentes), de même que l'homothétie qui ne trouve pas de centre correspondant. On conçoit à travers ce leurre artistique la frontière existant entre la liberté de l'artiste et la rigueur du mathématicien, mais il permet également d'appréhender, dans un contexte différent, la notion d'approximation.

● **Joseph Albers** : « Hommage au carré VI », 1967. *49,8/49,8 Berlin*
Cette œuvre fait partie d'une série éponyme qui décline des compositions de carrés de couleurs différentes, imbriqués les uns dans les autres par des procédés semblables. Les trois carrés composant l'œuvre d'Albers sont homothétiques avec un centre situé sur une des médiatrices du carré composant le fond mais pas à l'intersection des médiatrices. Les dimensions des carrés sont dans un rapport arithmétique (4, 6, 10) qui n'est peut-être pas sans lien avec le principe de Fibonacci appliqué à des nombres choisis par l'artiste. On retrouve ici la liberté que peut prendre un artiste avec les notions qu'il emprunte au domaine des mathématiques. Le choix des couleurs utilisées pour les trois carrés (qui est une variante de la série) n'est pas analysable d'un point de vue mathématique, ce qui permet de percevoir, cette fois, les limites du mathématicien qui s'aventure dans le monde l'art.

● **Max Bill** : « Chromographie magique », (1944/46) *huile sur toile,72x108cm, Winterthur, Suisse*
Dans ces oeuvres Max Bill met en jeu des moyens plastiques pour réaliser une « idée-image », à laquelle il donne une structure. Il s'agit d'un art concret, rigoureux, dépassant dans l'esthétique la science mathématique. L'œuvre « chromographie magique » nous emmène dans des arabesques imprévues, se divisant ou se réunissant, créant ainsi un mouvement « tournant ». Elle est composée d'arcs de cercles tangents (demi-cercles, quart de cercles) dont les extrémités sont les sommets de rectangles dans lesquels ils sont inscrits et qui se recollent en changeant de rayon. La couleur des arcs de cercles présents dans un rectangle est la couleur de fond du rectangle suivant (en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre), de même le diamètre d'un des

demi-cercles d'un fond donné (généralement le plus grand mais pas toujours) est repris pour un des demi-cercles du fond suivant, ce qui contribue à donner cette impression de mouvement.

● **Victor Vasarely** : « Rhombus » 1968 *(27x27cm)*
L'œuvre présentée est composée de trois séries de losanges ayant une diagonale commune (dans chacune des séries, se trouve un carré). L'organisation géométrique de ces trois séries dans le tableau donne une impression de mouvement, de profondeur, d'infini... Il faut noter l'importance de la couleur « Forme et couleur ne font qu'un. La couleur n'est qualité qu'une fois délimitée. Deux formes-couleurs, nécessairement contrastées, constituent l'unité plastique, donc l'unité de création » (manifeste jaune 1955).
La rigueur mathématique de ses créations, la précision de leur structure amène Vasarely à prôner l'édition de certaines de ses oeuvres reproduites mécaniquement.
Victor Vasarely est considéré comme le père de l'art optique et de l'art cinétique.

Dans un deuxième temps, nous avons souhaité indiquer des pistes de travail en formation autour du lien mathématique & art contemporain. Pour ce faire, nous avons retenu deux activités de manuels scolaires s'appuyant sur des œuvres d'artistes contemporains pour construire un apprentissage spécifique. Il s'agit de deux activités proposées aux élèves : l'une, sous une rubrique intitulée « math-magazine » (CapMaths CP, Hatier, p. 138), l'autre en activité de découverte (EuroMaths CE2, Hatier, p. 76, 77 + livre du maître p.100), s'inscrivant dans une progression autour de la notion de cercle. La première s'inspire d'une œuvre de R-P Lhose intitulée « *six rangées de couleurs verticales systématiques* », créée en 1950, la deuxième s'articule autour d'une oeuvre de S Delaunay intitulée « *Rythme et couleur* », créée en 1939.

Capmaths CP,
Cette activité est proposée sans indication pour le maître et semble proposée en activité de « récréation » pour les élèves. Il s'agit de faire comprendre aux élèves le procédé qui a permis à l'artiste de créer son œuvre (« six rangées de couleurs verticales » de Richard Paul Lhose), en précisant les règles qui le déterminent puis de proposer à l'élève de composer un tableau personnel en respectant ces règles.
Si l'on souhaite aller plus loin dans l'exploitation de cette œuvre, on peut consulter l'article de R De Graeve et H Ranville « *les couleurs du carré magique* » publié dans Grand N « spécial maternelle » p 79 à 93. Dans cet article, les auteurs proposent une progression en six séances adaptées aux jeunes enfants pour leur permettre de découvrir et mettre en œuvre des règles logiques sous-tendues par ce tableau.

EuroMaths CE2

La séance proposée débute par une analyse de l’œuvre permettant aux élèves d’appréhender la notion de cercle. Le livre du maître propose à titre informatif, pour le professeur, une petite analyse artistique du tableau ainsi que quelques indications concernant l’artiste. Des propositions de gestion et d’exploitation sont données afin de permettre aux élèves d’aborder la notion de cercle autour de cette œuvre. S’ensuit une série d’exercices permettant de travailler plus explicitement la notion de cercle. L’analyse en classe de cette œuvre, en amont de travaux plus explicitement mathématiques, permet de faire vivre de manière pertinente, le lien mathématique & art contemporain et correspond à notre façon de l’appréhender en classe, à l’école primaire.

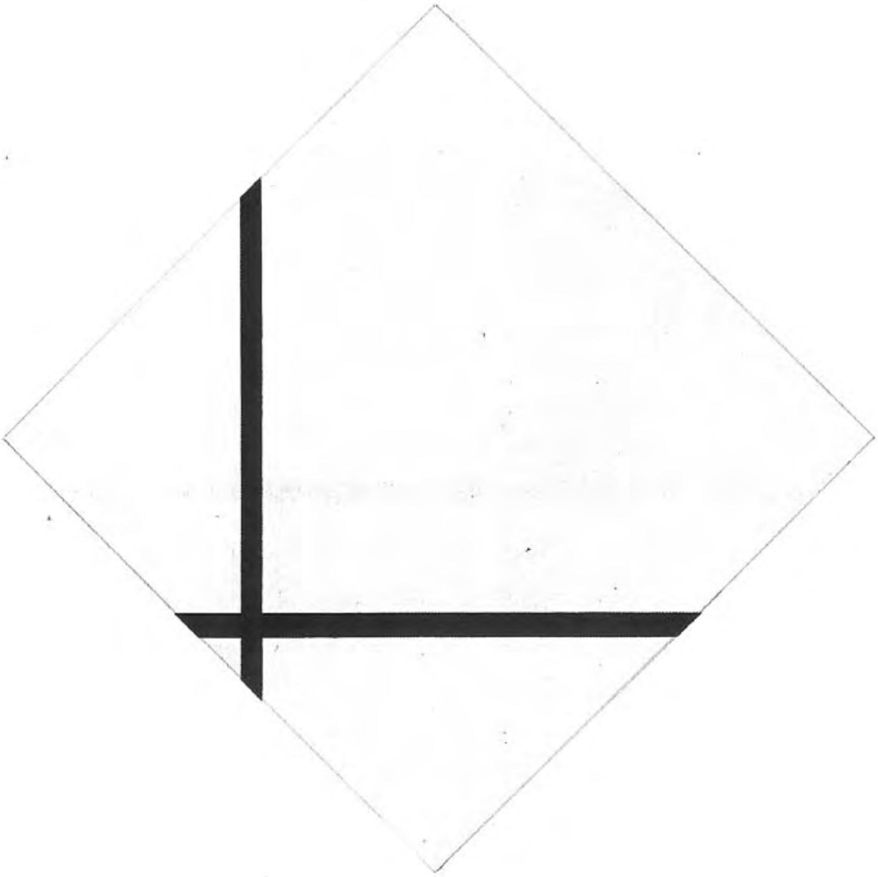
CONCLUSION

Cet atelier a été pour nous l’occasion de travailler conjointement deux domaines pour lesquels nous avons un attrait irréductible : les mathématiques et l’art contemporain. Nous tenons néanmoins à spécifier de nouveau que ce travail n’est en aucun cas un prétexte pour lier ces domaines. Il serait absurde en formation d’établir des liens artificiels entre des domaines qui n’auraient comme enjeu que de satisfaire les formateurs que nous sommes.
Nous espérons avoir permis aux participants de cet atelier d’enrichir leurs points de vue sur l’art contemporain en lien avec les mathématiques, même si nous n’avons fait qu’entrevoir les possibilités de faire vivre ce couplage.

PETITE BIBLIOGRAPHIE

NEMOURS Aurélie, « Rythme, Nombre, Couleur », Centre Pompidou (2004)
MORELLET, Galerie nationale du Jeu de Paume, (2000)
« MATHS & ARTS : rigueur artistique et/ou flou artistique ? », N. Morin et G Bellocq, SCÉREN, CRDP Poitou- Charente (2002)
« Histoire de la peinture, de la Renaissance à nos jours », A-C Krausse, GRUND (1995)
“François Morellet”, Serge Lemoine, Paris, Flammarion (1996)
“François Morellet : le désir et la peur de la géométrie” Gilles Plazy, Le Quotidien de Paris, 8/12/1977

ÉDITIONS DU CENTRE POMPIDOU
« Klee, En rythme », Sophie Curtil
« Herbin, Vendredi 1 », André Belleguie
« Robert Delaunay, La Tour Eiffel », Sophie Curtil, Milos Cvach

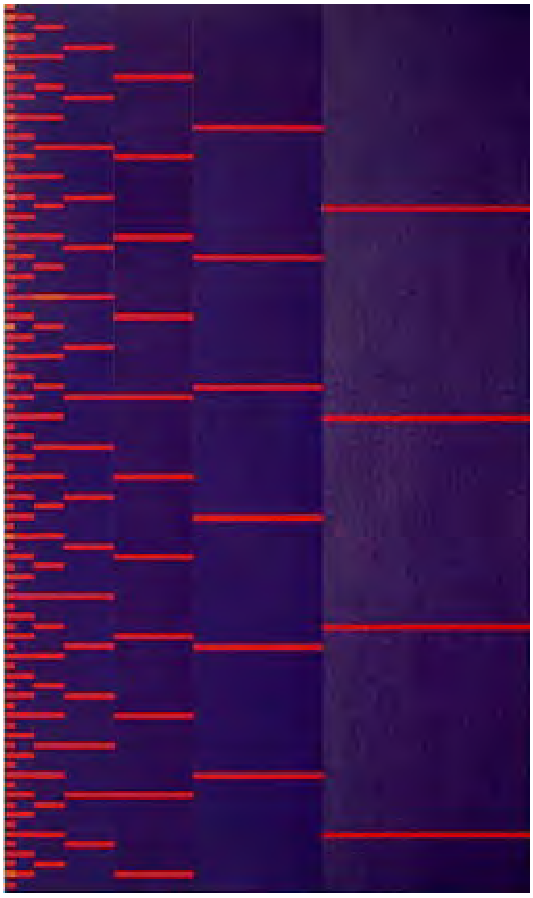


Piet Mondrian
« Composition dans le losange avec deux lignes » 1931

Retour au texte

Théo Van Doesburg
Composition arithmétique 1930

Retour au texte

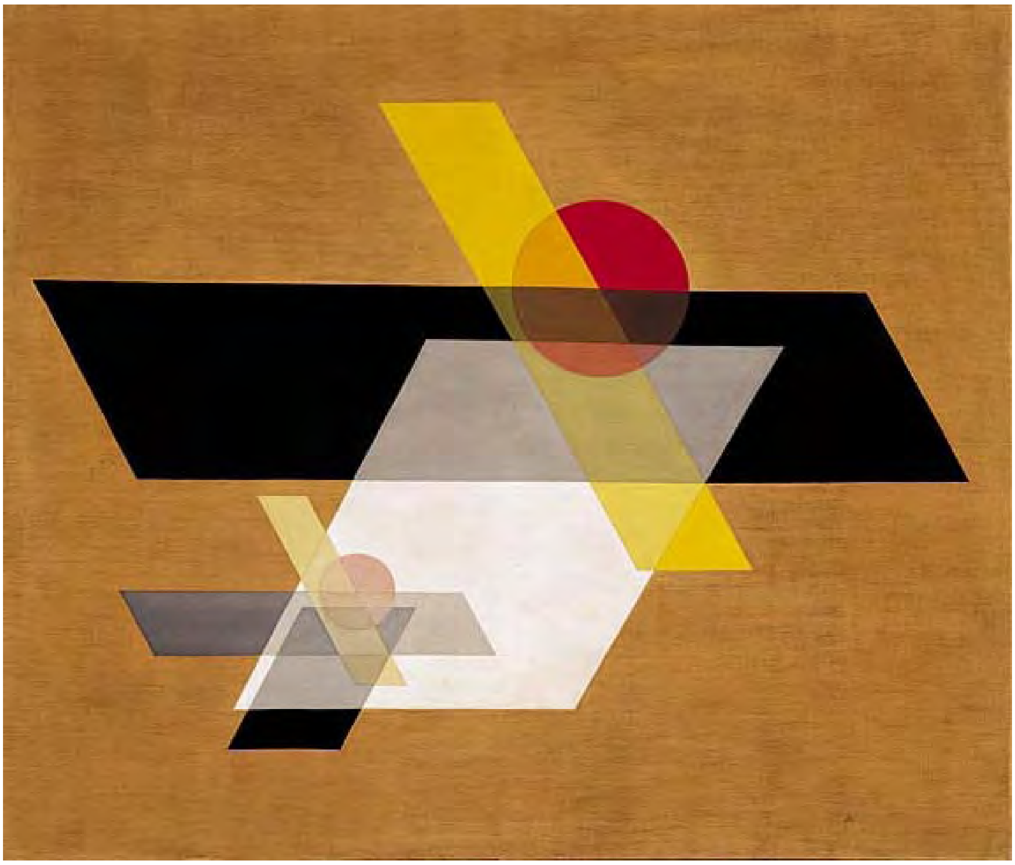


Charles Bézie : « N° 1408 », 2005*, acrylique sur toile, 180 X 106 cm*

Retour au texte

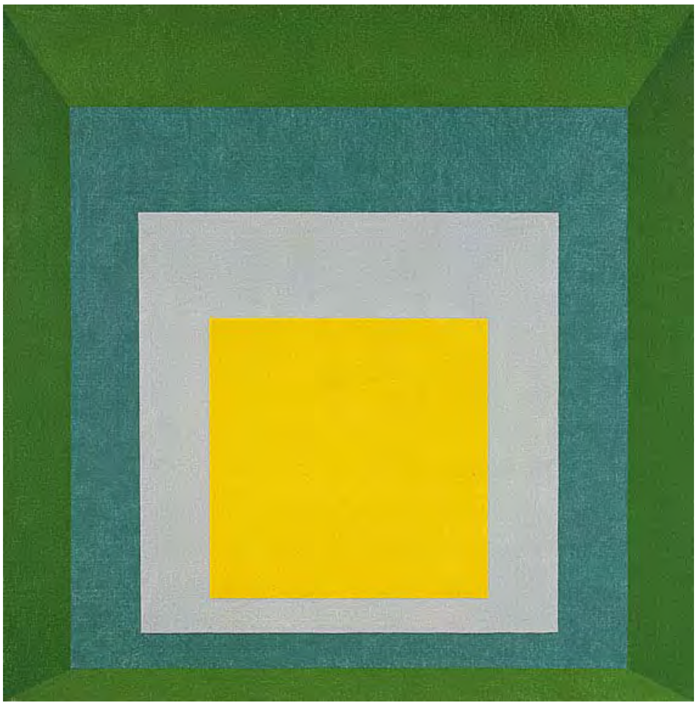
François Morellet : « Π ironicon » 2000

Retour au texte



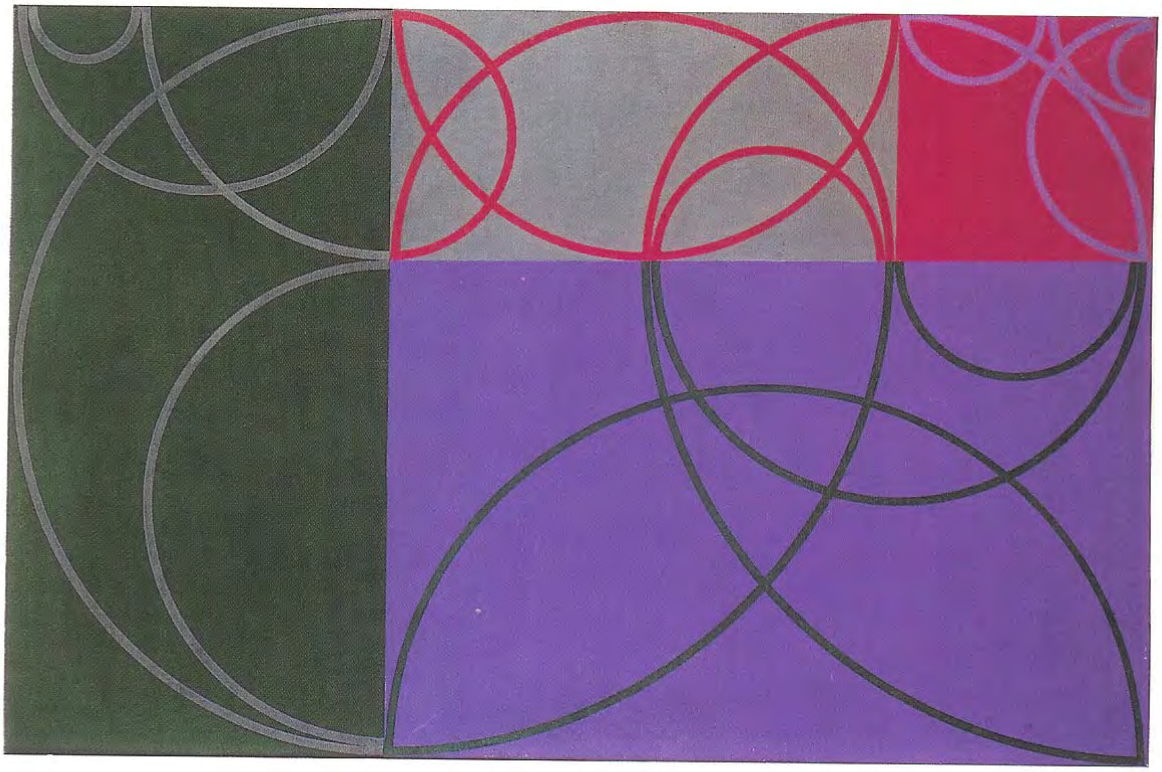
Laszlo Moholy-Nagy : « Composition A II », 1924

Retour au texte



Joseph Albers : « Hommage au carré VI », 1967. *49,8/49,8 Berlin*

Retour au texte



Max Bill
« Chromographie magique »

Retour au texte

Victor Vasarely
Rhombus 1930

Retour au texte

5 Math-magazine

Les couleurs au carré

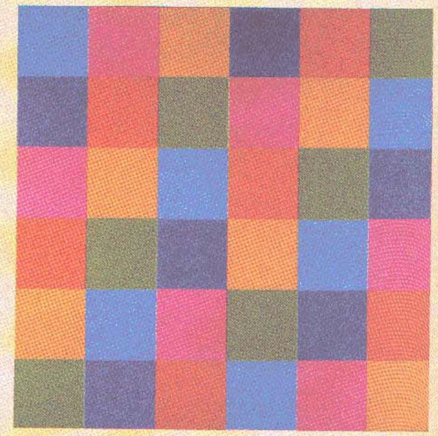
Le peintre Richard Paul Lohse a peint ce tableau en utilisant 6 couleurs différentes.
Voici les règles qu'il a suivies :

1. Dans chaque ligne, chaque couleur n'apparaît qu'une fois.

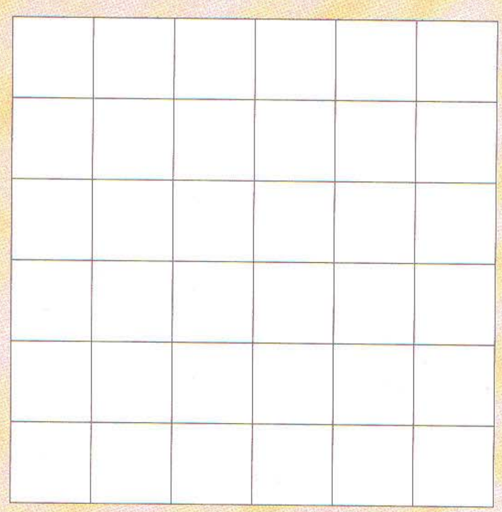
2. Dans chaque colonne, chaque couleur n'apparaît qu'une fois.

3. Deux cases qui se touchent par un côté ne sont pas de la même couleur.

4. Deux cases qui se touchent par un sommet ne sont pas de la même couleur.

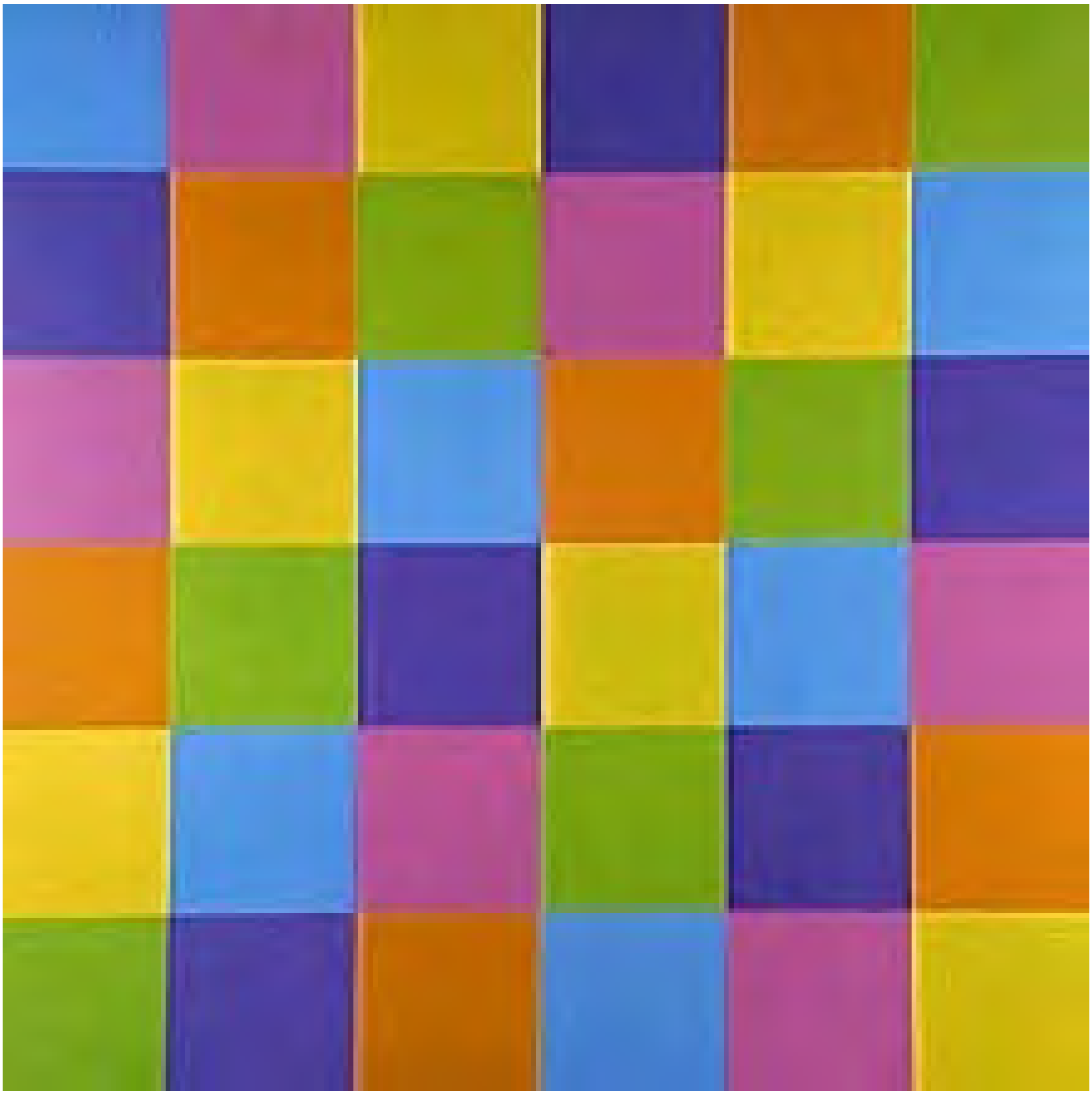


Richard Paul Lohse « Six rangées de couleurs verticales systématiques », 1950-1972
Acrylique sur toile 1,50 x 1,50 m
Musée de Grenoble



Toi aussi, compose un tableau dans un quadrillage en respectant certaines règles du peintre Richard Paul Lohse

Retour au texte



Richard Paul Lhose
« Six rangées de couleurs verticales systématiques »

Retour au texte

38 Cercles

Date : ....

◆ **Activités préparatoires** • Apprendre à manipuler le compas avec précision. • Tracer des cercles en respectant diverses contraintes.

Application

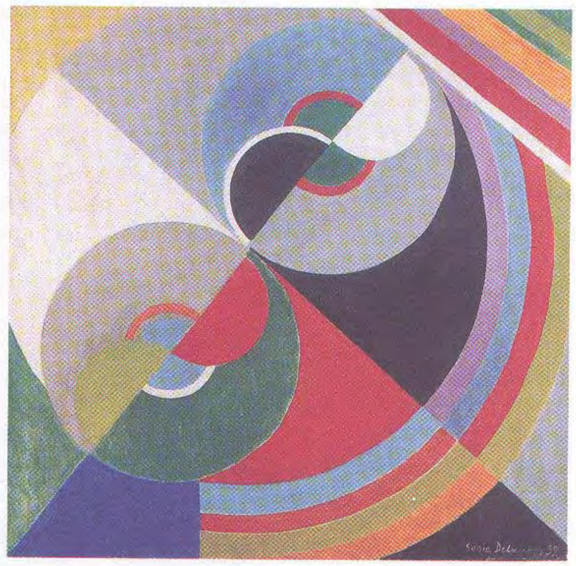
1. Observe ce tableau de Sonia Delaunay. Quelles formes l'artiste a-t-elle employées ?

....

....

....

2. Essaie de reproduire sur une feuille blanche une partie du tableau.



Sonia Delaunay (1885-1979)
Rythme et couleur – 1939

Exercices

1 Théo dit que les points M, N, P, S et T sont sur un même cercle de centre L.

A-t-il raison ? Comment peux-tu le vérifier ?

....

....

Alice dit que ce sont les points A, B, C et U qui sont tous à la même distance de L.

A-t-elle raison ? Comment peux-tu le vérifier ?

....

....

◆ **Objectifs** • Envisager le cercle comme ensemble de points à la même distance du centre. • Affiner les compétences langagières et techniques liées au compas.

◆ **Mise en route** • Jeu du recto verso multiplicatif (cartes avec une écriture multiplicative au recto et une écriture usuelle du nombre au verso. Multiplication par 2, 3, 4 et 5.).

Retour au texte

2 Trace un demi-cercle de diamètre [IJ].

Place un point M sur le demi-cercle.
Trace les segments [MI] et [MJ].

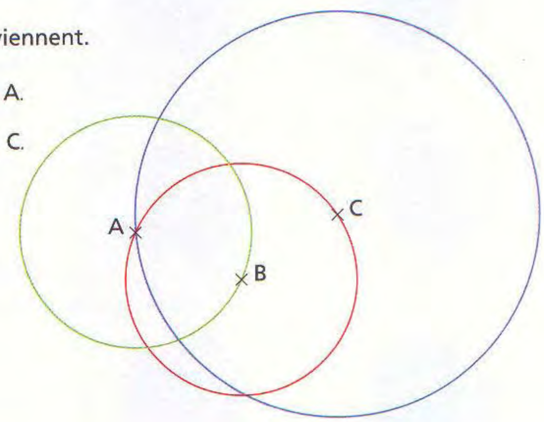
3 Trace le cercle de centre A qui passe par B.

Quel est son rayon ? ....

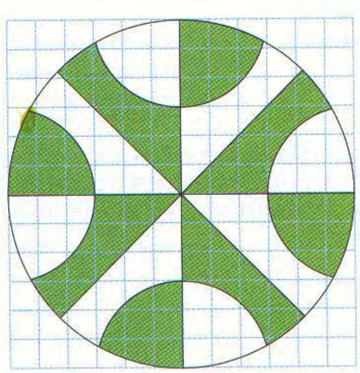
Reporte, sur ce cercle, six fois le rayon à partir du point B, avec ton compas.
Joins les 6 points obtenus.

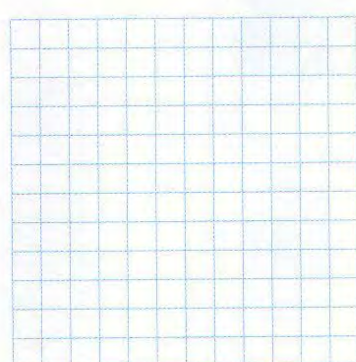
4 Coche les réponses des élèves qui conviennent.

- ☐ *Le cercle bleu de centre C passe par A.*
- ☐ *Le cercle vert de centre A passe par C.*
- ☐ *Le cercle vert de centre A et le cercle rouge de centre B ont le même rayon.*
- ☐ *Le diamètre du cercle bleu de centre C mesure 7 cm.*
- ☐ *Le cercle de centre 2 cm a pour rayon A.*



5 Observe cette figure. Repère les diamètres et les rayons du grand cercle. Repère ensuite les rayons des petits cercles incomplets. Reproduis cette figure sur le quadrillage.





Retour au texte

LES COURANTS ARTISTIQUES DU XX^{ème} SIÈCLE

IMPRESSIONNISME	FAUVES CUBISME	DADA ABSTRACTION DE STILJ	BAUHAUS	SURRÉALISME	ART BRUT	ACTION PAINTING ABSTRACTION LYRIQUE NOUVEAU RÉALISME POP ART	SUPPORT/ SURFACE	FIGURRATION NARRATIVE ART PAUVRE ART MINIMAL BODY ART	FIGURATION LIBRE LAND ART
1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
	Van Gogh Matisse Derain Picasso Braque	Duchamp Tzara Delaunay Mondrian Malévitch	Kandinsky	A Breton Magritte Picabia Duchamp De Chirico	Dubuffet	Pollock Klein Tinguely César Arman Lichtenstein Warhol	Viallat Hantaï	Adami Arroyo Fromanger Merz Penone Sol Lewit Serra Flaving	Combas Boisrond K Haring Christo De Mario

FAUVES : recherche de l'expression par la couleur pure.
DADA : l'absurdité, l'irrationnel, l'aléatoire sont affirmés comme l'expression de la liberté totale (⊂ ready made = ramène l'idée de considération esthétique à un choix mental et non plus à la capacité ou à l'intelligence de la main)
ABSTRACTION : la peinture n'emprunte plus ses formes au monde extérieur, mais se développe sur les bases de ce que l'artiste nomme « la nécessité intérieure » (Kandinsky)
DE STILJ : (1917) le but est d'élaborer un nouvel accomplissement de la forme, une perfection formelle au-delà de la simple représentation de la nature.
BAUHAUS : met l'art au service du corps social (à travers l'industrialisation notamment).
ACTION PAINTING : (1951 USA) attitude artistique qui privilégie l'acte physique de peindre.
NOUVEAU RÉALISME : réflexion autour des objets produits par la société de consommation et leur utilisation dans la création artistique.
SUPPORT/SURFACE : recherche d'une peinture sans contenu « attentive à sa seule nécessité intérieure » avec des moyens traditionnels : couleur et toile, « support » et « surface ».
ART MINIMAL : (1965 USA) le moins est le mieux. Impose les formes simples, des structures élémentaires, une rigueur géométrique.
ART CONCEPTUEL : l'idée créatrice > réalisation (en France BMTP (Buren) + FLUXUS (en Allemagne Beuys)
POP ART : l'objet rentre en force dans le débat artistique.
FIGURATION NARRATIVE : réalise un travail sur l'image en vue de transmettre un message social ou politique.
FIGURATION LIBRE : la peinture comme « amusement », accumulation sur la toile d'un grand nombre d'informations picturales.

CHRONOLOGIE DES PINCIPAUX MOUVEMENTS ARTISTIQUES DU XIXe

RÉALISME : 1845- 1860	Opposition au romantisme et au néo-classissisme	Courbet
NATURALISME : 1840- 1865	Détournement du réalisme social vers un art moins polémique et d'observation de la nature	Millet Corot Rousseau
IMPRESSIONNISME : 1863- 1884	Théorie des contrastes chromatiques Divisionnisme de la touche Emploi de couleurs pures Absence de contour, de « dessin »	Manet Pissarro Degas Sisley Manet Renoir Monet
NÉO-IMPRESSIONNISME : 1884- 1890	Systématisation de l'emploi du divisionnisme jusqu'au point = pointillisme Compositions plus intellectuelles et structurées	Seurat Signac
SYMBOLISME : 1880- 1900	Sujets mythologiques, irrationnels : la mort, le rêve, la femme. L'imagen'est pas créée pour elle-même mais pour l'idée qu'elle exprime.	Moreau Gaugin Klimt
NABIS : 1888- 1899	Peinture se voulant décorative	Bonnard Denis Vuillard
FAUVISME : 1905- 1910	Héritage de la couleur et de la facture impressionnisme Touches épaisses et larges Explosion colorée	Matisse Derain Braque Dufy
EXPRESSIONNISME : 1900- 1930 Der Blaue Reiter (1911)	Couleurs vives Déformations accentuant l'expression Rapidité d'exécution	Van Gogh (précurseur) Modigliani Munch Schiele Chagall Dix Rouault
ABSTRACTION : 1910→	Abandon de toute forme identifiable Peinture pure ne faisant référence qu'à elle-même	Kandisky Moholy- Nagy Delaunay Kupka Mondrian Klee

Retour au texte

PLUTOT MATHEMATICIEN… QUE… MATHEMATIRIEN

Claudine Plourdeau
IUFM de Caen
plourdo.clo@caramail.com

L'atelier s'est appuyé sur une recherche-action du Groupe Didactique de l'IREM de Basse-Normandie menée dans des classes de collège et qui débouche aussi sur un travail en formation continue sur la liaison CM2-6èmes. Cette recherche-action est centrée sur le rôle du langage et des écrits dans la construction des apprentissages mathématiques à partir de la résolution de problèmes : pour permettre au mieux aux élèves de faire des mathématiques et de les aimer, il faut les mettre en situation d'actions, de productions, d'échanges et de débats et partir de leurs productions pour qu'ils puissent construire leurs connaissances. Le langage passe par des écrits intermédiaires qui sont une mémoire du chemin d'apprentissage parcouru par l'apprenant.
Au cours de l'atelier, les participants ont eu l'occasion de prendre connaissance, d'expérimenter et de questionner diverses modalités d'enseignement autour de ces hypothèses qui visent à rendre les élèves « mathématiciens », constructeurs de leurs connaissances.

Exploitations possibles
La démarche présentée et les diverses modalités pour mettre des élèves de cycle 3 et de collège en situation d'actions, d'échanges, de débats et de productions d'écrits en mathématiques (productions écrites dans le cadre de résolution de problèmes, anecdotes et mémoires de classe) peuvent servir de référence et d'éléments de réflexion pour les professeurs.
Les productions d'élèves rapportées permettront d'amorcer un questionnement sur les enjeux d'apprentissage dans le domaine des nombres et de la résolution de problèmes à l'école et au collège et en géométrie au collège.

Type de contenu
Présentation argumentée de modalités d'enseignement et de productions d'élèves.

Mots-clé
Productions d'écrits, anecdotes et mémoires de classe, résolution de problèmes, travaux numériques, géométrie, CM2-6ème.

I - ATTENTES ET QUESTIONNEMENTS À PRIORI DES PARTICIPANTS

Comme il me semble important de découvrir les attentes et questionnements des participants, l'atelier commence donc par « une stratégie des petits papiers » qui les interroge sur leur motivation pour cet atelier ; en ressortent les mots clés ou idées force suivants *:*

Liaison CM2/6è à améliorer - motivation – idées d'activités- français/maths, bien

Mathématicien – Je rentre dans le monde des mathématiciens - mathématirien ?

Liaison CM2/6è indispensable et insuffisante !surtout en maths vu les difficultés des expressions des enfants.- toute idée et échanges bons à prendre.

Point de départ Langage – écrit – CM2/6è – Formation continue- cycle 3des élèves - Le titre – le débat – des écrits en mathématiques.

…..ou les attentes et questionnement suivants :

Comment construire des écrits tenant compte réellement des élèves pour leur faire construire leurs savoirs ?

Participation ou non des profs de français aux productions d'écrits mathématiques en 6ème Intérêt des profs de maths de 6è pour le travail proposé ? Mutualisation – pratique différente. Réflexion collective – pistes d'actions de recherche à mettre en place avec des collègues de cycle 3 dès la rentrée.

Aider les enfants qui bloquent et qui ont du mal en math. Echanges – Comparaison de références théoriques.

II – UNE MISE EN SITUATION DE PRODUCTION DES PARTICIPANTS SUR DES PROBLEMES DIVERS

Dans toutes ces mises en situation, j'ai fonctionné avec les participants de l'atelier comme avec mes élèves en classe.

II – 1 Problème 1: (réf : Feuilles à problèmes n°4 Lyon)

Trouver le plus petit nombre entier de dix-neuf chiffres dont la somme des chiffres est égale à 85.

L'énoncé est donné oralement pour la phase de dévolution du problème ; toute proposition doit être argumentée et on ne doit supprimer aucune trace de recherche. Chacun cherche individuellement, puis vient montrer sa solution « à la maîtresse » qui annote la production sans jugement sur le principe de l'entretien d'explicitation : ceci consiste à questionner pour faire avancer la recherche sans donner la solution. Quand la solution proposée est la bonne, elle propose alors une nouvelle question de réinvestissement et gère ainsi l'hétérogénéité du groupe pour cette recherche.

Ce problème est donné en classe de collège à des élèves de n'importe quel niveau afin de développer chez eux un comportement de recherche. Les savoirs en jeu sont simples : langage de base sur l'addition et numération de position. Quel que soit le niveau de l'élève concerné, un élève trouve toujours la solution dans les trois minutes qui suivent et pas forcément les élèves les plus forts en math !

Pour recentrer le groupe sur la gestion de cette activité et le rôle du maître à travers ses annotations pour faire avancer l'élève dans sa recherche, un document d'élève est projeté : la production de Charlène (voir page suivante).

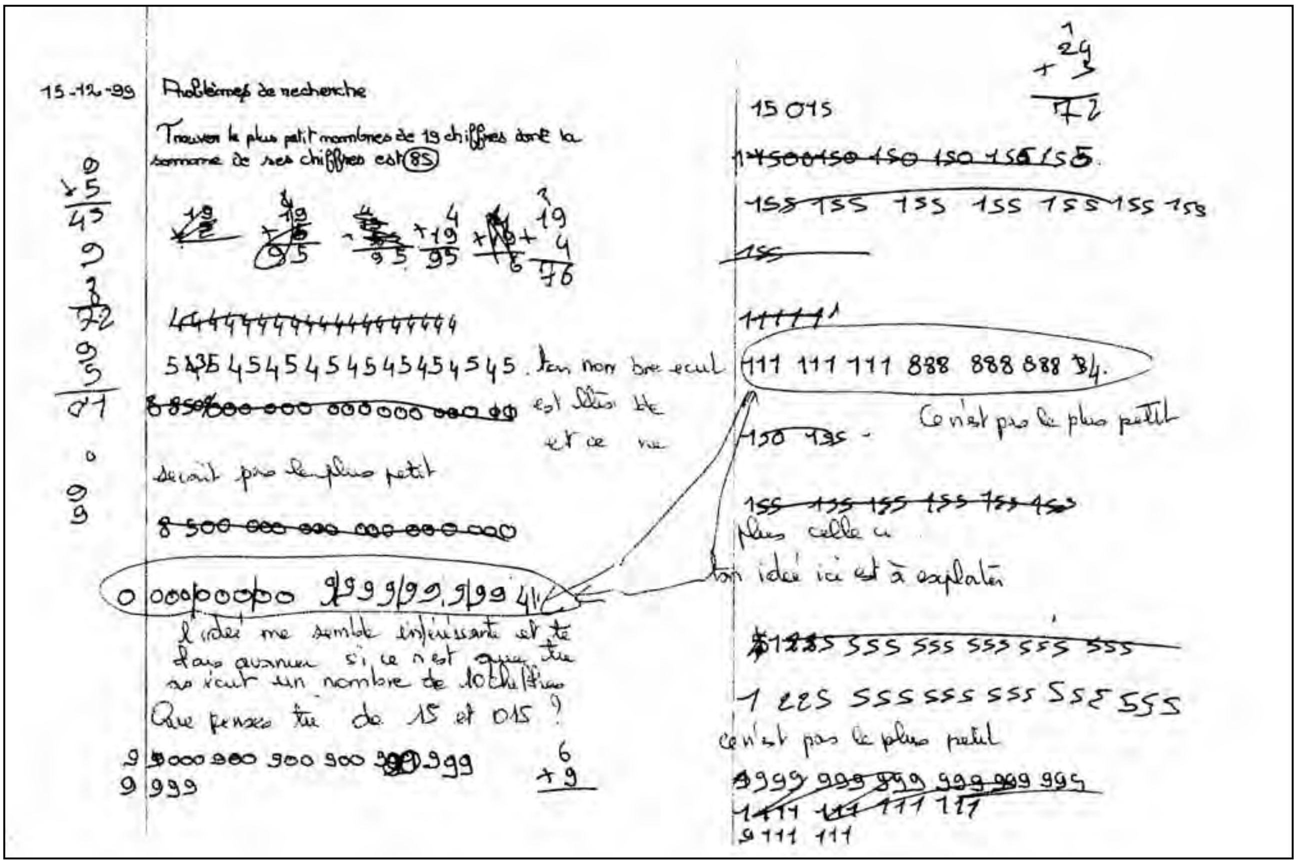
Un débat est alors engagé dans le groupe sur l'écriture réduite des nombres, à l'occasion de la donnée **«** 19 chiffres **»** de l'énoncé suite à une production du groupe du genre : « 0000000009999999994 » annotée **:** « tu as écrit un nombre de 10 chiffres ; que penses tu de 15 et de 015 ?écris ce nombre de façon lisible ».

D'où une nouvelle proposition **: «** 9/000/900/900/900/900/999 »

Mais ce nombre proposé n'est pas le plus petit et la somme de ses chiffres ne fait pas 85.

….On est dans un travail sur la production d'écrits que chaque élève ou intervenant ose produire, sur l'importance de l'erreur dans la régulation de l'apprentissage, sur la gestion de l'hétérogénéité du groupe classe par des annotations individualisées, … en fait les annotations sont un nouveau contrat !

Un document d'élève**, la production de Charlène :**



Dans un premier essai, Charlène prend en compte les deux contraintes (19 chiffres et somme égale à 85) mais suivant sa représentation que tous les chiffres sont identiques, avec un ajustement pour que la somme soit égale à 85 :

II – 2 Problème 2: Un jour de visite à Marrakech…

Il se met à pleuvoir … le guide nous propose alors un cinéma. A l'entrée, il négocie pour son groupe de 20 personnes 20 euros sachant qu'une femme paie 3 euros, un homme 2 euros et un enfant 50 centimes d'euros. Sa proposition est acceptée.

Quelle est alors la constitution du groupe ?

II – 2.1 différentes procédures

Dans un tour de table, chacun explicite sa procédure **:**

Pas envie de faire une mise en équation, j'ai joué le jeu de la recherche.

J'ai pris le plus grand nombre de femmes possibles : 6 3×6=18 restent alors 2 enfants, ce qui ne fait pas assez de personnes, d'où diminution du nombre de femmes.

J'ai joué le jeu de la recherche : 20 femmes trop cher, 20 enfants pas assez cher, pris au milieu, 10 enfants.

Procédure par essais -erreurs.
Recherche par tâtonnement jusqu'à arriver : 1H 6 F, 1H 5 F 6E …
Par tâtonnement…En partant de10 enfants…
Pas envie de tâtonner, j'ai cherché un truc sur équation à trois inconnues

Nombres d'enfants doit être pair, entier et positif : Essais 2^E, 4^E, 6^E… jusqu'à trouver une solution plausible

Le guide se compte-t-il dans les 20 ? Annotation 'A ton avis ?' C'est la phase de dévolution du problème indispensable ! Décision : le guide ne va pas au cinéma, le nombre d'enfants doit être pair et les femmes ne vont pas beaucoup au cinéma à Marrakech ! Moyenne d'un euro par personne, donc de nombreux enfants.

Essais successifs en faisant varier le nombre d'hommes pour arriver à 20€ : 1H 1F donc 30^E trop de personnes, - Essai sans femmes : 5H 20^E trop personnes.

7H 14^E trop de personnes, 6H 16E pas assez de personnes, donc il y a forcément des femmes. - En fait, à Marrakech les 20 euros c'est un prix de gros pour les groupes.

II – 2.2 Bilan

La production est tributaire du champ de connaissances de celui qui cherche le problème (ici de la connaissance ou pas du contexte social à Marrakech). Moins l'énoncé est précis, plus l'échange sera riche après et les productions variées.

Soit le problème est pris comme un problème mathématique, soit comme un problème de la vie quotidienne: suivant les représentations de l'enfant, l'énoncé est différemment interprété. On peut accepter plusieurs problèmes. Qu'évalue-t-on alors? La recherche argumentée :comme dans des activités de narration de recherche, ce n'est pas tant la solution qui importe, mais le fait de rendre compte de toutes les démarches mentales explicitées qui réfutent ou valident la solution proposée. Ces différentes productions nous permettent de lire des stratégies de résolution de ce problème: ici, c'est une procédure par essai erreur qui l'emporte.

II – 3 Problème 3 : Quelle histoire de frigidaire !

On veut mettre un chameau dans un frigidaire en trois gestes. Comment faire ? Et maintenant, on veut mettre un éléphant dans ce frigidaire en quatre gestes. Alors, comment faire ?

II – 3.1 Les propositions des participants

1/ on ne met pas un chameau dans un frigo !

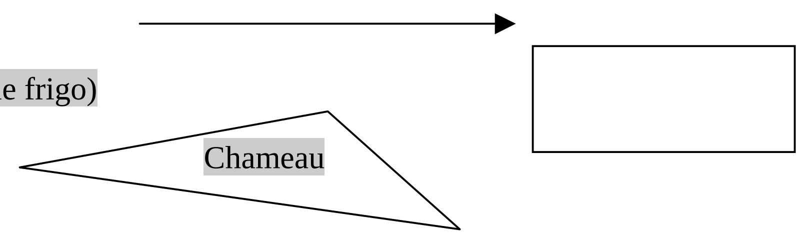
Il est trop grand pour mettre dans le frigo !

Il va avoir froid dans le frigo !

Ouvrir le frigo, y mettre le chameau, fermer le frigo. Et c'est tout simple !

Chameau

(Trois traits autour sont le frigo)



Dessin chameau, flèche, dessin frigo

2/ ouvrir le frigo, enlever le chameau, y mettre l'éléphant, fermer le frigo (variante : pousser le chameau)

II – 3.2 Analyse du groupe

On repère l'acceptation de se mettre en situation aberrante, voire une imagination fantaisiste, mais surtout l'entrée dans un contrat : le contrat didactique sous-jacent, même si la question 1) n'est pas bien comprise, on répond correctement à la question 2) !

II – 4 conclusion

Dans la recherche de ces trois problèmes, une prise de conscience de l'implicite voire même souvent de l'inconscient permet d'analyser les démarches mentales de l'élève. Le rôle du formateur ou du professeur est d'aider à rendre conscient tous les processus cognitifs pendant l'apprentissage vers une formalisation des savoirs à construire.

III – PRÉSENTATION DE DIFFÉRENTS TYPES D'ECRITS EXPÉRIMENTÉS DANS LA RECHERCHE-ACTION

Dans cette partie, je vais présenter différents types d'écrits qui jouent un rôle essentiel dans l'apprentissage : des anecdotes et mémoires de classe, un document de modélisation dont certains de ces écrits se transforment en fiche outil pour apprendre.

III – 1 – *Les anecdotes et mémoires de classe*

A l'occasion de situations d'apprentissage, de résolutions de problèmes ou de séances de remédiation…l'anecdote de classe est une opportunité « à ne pas rater » pour ces élèves – là ! C'est un écrit court et circonstanciel qui souligne un événement significatif de classe, un dysfonctionnement, une représentation erronée, une conjecture erronée …et qui devient objet de débat, de validation ou de réfutation en grand groupe.

Les mémoires de classe sont les traces des processus cognitifs des élèves qui les aident à dépasser les obstacles rencontrés. Les élèves échangent dans leur propre langage (langage maternel), confrontent des points de vue, travaillent sur leurs réponses erronées… pour faire évoluer leurs représentations ….c'est à dire : apprendre !

Ce sont donc des mémoires de phases où ils conjecturent, réfutent, argumentent leurs procédures ou celles des copains. Dans cette démarche, l'erreur est constitutive de la connaissance dans un apprentissage de type constructiviste.

Tous ces écrits sont des productions d'élèves notées lors de la correction d'exercices au tableau : les élèves écrivent sur leur cahier de recherche les propositions de la classe sans déformer les « dire » ; on passe « du dit à l'écrit » qui devient l'affaire de tous ; ces écrits sont alors analysés collectivement et quand la production le mérite, ils deviennent un objet d'apprentissage pour tous. Dans ce cas, l'objet d'apprentissage visé ou inattendu mais qui s'en dégage constitue alors le titre de la fiche inscrit en fin d'élaboration du document seulement. Si cet apprentissage permis n'est pas l'objet d'un chapitre du manuel de math et s'il souligne un obstacle qui peut bloquer un certain nombre d'élèves, alors ces écrits sont tapés au traitement de texte par le professeur ou un élève pour être collés dans le cahier de cours et jouer leur rôle dans l'histoire d'apprentissage de ces élèves là !

Ces écrits nous renseignent alors sur l'état de connaissance des élèves ; ils nous permettent ainsi de décider pour eux de nouvelles activités y compris l'élaboration de nouveaux écrits tels que « les fiches – outil » ou analyse de tâche, ce que je ne peux développer davantage ici. (Cf: BERNARD MONTI- CLAUDINE PLOURDEAU (2003) *Opérations mentales en résolution de problèmes*, Repères pour agir .Scéren.)

III – 2 – Des exemples d'anecdotes de classe

III – 2.1 L'anecdote Arthur

A l'occasion d'activités sur les différentes écritures d'un nombre (en 6$^{\text{ème}}$)

Arthur propose :

« Les quotients des divisions par 3 ont toujours une écriture décimale illimitée ? » Simon rétorque :

« C'est faux car 3/3=1 ou 6/3=2

Arthur fait une conjecture, Simon la réfute.

Quelle opportunité pour définir dès la classe de 6$^{\text{ème}}$ ce que l'on appelle un « contre exemple »

III– 2.2 L'anecdote Karim

A l'occasion d'un exercice sur les décimaux… Comment gérer les zéros ? Comment gérer la virgule ?

Calculer: 63 x 41 = 2583, puis calculer sans poser d'opération 0,0063 x 4,1 =

Karim propose : 0,0063 x 4,1 = **0,2583**

La classe lui dit que c'est faux, qu'il faut 5chiffres après la virgule. Nouvelle proposition de Karim **0,25830**

Le professeur : Quelle différence entre 0,2583 et

0, 25830 ? Karim choisit de poser l'opération :

0,25830-0,2583 = 0,00000 et Karim conclut : **ils sont égaux**

III – 2.3 L'anecdote Patrice

…à l'occasion d'une situation de proportionnalité…On cherche un opérateur commun à multiplier pour passer de la ligne 1 à la ligne 2

Patrice dit : « Pour passer de 1 à 0,5 on ne peut pas multiplier parce que ça va agrandir le nombre : il faut diviser »
Le professeur propose : 1 x 0,5

Les élèves répondent : 1 x 0,5 = **0,5**
Patrice dit : « Ah oui ! »

Et on conclut :

Multiplier ne sert pas seulement à agrandir. Si on multiplie des dimensions par un nombre plus petit que 1, on les réduit. Calculer : 1,25 x 1,5 = 4,895 3,25 x 0,8 = 2,6 3,25 x 0,2 = 0,65

Patrice et d'autres élèves dans la classe n'ont pas détruit cette représentation à l'occasion du puzzle (de Brousseau) en 6$^{\text{ème},}$ situation d'agrandissement - réduction.

L'anecdote constitue « un document –mémoire » qui permet aux autres élèves de se positionner suivant leur état de connaissance.

III – 3 Des exemples de mémoires de classe

III –3.1 Raisonner par l'absurde

…à l'occasion de l'exercice suivant (Triangle 6$^{\text{ème}}$ – Hatier):

La taille est-elle proportionnelle à l'âge ?

Age d'Eric (en années)	**10**	**30**
Sa taille (en cm)	**130**	**?**

Benjamin propose : 1,83m qu'il justifie ainsi : *« Comme son âge, sa taille va un peu augmenter »* Ismaël : 3,90m. La prof lui demande alors combien va-t-il mesurer à 90 ans ? Là, seulement il réagit en ajoutant que c'est impossible ! On en déduit que la taille n'est pas proportionnelle à l'âge et chaque élève est invité à regarder sa courbe de croissance dans son carnet de santé.

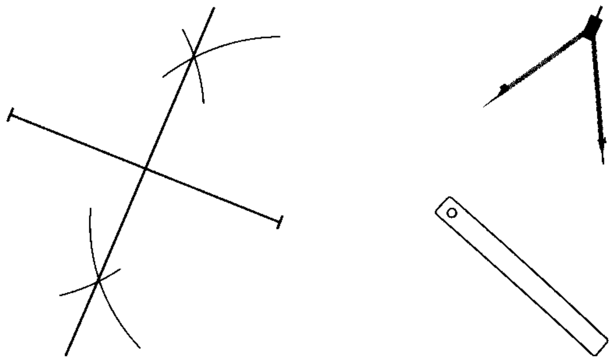
Ismaël « dans son monde » ne réfléchit pas à la situation proposée et applique son savoir sur la proportionnalité. En insistant pour le faire réagir sur son résultat, il le reconnaît absurde : C'est donc que la supposition de départ n'est pas vraie !

C'est l'amorce d'un raisonnement par l'absurde, procédure de raisonnement qui n'est pas vraiment objet d'apprentissage au collège mais qui, à mon avis, doit être exploitée quand l'occasion se présente et elle devient alors le nouvel objectif d'apprentissage de cette fiche.

III –3.2 Apprendre … à justifier une conjecture

A l'occasion du n°26 p 211(Triangle-6ème Hatier) **mémoire de classe** **6èmes D**

Enoncé : Tracer la médiatrice du segment [MN] ; placer un point P sur cette médiatrice. Quelle est la nature du triangle MNP ? Justifier la réponse.

 **L'èlève complète la figure.**	**!**	**Si la construction est faite au compas** **→ pas de codage**

Conjecture : **Marc (× 2) : équilatéral (cas particulier)**

à vue d'œil, le triangle MNP est
→ Julien → ça dépend de la position du point P
→ Lucas(et tous les autres) → isocèle.

Mais pourquoi ?

Justifica**tion** : **chez les 5èmes D**

On se réfère à l'énoncé **→** **On récite le savoir adapté pour justifier la conjecture.**	$\boxed{1}$ **car on sait que (d) est la médiatrice de [MN]** $\boxed{2}$ **Valentine : la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment. d'où PM = PN** $\boxed{3}$ **Puisque PM = PN, le triangle MNP est donc isocèle en P.**	**→ pourquoi dis tu cela ?** **et alors ?** **On applique le savoir à l'exercice dans les noms de la figure.**

Justification: **chez les 5èmes C**

Thomas raconte le savoir sur la médiatrice d'un segment, il pourrait le réciter. →	**Ismaël : parce qu'il a 2 côtés égaux** → **Cindy : parce que [PM] et [PN] sont de même longueur c.a.d.* PM= PN** **Thomas : Comme le point P est placé sur la médiatrice de [MN], le point P est situé à égale distance de M et de N** **La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.**	**Pourquoi dis tu cela ?** **pourquoi dis tu cela ?** **et alors ?**

c.a.d* : c'est à dire

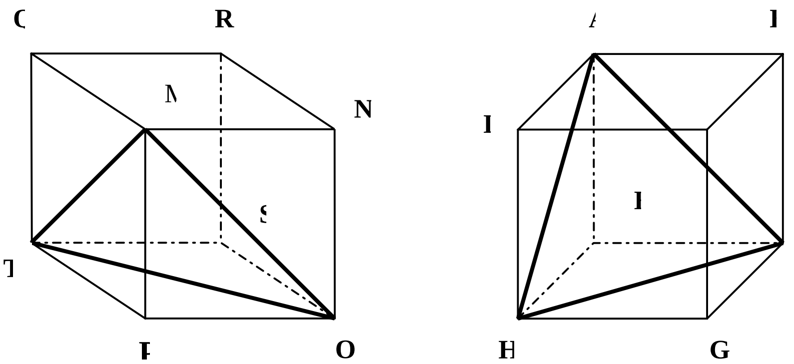
Pour répondre à une question posée par l'un des participants, ce premier document manuscrit devient un document pour tous au traitement de texte dès que l'objectif d'apprentissage se dégage de l'écrit lors du débat en grand groupe classe et détermine alors l'intitulé de cette fiche pour tous : « apprendre à justifier une conjecture ».

En effet, dans cette mémoire de classe, on trouve déjà les trois parties d'un pas de démonstration, objet d'apprentissage en 5èmes. Cette fiche sera donc à conserver et à placer dans le classeur de math de 5$^{\text{ème}}$ en début d'année où elle va jouer un rôle dans la progressivité des apprentissages ;Mais en même temps, ce document témoin prouve à l'élève qu'il sait déjà rédiger un pas de démonstration. Aussi, ces mémoires montrent aux élèves qu'une conjecture se valide par un savoir mathématique construit qu'il va falloir apprendre.

III –3.3 Qui a raison : Claude ou Dominique ? Mémoire de classe

Dominique dit : « Le triangle AHF et le tringle MOT sont identiques ».
Claude dit : « Les triangles AHF et MOT sont différents
(Enseigner la géométrie dans l’espace au collège. REPÈRES 33)

<table>
<tr>
<td>Elise
Cindy
Amandine
Nicolas
Frédéric

Stéphanie</td>
<td>

C’est Claude qui a raison : les triangles sont différents car j’ai vérifié avec une règle graduée la longueur des côtés.

C’est Dominique qui a raison car le triangle AHF est isocèle, il est donc différent du triangle MOT qui est quelconque ; j’ai mesuré avec la règle.</td>
</tr>
<tr>
<td>Estelle

+ tous les autres</td>
<td>C’est Dominique qui a raison parce que si on bouge le cube de gauche, on peut arriver à retrouver le même triangle que AHF.

→ Moi je dis qu’ils sont identiques car si on met le cube à contre sens …. ils sont identiques.

→ Ils sont identiques car ce sont les mêmes cubes, mais on ne les regarde pas du même côté.

→ ils sont identiques car de [TO] à M et de [HF] à A, il y a la même distance.
→… … car la diagonale [TO] est comme la diagonale [HF] et que M n’est pas dans le même sens que le point A. on croit que ce n’est pas la même chose mais si le point M était à la même place que le point R, ce serait exactement la même chose.

… … car on ne voit pas les triangles de la même face.</td>
</tr>
</table>

Il est intéressant de lire les manipulations mentales des élèves à travers leurs réponses et une certaine maîtrise de la notion de distance de deux points ou d'un point à une droite, sans passer sous silence l'obstacle de la représentation d'un objet de l'espace dans le plan.

III – 3.4 La feuille A4

Feuille A 4 : 21 × 29,7 cm

1) On veut fabriquer des chtoungs de 3 cm de largeur pour les élèves de 6èmes de l'an prochain. On décidera leur longueur plus tard.

Combien peut-on faire de bandes pour les fabriquer dans la largeur ?

2) et si on choisit des chtoungs de 1,5 cm de largeur ?

Combien peut-on alors en faire ?

3) Déterminons maintenant leur longueur ;

Si on veut 2 chtoungs dans une bande ?

L 1 =

Si on veut 3 chtoungs dans une bande ?

L 2 =

Si on veut 5 chtoungs dans une bande ?

L 3 =

Si on veut 7chtoungs dans une bande ?

L 4 =

Cette activité préparée pour l'apprentissage de la division par un nombre décimal en 6èmes est la suite d'une situation d'apprentissage sur les fractions dans laquelle « un chtoung » dans une classe et « un touf » dans l'autre, est une bande témoin, nommée par les élèves pour estimer une longueur.

Les marges de côté représentent des bandes de 3cm ou 1,5cm de l'activité « Chtoung » qui ont impulsé chez certains élèves une procédure géométrique.

Cette situation a produit les deux mémoires de classe suivantes :

Mémoire de classe **6èmes D**

1)Kilian (× 8) : 21 ÷ 3 = 7 bandes
Marc (× 2) : 3 × … = 21 . Il fait une multiplication à trous.

Valentine (× 6) : à partir d'une construction géométrique, elle fait une graduation d'un segment de 21 cm, tous les trois centimètres.

Elle cherche « combien de fois elle trouve 3cm dans 21 cm »

Julien fait aussi une construction géométrique et reporte sur son segment gradué tous les multiples de 3 de 0 à 21 cm.

2) Lucie (× 11) : 21 : 1,5 = 14 je l'ai fait à la calculatrice car on ne sait pas encore diviser un nombre entier par un nombre à virgule.

Julien : « moi je sais, mon père m'appris » ?

$$\begin{array}{r|l} 21,0 & 1,5 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r|l} 210 & 15 \\ \hline \end{array}$$

Marc : on sait que 1,5 est la moitié de 3, donc dans une bande de 3 cm, on a 2 bandes de 1,5 cm d'où dans 7 bandes de 3 cm, on a 2 × 7 = 14 bandes de 1,5 cm. Alors, comment faire ?

21 : 1,5 peut s'écrire $\dfrac{21}{1{,}5} = \dfrac{21 \times 10}{1{,}5 \times 10} = \boxed{\dfrac{210}{15}}$

↓ ↓

écriture fractionnaire **fraction**

On sait faire la division d'un nombre entier par un nombre décimal devient…. la division d'un nombre entier par un nombre entier.

* (×8) signifie que 8 élèves ont procédé comme Kilian. Chaque élève doit se positionner dans ces écrits et s'il a procédé comme Valentine, il surligne au fluo jaune le prénom « Valentine » pour reconnaître sa

démarche dans cet écrit.

Mémoire de classe 6èmes C

1) Thomas (?) : « Qu'est-ce qui fait 21 dans la table de 3 ? »

En fait il propose : 3 × … = 21. Il fait une multiplication à

Trou et en même temps il pose $\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$

c.a.d 21 : 3 = 7 bandes de 3cm de largeur.

cette première question ne fait pas l'objet d'autres ***propositions*****.**

1) *Plusieurs proposent :* On peut faire 14 chtoungs de 1,5cm dans la largeur de la feuille A4.

le prof : pourquoi ?

Clémence : car on a 7 bandes de 3cm de largeur et dans

une bande de 3cm, on en fait 2 de 1,5cm.

Stéphanie : 21 : 1,5 = 14 bandes à la calculette

Alors, comment faire ?

21 : 1,5 peut s'écrire $\frac{21}{1,5} = \frac{21 \times 10}{1,5 \times 10} = \boxed{\frac{210}{15}}$

↓ ↓

écriture fractionnaire fraction

ici, on divise un nombre entier par un nombre décimal

(on ne sait pas faire, on cherche alors à partir de ce que

l'on a appris* sur les fractions : trouver une fraction

égale en multipliant numérateur et dénominateur par

un même nombre.

c.a.d* : c'est à dire

* **les élèves l'ont formalisé dans l'activité sur les fractions**

Un élément de réponse aux questions posées en début d'atelier….

Chez les 6èmes D, on peut retrouver la démarche d'apprentissage de la division par multiplications successives soit dans la multiplication à trou de Marc ou dans la construction géométrique de Julien qui reporte sur son segment gradué tous les multiples de 3. Aussi, il est intéressant de repérer que la construction géométrique de Valentine permet de construire le langage de la disposition pratique de la division d'un entier par un entier.

Quant à Marc, il fait fonctionner ses savoirs sur la proportionnalité qu'il maîtrise de l'école élémentaire ou 14 élèves comme Clémence en 6èmeC.

Dans un souci gérer la progressivité des apprentissages et d'adapter la rédaction des solutions aux nouveaux savoirs…. Deux mois plus tard… on complète la mémoire de classe chez les 6èmes D comme chez les 6èmes C de la façon suivante :

***Liaison avec ce que l'on fait sur la proportionnalité (le 23/05/06)**

nombre de bandes de 3cm	**1**	**7**
nombre de bandes de 1,5cm	**2**	**14**

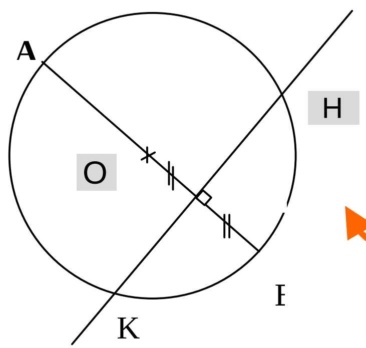
Savoir décider un tracé annexe … en 6èmes

mémoire de classe

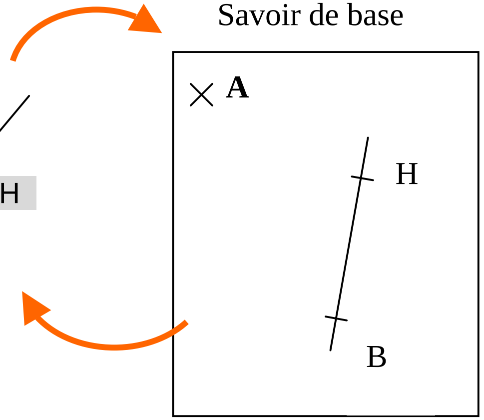
Savoir prolonger des tracés

Figure

… **à l'occasion du n°4 p 134 TRIANGLE – HATIER**



Savoir de base



Enoncé : Tracer un cercle de centre O. Tracer un diamètre [AB] de ce cercle .Placer I, milieu du segment [OB]. Tracer la droite perpendiculaire à (OB)et passant par I, elle coupe le cercle en H et K**.** Tracer la droite perpendiculaire à (BH) et passant par A.

On demande de tracer la perpendiculaire à la droite (BH) qui passe par le point A.

6 élèves bloquent. Pourquoi ?

… parce que la droite (BH) n'est pas tracée et qu'ils doivent décider seuls ce tracé annexe (= tracé nécessaire pour continuer la figure, mais qui n'a pas été commandé)

***2ème blocage** chez Manuella au tableau **:**

Elle connaît **le savoir de base = Tracer une perpendiculaire à une droite passant par un point donné…….**

… mais elle ne sait pas le faire sur cette figure (plus complexe) car elle n'a pas tracé un trait suffisamment long pour représenter la droite (BH)

III– 4- un document de modélisation

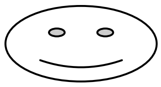
Ce document s'inscrit dans une progression pour construire un savoir sur la division d'un nombre par un nombre décimal et renforce ainsi le rôle de la situation « feuille A4 », celui de situation référence d'apprentissage que les élèves peuvent revivre mentalement

Feuille A 4 : 21 × 29,7 cm

1) On veut fabriquer des chtoungs de 3 cm de largeur pour les élèves de 6èmes de l'an prochain.

On décidera leur longueur plus tard.

Combien peut-on faire de bandes pour les fabriquer dans la largeur ?



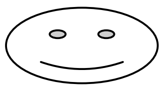
Savoir en jeu :

Diviser un nombre entier par un entier

⇒ On fait une division euclidienne

2) et si on choisit des chtoungs de 1,5 cm de largeur ? Combien peut-on alors en faire ?

Savoir en jeu :



Diviser un nombre entier par un nombre à virgule

En passant par l'écriture d'une fraction égale,

***, cela revient* à diviser un nombre entier par un nombre entier.**

⇒ On fait encore une division euclidienne

3) Déterminons maintenant leur longueur ;

Si on veut 2 chtoungs dans une bande ?

L 2 = 29,7 : 2

diviser un nombre décimal par un entier

⇒ nécessité d'introduire la notion d'arrondi

Si on veut 3 chtoungs dans une bande ?

L 3=

Si on veut 5 chtoungs dans une bande ?

L 5 =

Difficile à construire de façon précise encore

⇒ nécessité d'introduire la notion d'arrondi ou de troncature

Si on veut 7chtoungs dans une bande ?

L 7=

⇒ permet de découvrir un quotient décimal à écriture illimitée

IV – QUELQUES QUESTIONS ET DES REFERENCES

IV– 1 – Quelles questions ?

Il me semble intéressant de récapituler les questions des participants de l'atelier concernant l'intégration de ces écrits et leur rôle dans nos séquences d'enseignement.

Est-ce nécessaire que ces écrits soient au traitement de texte ?

Pourquoi des enfants ne sont-ils pas bons en math ?

Je n'ai pas compris ce que tu fais de ce document ; est-ce que tu mets un titre tout de suite ?

Le « chtoung » ne va-t-il pas prendre le pas sur la fraction ?

IV – 2 – Quelques derniers éléments de réponse

Le chtoung, au contraire, devient un élément indispensable de manipulation mentale pour permettre à certains élèves le temps d'apprentissage nécessaire pour construire le concept de fraction.

On reprend ce que Marc a proposé… c'est l'histoire des savoirs qui continue.

Quand les élèves bloquent, c'est que le savoir à construire présente un obstacle pour eux qui va alors devenir »objectif- obstacle ou objet d'enseignement qui va donner son titre au document en traitement de texte et qui va prendre place dans le cahier de cours.

IV – 3– Quelques références

… « Selon Vygotsky (1978), le développement cognitif et métacognitif est un processus graduel d'intériorisation et de personnalisation grâce aux interactions sociales. En effet, la progression de l'élève est basée sur un processus d'intériorisation où des démarches de régulation activées, au départ, par un guide, sont intégrées au fonctionnement autonome de l'élève. Par ailleurs, le processus d'extériorisation de ses stratégies d'action et de ses tentatives de régulation par des échanges avec autrui, est considéré comme essentiel au développement de la métacognition. »…

Louise Lafortune, Suzanne Jacob, Danièle Hébert : *Pour guider la métacognition : Collection Education intervention*

… et comme le disent Jean-Charles Chabanne et Dominique Bucheton dans

« PARLER ET ECRIRE
POUR PENSER ?
APPRENDRE
ET SE CONSTRUIRE » L'écrit et l'oral réflexifs Education et formation, puf

p10 « … « Réfléchir » la parole des autres, c'est donc d'abord la reformuler. »

p15 « … c'est la place laissée dans les séquences aux échanges entre les élèves, comme si l'appropriation des discours scolaires gagnait à passer par le travail collectif de reformulation et de négociation qui s'effectue alors « dans la langue des élèves », par leurs propres moyens langagiers … »

Alors, on comprend qu'ainsi, l'élève devient :

« Plutôt mathématicien … que mathématirien

… et … le prof, pourquoi pas…

« mathémagicien ? » (Soufflé par André Deledicq dans une dédicace, lors d'une rencontre à Caen)

« Merci André, je n'y avais pas pensé ! » Claudine

BIBLIOGRAPHIE

JEAN-CHARLES CHABANNE, DOMINIQUE BUCHERON. (2002) ***Parler et écrire pour penser , apprendre et se construire : Education et formation Puf*.**

IREM DE LYON, La feuille à problèmes. (juin1994), n°62 p 67.

LOUISE LAFORTUNE, SUZANNE JACOB, DANIELE HEBERT ***Pour guider la métacognition : Collection Education intervention***

BERNARD MONTI-CLAUDINE PLOURDEAU (2003) ***Opérations mentales en résolution de problèmes*, Repères pour agir .Scéren.**

ALAIN TARISSON. (1993) Pensée mathématique et gestion mentale, ***Paris, Bayard éditions.***

***Enseigner la géométrie dans l'espace au collège*. REPÈRES 33.**

LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE DANS LES CLASSES DES CYCLES 2 ET 3

Teresa ASSUDE
IUFM d'Aix Marseille
t.assude@aix-mrs.iufm.fr

Jean-François BONNET
IUFM de Nice
jfbonnet@wanadoo.fr

Jean-Michel GELIS
IUFM de Versailles
jean-michel.gelis@versailles.iufm.fr

Jean-Pierre RABATEL
IUFM de Lyon
jeanpierre.rabatel@laposte.net

Résumé

Dans cet atelier, nous nous intéressons au problème de l'intégration, dans les apprentissages, des TICE et plus particulièrement de la géométrie dynamique aux cycles 2 et 3. Cette intégration, mentionnée dans les programmes de l'école et - depuis peu - dans ceux des concours de recrutement, soulève des problèmes complexes, autant du point de vue des enseignants que de celui des formateurs.
Nous n'apportons pas ici de réponse générale aux problématiques soulevées par cette intégration mais, plus modestement, nous proposons des axes d'analyse susceptibles d'éclairer des points qui nous paraissent essentiels. Ces axes d'analyse ont été élaborés lors des nombreuses expérimentations mises en place au sein de l'ERT*e* MAGI, dirigée par Colette Laborde.
Ces axes d'analyse ont été mis en pratique lors du travail en groupe de l'atelier. Chaque groupe avait pour consigne de concevoir une séquence d'apprentissage, à partir de l'une des 5 situations proposées et caractérisées par une figure de géométrie dynamique ainsi que des compétences cibles. La consigne était de situer explicitement les propositions de séquences par rapport aux axes d'analyse précédemment explicités.

I – PRÉSENTATION DE L'ATELIER

I – 1 Intégration des TICE dans l'enseignement

La volonté institutionnelle d'intégrer les TICE dans l'apprentissage des mathématiques ou dans la formation disciplinaire des enseignants n'est pas nouvelle.

Elle s'est à nouveau récemment exprimée dans les programmes actuels de l'école qui stipulent, entre autres, que : « *L'enseignement des mathématiques doit intégrer et exploiter les possibilités apportées par les technologies de l'information et de la communication : calculatrices, logiciels de géométrie dynamique, logiciels d'entraînement, toile (pour la documentation ou les échanges entre classes), rétroprojecteur (pour les moments de travail collectif)* » ou, plus généralement, que *« L'émergence des nouvelles technologies de la communication pose d'une manière nouvelle le problème de l'apprentissage des savoirs fondamentaux, l'Ecole de la République doit faire face à de nouveaux défis. »*.

De telles demandes institutionnelles ont des conséquences sur la formation des enseignants, tout comme la modification récente des programmes de mathématiques du CERPE qui introduit des « *Eléments sur l'utilisation des calculatrices électroniques et d'outils informatiques simples (tableurs)* », ainsi que le fait que « *Les questions complémentaires […] peuvent porter sur : […] des scénarios possibles pour des séances faisant appel aux T.I.C.E.* ».

Malgré son inscription officielle, le problème de l'intégration des TICE dans l'apprentissage des mathématiques n'est pas effectif pour autant. Il soulève de nombreuses questions, par exemple : que veut dire intégrer les TICE dans le quotidien d'une classe, quelles sont les conditions et les contraintes d'une telle intégration dans des classes « ordinaires », quels sont les changements induits par cette intégration dans les pratiques des enseignants d'une part et les apprentissages des élèves de l'autre ?

Nous n'apportons pas, dans cet atelier, de réponses universelles à ces problèmes complexes, mais, plus modestement, nous proposons quelques axes d'analyse qui peuvent permettre d'alimenter diverses problématiques liées à l'intégration des TICE à l'école. Ces axes d'analyse s'appliquent à la géométrie dynamique et sont issus de notre expérience de travail au sein de l'ERT*e*[1] MAGI (Mieux Apprendre la Géométrie à l'aide de l'Informatique). Le paragraphe suivant présente sommairement cette équipe.

I – 2 L'ERT*e* MAGI

L'ERT*e* MAGI fut créée par Colette Laborde en juin 2003 pour une durée de 3 années. Elle vise à expérimenter des séances intégrant la géométrie dynamique à l'école, élaborer des stratégies de formation (initiale ou continue), sur ce thème, à destination des enseignants, développer des cadres théoriques susceptibles de fonder de telles approches (ROLET, 2006 ; SOURY-LAVERGNE 2006). Cette équipe réunit des formateurs, des chercheurs et des enseignants appartenant à de nombreuses catégories de personnels[2]. Elle est organisée en sous-équipes[3], chacune d'elles travaillant à la conception de séances d'apprentissage, de scénarios de formation, à chaque fois mis en œuvre et analysés. L'ERT*e* se propose d'éditer un DVD qui permettra de rendre compte du travail réalisé tout au long de ces années.

Nous nous intéresserons ici aux séances d'apprentissage mises en place auprès des élèves. Nous avons dû les concevoir, les analyser, les évaluer, les qualifier, les comparer. Ces séances résultaient d'un certain nombre de choix et d'hypothèses que nous avons peu à peu explicitées. Elles se proposaient d'explorer certaines facettes de l'intégration des TICE aux apprentissages et nous avons dégagé des axes d'analyse afin de mieux cerner leur pertinence et leur intérêt. Ce sont ces derniers axes d'analyse que le présent atelier se propose de travailler.

---

[1] Equipe de Recherche en Technologie éducative

[2] Conseillers pédagogiques, maîtres de conférences, maîtres formateurs, PE, PIUFM, professeur d'université….

[3] Localisées à Aix, Amiens, Grenoble, Toulon, Valence, Versailles

I – 3 Cadrage de l'atelier

Les logiciels de géométrie dynamique offrent la possibilité de construire des figures et de les déformer par déplacement de certains objets qui les composent (points, droites, segments…). Leur particularité réside dans le fait que les propriétés géométriques que possède la figure restent invariantes par déformation. La suite de dessins de la figure 1 relate, par exemple, la construction d'un rectangle à partir d'un cercle et de 2 de ses diamètres, l'effacement des objets intermédiaires de construction et la déformation du rectangle construit.

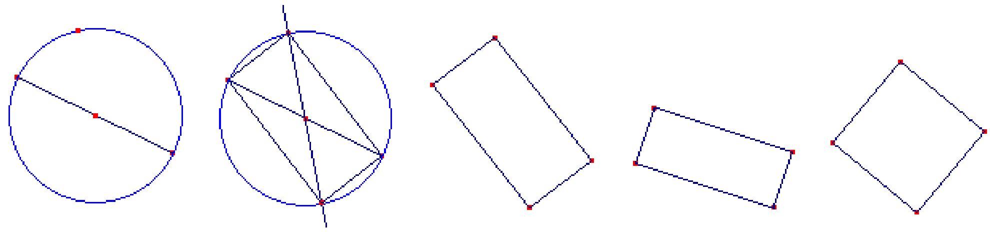


Figure 1 *: Suite de dessins obtenus avec un logiciel de géométrie dynamique : construction d'un rectangle, effacement d'objets de construction, déformation.*

La géométrie dynamique ouvre de nombreuses perspectives pour aborder l'apprentissage de la géométrie. Devant cette palette de possibles, l'enseignant comme le formateur doivent parvenir à situer leurs propositions, les qualifier, juger de leur pertinence, tâches auxquelles peuvent contribuer les axes d'analyse que nous proposons.

Le présent atelier se propose de mettre les participants dans la position qui fut la nôtre lors du travail dans l'ERT*e* MAGI, c'est à dire celle du concepteur de séances. Il s'agit, étant données une figure de géométrie dynamique d'une part, et des compétences cibles d'autre part, d'organiser une séquence qui s'appuie sur cette figure, vise ces compétences et se situe explicitement par rapport aux axes d'analyse proposés. Cinq ensembles de figures et compétences relatives aux cycles 2 et 3 ont été retenus et soumis aux différents groupes de l'atelier.

Les axes d'analyse étudiés dans cet atelier sont indépendants du logiciel de géométrie dynamique, dont un quelconque représentant convient (tels que Géogébra, Déclic, Géonext,…). Cependant, afin de ne pas avoir à traiter dans l'atelier de différentes connaissances instrumentales, nous avons proposé aux participants un unique logiciel, ici Cabri-Géomètre.

Le paragraphe suivant présente ces axes d'analyse.

II – NOS AXES D'ANALYSE

Les axes d'analyse que nous présentons ici sont illustrés sur des situations antérieures au travail de l'ERT*e* MAGI. Ces situations sont issues d'expérimentations décrites dans (ASSUDE 2006 ; GELIS, ASSUDE 2002).

II – 1 Le point de vue instrumental

Notre premier axe d'analyse est constitué par les connaissances instrumentales. Lors de la conception de toute séance intégrant un logiciel de géométrie dynamique, il est nécessaire d'expliciter ces connaissances, les élèves devant les maîtriser pour résoudre les situations proposées. Toute non prise en compte de ces connaissances est susceptible de bloquer la progression envisagée et d'inhiber les apprentissages visés. Selon les situations d'apprentissage, les connaissances instrumentales nécessaires peuvent être minimes (et n'exiger, par exemple, que la seule capacité à déformer les figures) ou plus complexes, comme indiqué ci-après.

Par exemple, la connaissance des différents statuts des points en géométrie dynamique est nécessaire à bien des situations de construction. Ces points peuvent être en effet libres (ils sont alors déplaçables dans le plan, sans aucune limitation), liés à un objet (ils se déplacent alors exclusivement sur celui-ci, qu'il soit cercle, droite, segment…) ou « fixes » (s'ils sont non déplaçables directement, comme les points d'intersection ou les milieux de segments). Un autre exemple de connaissances instrumentales non triviales est proposé à la figure 2 qui présente les connaissances nécessaires à la construction d'un segment perpendiculaire à un autre en l'une de ses extrémités. Cette construction est assez élaborée puisqu'elle impose, avec Cabri-Géomètre, de définir une droite perpendiculaire au segment en l'extrémité voulue, de tracer un point lié à cette dernière, d'effacer la droite, de construire le segment perpendiculaire.

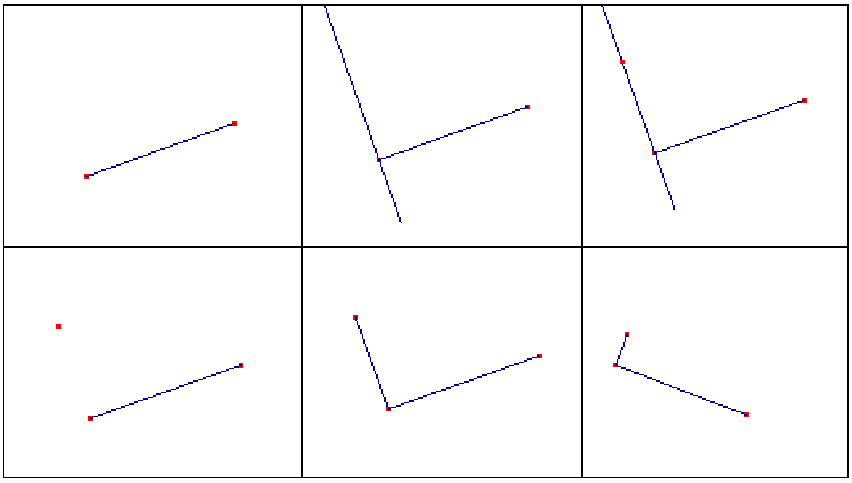


***Figure 2** : Construction d'un segment perpendiculaire à un autre en l'une de ses extrémités.*

II – 2 Techniques

Le point de vue praxéologique (CHEVALLARD 1999) propose entre autres, d'approcher le travail proposé à l'élève en termes de type de tâches et de techniques. De ce point de vue, un logiciel de géométrie dynamique offre, pour résoudre les tâches demandées, des techniques nouvelles en ce sens qu'elles n'ont pas d'équivalents en papier/crayon. (ASSUDE, GÉLIS 2002). Ces techniques, qui constituent notre deuxième axe d'analyse, doivent être explicitement recensées par les concepteurs de séances intégrant de la géométrie dynamique, qui ont à organiser leur maîtrise de la part des élèves.

A titre d'exemple, la figure 3 évoque la technique perceptive où l'élève, pour construire un carré, construit un quadrilatère quelconque avant d'ajuster les points à la souris et faire en sorte de satisfaire « à vue » les propriétés qui définissent un carré (égalité des côtés et présence de 4 angles droits). Cette technique ne permet pas d'atteindre l'objectif visé, puisque la qualité de carré ne résiste pas à la déformation de la figure.

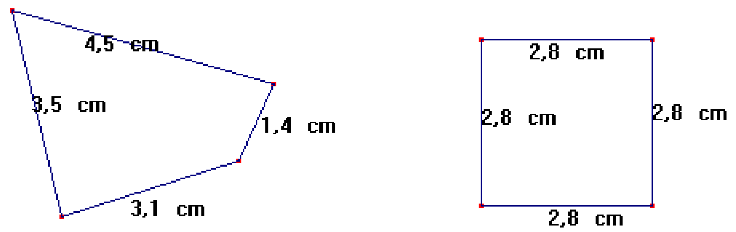


Figure 3 *: Construction d'un carré par une technique perceptive.*

La figure 4 présente la technique perceptivo-théorique qui permet, contrairement à la précédente, de construire effectivement un carré. Cette technique est fondée sur la détermination des contraintes géométriques (ici, des égalités de longueur et des perpendicularités) et l'utilisation d'objets géométriques intermédiaires qui permettent de les satisfaire (ici, un cercle).

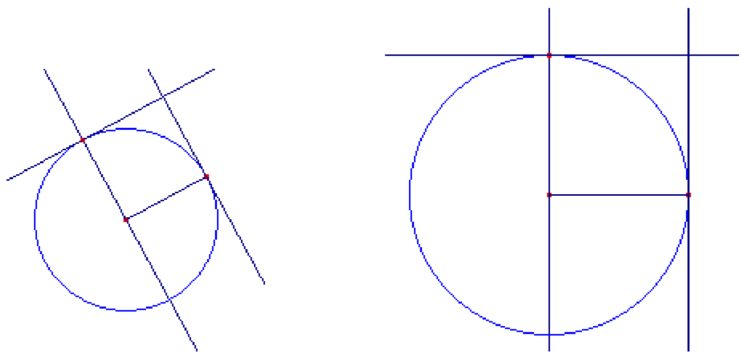


Figure 4 *: Déformation d'un carré construit par une technique perceptivo-théorique.*

II – 3 La dialectique ancien/nouveau

Nous avons constaté, lors du travail avec les enseignants et leurs classes, que l'intégration de séances de géométrie dynamique se posait en terme d'une dialectique ancien/nouveau. Les tâches et techniques nouvelles apportées par la géométrie dynamique devaient se situer par rapport aux tâches et techniques anciennes qui préexistaient à son introduction. Toute insertion de séances d'apprentissage fondées sur la géométrie dynamique doit reposer sur une analyse fine de la répartition entre tâches et techniques anciennes et nouvelles. Certaines tâches anciennes sont abandonnées, d'autres sont conservées mais traitées avec des techniques nouvelles. Les tâches nouvelles qui apparaissent peuvent induire des modifications sur des tâches anciennes. La cohérence de ce nouvel équilibre, la répartition entre ancien et nouveau caractérisent un type d'intégration de la géométrie dynamique. Cette dialectique ancien/nouveau constitue à nos yeux un autre axe d'analyse.

Par exemple, des tâches anciennes de construction de figures peuvent être conservées lors de l'introduction de la géométrie dynamique. Elles seront alors traitées avec des techniques nouvelles, liées au logiciel utilisé (cf paragraphe précédent). Des tâches nouvelles, sans équivalent dans le contexte papier/crayon, peuvent être conçues et conduire à des apprentissages mathématiques s'appuyant sur de nouvelles techniques. La figure 5 donne un tel exemple, celui d'une figure de géométrie dynamique donnée aux élèves et qu'ils devaient qualifier (il s'agissait ici d'un carré apparent à l'ouverture du fichier), puis déformer (la figure se révélait alors être en fait un losange) avant d'en tirer des conclusions sur l'inclusion entre classes de quadrilatères (ici les carrés et les losanges) et de les exprimer en termes de propriétés.

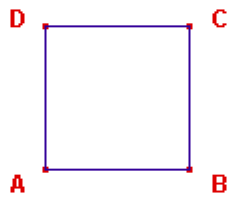
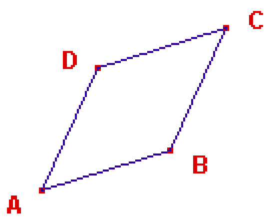
Figure donnée	**Feuille d'activité**
 à l'ouverture du fichier	*La figure ABCD est-elle un carré ? -------------------------* *Comment as-tu vérifié ? ----------------------------------* *--* *Déplace tous les points que tu peux déplacer.* *La figure ABCD est-elle encore un carré ?* *C'est un --* *parce que : --* *--*
 après déformation	*Un carré est-il toujours un losange ? ----------------------* *--* *Un losange est-il toujours un carré ? ----------------------* *--* *Ecris une condition pour qu'un losange soit toujours un carré :* *--* *--*

Figure 5 *: Exemple d'une tâche nouvelle, le « balayage » d'une figure de géométrie dynamique et son exploitation à des fins mathématiques.*

Notons que les conséquences de l'introduction de la géométrie dynamique ne se limitent pas à la définition de tâches ou de techniques conduites au sein du logiciel. Des tâches papier/crayon peuvent également être affectées. Par exemple, lors d'expérimentations précédentes (ASSUDE, GELIS 2002), nous avons constaté que les enseignantes avaient défini des tâches nouvelles[4] en papier/crayon, à savoir la construction de quadrilatères particuliers à partir de leurs diagonales. En effet, elles avaient choisi de scinder la classe en 2 groupes travaillant alternativement tantôt avec le logiciel, tantôt dans le contexte papier/crayon. C'est la recherche d'une situation papier/crayon qui puisse être mise en regard avec l'activité de géométrie dynamique, qui les a conduites à définir cette nouvelle tâche papier/crayon.

[4] Le vocable « tâches nouvelles » signifie ici que ces enseignantes ne proposaient habituellement pas de telles tâches à leurs élèves, dans la progression qu'elles avaient arrêtée avant l'introduction de la géométrie dynamique.

II – 4 Entrelacement des contextes papier/crayon et de géométrie dynamique

Un autre axe d'analyse est constitué par l'entrelacement des contextes papier/crayon et de géométrie dynamique. Il s'agit ici de savoir si les situations proposées aux élèves se poursuivent et se prolongent dans les contextes papier/crayon et géométrie dynamique ou si, au contraire, elles ne « vivent » que dans un seul de ces contextes. Toute proposition d'apprentissage à l'aide de la géométrie dynamique doit préciser l'alternance éventuelle des contextes papier/crayon et logiciel. Nous proposons deux exemples issus d'expérimentations précédentes en CM2 (ASSUDE, GELIS 2002), qui présente des entrelacements entre contextes profondément différents.

La première d'entre elles vise des compétences sur les quadrilatères particuliers et leurs propriétés. Les enseignantes avaient choisi d'organiser la classe en 2 demi-groupes. Le premier demi-groupe travaillait en papier/crayon sur une tâche de construction de quadrilatères particuliers[5] à partir de leurs diagonales. L'autre demi-groupe travaillait avec le logiciel de géométrie dynamique sur une tâche de construction d'un quadrilatère particulier laissé au choix de l'élève. Ces deux ateliers se déroulaient en alternance. Ces tâches n'étaient pas reliées entre elles, elles ne s'enchaînaient pas, la résolution de l'une n'aidait en rien la résolution de l'autre. Elles étaient conçues pour être disjointes, sans interaction l'une envers l'autre et le bilan de la séance puisa indifféremment dans les réussites ou les échecs de l'une ou de l'autre la matière nécessaire à l'institutionnalisation des compétences visées. Le degré d'entrelacement des contextes papier/crayon et de géométrie dynamique est ici nul.

A l'opposé, le second exemple proposait un enchaînement de situations qui reposait sur un fort entrelacement de ces contextes. La séquence proposait l'étude des programmes de construction qui étaient ici abordés pour la première fois dans cette classe de CM2. La séance commença par un temps collectif où une figure de géométrie dynamique fut proposée à l'écran. Les propriétés de cette figure furent explicitées au sein du logiciel, un élève opérant sous la conduite du groupe et procédant à la mesure des angles, des côtés et des diagonales. La figure fut ensuite déformée et le groupe constata que le carré supposé « résistait » à la déformation. La classe fut alors répartie en binômes, chaque binôme devant noter l'historique de la construction sous le logiciel et prendre la figure à main levée. La classe quitta alors les ordinateurs pour poursuivre un travail en papier/crayon. Un texte affiché au tableau proposait le programme de construction d'un pentagone qui fut mis en regard avec l'historique de la figure que venaient d'obtenir les élèves. Les différences et ressemblances entre les deux textes furent établies collectivement (relatives aux objets géométriques, à leurs caractérisations mathématiques, à la langue - présence de phrases, de verbes,…-). Les élèves furent ensuite invités à rédiger leur propre programme de construction du carré à partir de l'historique, ce qui nécessita pour certains d'entre eux un retour sur les machines pour mieux articuler les différentes phases de construction. Le travail se poursuivit par la construction papier/crayon de la figure à partir du programme de construction élaboré par chaque élève. Un bilan donna l'occasion de mettre en lien les contraintes de la construction avec les propriétés du carré. La séquence se termina par un retour sur les machines et l'exécution du programme de construction au sein au logiciel. Cette séquence se fonde sur une alternance conséquente des contextes papier/crayon et logiciel de géométrie dynamique. Le travail initié dans l'un de ces contextes est repris, prolongé et poursuivi dans l'autre. L'entrelacement de ces 2 contextes est ici très fort, les propriétés de la figure et la chronologie de construction demeurent les seuls

[5] Il s'agit ici de carrés, rectangles, losanges ou parallélogrammes.

invariants qui traversent les différentes phases de la situation et les deux contextes de travail (papier/crayon et géométrie dynamique).

II – 5 Rapport des connaissances instrumentales/mathématiques

Le dernier axe d'analyse que nous proposons est le rapport entre les connaissances instrumentales d'une part et les connaissances mathématiques d'autre part. Toute situation intégrant un dispositif de géométrie dynamique vise à la maîtrise, de la part de l'élève, de ces 2 types de connaissances dans des proportions qui peuvent être très variables. Certaines séances ont pour but d'assurer de façon conséquente une bonne acquisition de certaines fonctions du logiciel, les connaissances mathématiques étant réduites ou destinées à être revisitées et renforcées. C'est le cas, par exemple de la situation de construction de quadrilatères particuliers en géométrie dynamique où les propriétés mathématiques (perpendicularités, égalités de longueurs) sont censées être connues et aisément mobilisables alors que les connaissances instrumentales (impliquant par exemple le recours à des cercles pour assurer les égalités de longueur) sont ici bien plus ardues et destinées à être institutionnalisées.

En opposition avec ce qui précède, d'autres séances s'appuient sur une expertise minimale du logiciel et développent à partir de la situation donnée des apprentissages mathématiques bien plus conséquents en proportion. Citons l'exemple présenté plus haut (cf figure 5) d'une figure de géométrie dynamique qui semblait être un carré au chargement du fichier et se déformait en losange. Le principe de déformation d'une figure (et de l'invariance de ses propriétés) est ici la seule connaissance instrumentale nécessaire pour mener à bien la tâche demandée, qui vise l'apprentissage de l'inclusion des classes de figures (carrés et losanges) et l'expression de cette inclusion en termes de propriétés. Le travail mathématique est conséquent et opéré à partir d'une connaissance instrumentale élémentaire et unique.

Le rapport entre connaissances instrumentales et mathématiques est un axe d'analyse important pour qualifier l'intégration de la géométrie dynamique dans les apprentissages. Notons que la place de ces différentes connaissances est également un élément clé, certaines situations placent les connaissances instrumentales en amont des connaissances mathématiques visées dans la séance, d'autre en aval, d'autres encore organisent des allers-retours entre ces deux types de compétences.

III – LES PRODUCTIONS DE L'ATELIER

III – 1 Travail en groupe

Les annexes présentent les 5 situations proposées dans l'atelier, issues de séances mises en œuvre dans le cadre de l'ERT*e* MAGI. Les participants de l'atelier ont été mis en groupe, chaque groupe recevant une situation déterminée par un niveau de classe, des compétences cibles et une figure de géométrie dynamique représentée ici par un ou plusieurs dessins. L'objectif de l'atelier était de mettre les participants dans la position qui fut la nôtre au sein de l'ERT*e* MAGI. Le point de vue du concepteur de séances était donc retenu dans ce cadre et il était demandé, à chaque groupe, d'étudier la figure de géométrie dynamique proposée, d'en recenser les caractéristiques et potentialités sur le plan des apprentissages et, enfin, de concevoir une séquence qui s'appuyait sur la figure de géométrie dynamique donnée et visait les compétences retenues. Il était également demandé de situer explicitement les propositions par rapport aux axes d'analyse précédemment présentés : le point de vue instrumental, les techniques en jeu, la dialectique ancien/nouveau, l'entrelacement des contextes papier/crayon et géométrie dynamique, le rapport des connaissances instrumentales/mathématiques. En préalable à ce travail, chacun des groupes était invité à définir le cadre matériel du déroulement de leur séquence (salle informatique, ordinateurs en fond de classe, tableau blanc interactif, vidéoprojecteur…).

III – 2 Bilan des travaux en groupes

Il est difficile de rendre compte de façon exhaustive des propositions de chaque groupe, le temps de recherche trop court et l'ampleur de la tâche n'ont pas permis de finaliser totalement les productions. Cependant, les axes d'analyse ont permis d'organiser et de structurer la restitution, de sérier les questions, de débattre avec précision des problèmes liés à l'intégration de la géométrie dynamique dans les apprentissages. Les propositions des groupes ont été croisées avec les expérimentations effectivement mises en place au sein de l'ERT*e* MAGI, ce qui a permis de rendre compte des questionnements qui en ont émergé. Nous évoquons dans ce qui suit quelques points qui ont été discutés lors de l'atelier.

Les potentialités de figures de géométrie dynamique ont été étudiées avec soin. Le repérage des points libres (à partir desquels la figure peut être déformée), le type de déformation obtenue (par homothétie, similitude, isométrie), la détermination des contraintes géométriques de la figure ont été exploités pour déterminer en quoi la figure proposée pouvait être un support d'apprentissage intéressant.

Le problème des connaissances instrumentales fut un axe d'analyse qui retint l'attention du groupe. La possibilité de restreindre les commandes du logiciel offertes aux élèves fut évoqué pour chaque situation, comme par exemple dans la situation 2 qui peut être mise en œuvre en inhibant la commande « symétrie axiale », ce qui impose, pour mener à bien une tâche de construction, de concevoir des techniques qui s'appuient sur les propriétés des symétries. Le débat fut riche et nourri à propos de la situation 5. Cette situation est, comme les autres, issue d'expérimentations conduites ici au CP. Elle est fortement centrée sur des connaissances instrumentales (même si les connaissances mathématiques visées sont consistantes) et se proposait d'explorer les capacités de prise en main et de maîtrise du logiciel de la part d'élèves qui n'ont pas les facilités de manipulation et de structuration attendues de la part d'élèves plus âgés, de CM2 par exemple. Dans l'esprit des concepteurs de cette séance, la bonne exploitation du logiciel et la maîtrise de gestes incontournables (tel que le déplacement de figures) constitue un préalable à toute tentative d'intégration de la géométrie dynamique à ce niveau de classe. De nombreux points furent explorés et les propositions confrontées aux vécus effectifs de la situation. Les élèves disposaient, au sein du logiciel de géométrie dynamique, de figures élémentaires (triangles, cercles, carrés) et devaient reconstituer des figures cibles (un carré contenant un cercle et/ou englobant un triangle, un cercle placé « au-dessus » d'un carré…). Les « modes » de déplacement de ces figures élémentaires ont retenu l'attention du groupe et soulevé de nombreuses questions dont les conséquences en terme d'apprentissage mathématiques furent évoquées. Nous avons examiné différents « comportements» lors du déplacement des figures élémentaires. Ces « comportements » sont les conséquences directes de la construction de ces figures au sein du logiciel et se caractérisent, entre autres, par : (1) les conséquences du déplacement du centre de symétrie d'une figure élémentaire (par exemple, si l'on déplace le centre du carré, le carré déplacé se déduit-il du carré initial simplement par translation ou bien conserve-t-il avec le carré initial un sommet commun, auquel cas sa « taille » n'est pas identique à ce carré initial ?) ; (2) la possibilité de déplacer ou non une figure par d'autres objets que ses sommets (par exemple, le carré peut-il se déplacer à partir de l'un de ses côtés ?). Ces différentes options ont des conséquences sur le plan des apprentissages mathématiques visés, ainsi que sur les figures cibles à reconstituer (qui peuvent être ou non constituées de figures élémentaires de même taille que les figures élémentaires initiales).

L'axe d'analyse lié à l'entrelacement des contextes papier/crayon et de géométrie dynamique fut fortement repris par les travaux des différents groupes. La recherche de liens entre les travaux conduits dans ces 2 contextes, l'identification des éléments mathématiques qui sous-tendent les différentes techniques nécessaires (lesquelles techniques constituaient aussi un axe d'analyse) ont contribué à l'organisation d'une cohérence d'apprentissage tout au long des séquences proposées. Pour reprendre l'exemple de la situation 5 dédiée au CP, un débat s'engagea sur les correspondances, similitudes et différences, exprimées en termes d'apprentissage mathématique, entre la situation de géométrie dynamique donnée (reconstituer les figures cibles à partir des figures élémentaires disponibles dans le logiciel) et la situation papier/crayon consistant à reconstituer ces mêmes figures cibles à partir de gabarits papiers. De même, la verbalisation de descriptions de figures cibles (il s'agit ici d'une tâche « ancienne », ce qui se réfère à un autre de nos axes d'analyse) dans l'un et l'autre des contextes géométrie dynamique et papier/crayon fut évoquée, ainsi que la reproduction de ces figures cibles (à partir d'un modèle) ou leur construction (à partir de leurs seules descriptions).

L'axe d'analyse lié aux connaissances instrumentales fut évoqué de manière récurrente, entre autres à propos des techniques de validation. Le logiciel de géométrie dynamique offre en effet, pour de nombreuses situations, des possibilités de validations dont il s'agit dès lors de contrôler l'usage, la dévolution, la construction chez l'élève. Citons à titre d'exemple, la possibilité pour la situation 2, de demander au logiciel, à l'aide de la commande adéquate (ici, la construction du symétrique d'un objet par rapport à une droite), de vérifier que les éléments construits par l'élève sont bien symétriques les uns des autres. Le temps et la durée d'utilisation des connaissances instrumentales avec les élèves furent également évoquées. Les contextes de différentes expérimentations mises en œuvre au sein de l'équipe MAGI furent rapportées. L'une d'elle recourait à la géométrie dynamique tout au long de l'année, de façon constante et régulière. Il en résulte que la gamme de connaissances instrumentales disponibles chez les élèves était large et que les situations proposées laissaient beaucoup d'initiative à la classe pour mobiliser les connaissances instrumentales nécessaires. A l'opposé, d'autres contextes d'utilisation conduits dans d'autres classes ne proposaient qu'un nombre limité et ponctuel de séquences intégrant la géométrie dynamique. Les connaissances instrumentales en jeu furent bien plus modestes et organisèrent les apprentissages mathématiques en intégrant le fait que les élèves ne puissent prendre que des initiatives réduites sur le plan de ces connaissances.

CONCLUSION

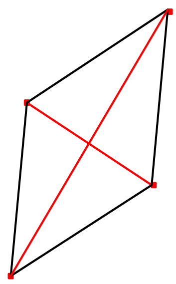
Cet atelier était consacré au problème de l'intégration des TICE dans les apprentissages à l'école et plus précisément, à celui de la géométrie dynamique aux cycles 2 et 3. Il visait à l'utilisation et l'exploitation d'axes d'analyse que nous avons identifiés lors de nos travaux au sein de l'ERT*e* MAGI, ces axes d'analyse étant liés aux connaissances instrumentales, aux différentes techniques possibles, à la dialectique ancien/nouveau, à l'entrelacement des contextes papier/crayon et géométrie dynamique, au rapport des connaissances instrumentales/mathématiques.

Nous pensons que ces axes d'analyse peuvent constituer une entrée pour aborder et traiter du difficile problème de cette intégration. Même s'ils ne prétendent pas organiser et fournir un cadre général, ils n'en constituent pas moins des leviers susceptibles d'éclairer une démarche, de situer des enjeux, de qualifier un positionnement. A ce titre, nous pensons qu'ils permettent d'organiser des directions de travail autant à destination d'enseignants désireux d'intégrer la géométrie dynamique dans leur classe, qu'en direction de collègues en formation initiale ou continue. Cet atelier a proposé un temps de conceptions de séances en groupe, à partir de figures de géométrie dynamique et de compétences mathématiques visées. Lors de la restitution des différentes propositions, les axes d'analyse ont joué leur rôle de structuration, de repérage des enjeux, d'identification précise des possibles et de leurs conséquences, contribuant ainsi à mieux appréhender et s'approprier le difficile problème de l'intégration des TICE à l'école.

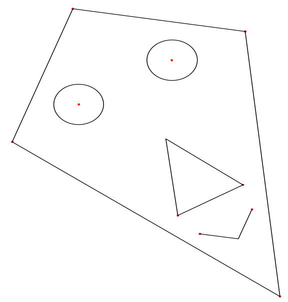
ANNEXE

Nous présentons dans cette annexe la suite des 5 situations proposées aux différents groupes de l'atelier. Chacune d'entre elles est caractérisée par un niveau de classe, des compétences visées et une figure de géométrie dynamique représentée par un ou plusieurs dessins. La tâche demandée consistait à produire une séquence en se positionnant explicitement par rapport aux axes d'analyse demandés : *connaissances instrumentales, techniques possibles, dialectique ancien/nouveau, entrelacement des contextes papier/crayon et géométrie dynamique, rapport des connaissances instrumentales/mathématiques.*

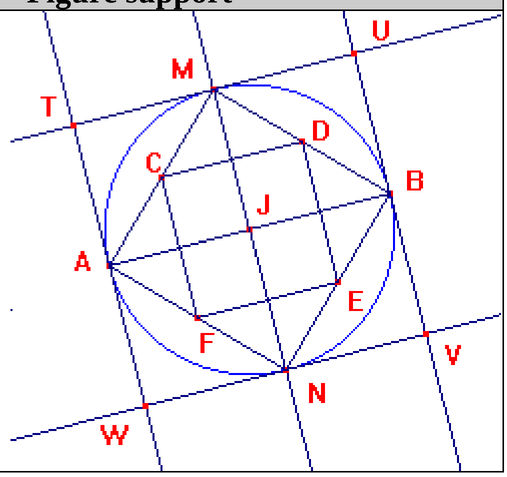
Situation 1

Niveau	Notions à travailler	Figure support
CM2	• symétrie et perpendicularité • milieu d'un segment • report de longueur	• losange dont une des diagonales vaut le double de l'autre 

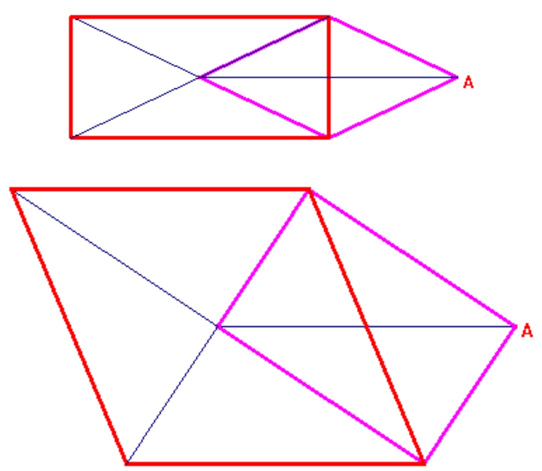
Situation 2

Niveau	Notions à travailler	Figure support
CM2	• perpendicularité et symétrie • angles et report d'angle	• cerf-volant 

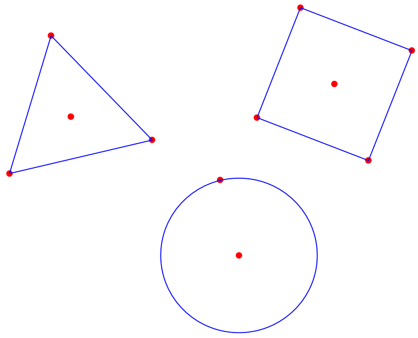
Situation 3

Niveau	Notions à travailler	Figure support
CM2	• reproduction de figures • programme de constructions	• figure « complexe » comprenant des carrés, le segment [AB] étant le premier élément de la construction 

Situation 4

Niveau	Notions à travailler	Figure support
CM2	• propriétés de quadrilatères particuliers : rectangles, losanges	• 2 figures composées d'un rectangle et d'un losange l'un étant appuyé sur les diagonales de l'autre 

Situation 5

Niveau	Notions à travailler	Figure support
CP	• reproduire une figure complexe à partir de figures simples déjà données • décrire une figure et les relations entre les figures simples	• carré, triangle équilatéral, cercle 

BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T (2006), *Degré d'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire*, Actes du Colloque Espace Mathématique Francophones, Sherbrooke Canada, 27-31 mai 2006.

ASSUDE T & GÉLIS J-M (2002), *La dialectique ancien-nouveau dans l 'intégration de Cabri-géomètre à l 'école primaire*, Educational Studies in Mathematics ,50,259-287.

CHEVALLARD Y.(1999), *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, Recherches en didactique des mathématiques, vol.19.2,221-266.

GÉLIS J-M & ASSUDE T (2002), *Indicateurs et modes d 'intégration du logiciel Cabri en CM2*, Sciences et Techniques Educatives ,vol.9,n °3-4,457-490.

ROLET C (2006), Site *Mieux Apprendre la Géométrie dans des Espaces Instrumentés (MAGESI)*, adresse : http://MAGESI.inrp.fr

SOURY-LAVERGNE S (2006), *Instrumentation du déplacement dans l'initiation au raisonnement déductif avec Cabri-géomètre*, Actes du Colloque Espace Mathématique Francophones, Sherbrooke Canada, 27-31 mai 2006.

EXEMPLES DE MODELISATION A L'ECOLE PRIMAIRE ALLEMANDE. QUELS ENJEUX POUR LA FORMATION DES MAITRES ?

Richard CABASSUT
Professeur de mathématiques, IUFM d'Alsace
Didirem, Paris 7
Richard.cabassut@alsace.iufm.fr

Résumé

Cet article présente un atelier au cours duquel une réflexion sur la modélisation est proposée : qu'est-ce que la modélisation et quels sont les objectifs et les enjeux d'une formation à la modélisation ? Cette réflexion prend appui sur les expériences de modélisation à l'école primaire menées en Allemagne par Peter-Koop (2003) et Maaβ (2005) et dont il est rendu compte. D'abord les attentes des participants sont précisées. Ensuite sont présentées les productions de différents groupes de participants à l'atelier, mis en situation de résolution de problèmes de modélisation. Les discussions au sein de l'atelier autour des comptes rendus de chaque groupe sont décrites. Enfin les enjeux pour la formation des maîtres sont questionnés, par les participants à l'atelier et par les résultats des recherches allemandes, dans le contexte de l'émergence de compétences spécifiques tant au niveau international que national.

I – LES ATTENTES DES PARTICIPANTS

Les participants à l'atelier sont d'abord invités à préciser leurs attentes vis à vis de l'atelier et leurs représentations de la modélisation dans l'enseignement des mathématiques.

En ce qui concerne les attentes, des collègues viennent pour savoir comment modéliser à l'école primaire, pour découvrir la conception de la modélisation à l'école primaire allemande ou encore de préciser les enjeux de cette problématique au niveau international. Quels sont les liens entre modélisation et expérimentation ? Comment se situe la modélisation par rapport aux changements de cadres et de registres ?
Les conceptions de la modélisation qui apparaissent sont diverses.
Pour certains, la modélisation concerne une situation extérieure aux mathématiques pour laquelle on recherche un modèle mathématique pour étudier la situation. La modélisation permet de changer de point de vue en passant d'une situation concrète à une écriture mathématique.
Au contraire, pour d'autres, la modélisation dans les premières années de l'enseignement, consiste à travailler un support mathématique abstrait et complexe, qui permettra de découvrir le réel.
Pour d'autres encore, la situation initiale peut être interne aux mathématiques, par exemple dans le domaine géométrique, et le modèle cherché appartient à un autre domaine des mathématiques, par exemple numérique.

Suite à ce tour de table et pour développer ce questionnement et ces représentations initiales, les participants ont été mis en situation de résolution de problèmes de modélisation et confrontés aux résultats d'expérimentation dans ce domaine.

II – MISE E N SITUATION DE MODÉLISATION

Cet atelier propose des exemples de problèmes de Fermi que j'ai découverts dans des articles de Peter-Koop (2003) et Maaβ (2005), où sont décrites des mises en œuvre à l'école primaire et en formation des maîtres en Allemagne. Enrico Fermi (1901-1954), prix Nobel de physique, a proposé des problèmes du type : « combien y a-t-il d'accordeurs de piano à Chicago ? ». Ces problèmes sont ouverts, notamment quant à la précision des données et des questions, ce qui semble assez souvent en rupture par rapport à la pratique française telle qu'elle paraît ressortir par exemple de l'étude des manuels scolaires du primaire. La conception de la modélisation qui transparaît dans les énoncés des problèmes de Fermi est celle d'une modélisation en lien avec les problèmes du monde réel, ce qui est à l'opposé des problèmes mathématiques purs posés hors contexte de vie réelle. Ces ruptures apparentes pourraient favoriser le questionnement sur la modélisation chez les participants de l'atelier.

L'animateur de l'atelier souhaite également distinguer deux niveaux :

- la formation des enseignants, où la réflexion portera sur les objectifs et les enjeux de l'enseignement (par exemple avec un regard critique sur les objectifs de l'enseignement proposés par l'évaluation PISA), et où les procédures proposées qui pourront être savantes (du côté de l'organisation mathématique),
- la mise en œuvre en classe, où sera étudiée l'adéquation avec les objectifs, les connaissances et les compétences proposées par l'institution (par exemple dans les textes officiels des programmes et des documents d'accompagnement) , et où seront proposées des procédures élèves (du côté de l'organisation didactique).

Les participants à l'atelier sont invités à se répartir en quatre groupes (de 4 à 5 personnes) et sont mis en situation de résolution de problème à partir d'un énoncé de problème accompagné de la consigne suivante :

« Dans un premier temps proposer une solution à ce problème en adoptant le point de vue d'un professeur de mathématiques participant à un atelier de formation continue.
Outre votre proposition de solution, vous préciserez les connaissances, les compétences, les procédures et les références mis en jeu dans la solution proposée.
Dans un second temps vous imaginerez la présentation de ce problème à l'école primaire. Eventuellement vous indiquerez quelles adaptations de l'énoncé vous effectuerez. Vous préciserez dans une analyse a priori quelles connaissances, compétences, procédures peuvent être mises en œuvre. Quelles difficultés et quelles remédiations sont envisagées? Vous rendrez compte de vos deux temps de réflexion sur un panneau d'affichage ».

Pour chacun des problèmes, examinons l'énoncé proposé et les affiches et discussions produites.

II – 1 Problème « Quantité de papier utilisé »

Enoncé du problème :

Dans votre groupe, combien de papier utilise un membre de ce groupe pendant une semaine ?

Résolution dans l'atelier :
Dans un premier temps, le groupe de l'atelier propose de commencer par une analyse citoyenne du problème.
Ce problème est-il intéressant ? En formation continue, il concerne un domaine réduit dans les programmes : l'analyse et la représentation des données. Cependant il permet de pénétrer le

processus de modélisation, sans données : c'est le groupe qui va amener le modèle, qui n'est pas suggéré par l'énoncé.
Il y a une dimension citoyenne dans ce problème. Quand on a le souci de vouloir économiser on se pose ce problème. Pour pouvoir entrer dans un problème, doit-on en évaluer la légitimité et préciser sa dévolution ?
Faut-il procéder à une enquête pour rechercher des données ? Quelle recherche d'informations ? Sur quelle période ? Quel est l'objet du calcul ?
Comme on ne peut pas répondre de manière précise, on peut se « rabattre » sur la proportionnalité et estimer globalement une réponse. Dispose-t-on des outils intellectuels pour répondre ?
Dans un second temps, le groupe essaie de résoudre le problème. Il considère un formateur qui, dans une semaine classique, a 9 heures de cours et 3 heures de visites. Pour 3 heures de cours il utilise 3 à 4 feuilles format A4 pour préparer et photocopie 5 feuilles par stagiaire dans un groupe de 30 stagiaires, et 2 à 4 feuilles de réponses par stagiaire soit environ 250 feuilles, soit 750 feuilles pour 9 heures de cours. Lors d'une visite d'1h30, 3 à 4 feuilles sont utilisées pour la prise de notes et un rapport de visite d'une feuille soit environ 10 feuilles. Soit un total de 760 feuilles arrondi à 800 feuilles de format A4, soit 50 feuilles de format A0, donc $50m^2$ à $80g/m^2$, ce qui donne 4kg de papier par semaine.

Résolution à l'école primaire :
Peut-on poser le problème à l'école primaire ? Le groupe converge vers l'affirmative en proposant par exemple un problème citoyen dans le cas d'un projet. Quelle est une dévolution du problème à l'élève ?
Il faut préciser les données prises en compte. Faut-il prendre en compte la consommation de papier toilette pendant la semaine ? S'intéresse-t-on à un élève particulier ou à un élève générique ?
Les types de tâches à réaliser sont par exemple de déterminer pour chaque élève la quantité de papier par semaine. Les techniques mobilisées sont alors une enquête pour chaque élève sur son propre comportement. On constitue une banque de données dont le traitement va nécessiter l'appel à des outils mathématiques (statistiques, calcul, …).
Les compétences concernent l'estimation dans le traitement de l'information.
Les difficultés dépendent du niveau, mais ce serait plutôt un problème de cycle 3.
Comme il faut des données on va nécessairement « lisser » les données : qu'est-ce que j'ai comme « droit », en tant qu'élève, pour lisser ou amender des données ?

II - 2 Problème « Consommation d'eau »

Enoncé du problème :

Dans votre groupe, combien d'eau consomme un membre de ce groupe pendant une semaine?

Non résolution du problème dans l'atelier :
Le groupe considère que l'énoncé manque de précision. Il faudrait préciser ce qu'est la consommation d'eau : faut-il comptabiliser l'eau contenu dans du papier ? dans des fruits ? On ne peut pas répondre à la question dans l'atelier car on n'a pas accès à des données fournies par le compteur d'eau, des revues, des sites internet. Il faut donc préciser de quoi on a besoin pour mesurer la quantité d'eau consommée, ce qui nécessite d' « avoir vécu » : un élève a-t-il ce vécu-là ?
Il faut préciser également ce qu'est un membre du groupe : est-il un individu particulier ou un individu générique ? Il faut également préciser la semaine considérée : est-ce une moyenne

annuelle ou la semaine actuelle ? Il faut ensuite préciser le mode de traitement des données : moyenne, addition, multiplication, proportionnalité.

Résolution à l'école primaire :
Pour les élèves, le groupe considère qu'on peut conserver le même énoncé qui aboutira aux mêmes interrogations. On note l'importance du contrat pour le questionnement et pour mettre au point les protocoles de collecte des données. Plusieurs séances sont nécessaires pour cerner ce que l'on cherche, élaborer une méthode de collecte des données, et la mettre en œuvre, et traiter les données collectées.
Le groupe met en garde contre une collecte des données par une enquêtes sur les habitudes de consommation dans les familles : cela pourrait indiquer un marquage social. La phase de questionnement est très importante et peut amener à des questions : qui paye l'eau, comment ça se paye ? en se méfiant de ne pas tout ramener à l'argent.
Il semble que les compétences mises en œuvre concerne le domaine numérique : la proportionnalité et les aspects statistiques.

II – 3 Problème « Trajet gare d'Austerlitz - tour Eiffel »

Enoncé du problème :

Une classe arrive en train à Paris gare d'Austerlitz pour visiter la tour Eiffel. Vaut-il mieux qu'elle y aille en bus ou en métro ?

Résolution dans l'atelier :
Une position est de considérer qu'on ne peut pas résoudre ce problème. Une autre position, liée au contrat didactique en vigueur dans un groupe, est d'adopter une position d'étude : on me pose un problème et je dois l'étudier. Il semble assez rare d'avoir à effectuer des choix de données.
Quelles seraient les tâches ?

- argumenter pour déterminer les choix des paramètres relatifs au temps (durée, instant), à l'espace (distance, plan), au coût, en évitant de rentrer dans l'affect.
- reconnaître un problème de mathématiques sans données.
- organiser des données (schéma, tableau) en vue d'un choix et d'un traitement.

Résolution à l'école primaire :
Les compétences mises en jeux peuvent concerner l'organisation des données (relatives à la collecte et au traitement des données), et les grandeurs et les mesures (distance parcourue, prix d'un ticket, durée d'un trajet). Il n'y a pas de contenu arithmétique mais plutôt des connaissances sur le raisonnement.
Pour l'exploitation didactique il faut choisir de contextualiser ou non, rechercher les paramètres avec les élèves, puis exploiter ces paramètres pour produire des énoncés plus précis.

II – 4 Problème « Nombre de personnes prises dans un bouchon »

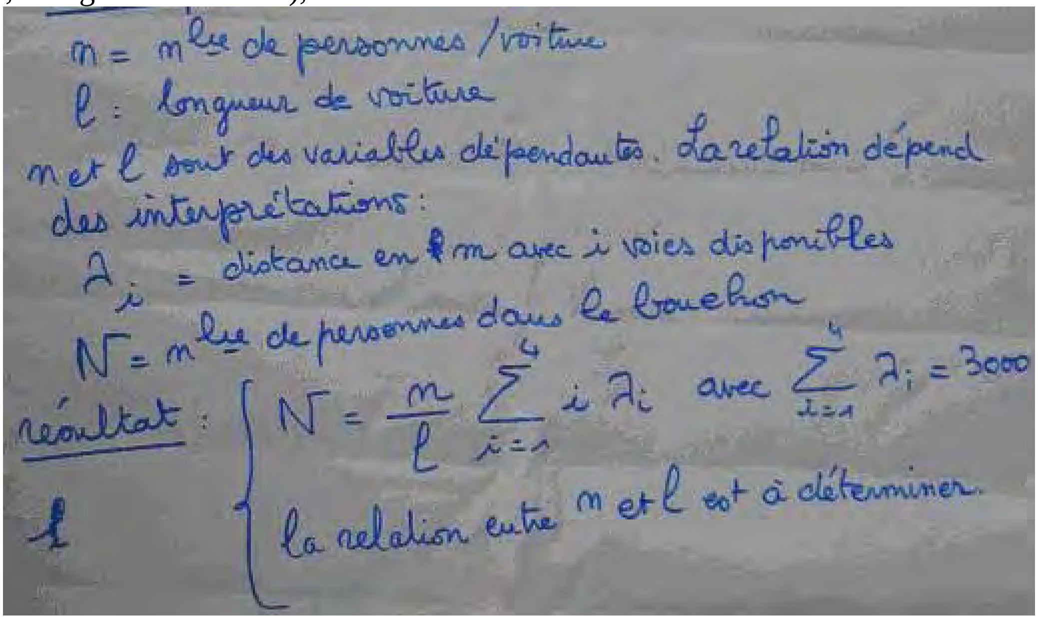
Enoncé du problème :

Sur l'autoroute A10, dans le sens Paris-Dourdan, il y a 3 km de bouchon (sans doute à cause de la fréquentation d'un colloque très prisé sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire). Combien y a-t-il de personnes dans ce bouchon ?

Résolution dans l'atelier

On note la nécessité de formuler des hypothèses complémentaires : d'abord des hypothèses sans corrélations entre elles (nombre de voies, longueur des véhicules, proportion de voitures et de camions …), puis des hypothèses corrélées entre elles (si c'est le week-end, il y a moins de camions …).

Ensuite il faut déterminer les variables choisies (par exemple : n nombre de personnes par voiture, l longueur de voiture), et la formulation des relations entre variables.



Un autre groupe a répondu précisément à la question posée. D'abord en précisant des hypothèses : sur la taille moyenne d'un véhicule (VL véhicule léger : 4m, PL poids lourd : 12m, TC transport commun : 12m), sur l'espace moyen entre deux véhicules (2m), sur le nombre de personnes par véhicule (VL : 2, PL : 1, TC : 50), sur la répartition des véhicules (VL : 70%, PL : 20%, TC : 10%). 100 véhicules sont constitués de 70 VL (avec 6m pour chacun), 20 PL (avec 14m pour chacun), 10 TC (avec 14m pour chacun) et correspondent à une longueur de 840m (70x6+20x14+10x14). Si on considère que l'autoroute a 4 voies et que le bouchon a une longueur de 3000m, alors on a 12000m de longueurs de véhicules, sachant qu'on a 840m pour 100 véhicules, on a environ 1500 véhicules. La répartition des types de véhicules permet d'estimer à environ 10000 le nombre de personnes (1500x0,70x2+1500x0,20x1+1500x0,10x50).

Résolution en classe

Il faut d'abord contextualiser l'énoncé pour motiver la recherche du nombre de personnes. Ensuite il faut prévoir un temps de discussion sur les conditions initiales à retenir, puis, après une mise en commun, choisir ces conditions initiales. Enfin on résout le problème suivant différentes modalités.

III – EXEMPLES DE RÉSOLUTION À L'ÉCOLE ALLEMANDE

Les problèmes proposés dans l'atelier sont inspirés de ceux expérimentés par Peter-Koop avec les énoncés originaux suivants :

- *Combien de papier utilise votre école en un mois ?*

- *Votre classe projette un voyage pour visiter la cathédrale de Cologne. Est-il mieux de voyager en bus ou en train ?*
- *Combien d’enfants sont plus lourd qu’un ours polaire ?*
- *Il y a 3 km de queue sur l’autoroute A1 entre Munster et Brème. Combien de véhicules sont pris dans le bouchon ?*

Le problème du bouchon avait été repris par Maaβ dans une classe 8 (équivalent de la classe de 4ème française) avec une formulation modifiée : *combien de personnes sont prises dans un bouchon de 20km ?* Ce problème est effectivement plus difficile que la question sur le nombre de véhicules pris dans le bouchon.

Peter-Koop définit les critères suivants pour caractériser ces problèmes.
- Les problèmes présentent un défi et motivent intrinsèquement à la coopération et à l'interaction avec des pairs (par rapport aux problèmes traditionnels qui peuvent privilégier une résolution individuelle).
- La formulation des problèmes ne doit pas contenir des nombres. Cela évite que les enfants commencent aussitôt à calculer sans une première analyse du contexte de la situation donnée. Les élèves sont également encouragés à s'engager dans une estimation ou un calcul grossier et/ou à s'engager dans la collecte de données pertinentes.
- Les problèmes doivent être basés sur une sélection de situations liées au monde réel, incluant des contextes de référence pour les classes concernées (lien avec un réel connu de l'élève).
- Les problèmes doivent être ouverts au début aussi bien qu’en conclusion, par rapport aux tâches qui requièrent des prises de décision conformes au processus de modélisation (ouverture des problèmes pour ne pas orienter la modélisation ou l'interprétation des résultats dans le modèle).

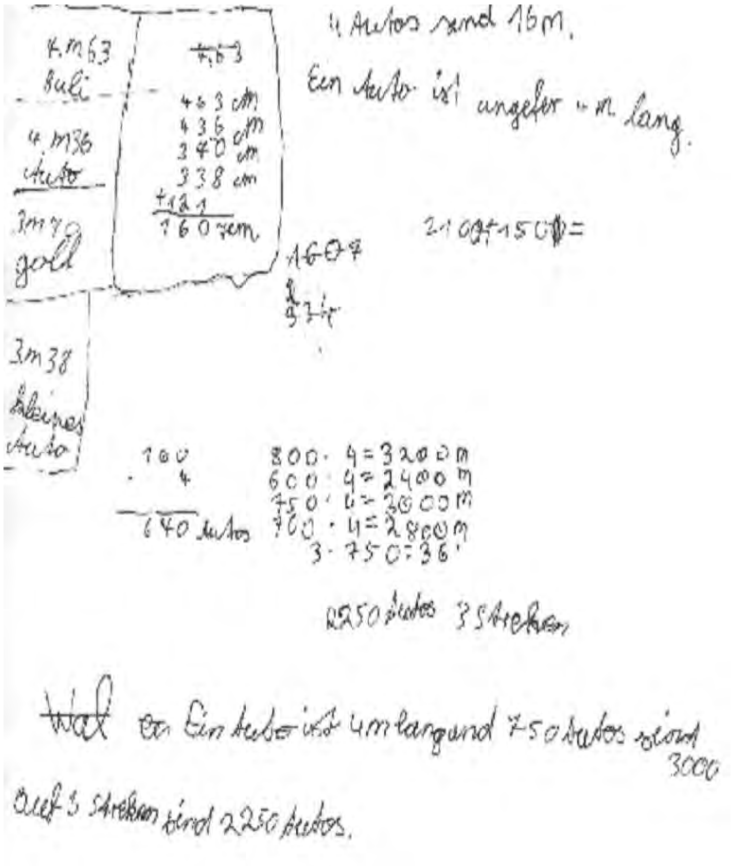
Nous allons illustrer, la mise en œuvre dans des classes allemandes, du problème du bouchon, à partir des comptes rendus de Peter-Koop (2003) et Maaβ (2005)
Dans l’expérience de Peter-Koop, dans une classe de grade 3 (équivalent du CE1) et deux classes de grade 4 (équivalent du CM1). Les élèves se répartissent en groupes de 3 à 5 élèves. Selon les classes les groupes sont choisis hétérogènes ou homogènes du point de vue des difficultés rencontrées habituellement par les élèves.
Dans une classe les groupes sont homogènes : deux « faibles » et deux « forts ». Dans les deux autres classes les groupes sont hétérogènes.
Le contexte de cette expérience est un contexte de recherche : les groupes sont observés par des chercheurs et 23 professeurs stagiaires qui produiront des vidéos, transcripts et interprétations. Un des objectifs de la recherche est de clarifier, comment le processus de modélisation mathématique et la construction du savoir mathématique peuvent réussir avec un travail en petits groupes, notamment lorsque les groupes sont homogènes au niveau des performances.
L’énoncé du problème est le suivant : *sur l’autoroute A1 Munster direction Osnabrück, il y a un embouteillage entre Munster Nord et Greven sur une longueur de 3 km. Combien de véhicules sont pris dans le bouchon ?*
Cet énoncé est présenté en groupe classe en début d’heure (dans une séance de deux périodes) pour permettre de partager les questions de compréhension et leurs réponses, les premières idées et hypothèses. Puis les élèves sont partagés en groupes, suivies chacun par deux professeurs stagiaires. Les groupes doivent produire une affiche qui sera présentée à la classe. Enfin le groupe classe se reconstitue pour suivre et discuter les présentations des affiches de chaque groupe.

Pour la collecte des informations, chaque groupe a estimé nécessaire de mesurer les longueurs de véhicules garés aux abords de l'école.

Extrait de Peter-Koop (2003)

Observons l'affiche produite par groupe d'élèves “faibles”.
Les mesures de longueurs de véhicule effectuées à l'extérieur sont notées : 4m63 Buli, 4m36 voiture (en fait une Mercedes), 3m70 Golf, 3m38 petite voiture (en fait une Peugeot 205).
Ces mesures sont converties en cm, additionnées, ce qui donne une longueur de 1607cm. Ils arrondissent à 16m et concluent : « 4 voitures mesurent 16m. Un auto mesure environ 4m ». Un élève propose de calculer 16 fois 4 sans pouvoir expliquer pourquoi. Après une phase d'embarras, le professeur stagiaire précise que 16 fois 4 correspond à la longueur de 16 voitures. Ce nombre apparaît insuffisant aux 4 élèves et ils proposent de considérer 160 voitures, qui occupent une longueur de 160x4m=640m. On est loin des 3000m de bouchon.

Par une procédure d'essais et ajustements, les élèves trouvent que 3000m est la longueur de 750 voitures. Puis les élèves considèrent qu'il y a trois voies sur l'autoroute, ce qui donne un total de 3x750=2250 voitures.



Extrait de Peter-Koop (2003)

Les résultats de la recherche de Peter-Koop semblent montrer les résultats suivants :
- ces problèmes de Fermi peuvent être résolu par des classes de grade 3 et 4,
- des groupes d'élèves, homogènes ou hétérogènes quant à leur performance scolaire, peuvent résoudre ces problèmes.

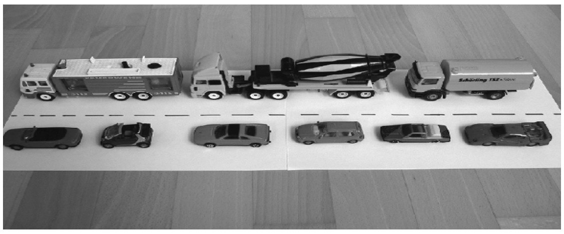
IV - DISCUSSION DANS L'ATELIER

Une conception de la modélisation se limite à la modélisation des situations du monde réel, ce qui est le cas dans l'évaluation PISA, ou dans les mises en oeuvre de peter Koop ou Maaβ et ce qui a tendance à ne pas considérer une autre conception qui élargit la modélisation aux situations intra-mathématiques.

En théorie des modèles, un modèle est une interprétation. On a deux démarches de modélisation. Soit on cherche un modèle et ensuite on cherche des hypothèses pour utiliser ce modèle. Soit on détermine des hypothèses et on modélise ensuite.
En formation d'enseignant, le processus de modélisation peut être décrit dans la manière suivante.
On va de la situation du monde réel vers le modèle mathématique par modélisation. On traite les données dans le modèle mathématique, et l'on produit une solution mathématique. Puis on interprète la solution en déterminant les implications dans la situation du monde réel. Comme

on est parti de la situation réelle, et qu'on y retourne dans la phase finale d'interprétation, Peter-Koop appelle ce processus un cycle de modélisation.
Les résultats de la recherche de Peter-Koop semblent montrer que les problèmes traditionnels proposés à l'école sont plutôt des problèmes à un cycle de modélisation alors que les problèmes de Fermi sont à plusieurs cycles de modélisation.

Dans l'enseignement, on retrouve le cycle de modélisation mais apparaît un autre cycle : le cycle d'illustration. On part d'un problème mathématique qu'on illustre par une représentation d'une situation réelle. On traite cette situation réelle, souvent par des arguments pragmatiques (action, mesure, perception) pour obtenir une nouvelle situation réelle modifiée. On interprète alors cette nouvelle situation réelle pour obtenir une solution mathématique. Par exemple on va illustrer le problème mathématique de combien fait 3+4 par par une manipulation sur des bonbons. Y a-t-il interférence entre ces deux cycles ?
Parfois le cycle de modélisation comprend une modélisation physique intermédiaire : la situation réelle est modélisée dans un premier modèle physique qui sera ensuite modélisé dans un modèle mathématique. On trouve ci-dessous un exemple de première modélisation physique effectuée dans une classe de grade 4 (équivalent de notre CM1) extraite de [Maaβ 2005].



Les compétences mathématiques fréquentées dans les problèmes proposés concernent : l'estimation de la valeur d'un nombre, la proportionnalité, la moyenne arithmétique, les grandeurs et mesures, l'organisation des données. On observe par exemple que la moyenne arithmétique ou la proportionnalité ne sont pas des connaissances exigibles dans l'exemple allemand des grades 3 et 4, mais que les élèves d'un groupe « faible » les font apparaître comme « connaissances en acte ».
Mais des compétences transversales sont également mobilisées, par exemple celles liées à la citoyenneté, du fait de la relation du problème avec la réalité, à la communication (en petits groupes puis en classe entière avec l'exposé de l'affiche) ou encore liées à l'organisation des données (collecte, traitement) souvent attachées à la catégorie des problèmes pour chercher. Le lien avec la réalité permet peut-être de travailler plus facilement cette dimension citoyenne et d'utiliser les ressources de l'environnement réel pour collecter les données, alors que le contrat didactique habituel fait que les données et les questions sont précisées dans l'énoncé du problème.
On retrouve ici la difficulté à aborder un problème pour lequel les données sont à construire évoquée par Maaβ (2005) à propos d'étudiants fréquentant un séminaire de préparation à l'enseignement secondaire : « *Tandis que les étudiants résolvent sans problèmes les énoncés de problèmes traditionnels, ils s'arrêtent sur le problème et se mettent d'accord après quelques temps que le [...] problème n'est pas résoluble, parce que des indications n'existent pas suffisamment. Une réaction tout à fait typique pour des personnes non habituées à ce*

genre de tâches »[1]. Maaβ précise donc que le contrat didactique habituel ne présente pas ce genre de tâches. Il semblerait que l'on soit dans une situation analogue en France.

V – CONCLUSION : LES ENJEUX DE LA MODELISATION POUR L'ENSEIGNEMENT ET LA FORMATION DES MAITRES

A propos de l'enquête PISA, Kuzniak (2006, p.50) précise : *« De manière cohérente, l'enquête PISA privilégie, pour l'évaluation de cette « culture mathématique » des élèves, une approche qui place l'usage fonctionnel des savoirs et savoir-faire dans des situations tirées de la vie réelle au cœur de l'apprentissage des mathématiques. Le processus central sur lequel insistent les concepteurs de l'étude est celui de mathématisation : il s'agit, pour eux, d'un processus qui commence par l'organisation du problème à résoudre en fonction de concepts mathématiques, qui se poursuit, après effacement de la réalité, par la résolution grâce à l'usage d'outils mathématiques, et qui se termine par la communication du résultat en retrouvant le sens du problème initial dans la réalité. Comme le but principal de l'évaluation est d'apprécier les capacités des élèves à résoudre des « problèmes réels », les auteurs ont décidé de ne pas retenir le découpage traditionnel des mathématiques en arithmétique, algèbre, géométrie etc. En effet, selon eux, ce découpage ne se retrouve pas tel quel dans les problèmes issus de la vie réelle ».*
Dans le texte adopté par le parlement européen en 2006, la troisième compétence-clé pour l'éducation et l'apprentissage tout au long de la vie est « culture mathématique et compétences de base en sciences et technologies ». Le texte donne les précisions suivantes : *« La culture mathématique est l'aptitude à se servir de l'addition, de la soustraction, de la multiplication, de la division et des fractions, sous forme de calcul mental et par écrit, pour résoudre divers problèmes de la vie quotidienne [...] Un individu devrait avoir la* ***capacité*** *d'appliquer les principes et processus mathématiques de base dans la vie quotidienne, à la maison et au travail, et de suivre et d'évaluer un développement argumentaire* » (Parlement, 2006)
En France, le socle commun de connaissances et de compétences sera mis en œuvre à l'école primaire dès la rentrée 2007. *« La définition du socle commun prend également appui sur la proposition de recommandation du Parlement européen et du Conseil de l'Union européenne en matière de "compétences-clés pour l'éducation et l'apprentissage tout au long de la vie". Elle se réfère enfin aux évaluations internationales, notamment au Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA) qui propose une mesure comparée des connaissances et des compétences nécessaires tout au long de la vie* » (BOEN, 2006). Une des capacités est « *de saisir quand une situation de la vie courante se prête à un traitement mathématique, l'analyser en posant les données puis en émettant des hypothèses, s'engager dans un raisonnement ou un calcul en vue de sa résolution, et, pour cela : savoir quand et comment utiliser les opérations élémentaires ; contrôler la vraisemblance d'un résultat ; reconnaître les situations relevant de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté ; utiliser les représentations graphiques ; utiliser les théorèmes de géométrie plane [...] L'étude des sciences expérimentales développe les capacités inductives et déductives de l'intelligence sous ses différentes formes. L'élève doit être capable de pratiquer une démarche scientifique : savoir observer, questionner, formuler une hypothèse et la*

[1] « während die Studierenden die herkömmlichen Textaufgaben problemlos lösen, stocken sie bei der [Aufgabe] und stellen nach einiger Zeit übereinstimmend fest, dass die [...] Aufgabe nicht lösbar ist, weil nicht genügend Angaben vorhanden sind. Eine ganz typische Reaktion für Menschen, die an diese Art von Aufgaben nicht gewöhnt sind » Maaβ (2005)

valider, argumenter, modéliser de façon élémentaire ; comprendre le lien entre les phénomènes de la nature et le langage mathématique qui s'y applique et aide à les décrire ».
On voit donc que la relation à la vie quotidienne, à la vie réelle ainsi que la modélisation par les mathématiques prennent une importance nouvelle dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.
Comment la formation initiale et continue des enseignants prendra-t-elle en compte ces changements ?
L'étude des problèmes de Fermi peut-il être un élément de ce dispositif de formation? Permettent-ils de questionner chez les enseignants leur représentation de la modélisation ? Permettent-ils de mettre en œuvre en classe des situations de modélisation qui laissent une initiative plus grande aux élèves dans le choix du modèle, tout en permettant une construction en acte de certains concepts mathématiques ? La grande ouverture dans le choix des données et des conclusions remet-elle en cause le contrat didactique traditionnel ? Cette remise en cause est-elle plus favorable aux apprentissages ? Les problèmes de Fermi doivent-ils être complétés par d'autres types de problèmes de modélisation, plus centrés sur les modèles mathématiques mis en œuvre et sur les procédures de traitement dans ces modèles ?

A notre connaissance, la pratique des problèmes de Fermi semble peu répandue dans l'école primaire française. On a observé dans les productions de l'atelier qu'on pouvait déclarer que le problème ne peut être résolu. Maaβ a observé en formation d'adultes (étudiants ou professeurs) davantage de difficultés à concevoir que ces problèmes puissent être résolus, par rapport aux mises en œuvre en classe. Peter-Koop a mis en évidence une sous-estimation profonde par les professeurs stagiaires des compétences de modélisation des élèves de l'école primaire. C'est dire que les besoins des enseignants à propos de la modélisation et la demande institutionnelle de mise en place du socle commun nécessitent la mise en place de formations des enseignants à la modélisation. Un projet Comenius européen LEMA essaie de produire une formation à la modélisation pour les enseignants de mathématiques : « *A travers l'Europe se développe la prise de conscience que les élèves ont besoin de davantage d'expériences sur une application critique des mathématiques afin de bien les préparer à devenir citoyens et travailleurs efficaces. Ceci requiert de nouvelles compétences pour les professeurs qui, actuellement, dans la plupart des cas, ont des difficultés à intégrer les mathématiques appliquées dans la pratique quotidienne de la classe. Ce projet propose de soutenir chez les professeurs l'essor de pratiques pédagogiques de modélisation et d'application des mathématiques, par le développement d'un cours de formation pour enseignants. Le but serait, tout en développant une approche commune, de proposer un cours flexible et adaptable aux besoins des pays partenaires actuels ou ultérieurs. La diversité des bonnes pratiques courantes parmi les pays partenaires sera prise en compte pour le développement du cours. Les groupes cibles sont les professeurs de l'école primaire et du début de l'école secondaire, en formation initiale ou en formation continue* ». Rendre compte de ce projet dépasse le cadre de ce compte-rendu mais pourrait s'inscrire dans le cadre d'une communication au prochain colloque de la Copirelem, sur la modélisation, à Troyes, en 2007.

BIBLIOGRAPHIE

BOEN (2006) *socle commun de connaissances et de compétences,* bulletin officiel de l'éducation nationale n° 29 du 20 juillet 2006.

KUZNIAK A. (2006) *« Diversité des mathématiques enseignées « ici et ailleurs » »*,in Actes su 23^{e} colloque Copirelem, Strasbourg, 47-66.

LEMA **L**earning and **E**ducation in and through **M**odelling and **A**pplication site consulté le 23/12/06 : http://www.alsace.iufm.fr/web/ressourc/pedago/discipli/maths/lema/fr/tout.html

MAAβ Katja (2005) *« Stau-eine Aufgabe für alle Jahrgänge! »*, in Praxis der Mathematik in der Schule, Juni 2005, **47**. Jg., 8-13

PARLEMENT EUROPÉEN (2006) *Compétences clés pour l'éducation et la formation tout au long de la vie* , consulté le 23/12/06 sur le site http://www.europarl.europa.eu/sides/getDoc.do?Type=TA&Reference=P6-TA-2006-0365&language=FR#BKMD-10

PETER-KOOP A. (2003) *« Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau? », Modellbildungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Problemen in Kleingruppen*, In : Ruwisch, Silke & Peter-Koop, Andrea (Hg.) : Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule, Offenburg : Mildenberger Verlag, 111-130.

MIEUX APPROCHER LES CONCEPTS MATHÉMATIQUES PAR UNE MEILLEURE CONNAISSANCE DU LEXIQUE

Annie CAMENISCH
Maître de Conférences Lettres, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
annie.camenisch@alsace.iufm.fr

Serge PETIT
Professeur de mathématiques, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
serge.petit@alsace.iufm.fr

Résumé

L'atelier s'inscrit dans le cadre de la maîtrise de la langue dans les disciplines. Les participants à l'atelier ont été amenés à manipuler des mots de la langue française utilisés en mathématiques afin de leur donner davantage de sens.

Ils ont été invités à s'interroger sur les processus de formation des mots et sur les impacts en classe de mathématiques d'un travail réalisé sur le lexique, tant au niveau de la maîtrise de la langue que de la compréhension des mathématiques.

L'atelier vise à faire prendre conscience aux participants qu'il est possible de réaliser des apprentissages sur la langue, ici sur le lexique, à partir des mathématiques. Ces apprentissages permettent de mieux se représenter les objets mathématiques à partir de leurs désignations verbales et d'exercer des activités intellectuelles d'analyse de la langue.

I – FORMATION DES MOTS MATHÉMATIQUES

I – 1 Désignation de solides

En guise d'introduction, il a été demandé aux participants de nommer des solides dont le nombre de faces avait été donné (treize, dix-sept, dix-huit et dix-neuf faces). Un seul participant a désigné correctement les solides. Les autres ont soit rendu feuille blanche, soit inventé des mots à partir d'éléments de mots mathématiques qu'ils connaissent (exemple : treize faces, treizèdre…).

La difficulté à désigner ces objets montre que même des spécialistes des mathématiques qui, pourtant, maîtrisent les concepts mathématiques et des mots savants de la langue comme *polyèdre, hexagone…* ne parviennent pas à mobiliser leurs connaissances linguistiques pour analyser ces mots afin de construire de nouveaux mots dans le code cohérent en usage.

Dans les classes, les élèves cumulent à la fois des difficultés conceptuelles (nature des objets) et linguistiques (leurs désignations).

Cela montre la nécessité de travailler sur la formation et le sens des mots utilisés en mathématiques.

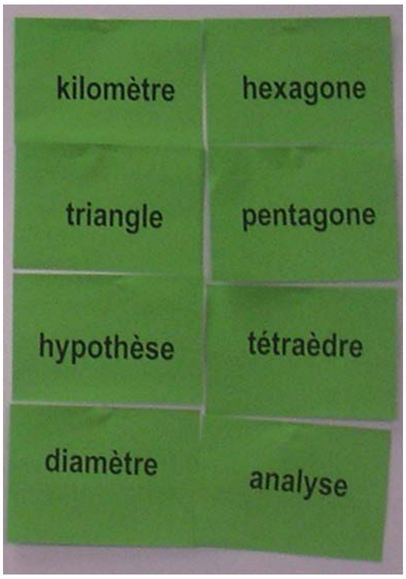
I – 2 Classement de mots

Un corpus d'une vingtaine de mots mathématiques (voir en annexe) a été proposé aux participants afin qu'ils les classent selon *la manière dont ces mots ont été fabriqués.*

Les productions des groupes sont très variées. Un groupe a classé les mots par nombre de lettres, les autres groupes, après bien des échanges, ont produit des classements essentiellement gouvernés par le sens des mots, mais marqués partiellement par des processus de fabrications, faisant état de *suffixes, préfixes…*Les participants ont des difficultés à se dégager du sens des mots pour se centrer sur leur processus de fabrication.

La mise en commun par confrontation des affiches n'a pas mis en évidence ces processus de formation des mots. Elle a cependant fait émerger les représentations des participants sur la formation des mots par l'emploi du métalangage *préfixe, suffixe, racine* ou *radical.*

Les mots ont alors été collectivement reclassés, après tâtonnements et débats entre les participants (formateurs en retrait), en suivant des critères relatifs aux termes ci-dessus, plus aptes à décrire la formation des mots.



Pendant la mise en commun, le groupe a retenu trois classes de mots, les mots « racines ou génériques », les mots obtenus par adjonction d'un *suffixe* à un *radical*, ceux obtenus par adjonction d'un *préfixe* à un *radical*. Le mot *polygone* a posé problème à certains participants qui y voient une formation de type adjonction d'un *radical* à un *radical*. Ce doute a remis en questions le classement initial des mots de l'image ci-contre qui semblent être formés comme le mot *polygone*. Dans le débat, il est apparu que ces mots traduisent en fait l'adjonction d'une idée à une autre idée. Des stagiaires l'ont traduit par *idée* + *idée*. Ce qui les différencie des préfixes et des suffixes qui ne portent pas d'*idée* par eux-mêmes. L'élément de mot *gone* traduit, par lui-même, en dehors de tout contexte le sens d'angle alors que le suffixe *-eur* ou le préfixe *in*– ne sont porteurs d'aucun sens à l'état libre.

Un deuxième jeu de mots (voir en annexe) a été distribué aux participants pour tenter de résoudre ce problème. Une porte de la résolution est ouverte par la comparaison des mots *goniomètre* et *polygone* ; mots dans lesquels l'élément *gone* apparaît une fois en début de mot, une fois en fin de mot et ne peut donc être ni un préfixe ni un suffixe. Il fallait donc pourvoir désigner la classe de ces mots. C'est ainsi qu'ont été précisés les sens des mots comme *préfixe, suffixe, radical, base, élément…*

On a donc été amenés à classer les mots selon qu'ils étaient :

- dits simples,
- formés de deux parties ayant un sens dans une langue autre que le français (*composition savante*),
- formés par *dérivation* (adjonction d'affixe(s) -préfixe ou suffixe- au radical d'un mot).

Un diaporama a illustré les principes de formation des mots. Il a été suivi d'une phase de structuration orale mettant en relief les points suivants :

- un constat : en mathématiques on travaille avec beaucoup de mots dont certains présentent des ressemblances,
- un apprentissage en Observation Réfléchie de la Langue Française : le classement et la manipulation permettent de comprendre comment les mots sont fabriqués sans *plaquer* des concepts mal maîtrisés,
- un apprentissage en mathématiques : donner du sens aux mots permet de mieux construire le concept sous-jacent.

II – SENS DES MOTS MATHÉMATIQUES

Les participants ont été invités à « découper » des mots savants, essentiellement mathématiques, en deux *éléments* porteurs chacun d'un sens indépendamment du mot dans lequel ils se trouvent insérés, en les croisant avec des définitions.

Par exemple :

dodécaèdre : solide ayant douze faces

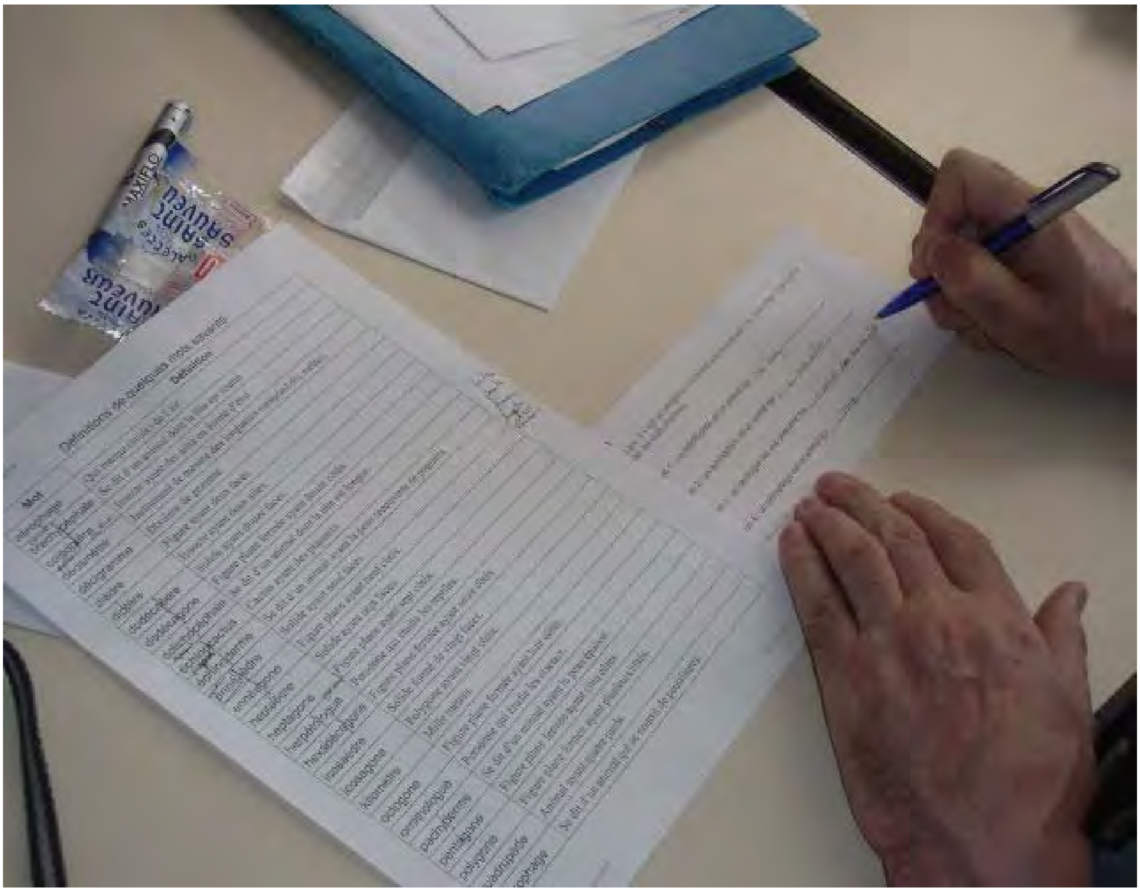
diptère : insecte ayant deux ailes

heptaèdre : solide ayant sept faces

coléoptère : insecte ayant des ailes en forme d'étui

Il s'agit de comparer les mots entre eux en relevant ce qui est commun dans l'écriture de mots et dans la définition et ce qui ne l'est pas, afin d'émettre des conjectures sur le sens de chacune des parties de mots (qui pourraient être des *éléments* de mots).

Ainsi, on remarque que *–èdre* semble vouloir signifier *face*. On en déduit alors que *hepta* peut signifier *sept* et *dodéca douze*, ce que l'on confirmerait en croisant avec d'autres mots recherchés dans le corpus, par exemple avec *heptagone* (figure plane ayant sept côtés) qui confirme le *sept*. Par contre, ce mot pourrait laisser entendre que *gone* signifie *côté*. Ce qui n'est pas le cas, comme on pourrait le vérifier avec le mot *goniomètre* (instrument de mesure des angles).



Nous en avons conclu que pour comprendre le sens d'un mot scientifique :

- On imagine une décomposition de ce mot ;
- On émet des conjectures sur un sens possible à chacune des parties trouvées (on confronte à d'autres mots connus ou cherchés) ;
- On s'assure que le sens du mot décomposé peut être obtenu à partir des sens des éléments découpés .

Ce travail se termine par un jeu où, en groupes, les participants doivent trouver le sens de mots savants, réels ou inventés, hors du domaine des mathématiques, à l'aide d'un dictionnaire *ad hoc* (voir en annexe) distribué aux participants.

Exemple : *ptérophage, échinoptère, dolichopède…*

Le travail sur le sens des mots permet d'émettre des conjectures sur le sens de mots nouveaux et de se rendre compte qu'un bagage relativement restreint d'éléments de mots permet d'accéder à un grand nombre de mots et ainsi d'économiser de la mémoire.

III –CRÉATION DE MOTS SAVANTS

Le travail précédent qui consiste à découvrir le sens d'éléments de mots permet, à partir de ces éléments, de construire des mots nouveaux, lexicalisés ou non. Un second jeu a été proposé aux stagiaires. Il s'agissait, à partir d'une définition en français courant de désigner, à partir d'un mot savant, l'objet en question. Par exemple :

Il se nourrit d'oiseaux, c'est un …

Il a sept têtes, c'est un …

Dans ce type de jeu, on peut par exemple fabriquer le mot *tetragone* pour désigner un quadrilatère, ce qui conduira à s'interroger de façon plus fine sur le lexique des mathématiques. Ce mot *tetragone* se trouve dans le dictionnaire, il est donc lexicalisé, et n'a pas le sens de *quadrilatère*. Il s'agit d'une plante désignée ainsi du fait de la forme géométrique tetragonale de ses feuilles.

Le questionnaire de début de séance a été proposé une nouvelle fois aux participants qui ont tous réussi à désigner les solides par leur nom savant.

Un diaporama a relaté une séquence réalisée dans une classe de CM2[1], visant à désigner scientifiquement le nom de tous les solides de quatre à vingt faces que les élèves avaient fabriqués. Cette séquence comportait des séances centrées sur les points suivants :

- Classement de mots sans consigne (mots mathématiques et autres) ;
- Classement de mots avec consigne (selon la manière dont les mots sont fabriqués) afin de distinguer trois types de mots ;
- Découpage de mots en éléments avec recherche de sens de chacun des éléments
- Jeux (analogues à ceux décrits ci-dessus) ;
- Désignation de polyèdres à partir des noms de nombres grecs.

[1] Une partie de ce travail a été relatée dans le *Journal des Instituteurs* N°5 (N°1574), Dossier « Mathématiques : comprendre l'énoncé de problèmes », janvier 2004, p.20-21.

CONCLUSION

Ce travail, très motivant pour les élèves qui le considèrent comme jeu auquel ils se donnent pleinement, a semble-t-il eu le même impact sur les participants de l'atelier. Il a lié mathématique et lexique, c'est-à-dire, mathématiques et maîtrise de la langue. Ce travail intellectuel d'analyse et de synthèse sur la langue en mathématiques est transférable à d'autres disciplines (sciences, histoire, littérature…). Sa méthodologie est transférable à d'autres objets d'apprentissages sur la langue.

Ce travail contribue de plus à donner davantage de sens aux objets mathématiques (concepts) à partir de leur désignation verbale.

BIBLIOGRAPHIE

COLL. *Le petit Robert, Dictionnaire de la langue française*, Le Robert, Paris, 1998.

COLL. *Le Robert brio, Dictionnaire de la langue française*, Le Robert, Paris, 1998.

COLL. *Dictionnaire étymologique et historique du français*, Larousse, Paris, Mai 1998.

COLL. *Dictionnaire de la langue française, Lexis,* Larousse, Paris, Mai 1986.

PICOCHE J. *Dictionnaire étymologique du français,* Le Robert, Paris, 2004.

ANNEXES

Liste de mots classés et analysés

Première liste de mots			
kilomètre	triangle	polygone	hexagone
carré	pentagone	losange	côté
longueur	tétraèdre	hauteur	angle
multiple	additionner	multiplier	largeur
hypothèse	vingtième	dixième	centaine
diamètre	inégal	infini	analyse
Seconde liste de mots			
kilogramme	décamètre	calligramme	hypothénuse
goniomètre	parallélogramme	rectangle	octogone
dodécaèdre	métropole	polyèdre	dialyse
géométrie	isocèle	quadrilatère	litre

Petit dictionnaire de mots savants

Mot	Définition
aérophage	Qui mange (avale) de l'air.
brachycéphale	Se dit d'un animal dont la tête est courte.
coléoptère	Insecte ayant des ailes en forme d'étui.
décamètre	Instrument de mesure des longueurs mesurant dix mètres.
décigramme	Dixième de gramme.
dièdre	Figure ayant deux faces.
diptère	Insecte ayant deux ailes.
dodécaèdre	Solide ayant douze faces.
dodécagone	Figure plane fermée ayant douze côtés.
dolichocéphale	Se dit d'un animal dont la tête est longue.
échinocactus	Cactus ayant des piquants.
échinoderme	Se dit d'un animal ayant la peau recouverte de piquants.
ennéaèdre	Solide ayant neuf faces.
ennéagone	Figure plane ayant neuf côtés.
heptaèdre	Solide ayant sept faces.
heptagone	Figure plane ayant sept côtés.
herpétologue	Personne qui étudie les reptiles.
hexadécagone	Figure plane fermée ayant seize côtés.
icosaèdre	Solide formé de vingt faces.
icosagone	Polygone ayant vingt côtés.
octogone	Figure plane fermée ayant huit côtés.
ornithologue	Personne qui étudie les oiseaux.
pachyderme	Se dit d'un animal ayant la peau épaisse.
pentagone	Figure plane fermée ayant cinq côtés.
polygone	Figure plane fermée ayant plusieurs côtés.
quadrupède	Animal ayant quatre pieds.
saprophage	Se dit d'un animal qui se nourrit de pourritures.

DE L'UTILISATION DES JEUX DU COMMERCE EN FORMATION INITIALE ET CONTINUE

Liliane SOSSA
PIUFM, IUFM de Créteil
liliane.sossa@wanadoo.fr

Résumé
L'atelier s'est déroulé en deux temps. Après un tour de table qui a permis d'échanger sur l'utilisation de jeux lors des formations initiales et continues, nous avons présenté quelques jeux commercialisés, en particulier par DIDACTO, et avons analysé certains d'entre eux de manière approfondie, à partir d'une grille élaborée en première partie.
Cet article comporte l'analyse de nombreux jeux qui constitue une ressource intéressante pour la formation.

INTRODUCTION

Les programmes de l'école primaire 2002 insistent sur l'importance du jeu et préconisent son utilisation non seulement à l'école maternelle, mais aussi à l'école élémentaire. De nombreux jeux du commerce sont tout-à-fait pertinents pour l'apprentissage des mathématiques. Il est donc important pour les maîtres d'être capable de les analyser, d'y repérer les compétences mathématiques mises en œuvre et de réfléchir à la place que ces jeux occupent dans les apprentissages. De plus, beaucoup de mémoires professionnels prennent *le jeu* pour thème de recherche, thème qui est aussi très présent dans de nombreuses revues pédagogiques. Pour toutes ces raisons, il nous semble important de l'introduire en formation initiale et continue et d'échanger sur nos pratiques de formateur. Quelles formations mettre en place, à l'IUFM, autour de l'utilisation du jeu mathématique ? Quel jeu choisir ? Quels critères d'analyse ? A quel moment l'introduire ?...

Dans une première partie, nous avons échangé sur les différentes pratiques des participants et avons dégagé une grille d'analyse de jeux. Pendant la deuxième partie de l'atelier, nous avons présenté quelques jeux que nous avions préalablement sélectionnés puis nous avons analysé plus particulièrement certains d'entre eux.

I COMPTE RENDU DES ECHANGES

I – 1 En formation initiale

De nombreux collègues utilisent des jeux en formation initiale, surtout pendant le module de formation « maternelle ». Cependant le travail d'analyse pose problème à un certain nombre de PE2 qui ont du mal à anticiper sur les réussites et difficultés des élèves Un participant intervient pour préciser qu'il filme, dans une classe, une activité de jeu mathématique et, avant de la visionner aux PE2, il leur demande d'imaginer la séance. En général,les stagiaires peuvent alors apprécier le décalage entre ce qu'ils imaginaient et la réalité. Par ailleurs, tous les participants à l'atelier s'accordent sur l'importance du moment où les PE2 vont découvrir le jeu, en jouant. Ce moment de découverte est incontournable car il leur permet d'entrer dans le jeu en situation. Les compétences mathématiques apparaissent mieux dans un deuxième temps consacré à l'analyse en particulier après des moments « d'arrêt sur image » qui permettent de bien comprendre les enjeux. « L'arrêt sur image » est une analyse du déroulement du jeu à un instant *t* pour expliquer la situation présente et favoriser l'anticipation des actions des joueurs afin de dégager une stratégie gagnante. Certains participants évoquent l'article de Jeanne Bolon, intitulé *"Comment analyser un jeu mathématique?"*[1], dans lequel la grille d'analyse proposée, illustrée par le jeu des chemins de Lucette Champdavoine[2], est jugée très pertinente par toutes les personnes présentes qui proposent alors de se l'approprier en retenant les points suivants :

a) Type de jeu

b) Caractéristiques

- **Matériel**
- **Nombre de joueurs**
- **Durée d'une partie**
- **Niveau**

c) But du jeu/Déroulement

- **But du jeu**
- **Déroulement**
- **Variante(s)/Différenciation pédagogique**

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s)**
- **Compétence(s) sollicitée(s)**

---

[1]J. BOLON *« Comment analyser un jeu mathématique »* in Documents pour la formation de professeurs des écoles en didactique des mathématiques, Colmar 1993.

[2] L. CHAMPDAVOINE « *Les mathématiques par les jeux* », Nathan 1985.

Une collègue atteste s'en servir, régulièrement, en formation pour l'analyse des jeux de L. Champdavoine.

Quelques intervenants utilisent certains jeux du commerce que nous avions sélectionnés et, parfois, ils les adaptent ou en fabriquent d'autres à partir de l'un d'eux. D'autres participants s'attachent à développer les caractéristiques fondamentales du jeu (il y a souvent confusion entre jeu et situation ludique) et à conduire une réflexion sur ses intérêts pédagogiques en proposant la lecture de l'article « *Le jeu au service des apprentissages* » de L. Royes et C. Maurin.[3]qui reprend les cinq critères de G. Brougère pour déterminer un vrai jeu (la présence du second degré, la décision du joueur, la règle, l'incertitude et la frivolité). De nombreux jeux ont retenu l'attention des collègues : ceux de F Boule, ceux de l'APMEP, les mallettes de jeux ERMEL ou encore les jeux connus et pratiqués dans le cadre de l'IUFM comme le jeu de loto de la table de Pythagore. D'autres jeux ont aussi été évoqués comme le jeu du serpent, ou Logix qu'on trouve aussi sous le nom de « métaforme » ou encore ceux de notre patrimoine culturel comme le jeu de l'oie, de dames ou d'échecs .

La règle des jeux est parfois rebutante pour les PE, comme pour les élèves, il est donc important de promouvoir des jeux dont la règle est simple et vite intégrée. Pour des jeux à règle plus complexe, on suggère d'expliciter la règle avec une simulation collective du jeu.

Un collègue demande à chaque PE2 de proposer un jeu pendant chaque stage et de rédiger une fiche d'analyse qui sera mise à disposition du groupe afin de mutualiser les pratiques et d'enrichir le répertoire des jeux. Pendant le module de formation « maternelle », une autre collègue fait tester aux PE2 des jeux collectés dans les écoles. Les stagiaires doivent s'interroger sur la façon de les introduire et à la séance suivante ils doivent présenter un jeu simple et peu onéreux. Elle insiste sur la nécessité de faire verbaliser, de faire anticiper car cette étape réflexive est indispensable. Ce travail réalisé par les PE2 peut constituer une partie de leur évaluation de mathématiques.

Une autre proposition est faite d'aller visiter une ludothèque avec les PE2 (elles sont de plus en plus nombreuses), et d'y tester quelques jeux. La connaissance et l'aide spontanée apportées par le personnel dans la mise en œuvre du jeu sont à prendre en compte. En effet, il ne faut pas négliger l'existence de ce type de structure, au même titre que les bibliothèques, pour développer l'usage des jeux à l'école car les jeux que l'on y trouve sont autant utilisables que ceux fabriqués par l'enseignant.

I – .2 En formation continue

En formation continue, les enseignants titulaires se déclarent vivement intéressés par ce support ludique qui peut susciter l'adhésion des élèves et les aider à progresser. Cependant, ils nous questionnent sur la place et le rôle des jeux dans les apprentissages, sur le rôle du maître. Nous

[3] L. ROYES, C. MAURIN « *Le jeu au service des apprentissages* » in Actes du XXIXe colloque inter-IREM de la Roche-sur-Yon, Mai 2002.
F Boule « *Jeux de calcul , au cycle et 3* »Ed Bordas 2002
APMEP « *Jeux 5,6 7* » Publications APMEP (1998,2002,2005)

avons essayé de dégager quelques points importants pour répondre aux demandes de nos collègues. Le jeu doit être complètement intégré dans la progression pédagogique, son utilisation doit s'accompagner d'une articulation avec les autres activités mathématiques. Il peut donner du sens à certaines compétences que le joueur devra mobiliser pour gagner, il peut permettre aux élèves de réinvestir des compétences, de s'entraîner de façon ludique pour consolider leurs connaissances, il peut favoriser des raisonnements analogiques ou déductifs mais aussi les interactions entre les élèves. Selon sa fonction, sa place varie dans le processus d'apprentissage et c'est au maître de le décider par une réflexion préalable et une progression bien pensée. Le rôle du maître est essentielle. En amont, il établit une progression, choisit les jeux. Pendant le jeu, il explique la règle, observe, régule, aide et accompagne. Après le jeu, il évalue et fait évoluer le jeu.

Une collègue propose que chaque stagiaire apporte un jeu dont il se sert en classe, le présente au groupe et précise les conditions de son utilisation en classe ainsi que les objectifs pédagogiques. Une autre fait la même proposition en y ajoutant la contrainte d'apporter un jeu qui n'est pas utilisé en classe. L'avantage de ces modalités est de mutualiser les pratiques, d'augmenter le potentiel de jeu de l'école, de réfléchir ensemble sur l'intérêt de certains jeux, de pouvoir les adapter, les faire évoluer en fonction du niveau de compétence. Un autre suggère qu'à l'issue de chaque stage de FC, les participants puissent emporter un jeu fabriqué et analysé pendant le stage, avec le projet de l'utiliser en classe et de faire un retour sur leurs pratiques.

Une préoccupation souvent évoquée est la gestion de la classe, le bruit et l'agitation engendrés par la mise en place de jeu. Les enseignants de l'école maternelle ont, en partie, résolu ce problème en pratiquant le décloisonnement l'après-midi, en utilisant la présence d'adultes dans l'école, en fonctionnant en ateliers. Certaines écoles élémentaires ou maternelles ont instauré des moments privilégiés de pratique de jeu et ces moments sont majoritairement le samedi matin avec la présence de parents volontaires que les enseignants ont initiés. Ces expériences se sont révélées positives dans la pratique du jeu à l'école mais aussi dans la découverte du plaisir de jouer en famille.

Deux heures d'échange n'ont pas permis d'aller plus loin car la troisième heure était consacrée à la découverte et l'analyse, par binôme, d'un jeu proposé par Catherine BOSSUT de DIDACTO

II – ANALYSE DE QUELQUES JEUX MATHEMATIQUES

Après une présentation de quelques jeux par les animatrices, les participants ont découvert un jeu en y jouant par binôme ou trinôme et l'ont analysé suivant les critères de la grille dégagée en première partie de l'atelier. Malheureusement, par manque de temps, seul un groupe a pu finaliser ce travail d'analyse sur le jeu des « petits malins » et nous l'a communiqué. Liliane Sossa a terminé ce travail pour qu'il figure dans les Actes du Colloque.

II. 1 JEUX POUR LE CYCLE 1

Nous avons évoqué les jeux coopératifs comme *Le verger*, *Felix Flosse* où le but du jeu est de gagner tous ensemble contre le héros du plateau de jeu (le corbeau dans *Le verger*, le méchant poisson Bloup dans *Felix Flosse.* Nous en avons analysé quelques uns. Ces jeux ont beaucoup de succès en maternelle où les enfants ont des difficultés à accepter de perdre.

1.1 FELIX FLOSSE OU FELIX FLOTTE (*en français*)

a) **Type de jeu** : jeu coopératif

b) **Caractéristiques** : jeu de plateau avec un déplacement sur un parcours à l'aide d'un dé.

- **Matériel :** 1 plateau de jeu, 1 gros poisson *Bloup,* 20 petits harengs de couleur (5 roses, 5 jaunes, 5 bleus et 5 verts), 1 dé à points et 1 dé à poissons.

- **Nombre de joueurs :** de 2 à 6 joueurs.

- **Durée d'une partie :** 15 à 20 minutes.
- **Niveau :à** partir de la fin de la PS, MS et GS.

c) But du jeu/déroulement :

- **But du jeu :** Réussir à rassembler tous les petits harengs, qui se cachent dans les coins du plateau de jeu, au milieu du poisson arc-en-ciel avant que *Bloup* en ait mangé 4.
- **Déroulement :** *Bloup* nage autour du poisson arc-en-ciel dans le sens des aiguilles d'une montre. Chaque joueur, à tour de rôle, lance le dé à poissons. S'il tombe sur un petit hareng, il prend un petit poisson dans l'un des coins et le place dans le poisson arc-en-ciel. S'il tombe sur *Bloup*, celui-ci se met en mouvement grâce au dé à constellations et avance du nombre de cases correspondant. Les cases, sur lesquelles se déplace *Blou*p, ont diverses significations : *Bloup* avale un hareng d'une certaine couleur (s'il existe un hareng de cette couleur dans le poisson arc-en-ciel, il rejoindra le ventre de *Bloup*, sinon, il ne se passera rien) ; *Bloup* recrache des harengs, qui regagnent tous les coins du jeu ; *Bloup* n'a plus faim, il ne se passe rien.
- **Variantes/différenciation pédagogique :** pour dynamiser le jeu, on peut aussi utiliser le dé à points. Quand, sur le premier dé apparaît le symbole du petit poisson, un nombre de harengs correspondant à la constellation du dé iront rejoindre le poisson arc-en-ciel. En GS, on peut proposer au lieu du dé à points, un dé chiffré de façon à développer la reconnaissance de l'écriture chiffrée.

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence visée :** Savoir reconnaître les constellations du dé.
- **Compétence sollicitée :** Savoir associer le nombre de cases du parcours (et le nombre de poissons pour la variante proposée) au nombre de points indiqués sur le dé.

Ce jeu coopératif HABA est très attractif, les couleurs sont jolies ; les enfants apprécient.

1.2 LE VERGER

a) **Type de jeu :** Jeu de coopération

b) **Caractéristiques**

- **Matériel :** un plateau de jeu, 10 pommes, 10 poires, 10 prunes et 10 paires de cerises ; 4 paniers ; 1 puzzle de 9 pièces représentant le corbeau et un dé avec couleurs et symboles.

- **Nombre de joueurs :** de 2 à 4 joueurs ou plus si on augmente le nombre de paniers ou si on prend un panier pour 2 joueurs.

- **Durée d'une partie :** 10 à 15 minutes.

- **Niveau : à** partir de la fin de la PS, MS, GS.

c) **But du jeu/déroulement**

- **But du jeu :** les joueurs essayent de cueillir tous les fruits avant que le puzzle du corbeau ne soit terminé.

- **Déroulement :** les fruits sont répartis sur les arbres correspondants, illustrés sur le plan de jeu .Chaque joueur prend un panier. Les 9 pièces du puzzle sont détachées du cadre et empilées. Suivant le lancer du dé, on doit cueillir un fruit de la couleur indiquée sur le dé ou deux fruits de n'importe quelle couleur si on obtient le symbole « panier » ou placer une pièce du puzzle au milieu du jeu à l'emplacement prévu si on obtient le symbole « corbeau ». Si les joueurs terminent la cueillette de tous les fruits avant la reconstitution du puzzle du corbeau, ils ont tous gagné contre le corbeau, sinon c'est le corbeau, le vainqueur .

- **Variante(s)/Différenciation pédagogique :** On pourra, en prenant garde de ne pas dénaturer ce jeu de coopération, à partir de la MS/GS, dénombrer dans chaque panier le nombre de fruits de façon globale ou par catégorie avec le problème de la parité des cerises qui peut être très intéressant à aborder.

d) Compétences visées /Sollicitées

Savoir associer les couleurs du dé à celles des fruits et prendre en compte les autres indications du dé. Dénombrer des quantités dans la variante proposée.

Ce jeu coopératif HABA a beaucoup de succès auprès des enfants de maternelle ; c' est un jeu à introduire dès la PS.

1.3 HOP HOP HOP

Adorable jeu coopératif: les moutons broutent dans la montagne, avec la bergère et son chien. Mais le vent se lève, et il faut vite rentrer à la bergerie. Les différentes faces du dé permettent de faire avancer les personnages. Mais quand on tombe sur la face vent, on doit retirer un pilier du pont! La mission des enfants est de faire traverser tout le troupeau avant que le pont ne s'écroule. Si l'objectif est atteint, tous les joueurs ont gagné. *Les enfants rentrent dans l'histoire et se passionnent pour son issue!*
Matériel : 4 cartes paysages (21,5 x 21,5 cm chaque) qui forment le plateau de jeu, 1 bergerie, 1 pont et ses 10 piliers, 9 moutons en bois (5 x 3 cm), 1 chien, 1 bergère.
Pour 2 à 6 joueurs, de 4 à 7 ans.

1.4 LE CHATEAU DU DRAGON

Jeu coopératif et tactique sur le thème des chevaliers et des dragons! Les chevaliers s'allient pour repousser les dragons en dehors du château. A l'aide de 2 dés (couleur et constellation) on fait grimper les chevaliers dans les tours. A chaque fois que l'on regroupe 2 chevaliers de même couleur sur une tour, ceux-ci s'assemblent et prennent place sur le pont. A chaque fois que le dé tombe sur dragon, on en place un à l'entrée du château. Si les chevaliers arrivent à temps pour faire rouler la boule sur les dragons, tous les joueurs ont gagné! *La stratégie a une grande part dans la réussite!*
Matériel : 8 tours en bois (ht 6,5 cm), 16 chevaliers, 6 dragons, 2 dés, 1 pont, 1 boule.
Pour 2 à 4 joueurs, de 5 à 10 ans.

1.5 COMPTONS LES PETITSPOISSONS

a) **Type de jeu :** Jeu de hasard pour la première variante et jeu alliant hasard et stratégie pour la variante destinée aux plus grands.

b) **Caractéristiques :** Jeu de plateau avec déplacement sur une piste à l'aide d'un dé.

- **Matériel :** 4 phoques qui tournent autour d'un bassin rempli de poissons sur un parcours dont les cases ont un graphisme particulier qui correspond à un certain nombre de poissons du bassin ; 30 petits poissons en bois ; 2 dés (à constellations 1, 2, 3 pour celui utilisé à la première variante et pour le second ,il présente, en plus des constellations précédentes, un phoque sur l'une de ses faces et une mouette sur une autre) ; 4 cartes à calculer qui permettent de compter le nombre de poissons gagnés.

- **Nombre de joueurs :** De 2 à 4 joueurs.
- **Durée d'une partie :** 10 à. 15 minutes.
- **Niveau :** PS et début de MS pour la première variante et fin de MS et GS pour la deuxième.

c) But du jeu/Déroulement

- **But du jeu :** Gagner 10 poissons ou le plus de poissons.
- **Déroulement :** *Pour la première variante* : Chaque joueur choisit un phoque et le pose sur une case ayant le dessin d'un phoque : cette case sera le point de départ du phoque qui suivra la direction indiquée. Il lance le dé et avance son phoque du nombre de cases qu'indique le dé. Quand il arrive sur une case, il doit compter les poissons du bassin qui ont le même graphisme et prendre autant de petits poissons en bois. Le jeu se termine quand il n'y a plus de poissons en bois. Le gagnant est celui qui a gagné le plus de poissons.
- **Variante** : On utilise l'autre dé et chaque joueur reçoit une carte à calculer. On lance le dé et chacun à son tour avance son phoque du nombre de cases correspondant au jet du dé. Comme précédemment, on pêche le nombre de poissons associés au graphisme et on les place sur sa carte à calculer. Quand le dé tombe sur la mouette, elle vole un poisson à celui (ou à ceux, quand plusieurs joueurs ont le même nombre de poissons) qui en a le plus. Il doit alors remettre un poisson dans le bassin. Si le dé tombe sur le phoque, le joueur s'associe avec un joueur de son choix, les poissons des deux sont réunis et sont partagés équitablement en deux parts ; s'il reste un poisson, en cas de nombre total impair, il sera remis dans le bassin Le jeu se termine quand un joueur a obtenu 10 poissons ou quand tous les poissons ont été pêchés. On peut aussi remplacer les constellations du dé par des chiffres de façon à familiariser les enfants avec cette écriture.

d) Compétences visées/sollicités : Pour la première règle, il s'agit de savoir associer le nombre de points d'une constellation et le nombre de cases pour avancer puis de dénombrer un nombre d'objets et de réaliser une collection équipotente (qui comporte la même quantité d'objets). Pour la deuxième règle, on ajoutera aux compétences précédentes celle de comparer des quantités et surtout celle de résoudre un problème de partage, cette compétence n'étant pas souvent sollicitée lors de jeux de société. Par ailleurs, le joueur devra comprendre son intérêt à s'associer non pas avec son copain mais avec celui qui a le plus de poisson.

Ce jeu fabriqué par HABA est attractif, il permet d'aborder la numération de façon originale de la PS à la GS. On pourra aussi en fabriquer un « géant » à partir de graphismes réalisés par les élèves dans le cadre d'un projet pluridisciplinaire.

1.6 COURSE DES LAPINS

a) **Type de jeu :** de hasard et de stratégie.

b) **Caractéristiques :** Jeu de déplacement sur piste à l'aide de dés.

- **Matériel :** 4 lapins, 15 petites carottes, 16 « cartes-parcours », 1 gros bout de carotte et 2 dés à constellations (1, 2, 3). Les « cartes-parcours » présentent un motif différent sur chaque côté, les cartes du dessus ont un bord jaune, celles du dessous ont un bord orange ; les motifs se répètent une fois sur les cartes du dessus et une fois sur celles du dessous.

- **Nombre de joueurs :** De 2 à 4 joueurs.

- **Durée d'une partie :** 10 minutes.

- **Niveau : f**in de MS, GS, voire CP.

c) **But du jeu/Déroulement**

- **But du jeu :** Gagner le plus de carottes.

- **Déroulement :** On pose les « cartes-parcours » sur la table de manière à ce que le côté à bord jaune soit visible et à obtenir un carré de 5 cartes de côté. Chaque joueur choisit un lapin. On retourne n'importe quelle carte avec le bord jaune, le motif qui apparaît alors a un bord orange. Cette carte est la case de départ de tous les lapins et indique le but : le motif apparu sur l'envers (bord orange) figure sur une « carte-parcours » à bord jaune , c'est cette carte, où l'on place le bout de carotte que les lapins devront atteindre pour gagner une carotte. Les joueurs lancent un dé ou deux dés et se déplacent du nombre de cases correspondant au nombre de points du jet du dé ou des dés en se déplaçant vers la droite ou vers la gauche. Si un lapin arrive sur la « carte-cible », le joueur gagne une carotte, retourne la carte, un nouveau motif apparaît avec un bord orange, il cherche la « carte-parcours » à bord jaune ayant le même motif et pose le bout de carotte dessus ,il s'agit de la nouvelle cible et une nouvelle course commence. Le jeu se termine lorsque toutes les carottes sont distribuées. Le joueur qui a le plus de carottes gagne le jeu.

- **Variante(s)/Différenciation pédagogique :** On pourra prévoir, dans un premier temps, qu'un seul dé pour bien entrer dans le jeu mais sans s'y attarder, car la possibilité de lancer 1 ou 2 dés selon le parcours choisi, est un facteur positif de ce jeu. Une fois la règle bien acquise, on pourra remplacer l'un des dés à points par un dé chiffré ; l'enfant, pour additionner les deux nombres obtenus aura la possibilité de surcompter en utilisant les points de la constellation. Enfin, on remplacera les deux dés à points par des dés chiffrés de façon à travailler la mémorisation de certains résultats additifs.

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Savoir résoudre un problème additif lié à la réunion de deux collections**,** savoir anticiper et adapter sa stratégie.

- **Compétence(s) sollicitée(s) :** Savoir associer le nombre de cases du déplacement au nombre de points des constellations du dé ou des dés.

Ce jeu HABA est original et relativement simple. Les joueurs peuvent anticiper en choisissant d'utiliser un ou deux dés suivant la distance à parcourir, choisir leur itinéraire. La cible change constamment de place et on garde espoir de gagner des carottes, pendant toute la partie.

1.7 PIQUE PLUME

a) Type de jeu : Memory.

b) Caractéristiques

- **Matériel :** 24 cartes en forme d'œuf, représentant le chemin autour de la basse-cour ; 12 cartes octogonales ; 4 poules et 4 plumes.
- **Nombre de joueurs :** De 2 à 4.
- **Durée d'une partie :** 30 minutes.
- **Niveau : à** partir de la fin de PS jusqu'à 99 ans.

c) But du jeu/Déroulement

- **But du jeu :** Réussir à gagner toutes les plumes ou obtenir le plus de plumes.
- **Déroulement :** Les poules vont se déplacer sur un parcours réalisé en posant les cartes en forme d'œuf, faces visibles, en cercle ; les cartes octogonales sont disposées, faces cachées, à l'intérieur. Chaque joueur reçoit une poule, avec une plume dans le croupion. Les poules sont réparties, sur le parcours, à égale distance, les unes des autres. Pour avancer sa poule sur le parcours, le joueur doit trouver, parmi les cartes octogonales, la carte portant le dessin de la case qui est devant sa poule. Aussi longtemps que le joueur retourne des cartes identiques aux cases qui précèdent sa poule, il peut continuer. Dès qu'un joueur arrive derrière un autre, il peut essayer de le dépasser. Pour cela, il doit trouver la carte qui correspond au dessin de la case qui précède la poule de l'adversaire. S'il y parvient, il saute par-dessus et au passage lui prend toutes les plumes .

- **Variantes/Différenciation pédagogique :** On peut réduire le parcours en diminuant le nombre de cartes « œuf » et le nombre de cartes octogonales.

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Savoir mémoriser une répartition spatiale d'objets.

- **Compétence(s) sollicitées :** Savoir reconnaître deux objets identiques parmi une collection d'objets.

Ce jeu GIGAMIC a reçu de nombreux prix et il rencontre beaucoup de succès auprès des jeunes et des moins jeunes ; il est très souvent utilisé dans les ludothèques. Les règles du jeu sont simples puisque c'est un Memory, où les plus jeunes excellent, avec un enjeu très ludique.

1.8 SAUTE GRENOUILLE

- 

a) Type de jeu : Jeu de hasard.

b) Caractéristiques

- **Matériel :** 4 grenouilles, 8 bâtons de différentes longueurs, 1 boîte cylindrique où sont rangés les bâtons.

- **Nombre de joueurs :** De 2 à 4

- **Durée d'une partie :** 15 minutes

- **Niveau : à** partir de la PS.

c) But du jeu/Déroulement

- **But du jeu :** Être le premier sur la ligne d'arrivée.

- **Déroulement :** Les grenouilles sont alignées sur la ligne de départ, les unes à côté des autres. La ligne d'arrivée est matérialisée par un trait. Chaque joueur choisit une grenouille et tire au hasard un bâton de la boîte. Si l'extrémité du bâton n'est pas rouge, il place celui-ci devant sa grenouille qui saute par-dessus et atterrit juste de l'autre côté .Si l'extrémité est rouge, il passe son tour. Le bâton est alors remis dans la boîte que l'on fait tourner plusieurs fois avant de la présenter à un autre joueur. Le jeu se termine dès qu'une grenouille a atteint ou a sauté par dessus la ligne d'arrivée.

- **Variantes/Différenciation pédagogique :** On ne remet pas le bâton dans la boîte après chaque tirage mais seulement une fois les huit bâtons sélectionnés.

  Dans un premier temps, on se contentera, comme dans un « tirage à la courte paille », de comparer les longueurs des bâtons par estimation visuelle (Qui a le plus grand ? Le plus petit ?), puis on les ordonnera et enfin on vérifiera par juxtaposition.

d) Compétences visées/sollicitées : Savoir comparer des longueurs et svoir reporter une longueur donnée**.**

Ce jeu, édité par Ticado ,dont le nom d'origine est *Hopse Frosch*, est original pour son approche de la mesure ; il permet de faire jouer ensemble des enfants d'âges et de niveaux différents.

1.9 COA

a) **Type de jeu :** jeu de hasard.

b) **Caractéristiques :** jeu de plateau avec un dé qui permet de gagner ou de perdre des grenouilles.

- **Matériel :** Un plateau de jeu (composé de 2 nénuphars jaunes, 2 rouges, 1 violet, 1 orange, 1 feuille verte et un trou) ; un dé de couleur et 48 petites grenouilles.
- **Nombre de joueurs :** De 2 à 6 voire plus pour la variante proposée.
- **Durée d'une partie :** De 10 à 20 minutes.
- **Niveau :** à partir de PS.

c) **But du jeu/Déroulement**

- **But du jeu :** Etre le premier à ne plus avoir de grenouille.
- **Déroulement :** Chaque joueur reçoit 8 grenouilles, il lance le dé.et place une ou deux grenouilles sur l'étang selon la couleur du dé (si la couleur est jaune ou rouge, il pose 2 grenouilles car il y a 2 nénuphars jaunes et 2 rouges ; il pose 1 grenouille pour les couleurs orange, verte et violette et pour la bleue, la grenouille plonge dans le trou du plateau et disparaît). Si la couleur indiquée par le dé est déjà occupée, le joueur doit prendre les grenouilles qui s'y trouvent.
- **Variantes/Différenciation pédagogique :** Pour les plus jeunes ou pour dynamiser le jeu, on ne distribuera que 5 grenouilles.

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Savoir réaliser une collection qui comporte la même quantité d'objet qu'une autre collection.

- **Compétence(s) sollicitées :** Savoir associer les couleurs du dé avec celles du plateau de jeu.

Ce jeu, édité par HABA, est parfaitement adapté aux élèves de PS car il permet une première approche des petites quantités. La difficulté sera de comprendre que pour gagner, il ne faut plus avoir de grenouille. On regrettera, cependant que la couleur rouge du dé et du plateau diffère un peu. Pour palier à cet inconvénient, nous recommandons de colorier la face du dé concernée.

II.2 JEUX POUR LES CYCLES 2 ET 3

Bien que moins nombreux, nous verrons que certains jeux destinés à l'école élémentaire, sont très intéressants et permettent d'aborder des compétences mathématiques variées : numériques, spatiales, logiques… et donc de faire des mathématiques autrement.

2.1 CLOWN

S

a) **Type de jeu :** puzzle à reconstituer à l'aide d'un dé.

b) **Caractéristiques**

- **Matériel :** 1 dé à points (de 1 à 6), 48 morceaux de clown (à séparer et à classer en début de partie), les morceaux sont numérotés de 1 à 8 selon les éléments du costume, par exemple : 1 pour les chaussures, 2 pour le pantalon, …. et 8 pour le chapeau. Sur chaque morceau figure aussi un dé à points numéroté 1 à 6.

- **Nombre de joueurs :** De 2 à 6.
- **Durée d'une partie :** 15 à 30 minutes.
- **Niveau** Cycle 2 : GS, CP.

c) But du jeu/Déroulement

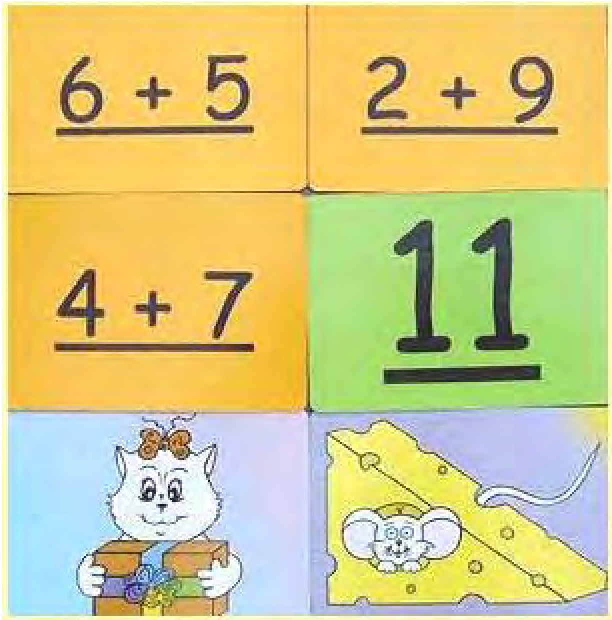
- **But du jeu :** Réaliser le plus grand clown.
- **Déroulement :** Une fois les pièces classées par numéros, on les ordonne de 1 à 8. Chaque joueur, à tour de rôle, lance le dé et récupère un morceau **1** portant la même valeur que la constellation du dé. Si le dé indique un morceau posé devant un autre joueur, il lui prend, obligeant celui-ci à relancer le dé, quand son tour viendra, pour récupérer un autre morceau **1**. Quand chaque joueur a un morceau **1**, on procède de la même façon pour le morceau **2** puis **3** et ainsi de suite jusqu'au morceau **8.** Le joueur avec le plus grand clown est le gagnant.
- **Variantes/Différenciation pédagogique :** On peut, dans un premier temps, relancer le dé si on tombe sur un morceau déjà attribué, de façon à mieux se concentrer sur la correspondance entre les constellations du dé et celles de la pièce. Avec des CP ou GS (en fin d'année scolaire) remplacer le dé à points par un dé chiffré ou encore par deux dés à points (1, 2, 3).

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Savoir mettre en relation une quantité présentée sous forme de constellation et l'écriture chiffrée correspondante (pour la deuxième variante), savoir résoudre un problème additif lié à la réunion de deux collections lors de l'introduction des deux dés.
- **Compétence(s) sollicitée(s) :** Savoir reconnaître de façon globale les constellations du dé. Connaissance de la comptine numérique jusqu'à 8.

Un jeu simple, édité par Ravensburger, qui ressemble au jeu du « cochon qui rit » de notre enfance, où le plaisir vient de l'assemblage, petit à petit, d'un clown toujours différent et ludique. L'enseignant appréciera l'approche des longueurs avec la comparaison des tailles clowns.

2.2 ADDI CAT'S



a) Type de jeu : jeu de hasard et de rapidité.

b) Caractéristiques : jeu de cartes.

- **Matériel :** 100 cartes « somme » dont le résultat est compris entre 2 et 20, 19 cartes affichant un nombre en écriture chiffrée de 2 à 20, 18 cartes spéciales, la carte centrale « souris » et 19 cartes correction avec toutes les décompositions additives des nombres de 2 à 20.
- **Nombre de joueurs :** De 2 à 8 joueurs.
- **Durée d'une partie :** 15 à 20 minutes.
- **Niveau :** CP, CE1.

c) But du jeu/Déroulement

- **But du jeu :** Donner toutes ses cartes à ses adversaires en tapant judicieusement sur la carte « souris ».
- **Déroulement :** Chaque joueur reçoit un nombre égal de cartes, celles-ci sont empilées les unes sur les autres, face cachée. Le premier joueur pose la première carte de son paquet, face découverte, le deuxième fait de même. Les deux joueurs regardent alors rapidement si les nombres affichés sur les cartes sont égaux.

Dans le cas d'égalité, les deux joueurs doivent taper sur la souris ; le plus rapide donne sa carte découverte à l'autre joueur qui la place, ainsi la sienne propre sous son paquet de cartes. Si les nombres sont différents, le troisième joueur joue sa carte ; le processus de comparaison recommence avec les 3 joueurs. Quand tous les joueurs ont posé une carte, le premier joueur pose sa deuxième carte et range la première carte sous son tas de cartes. .Si un joueur tape sans raison sur la carte « Souris », il doit ramasser toutes les cartes découvertes. Il y a 6 sortes de cartes spéciales. La carte « poursuite » : quand elle est découverte, tous les joueurs doivent taper sur la carte « souris », le plus lent ramasse toutes les cartes découvertes. La carte « sans issue » : le sens du jeu change. La carte « magie » : quand elle est découverte, les joueurs posent ensemble une carte et regardent rapidement s'il y a des nombres égaux communs à deux joueurs ou s'il y a des cartes spéciales. La carte « balançoire » qui demande aux joueurs de comparer leur carte avec celle des autres, l'échange se fera entre les joueurs qui auront le plus petit nombre et le plus grand, le plus rapide des deux donnera ses cartes au perdant. La carte « embuscade » : tous les joueurs tapent sur la souris, le premier à taper doit être celui qui a découvert la carte sinon il reçoit la première carte des autres joueurs. Et la carte « cadeau » qui permet à celui qui l'a retournée de donner une carte à chacun des autres joueurs.

- **Variante(s)/Différenciation pédagogique :** On pourra, dans un premier temps, ne pas distribuer les cartes spéciales pour se concentrer sur les nombres égaux et les introduire progressivement. On pourra aussi utiliser les cartes numériques dans un jeu de bataille.

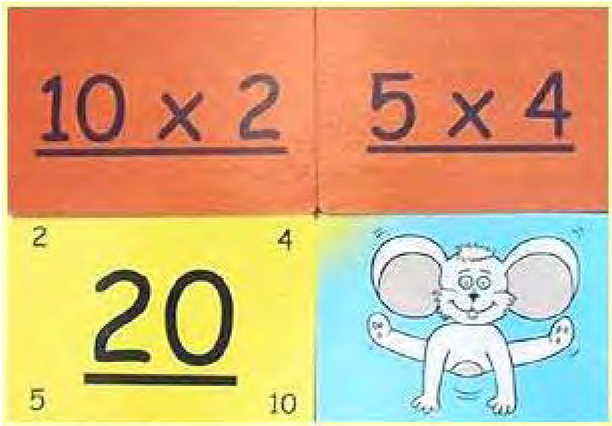
d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Mémoriser des résultats du répertoire additif.

- **Compétences sollicitées :** Disposer de procédures automatisées permettant de déterminer la somme de deux nombres.

Ce jeu de cartes permet de façon ludique de mémoriser certains résultats additifs cependant l'importance des cartes spéciales et les règles qui en découlent peuvent rendre difficile la règle du jeu. Pour cette raison, on conseille de les introduire progressivement. De plus, pour les enfants qui éprouvent des difficultés ou qui sont plus lents, on suggère d' organiser une partie avec des élèves qui ont le même profil de façon qu'ils ne se découragent pas, la présence du maître étant essentielle.

2.3 MULTIPLI CAT'S



a) **Type de jeu :** Jeu de hasard et de rapidité.

b) **Caractéristiques :** jeu de cartes.

- **Matériel :** 100 cartes « produit », 42 cartes dont les nombres affichés sont les résultats des produits des cartes précédentes, la carte « souris » et 18 cartes spéciales.

- **Nombre de joueurs :** De 2 à 8 joueurs.

- **Durée d'une partie :** 15 à 20 minutes.

- **Niveau :** Cycle 3.

c) **But du jeu/Déroulement**

- **But du jeu :** Donner toutes ses cartes à ses adversaires en tapant judicieusement sur la carte « souris ».

- **Déroulement :** Les 160 cartes sont réparties équitablement entre tous les joueurs et sont empilées, face cachée. Le premier joueur pose la première carte de son paquet ,face découverte, le deuxième fait de même. Les deux joueurs regardent alors si les nombres affichés sur leurs cartes sont égaux. Dans le cas d'égalité, ils doivent taper sur la carte « souris ». Le plus rapide donne sa carte découverte à l'autre joueur qui la place avec la sienne sous son paquet. Si les nombres sont différents, le troisième joueur joue sa carte et le processus de comparaison recommence. Comme dans le jeu précédent, quand tous les joueurs ont posé une carte, le premier joueur pose sa deuxième carte et range la première sous son tas de cartes. Quand un joueur tape, sans raison, sur la carte « souris », il doit ramasser toutes les cartes découvertes. Il y a aussi 6 types de cartes spéciales. La carte « poursuite » : quand, elle est découverte, tous les joueurs doivent taper sur la «souris » , le plus lent ramasse toutes les cartes découvertes. La carte « sans issue » qui change le sens du jeu. La carte « magie » : quand elle est découverte, tous les joueurs posent ensemble une carte et regardent s'il y a des nombres égaux communs à deux joueurs ou s'il y a des cartes spéciales. La carte « balançoire » qui oblige les joueurs à comparer leur carte, l'échange se fera entre le plus petit et le plus grand nombre, le plus rapide des deux joueurs donnera ses cartes découvertes au perdant. La carte « embuscade » : tous les joueurs doivent taper sur la « souris », le premier à taper doit être celui qui a découvert la carte sinon il reçoit la première carte de ses adversaires. La carte « cadeau » qui permet à celui qui l'a retournée de donner une carte à chacun des autres joueurs.

- **Variante(s)/Différenciation pédagogique :** Compte tenu du nombre important de cartes spéciales, on les introduira progressivement ou seulement certaines. On pourra diminuer le nombre de cartes en sélectionnant des produits de certaines tables, on choisira de laisser ou de ne pas laisser à disposition la table de Pythagore, enfin on pourra aussi utiliser ces cartes pour un simple jeu de bataille en enlevant les cartes spéciales.

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Mémoriser des résultats du répertoire multiplicatif.

Ce jeu de cartes permet de façon ludique de mémoriser les tables de multiplication. Comme pour le jeu précédent, la présence du maître ou d'un médiateur est indispensable pour gérer les difficultés des uns (liées à la mémorisation des tables) ou la lenteur des autres.

2.4 KETCH UP

a) Type de jeu : Hasard et stratégie.

b) Caractéristiques

- **Matériel :** 106 cartes réparties en 21 x 3, 20 x 4, 20 x 5, 24 x 6 et 21 x 7.
- **Nombre de joueurs :** De 2 à 6 joueurs.
- **Durée d'une partie :**15 minutes.
- **Niveau :** Cycle 2 ou Cycle3 (à partir de la GS).

c) But du jeu/Déroulement

- **But du jeu :** Il consiste à compléter le maximum de séries de cartes pour les ramasser. Une série complète est formée de trois 3, quatre 4, cinq 5, six 6 ou sept 7.
- **Déroulement :** Au début de la partie, bien battre les cartes et les distribuer toutes. Peu importe si un ou deux joueurs possèdent une carte de plus. Chaque joueur garde son paquet de cartes devant lui, face cachée, et tire uniquement les trois premières. Un joueur au choix commence. Quand vient son tour, un joueur peut poser 1, 2 ou 3 cartes, face visible, au milieu de la table (mais au moins une). Puis, il tire le nombre de cartes nécessaire de son paquet pour en avoir de nouveau 3 en main. C'est ensuite à son voisin de gauche de

jouer. **Pose des cartes :** les cartes se posent les unes à côté des autres dans l'ordre croissant de 3 à 7. Les cartes de même valeur se posent les unes sur les autres, en escalier (donc un 3 sur un 3 ou un 7 sur un 7). **Une série de cartes est complète** quand le nombre de cartes correspond à la valeur, par exemple, si un joueur pose le troisième 3 sur la pile des 3 ou encore le septième 7 sur la pile des 7. Un joueur gagne toutes les séries de cartes qu'il a complétées et les pose devant lui. À l'emplacement devenu libre, peut commencer une nouvelle série avec cette même valeur. **La partie prend fin** dès qu'un joueur a posé sa dernière carte (paquet + cartes en main). Le vainqueur est celui qui a gagné le plus de cartes. chaque carte gagnée rapporte 1 point; la valeur des cartes n'a pas d'importance.

- **Variante(s)/Différenciation pédagogique :** Pour une classe de maternelle, on suggère de diminuer le nombre de cartes, par exemple ne garder que les cartes « 3 », « 4 », « 5 » de façon à se concentrer sur la stratégie c'est-à-dire terminer une série.

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Anticipation, réflexion.

- **Compétences sollicitées :** Savoir dénombrer des petites quantités ; savoir reconnaître des écritures chiffrées des nombres de 3 à 7.

Ce jeu, édité, par Ravensburger, était connu auparavant sous le nom de « Yummy ». Il est bien adapté à une classe de cycle 2 : matériel simple, règle du jeu facile à comprendre. Il permet de réfléchir à une stratégie que l'on pourra travailler avec des simulations avec « arrêts sur image ».

2.5 LES PETITS MALINS

a) **Type de jeu :** Il s'agit d'un jeu type Memory qui s'adresse à des élèves du cycle2 et qui peut allier hasard, stratégie et rapidité.

b) **Caractéristiques**

- **Matériel :** Des cartes représentant un certain nombre (de 1 à 6 maximum) d'« objets » (allumettes, bougies, souris…) étalées sur la table ; ces cartes sont retournées en début de partie. Les objets dessinés sur les cartes occupent une position quelconque (parfois selon les constellations du dé). Des jetons « nombre » avec les écritures chiffrées de 1 à 10 (les nombres 6 et 9 sont distingués par la présence d'un point : ainsi **6. 9.**) Ce matériel très riche permet l'adaptation de la règle initiale aux trois niveaux du cycle2.
- **Nombre de joueurs :** De 3/4 en GS et CP à 5/6 en CE1.
- **Durée d'une partie :** 10 minutes.
- **Niveau :** Cycle2 (de GS à CE1).

c) **But du jeu/Déroulement**

- **But du jeu :** Gagner le plus de paires de cartes.
- **Déroulement**

<u>Jeu n°1 : GS (3 /4 joueurs)</u>

Un élève choisit deux cartes, les retourne. S'il s'agit du même type d'objet (des cartes souris par

exemple), il recherche parmi les jetons « nombres », celui indiquant le nombre total d'objets dessinés sur les deux cartes.
Il est judicieux à ce stade, de travailler avec une partie seulement des cartes : celles pour lesquelles la reconnaissance globale de la quantité est possible (1, 2 3 ou 4). Cela permet en effet à l'élève de s'interroger réellement sur sa démarche de choix, par exemple « comment trouver 2 et 3 ? ». Différentes procédures sont alors possibles : surcomptage, recomptage éventuel, reconnaissance globale du nombre correspondant à la réunion des deux collections.
Pour la gestion d'une telle activité, la présence du maître dans l'atelier nous paraît essentielle, grâce au questionnement du maître l'élève verbalise, explicite ses choix. Les autres élèves écoutent, commentent et valident.
Dans le cas contraire, c'est à dire si l'on travaille avec l'ensemble des cartes, le dénombrement systématique pourrait être reconnu par les élèves comme une procédure pertinente de résolution et l'intérêt de ce jeu s'en verrait alors diminué. Bien entendu, « savoir dénombrer des collections organisées ou non » et « savoir reconnaître l'écriture chiffrée du cardinal d'une collection » sont deux compétences à travailler en GS et, ce jeu peut aussi être un support au développement de ces compétences.

Compétence visée : savoir résoudre un problème additif lié à la réunion de deux collections en utilisant une procédure numérique dans le champ numérique 2 /8.

Compétences sollicitées :
- savoir reconnaître globalement de petites quantités organisées ou non ;
- savoir reconnaître l'écriture chiffrée des nombres de 2 à 8 ;
- savoir mémoriser des positions et des configurations.

Différentiation pédagogique
Les difficultés liés à la mémorisation des cartes et de leur position pourront être réduites en :
- limitant le nombre de cartes support du jeu et en ajoutant des cartes au fur et à mesure,
- limitant le nombre de types d'objets différents,
- étalant les cartes de manière organisées (lignes et colonnes par exemple).

Bien entendu il faudra envisager dans le déroulement en classe :
- une phase de manipulation libre des cartes,
- une phase de tri ou de classement des cartes selon des critères choisis par l'élève ou/et imposés par le maître (par exemple toutes les cartes sur lesquelles il y a « n » objets, toutes les cartes qui représentent la même catégorie d'objets, toutes les cartes sur lesquelles sont représentés 3 objets organisés sur la carte différemment.)

Pour **les difficultés liées à la lecture des nombres sur le disque-jeton** , il sera nécessaire de faire établir un lien entre l'écriture chiffrée et le nombre de points dessinés sur la circonférence du jeton. L'élève pourra aussi s'aider de ces points pour trouver le bon jeton *(un dessin de jeton serait bienvenu pour rendre compréhensible le texte).*

<u>Jeu n°2 : CP (3 / 4 joueurs)</u>

Il s'agit de compléter les règles citées précédemment en faisant intervenir la variable *temps*.
Toutes les cartes sont étalées.
L'élève qui retourne les deux cartes dispose d'un temps limité pour trouver le jeton

correspondant aux deux cartes indiquant le même type d'objets.
Passé ce temps, le joueur perd son tour et les autres élèves prennent le relais : le premier qui prend le bon jeton gagne les deux cartes.
Là encore la présence du maître est essentielle, il va permettre l'explicitation des procédures de résolution pour obtenir le nombre « somme » et des procédures de validation.

Compétences visées : - disposer de procédures automatisées permettant de déterminer la somme de deux nombres rapidement ;
- connaître par cœur certains résultats du répertoire additif.

Le support matériel du jeu, et le fait que les cartes représentent des objets et non tout simplement des écritures chiffrées, permet à l'élève d'associer constamment un discours du type « 2 et 3 ça fait 5 » et une représentation possible de celui-ci.

Jeu n°3 : CE1 (4 /6 joueurs répartis en équipes de 2)

Compléter les règles précédentes en les complexifiant .
Tous les joueurs vont être concernés à chaque étape du jeu. Les élèves sont regroupés en équipes de 2 (2 voire 3 équipes peuvent s'affronter).
Lorsqu'un élève d'une équipe choisit de retourner deux cartes, tous les autres joueurs recherchent le jeton correspondant et c'est l'équipe de l'élève qui trouve ce nombre en premier qui remporte les deux cartes. Ici stratégie, concertation et rapidité sont mises à l'épreuve.
En effet, un joueur ayant déjà retourné une carte peut décider ne pas retourner telle autre carte car il sait que la somme est très facile à trouver pour tout le monde et qu'il n'aura pas le temps de prendre le jeton correspondant situé assez loin de lui.
Compétences visées/sollicitées : aux compétences visées citées précédemment on pourra ajouter :
- s'entraîner à la mémorisation des résultats du répertoire additif ;
- anticiper l'action de l'équipe adverse pour effectuer des choix.

d) Compétences visées/sollicitées (voir précédemment)

Ce jeu édité par Schmidt, est bien adapté au cycle 2. Il s'appuie sur un jeu de Memory où les enfants sont particulièrement performants pour développer des compétences de calcul.

2.6 LOBO 77

a) **Type de jeu :** Hasard et stratégie.

b) **Caractéristiques :** jeu de cartes.

- **Matériel :** Le jeu contient 56 cartes. La grande majorité de ces cartes portent simplement un nombre (de 0 à 10, ou 76) ou un multiple de 11 (de 11 à 66). À celles-ci, s'ajoutent des cartes spéciales : les cartes «- 10 », les cartes « coup double (x 2) » et les cartes « changement de sens ».

- **Nombre de joueurs :** De 2 à 8 joueurs.

- **Durée d'une partie** :10 minutes.

- **Niveau :** Cycle 3.

c) **But du jeu/Déroulement**

- **But du jeu :** Les joueurs reçoivent en début de partie trois jetons chacun. Le but du jeu est d'être le dernier joueur à posséder des jetons.

- **Déroulement :** Au début d'un tour, on distribue cinq cartes à chacun. Chacun joue à son tour en posant une carte, face visible, sur le tas de défausse en additionnant sa valeur au total du tas de défausse. Par exemple, si le joueur qui commence, pose une carte de valeur 10, il annonce « 10 ! » et si le joueur suivant pose une carte 8, il annonce «18 ! ». Après avoir joué, chaque joueur complète sa main à cinq cartes en tirant une carte de la pioche. S’il oublie, il joue avec moins de cartes et il est de ce fait pénalisé. Si le total annoncé est un multiple de 11, le joueur qui l'a annoncé perd immédiatement un jeton et le tour continue. Si le total annoncé atteint ou dépasse 77, le joueur qui l'a annoncé perd un jeton et le tour s'arrête. Les cartes sont mélangées et on distribue à nouveau cinq cartes à chacun. Un joueur qui perd son dernier jeton continue à jouer mais s'il perd à nouveau, il est éliminé.

Les cartes spéciales permettent évidemment de perturber le cours naturel du jeu : une carte « - 10 » permet de diminuer le total de 10. Une carte « coup double (x 2) » ne modifie pas le total et oblige le joueur suivant à poser deux cartes à la suite. **Attention :** un joueur qui subit l’effet de la carte « (x 2) » ne peut pas jouer une autre carte « (x 2) » en première carte. Une carte « changement de sens » ne modifie pas le total et change le sens du jeu.

d) **Compétences visées/sollicitées :** Être capable de développer des stratégies de calcul.

Le jeu Lobo, édité par Amigo, est parfaitement adapté au cycle 3, ses règles sont simples, les élèves sont actifs et pratiquent sans cesse du calcul, ce qui nécessite de la concentration.

2.7 FERMER LA BOITE

a) Type de jeu : Hasard et stratégie

b) Caractéristiques

- **Matériel :**Un plateau de jeu muni de 9 « couvercles » numérotés de 1 à 9 et 2 dés à points.
- **Nombre de joueurs :** 2 et plus.
- **Durée d'une partie :** 10 minutes.
- **Niveau :** à partir de la GS.

c) But du jeu/Déroulement

- **But du jeu :** Fermer un maximum de "couvercles".
- **Déroulement :** lorsqu'un joueur entame son tour, tous les "couvercles" de la boîte sont levés. Le joueur dont c'est le tour de jouer, jette les 2 dés sur le tapis du jeu. En fonction du résultat obtenu avec les dés, il a le choix entre :
  - fermer les deux couvercles correspondant à chacun des 2 nombres donnés par les dés.
  - fermer un couvercle correspondant à un des 2 nombres donnés par les dés.
  - fermer un couvercle correspondant à la somme des 2 nombres donnés par les dés.

Tant qu'il peut fermer au moins un "couvercle", il relance les dés. Si après un lancer de dés, il ne peut fermer aucun "couvercle", son tour est fini. Il marque la somme des nombres indiqués par les couvercles restés ouverts et il passe les dés au joueur suivant. **Le gagnant est le joueur qui a obtenu le moins de points.**

- **Variante(s)/Différenciation pédagogique :** On peut introduire d'autres opérations comme la soustraction, la multiplication ou même la division. On peut aussi augmenter le nombre de couvercles et utiliser des dés à 12 faces.

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Savoir résoudre un problème additif (par comptage ,surcomptage ,mémorisation de certains résultats du répertoire additif selon le niveau des élèves).

- **Compétences sollicitées :** Savoir reconnaître globalement des petites quantités organisées en configurations connues. Savoir reconnaître l'écriture chiffrée des nombres de 1 à 9.

Ce jeu traditionnel en bois est connu sous le nom de « Fermer le cahier » .Il est facile à fabriquer mais on peut aussi remplacer les petites planchettes représentant les couvercles par des carrés en papier numérotés de 1 à 9. C'est un jeu simple, très intéressant qui favorise la pratique du calcul et permet de nombreuses variantes.

2.8 DUO

a) Type de jeu : Hasard et stratégie.

b) Caractéristiques : jeu de cartes.

- **Matériel :** 64 cartes « symbole » qui possèdent, chacune trois caractéristiques : la couleur (bleue, rouge, jaune ou verte), le chiffre

(1, 2, 3 ou 4), la forme (rond, carré, triangle ou croix) ; 12 jokers qui ne possèdent qu'une seule des trois caractéristiques soit la forme, soit la couleur, soit le chiffre et 4 « turbo-jokers » qui possèdent toutes les caractéristiques.

- **Nombre de joueurs :** De 2 à 6 joueurs.
- **Durée d'une partie :** 15 minutes.
- **Niveau :** à partir du CP.

c) But du jeu/Déroulement

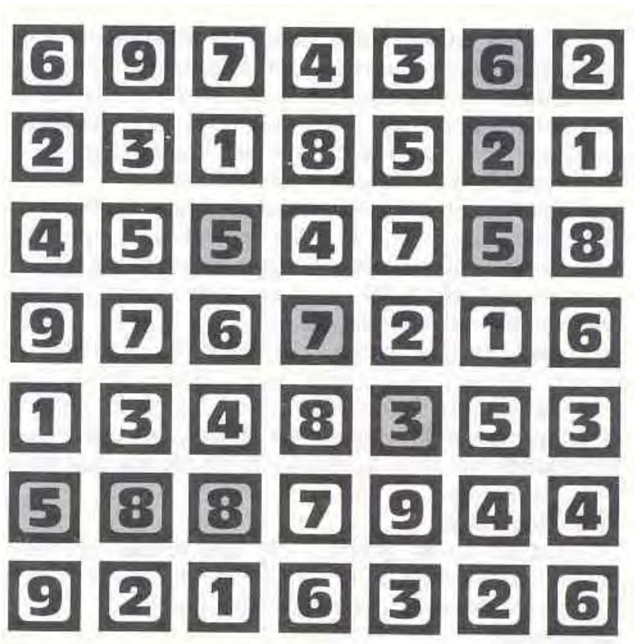
- **But du jeu :** Être le premier à ne plus avoir de cartes.
- **Déroulement :** Les cartes sont bien mélangées, chaque joueur reçoit, une par une, 7 cartes qu'il regarde et cache des autres joueurs. Les cartes restantes sont placées, face cachée, au milieu de la table et constituent la pioche. Les deux cartes supérieures sont retournées et placées , face visible, l'une à droite, l'autre à gauche de la pioche ; chacune constitue le début des deux piles de défausse. Quand vient son tour, un joueur peut poser, une à une, autant de cartes qu'il veut sur une seule des deux piles de défausse, à condition qu'elles conviennent. S'il ne peut ou ne veut poser aucune carte, il doit prendre la carte supérieure de la pioche. C'est alors au tour du joueur suivant. Pour pouvoir poser une carte « symbole » sur une autre carte, il faut que 2 des 3 caractéristiques correspondent à celles de la carte supérieure : de la pile de défausse (soit couleur + chiffre, soit couleur + forme, soit chiffre + forme). Si la carte supérieure est un joker, il suffit que la carte à poser possède la même caractéristique. Pour poser un joker, sa caractéristique doit être identique à l'une de celles de la carte supérieure de la pile choisie. Les « turbo-jokers »peuvent être placées sur n'importe quelle carte.
- **Variante(s)/Différenciation pédagogique :** Avec certains élèves, après une phase d'observation, on pourra commencer par jouer avec les certes « symbole » de même couleur, rouge, par exemple, dans ce cas, une seule caractéristique est nécessaire : le chiffre ou la forme. Puis, on changera de caractéristique, on s'intéressera aux cartes de même forme puis de même chiffre de façon à les sensibiliser à la prise en compte de deux caractéristiques. Une fois la règle maîtrisée, on s'intéressera à la stratégie avec des simulations de jeu et arrêts sur image.

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Anticipation, réflexion.
- **Compétences sollicitées :** Observation, concentration.

DUO est un jeu Ravensburger, très agréable qui se joue de 6 à 99 ans. Il est à mi-chemin entre le UNO et le SET. Il développe des qualités d'observation et d'anticipation qui seront bien utiles en résolution de problème.

2.9 TRIO



a) Type de jeu : calcul, observation et rapidité.

b) Caractéristiques

- **Matériel :** 50 jetons (numérotés de 1 à 50) et 49 cartes (numérotées de 1 à 9).
- **Nombre de joueurs :** A partir de 2.
- **Durée d'une partie :** De 20 à 30 minutes.
- **Niveau :** Cycle 3, et avec la variante proposée, en CE1.

c) But du jeu/Déroulement

- **But du jeu :** Gagner un maximum de jetons en trouvant le plus rapidement possible des TRIO. Un TRIO c'est : 3 chiffres alignés côte à côte (horizontalement, en diagonale, verticalement) qui permettent avec une multiplication et une addition ou une multiplication et une soustraction d'obtenir la valeur indiquée sur le jeton. Exemple : pour un jeton de valeur 32, vous pouvez repérer dans le carré de la figure plusieurs TRIO : $\boxed{5} \times \boxed{7} - \boxed{3} = 32$ ou $\boxed{6} \times \boxed{5} + \boxed{2} = 32$ ou $\boxed{5} \times \boxed{8} - \boxed{8} = 32$.

- **Déroulement :** Vous disposez au hasard face visible les 49 cartes. Elles doivent dessiner un carré de 7 cartes sur 7 cartes (figure ci-contre). Les 50 jetons sont placés face cachée à côté du carré. Ils forment une pioche. Un joueur pioche un jeton et le pose face visible. Tous les joueurs tentent de trouver un TRIO. Le premier qui en repère un, remporte le jeton. Les cartes du TRIO restent en place. Un autre jeton est retourné et le jeu se poursuit ainsi de suite. En principe, il existe toujours un TRIO. Si au bout de 5 minutes, personne n'en a trouvé, le jeton est mis de côté. Le premier joueur qui obtient 10 jetons a gagné. Les plus courageux peuvent décider de jouer avec tous les jetons. Le gagnant est alors le joueur qui possède le plus de jetons.

- **Variante(s)/Différenciation pédagogique :** version pour les plus jeunes. Il ne faut prendre que les jetons numérotés de 1 à 20. La multiplication est supprimée. Exemple : le jeton 6 a pour TRIO : $\boxed{9} - \boxed{1} - \boxed{2}$ ou $\boxed{3} + \boxed{1} + \boxed{2}$ ou $\boxed{8} - \boxed{6} + \boxed{4}$. En cycle 3 on peut aussi, pour certains élèves proposer la table de Pythagore comme aide.

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Savoir mettre en place des procédures de calcul.

- **Compétences sollicitées :** Concentration, savoir mémoriser les résultats du répertoire multiplicatif.

Trio est un jeu Ravensburger facile à adapter en fonction des âges des élèves, en fonction du nombre d’élèves et à réaliser. Il est très pertinent de l’utiliser en classe car il favorise des activités de calcul réfléchi.

2.10 SIX QUI PREND

a) Type de jeu : Jeu de hasard et de stratégie.

b) Caractéristiques

- **Matériel :** 108 cartes numérotées de 1 à 108 et comportant de 1 à 7 « têtes de bœuf » selon leur valeur.

- **Nombre de joueurs :** Pour 2 à 10 joueurs.

- **Durée d'une partie :** Chaque manche dure de 10 à 15 minutes.

- **Niveau :** CM.

c) But du jeu/Déroulement

- **But du jeu :** Le but du jeu est de ramasser le moins possible de « têtes de bœuf » (silhouettes que chaque carte contient au moins une fois et au maximum sept fois). Chaque tête de bœuf compte un point.

- **Déroulement :** Poser quatre cartes faces visibles sur la table. Elles seront chacune le départ d'une série à compléter en respectant quatre règles fondamentales :

  Règle 1 : **règle des valeurs croissantes.** Les cartes d'une série doivent toujours se succéder dans l'ordre croissant de leur valeur.
  Règle 2 : **règle de la plus petite différence.** Une carte doit toujours être posée dans la série où la différence entre la dernière carte posée et la nouvelle est la plus petite.
  Règle 3 : **règle de la sixième carte.** Le joueur qui pose une sixième carte dans une série ramasse les cinq premières cartes de la

série, sa sixième carte étant alors le début d'une nouvelle série.

Règle 4 : **règle de la carte la plus faible.** Si un joueur a préparé une carte si faible qu'elle ne peut compléter aucune des séries en respectant la règle 1, il doit ramasser toutes les cartes d'une série **de son choix**. Sa carte "faible" devient alors le début d'une nouvelle série.

Distribuer 10 cartes à chaque joueur. Chaque joueur choisit la carte qu'il va jouer et la pose face cachée sur la table devant lui. Quand tous les joueurs sont prêts, ils retournent ensemble leur carte : celui qui a retourné la carte de valeur la plus faible commence et complète l'une des séries en respectant les règles fondamentales, puis chacun joue de proche en proche pour finir par celui qui a posé la carte de valeur la plus forte. On répète l'étape précédente jusqu'à ce que les 10 cartes des joueurs soient posées. Les cartes ramassées sont gardées par le joueur et ne sont pas réutilisées pendant la manche, les têtes de bœuf sont comptabilisées en fin de manche, chacune comptant un point. On joue plusieurs manches jusqu'à ce que l'un des joueurs en totalise plus de 66 (ou tout autre total à la convenance des joueurs). Le gagnant est celui qui a le moins de « têtes de bœuf » à la fin du jeu.

- **Variante(s)/Différenciation pédagogique :** On peut diminuer le nombre de cartes à distribuer et le nombre de cartes du jeu.

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Savoir anticiper.

- **Compétences sollicitées :** Savoir comparer des nombres et dénombrer des quantités.

Ce jeu, édité par Amigo, allie compétences numériques et stratégie mais son graphisme est assez chargé. Le nombre de « têtes de bœuf » est écrit a deux endroits, ce qui peut induire de la confusion dans le comptage des points.

2.11 TAKE IT EASY

a) **Type de jeu** : Hasard et stratégie.

b) **Caractéristiques**

- **Matériel :** Chaque joueur reçoit un plateau et 27 cartes hexagonales d'une couleur.
- **Nombre :** De 2 à 6joueurs.
- **Durée d'une partie :** 15 à 20 minutes.
- **Niveau :** Cycle 3.

c) **But du jeu/Déroulement**

- **But du jeu :** Créer des lignes continues rapportant un maximum de points.
- **Déroulement :** Chaque joueur reçoit les mêmes pièces traversées de lignes de couleur (chaque couleur a une valeur comprise entre 1 et 9). Un joueur est désigné comme meneur, il pose toutes ses cartes, face cachée, dans la boîte de jeu puis les mélange ; les autres placent leurs cartes, face visible, à côté de leur plan de jeu. Le meneur retourne une carte au hasard et l'annonce aux autres joueurs en lisant les chiffres inscrits de gauche à droite (par exemple : 2-9-4) et la pose sur une case libre de son plan de jeu. Les autres joueurs cherchent parmi leurs cartes celle qui correspond à celle annoncée et la posent sur une case libre de leur plan de jeu. Dès que toutes les cartes sont posées, le meneur annonce une autre carte et ainsi de suite jusqu'à ce que le plateau soit plein. Les cartes sont

posées de façon à pouvoir lire les chiffres horizontalement, une carte posée ne peut plus être déplacée. Quand tous les plateaux sont complétés, on compte les points. Seules les lignes dont la couleur est ininterrompue seront prises en compte (une seule carte de couleur différente au milieu d'une ligne entraîne l'annulation des points de cette ligne). Pour compter le nombre de points de la ligne 9 qui comporte 4 cartes, par exemple, on pourra utiliser l'addition itérée 9 + 9 + 9 + 9 ou pour des élèves plus avancés, la procédure experte 9 X 4, en espérant que tous les élèves s'approprient cette procédure.

- **Variante(s)/Différenciation pédagogique :** Le meneur peut annoncer deux cartes en même temps pour favoriser l'anticipation. Le maître peut déci der de laisser la table de Pythagore à disposition pour le calcul des points.

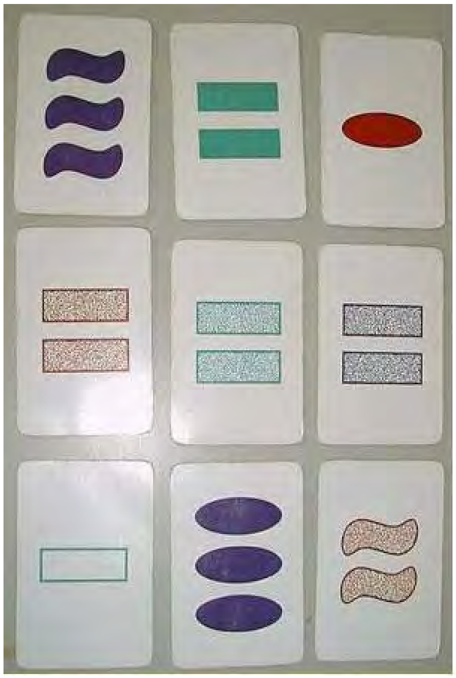
d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Logique, anticipation, maîtrise du répertoire multiplicatif.

- **Compétences sollicitées :** Des compétences d'observation et d'orientation ; disposer de procédures de calcul.

Take it easy, édité par Ravensburger, est un jeu bien adapté pour le cycle 3, il développe des qualités d'observation, d'anticipation ,de logique et favorise des activités de calcul.

2.12 SET



a) Type de jeu : Jeu d'observation, de logique et de rapidité.

b) Caractéristiques : Jeu de cartes.

- **Matériel :** 81 cartes toutes différentes sur lesquelles figure un dessin comportant quatre caractéristiques : la forme (ovale, rectangle ou en forme de haricot), le nombre de motifs (1, 2 ou 3), la couleur (rouge, vert ou violet) et le type de remplissage (vide, plein ou à pois).

- **Nombre de joueurs :** De 2 à 8.

- **Durée d'une partie :** 15 à 20 minutes.

- **Niveau :** à partir du CM jusqu'à 99 ans ou plus.

c) But du jeu/Déroulement

- **But du jeu :** Pour gagner, il faut réaliser le plus possible de « set », c'est-à-dire, il faut repérer, le plus rapidement possible, 3 cartes parmi 12 cartes étalées qui, pour chacune des 4 caractéristiques, sont ou toutes identiques ou toutes différentes. Exemple, pour la ligne **1 :** les motifs sont de formes différentes, de couleurs différentes, en nombres différents et ils ont le même remplissage.Pour la ligne **2,** les trois cartes ont le même nombre de motifs, de même forme avec le même remplissage mais de couleurs différentes. Dans ces deux cas, comme pour la troisième ligne, nous sommes en présence de « set » ; ce qui n’est pas le cas pour les cartes situées en colonne.

- **Déroulement :** On bat les cartes et on retourne une à une les 12 premières cartes en les disposant comme sur l’image. Les joueurs jouent tous en même temps. Chacun tente de découvrir le plus vite possible un « SET. Celui qui croit avoir trouvé dit « SET » et montre les 3 cartes aux autres joueurs. Si le « SET » est bon, le joueur retire les 3 cartes et les pose devant lui, face cachée. On complète les cartes posées à découvert en prenant trois nouvelles cartes de la pile et le jeu continue. Si le « SET » n’est pas bon, le jeu continue, mais le joueur qui s’est trompé doit laisser passer son tour jusqu’à ce qu’un autre joueur ait trouvé un bon « SET. Si aucun joueur ne trouve un « SET » pendant un long moment, on ajoute trois nouvelles cartes aux 12 cartes découvertes.

- **Variante(s)/Différenciation pédagogique :** Pour les plus jeunes ou pour introduire la règle du jeu, on peut utiliser seulement les 27 cartes d’une même couleur et découvrir 3X3 cartes. Ainsi, les cartes ne comporteront que trois caractéristiques et le jeu s’en trouvera simplifié.

d) Compétences visées/sollicitées

- **Compétence(s) visée(s) :** Anticipation, réflexion.

- **Compétences sollicitées :** Observation, concentration.

Ce jeu, édité par Ravensburger, est tout simplement génial, il développe des qualités de réflexion, d’anticipation et par conséquent favorise l’activité mathématique.

CONCLUSION

L'engouement que rencontre le jeu dans la pratique de classe en mathématiques et les nombreuses demandes des enseignants nous ont amenés à nous questionner sur la place des jeux en formation des maîtres Dans cet atelier nous avons essayé de dégager quelques idées que l'on pourrait mettre en place en formation. Tout d'abord, proposer une liste de jeux pertinents et variés du point de vue des apprentissages mathématiques, y jouer par groupe pour les découvrir en situation et ensuite les analyser Il est aussi nécessaire de clarifier l'usage des jeux (intérêt et limite) et de préciser le rôle du maître dans une pédagogie de pratique du jeu à l'école. Il nous a semblé important aussi de ne pas oublier les jeux de notre patrimoine culturel comme le *jeu de l'oie*, le *jeu des petits chevaux,* le *jeu des dominos,* le *jeu du yam's.* Par ailleurs, l'implantation de ludothèques dans de nombreux quartiers devrait favoriser l'utilisation de jeux à l'école et pourquoi pas la création de telles structures dans les écoles ou les classes et dans les IUFM. De fait, les jeux auraient leur place en formation.

Annexe

COMMENT ANALYSER UN JEU MATHÉMATIQUE ?

par Jeanne Bolon

De très nombreux jeux sont apparus sur le marché éducatif. Apprendre à les analyser, apprendre à faire des variantes, sont des activités intéressantes en formation initiale ou continue.
Les questions que l'on peut se poser sont toujours à peu près les mêmes, d'un jeu à un autre. En voici un exemple pour un jeu faisant intervenir le déplacement d'un pion de case en case sur une ou plusieurs pistes.

1- Lire la documentation sur le jeu :

1. quel est le but du jeu pour l'enfant ?
2. à combien joue-t-on ?
3. quel est l'enjeu, pour l'enfant, de telle ou telle case ?
4. comment se termine le jeu ?

2- Qu'y a-t-il à savoir (éventuellement à apprendre) pour pouvoir respecter les règles du jeu ? Les savoirs peuvent porter sur le codage, l'organisation des déplacements géométriques, le nombre, la circulation du dé entre les enfants, etc.

3- Le jeu est-il un jeu de hasard (l'enfant n'a pas de choix), un jeu de stratégie (l'enfant subit le hasard, mais il a aussi des choix) ?

4- Après avoir appris aux enfants comment jouer, l'enseignant peut leur proposer une disposition des éléments du jeu, comme une sorte de jeu interrompu : dans les jeux de hasard, il fait parler les enfants sur ce qui serait favorable ou défavorable et expliquer en quoi ; dans les jeux de stratégie, il demande ce que l'on aimerait jouer et pourquoi.
Dans chacun de ces cas, quels savoirs mathématiques l'adulte fait-il émerger ?

5- En supposant que les enfants ont bien intégré l'anticipation décrite au paragraphe 4, prévoir une évaluation individuelle des acquis des enfants. Si elle se fait sous forme de papier-crayon, y a-t-il un apprentissage de la lecture/écriture à faire préalablement ?

6- Un support de jeu est coûteux à réaliser. Pour la majorité des jeux, on peut faire quelques modifications mineures, et, du coup, introduire des variantes qui rendent le jeu plus facile ou plus difficile du point de vue des apprentissages mathématiques. Proposer de telles variantes en argumentant.

UN EXEMPLE : *Le Jeu Des Chemins,* de L. Champdavoine (Les mathématiques par le jeu, PS et MS, Nathan, 1985, p. 19)

RÈGLE DU JEU

L'enfant qui arrive le premier dans la case rouge qui est près de l'image peut choisir une des quatre images posées au centre.

L'enfant qui arrive le deuxième choisit à son tour.

Les joueurs lancent le dé chacun à leur tour et posent leur bonhomme sur la première case rencontrée correspondant à la couleur de la face retournée du dé. Si le dé se retourne sur une face blanche, le joueur passe son tour.

DÉROULEMENT DU JEU

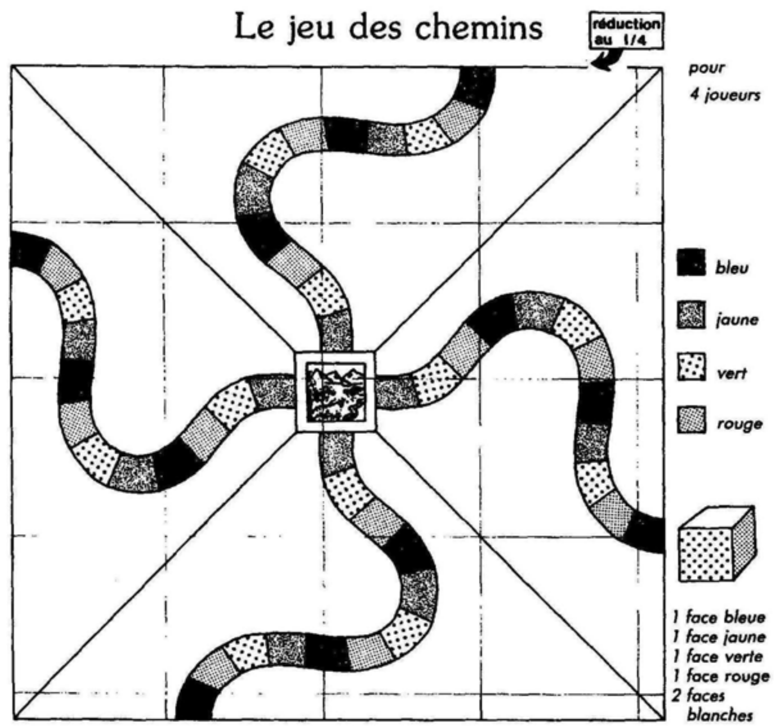
Il se joue avec quatre enfants et la maîtresse comme meneur de jeu.

Le plan de jeu est installé par terre sur un tapis; chaque enfant s'assoit devant un chemin et choisit un petit bonhomme (il faut quatre bonshommes différents).

- La maîtresse indique dans quel sens va passer le dé et montre aux enfants comment avancer leur bonhomme sur le chemin. Elle demande aux enfants de montrer où se trouve le départ du chemin et où est l'arrivée.

Elle explique la règle du jeu et comment on choisira les images (il est préférable que chaque joueur en fin de partie ait une image et que l'enjeu ne porte que sur le choix de l'image).

- La maîtresse donne le dé à l'enfant qui va jouer le premier: *« Eric c'est toi qui commence la partie, lance le dé. »*. Le dé se retourne sur « vert » (la maîtresse donne le nom de la couleur). *« Eric, tu prends ton petit bonhomme et tu le fais avancer sur le chemin jusqu'à ce que tu trouves une case de la couleur du dé. Et maintenant tu pauses le dé à Isabelle »*.
- Isabelle à son tour lance le dé, qui se retourne sur la face blanche. La maîtresse demande à Isabelle si celle couleur existe sur le chemin. Après avoir constaté qu'il n'y avait pas de case blanche, la maîtresse explique à



MATÉRIEL

Pour 4 joueurs et la maîtresse comme MENEUR de jeu :
— Un plan de jeu carré de 50 cm de côté divisé en quatre parties par les deux diagonales ; sur chaque partie, un chemin de 2,5 cm de large divisé en 12 cases de 3 cm avec une structure cyclique de couleurs : bleu, jaune, vert, rouge.
Ces chemins conduisent à une case centrale sur laquelle on posera quatre images, enjeu de la partie (chaque enfant aura une image, mais le choix se fera par ordre d'arrivée au but).
— Un dé de couleurs avec une face bleue, une face jaune, une verte et une rouge et deux faces blanches (couleur ne figurant pas sur le chemin).
— Quatre petits bonshommes différents (lego ou autre).

suivant.

- Lorsqu'un des joueurs arrive sur la case rouge terminale, la maîtresse lui fait choisir une des quatre images. La partie continue entre trois joueurs, puis entre deux joueurs, le dernier se contentant de l'image restante.

• Au cours de la partie, la maîtresse donne à chaque fois le nom de la couleur qui se trouve sur la face du dé et sur la case correspondante.
Remarque : pour 2 joueurs, utilisez un rectangle de 5 x 32 cm avec 2 chemins opposés.

Indications complémentaires fournies par L.Champdavoine dans la fiche du jeu.

OBJECTIF
Apprendre : - à jouer chacun son tour,
- à déplacer un pion sur un chemin orienté,
- à associer la couleur d'une face du dé à la couleur d'une case.

NOTIONS MATHÉMATIQUES
Correspondance terme à terme pour quatre couleurs entre cases du jeu et faces du dé (le dé a une valeur, celle des couleurs).
À chaque couleur correspond une face du dé, mais à chaque face du dé ne correspond pas une couleur, puisqu'il y a deux faces qui ne permettent pas déjouer.
De plus, à chaque couleur du dé correspondent plusieurs cases de chaque chemin.
La répétition cyclique des quatre couleurs forme un algorithme {« une suite de signes qu'ils soient gestuels, oraux ou graphiques est dite périodique si elle est construite à partir d'un élément simple répété. Cet élément simple porte le nom d'algorithme » - J.-S, Daniau).

Analyse de Jeanne Bolon avec sa grille :

1- *Lire la documentation*
- L'enfant souhaite gagner pour pouvoir choisir une image : le dernier qui arrive n'a plus le choix.
- On joue à quatre enfants. Toutefois, on peut se limiter à deux ou trois enfants en neutralisant une ou deux pistes.
- Les cases sont toutes équivalentes, à part la couleur qui servira à faire avancer le pion de chaque enfant.
- Le jeu se termine quand tous les enfants sont arrivés à la case de leur piste qui jouxte la case centrale.

2- *Le jeu oblige les enfants à* :
- lire la face supérieure du dé,
- mettre en rapport la couleur d'une face et une ou plusieurs cases de la même couleur,
- jouer à leur tour (ce qui est difficile en petite section, puisqu'il faut toujours tourner dans le même sens),
- attendre le tour suivant sans jouer (case blanche du dé),
- respecter le sens de la file, depuis les cases près de soi, vers la case centrale,
- aller à la première case de la bonne couleur en respectant l'ordre de la piste.

3- Le jeu est un jeu de hasard, il n'y a pas de stratégie à mettre en œuvre.
4- Le "jeu interrompu" permet d'introduire le vocabulaire : ton pion est *plus près* des images que celui d'Aurélie. La *première case* verte est celle-là, la *suivante* est celle-là, qui est arrivé le *premier* ? le *deuxième* ? le *troisième* ? le *dernier* ?
Contrairement à l'indication à la fin de la rubrique « NOTIONS MATHEMATIQUES », la régularité des couleurs sur chacune des pistes ne joue pas de rôle particulier, sauf à donner à chaque couleur le même poids. On aurait pu imaginer des pistes avec des fréquences de couleurs différentes,

d'une piste à l'autre, sans que cela change la nature mathématique des apprentissages en jeu.
5- Ce jeu est un des premiers que l'on puisse proposer en petite section : une évaluation papier-crayon serait hors sujet. Une évaluation individuelle peut se faire à l'occasion d'un atelier : elle peut porter sur les dénominations de couleur, la lecture du dé, le déplacement du pion vers la bonne case...
6- Le support de jeu peut servir pour un jeu de remplissage avec de petites quantités : 1 ou 2. Le dé de couleurs est alors remplacé par un dé qui comporte trois faces 1 et trois faces 2. Les enfants piochent des pions dans une réserve et les alignent du bord extérieur jusqu'à la case centrale. Gagne celui arrive le premier à la case centrale. Le jeu est alors plus difficile.
Pour des enfants qui ne connaîtraient pas bien leurs couleurs, on peut leur demander de remplir les cases avec des pions de la même couleur que la case, ou *seulement* les cases vertes.... ou *toutes les cases rouges de telle piste,* toutes les cases vertes de telle autre etc.

BIBLIOGRAPHIE

APMEP, *Jeux 5, 6 et 7,* Publications APMEP, (1998, 2002, 2005).

BOLON J., *Comment analyser un jeu mathématique*, in Documents pour la formation de professeurs des écoles en didactique des maths, Colmar 1993.

BOULE F., *Jeux mathématiques et enfants en difficultés*, in Documents pour la formation de professeurs des écoles en didactique des maths, Besançon 1997.

1,2,3… jouez !, Ed. MDI, 1993.

Jeux de calcul cycle 2 et 3, Ed. Bordas, 2002.

Faites vos jeux à l'école, Ed DIDIER, 2005.

CHAMPDAVOINE L., *Les mathématiques par les jeux*

1 *Petite et moyenne section*, Ed Nathan, Paris 1985.

2 *Grande section et CP*, Ed Nathan, Paris1986.

DE GRAMMONT N., *Pédagogie du jeu*, Ed De Boeck, Bruxelles,1997

ROYES L, MAURIN C., *Le jeu au service des apprentissages,* in Actes du XXIX colloque Inter-IREM de la Roche sur Yon, mai 2002.

FARADJI D., TAVEAU C. *Quelles problématiques pour la formation des enseignants à la pratique du jeu en classe ?*, in Actes du XXXIIè colloque Inter-IREM de Strasbourg, mai 2005.

JULLEMIER G., *Jouer pour apprendre aux cycles 1 et 2*, Ed Hachette , Paris 2005.

JULLEMIER G., *Jouer, c'est très sérieux*, Ed Hachette, Paris 1989

MILLIAT C. et NEYRET R., *Jeux numériques et élaboration de règles,* in « GRAND N » Spécial Maternelle tome 1, 1999-2000.

QUINTRIC C., *Jeux de société et apprentissages mathématiques au cycle 1*, in « GRAND N » Spécial Maternelle tome2C 1999-2000.

Le jeu en classe, Les cahiers pédagogiques, n° 448 ; décembre 2006.

La plupart des jeux présentés dans cet article sont disponibles sur internet, chez DIDACTO, à l'adresse suivante : www.didacto.com.

« JOUER AVEC LES FRACTIONS ? JOUER EN FORMATION ! »

Joële TREMEJE
PIUFM, IUFM de Nice
j.tremeje@wanadoo.fr

Henry DAVIO
PEMF, **École Marie Curie - Draguignan**
henri.davio@cegetel.net

Denise ROSSO
PEMF, **École Marie Curie - Draguignan**
Denise.rosso@club-internet.fr

Claire WINDER
PIUFM, IUFM de Nice
Claire.winder@free.fr

Résumé
Chaque année, dans les évaluations nationales d'entrée en sixième, nous retrouvons fréquemment l'erreur $\frac{13}{10}$ = 13,10 Pour tenter de remédier à cette situation, le groupe IREM premier degré de Draguignan (IUFM de Nice) a créé un jeu (au sens de G. Brougère), évolutif et s'insérant dans la progression sur les fractions et décimaux d'ERMEL. Selon R. Douady et M.J. Perrin-Glorian « une seule situation ne suffit pas pour construire un concept. » Ce jeu permet donc de manipuler, du CM1 à la sixième, les fractions simples puis les fractions décimales dans le cadre de la mesure des aires.

I – POINT DE DEPART

Ce sont des erreurs d'élèves repérées dans les évaluations nationales d'entrée en 6ème qui sont à l'origine de notre travail.

Chaque année, dans les exercices destinés à évaluer la compétence « passer, pour un nombre décimal, d'une écriture fractionnaire (fraction décimale) à une écriture à virgule (et réciproquement) », nous retrouvons fréquemment l'égalité $\frac{13}{10}$ = 13,10.

Pour tenter de remédier à cette situation, nous avons donc cherché à améliorer les dispositifs utilisés dans les classes.

Pour cela nous avons procédé à une sorte d'état des lieux dans le domaine de la connaissance des fractions et des nombres décimaux, en veillant à considérer les aspects didactique et pédagogique des activités existantes.

II – NOTRE DEMARCHE

II – 1 Les instructions officielles

Les programmes 2002 de l’école primaire définissent ainsi les objectifs à atteindre en fin de cycle 3 dans ce domaine sensible.

« Au cycle 3, mise en place d’une première maîtrise des fractions et des nombres décimaux : compréhension de leurs écritures, mise en relation des écritures à virgule avec des sommes de fractions décimales.

Les fractions sont essentiellement introduites, au cycle 3, pour donner du sens aux nombres décimaux. »

Les documents d’application des programmes donnent un exemple en commentaires :

$$2{,}58 = \frac{258}{100} = 2 + \frac{58}{100} = 2 + \frac{5}{10} + \frac{8}{100}$$

De plus ils précisent que « outre les fractions décimales, les fractions utilisées ont un dénominateur compris entre 2 et 5 (ou des puissances de ces nombres comme 4, 8, 16, 9, 25)

➢ *Nous avons alors convenu de définir* ***trois « familles »*** *de fractions sur lesquelles nous allions travailler :*

- *les fractions du type* $\frac{a}{2^n}$ *comme* $\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{6}{8}, \ldots$

- *les fractions du type* $\frac{a}{3n}$ *comme* $\frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \ldots$

- *les fractions décimales.*

Par ailleurs il est précisé dans le document d’accompagnement intitulé « articulation école collège » que « la fraction est introduite en référence au partage d’une unité, le dénominateur indiquant la nature du partage et le numérateur le nombre de parts considérées ($\frac{3}{4}$ lu « trois quarts » et compris comme trois fois un quart). On parle alors de « vision a-bièmes » de la fraction. Toujours selon ce document, « au collège, notamment en sixième, où la notion de quotient occupe une place centrale, la signification de l’écriture fractionnaire est étendue à la fraction considérée comme quotient : $\frac{3}{4}$ est conçue comme le nombre quotient de 3 par 4, nombre par lequel il faut multiplier 4 pour obtenir 3. »

➢ *Bien que certains travaux récents préconisent une présentation des fractions comme quotients dès l’école primaire, nous avons fait le choix de les aborder selon la « **vision a-bièmes.** »*

II – 2 L’aspect didactique

Dès 1997, dans les ouvrages parus chez Hatier sous le titre « *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* », les membres de l’équipe ERMEL avaient choisi d’introduire les fractions (simples puis décimales) selon la « vision a-bièmes », dans le cadre de la mesure[1], pour présenter ensuite les nombres décimaux comme codage d'une fraction décimale.

Ainsi, dans les premières activités proposées, en CM1, les fractions permettent de pallier l'insuffisance des entiers pour résoudre des problèmes de mesure de longueurs. Elles sont ensuite utilisées pour repérer des points sur la demi-droite graduée. C'est seulement au CM2, alors que l'écriture décimale a déjà été présentée aux élèves, que les fractions sont présentées dans le cadre de la mesure des aires à travers une activité intitulée « *Ça n'a pas l'aire juste* » Cette activité se décompose en deux parties reposant sur deux problèmes différents. Dans la première, il s'agit de trouver des manières de partager un rectangle en 2 ou 4 parties de même aire (le partage est à faire). Dans la seconde, un partage est donné et il s'agit de prouver s'il est composé de parties égales ou non.

➢ *Il apparaît donc que la progression proposée par ERMEL accorde une faible place au travail* ***dans le cadre de la mesure des aires ;*** *c'est pourquoi nous avons souhaité créer une activité qui se situe dans ce cadre-là.*

II – 3. L'aspect pédagogique

Ce sont encore les documents d'application des programmes 2002 qui ont contribué à définir nos pistes de travail. La place de la manipulation dans le travail mathématique, y est très bien définie : « Le travail mathématique est évidemment un travail de l'esprit. Mais celui-ci, en particulier à l'école élémentaire, s'exerce souvent à partir de questions posées sur des objets ou des expériences …» ; « Il faut cependant se convaincre que ce n'est pas la manipulation qui constitue l'activité mathématique mais les questions qu'elle suggère. »

➢ *Bien que les travaux existants (la mesure des bandes dans ERMEL) accordent une place importante à la manipulation, nous avons jugé pertinent de proposer également, dans le nouveau cadre abordé, une* ***activité manipulatoire****.*

➢ *Pour éviter le risque que la multiplication des situations ne vienne altérer la motivation des élèves, nous avons toutefois imaginé une entrée différente, en créant* ***un jeu****.*

III – LE « CAHIER DES CHARGES »

Les programmes de l'école élémentaire 2002 précisent que « la résolution de problèmes est au centre des apprentissages » et que « les situations sur lesquelles portent les problèmes proposés peuvent être issues »... entre autres … « de jeux. » Nous sommes ainsi assurés de la place du jeu dans les apprentissages.

Pour établir le « cahier des charges » du futur jeu nous nous sommes alors appuyés sur les travaux de Gilles Brougère[2] : après avoir énoncé les traits caractéristiques du jeu, il cite quatre raisons spécifiques de l'utiliser à l'école.

---

[1] Les travaux de recherche de l'équipe de l'IREM de Rennes ont mis en évidence deux cadres d'introduction des fractions : le « cadre partage » et le « cadre mesure » Ces deux cadres sont présents quel que soit le choix du sens privilégié lors de l'introduction du concept de fraction (vision a-bièmes ou vision a : b)

[2] Voir [1] et [5]

III –1 Les traits caractéristiques du jeu

Selon Gilles Brougère, cinq critères permettent d'analyser les situations concrètes pour déterminer en quoi elles relèvent ou non du jeu. Nous reprenons ces critères pour mieux expliciter notre démarche.

- 1er critère : la présence du second degré

« Le jeu est une mutation de sens, de la réalité : les choses y deviennent autres… Une simple histoire permet une mise en scène qui peut installer un jeu, espace spécifique où les activités vont avoir une autre valeur. »

> ➢ *C'est sur cette « autre valeur » que nous misons lorsque nous choisissons le jeu comme « entrée différente », évitant ainsi le risque qu'une simple multiplication des situations d'apprentissage ne vienne altérer la motivation des élèves.*

- 2ème critère : la décision du joueur

Pour qu'il y ait vraiment communication et interprétation, il faut qu'il y ait « décision de la part des joueurs, décision d'entrer dans le jeu mais aussi de le construire suivant des modalités particulières […] Le jeu apparaît comme une succession de décisions du joueur […] La décision peut résulter d'une élaboration collective qui suppose négociation et parfois acceptation de la décision de l'autre, ce qui est encore décidé. »

> ➢ *Le jeu consistant à placer des pièces sur un plateau en fonction du tirage de dés, le choix des pièces est laissé au libre arbitre de chaque joueur.*
>
> ➢ *D'autre part, dès les premières expérimentations, nous avons pu constater que les diverses interprétations possibles de la règle amenaient, au sein des groupes, des discussions qui aboutissaient nécessairement à un accord dont dépendait la suite de la partie.*

- 3ème critère : la règle

« Il n'y a pas de jeu sans règle. Mais il faut bien voir que la règle n'est pas la loi ni même la règle sociale qui s'impose de l'extérieur. Une règle de jeu n'a de valeur que si elle est acceptée par les joueurs et ne vaut que pendant le jeu. Elle peut être transformée par accord des joueurs. »

> ➢ *Les simulations de jeu réalisées en amont des expérimentations avec les élèves n'ont pas suffi à imaginer toutes les situations possibles auxquelles ceux-ci seraient confrontés. C'est ainsi qu'ils ont choisi de résoudre certains « problèmes » (moyens possibles de bloquer l'adversaire…) en aménageant la règle.*

- 4ème critère : l'incertitude

« Le jeu n'attache pas une importance excessive aux résultats. L'activité ludique se caractérise par une articulation très lâche entre la fin et les moyens. Ce qui ne veut pas dire que les enfants ne tendent pas vers un but quand ils jouent et qu'ils ne mettent pas certains moyens en œuvre pour l'atteindre mais il est fréquent qu'ils modifient leurs objectifs en cours de partie pour s'adapter à de nouveaux moyens et vice versa. »

> ➢ *Les différents essais de stratégie imaginés par les élèves montrent bien que, même si le but de chacun est de gagner, la prise de risque fait partie intégrante du processus de jeu. Ainsi des modifications d'objectifs (« avancer » dans le jeu ou bloquer l'adversaire) sont apparues en cours de partie.*

> ➢ *On a pu également constater une forme d'entraide entre deux équipes adverses, le plaisir de « bien jouer » occultant l'intérêt personnel…*

- 5ème critère : la frivolité

« Dans le jeu, la gravité des conséquences que comportent les erreurs ou les échecs se trouve atténuée. Au fond, le jeu est une activité très sérieuse, mais qui n'a pas de conséquences frustrantes pour l'enfant. Il s'agit en un mot d'une activité entreprise pour elle-même et non pas pour autrui […] Si le jeu permet d'expérimenter, et peut-être d'apprendre, c'est parce qu'il s'oppose au sérieux, parce qu'il est du côté du frivole, du futile. Et en conséquence, on peut lui trouver un sérieux dérivé, au second degré, mais qui doit rester caché à l'enfant au risque de détruire la valeur de son jeu. Mais là se trouve le paradoxe : le sérieux risque de chasser la frivolité du jeu et en conséquence son intérêt spécifique. »

Ainsi « les caractéristiques de l'activité ludique en font une activité paradoxale par rapport aux objectifs éducatifs : à travers la liberté du joueur et l'incertitude quant au résultat, le jeu est une activité qui n'a pas de conséquences directes. »

> ➢ *C'est en veillant à respecter ce dernier critère que nous avons conduit notre recherche, en essayant d'éviter de tomber dans le piège de l'activité mathématique déguisée qui ne nous aurait pas permis d'atteindre le but que nous nous étions fixé. L'engouement certain rencontré chez les élèves lors d'une première vague d'expérimentations a été un indice révélateur.*

III –2 Quatre raisons spécifiques d'utiliser le jeu

En outre, Gilles Brougère développe quatre raisons spécifiques d'utiliser le jeu tout en insistant sur la nécessité pour l'enseignant de se donner les moyens d'observer les joueurs afin de ne pas courir le risque de perdre une grande partie du potentiel du jeu [3].

- Le jeu permet l'implication du joueur :

« L'enfant étant dans une situation de maîtrise des décisions (cela suppose que ce soit un véritable jeu), il est impliqué par l'activité dans son déroulement et non pas motivé par un attrait extérieur. En effet « celui qui apprend c'est celui qui agit, ce n'est pas celui qui regarde et qui attend que le temps passe. » […] Il n'a peut-être pas appris beaucoup, mais le peu de choses qui ont pu se passer, il en a bien été l'acteur, il n'a pas été que le spectateur passif. C'est important, à condition, là encore de pouvoir observer. »

> ➢ *En remplissant ces conditions notre jeu souscrit à la théorie constructiviste du savoir. Au cours de nos différentes expérimentations, nous avons veillé à noter les réactions de chacun pour mieux en mesurer l'impact sur les élèves en termes d'acquisition de compétences contextualisées. Trois modes d'observation ont été utilisés : présence d'un adulte - témoin, enregistrement vidéo, et « feuille de score. »*

- Le jeu est un lieu où l'enfant décide :

« Si l'enfant a l'initiative, il va chercher l'excitation, il va donc chercher à résoudre de nouveaux problèmes, mais pas des problèmes insurmontables parce que ce n'est pas « marrant » […] Il peut y avoir de nombreuses contraintes qu'on impose à l'enfant sans s'en rendre compte, qui

---

[3] Voir dans [5] les notes prises lors de la conférence prononcée par Gilles Brougère « *Quelles utilisations faire du jeu pour développer les compétences et mettre l'enfant en situation de réussite ?* » (Maison de l'Education ; Lille ; 1994)

limitent considérablement cette prise d'initiative, sans qu'il y ait forcément beaucoup de raisons pour cela. »

> ➢ *Le choix de la règle du jeu a ainsi fait l'objet de nombreuses modifications pour éviter les contraintes inutiles.*

- Le jeu permet de faire quelque chose que l'on ne peut pas faire sinon de façon fictive :

« L'enfant est dans une situation où il peut essayer quelque chose, sans risque. Il peut affronter une situation avec la relation à la règle, la relation à la contrainte et la relation à l'autre. »

> ➢ *C'est la raison pour laquelle notre choix s'est porté sur un jeu, dont la trace écrite (« feuille de score ») est volontairement limitée.*

- Le jeu est un lieu de la gestion de la communication :

« La façon dont les enfants gèrent les situations ludiques est intéressante, cela suppose toute une communication complexe pour que l'activité soit prise pour quelque chose qui n'est justement pas vrai. Il faut organiser la communication, il faut communiquer, on ne peut pas jouer sans communiquer…Or la maîtrise de la communication est […] la base de tout apprentissage. »

> ➢ *L'organisation par équipes de deux vise à favoriser cette communication. Nous avons également pu constater au cours de nos expérimentations que cet aspect fait partie intégrante du jeu !*

IV – LE JEU DES FRACTIONS

Il s'agit d'un jeu évolutif permettant aux élèves de fréquenter soit des fractions simples usuelles (sixièmes, huitièmes mais aussi tiers, quarts, demis), soit des fractions décimales.

IV – 1 La règle du jeu

◊ ***Nombre de joueurs*** : 2 équipes de 2 joueurs.

◊ ***Matériel*** : - Un plan de jeu

- Des pièces bicolores

- Des dés de couleurs différentes avec des fractions : un dé rouge, un dé vert, un dé jaune, un dé bleu. Les dés sont fournis au début de chaque partie par l'enseignant.

En ce qui concerne le matériel, il est variable suivant le type de fraction étudiée (voir annexes I, II, III). Les modalités d'utilisation (le choix des dés) vont permettre également de définir des niveaux de jeu :

Niveau 1 : dé rouge + dé vert

Niveau 2 : dé rouge + dé jaune

Niveau 3 : dé rouge + dé vert + dé jaune

Niveau 4 : dé rouge + dé bleu

Niveau 5 : dé rouge + dé vert + dé bleu

Niveau 6 : dé rouge + dé bleu + dé jaune

◊ ***Principe du jeu :*** Recouvrir, sur le plan de jeu, la plus grande surface avec le moins de pièces possibles de sa couleur.

◊ ***Règle du jeu :***

• Une partie se joue en trois manches.

• *Début de la partie :* Chaque joueur (ou équipe) lance le dé rouge. Celui qui obtient la plus grande fraction commence et choisit sa couleur.

• A tour de rôle, chaque joueur (ou équipe) lance les dés.

En fonction du tirage, il doit poser sur le plan de jeu le moins possible de pièces de sa couleur.

Toute pièce posée ne peut être déplacée.

• Une manche s'achève dès qu'un joueur (ou une équipe) obtient un tirage suffisant pour finir de remplir le plan de jeu (même si le total des dés est supérieur à ce qui reste à recouvrir).

Chacun marque alors son score.

• Si le vainqueur de la manche a posé moins de pièces que l'adversaire, il a un bonus de 1 point

• Le vainqueur de la partie est celui qui a totalisé le plus de points à la fin des trois manches.

◊ ***Comptage des points*** : voir annexes I, II et III

IV – 2 Objectifs visés

◊ ***Objectif principal*** :

Savoir décomposer une fraction décimale sous forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à un.

◊ ***Compétences spécifiques travaillées par niveau*** :

* Niveau 1 :

- savoir calculer la somme de fractions de même dénominateur

- extraire la partie entière et la partie fractionnaire d'une fraction supérieure à un

* Niveaux 2 à 6:

- utiliser des fractions équivalentes

- savoir calculer la somme de fractions de même dénominateur

- extraire la partie entière et la partie fractionnaire d'une fraction supérieure à un

IV – 3 Trois variantes du jeu

Ce sont les trois « familles » de fractions définies dans le paragraphe I qui ont conditionné le choix des divers supports proposés aux élèves. Ainsi nous avons utilisé dans une première vague d'expérimentations, pour chacune des « familles », des supports de jeu avec des formes géométriques permettant de créer des images mentales chez les élèves : octogones pour les fractions du type $\frac{a}{2^n}$, hexagones pour les fractions du type $\frac{a}{3^n}$ et décagones pour les fractions décimales. Bien que la règle du jeu soit la même pour les différentes versions, des documents spécifiques, présentant le matériel utilisé dans chaque cas, ont été créés. Un exemple de règle du jeu proposée aux élèves est donné en annexe IV.

Cependant, en ce qui concerne le(s) plan(s) de jeu, il n'est pas forcément pertinent de choisir des formes spécifiques à certaines fractions (hexagones pour sixièmes et tiers, octogones pour huitièmes et quarts…) Ne risque-t-on pas de tomber sur une représentation prototypique de la fraction qui risquerait de faire obstacle à l'apprentissage visé ? Dans ce cas, l'utilisation de plusieurs formes (par exemple octogone et rectangle pour travailler la « famille » des huitièmes) et/ou de pièces représentant diverses fractions de ces formes ne permettrait-elle pas d'éviter cet écueil ? Nous pensons que si l'image mentale créée par le dispositif présenté en atelier peut être une aide pour certains élèves en début d'apprentissage, il serait pertinent de proposer des supports diversifiés dès les premières mises en œuvre.

IV – 3 Une proposition de progression

Après une première vague d'expérimentations en CM1, CM2 et 6°, qui nous a amenés à certains aménagements du dispositif proposé, nous nous proposons de poursuivre notre travail en testant la progression suivante :

Niveau	Type de situation	Situation	Objectifs
CM1	Apprentissage	*Introduction des fractions simples dans le contexte des mesures de longueurs selon la progression proposée par ERMEL*	*Utiliser des fractions simples (du type $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, …) et des écritures additives pour exprimer des mesures de longueurs obtenues en reportant une bande unité* *- Utiliser les notations et le vocabulaire associé* *- Concevoir qu'une mesure peut s'exprimer de différentes façons et établir ainsi :* ▪ *des équivalences entre fractions* ▪ *des décompositions faisant apparaître la partie entière* ▪ *des résultats d'additions simples*
	Apprentissage / Réinvestissement	**Notre jeu (version octogones)** Travail par groupes homogènes de 4 avec différenciation par les contraintes de la tâche : 1) en fonction du support (plan de jeu) - octogones réguliers (images mentales facilitantes pour les fractions du type $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ - rectangles découpés en 8 parts égales 2) en fonction des dés - fractions de même dénominateur - fractions de dénominateurs différents	- Utiliser des fractions inférieures et supérieures à 1 - Effectuer des calculs avec des fractions - Écrire une fraction sous la forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 - Utiliser des fractions équivalentes

Fin CM1 / CM2	Réinvestissement :	**Notre jeu (version décagones)** Même démarche qu'avec la version précédente	- Mêmes objectifs qu'avec la version octogones (manipulation des fractions décimales en vue de donner du sens à l'écriture décimale d'un nombre) - utilisation de l'écriture décimale (lors de la notation des scores)
	Consolidation	**Notre jeu (version hexagones)** Même démarche qu'avec la version précédente	- Mêmes objectifs qu'avec la version octogones
Fin CM2	Entraînement	**Notre jeu (version décagones)** <u>Travail par groupes de hasard</u>	- Mêmes objectifs qu'avec la version octogones (manipulation des fractions décimales en vue de donner du sens à l'écriture décimale d'un nombre) - utilisation de l'écriture décimale (lors de la notation des scores)
Début 6ème	Remédiation	**Notre jeu (version décagones)** <u>Travail par groupes de niveau</u>	-Mêmes objectifs qu'avec la version octogones (manipulation des fractions décimales en vue de donner du sens à l'écriture décimale d'un nombre) - utilisation de l'écriture décimale (lors de la notation des scores)

V – DES PROPOSITIONS ISSUES DU DEBAT EN ATELIER

Au cours de l'atelier, nous avons exposé notre démarche ainsi que les différentes versions de ce jeu. Puis les participants ont été invités à y jouer pour mieux en démonter les mécanismes et émettre des propositions de mises en œuvre.

V – 1 Le déroulement de l'atelier

Les participants de l'atelier, groupés par quatre, ont été confrontés à l'une des versions du jeu avec une « règle du jeu » épurée, où n'apparaissaient ni les objectifs du jeu, ni les compétences mobilisées. Les détails concernant les six niveaux de jeu prévus ne figuraient pas non plus sur le document fourni.

Chaque groupe disposait d'une grille d'analyse (voir annexe V), qui permettait ainsi de mieux cibler les différents aspects à considérer lors de l'analyse, à savoir l'aspect didactique et pédagogique, l'aspect matériel et bien sûr l'aspect ludique. Cette grille d'analyse a été fortement inspirée des travaux que Jeanne Bolon avait menés dans le cadre d'une étude sur les jeux mathématiques, et affinée à la lumière des recherches de Gilles Brougère.

Les grilles complétées dans les différents groupes ont été soumises à la lecture de chacun par le biais d'un affichage. A travers les trois aspects étudiés, les diverses remarques ont permis de nourrir le débat entre les participants de l'atelier.

V – 2 Les points de discussion

Le débat s'est centré sur les quatre questions suivantes.

V – 2.1 La question de la stratégie

Selon Daniel Djament, professeur de mathématiques à l'IUFM de Créteil, qui s'exprime dans le JDI de mai 2005, « entendre un enfant dire : « si tu joues ici, alors moi je joue là et tu as perdu », ce que l'on ne peut pas entendre dans un jeu de hasard, est un grand plaisir pour un enseignant qui voit là se mettre en place un processus d'argumentation, voire de raisonnement. » Il est donc naturel que la question de la stratégie ait fait l'objet de nombreuses discussions entre les participants de l'atelier.

Si l'on s'en tient à l'objectif poursuivi, on pourrait considérer que, dans le jeu des fractions, la stratégie gagnante consiste pour le joueur, à choisir le minimum de pièces à poser sur le plateau en fonction du tirage des dés. Toutefois, si la stratégie se limite à cela, le jeu prend plutôt l'allure d'un exercice mathématique, et surtout dès que la stratégie dite « gagnante » est connue des élèves, le jeu se révèle n'être plus qu'un jeu de hasard.

Le problème du blocage de l'adversaire a fait l'objet de discussions. Tout naturellement, la question de l'éparpillement des pièces pour obliger celui-ci à utiliser davantage de pièces pour remplir le plan de jeu, s'est posée, et a entraîné des questions quant à l'adéquation du jeu à l'objectif, à savoir amener l'élève à décomposer une fraction en une somme d'un entier et d'une fraction inférieure à un. Par exemple l'utilisation de deux dés l'un portant des nombres entiers, l'autre des fractions obligerait l'élève à transformer la somme obtenue en fonction des places disponibles sur le plan de jeu. Dans ce cas toutefois, c'est avant tout l'écriture d'un entier sous forme d'une fraction qui serait travaillée plutôt que l'équivalence $\frac{a}{b} = n + \frac{c}{b}$ avec $\frac{c}{b} < 1$.

L'utilisation d'un plateau de jeu par équipe, à compléter en fonction d'un même tirage permettrait de limiter la part de hasard. On pourrait également remplacer les dés par des cartes que l'élève devrait choisir …

V – 2.2 La place de la manipulation

Dans l'exposé de notre démarche, il apparaît clairement qu'une de nos pistes de travail consistait à trouver une activité de type manipulatoire. Mais comment dépasser le stade de la manipulation ?

Nous considérons qu'une première réponse se situe du côté du maître. Un moment essentiel est en effet le temps post-jeu ou rétroaction : lorsque les joueurs évoquent leur activité ludique (difficultés, observations, stratégies…) Cette régulation débouche sur l'utilisation de mémoires de jeu. Ainsi ce temps de travail participe à un apprentissage où notions, représentations et procédures sont résumées. La rétroaction peut alors donner accès à nouveau au jeu et déboucher également sur des prises de décisions concernant des variantes de règles permettant des essais stratégiques.

Dans le JDI de mai 2005, Gilles Brougère rappelle que deux choix se présentent à l'enseignant quant à l'utilisation des jeux en classe : « L'un formel qui donne un aspect tout à fait scolaire au jeu en faisant entrer de force des apprentissages au risque de faire disparaître le critère de frivolité, le second choix, plus informel inscrit le jeu en tant que tel dans la classe, sans mesurer ni évaluer précisément les apprentissages propres éventuels. » Dans ce dernier cas, il précise que « le jeu devrait alors être encadré par des moments structurés, dans lesquels on parlera, on fera germer des connaissances, les compétences qui sont apparues dans la phase du jeu. » C'est la démarche que nous avons adoptée au cours de nos expérimentations.

Toutefois, on peut également amener l'élève, au cours des phases de jeu, à conceptualiser sa stratégie et à faire ainsi l'apprentissage de l'abstraction. Pour cela, en nous appuyant sur une des raisons invoquées par Brougère pour utiliser le jeu dans les apprentissages, à savoir le rôle important de la communication, nous avions choisi, lors de nos diverses expérimentations de faire jouer les enfants par équipes de deux joueurs, obligeant ainsi chacun à communiquer son plan à son partenaire. Les participants ont également proposé de modifier l'organisation prévue en intégrant un « marchand » dont la tâche consisterait à donner au joueur les pièces demandées.

V – 2.3 Le mode de validation

Comme dans toute situation de jeu, le but poursuivi par chacun est de gagner. On peut donc penser à une surveillance mutuelle des joueurs qui tient lieu de validation.

Dans un premier temps toutefois, lors de nos expérimentations, nous avons tenté de faire utiliser par les élèves, des feuilles de jeu qui permettaient d'obtenir une trace des différentes étapes de la partie. Chaque tirage devait être noté ainsi que les pièces choisies. Mais nous avons constaté très rapidement que cette tâche alourdissait le dispositif et finissait par le rendre inefficace. L'un des traits caractéristiques du jeu, à savoir la frivolité, disparaissait tout simplement. Les feuilles de scores utilisées par les élèves ont donc été conçues pour que n'apparaissent que les scores des différentes manches qui composent la partie, les bonus éventuels et le score total.

V – 2.4 La pertinence des supports

Nous avons déjà évoqué, lors de la discussion sur le type de jeu (stratégie ou hasard) la possibilité de modifier le matériel mis à disposition des élèves.

Il avait été proposé de faire jouer chaque équipe sur son propre plateau pour limiter les effets du hasard dû au tirage des dés.

Outre le fait d'intervenir sur le niveau de stratégie du jeu, la proposition de remplacer les dés par des cartes que l'on peut choisir en fonction des possibilités fournies par le plan de jeu, permettrait d'accroître le nombre d'écritures numériques obtenues lors d'une même partie. De plus les cartes utilisées par chaque joueur pourraient être stockées et servir ainsi de mémoire de jeu, permettant de contribuer à la validation de la partie par les pairs ou /et le maître

VI – CONCLUSION PROVISOIRE

En ce qui concerne le jeu lui-même, les différentes variantes proposées peuvent constituer un point de départ pour jouer avec les enfants quitte à utiliser les phases de rétroaction pour déboucher sur des prises de décisions concernant des modifications de la règle permettant des essais stratégiques.

Les premières expérimentations qui ont permis d'aboutir à la règle du jeu donnée aux élèves (voir un exemple en annexe IV), et utilisant les différents supports présentés dans l'atelier (voir annexes I, II et III) nous ont déjà amenés aux conclusions suivantes :

En ce qui concerne l'effet du jeu pour l'élève :

- Le jeu a permis aux élèves de réellement s'approprier le problème, donnant ainsi plus de sens à l'apprentissage.

- Le jeu a favorisé les interactions entre élèves (organisation par équipes de deux)

- Le jeu a permis aux élèves de s'entraîner et de consolider leurs connaissances d'une manière agréable.

En ce qui concerne l'effet du jeu pour l'enseignant :

- Le jeu lui a donné rapidement des indications sur les connaissances des élèves : connaissances acquises, connaissances en cours d'acquisition.

- Le jeu a servi de support aux médiations de l'enseignant.

Comme le soulignent R. Douady et M.J. Perrin-Glorian[4], les concepts se construisent à l'occasion d'actions, mais une seule situation ne suffit pas pour construire un concept, des situations de renforcement permettant d'acquérir la familiarité souhaitée.

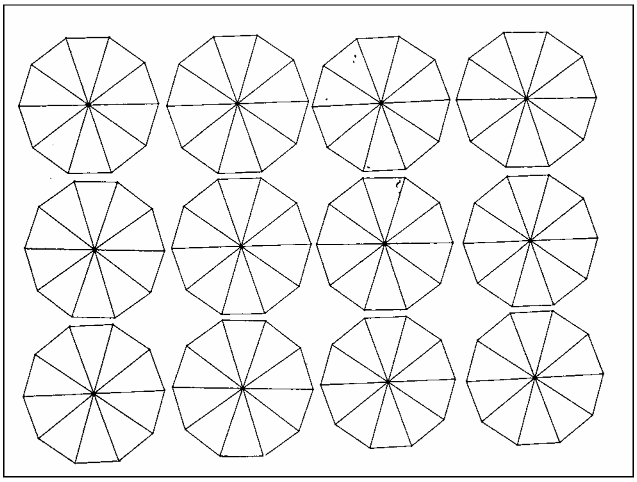
[4] Voir [9]

Ainsi, en s'inscrivant dans la progression proposée par ERMEL, le jeu des fractions « dans tous ses états » peut s'avérer être un outil supplémentaire pour les enseignants dans le domaine de l'apprentissage des fractions et des nombres décimaux.

ANNEXE I : LE JEU DES DECAGONES

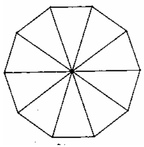
◊ ***Matériel***:

- Le plan de jeu

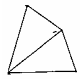


- Les pièces bicolores :

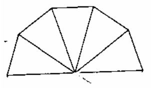
*12 pièces « 1 »



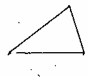
* 12 pièces « $\frac{2}{10}$ »



* 10 pièces « $\frac{5}{10}$ »



* 16 pièces « $\frac{1}{10}$ »



- Les dés avec des fractions :

* Un dé rouge avec les faces : $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{10}$

* Un dé vert avec deux faces $\frac{7}{10}$, deux faces $\frac{8}{10}$, deux faces $\frac{9}{10}$

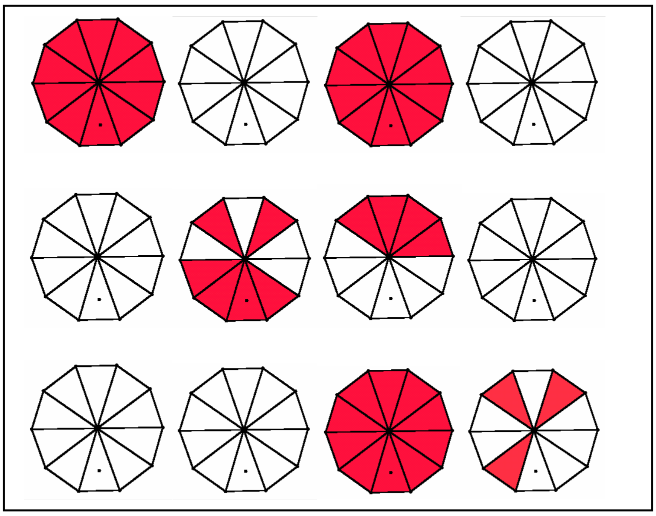
* Un dé jaune avec deux faces $\frac{1}{2}$, deux faces $\frac{2}{2}$, deux faces $\frac{3}{2}$

* Un dé bleu avec deux faces $\frac{3}{5}$, deux faces $\frac{4}{5}$, deux faces $\frac{5}{5}$

◊ ***Exemple de comptage des points*** : *Une figure entière vaut 1 point*

Nombre de points de l'équipe rouge :

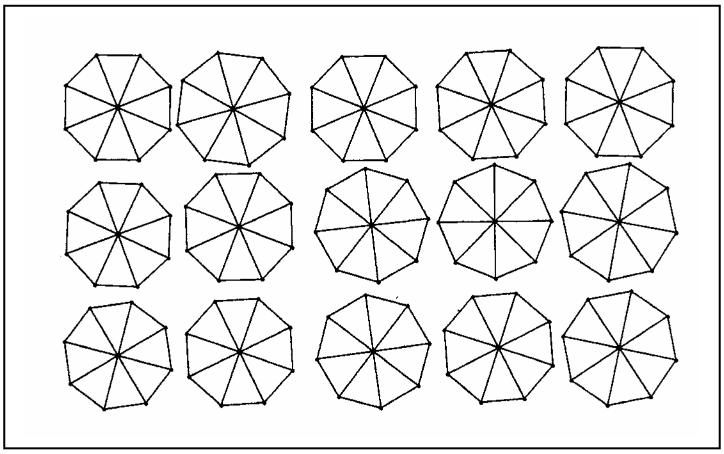
$$4 + \frac{3}{10}$$



ANNEXE II : LE JEU DES OCTOGONES

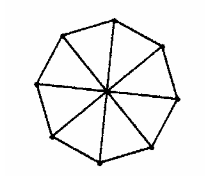
◊ ***Matériel***:

- Un plan de jeu

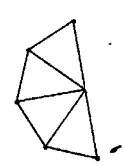


- Des pièces bicolores :

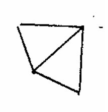
*16 pièces « 1 »



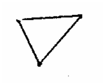
* 8 pièces « $\frac{1}{2}$ »



* 16 pièces « $\frac{1}{4}$ »



* 24 pièces « $\frac{1}{8}$ »



- Des dés avec des fractions :

* Un dé rouge avec les faces : $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{4}{8}, \frac{6}{8}, \frac{8}{8}, \frac{10}{8}$

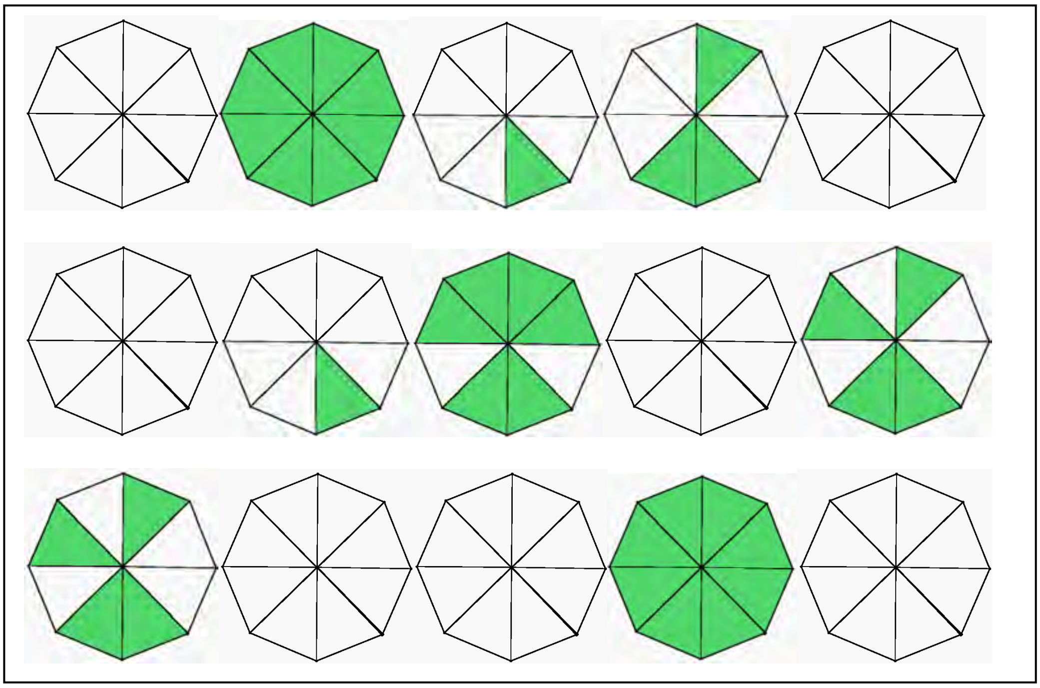
* Un dé vert avec deux faces $\frac{5}{8}$, deux faces $\frac{6}{8}$, deux faces $\frac{7}{8}$

* Un dé jaune avec deux faces $\frac{1}{2}$, deux faces $\frac{2}{2}$, deux faces $\frac{3}{2}$

* Un dé bleu avec les faces $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$

◊ ***Comptage des points*** : *Une figure entière vaut 1 point*

Exemple :



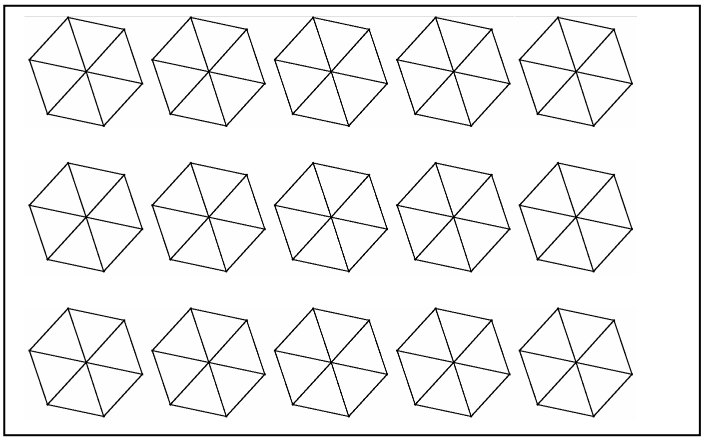
Nombre de points
de l'équipe verte :

$4+\frac{3}{8}$

ANNEXE III : LE JEU DES HEXAGONES

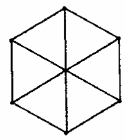
◊ ***Matériel***:

- Un plan de jeu

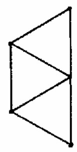


- Des pièces bicolores :

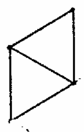
*15 pièces « 1 »



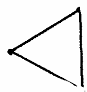
* 8 pièces « $\frac{1}{2}$ »



* 12 pièces « $\frac{1}{3}$ »



* 18 pièces « $\frac{1}{6}$ »



- Des dés avec des fractions :

  * Un dé rouge avec les faces : $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{6}$

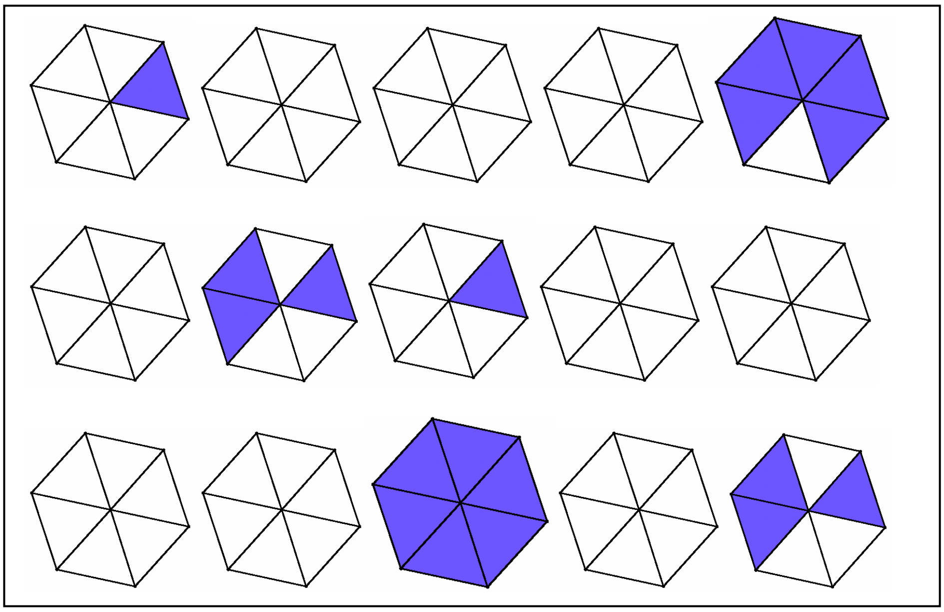
  * Un dé vert avec deux faces $\frac{4}{6}$, deux faces $\frac{5}{6}$, deux faces $\frac{6}{6}$

  * Un dé jaune avec deux faces $\frac{1}{2}$, deux faces $\frac{2}{2}$, deux faces $\frac{3}{2}$

  * Un dé bleu avec les faces $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$

◊ ***Comptage des points*** : *Une figure entière vaut 1 point*

Exemple :



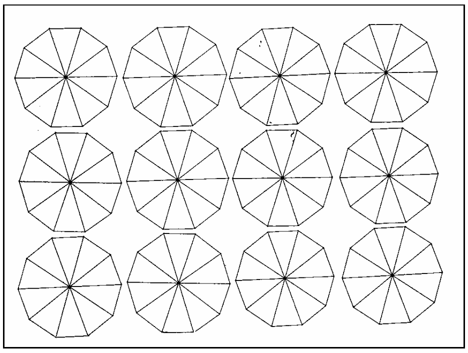
Nombre de points de l'équipe bleue :

$$3 + \frac{1}{6}$$

ANNEXE IV : UNE DES REGLES PROPOSÉES AUX ÉLÈVES

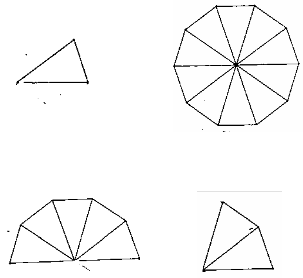
Le jeu des décagones

◊ ***Nombre de joueurs*** : 2 (ou 2 équipes)



◊ ***Matériel***:

- un plan de jeu
- des pièces bicolores :



- des dés de couleur

◊ ***Principe du jeu :***

Recouvrir le plan de jeu avec des pièces de deux couleurs (rouge ou blanche suivant le joueur), en fonction des tirages des dés.

◊ ***Règle du jeu :***

• Une partie se joue en trois manches.

• Début de la partie

Chaque joueur (ou équipe) lance le dé rouge. Celui qui obtient la plus grande fraction commence et choisit sa couleur.

• A tour de rôle, chaque joueur (ou équipe) lance les dés.

En fonction du tirage, il doit poser sur le plan de jeu le moins possible de pièces de sa couleur.

Toute pièce posée ne peut être déplacée.

• Une manche s'achève dès qu'un joueur (ou une équipe) obtient un tirage suffisant pour finir de remplir le plan de jeu (même si le total des dés est supérieur à ce qui reste à recouvrir).

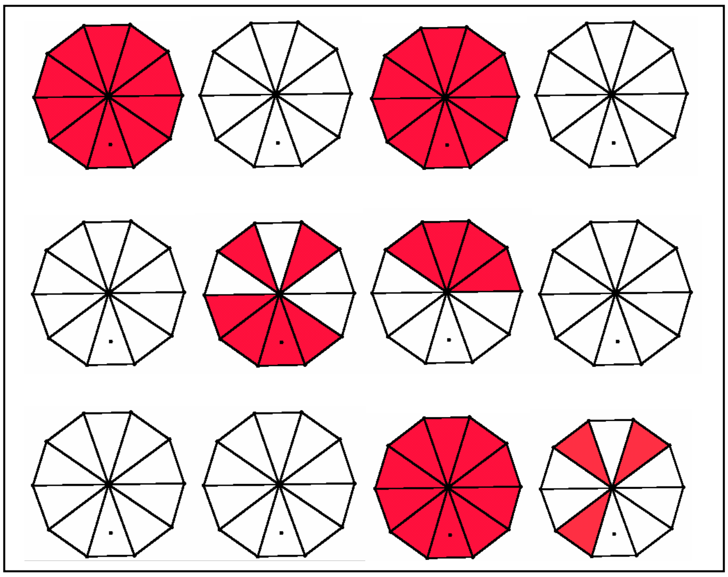
Chacun marque alors son score.

• Si le vainqueur de la manche a posé moins de pièces que l'adversaire, il a un bonus de 1 point.

• Le vainqueur de la partie est celui qui a totalisé le plus de points à la fin des trois manches.

◊ ***Comptage des points*** : *Une figure entière vaut 1 point*

Exemple :



Nombre de points de

l'équipe rouge :

$$4 + \frac{3}{10}$$

ANNEXE V : LA GRILLE D'ANALYSE

ANALYSE DU JEU DES FRACTIONS	
Version du jeu (octogones/hexagones/décagones) :	
Aspect ludique	
But du jeu pour l'élève	
Type de jeu (hasard ou stratégie)	
Remarque(s) et appréciation (sur une échelle de 1 à 5)	
Aspect didactique et pédagogique	
Objectif(s) du jeu visé(s) par le maître	
Compétence(s) travaillée(s)	
Pré-requis nécessaire(s)	
Procédures attendues	

Le jeu interrompu, est-ce possible ?	
Évaluation à proposer	
Place du jeu dans la progression sur les fractions et décimaux	
Aspects matériels	
Le contenu de la règle du jeu est-il accessible aux élèves ?	
La règle du jeu facilite-t-elle l'appropriation du jeu ?	
Les choix concernant le support (plateau, pièces, dés) sont-ils pertinents ?	
Remarque(s) et appréciation (sur une échelle de 1 à 5)	

BIBLIOGRAPHIE (TITRE 2)

[1] BROUGERE G. (1995) *Jeu et éducation,* L'Harmattan.

[2] BROUSSEAU G. (juin 1986) *Le jeu et l'enseignement des mathématiques,* [allocution au 59éme congrès AGIEM], Bordeaux, doc. ronéo, 11 pages

[3] ERMEL/INRP (1997) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1,* Hatier Pédagogie.

[4] ERMEL/INRP (1999) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM2,* Hatier Pédagogie.

[5] ROYE L. & MAURIN C. (2002) *Le jeu au service des apprentissages, 214-224* in Actes du XXIX^{e} colloque COPIRELEM, La Roche-sur-Yon, IREM des Pays de Loire.

[6] RODRIGUEZ A. (oct. 1993) *Mathématiques : jouez le jeu, 49-63,* JDI.

[7] PETIT S. (2005) *Entretien avec Gilles Brougère,* 18-19, JDI n°9

[8] BOLON J. (1993) *Comment analyser un jeu mathématique, 77-79* in Carnets de route de la COPIRELEM, CONCERTUM Tome 1

LES SITUATIONS-RECHERCHE POUR LA CLASSE

Cécile OUVRIER-BUFFET
Maître de Conférences, IUFM de Melun
DIDIREM, Paris 7
ERTé *Maths à Modeler*
cecile.ob@wanadoo.fr

Résumé
Le savoir scientifique se construit dans le domaine de la recherche. Le chercheur peut, et doit, pour faire évoluer son questionnement, choisir lui-même le cadre de résolution, modifier les règles ou en changer, s'autoriser à redéfinir les objets ou à transformer la question posée. Il peut momentanément s'attaquer à une autre question si cela lui semble nécessaire. C'est à ce type de pratiques que nous souhaitons confronter l'élève. Mais quelles mathématiques est-il pertinent et possible d'enseigner dans des « situations de recherche en classe » ?
Nous avons utilisé le cadre de cet atelier pour développer le thème suivant : la construction, la dévolution et la gestion de Situations-Recherche (SR) pour l'enseignement de la démarche scientifique en mathématiques.

Dans les programmes scolaires de mathématiques se dessine un intérêt relativement nouveau pour la démarche de recherche. L'expression même de « *démarche de recherche en mathématiques* » a pris une place importante et apparaît actuellement de manière transversale dans les instructions officielles françaises, et ce dès le primaire. Il est en effet préconisé de confronter les élèves à « *de véritables problèmes de recherche* » (cycle 2). L'introduction de ce type d'activités vise à « *intéresser les élèves à la pratique des mathématiques* », en faisant de la classe « *une véritable petite communauté mathématique* ». Cette dimension « recherche », qui se veut donc proche de l'expérience des chercheurs professionnels, s'inscrit dans une vision des mathématiques scolaires qui donnerait plus de poids au raisonnement mathématique qu'aux connaissances notionnelles. Nous allons interroger cette dimension « recherche » et questionner le thème suivant : la construction, la dévolution et la gestion de Situations-Recherche (SR) pour l'enseignement de la démarche scientifique en mathématiques. Nous spécifierons les particularités des SR, illustrerons la dévolution et la gestion des SR sur « la chasse à la bête » et conclurons sur le vécu des participants à cet atelier.

I – LES SITUATIONS-RECHERCHE

I – 1 Une caractérisation

Les recherches conduites au sein de l'ERTé[1] *Maths à Modeler* s'articulent autour de situations que nous appelons Situations-Recherche. Ce sont des situations particulières qui peuvent être considérées comme la transposition pour la classe de l'activité du chercheur en mathématiques. Nous les caractérisons ainsi :

• Le problème abordé est le plus souvent issu de problèmes de recherche actuels. Il peut donc comporter une, plusieurs ou aucune solution. Il peut être encore ouvert dans la recherche mathématique actuelle.

• Le point de départ est une question facilement compréhensible pour celui à qui elle est posée. Elle n'est pas formalisée en termes mathématiques. C'est la situation qui amène l'élève à l'intérieur des mathématiques.

• Les méthodes de résolution ne sont pas désignées. Plusieurs pistes peuvent être suivies.

• Les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et réduites possibles. Ainsi, le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème, même s'il n'est pas familier, est d'un accès facile pour que l'on puisse prendre facilement possession de la situation, s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution.

• Une question résolue peut amener à se poser de nouvelles questions. Il n'y a que des critères de fin locaux (Grenier et Payan, 2002 ; Godot, 2005).

Cette caractérisation n'est pas sans rappeler certains des éléments de définition des problèmes ouverts (Arsac, Germain et Mante, 1988). On peut noter plusieurs points communs entre les Situations-Recherche et les problèmes ouverts : l'énoncé n'induit ni la méthode ni la solution, la solution n'est pas une application directe des résultats présentés en classe mais demeure tout de même accessible, et la résolution nécessite la mise en œuvre d'une démarche de recherche. Cependant, plusieurs différences existent.

Une Situation-Recherche peut avoir une, plusieurs ou aucune solution, contrairement à un problème ouvert ou au *problem solving* chez les anglo-saxons qui n'en ont généralement qu'une. De plus, les valeurs des variables de recherche ne sont pas fixées au préalable. Les variables de recherche sont des variables de tâches inhérentes à la Situation-Recherche, leurs valeurs permettent de caractériser les différents sous-problèmes de la situation et les procédures afférentes (Godot, 2005, p. 133). Enfin, dans une Situation-Recherche, il n'y a pas nécessairement de savoir mathématique notionnel visé ou à mobiliser. En effet, nous cherchons avant tout à mettre l'accent sur la démarche de recherche en elle-même : c'est pourquoi nous proposons des situations où les savoirs notionnels ne viennent pas faire obstacle au développement de la démarche de recherche.

[1] ERTé : Equipe Recherche Technologie Éducation.

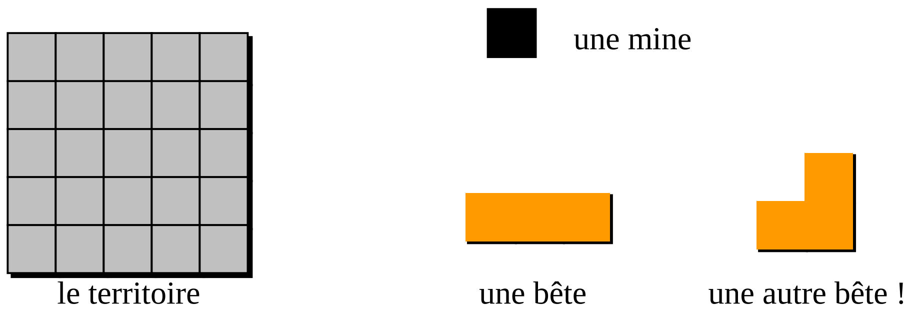
I – 2 Des heuristiques spécifiques

Les situations que nous proposons sont de plusieurs types : elles peuvent être liées à un travail plus spécifique sur une ou plusieurs heuristiques (par exemple : prouver, conjecturer, réfuter, créer, modéliser, définir, étendre mais aussi transformer un questionnement, être capable de mettre en œuvre un raisonnement non linéaire, expérimenter, décomposer/recomposer, avoir une responsabilité scientifique, reconnaître que deux problèmes issus de contextes différents sont en fait les mêmes, etc.). Les SR peuvent impliquer des notions mathématiques données, appartenir à un ou plusieurs domaines mathématiques. Remarquons que la plupart des situations que nous avons conçues sont proches des mathématiques discrètes, un champ des mathématiques comportant de nombreux problèmes compréhensibles et encore ouverts dans la recherche actuelle. L'équipe dans laquelle s'inscrivent nos travaux, *Maths à Modeler*, est composée notamment de chercheurs en mathématiques discrètes, ce qui nous donne un accès privilégié aux recherches mathématiques en cours et à l'observation de la démarche du chercheur elle-même. Quelques exemples de Situations-Recherche que nous avons développées au sein de Maths à Modeler et expérimentées auprès de différents publics se trouvent en ligne à l'adresse : ***http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE***.

II – LA CHASSE À LA BETE

II – 1 Un exemple de Situation-Recherche : la chasse à la bête

On considère un territoire (un carré 5×5 dans le cas ci-dessous). Une bête est un polymino composé de carrés. Le problème est la recherche du plus petit nombre de mines (ici un carré) à placer sur le territoire de telle façon à ce qu'aucune bête ne puisse se poser.



Ce problème est un problème d'optimisation. Pour prouver la valeur optimale, il est nécessaire de produire une solution réalisant cette valeur (condition suffisante) et de démontrer que l'on ne peut pas faire mieux (condition nécessaire). Le problème qui nous a inspiré la chasse à la bête est du à Golomb (1994).

II – 2 Proposition d'une séquence de chasse à la bête

Selon l'âge des élèves, le problème peut être adapté. Il est possible de le « fermer » plus ou moins par le choix des bêtes et/ou le choix des territoires. Pour cet atelier, nous avons choisi de faire chercher les participants sur un territoire carré 5×5 avec les bêtes suivantes (une mine étant un carré comme illustré précédemment :

- les bêtes « domino » 
- les bêtes « trimino long » 
- les bêtes « trimino en L » 

Cet ensemble de situations implique un travail sur des heuristiques de la recherche, suscite un intérêt d'élaboration de méthode de construction, de généralisation et de décontextualisation, pose la question de l'existence d'une ou plusieurs solution(s), confronte à la question de l'impossibilité ainsi qu'à celle du « pourquoi » (là se trouve un enjeu de « preuve »).

II – 3 Analyse du problème

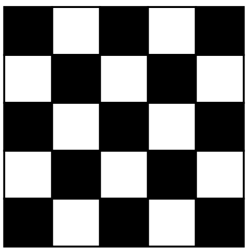
Nous avons choisi de présenter ici un déroulement possible de la situation, telle qu'elle peut être implémentée en classe.

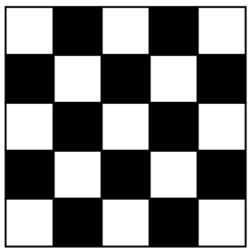
1) Dévolution de la situation et du problème d'optimisation.

Un terrain 8×8 est donné. Chaque groupe d'élèves choisit une bête (composée d'au plus 5 carrés connexes par les côtés). Indiquons que les mathématiciens ne connaissent pas nécessairement les solutions optimales pour toutes les configurations. Les élèves proposent rapidement des solutions. L'enseignant (dans une posture de gestionnaire-observateur) peut enlever une mine d'une solution proposée par les élèves : ce genre d'interactions, pouvant être répété, favorise la dévolution du problème d'optimisation. Cela conduit les élèves à une question cruciale lorsqu'ils pensent ne pas pouvoir « faire mieux ». A ce stade, le fait qu'ils ne peuvent « faire mieux » suffit à les convaincre sur le fait qu'ils détiennent l'optimum, jusqu'à ce qu'un autre groupe propose une meilleure solution. Pour faire évoluer la situation, l'enseignant peut alors proposer des cas de recherche plus simples, tels ceux évoqués ci-dessus (territoire 5×5).

2) Recherche sur un cas particulier : le territoire 5×5 et la bête « domino ».

Il existe une solution à 13 mines … et une solution à 12 mines.





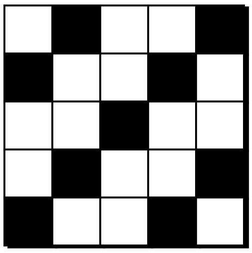
La solution à 12 mines est-elle optimale ?

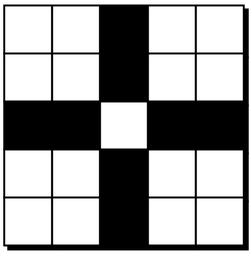
Une idée généralement évoquée par les enfants consiste à argumenter ainsi : si l'on enlève une mine, ce n'est plus une solution. Ainsi, la solution à 12 mines serait optimale. Or, un tel raisonnement montrerait que la solution à 13 mines serait, elle aussi, optimale, ce qui n'est pas le cas puisque une solution à 12 mines a été exhibée. Cela pose la question de la différence entre un minimum *local* et un minimum *global*.

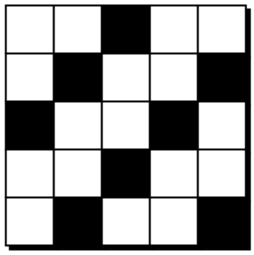
Comment pouvons-nous alors démontrer que 12 est la solution optimale dans cette configuration ? Nous pouvons facilement montrer que 12 bêtes « domino » peuvent se poser sur le territoire 5×5 : ainsi, 12 mines « au moins » sont nécessaires (borne inférieure). Il suffit alors d'exhiber une solution à 12 mines pour pouvoir conclure que 12 est effectivement la solution optimale.

3) Considérons maintenant le cas de la bête « trimino long ».

Après que des solutions à 11, 10 ou 9 mines aient été produites par les élèves, certains groupes exhibent des solutions ne comportant que 8 mines.

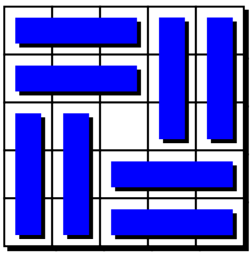






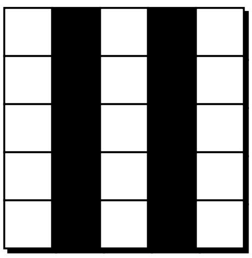
Les élèves sont alors persuadés que la valeur optimale est 8 car de nombreuses tentatives avec 7 mines ont échoué. Un point critique apparaît ici : la nécessité d'une preuve. La posture de l'enseignant devient alors importante afin d'engager les élèves dans une problématique de preuve rationnelle. Ce dernier peut référer à des cas plus simples (prouver que cela est impossible avec 1, 2 ou 3 mines par exemple). Cette phase est délicate dans la gestion car il s'agit de « preuve ».

Pendant cette phase d'argumentation, une procédure mobilisant les pavages peut apparaître : si l'on peut placer 8 bêtes disjointes sur le territoire, alors 8 mines (au moins) sont nécessaires. Et plusieurs solutions à 8 mines ont été exhibées, nous laissons le lecteur conclure …

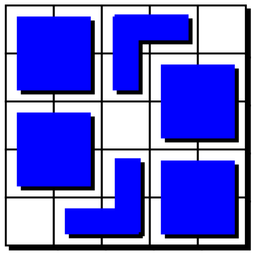


4) Recherche sur un autre cas particulier : la bête « trimino en L ».

L'organisation de cette phase est semblable à la précédente. Cependant, l'argument « pavage » n'est pas suffisant car l'on peut placer au mieux 8 bêtes « trimino en L » sur le territoire 5×5, alors qu'une solution nécessite 10 mines (voir ci-après).



Ainsi, la valeur optimale est-elle comprise entre 8 et 10. De tels résultats sont courants en mathématiques, et l'on pourrait alors s'en contenter. Cependant, il est possible de « raffiner » la preuve mobilisant les pavages afin de démontrer que 10 mines sont nécessaires. Nous avons obtenu de telles preuves dans certains groupes d'élèves. Les figures ci-dessous représentent le « film » de la preuve en question. Indiquons seulement que pour chaque carré 2×2, où peut se poser une bête « trimino en L », deux mines sont nécessaires.



4) Réinvestissement des procédures des élèves à des territoires différents (sur un territoire 7×7 par exemple).

5) Réalisation d'une poster et d'une présentation orale.

Les élèves présentent, lors d'un séminaire (*Maths à Modeler Junior*) leurs processus de recherche : idées, résultats, procédures, conjectures, nouveaux problèmes.

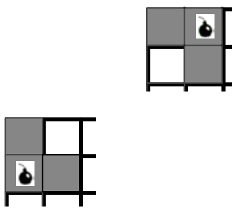
II – 4 Posture des acteurs dans une SR

Dans de telles situations, il est nécessaire que l'enseignant n'apparaisse pas comme le détenteur du savoir. De fait, les SR étant issues de la recherche actuelle, l'enseignant se retrouve dans une double posture : celle de gestionnaire et de chercheur. L'élève, quant à lui, est chercheur et gestionnaire de sa propre recherche. Le dispositif que nous utilisons habituellement est le suivant : les élèves travaillent en groupe de 3 ou 4, avec des feuilles de recherche (ils gardent ainsi une trace « privée » de leur recherche). L'enseignant organise une ou deux mise(s) en commun : il est nécessaire que celle(s)-ci ne vienne(nt) pas trop tôt dans le déroulement des séances, et ne soient pas trop nombreuses, au risque de détruire certaines procédures dont le développement nécessite un temps long. Un séminaire dans un laboratoire de recherche permet de finaliser la recherche de la classe devant des professionnels, d'autres classes et les parents.

II – 5 Exemples de productions d'élèves

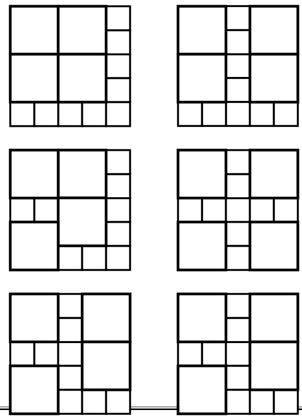
Les extraits ci-dessous proviennent d'élèves de fin de primaire.

Une solution à 10 mines …
mais 8 bêtes maximum ???
Le nombre de mines est compris entre 8 et 10.
On simplifie le problème.

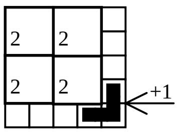


Sur un territoire de 2 sur 2, il nous faut minimum 2 mines.

Sur notre territoire,
on peut poser 4 territoires de 2 sur 2



Maintenant,
comptons les mines nécessaires.

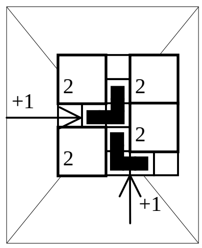


Ici, il faudra 9 mines.

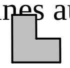
Le nombre minimum de mines n'est donc pas 8.

[Les élèves procèdent ainsi pour 6 autres découpages et montrent pour chacun que 9 mines sont nécessaires]

Mais, avec la dernière disposition



Le nombre minimum de mines
n'est donc pas 9.

Il faut 10 mines au minimum
pour que la bête  ne s'installe pas
sur le territoire de 5 sur 5.

Et les conclusions des élèves parlent d'elles-mêmes ...

« *Nous avons commencé à apprendre à :*

- *Travailler ensemble*
- *Écouter un peu mieux les autres*
- *Ne pas dire tout de suite « c'est impossible »*
- *Simplifier un problème pour mieux l'étudier*
- *Essayer de trouver des preuves, des arguments*
- *Discuter de ces preuves avec d'autres*
- *Comprendre des fautes de raisonnement* ».

III – REMARQUES SUR LE DEROULEMENT DE L'ATELIER

Après une brève introduction sur les enjeux de cet atelier, les participants, répartis en groupes de trois ou quatre, ont été confrontés à la chasse à la bête. Les remarques qui suivent ont été rédigées sur la base de commentaires de participants[2].

Tous les participants sont rentrés facilement dans la tâche et ont éprouvé beaucoup de « plaisir » à le traiter. Le traitement des bêtes « domino » s'est effectué rapidement. Dans certains groupes, la chronologie « domino – trimino long – trimino en L » a été respectée alors que d'autres participants ont réalisé des allers-retours entre ces trois types de bêtes, remettant à plus tard la résolution avec justification. La mise en commun a fait ressortir des résultats (nombre minimal de mines), les preuves de cette minimalité ne venant que dans un second temps, parfois partiellement. Ces preuves mobilisaient la récurrence, des arguments de symétrie, des arguments de pavage, des encadrements. Le traitement du raisonnement a été repris ensuite. Outre les interactions autour de la résolution des problèmes, le matériel et son usage ont été source d'échanges. L'utilisation du matériel fut en effet variable d'un groupe à l'autre. Dans le contexte d'une classe, ce dernier favorise clairement la dévolution de la situation et de la question de l'optimalisation. Nous pouvons de plus montrer comment ce matériel peut se révéler un support à la verbalisation d'un raisonnement (cf. raisonnement conduit avec la bête « trimino en L »).

IV – CONCLUSION

Au niveau didactique, les Situations-Recherche requièrent des conditions particulières de gestion en classe. Il s'agit en effet d'organiser une prise de notes pour les plus jeunes en particulier. Ces notes représentent la mémoire du groupe sur l'état de leur recherche et seront utilisées en particulier lors de la communication ultérieure des résultats. Elles ne sont a priori pas destinées à l'enseignant. Insistons enfin sur le point suivant : la finalisation de la recherche des élèves par un séminaire ou par la création d'un poster s'avère fondamentale.

Pour que l'apprentissage des heuristiques soit effectif, une pratique régulière se révèle nécessaire. Se pose alors la question de l'institutionnalisation de ces nouvelles compétences, dans le double objectif de répondre à la demande conjointe des enseignants qui enseignent et des élèves qui apprennent, mais aussi de rendre disponibles et mobilisables ces heuristiques, dans tout type de situations, qu'il s'agisse alors de nouvelles Situations-Recherche ou de situations-problèmes.

En cela, la formation des enseignants vient au cœur de la discussion : l'entrée par les Situations-Recherche est tout à la fois une nouvelle voie pour explorer la démarche de recherche, mathématiquement et didactiquement, mais aussi un moyen de requestionner l'intitulé « résolution de problèmes ».

Cette recherche est en cours. Nous espérons avoir montré dans cet article des perspectives didactiques nouvelles offertes par les Situations-Recherche.

---

[2] Je remercie personnellement Gwenola Madec pour la contribution qu'elle a apportée à ce paragraphe.

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G., GERMAIN G. & MANTE M. (1988) Problème ouvert et situation-problème. *IREM de Lyon*.

GRENIER D., PAYAN C. (2002) *Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation en mathématiques discrètes*. Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques. Édité par l'ARDM, Paris.

GODOT K. (2005) Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation – Exemple de la roue aux couleurs, *thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier*, Grenoble.

GOLOMB S.W. (1994), Polyominoes – Puzzles, Patterns, Problems and Packings. *Princeton Science Library*, Princeton, NJ.

Sites : http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE www.mathsamodeler.net

PROJETS D'ÉCRITURE EN MATHÉMATIQUES

Annie CAMENISCH
Maître de Conférences Lettres, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
annie.camenisch@alsace.iufm.fr

Serge PETIT
Professeur de mathématiques, IUFM d'Alsace
EA 1339, Université Marc Bloch, Strasbourg
serge.petit@alsace.iufm.fr

Résumé

Cette communication constitue un bilan de travaux menés dans des classes ainsi qu'en formation initiale et continue autour de la lecture et de l'écriture d'énoncés de problèmes additifs, en référence aux ateliers des colloques COPIRELEM de Foix et de Strasbourg. Elle s'inscrit dans le champ de la maîtrise de la langue en mathématiques articulant lecture, écriture et observation réfléchie de la langue.

Il s'agit essentiellement de montrer comment il est possible, à la fois, de réaliser des apprentissages ciblés sur la langue et de développer la compréhension d'énoncés de problèmes. La mise en œuvre se réalise par la mise en place de projets d'écriture d'énoncés de problèmes qui nécessitent une analyse fine du fonctionnement de ces énoncés.

Le fait qu'environ trente pourcents des élèves entrant en cycle 3 éprouvent des difficultés à résoudre des problèmes additifs simples[1] *impose de s'interroger sur les raisons d'un tel échec. Les interrogations peuvent porter sur les mathématiques elles-mêmes, mais que sont-elles indépendamment du texte ? La simplicité des calculs, entraînant leur réussite hors contexte par tous les élèves, conduit à s'interroger sur les blocages relevant du langage et à travailler des apprentissages en langue française pour mieux permettre aux élèves à la fois de mieux réussir les problèmes de mathématiques et de mieux maîtriser leur langue. Les textes officiels précisent d'ailleurs que « La maîtrise du langage et de la langue française constitue l'objectif majeur du programme de l'école élémentaire. […] elle se construit aussi dans la transversalité de l'ensemble des apprentissages. »*[2].

[1] Résultats relativement stables chaque année aux *Evaluations nationales* en CE2.

[2] *Programmes de l'école primaire*, BOEN hors série N°1 du 14 février 2002. Toute référence à ce numéro du BOEN contenant le texte des programmes actuels de l'école primaire sera simplement notée BOEN 2002, suivi du numéro de la page et éventuellement de l'intitulé de la partie concernée.

Cette communication ne relate pas des travaux de recherche fondamentale en didactique des mathématiques, pas plus qu'en didactique de la langue. Elle prend appui sur des travaux réalisés de manière empirique en classe, en formation initiale et continue.

Le travail qui suit est donc une réflexion sur des pistes d'activités possibles d'apprentissage de la langue en mathématiques ou à partir des mathématiques. Il vise à améliorer à la fois des compétences en mathématiques, dans le domaine de la résolution de problèmes et certaines compétences bien précises sur la langue. Dans le cadre de la didactique de la langue française, il se fonde sur les interactions entre la lecture et l'écriture. Dans celui des mathématiques, il prend en compte les articulations de registres[3].

I – ANALYSER DES TEXTES MATHÉMATIQUES

I – 1 Un corpus d'énoncés

I – 1.1 Quels textes mathématiques ?

Si tous les textes mathématiques ne sont pas des énoncés de problèmes, ceux-ci occupent cependant une place centrale dans l'apprentissage de cette discipline : *« La résolution de problèmes est au centre des activités mathématiques et permet de donner leur signification à toutes les connaissances qui y sont travaillées […]. »* La suite de cet extrait des programmes de 2002 ne liste que des connaissances d'ordre mathématique. Il pourrait aisément se prolonger à des connaissances d'ordre linguistique nécessaires à la compréhension des textes d'énoncés de problèmes car les mêmes programmes invitent un plus loin à porter une *« attention particulière […] aux difficultés de lecture des énoncés que rencontrent de nombreux élèves […] ».*

Les programmes de cycle 2 précisent de leur côté que les élèves doivent être capables de résoudre des problèmes additifs à une transformation[4], *« de déterminer, par addition ou soustraction, le résultat d'une augmentation, d'une diminution ou de la réunion de deux quantités ».* Or, comme le montrent chaque année les évaluations nationales en CE2, bien des élèves de début de cycle 3 ne maîtrisent pas la résolution de tels problèmes.

Les expérimentations réalisées en classe décrites ci-dessous ont rapidement montré que les mathématiques ne constituaient pas un obstacle à la résolution de ces problèmes, mais que les principales difficultés provenaient de la langue française. C'est bien le langage qu'il convient de travailler afin de permettre aux élèves en difficulté de mieux réussir en mathématiques.

Les problèmes additifs constituant le matériau de base du travail développé ci-après ont été choisis pour deux raisons. La première : leur maîtrise devrait être garantie par tous les élèves sortant du cycle 2. La seconde : ces énoncés constituent un corpus d'apparence simple pour aborder des faits linguistiques fondamentaux, nécessaires à leur compréhension et devant être maîtrisés par les élèves du cycle 3.

---

[3] Raymond Duval, *Sémiosis et pensée humaine , Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Ed. Peter Lang, 1995.

[4] Dans le sens donné par Gérard Vergnaud.

I – 1.2 Présentation des énoncés

Les énoncés qui ont été donnés pour la première fois dans la classe de CE2-CM1 de Carole Brach à l'école de Herrlisheim (Haut-Rhin) ont été composés en éliminant les difficultés mathématiques, afin de ne laisser subsister que des difficultés relatives à la langue. Les calculs à effectuer ne mettent en jeu que les trois nombres 5, 7 et 12. Les difficultés relevant de la langue sont variées et induisent certains élèves en erreur.

Le corpus d'énoncés retenus est le suivant :

Problème 1 : Avant la récréation, Augustus Gloop avait 17 bâtons de chocolat. Pendant la récréation il joue et perd 5 bâtons. Combien a-t-il de bâtons de chocolat après la récréation ?

Problème 2 : Lundi soir, la température dans la cour de l'école était de 17 degrés. Pendant la nuit, elle a baissé de 5 degrés. Quelle température fait-il le mardi matin ?

Problème 3 : A l'arrêt de la Mairie, 5 personnes descendent d'un bus. Après l'arrêt le même bus transporte 12 personnes. Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?

Problème 4 : Lundi soir la température, dans la cour de l'école, était de 17 degrés. Mardi matin, elle est de 12 degrés. Que s'est-il passé pendant la nuit ?

Problème 5 : Augustus, qui avait inventé un jeu, joue une première partie. Il perd 5 bâtons de chocolat. Il joue ensuite une deuxième partie. Il gagne 12 bâtons. Après ces deux parties, Augustus a-t-il plus ou moins de bâtons qu'avant ces deux parties ? Combien de plus ou combien de moins ?

Problème 6 : Que s'est-il passé pendant la récréation ? Avant la récréation, Augustus avait 17 bâtons de chocolat. Il joue. Après la récréation il a 12 bâtons.

Problème 7 : Avant de s'arrêter à l'arrêt « Mairie », un bus transportait 17 personnes. Après l'arrêt de la mairie, le bus transporte 12 personnes. Que s'est-il passé à l'arrêt ?

Problème 8 : Pendant la nuit de lundi à mardi, la température dans la cour de l'école a baissé de 5 degrés. Mardi matin, la température est de 12 degrés. Quelle était la température lundi soir ?

Problème 9 : Avant de s'arrêter à l'arrêt de la Mairie, un autobus transportait 17 personnes. Pendant l'arrêt, 5 personnes sont descendues. Combien de personnes le bus transporte-t-il après l'arrêt ?

Problème 10 : Un bus s'arrête à un premier arrêt, 5 personnes descendent. Il s'arrête ensuite à un deuxième arrêt où 12 personnes montent. Après ces deux arrêts, y a-t-il plus ou moins de personnes dans le bus ? Combien de plus ? Combien de moins ?

I – 2 Des énoncés, des histoires

I – 2.1 Classement des énoncés

Classer est une activité cognitive fondamentale puisqu'elle contraint celui qui l'exerce à trouver des points communs et des différences entre les objets observés, et à verbaliser ces ressemblances et ces différences.
Classer et comparer des classements différents obtenus par des groupes distincts ou classer d'une manière puis d'une autre, oblige à porter des regards différents sur les objets classés. A ce titre, l'activité de classement est fondamentale. Elle peut s'appliquer à toutes sortes d'objets, y compris à des textes, à des énoncés de problèmes. Les programmes de 2002 le prévoient : *« quelques techniques d'exploration du langage doivent être régulièrement utilisées : <u>classer</u> (des <u>textes</u>, des phrases, des mots, des graphies) <u>en justifiant</u> les classements réalisés <u>par des indices précis</u>».*[5]

---

[5] Souligné par les auteurs.

Les élèves ont donc été invités à classer les énoncés du corpus ci-dessus.

Les classements de ces énoncés par les élèves sont souvent réalisés selon un des critères suivants :

- thème (thème du bus, du chocolat, de la température…),
- valeur du résultat (5, 12, 17…),
- nature de l'opération (soustraction, addition),
- place de la question,
- nombre de questions,
- autres, moins pertinents pour le travail en cours…

Les professeurs stagiaires ou ceux en exercice ajouteront quelques critères comme par exemple :

- variable discrète ou continue,
- formulation de la question,
- ordre d'apparition des données,
- explicitation ou non de la valeur initiale de la variable,
- nombre de transformations,
- autres, moins pertinents pour le travail en cours…

Certains feront appel à la classification de Gérard Vergnaud, tandis que d'autres se réfèreront à Raymond Duval pour évoquer un critère de congruence, critère plus difficile à mettre en œuvre pour le classement.

I – 2.2 Des énoncés, une histoire

Un seul classement n'est jamais réalisé, ni dans les classes, ni en formation initiale ou continue : celui par *histoire*.

Pour mettre en évidence la notion d'*histoire*, on peut comparer deux problèmes avec des énoncés différents traitant du même thème, par exemple les problèmes 3 et 7.

Problème 3 : A l'arrêt de la Mairie, 5 personnes descendent d'un bus. Après cet arrêt le même bus transporte 12 personnes. Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?

Information cachée : 17 personnes étaient dans le bus avant l'arrêt.

Problème 7 : Avant de s'arrêter à l'arrêt de la Mairie, un bus transportait 17 personnes. Après l'arrêt de la Mairie, le bus transporte 12 personnes. Que s'est-il passé à l'arrêt ?

Information cachée : 5 personnes sont descendues.

On peut comparer successivement les différentes informations, phrase par phrase, en incluant les informations cachées faisant l'objet de la question.

Problème 3 : <u>A l'arrêt de la Mairie, 5 personnes descendent d'un bus.</u> Après cet arrêt le même bus transporte 12 personnes. Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?

Information cachée : 17 personnes étaient dans le bus avant l'arrêt.

Problème 7 : Avant de s'arrêter à l'arrêt de la Mairie, un bus transportait 17 personnes. Après l'arrêt de la Mairie, le bus transporte 12 personnes. <u>Que s'est-il passé à l'arrêt ?</u>

Information cachée : <u>5 personnes sont descendues.</u>

Les phrases soulignées recouvrent les mêmes informations, elles se trouvent simplement à des endroits différents du texte et utilisent une autre mise en mots.

> **Problème 3 :** A l'arrêt de la Mairie, 5 personnes descendent d'un bus. Après cet arrêt le même bus transporte 12 personnes. Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?
>
> **Information cachée :** 17 personnes étaient dans le bus avant l'arrêt.
>
> **Problème 7 :** Avant de s'arrêter à l'arrêt de la Mairie, un bus transportait 17 personnes. Après l'arrêt de la Mairie, le bus transporte 12 personnes. Que s'est-il passé à l'arrêt ?
>
> **Information cachée :** 5 personnes sont descendues.

Les phrases en rouge indiquent les mêmes informations avec une formulation différente.

> **Problème 3 :** A l'arrêt de la Mairie, 5 personnes descendent d'un bus. Après cet arrêt le même bus transporte 12 personnes. Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?
>
> **Information cachée :** 17 personnes étaient dans le bus avant l'arrêt.
>
> **Problème 7 :** Avant de s'arrêter à l'arrêt de la Mairie, un bus transportait 17 personnes. Après l'arrêt de la Mairie, le bus transporte 12 personnes. Que s'est-il passé à l'arrêt ?
>
> **Information cachée :** 5 personnes sont descendues.

Les phrases en bleu renvoient aussi aux mêmes événements, racontés en dernier ou en premier de manière dissemblable.

Les deux énoncés sont donc différents dans l'ordre d'énonciation des événements et dans la mise en mots, mais ils racontent la même histoire.

Il est donc possible de dégager une seule et même *histoire* sous-jacente à ces énoncés, en restituant l'ordre chronologique des événements :

> Avant l'arrêt de la mairie, un bus transporte 17 personnes. A l'arrêt de la Mairie, 5 personnes descendent de ce bus. Après l'arrêt, le même bus transporte 12 personnes.

Selon la classification de Vergnaud des problèmes additifs à une seule transformation, la première phrase correspond à l'état initial, la deuxième à la transformation et la troisième à l'état final. Ces trois périodes peuvent se mettre en évidence par un jeu de couleur, ou « drapeau », soit le bleu pour la première période ou état initial, le blanc (ici souligné) pour le deuxième période ou transformation, le rouge pour la troisième période ou état final. L'utilisation de ce jeu de couleurs favorise dans un premier temps le repérage de ces périodes et de leur ordre d'énonciation dans les énoncés de problème. Ce jeu de couleurs permet d'éviter quelques pièges posés par le langage. En effet, on pourrait parler de « première période » ou d'un « avant », mais cela risquerait de conditionner les élèves sur les mots plutôt que sur le sens, d'autant plus que dans une phrase comme « Avant de se laver les dents, il a mangé une pomme. » La première proposition désigne en fait un *après.*

I – 2.3 Deux énoncés, deux histoires

Cependant, il convient de ne pas confondre la notion *d'histoire,* telle que nous venons de la définir, avec celle de thème. Ainsi, une classification communément retenue consiste à regrouper les problèmes selon le thème ou sujet, par exemple, celui du « bus » ou de la « température ». On pourrait un peu hâtivement en conclure que les mêmes thèmes renvoient forcément aux mêmes histoires. Une vérification s'impose pour être bien sûr qu'il s'agit de la même histoire en comparant d'autres énoncés autour du thème du « bus », soit les énoncés 9 et 10 :

Problème 9 : Avant de s'arrêter à l'arrêt de la Gare, un bus transportait 17 personnes. 5 personnes sont descendues pendant cet arrêt. Combien de personnes le bus transporte-t-il après l'arrêt ?

Information cachée : Le bus transporte 12 personnes après l'arrêt.

Problème 10 : Un bus s'arrête à un premier arrêt, 5 personnes descendent. Il s'arrête ensuite à un deuxième arrêt où 12 personnes montent. Après ces deux arrêts, y a-t-il plus ou moins de personnes dans le bus ? Combien de plus ? Combien de moins ?

Information cachée : Il y a 7 personnes de plus après ces deux arrêts.

L'écriture de la solution et donc de l'information cachée permet déjà de constater deux différences entre le problème 10 et les autres problèmes relevant du même thème. Ainsi, une information numérique au moins est différente (7 au lieu de 17) de même que le nombre d'arrêts (deux au lieu d'un seul). Une comparaison avec le problème 3 précédemment analysé permet de mettre en évidence les histoires similaires :

Problème 3 : A l'arrêt de la Mairie, 5 personnes descendent d'un bus. Après cet arrêt le même bus transporte 12 personnes. Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?

Information cachée : 17 personnes étaient dans le bus avant l'arrêt.

Problème 9 : Avant de s'arrêter à l'arrêt de la Gare, un bus transportait 17 personnes. 5 personnes sont descendues pendant cet arrêt. Combien de personnes le bus transporte-t-il après l'arrêt ?

Information cachée : Le bus transporte 12 personnes après l'arrêt.

Problème 10 : Un bus s'arrête à un premier arrêt, 5 personnes descendent. Il s'arrête ensuite à un deuxième arrêt où 12 personnes montent. Après ces deux arrêts, y a-t-il plus ou moins de personnes dans le bus ? Combien de plus ? Combien de moins ?

Information cachée : Il y a 7 personnes de plus après ces deux arrêts.

Si on retrouve bien les mêmes événements dans le problème 9, ils ne se retrouvent que partiellement dans le problème 10 avec d'autres informations, comme le nombre d'arrêts, l'action des 12 personnes et le nombre de personne dans le bus après les arrêts. Les événements n'étant pas les mêmes, le problème 10 raconte une autre *histoire*.

I – 2.4 Un classement par histoires

L'histoire sous-jacente à un énoncé n'est pas aussi apparente que les nombres figurant dans l'énoncé, que le nombre de questions, que le thème… elle nécessite une construction mentale afin de représenter[6] la situation. Plusieurs énoncés peuvent renvoyer à la même *histoire*, un même thème peut être commun à plusieurs histoires ce qui rend cette construction mentale encore plus difficile et pourtant, construire cette histoire ou la retrouver dans plusieurs énoncés fournit la clé du problème.

---

[6] Ce terme très polysémique de représentation n'est peut-être pas adapté puisqu'il s'agit davantage de construire une première présentation mentale de l'histoire et non de rendre à nouveau présent une histoire déjà vécue ou vue… Il s'agit en fait de construire une situation à partir de mots.

Les élèves ont été invités à classer les énoncés par histoire. Ce qui, dans ce cas, fournit cinq classes, chacune réunissant tous les énoncés qui ont la même *histoire sous-jacente*. Les classes sont les suivantes (numéros des énoncés) :

{1, 6} ; {3, 7, 9} ; {2, 4, 8} ; {5} ; {10}

On peut définir la notion d'*histoire sous-jacente* à un énoncé comme étant la succession, dans l'ordre chronologique de toutes les informations fournies par l'énoncé, y compris la réponse à la question. L'histoire est alors confondue avec sa narration (on ne distingue pas les faits et le texte qui les relate).

I – 2.5 Une histoire, combien d'énoncés ?

La suite du travail s'est déroulée en limitant encore le champ des supports. Les énoncés à deux transformations comme le 5 et le 10 ci-dessus seront dans un premier temps écartés du travail. Les élèves ne travailleront donc que sur des énoncés à une transformation.

Pour reprendre la notation bien connue de G. Vergnaud, les seuls énoncés conservés seront ceux qui renvoient à une histoire du type *état initial-transformation-état final*. Selon l'ordre d'apparition de ces information dans l'énoncé, et la position de la question dans l'énoncé, on pourra fabriquer dix-huit énoncés comme le montre le tableau suivant.

<u>Tableau des 18 types d'énoncés de base possibles :</u>

1	?		
2		?	
3			?
4	?		
5		?	
6			?
7	?		
8		?	
9			?
10	?		
11		?	
12			?
13	?		
14		?	
15			?
16	?		
17		?	
18			?

Ainsi, la ligne 7 représente un énoncé qui serait construit de la manière suivante : la question, énoncée en premier, porte sur la transformation (toujours notée en blanc), la partie informative suivra en énonçant d'abord l'état initial (toujours noté en bleu), puis l'état final (toujours noté en rouge). Le point d'interrogation montre à quelle partie de l'énoncé la question est posée.

<u>Exemples</u> :

- le problème 4 du corpus donné est du type 6,
- le problème 6 est de type 7,
- le problème 8 est de type 12

On se rend compte que les énoncés auraient pu être classés, non par histoire, mais du point de vue de leur structure, ce qui est un autre classement qui n'apparaît pas spontanément.

Les élèves ont été invités à procéder à ce type de classement afin de mieux percevoir les variations en jeu en passant d'un énoncé à un autre. Ce classement a été appelé *classement par drapeaux*. Les différentes classes sont :

{6} ; {3, 8} ; {4, 7} ; {1, 2, 9}

I – 2.6 Pourquoi ce travail ?

Ce travail, qui pourrait sembler assez formel ne porte pas que sur les structures. Il permet de mettre en évidence le fond commun à plusieurs énoncés, à savoir l'histoire sous-jacente et donc ouvre aux élèves la porte à la construction d'une « représentation » de la situation (bien souvent) fictive évoquée. Par ailleurs, le travail qui porte sur la reconnaissance des structures identiques à plusieurs énoncés conduit les élèves vers la production de nouveaux énoncés, par la maîtrise de leurs différentes formes possibles, en greffant sur celles-ci d'autres paramètres (nature de la variable, ordre de l'énonciation…).

La résolution des problèmes, leur analyse sous différents angles permet :

- de se représenter l'histoire sous-jacente à un énoncé,
- de se rendre compte que plusieurs énoncés relèvent de la même histoire,
- d'avoir conscience du lien entre un énoncé et l'histoire qui le sous-tend.
- de comprendre comment se fabriquent les énoncés de problèmes additifs en vue d'être capables d'en produire de nouveaux sous contraintes.

II – PRODUIRE DES TEXTES MATHÉMATIQUES

Tu sais qu'en écrivant
Tu vas apprendre.

Guillevic[7]

II – 1 Projet d'écriture d'énoncés de problèmes additifs

II – 1.1 Définition de la notion de projet d'écriture

Le projet d'écriture fédère des apprentissages dans le cadre de la maîtrise de la langue puisqu'il met en œuvre des compétences de lecture et d'écriture et utilise des connaissances sur la langue. A propos des compétences générales contribuant au développement de la maîtrise de la langue au cycle 3, les *Programmes de l'école primaire* prescrivent de :

> Rédiger, à partir d'une liste ordonnée d'informations, un texte à dominante narrative, explicative, descriptive ou injonctive, seul ou à plusieurs, dans le cadre d'un projet d'écriture relevant de l'un des grands domaines disciplinaires du cycle 3, à partir des outils élaborés par la classe. [BOEN, p.68].

Contrairement à l'histoire qui a une dominante narrative unique, l'énoncé de problème comprend au moins deux séquences textuelles. L'une est à dominante narrative ou informative et comprend les données du problème. L'autre, plutôt injonctive, conduit à l'action de résoudre un problème en mettant en œuvre un raisonnement et, dans le domaine numérique, des calculs.

Ecrire un énoncé de problème équivaut donc dans un premier temps à imaginer et à écrire une histoire en suivant une trame narrative chronologique. Dans un second temps, il faut transformer cette histoire en modifiant éventuellement l'ordre d'énonciation et donc la chronologie et en adaptant le texte à sa dominante principale, informative ou injonctive.

Ce projet d'écriture comprend des étapes de lecture d'énoncés de problème et des phases d'écriture sous contraintes variées ainsi que des moments d'apprentissage sur la langue, nourrissant l'écriture et, par ricochet, la compréhension des textes. Différentes étapes se succèdent (pas nécessairement dans l'ordre ci-dessous) et se croisent, faisant alterner moments de lecture, d'écriture et d'observation réfléchie de la langue :

- mobilisation des connaissances à partir d'un inducteur[8]
- organisation du texte,
- mise en mot par écriture d'un premier jet,
- analyse collective et individuelle des textes produits,
- apprentissages en langue et sur l'écriture des textes,

---

[7] *Art poétique*, Gallimard (Poésie), 1989.

[8] On appelle *inducteur* tout support pouvant conduire à des situations d'écriture (énoncés de problèmes, albums, voyages, objets…).

- analyse de textes d'experts (lecture d'énoncés de problème),
- révision et réécriture du texte par différents moyens.

Ainsi, dans une classe, un projet d'écriture d'énoncés de problèmes additifs peut consister à apprendre à écrire des énoncés de problèmes difficiles pour une autre classe (activité motivante pour les élèves). Mais pour ce faire, il faut déjà comprendre comment s'écrivent les énoncés de problème et donc écrire des énoncés de problèmes à partir d'une histoire donnée ou inventée, et commencer à lister des problèmes de langue qui se posent alors. Et c'est dans cette dynamique que les apprentissages sur la langue prennent tout leur sens.

II – 1.2 D'une histoire vers des énoncés

Un exemple permet d'illustrer le passage d'une histoire vers un énoncé.

Soit l'histoire suivante :

> Luc prend l'ascenseur au 24^{e} étage de la tour de l'Europe à Mulhouse. Il descend de 13 étages. Il sort de l'ascenseur au 11^{e} étage.

Un premier repérage permet de marquer les différentes périodes en utilisant le code de couleurs (bleu, blanc, rouge) permettant d'isoler chaque phrase :

> Luc prend l'ascenseur au 24^{e} étage de la tour de l'Europe à Mulhouse. Il descend de 13 étages. Il sort de l'ascenseur au 11^{e} étage.

Afin de permettre une manipulation aisée des différentes périodes, l'histoire doit être reproduite sur des affiches des couleurs correspondantes pour se présenter sous forme de « drapeau » :

Luc prend l'ascenseur au 24^{e} étage de la tour de l'Europe à Mulhouse	Il descend de 13 étages.	Il sort de l'ascenseur au 11^{e} étage.

Les contraintes de production d'un énoncé de problème consistent à partir de cette histoire, à respecter un ordre d'énonciation, par exemple « blanc, rouge, bleu » et à poser la question sur la dernière période énoncée, ce que l'on peut symboliser par le « drapeau » suivant :

		?

Une première étape consiste à mettre l'énoncé dans l'ordre imposé en déplaçant les affiches :

Il descend de 13 étages.	Il sort de l'ascenseur au 11^{e} étage.	Luc prend l'ascenseur au 24^{e} étage de la tour de l'Europe à Mulhouse.

La deuxième étape vise à cacher la donnée portant sur la dernière période énoncée :

Il descend de 13 étages.	Il sort de l'ascenseur au 11^{e} étage.	Luc prend l'ascenseur au ___ étage de la tour de l'Europe à Mulhouse.

On obtient ainsi un nouveau texte dont il faut rétablir la cohérence à plusieurs niveaux. L'énoncé ne répond pas aux normes du français dans la mesure où il ne forme pas un texte, mais une suite de phrases, dont la dernière ne répond pas aux normes de la syntaxe.

La troisième étape consiste donc à mettre l'énoncé en français normé afin de le rendre compréhensible à tout lecteur qui ne connaît pas l'histoire de départ. Il convient de détailler pas à pas cette troisième étape de mise en français correct.

Afin que l'on sache de qui il est question dans la première phrase de cet énoncé, il convient de remplacer le pronom « il » par son référent « Luc ».

Luc descend de 13 étages.	Il sort de l'ascenseur au 11e étage.	Luc prend l'ascenseur au ___ étage de la tour de l'Europe à Mulhouse.

L'indication de lieu est plus opportune dans la première phrase afin que l'on sache où se produit l'action pour une meilleure représentation, ce qui nécessite le déplacement et la modification de ce complément de phrase.

Luc descend de 13 étages dans la tour de l'Europe à Mulhouse.	Il sort de l'ascenseur au 11e étage.	Luc prend l'ascenseur au ___ étage.

Si la deuxième phrase ne demandait pas de transformation, la dernière nécessite des modifications complexes pour passer d'une phrase déclarative à une phrase interrogative. A l'inverse de la première phrase, il est possible de pronominaliser le nom « Luc ».

Luc descend de 13 étages dans la tour de l'Europe à Mulhouse.	Il sort de l'ascenseur au 11e étage.	A quel étage prend-il l'ascenseur ?

Enfin, pour assurer la cohérence textuelle, il devient nécessaire de marquer l'antériorité de l'état initial par un marqueur temporel, ici sous la forme du temps du verbe.

Luc descend de 13 étages dans la tour de l'Europe à Mulhouse.	Il sort de l'ascenseur au 11e étage.	A quel étage a-t-il pris l'ascenseur ?

C'est donc dans ce travail de réécriture d'un texte que les élèves montrent leurs compétences tant de lecture que d'écriture et peuvent réaliser des apprentissages ciblés sur la langue.

II – 1.3 Fabriquer un énoncé

Un premier projet d'écriture consiste à produire un énoncé à partir d'un même inducteur sous l'effet d'un certain nombre de contraintes.

On imposera donc, par exemple, l'histoire suivante :

> Samedi soir papy a 27 lapins. 8 lapins naissent pendant la nuit. Le lendemain, papy en a 35.

La consigne d'écriture concerne la transformation de cette histoire en énoncé de problème, en imposant l'ordre d'énonciation des différentes périodes et la place de la question.

Il est indispensable de faire produire au moins deux types d'énoncés pour que les modifications indispensables au niveau de la langue soit véritablement remarquées. Les élèves doivent se rendre compte que ce n'est pas seulement la transformation d'une histoire en énoncé qui entraîne une différente formulation, mais que deux énoncés produits sous des contraintes différentes ne peuvent s'écrire de la même façon.

> Consigne : En partant de cette histoire, écrire deux énoncés sous les contraintes imposées ci-dessous et schématisées par les « drapeaux ». Poser la question sur la dernière période énoncée.

Les productions réalisées[9] sont alors simplement mises en regard, phrase par phrase.[10]

8 lapins sont nés pendant la nuit.	Samedi soir papy a 27 lapins.	Dimanche matin, papy a 35 lapins.
Chez papy, 8 lapins sont nés pendant la nuit de samedi à dimanche.	Samedi soir il en avait 27.	Combien papy a-t-il de lapins dimanche matin ?
Pendant la nuit de samedi à dimanche, 8 lapins sont nés.	Papy en avait déjà 27 le samedi soir.	Combien papy avait-il de lapins dimanche ?

Dimanche matin, papy a 35 lapins.	8 lapins sont nés pendant la nuit.	Samedi soir papy a 27 lapins.
Dimanche matin, papy a 35 lapins.	Sachant que 8 lapins sont nés pendant la nuit de samedi à dimanche,	combien papy en avait-il samedi soir ?
Dimanche matin, papy a 35 lapins.	8 lapins sont nés la nuit précédente.	Combien de lapins avait papy samedi soir ?

La simple juxtaposition des productions permet de prendre conscience de la variété possible des mises en mots pour un seul et même énoncé, produit à partir d'une même histoire. Il est nécessaire que les élèves prennent conscience de la nécessité de faire des choix pour rédiger un écrit, et notamment un énoncé de problème. Une seule et même réalité peut conduire à une quasi infinité de mises en mots différentes. Dans l'exemple précédent, un groupe a préféré utiliser une phrase complexe utilisant l'expression *sachant que* et l'autre la juxtaposition de deux phrases simples.

Pour que les élèves développent des habiletés d'écriture et réalisent consciemment certains choix, il leur est nécessaire de dépasser une représentation souvent unique et erronée de

---

[9] Les productions analysées ont été réalisées par des groupes de stagiaires PE2.

[10] Pour l'analyse des 6 problèmes possibles avec question posée sur la dernière période énoncée, voir le compte rendu de l'atelier *Lire et écrire des énoncés de problèmes additifs (2) : la place de la langue*, in Actes du XXXII[e] colloque COPIRELEM, IREM de Strasbourg.

l'écrit : tout idée ne se formule que d'une seule manière, toute autre formulation étant de ce fait fausse. Les élèves doivent donc pouvoir se rendre compte qu'il y a plusieurs écritures normées possibles. C'est par un travail de réécriture qu'une telle conception de l'écriture peut se construire :

> Réécrire un texte, en référence au projet d'écriture et aux suggestions de révision élaborées en classe, et, pour cela, ajouter, supprimer, déplacer ou remplacer des morceaux plus ou moins importants de textes, à la main ou en utilisant un logiciel de traitement de texte [BOEN, p.68, « Compétences générales » devant être acquises en fin de cycle 3].
>
> Effectuer des manipulations dans un texte écrit (déplacement, remplacement, expansion, réduction) [BOEN, p.76, « Observation réfléchie de la langue française »].[11].

Comparer des productions avec des contraintes différentes oblige à s'interroger sur les raisons des différences. Une analyse détaillée suit ce premier examen afin d'observer très précisément les modifications intervenues dans le passage entre une histoire et un (ou des) énoncé(s).

II – 1.4 Analyser des productions

Pour analyser les productions, il convient de confronter, phrase par phrase, l'histoire avec des énoncés choisis en fonction de la variété de leurs tournures. La comparaison des formulations entre l'histoire et l'énoncé permet alors de relever les transformations opérées sur la langue. Cette observation à visée linguistique est d'ailleurs une des compétences à faire développer par les élèves qui doivent :

> Participer à l'observation collective d'un texte ou d'un fragment de texte pour mieux comprendre la manière donc la langue française y fonctionne [BOEN, p.69, « Compétences spécifiques : ORLF »].

Afin de pouvoir réaliser un relevé exhaustif des différences observées, il est préférable de commencer par la comparaison entre l'histoire et un seul énoncé produit.

8 lapins sont nés pendant la nuit.	Samedi soir papy a 27 lapins.	Dimanche matin, papy a 35 lapins.
Chez papy, 8 lapins sont nés pendant la nuit de samedi à dimanche.	Samedi soir il en avait 27.	Combien papy a-t-il de lapins dimanche matin ?
Ajout du lieu Marque temporelle développée Ajout d'une virgule	Modification du temps du verbe Pronominalisation	Transformation de la phrase déclarative en phrase interrogative : Déplacement de la marque temporelle Ajout de combien Ajout de il Ajout du -t- euphonique Ajout de « de » Point d'interrogation.

Ce travail de comparaison permet de commencer un inventaire des transformations opérées *spontanément*, et surtout de s'interroger sur les phénomènes de la langue en cause comme le stipulent les programmes :

[11] Toutes les références renvoyant à la partie « Observation réfléchie de la langue française » des programmes seront notées « ORLF ».

> L'observation réfléchie de la langue française conduit les élèves à examiner des productions écrites comme des objets qu'on peut décrire, et dont on peut définir les caractéristiques. Ils comparent des éléments linguistiques divers (textes, phrases, mots, sons, graphies…) pour en dégager de façon précise les ressemblances et les différences [BOEN, p.74, ORLF].

La comparaison se poursuit alors avec une autre production (ou plus) pour examiner les variantes et les constantes.

	8 lapins sont nés pendant la nuit.	Samedi soir papy a 27 lapins.	Dimanche matin, papy a 35 lapins.
	Chez papy, 8 lapins sont nés pendant la nuit de samedi à dimanche.	Samedi soir il en avait 27.	Combien papy a-t-il de lapins dimanche matin ?
	Pendant la nuit de samedi à dimanche, 8 lapins sont nés.	Papy en avait 27 samedi soir.	Combien papy avait-il de lapins dimanche ?
Variantes	Place différente des marques temporelles	Place différente des marques temporelles	Différence du temps du verbe.
Constantes		Même usage du verbe à l'imparfait	Même déplacement de la marque temporelle.

Pour le second type d'énoncé, il est possible de comparer directement deux productions :

	Dimanche matin, papy a 35 lapins.	8 lapins sont nés pendant la nuit.	Samedi soir papy a 27 lapins.
	Dimanche matin, papy a 35 lapins.	Sachant que 8 lapins sont nés pendant la nuit de samedi à dimanche,	combien papy en avait-il samedi soir ?
	Dimanche matin, papy a 35 lapins.	8 lapins sont nés la nuit précédente.	Combien de lapins avait papy samedi soir ?
Variantes		Ajout de « sachant que », avec le début d'une phrase complexe. Ponctuation : virgule ou point	Proposition ou phrase interrogative. Pronominalisation. Ajout d'un trait d'union. Première lettre minuscule ou majuscule.
Constantes	Pas de modifications.	Marque temporelle développée.	Modification du temps du verbe. Déplacement de la marque temporelle.

Pour être efficace, l'analyse doit s'appuyer sur la comparaison de différentes productions des élèves entre elles, et avec les phrases de l'histoire. Cela permet de comparer les transformations opérées en passant de l'histoire à l'énoncé ainsi que les différentes formulations, correctes ou non. Il n'est pas nécessaire d'examiner ainsi toutes les productions mais il est préférable de faire un choix en fonction des faits de langue les plus intéressants. Pour l'instant, il ne s'agit pas de valider, encore moins d'évaluer les productions réalisées par les élèves, mais de soulever un questionnement lié à l'usage de la langue.

Cette activité d'analyse de productions, qui fait partie intégrante d'une démarche de production d'écrits, révèle plusieurs intérêts :

- Elle favorise la mise en évidence de faits grammaticaux et centre l'attention sur la langue.

- Elle fait émerger une série de questions qui concernent la langue et son fonctionnement et contribue à éveiller la curiosité des élèves à ce sujet. Ces questions peuvent apparaître *a priori* mais aussi *a posteriori* après examen des productions.

- Elle révèle les compétences des élèves, leurs manques et leurs difficultés tant au niveau des savoirs sur la langue, que des savoir-faire dans l'activité d'écriture. Le dispositif révèle ce que les élèves ignorent et ce qu'ils ne maîtrisent pas encore complètement. Contrairement aux productions d'adultes en formation initiale et continue, les productions des élèves, souvent « pauvres », contiennent aussi des erreurs, reflets de leurs difficultés ou de leurs manques.

Ces limites de l'analyse de production conduisent tout naturellement à un autre dispositif, apte à construire des savoirs sur la langue, susceptibles de devenir des compétences d'écriture et de lecture. Il est donc nécessaire de recourir à d'autres supports dans des séances d'observation de la langue.

Ce travail de production d'énoncés de problèmes de mathématiques devrait permettre aux élèves de mieux analyser les énoncés des problèmes qu'ils ont à résoudre en se forgeant une meilleure représentation de la situation.

II – 2 Vers un outil mathématique

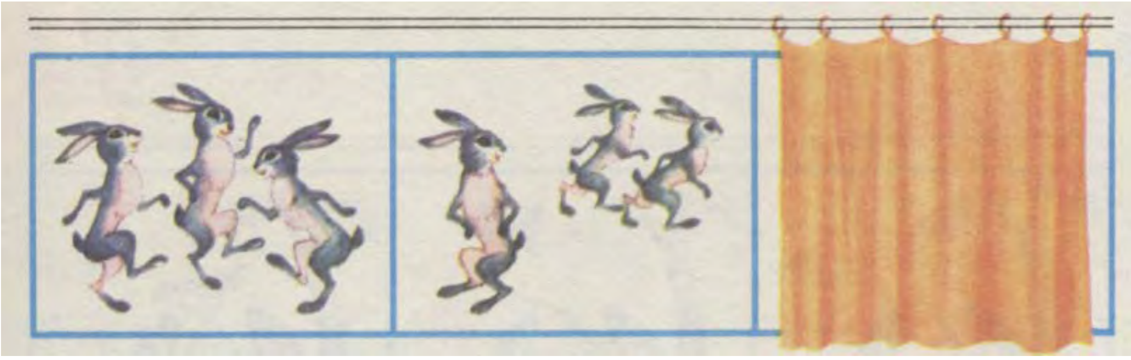
II – 2.1 Vers une autre représentation

Les problèmes additifs donnent souvent l'occasion aux maîtres de proposer (ou de faire construire) des représentations aux (par les) élèves. Ces représentations, souvent des dessins, ne distinguent généralement pas les trois périodes différentes auxquelles renvoie le texte (période qui précède la transformation, période de la transformation, période qui suit la transformation). A chacune des deux périodes extrêmes correspond un état (E_i , E_f). A la période de la transformation correspond une suite continue d'états que même les meilleures caméras ne pourraient représenter que par un nombre très restreint d'images par seconde.

Si aucun auteur de manuel, aucun enseignant ne se prive de représentations par des dessins pour résoudre les problèmes additifs, c'est sans doute qu'il est nécessaire de représenter l'histoire autrement que par le seul texte pour permettre aux élèves de travailler dans d'autres registres que ceux de la langue naturelle et des écritures mathématiques et de se forger d'autres représentations, plus opérationnelles pour la résolution de problèmes.

Certains auteurs n'hésitent pas à représenter la disparition d'objets en barrant ceux-ci, d'autres s'inspirent des bandes dessinées. Dans la majorité des cas, les trois périodes nécessaires à une bonne représentation de l'histoire, ne sont clairement établies.

Dans sa thèse, Régina Damm[12] donne une représentation des problèmes additifs où les trois périodes sont marquées, comme le faisaient avant elle les auteurs du manuel russe[13] de première année reproduit ci-dessous.

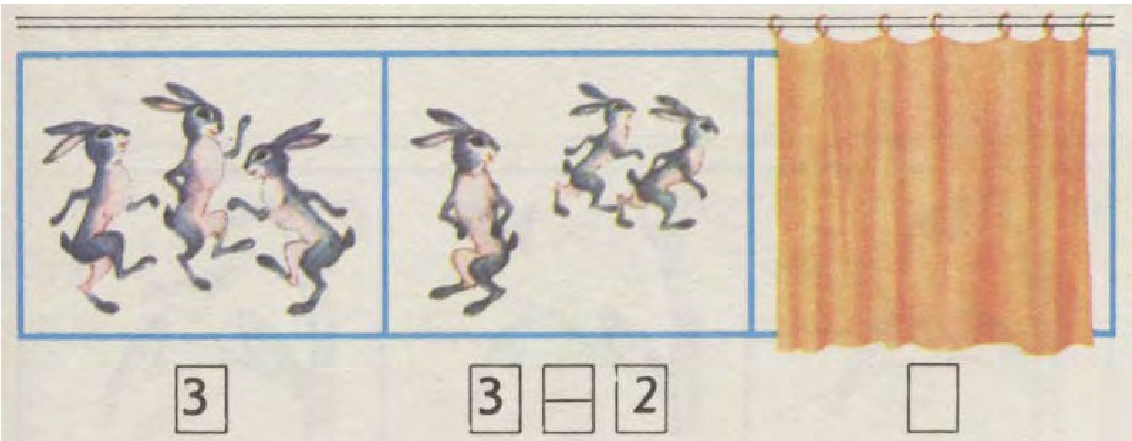


Comment faut-il lire cette série de trois images ?

Trois lapins dansent, ils continuent à danser ou s'éloignent au second plan, puis… mystère ?

En fait, la lecture de l'ouvrage montre rapidement un code mis en place dans la classe et qui fonctionne tout au long du livre : si des animaux regardent ostensiblement vers l'extérieur ou tournent le dos, ils quittent la scène. Les trois lapins de la deuxième image ne dansent pas. Un, le plus à gauche, regarde les deux autres s'en aller.

Demander aux élèves le nombre de lapins dans le premier cadre, c'est obtenir la réponse 3. Demander celui du deuxième cadre, c'est aussi obtenir la réponse 3. Qui oserait dire qu'il n'y a qu'un lapin dans le deuxième cadre ? Personne bien évidemment, sauf le manuel lui-même. Comme le montre l'extrait ci-dessous.



On comprend maintenant qu'il faut écrire 1 dans la case placé sous le rideau et que ce 1 va représenter le seul lapin restant après

---

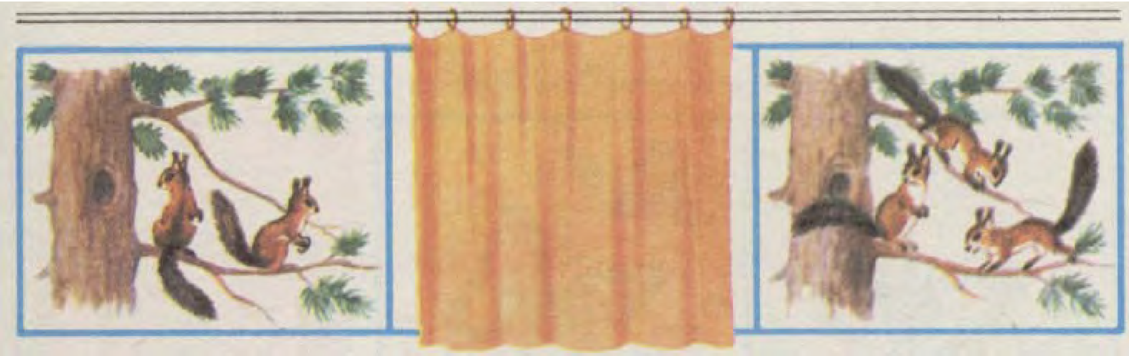
[12] *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*, Regina Damm Flemming ; Sous La Direction De François Pluvinage, Strasbourg 1992.

[13] *Matematika 1,* Moro et Stepanova ; Moscou, 1990.

le départ de ses deux compères. Mais 3 – 2 font 1, autant en Russie qu'en France. Pour les élèves, il y a alors dissociation du nombre de lapins observés dans le deuxième cadre et celui indiqué sous ce cadre. Bien évidemment, ce n'est pas le propos des auteurs qui voient dans le signe –, celui d'une transformation. Or ce signe n'indique pas, dans ce cas, une transformation, mais un résultat et ne devrait être utilisé que sous le troisième cadre où l'on pourrait écrire indifféremment 1 ou 3 – 2. Dans chacun des autres cadres, on pourrait aussi écrire 2 + 1, 1 + 2, 3 ou même 5 – 2…

Les signes + et –, s'ils indiquent bien le résultat d'une transformation, n'expriment pas cette transformation pendant son déroulement. Il en serait de même de l'utilisation d'autres signes comme des vecteurs (l'origine étant attachée à la première période, l'extrémité à la troisième période, le vecteur étant dessiné dans l'espace réservé à une seule et même période confondrait de fait les trois périodes).

L'image suivante va permettre d'exprimer autrement la transformation opérée. Il est clair que -si on lit de gauche à droite-, dans un premier temps deux écureuils se trouvent dans le champ de vision et que, dans un troisième temps, trois écureuils s'y trouvent. On peut en déduire que le rideau cache ce qui ne peut être montré, dessiné, à savoir une longue période, celle de la transformation. Ainsi, on peut être amené à décrire cette transformation en utilisant, de manière complémentaire au registre figural, le registre de la langue naturelle. On ne représente pas par un dessin ce qui ne peut l'être, sauf à engendrer des erreurs de lecture d'image, des erreurs de *conversions* de registres (par exemple écrire 3 – 2 sous l'image où il y a trois lapins dans le cadre.



Registre figural et registre de la langue naturelle ne sont pas toujours équivalents. Certaines situations imposent d'utiliser la langue naturelle, c'est le cas pour décrire une transformation, d'autres situations peuvent être décrites soit par l'un des deux registres, soit par l'autre (c'est le cas des états, et dans ce cas, le registre figural pourra être plus riche… on peut apprendre ici que l'arbre a un trou, on pourrait dénombrer le nombre de touffes d'épines ou de feuilles, le nombre de branches… sans que tous ces détails ne soient écrits).

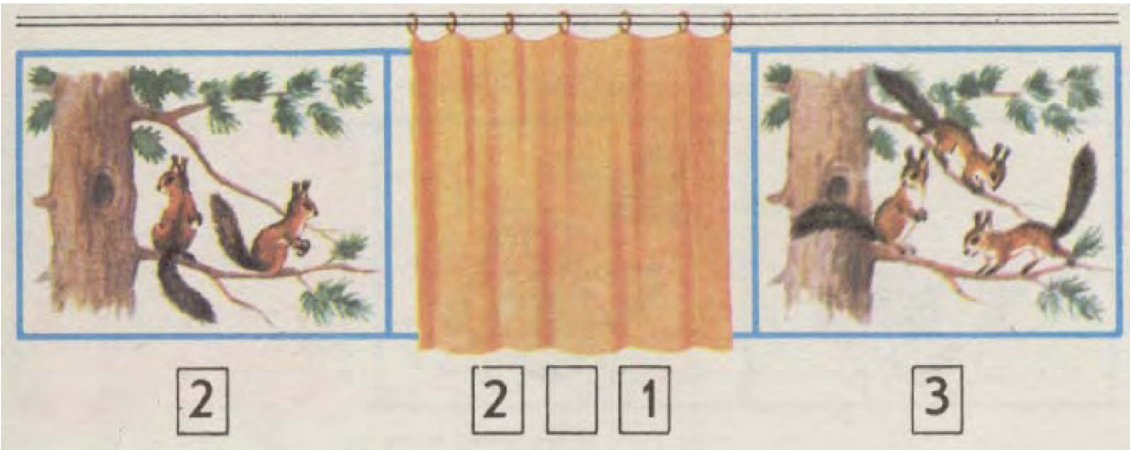
Ceci a conduit à proposer une représentation dans laquelle chacun des deux registres joue un rôle qui lui est propre et où, surtout, aucune représentation erronée ne vient décrire la transformation.

Aucune transformation ne sera dessinée, mais toute transformation sera décrite par les mots de la langue

française. Les deux registres, le registre figural et le registre de la langue naturelle sont complémentaires et utilisés un peu comme le seraient des engrenages. Ceci est illustré dans le dessin suivant.

On peut maintenant compléter par des étiquettes indiquant le nombre d'écureuils sous chaque image. On obtient alors une représentation telle que la suivante :

Représentation qui diffère de la suivante, proposée dans l'ouvrage russe.



On dispose donc ainsi d'un outil qui permet, dans certains cas, de bien représenter l'histoire sous-jacente à un énoncé de problème et d'en extraire la solution de l'énoncé.

Cet outil

- cache ce qui ne peut être dessiné (les transformations),
- décrit les transformations en langue naturelle (les dessins ne conviennent pas),
- comporte un axe du temps.

Mais un tel outil reste très marqué par le contexte. Il faudrait en effet dessiner des écureuils, des lapins, des poules… et que faire des températures par exemple ? L'outil peut manifestement convenir pour les grandeurs dénombrables, mais peut-être moins pour certaines grandeurs repérables[14]. Il convient donc de le généraliser pour obtenir un outil adapté, adaptable à toute situation.

L'outil suivant a été élaboré et testé en classes de début de cycle 3.

Cet outil conjugue une sorte d'axe du temps, axe qui ne correspond pas à un véritable axe du temps perçu comme axe des nombres réels, comme un axe des abscisses, mais simplement à la suite de trois[15] périodes, chacune correspondant à un état. L'axe des ordonnées est lui un véritable axe sur lequel on représentera les valeurs de la variable en jeu.

II – 2.2 Résoudre un problème avec ce mode de représentation

Comment résoudre, par exemple, le problème 8 avec ce système ?

Problème 8 : Pendant la nuit de lundi à mardi, la température dans la cour de l'école a baissé de 5 degrés. Mardi matin, la température est de 12 degrés.
Quelle était la température lundi soir ?

Etape 1 : repérer les différentes périodes par les marqueurs temporels.

[14] On pourrait parler de nombre de degrés pour exprimer une température, mais on ne pourrait pas dessiner, sauf à induire des représentations très erronées, ce nombre de degrés comme on dessine des lapins.

[15] Il se généralise à davantage de périodes en fonction du problème, notamment des problèmes à plusieurs transformations.

Pendant la nuit de lundi à mardi, la température dans la cour de l'école a baissé de 5 degrés. Mardi matin, la température est de 12 degrés.
Quelle était la température lundi soir ?

<u>Etape 2</u> : reporter ces indications dans le graphique pour désigner chacune des périodes.

On obtient :

<u>Etape 3</u> : repérer ce qui varie.

Pendant la nuit de lundi à mardi, la température dans la cour de l'école a baissé de 5 degrés. Mardi matin, la température est de 12 degrés.
Quelle était la température lundi soir ?

<u>Etape 4</u> : reporter ces indications dans le graphique.

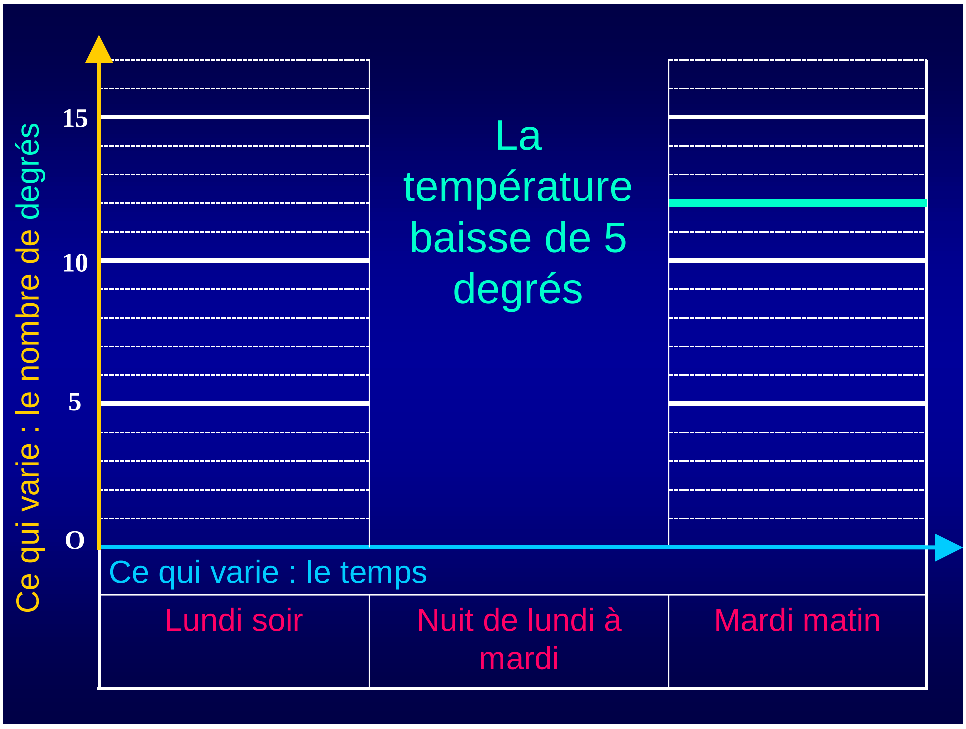
On obtient :

Etape 5 : repérer les informations portant sur cette variable (valeurs connues, variations).

Pendant la nuit de lundi à mardi, la température dans la cour de l'école a baissé de 5 degrés. Mardi matin, la température est de 12 degrés.
Quelle était la température lundi soir ?

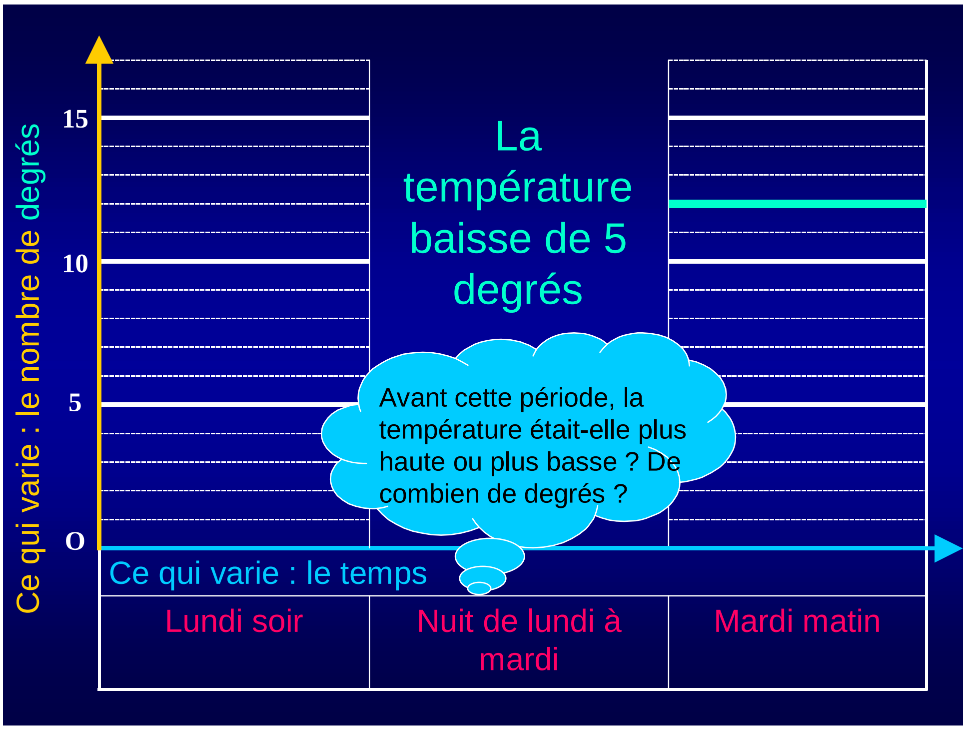
Etape 6 : les reporter sur le graphique.

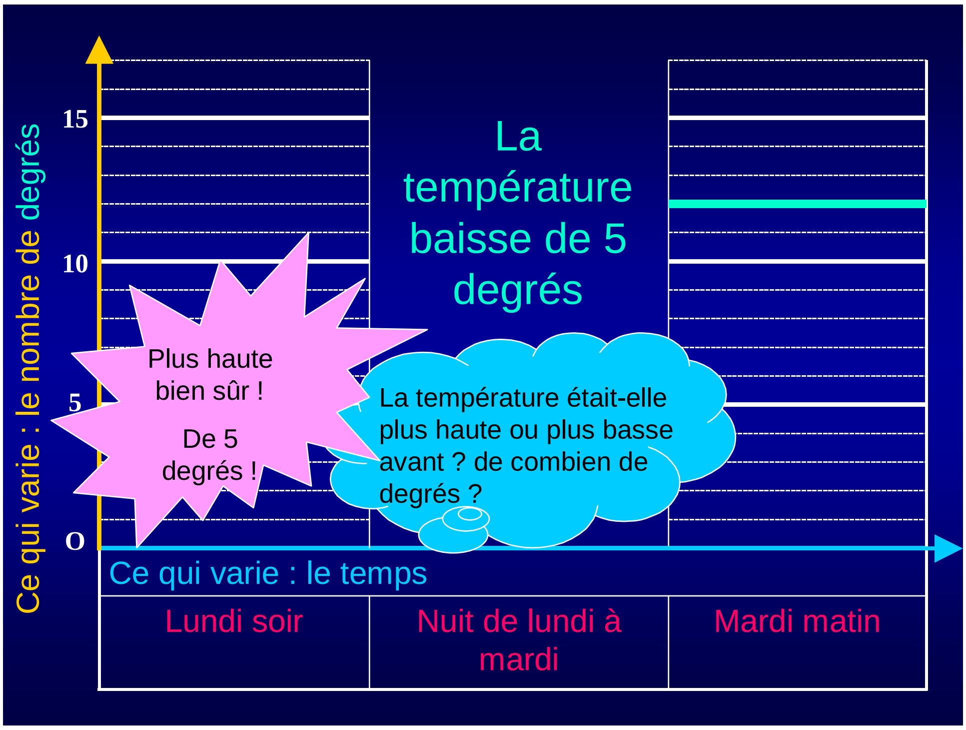
On obtient :

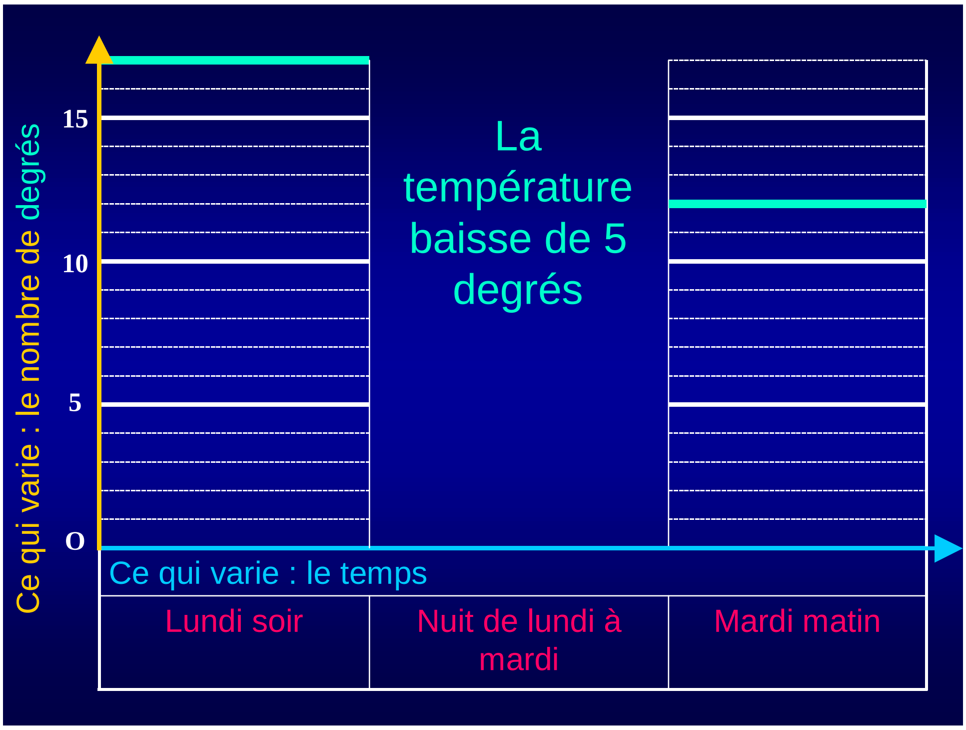


<u>Etape 7</u> : compléter les informations pour reconstituer l'histoire

Afin de reconstituer l'histoire, l'élève doit interroger la situation présentée de manière incomplète dans le graphique. Il est donc amené à se poser des questions comme celle figurant dans la bulle ci-dessous ; question dont la réponse conduira vers la solution du problème.







Etape 8 : répondre à la question.

Lundi soir, la température dans la cour de l'école était de 17 degrés.

II – 2.3 Produire une histoire avec ce mode de représentation

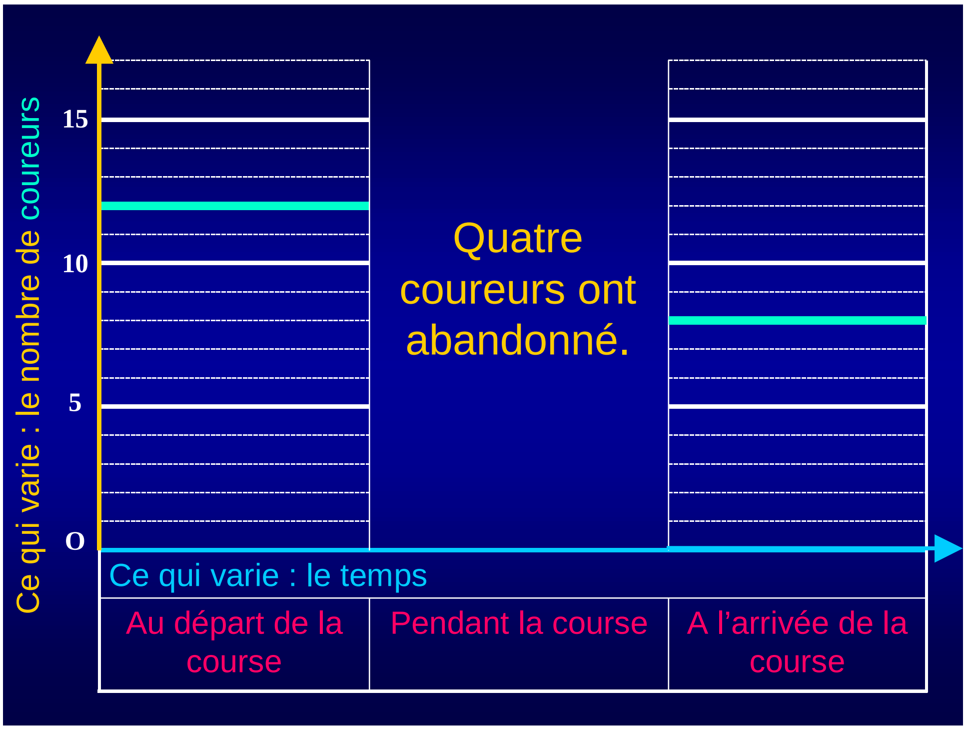
Ce même outil permet de produire des histoires, puis des énoncés.

Pour produire une histoire,

- on choisira une variable (ce qui varie),
- on attribuera des valeurs fixes et une variation,
- on déterminera des périodes,
- on écrira l'histoire dans l'ordre chronologique sans omettre aucune information, sans en rajouter.

Les élèves ont utilisé facilement cet outil pour produire des histoires par imitation.

Voici un exemple d'histoire produite :



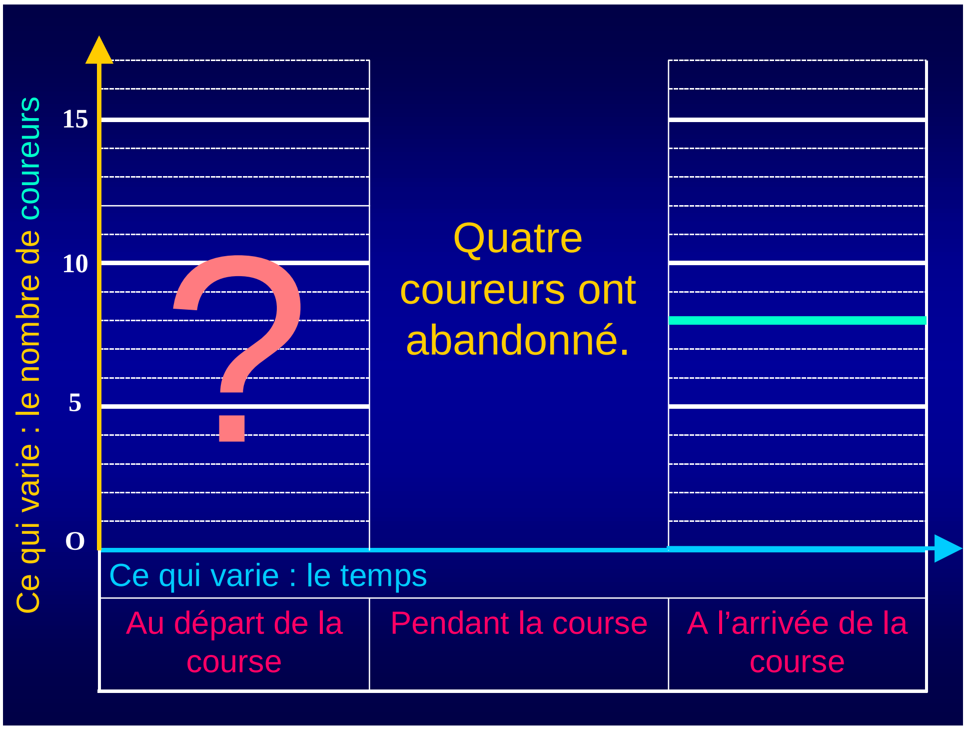
d'où la mise en mots suivante de cette histoire :

> Douze coureurs avaient pris le départ d'une course cycliste. Quatre coureurs ont abandonné en cours de route. Il n'y avait plus que huit coureurs à l'arrivée de la course.

II – 2.4 Produire un énoncé avec ce mode de représentation

Une fois l'histoire produite, l'énoncé ira (presque) de soi. Il suffira de cacher une donnée et d'écrire ensuite l'un des énoncés possibles en respectant les contraintes imposées.

Voici, dans l'espace de ces modes de représentations, un problème relatif à la même histoire.



<u>Voici un énoncé possible :</u>

> Il n'y avait que huit coureurs à l'arrivée de la course cycliste. Quatre coureurs avaient abandonné en cours de route. Combien étaient-ils au départ de la course ?

III – MANIPULER DES ÉNONCÉS POUR OBSERVER LA LANGUE

L'observation réfléchie de la langue française vise clairement à donner aux élèves les moyens de mieux écrire et mieux lire, comme le stipulent les programmes de l'école primaire :

> Les connaissances acquises dans les séquences consacrées à la grammaire sont essentiellement réinvesties dans les projets d'écriture (quel que soit l'enseignement concerné). […] La familiarisation acquise avec les structures de la langue permet aussi de résoudre certains problèmes de compréhension face à des textes plus complexes [BOEN, p.75, ORLF].

Tous les enseignements peuvent donc susciter des projets d'écriture explicitement reliés à des apprentissages sur la langue. Le choix des savoirs à acquérir se réalise en fonction d'une programmation établie *a priori* et des besoins des élèves, c'est-à-dire des manques constatés lors de l'analyse de productions. Dans le cas des énoncés de problèmes additifs, certains faits de langue sont récurrents et permettent de prévoir des apprentissages à mettre en œuvre.

Deux raisons essentielles justifient le recours à des supports mathématiques pour construire les séances d'observation réfléchie de la langue. En effet, la compréhension du fonctionnement de ces faits de langue est indispensable à la compréhension fine de l'énoncé. Par ailleurs, le transfert des connaissances ainsi acquises sur la langue en compétences de lecture et d'écriture est facilité par cet ancrage dans le contexte précis des apprentissages mathématiques.

> [les projets d'écriture] peuvent servir de supports à de nouvelles observations des phénomènes lexicaux, morphosyntaxiques ou orthographiques [BOEN, p.75, ORLF].

Les mathématiques constituent donc un support privilégié pour l'observation de certains faits de langue marquants.

III – 1 Les faits de langue marquants

L'analyse des productions a permis de faire un inventaire de faits de langue au fil des productions. Trois faits de langue apparaissent de manière répétitive dans toutes les productions. Ils apparaissent au niveau du texte pour établir la cohérence entre les phrases par un usage approprié des chaînes anaphoriques (pronoms et groupes nominaux renvoyant à un même référent) mais aussi dans le marquage de la temporalité, notamment de celui de l'antériorité lorsque l'ordre d'énonciation est différent de l'ordre chronologique. D'autres faits de langue apparaissent plutôt au niveau de la phrase, comme ceux qui concernent le passage de la phrase déclarative à une phrase interrogative[16]. Ils soulèvent tous des questionnements qui peuvent devenir autant d'objectifs d'apprentissage sur la langue en fonction des besoins constatés.

III – 1.1 Pronominalisation et substitution[17]

Plusieurs questionnements sont susceptibles d'être soulevés à propos de la substitution impliquant l'usage d'un pronom :

Quand utiliser un pronom ?

Quels sont les mots remplacés par un pronom ? Quel pronom remplace tel groupe nominal ?

Quelle sorte de pronom utiliser ? En particulier, quand utiliser « en » ?

Où sont placés les pronoms dans la phrase ? dans le texte ?

L'histoire des lapins n'utilisant aucun pronom, il n'apparaît peut-être pas nécessaire aux élèves d'en employer dans les énoncés. D'ailleurs, les énoncés de la seconde production n'en présentent pas[18]. Or la plupart des énoncés de problèmes dans les manuels utilisent des pronoms, source de difficulté pour la lecture, notamment le pronom « en ». S'interroger sur l'opportunité et le choix d'une substitution est un geste attendu de l'élève dans toute situation de production.

III – 1.2 Marqueurs temporels

Les interrogations soulevées par les modifications des marqueurs temporels concernent autant leur cause que leur forme ou leur place dans l'énoncé.

Pourquoi faut-il modifier les marqueurs temporels ?

Comment montrer la succession des périodes ?

---

[16] Pour une analyse complète des faits de langue, voir le compte rendu de l'atelier *Lire et écrire des énoncés de problèmes additifs (2) : la place de la langue,* in Actes du XXXII^{e} colloque COPIRELEM, IREM de Strasbourg.

[17] Pour une analyse détaillée voir le compte rendu de l'atelier *Lire et écrire des énoncés de problèmes additifs (2) : la place de la langue,* in Actes du XXXII^{e} colloque COPIRELEM, IREM de Strasbourg.

[18] Sauf un pronom de reprise dans une des phrases interrogatives.

Quels sont les moyens linguistiques pour marquer le temps, c'est-à-dire les moments où les actions se déroulent les unes par rapport aux autres ?

Quels temps verbaux peut-on utiliser pour marquer les différentes périodes ?

Où se situent les marqueurs temporels dans la phrase ? Peut-on les déplacer ? Changent-ils de place selon le type de phrase (déclarative ou interrogative) ?

La modification des marqueurs temporels est une des conséquences du bouleversement de l'ordre chronologique. En effet, si l'ordre des phrases n'est pas celui du déroulement temporel chronologique, la langue doit indiquer l'antériorité ou la postériorité afin de le signaler au lecteur. Un des moyens utilisés est le temps des verbes, notamment l'imparfait. Ajouter des précisions à un complément de phrase en est un autre.

III – 1.3 Phrase interrogative

De nombreux éléments entrent en compte dans la transformation d'une phrase déclarative en phrase interrogative :

Quels sont les éléments qui s'ajoutent lorsqu'on formule une phrase interrogative ?

A quoi sert le mot « combien » ? Quel mot remplace-t-il ?

Où sont placés les mots dans la phrase interrogative ? Quels mots changent de place par rapport à la phrase déclarative ?

Les phrases interrogatives majoritairement présentes dans les énoncés de problème additifs sont des phrases interrogatives partielles introduites par les mots « combien » ou « quel ». La phrase du type « Que s'est-il passé ? » demande une formulation complète de la phrase mais ne suscite pas de transformation.

Ce classement des faits de langue marquants fait apparaître trois incidences dans l'opération de réécriture d'une histoire vers un énoncé :

Des ajouts ou retraits d'éléments

Des substitutions ou remplacements

Des déplacements dans la phrase ou dans le texte

Les séances d'observation réfléchie de la langue vont mettre en œuvre les mêmes opérations en s'intéressant à un apprentissage ciblé.

III – 2 Les démarches d'apprentissage

Concernant les apprentissages à réaliser, il convient de distinguer d'une part les savoirs sur la langue qui seront d'ordre sémantique, syntaxique ou morphologique et qui renvoient à des connaissances, et d'autre part les savoir-faire en lecture et en écriture qui constituent autant de compétences. Un apprentissage « traditionnel » comprenant l'apprentissage d'une règle et des exercices d'application ne favorise pas le transfert entre les connaissances et les compétences. La mise en place de démarches d'apprentissage plus efficaces nécessite de s'interroger sur le savoir même à mettre en place au niveau notionnel, sur les démarches d'acquisition de ce savoir et sur leur lien avec les compétences effectives de lecture et d'écriture visées, par exemple, dans le cas des énoncés mathématiques, une bonne représentation du problème afin de le résoudre.

III – 2.1 Une démarche active

On privilégiera donc une démarche où l'élève est acteur dans la construction de son savoir comme le recommandent les programmes :

> […] l'observation réfléchie de la langue française doit être un moment de découverte visant à développer la curiosité des élèves et leur maîtrise du langage, et non une série d'exercices répétitifs mettant en place des savoirs approximatifs et l'usage prématuré d'une terminologie inutilement complexe. [BOEN, p.74-75, ORLF].

Pour que l'élève puisse mettre en relation ses apprentissages en langue et les compétences en lecture dont il a effectivement besoin pour mieux comprendre un texte, les ateliers de lecture se focalisent, en particulier, sur les indices linguistiques dans la construction du sens :

> Il convient […] d'amener l'enfant au bon repérage des marques linguistiques qui, à l'écrit comme dans le langage d'évocation, guident cette intégration (dans le cadre de la phrase comme dans celui du texte). Les substituts du nom (nominaux ou pronominaux), la ponctuation, les temps du verbe, les connecteurs, etc., doivent être travaillés de manière explicite dans les ateliers de lecture. Ils permettent souvent de faire les inférences nécessaires à la compréhension que les jeunes lecteurs négligent ou ne parviennent pas à réaliser. [BOEN, p.74, « Atelier de lecture »].

Cette stratégie est similaire à celle que réalisent les élèves lorsqu'ils observent le fonctionnement de la langue :

> L'observation réfléchie de la langue française conduit les élèves à examiner des productions écrites comme des objets qu'on peut décrire, et dont on peut définir les caractéristiques. Ils comparent des éléments linguistiques divers (textes, phrases, mots, sons, graphies...) pour en dégager de façon précise les ressemblances et les différences. [BOEN, p.74, ORLF].

Afin de faciliter le transfert en écriture, cette démarche doit être similaire à ce que les élèves ont à mettre en œuvre lorsqu'ils écrivent ou plutôt réécrivent :

> La révision reste, comme dans tous les projets d'écriture, un moment essentiel. Les élèves doivent être régulièrement conduits à ajouter, supprimer, remplacer, déplacer des fragments de textes […]. [BOEN, p.76, « Ecrire à partir de la littérature »].

Ainsi, la première compétence devant être acquise en fin de cycle 3 dans le cadre de l'observation réfléchie de la langue concerne justement ces opérations, et l'élève doit être capable de :

> effectuer des manipulations dans un texte écrit (déplacement, remplacement, expansion, réduction). [BOEN, p.76, ORLF].

Dans l'acte d'écrire comme dans la phase de construction de savoir, l'élève est donc conduit à réaliser le même type de manipulations, attitude qui favorise le transfert de compétences autant que de connaissances.

Pour faciliter le transfert des apprentissages sur la langue à un autre domaine, les savoirs acquis en langue sont systématiquement et explicitement réinvestis dans des situations de lecture et d'écriture, en utilisant les mêmes démarches.

La démarche préconisée dans les programmes de l'école primaire consiste donc à proposer un corpus de textes dits « d'experts », produits par l'enseignant ou récoltés dans des manuels, et à les observer en utilisant notamment des « techniques d'exploration du langage » :

> classer (des textes, des phrases, des mots, des graphies) en justifiant les classements réalisés par des indices précis,
>
> manipuler des unités linguistiques (mots, phrases, textes), c'est-à-dire savoir effectuer certaines opérations de déplacement, remplacement, expansion, réduction d'où apparaîtront des ressemblances et différences entre les objets étudiés. [BOEN, p.74, ORLF].

Les énoncés de problèmes constituent donc un support possible parmi d'autres pour l'observation réfléchie des faits de langue récurrents relevés. Ils sont, par exemple, particulièrement adaptés à l'analyse de phrases appartenant au type interrogatif, importantes pour la compréhension des consignes en mathématiques. Les savoirs réalisés et structurés peuvent être complétés par l'observation d'autres réalisations de phrases interrogatives dans d'autres situations d'énonciations.

III – 2.2 Proposer un nouveau corpus

Le corpus proposé pour observer le fonctionnement de la langue doit être composé de textes connus des élèves afin qu'ils ne soient pas confrontés à des difficultés de lecture inattendues et qu'ils puissent concentrer leur attention sur la langue. Ces énoncés ont donc déjà été rencontrés en classe, résolus collectivement ou individuellement dans une autre situation ou avec des données numériques différentes, et collectés en fonction d'une séance d'observation réfléchie de la langue. En effet, les travaux réalisés par le groupe responsable de la rédaction du document d'accompagnement sur l'observation réfléchie de la langue préconisent de faire des constats sur le fonctionnement de la langue après *« cueillette » de faits au cours des activités de lecture/écriture et d'O.R.L. ou dans d'autres domaines disciplinaires*[19].

Puisque l'objectif annoncé est de travailler les types de phrases interrogatives dans les énoncés de problème, il convient de choisir les énoncés, fabriqués par le maître ou tirés d'un manuel, en fonction des apprentissages visés, donc avec une variété suffisante de phrases interrogatives. Soit le corpus suivant d'énoncés qui ont été auparavant (dans des séances précédentes) résolus et classés par les élèves en fonction des « drapeaux » :

A. Dimanche matin, papy a 35 lapins. Samedi soir, papy avait 27 lapins. Combien se sont ajoutés pendant la nuit ?

B. Dans l'après-midi de jeudi, la température extérieure était de 19 degrés. La température a augmenté de 7 degrés entre le matin et l'après-midi de ce jour. Quelle température faisait-il ce jeudi matin ?

C. Pierre sort de l'ascenseur au 27^{e} étage après être monté de 14 étages. A quel étage a-t-il pris l'ascenseur ?

D. Avant de s'arrêter à l'arrêt « Mairie », un bus transportait 17 personnes. Après l'arrêt de la mairie, le bus transporte 12 personnes. Que s'est-il passé à l'arrêt ?

---

[19] *Observation réfléchie de la langue,* Document préparatoire au Document d'accompagnement du 25/01/2005, non publié à ce jour.

E. La voiture de papa a consommé 18 litres d'essence pendant un trajet. Avant de partir, papa avait 35 litres d'essence dans son réservoir. Combien de litres a-t-il à la fin du trajet ?

F. Après avoir fait ses petits gâteaux, mamy a 7 œufs. Elle avait 24 œufs avant de faire la pâtisserie. Combien en a-t-elle utilisés pour faire les petits gâteaux ?

G. Avant la récréation, Augustus Gloop avait 17 bâtons de chocolat. Pendant la récréation il joue et perd 5 bâtons. Combien a-t-il de bâtons de chocolat après la récréation ?

H. Pendant la nuit de lundi à mardi, la température dans la cour de l'école a baissé de 5 degrés. Mardi matin, la température est de 12 degrés. Quelle était la température lundi soir ?

I. 78 coureurs sont présents à l'arrivée de la course. 25 coureurs ont abandonnés. Combien y avait-il de coureurs au départ de la course ?

J. Pendant la récréation, Carole a joué aux billes et a perdu 7 billes. Avant la récréation, elle avait 15 billes. Combien a-t-elle de billes après la récréation ?

K. A l'arrêt de la Mairie, 5 personnes descendent d'un bus. Après l'arrêt le même bus transporte 12 personnes. Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?

L. Papa avait 46 €. Maintenant il en a 28. Combien a-t-il dépensé ?

Même si l'objet d'apprentissage se situe au niveau de la phrase, il est essentiel de prendre en compte le contexte dans les écrits authentiques[20], c'est-à-dire de pouvoir recourir aux énoncés dans lesquels ces phrases apparaissent.

III – 2.3 Classer

Une première activité consiste à relever les phrases interrogatives afin de pouvoir les manipuler. Cette activité préalable est nécessaire pour se familiariser avec l'objet d'étude. En effet, les élèves doivent prendre des repérages dans l'énoncé et se fonder sur un ou plusieurs critères pour isoler les phrases interrogatives, donc de prêter attention à des marques linguistiques, par exemple, la ponctuation, les majuscules ou les mots interrogatif.

Combien se sont ajoutés pendant la nuit ?

Quelle température faisait-il ce jeudi matin ?

A quel étage a-t-il pris l'ascenseur ?

Que s'est-il passé à l'arrêt ?

Combien de litres a-t-il à la fin du trajet ?

Combien en a-t-elle utilisés pour faire les petits gâteaux ?

Combien a-t-il de bâtons de chocolat après la récréation ?

Quelle était la température lundi soir ?

Combien y avait-il de coureurs au départ de la course ?

---

[20] On appelle « écrit authentique », un écrit qui n'a pas été spécialement fabriqué pour la découverte d'un fait de la langue mais qui est issu des différents supports utilisés par la classe, dans ce cas : des énoncés de problèmes.

Combien a-t-elle de billes après la récréation ?

Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?

Combien a-t-il dépensé ?

La première « technique d'exploration » consiste en un classement de ces phrases. Or plusieurs classements[21] sont possibles en fonction des critères grammaticaux choisis. Pour être pertinent, le classement doit permettre d'observer et de comparer des similitudes dans le fonctionnement de la langue. Il se réalise donc en fonction de l'apprentissage visé. La nécessité de cet apprentissage peut découler de l'analyse de productions et donc d'un besoin des élèves. On peut par exemple s'intéresser aux questions soulevées par le mot « combien » :

A quoi sert le mot « combien » ? Quel mot remplace-t-il ?

Mais l'objectif d'apprentissage peut aussi se déterminer en fonction de problèmes de langue dont les élèves ne peuvent être conscients et dont ils peuvent avoir besoin pour résoudre des problèmes de lecture, ayant des incidences sur la compréhension fine de l'énoncé.

Si l'on s'intéresse au classement des phrases qui commencent par le mot interrogatif « combien », on peut obtenir le classement suivant[22] :

« Combien » suivi de « de » et d'un nom	« Combien » suivi d'un verbe	Cas particulier
Combien de litres a-t-il à la fin du trajet ? Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?	Combien a-t-elle de billes après la récréation ? Combien a-t-il dépensé ? Combien se sont ajoutés pendant la nuit ? Combien a-t-il de bâtons de chocolat après la récréation ?	Combien en a-t-elle utilisés pour faire les petits gâteaux ? Combien y avait-il de coureurs au départ de la course ?

Ce classement aboutit à un constat provisoire distinguant deux fonctionnements de « combien » en fonction des mots qui le suivent. Mais cela ne constitue qu'une étape dans la construction d'un savoir et l'activité de classement montre ses limites en isolant deux cas particuliers. Une autre « technique opératoire » est donc utilisée pour poursuivre l'observation de la langue.

III – 2.4 Manipuler

La manipulation consiste à regrouper, déplacer, remplacer des groupes syntaxiques[23] afin de pouvoir classer les phrases commençant par « combien ». Au préalable, il faut découper les

[21] Voir des exemples de classements dans le compte rendu de l'atelier *Lire et écrire des énoncés de problèmes additifs (2) : la place de la langue,* in Actes du XXXII^{e} colloque COPIRELEM, IREM de Strasbourg.

[22] Les exemples utilisés dans cette partie ont été réalisés en formation initiale et continue, ainsi que dans les ateliers du colloque de la COPIRELEM à Strasbourg en 2005.

phrases en groupes syntaxiques en procédant par tâtonnements. Ce découpage effectif des phrases contraint à des choix et permet des manipulations réelles des groupes syntaxiques dans la phrase, pour une comparaison plus fine des phrases.

Ainsi, les découpages suivants peuvent être proposés :

> Combien de litres | a-t-il | à la fin du trajet ?
>
> Combien de personnes | le bus transportait-il | avant l'arrêt ?
>
> Combien | a-t-elle | de billes | après la récréation ?
>
> Combien | a-t-il dépensé ?
>
> Combien | se sont ajoutés | pendant la nuit ?
>
> Combien | a-t-il | de bâtons de chocolat | après la récréation ?
>
> Combien | y avait-il | de coureurs | au départ de la course ?
>
> Combien | en | a-t-elle utilisés | pour faire les petits gâteaux ?

Plusieurs problèmes peuvent être abordés grâce à ces découpages :

Cette manipulation permet par exemple de reconnaître « y » dans « y avait-il » comme une partie du présentatif « il y a », à l'imparfait, avec un sujet inversé.

Le cas de « en » pose problème parce qu'un autre découpage pourrait être proposé :

> Combien | en a-t-elle utilisés | pour faire les petits gâteaux ?

Le rôle du pronom « en » peut être identifié en recourant au texte de l'énoncé complet :

> Après avoir fait ses petits gâteaux, mamy a 7 œufs. Elle avait 24 œufs avant de faire la pâtisserie. Combien en a-t-elle utilisés pour faire les petits gâteaux ?

Il est donc possible de réaliser la substitution suivante :

> Combien en a-t-elle utilisés ?
>
> Combien d'œufs a-t-elle utilisés ?

Il s'avère également possible de déplacer le groupe ainsi reconstitué :

> Combien a-t-elle utilisé d'œufs ?

Ce constat conduit à réexaminer le corpus pour voir si d'autres groupes de mots sont déplaçables après combien, ce qui nécessite de redécouper les groupes syntaxiques où combien était suivi de « de » et d'un nom :

---

[23] Un groupe syntaxique constitue une unité fonctionnelle dans une phrase et comporte un ensemble cohérent d'informations.

Combien de litres a-t-il à la fin du trajet ?

Combien a-t-il de litres à la fin du trajet ?

Combien de personnes le bus transportait-il avant l'arrêt ?

Combien le bus transportait-il de personnes avant l'arrêt ?

Combien a-t-elle de billes après la récréation ?

Combien de billes a-t-elle après la récréation ?

Combien a-t-il de bâtons de chocolat après la récréation ?

Combien de bâtons de chocolat a-t-il après la récréation ?

Combien y avait-il de coureurs au départ de la course ?

Combien de coureurs y avait-il au départ de la course ?

Dans deux phrases, aucun déplacement n'est possible après « combien » :

Combien a-t-il dépensé ?

Combien se sont ajoutés pendant la nuit ?

Ces manipulations conduisent à un nouveau classement selon la possibilité de déplacer ou non un certain élément de la phrase. Cette étape constitue un pas vers l'abstraction, parce qu'elle met en évidence un même type de fonctionnement pour une série de phrases apparemment différentes. En effet, la première série de phrases (énoncés E, F, G, I, J, K) comporte un élément déplaçable constitué d'un nom au pluriel (*litres*, *personnes*, *billes*, *coureurs*) ou d'un groupe nominal (*bâtons de chocolat*), avant ou après le groupe constitué par le verbe et son sujet.

Combien de [nom ou GN] [verbe/sujet] [marqueur temporel] ?

Combien [verbe/sujet] de [nom ou GN] [marqueur temporel] ?

Il s'agit en fait de la même phrase simplement formulée de manière différente. Si l'on rajoute la pronominalisation, on peut donc retenir trois formulations possibles pour une même phrase, par remplacement ou déplacement d'éléments. Ce constat est essentiel, pour plusieurs raisons.

Il évite d'abord d'enfermer les élèves dans des automatismes simplistes du type « suivi de nom », « suivi de verbe » qui n'est que partiellement opérant, mais les contraint à mener une véritable activité réflexive et à analyser finement le fonctionnement de la langue.

Ce constat donne aussi aux élèves des moyens de rédaction différents avec une place variable du groupe qui complète « combien » ou l'utilisation du pronom « en ».

Enfin, cette observation permet aux élèves de mieux relier le mot « combien » au moyen de la préposition « de » au nom ou groupe nominal concerné, qui correspond justement au nombre qui est recherché en mathématiques. En effet, s'il est relativement facile de le trouver s'il suit directement « combien », il devient déjà plus difficilement repérable s'il en est séparé par le groupe sujet/verbe.

Pour la seconde série de phrases (énoncés A et L), où aucun déplacement est possible et où « combien » est suivi d'un verbe, il est nécessaire de recourir au texte complet pour savoir sur quoi porte le mot « combien », même si le sens du verbe « dépenser » donne un indice (dépenser de l'argent, des euros, de l'énergie…).

III – 3 Des apprentissages à réaliser

Tous ces constats provisoires issus des classements et des manipulations peuvent conduire à des apprentissages portant sur la langue ou sur l'écrit, ayant des incidences sur la lecture et l'écriture d'énoncés de problèmes.

III – 3.1 Des apprentissages sur la langue

Les constats précédents soulèvent un nouveau questionnement concernant le passage de la phrase déclarative à la phrase interrogative. En effet, à quoi correspond ce « combien (de) » spécifique à la phrase interrogative. Est-il simplement ajouté par rapport à la phrase déclarative ? Ou remplace-t-il un mot ou groupe de mots de la phrase déclarative ?

Or la phrase déclarative correspondante constitue justement la réponse au problème, à laquelle il suffit de revenir pour comparer les deux types d'une même phrase. Par exemples pour les énoncés A et L d'une part, et les énoncés E et I d'autre part.

Enoncé A

Dimanche matin, papy a 35 lapins. Samedi soir, papy avait 27 lapins. Combien se sont ajoutés pendant la nuit ?

Réponse : 8 lapins se sont ajoutés pendant la nuit.[24]

Enoncé L

Papa avait 46 €. Maintenant il en a 28. Combien a-t-il dépensé ?

Réponse : Il a dépensé 18 €.

Enoncé E

La voiture de papa a consommé 18 litres d'essence pendant un trajet. Avant de partir, papa avait 35 litres d'essence dans son réservoir. Combien de litres a-t-il à la fin du trajet ?

Réponse : Il a 17 litres à la fin du trajet.

Enoncé I

78 coureurs sont présents à l'arrivée de la course. 25 coureurs ont abandonnés. Combien y avait-il de coureurs au départ de la course ?

Il y avait 103 coureurs au départ de la course.

En transformant strictement la phrase interrogative en phrase déclarative, on peut émettre la conjecture suivante :

- « combien de » suivi d'un nom ou d'un GN, directement ou non, fonctionne comme un déterminant puisqu'il remplace un déterminant numéral.

---

[24] La réponse « 8 se sont ajoutés » pourrait être admise dans le contexte, mais en comparant aux réponses des autres énoncés, on pourrait constater qu'il manque la variable.

- « combien » suivi d'un verbe fonctionne comme un pronom puisqu'il remplace un groupe nominal.

La poursuite de la substitution par d'autres mots connus comme des déterminants ou comme des pronoms permet de vérifier cette conjecture.

Les apprentissages sur la langue permettent donc de rattacher le mot « combien » à la classe des déterminants ou à celle des pronoms, selon son environnement.

III – 3.2 Des apprentissages sur l'écrit

Deux apprentissages sur l'écrit découlent de ces classements et manipulations. Concernant les compétences d'écriture, les élèves peuvent formuler de différentes manières certaines phrases interrogatives commençant par « combien ». Quant à l'implication sur la lecture, un tel travail permet de mieux identifier ce que les élèves doivent chercher, c'est-à-dire la réponse à la question posée.

CONCLUSION

Le dispositif qui a été mis en place n'est pas un dispositif « scientifique », mais s'appuie sur une réflexion et des pratiques permettant de développer la maîtrise de la langue en mathématiques. Il en ressort que ce type de travail intégrant apprentissages sur la langue et mathématiques sous forme de projets d'écriture est motivant pour les élèves et leur permet de regarder autrement ces objets que sont les textes d'énoncés de problèmes et par là même d'être en mesure de mieux répondre aux questions posées. De nombreuses difficultés placées à dessein dans les énoncés peuvent être plus aisément surmontées par les élèves.

Le travail relaté ici, réalisé pour partie en classes de fin du cycle 2 et de début de cycle 3, a surtout été approfondi en formations continue et initiale. Les stagiaires ont très souvent fait part de retour positif de réinvestissement dans leurs classes. Des adaptations en ont été faites et expérimentées dans des classes de CP, conduisant aux mêmes évaluations pragmatiques que ci-dessus.

Il est à parier que ce dispositif favorise un meilleur apprentissage de la langue dans des situations qui prennent sens et de bien meilleurs résultats en mathématiques pour ce type de problèmes.

BIBLIOGRAPHIE

CAMENISCH A. & PETIT S. (2005) *Lire et écrire des énoncés de problèmes*, Bulletin vert APMEP, **456**, 7-20.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2005) *Lire et écrire des énoncés de problèmes*, 1-11, in Actes du XXXIe colloque COPIRELEM, IREM de Toulouse.

CAMENISCH A. & PETIT S. (2006) *Lire et écrire des énoncés de problèmes additifs (2) : la place de la langue*, 1-21, in Actes du XXXIIe colloque COPIRELEM, IREM de Strasbourg.

APPROCHE DIDACTIQUE DES DIFFERENCIATIONS DANS LES APPRENTISSAGES SCOLAIRES DES MATHEMATIQUES

Etude de cas : enseignement autour des pourcentages dans une classe de CM2

Lalina COULANGE
Maître de Conférences, IUFM DE CRETEIL
DIDIREM, Université Paris 7
lalina.coulange@gmail.com

Résumé
Cette communication s'appuie sur des recherches engagées au sein du réseau d'équipes de recherche : RESEIDA (recherches sur la socialisation, l'enseignement, les inégalités et les différenciations dans les apprentissages) piloté par E. Bautier et J-Y. Rochex. Une partie des chercheurs regroupés dans ce réseau s'investit actuellement dans la mise en œuvre d'un projet de recherche commun, autour de l'articulation CM2-Sixième. Dans ce contexte, nous avons participé au recueil de données dans une classe de CM2 en ZEP (en 2004-2005), et à l'analyse conjointe du corpus ainsi constitué. C'est une partie de ce travail que nous présentons dans ce texte. Nous développons dans un premier temps, quelques pistes théoriques issues de la didactique des mathématiques qui nous semblent pertinentes pour approcher les processus différenciateurs dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans un contexte de « classe ordinaire ». Nous croisons à l'occasion ce « point de vue didactique » avec des perspectives issues de la sociologie de l'éducation qui ont largement nourri notre réflexion.
Puis nous présentons l'analyse d'épisodes relatifs à l'enseignement des pourcentages au sein de la classe de CM2 observée, qui illustrent des éléments de notre questionnement actuel sur les processus différenciateurs dans les apprentissages scolaires des mathématiques.

Je travaille depuis quelques années au sein du réseau RESEIDA, piloté par E. Bautier et J-Y. Rochex, créé à l'initiative de l'équipe ESCOL de l'Université Paris 8. Ce réseau regroupe une trentaine de chercheurs en psychologie et sociologie de l'éducation, et en didactique des disciplines, autour d'un thème central : l'étude des processus différenciateurs dans les apprentissages scolaires. Après un travail de mise en commun des problématiques, des points de vue théoriques ou des résultats autour de cette thématique, le réseau s'investit depuis peu dans plusieurs travaux de recherche communs. Ma communication vise à présenter des éléments de la recherche sur laquelle je me suis engagée plus personnellement dans ce cadre. A travers cette présentation, j'espère pointer les questions que je me pose actuellement autour de la différenciation dans l'apprentissage des mathématiques à l'école, en tant que chercheure en didactique des mathématiques.

I – DIFFERENCIATION DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES

Le mot différenciation est assez polysémique dans les discours habituels sur l'enseignement. Pour ne pas prêter à confusion, précisons qu'il ne s'agit pas d'étudier des pratiques enseignantes de pédagogie différenciée. Notre objet de recherche est plutôt en lien avec la production d'inégalités scolaires dans un contexte de pratiques enseignantes plutôt « ordinaires ». Un des thèmes de la dernière école d'été de recherche en didactique des mathématiques avait pour intitulé : *hétérogénéités et différenciations.* En tant que responsables scientifiques de ce thème, C. Margolinas et moi-même avons été amenées à préciser ce que nous entendions par différenciation, je cite :

Les enfants viennent à l'école porteurs de leur appartenance sociale et culturelle, de leur histoire personnelle. (…) La façon dont ils investissent une position d'élève hérite de ces différences, ce qui fait de la classe un lieu hétérogène (…). La différenciation peut être considérée comme le processus qui reproduit, atténue ou accentue les différences entre les élèves dans le contexte scolaire. (Coulange et Margolinas, 2005).

Vue sous cet angle, la question de la différenciation est encore émergente dans le champ de la didactique des mathématiques. Jusqu'à ces dernières années, les recherches dans ce domaine ont essentiellement considéré l'élève *générique* en situation. Il s'agit maintenant d'interroger les différences entre élèves et la production de ces différences d'un point de vue didactique.

I – 1 Du point de vue sociologique

Encore récente en didactique des mathématiques, cette question est pourtant loin d'être nouvelle en sociologie de l'éducation. Notamment, l'équipe ESCOL s'intéresse depuis longtemps à la construction des inégalités scolaires d'un point de vue sociologique. Rapidement, les chercheurs de cette équipe ont conduit différents travaux visant à comprendre la genèse de ces inégalités dans le cadre de la classe.

Une partie de ces recherches a permis de mettre à jour des éléments du contexte du travail des enseignants et des élèves, susceptibles d'éclairer certains processus de différenciations. Suivant les travaux de cette équipe, les *doxas* actuelles[1] (discours et conceptions dominantes sur l'enseignement) favoriseraient l'émergence de formes d'enseignement multipliant les zones implicites, ou de pédagogies de plus en plus « invisibles »[2], qui contribueraient fortement aux inégalités scolaires.

Dès lors, de plus en plus, l'élève serait amené à mobiliser de lui-même de « l'au-delà » de la tâche qu'il a à accomplir, pour s'engager dans l'activité intellectuelle visée. Empruntant la notion de genres premier et second de discours à Bakhtine, Bautier (2005) considère que l'on demanderait de plus en plus à l'élève de contribuer à la *secondarisation* de son activité, c'est-à-dire à la transformation de ses expériences vécues, contextualisées, en objets de savoir porteurs de signification dans un champ

[1] qui peuvent être considérées comme « pseudo-constructivistes », comme des dérives du constructivisme ou du socio-constructivisme : survalorisant la mise en activité des élèves, la compréhension de savoirs versus l'automatisation de techniques, etc.

[2] Bernstein Basil, *Classes et pédagogies : visibles et invisibles*, OCDE, 1975.

scientifique donné (Bautier 2005). Ce qui sous-entend que sont laissées à la charge de ce même élève, de nombreuses opérations relatives à la décontextualisation-recontextualisation des connaissances en cours d'acquisition, et à la reconfiguration des savoirs en jeu.

Les exemples de « malentendus socio-cognitifs » qui peuvent en résulter, donnés par Bonnery (2004), sont très parlants[3] : l'enseignant et l'élève croient se comprendre, alors que l'élève travaille « à côté » de ce qui fait pour l'enseignant l'enjeu cognitif des tâches. Ce qui conduit à distinguer le métier d'élève (l'élève se « met en règle » vis-à-vis de l'enseignant en effectuant les tâches prescrites), du travail d'apprenant (l'élève se saisit des enjeux cognitifs des tâches).

I – 2 Du point de vue didactique

Si la question de la différenciation nous semble être encore émergente dans le champ de la didactique des mathématiques, il n'existe pas moins quelques travaux assez anciens, centrés sur l'apprentissage des élèves en difficulté, qui rejoignent parfois les travaux en sociologie de l'éducation évoqués ci-dessus (Brousseau 1986, Perrin 1993). Par exemple, les recherches de M-J. Perrin mettent en avant les processus de dévolution et d'institutionnalisation comme particulièrement délicats pour ce profil d'élèves : l'auteur souligne leurs difficultés à s'engager dans l'activité intellectuelle visée, et à décontextualiser les connaissances acquises au cours d'une situation de classe donnée.

Mais depuis peu, une problématique de la différenciation d'un point de vue didactique se dessine plus nettement. Je vais citer quelques auteurs qui s'engagent dans cette voie.

S'appuyant sur un modèle qui décompose la situation de l'élève (et de l'enseignant) en plusieurs niveaux, C. Margolinas (2004) met en avant la possibilité de bifurcations dans le cadre d'une situation ordinaire d'enseignement des mathématiques. Ces bifurcations correspondent à différents cheminements[4] possibles d'élèves au sein d'une même situation didactique, qui renvoient à différentes possibilités, voire à l'impossibilité d'apprentissages correspondant ou non à ceux visés par l'enseignant. Certains élèves investissent-ils de façon récurrente des branches marginales de situations d'enseignement, potentiellement « faibles » en apprentissages mathématiques ? En quoi, ces phénomènes, s'ils se répètent, participent-ils à la genèse d'inégalités scolaires ? Quels sont les déterminants didactiques, ou autres, susceptibles d'expliquer ces récurrences chez seulement certains élèves ?

Pour traiter de la question de la différenciation, C. Castela (2005) se réfère en partie aux travaux de C. Margolinas. Elle repère tout d'abord des phénomènes silencieux d'apprentissage à travers l'étude d'un curriculum praxique (l'ensemble des tâches mathématiques rencontrées par un élève dans son parcours scolaire), comportant des savoirs mathématiques « cachés ». Cela peut, selon elle, donner lieu à des

---

[3] Si l'on insiste sur la dimension socio-cognitive de ces malentendus, c'est parce que ce type d'incompréhension résulte de modes de pensée différents de différents groupes sociaux.

[4] Remarquons que ces bifurcations peuvent être rapprochées de ce que A. Robert (2005) sous-entend par activité *a minima* et *a maxima* d'élèves pour une tâche donnée, ou par trajectoires d'élèves au sein d'une situation de classe.

différenciations dans les apprentissages : des bifurcations pouvant s'opérer soit au sein des situations de classe, soit *à partir* de ces situations, dans des positions *autodidactes* locale et globale d'élèves. C. Castela utilise dès lors la distinction faite par De Certeau (1980) entre stratégie et tactique pour étudier ces nouvelles positions d'élèves en fonction de leurs rapports aux situations d'enseignement : un élève ayant un rapport tactique à une situation aurait une activité « orientée strictement vers la réalisation de la tâche telle qu'elle lui est imposée dans son unicité », tandis qu'un élève ayant un rapport stratégique se placerait « d'emblée dans une visée généralisatrice et anticipatrice, intégrant la situation dans une série potentielle » (Castela 2005). Bien qu'outillé différemment, ce point de vue me semble également se rapprocher de celui des sociologues de l'éducation : l'élève qui aurait un rapport stratégique à une situation d'enseignement, ne pourrait-il pas être considéré comme ayant un rapport d'emblée « second » aux objets de cette situation ?

Mon propre point de vue théorique sur la question de la différenciation scolaire s'inspire directement des travaux que je viens de citer. Suivant Margolinas (2004) et Castela (2005), je distingue également plusieurs niveaux d'activité pour l'élève, qui peuvent être schématisés de la manière suivante :

Niveaux surdidactiques	E3 E-écolier
	E2 E-autodidacte global
	E1 E-autodidacte local
Niveau didactique	**E0 E-élève**
Niveaux adidactiques	E-1 E-résolveur de problèmes
	E-2 E-agissant
	E-3 E-objectif

Figure 1 : Les niveaux de l'activité de l'élève

Commentons brièvement ce schéma.

Les niveaux « inférieurs » (adidactiques et didactique) caractérisent l'activité de l'élève, *relativement à une situation d'enseignement* donnée :
- en posture d'E-objectif, l'élève interagit de façon très élémentaire avec les éléments « matériels » de la situation. Cela correspond par exemple à sa première interprétation d'une consigne ou d'un problème.
- la position d'E-agissant qui résulte de la précédente, correspond à ses premières actions, aux procédures de base que l'élève met éventuellement en jeu pour « agir » au sein de la situation.
- en position de E-résolveur de problèmes, s'appuyant sur ses premières actions, l'élève tente de mettre en œuvre une procédure adaptée pour résoudre le problème posé. S'il y a apprentissage d'une nouvelle connaissance, c'est à ce niveau que cela se produit.
- Le niveau didactique est le niveau des interactions publiques et collectives entre l'Elève et le Professeur. Cela peut correspondre à une phase d'institutionnalisation des savoirs correspondants aux connaissances acquises au niveau précédent.

Les niveaux « supérieurs » (surdidactiques) caractérisent l'activité de l'élève, *relativement à plusieurs situations d'enseignement* :
- En position d'autodidacte local comme global, l'élève s'appuie sur différentes situations didactiques, pour effectuer différentes décontextualisations, des mises en relations de savoirs anciens et nouveaux, etc.

C'est l'échelle de temps et le niveau de décontextualisation des savoirs qui permettent de distinguer les deux positions : l'autodidacte local s'appuyant sur des situations d'enseignement relativement récentes, tandis que l'autodidacte global s'inscrit dans un projet à plus long terme (Castela 2005).
- A ces deux niveaux surdidactiques, j'ajoute celui d'*écolier*, pour décrire la posture encore plus générale de l'élève par rapport aux savoirs scolaires (en mathématiques ou ailleurs), voire à l'école. Cette position serait en quelque sorte celle longuement étudiée au travers de bilans de savoirs et d'entretiens d'élèves, dans l'ouvrage *Ecole et savoir dans les banlieues … et ailleurs* de Charlot, Bautier et Rochex (1992).

La question de la dynamique entre ces différents niveaux d'activité, est une question complexe, que je préfère laisser de côté dans ce texte. On en verra néanmoins quelques aspects au travers de l'étude de cas que je vais développer ci-après.

II – ETUDE DE CAS : ENSEIGNEMENT DES POURCENTAGES EN CM2

II – 1 Contexte et éléments méthodologiques de la recherche

Les chercheurs du réseau RESEIDA s'engagent depuis deux ans, dans des recherches communes autour de la question de la différenciation, dans différents lieux (régions parisienne, clermontoise, marseillaise, lyonnaise, etc.), à différents niveaux (CM2-Sixième, Grande Section-CP).

Je participe activement à la recherche engagée au niveau du CM2 dans la région parisienne. Deux classes de CM2 de deux écoles différentes classées en REP et accueillant un public assez hétérogène (appartenant à des catégories socio-professionnelles variées) ont été observées régulièrement tout au long de l'année scolaire 2004-2005. Au sein de chacune de ces classes, deux cohortes d'élèves ont été suivies : des enfants aux profils socio-cognitifs variés (en échec global ou électif, ou à l'opposé, faisant montre de connaissances avancées, etc.) sélectionnés sur la base conjointe d'évaluations (inspirées des évaluations nationales d'entrée en sixième) en français et en mathématiques en début d'année, et de nos premières observations au sein des classes.

Nous avons décidé de suivre ces élèves au fil de l'enseignement de plusieurs disciplines dont le français et les mathématiques. A cet effet, nous avons choisi des sujets et des thèmes d'étude qui nous paraissaient sensibles dans l'articulation CM2-Sixième ; par exemple en mathématiques : la résolution de problèmes du champ multiplicatif et la géométrie plane (figures géométriques, perpendicularité et parallélisme).

Les données recueillies au sein de ces deux classes de CM2 et relatives aux deux cohortes d'élèves sont de nature diverse. Nous disposons à la fois de données sur les pratiques des enseignantes[5] titulaires en charge des classes (au travers de brefs entretiens, d'informations sur leurs ressources documentaires, etc.), de films numériques d'un nombre important de séances (autour des thèmes choisis dans les différentes disciplines), de travaux d'élèves (cahiers d'élèves de la cohorte, productions de tous les élèves de la classe pour certaines activités), et d'entretiens d'enfants.

II – 2 A propos de la classe de CM2

Nous évoquerons l'analyse de données ne concernant qu'une des deux classes de CM2 de la région parisienne : la classe que j'ai moi-même observée à plusieurs reprises, et sous la responsabilité d'une enseignante que nous nommerons Emilie par la suite.

Quelques caractéristiques des pratiques de l'enseignante

Cette enseignante fait montre d'une bienveillance apparente envers les élèves de sa classe : elle déclare à plusieurs reprises vouloir venir en aide aux élèves en difficulté, renverser la hiérarchie visible entre les enfants en début d'année, mettre l'accent sur le « vivre ensemble », etc. Elle survalorise l'activité de *tous* les élèves. Ses pratiques présentent par ailleurs des caractéristiques « *pseudo-constructivistes* ». Elle prête une importance particulière aux activités visant à introduire de nouvelles notions mathématiques (présentant souvent un caractère concret ou pseudo-concret[6]), pour « donner du sens » aux connaissances visées. A l'inverse, la place qu'elle accorde aux moments d'institutionnalisation des savoirs reste assez restreinte (ces moments s'articulant d'ailleurs souvent difficilement aux apprentissages censés les précéder), et elle dévalorise les phases de réinvestissement ou de travail un peu systématique des techniques, etc. Je qualifierais également sa pédagogie *d'innovante*. Cela est révélé par le choix diversifié des supports qu'elle emploie : contenus récents issus de stages de formations continues, recherches personnelles sur internet ou dans différents ouvrages, etc.

Quelques caractéristiques de postures d'écoliers

Je vais évoquer quelques élèves appartenant à la cohorte[7], qui ont fait l'objet d'un suivi tout au long de l'année. Afin de les positionner dans les analyses qui vont suivre, il est important de donner quelques caractéristiques de leurs postures d'écoliers[8] :
- Milan est un des deux meilleurs élèves de la classe, avec un bon niveau dans toutes les disciplines. C'est un élève à l'attitude sérieuse, mais dont la participation dans la classe a évolué tout au long de l'année, en devenant moins enthousiaste au fil du temps.

---

[5] Enseignantes qui ont bien sûr accepté de contribuer à cette recherche en accueillant des observateurs tout au long de l'année dans leur classe, ce dont nous les remercions vivement.

[6] qui se résume à l'évocation d'un contexte réel, comme dans l'exemple qui va suivre.

[7] Ces élèves ont tous reçu un avis positif concernant leur passage en sixième en fin d'année.

[8] Les prénoms des élèves ont été modifiés avec le souci de conserver les indications culturelles et sociales véhiculées.

- Jérémie est un élève de niveau moyen en français et en mathématiques. C'est un élève à l'attitude sérieuse mais assez effacé.
- Nabil est un élève au niveau inégal, que ce soit en mathématiques ou en français. Son attitude est souvent perturbatrice, mais aussi parfois « surinvestie », c'est-à-dire avec une participation quasi-excessive pendant certaines séances.
- Soumaya est une élève en difficulté en mathématiques. Pendant les séances de mathématiques, son attitude a visiblement évolué tout au long de l'année : passant d'anxieuse, presque « cachée » (elle compte sur ses doigts sous la table ou pleure quand elle est interrogée) à en demande perpétuelle d'aides de la part de l'enseignante.
- Judith est une élève en difficulté en français et en mathématiques, à l'attitude passive et effacée.

A propos des données filmiques : « les élections et les pourcentages »

Les séances qui font l'objet de mes analyses se sont déroulées en fin d'année scolaire : il s'agit de deux séances d'environ une heure, filmées ; l'une d'elles date du 31 mai 2005, la deuxième du 2 juin 2005. Ces deux séances correspondent à une activité qui vise à introduire les pourcentages. Cette activité est prévue par l'enseignante à la suite des élections nationales sur le référendum relatif à la constitution européenne : « suite aux résultats des élections ce week-end, je me suis dit que c'était l'occasion de voir les pourcentages ».

II – 3 Analyse de la première séance

II-3.1 Analyse détaillée du déroulement de la séance

Le document qui a servi de support à la première séance est le suivant.

	Nombre	% inscrits
Inscrits	9 624	100,00%
Abstention	3 153	32,76%
Votants	6 471	67,24%
	Nombre	**% votants**
Blancs ou nuls	130	2,01%
Exprimés	6 341	97,99%

Approuvez-vous le projet de loi qui autorise la ratification du traité établissant une Constitution pour l'Europe ?

	Voix	% exprimés
OUI	2 819	44,46%
NON	3 522	55,54%

- Comment trouve-t-on le nombre de VOTANTS ?
- Que veut dire "EXPRIMÉS" ?
- Comment trouve-t-on le nombre d'EXPRIMES ?
- Comment fait-on pour trouver les pourcentages ?

Figure 2 : *document élève - première séance « pourcentages et élections »*

Dans ce document, apparaissent : un tableau de résultats des élections au sein de la commune de l'école, une série de questions auxquelles les élèves auront à répondre pendant la séance en s'appuyant sur ce tableau.

L'enseignante distribue le document à chacun de ses élèves qui sont répartis dans différents groupes de 4 à 5 élèves. Dans un premier temps, lors d'une phase collective de presque 10 minutes, elle demande aux élèves de prendre connaissance du document, de lire à voix haute les questions posées et de le commenter. C'est l'occasion pour Emilie de revenir sur du vocabulaire spécifique des élections : dépouillement, votes exprimés, blancs, etc. susceptible d'entraver la compréhension des élèves dans la lecture du tableau. De fait, ce début de séance semble plutôt relatif à des contenus d'éducation civique qu'à des contenus mathématiques. Au cours de cette première phase, néanmoins, elle interroge la classe sur « ce que l'on voit dans la colonne de droite dans le tableau ». « Des *pourcentages* », « des pour cent », « sur cent » répondent les élèves. Emilie reprend l'intervention d'un élève pour préciser : « c'est sur 100 personnes ; s'il y a 2 pour cent, ça veut dire 2 personnes sur 100 ». Cependant, au travers de cet échange, peu d'élèves semblent saisir la signification d'un pourcentage. A la suite de son intervention, un élève intervient spontanément pour faire le parallèle avec la densité de population, en parlant du nombre d'habitants par km^2 : « c'est pareil que 3 habitants par km^2 », affirmation réfutée par Emilie, sans explication particulière.

Après une phase de travail autour des deux premières questions au sein des groupes et un moment de synthèse collective (d'une durée totale de 22 minutes), à sa demande, les élèves s'engagent dans la recherche d'une réponse à la question écrite : *Comment fait-on pour trouver les pourcentages ?* Emilie reformule cette question à l'oral, en la contextualisant, et en explicitant qu'il s'agit de trouver une méthode de calcul : *« Vous allez essayer de voir comment on a fait pour calculer les pourcentages d'abstention et de votants ».*

Cela donne lieu à une première bifurcation massive de la situation par rapport aux prévisions de l'enseignante et à son projet d'enseignement. La quasi-totalité des élèves de la classe constate que la somme des deux pourcentages évoqués est égale à 100% et propose de retrancher l'un ou l'autre à 100%. Plusieurs éléments expliquent cette bifurcation. D'une part, la tâche mathématique prévue par l'enseignante (« découvrir » la formule du pourcentage à partir du tableau de la figure 2) est très difficile à accomplir, à moins de connaître déjà la formule en question, et de savoir l'appliquer dans un contexte non trivial (identifier les différentes variables en jeu pour instancier la formule, opérer sur des nombres relativement grands) : rien n'indique aux élèves à partir de quelles données numériques il s'agit de calculer les pourcentages évoqués[9]. D'autre part, deux des questions précédentes (*Comment trouve-t-on le nombre d'exprimés ?* et *Comment trouve-t-on le nombre de votants ?*) les ont conduits à effectuer des différences au sein d'une seule colonne. Conformément à un contrat didactique local, croyant répondre aux attentes de l'enseignante, les élèves ont pensé qu'il s'agissait de faire de même pour calculer les pourcentages.

[9] Un tableau incomplet avec les cases correspondant aux pourcentages à compléter, après avoir introduit la formule, correspondrait à une tâche plus classique. C'est d'ailleurs ce que cette maîtresse va envisager pour la suite de l'activité. L'enseignante a-t-elle cru qu'un tableau « complété » faciliterait la tâche aux élèves, et pouvait du coup, être utilisé pour introduire la méthode de calcul d'un pourcentage ?

Au bout de 9 minutes, voyant que cela ne se déroule pas comme elle l'avait prévu, Après avoir interpellé Nabil (« tu poses ton stylo et tu écoutes »), elle s'adresse à toute la classe au tableau, pour délimiter la tâche initiale :

Ne travaillez par sur cette colonne ! (dit-elle en pointant la colonne % inscrits de la figure 2 sur l'affiche au tableau) Cette colonne, il faut trouver… donc c'est ces nombres-là qu'on a (dit-elle en pointant la colonne « Nombre » de la figure 2 sur l'affiche au tableau) il faut qu'on trouve, on ne les avait pas… donc la question est comment je fais pour trouver ce nombre là et ce nombre là qui est dans la colonne des pourcentages. Et ne dites pas c'est difficile, vous avez une calculatrice, essayez de faire des calculs. Allez-y !

Les élèves en position d'acteurs, font dès lors, des tentatives de calculs tous azimuts avec les nombres du tableau (en respectant pour la plupart la consigne « utiliser les données de la colonne de gauche »). Mais là encore, la tâche mathématique qu'elle donne à accomplir paraît impossible. La combinatoire des opérations possibles sur les données numériques offre un grand nombre de possibilités, que les élèves explorent de façon aléatoire, sans pouvoir jamais atteindre le résultat recherché (et pour cause !).

Devant le caractère infructueux de leurs recherches, des élèves commencent à se décourager et à se dissiper : notamment, Nabil se fait interpeller très sèchement à plusieurs reprises. Au bout de 12 minutes, Emilie intervient à nouveau publiquement :

C'est peut-être un peu difficile, mais vous aviez la calculatrice, vous auriez pu vous amuser à chercher à faire des opérations, pour trouver le nombre. Il y avait pas 36 opérations à faire, pour trouver le 32,76. Donc avec ces deux nombres-là, donc 9624 inscrits et le nombre 3153 d'abstentions (elle inscrit les deux nombres au tableau). Il y a une opération à faire… une et une deuxième, mais vous allez voir apparaître ce nombre-là sur la calculatrice, enfin ces chiffres là dans l'ordre… la virgule ne sera peut-être pas là… mais (… elle interpelle Nabil qui ne suit pas…) Seulement avec ces deux nombres-là, essayez de voir apparaître ces chiffres 3, 2, 7, 6, avec la calculatrice, alors allez-y, essayez de manipuler[10].

Cette fois, l'enseignante transforme nettement la tâche initiale, en précisant les données numériques du tableau sur lesquelles opérer pour trouver comment calculer le pourcentage d'abstentions. Elle demande aux élèves de trouver « quelle opération » permet de trouver le résultat « avec ces deux nombres-là » : 3153 et 9624, qu'elle recopie au tableau. Affirmant tout d'abord « il y a une seule opération à faire », elle se reprend immédiatement, en se rendant visiblement compte de son erreur : « une opération à faire, une et une deuxième », « Seulement avec ces deux nombres-là, essayez de voir apparaître ces chiffres 3, 2, 7, 6, avec la calculatrice ». Cette intervention de l'enseignante représente une réduction importante de l'incertitude autour de la tâche à accomplir. Pourtant, les élèves ne trouvent pas immédiatement. En effet, le calcul attendu par Emilie, la division de 3153 par 9624, ne leur paraît certainement pas envisageable : la division avec un dividende plus petit que le diviseur n'ayant sans doute pas été rencontrée auparavant.

---

[10] l'utilisation du verbe « manipuler » est assez révélatrice ici : cela illustre à quel point une doxa correspondant à une dérive « pseudo-constructiviste » imprègne les pratiques et le discours de cette enseignante.

Deux minutes plus tard, l'enseignante déconcertée étaye encore davantage, allant quasiment jusqu'à l'effet Topaze :[11] « on a fait le moins, on a fait le plus… qu'est ce qui reste ? (plusieurs élèves : fois, divisé…) multiplier, diviser, alors, allez-y ! ».

Au bout de 5 minutes, Jérémie finit par trouver l'opération *magique* : « j'ai fait la division inverse », dit-il avec enthousiasme à la maîtresse à qui il montre le résultat sur sa calculatrice. Après avoir vérifié son calcul, Emilie l'envoie au tableau écrire l'opération « 3153 : 9624 » qu'elle commente : « ah c'est plus petit, c'est ça qui vous gêne ! » et le résultat « 0,3276 ».

Elle reprend la main pour donner du sens au calcul de Jérémie par rapport au contexte :

Essayez (les élèves essaient sur la calculatrice : « ah ouais… »), regardez ce que je fais comme opération. Ça veut dire que je fais 3153, j'ai 3153 personnes qui se sont abstenues sur… quand on dit « sur », c'est une division, je divise…3153, je vais le diviser par le nombre de gens inscrits. Ça va me donner « 0,3276 », et après, je le multiplie par quoi pour avoir le pourcentage ? (les élèves « par 100 ») Par 100, ça (en pointant 0,3276), c'est pour une seule personne. Si vous voulez, j'ai divisé le nombre d'abstentions par le nombre de votants, combien de pour cent… et je multiplie par 100 pour voir sur 100 et ça me donne 32,76.

L'enseignante écrit au tableau :

Il y a 3153 abstentions sur 9624 inscrits. Je fais l'opération (3153 : 9624) $\times$ 100
$\frac{3153}{9624} \times 100 = 32{,}76\%$

Elle demande ensuite aux élèves de trouver, sur la base de cet exemple, comment calculer le pourcentage de votants : « qui me dit comment je fais pour trouver 62, 24… ». Soumaya essaie d'intervenir à plusieurs reprises, mais c'est finalement sa voisine qui est interrogée :

Elève : En fait, on avait 6… le nombre de votants et on l'a divisé par le nombre d'inscrits 9624. Emilie : Et ça donne quoi ? / Elève : 67,24 / Emilie : ah… non, 0,6724 et après qu'est ce qu'on fait ? Je multiplie par 100…

La séance se conclut ici : les élèves recopient ce qui est indiqué au tableau.

II-3.2 Synthèse du point de vue des élèves

L'ensemble de cette séance de « pseudo-découverte » comporte *a priori* un faible potentiel adidactique relativement aux savoirs visés autour des pourcentages.

Les redéfinitions successives de la tâche initiale à accomplir (découvrir la méthode de calcul du pourcentage), la réduction progressive de l'incertitude pour les élèves, au travers des différentes interventions de l'enseignante, appauvrissent le milieu adidactique de la situation, à un point tel que l'on peut supposer la quasi-nullité d'apprentissages mathématiques autour des pourcentages, avant l'épisode final.

[11] On entend par *effet Topaze*, le fait que l'enseignante réduise l'incertitude autour de la tâche à accomplir, à tel point que celle-ci n'ait finalement plus aucune signification par rapport à la connaissance visée (Brousseau 1986).

Et pourtant, de nombreux élèves semblent se prêter au drôle de jeu que leur suggère la maîtresse. On voit une majorité d'élèves, notamment parmi les plus en difficulté ou de niveau moyen, montrer de l'enthousiasme dans la recherche aléatoire de « l'opération magique[12] : Jérémie est très fier d'avoir trouvé le calcul attendu, Soumaya participe activement à plusieurs reprises… A l'opposé, Nabil se désintéresse rapidement de la situation et se fait tancer à plusieurs reprises par la maîtresse. Plus étonnant, Milan semble lui aussi assez peu attentif, ce qui lui vaut d'ailleurs quelques remontrances de la part de la maîtresse (« tu n'essaies pas… », « écoute… », etc.).

Les apprentissages au sortir de cette première séance sur les pourcentages, sont certes potentiellement faibles : c'est sans doute d'ailleurs dans les 10 dernières minutes de la séance, que ceux-ci sont susceptibles de se produire ! Mais ces apprentissages sont également sans doute très différents d'un élève à l'autre. En situation didactique, en prenant appui sur la synthèse orale d'Emilie, sur les calculs écrits au tableau et sur l'exploitation de la formule dans un deuxième exemple, les élèves ont pu retenir des éléments très divers, relatifs au calcul des pourcentages : « il faut diviser », « il faut diviser le plus petit par le plus grand », « il faut diviser puis multiplier par 100 », « il faut diviser le plus petit par le plus grand, puis multiplier par 100 », etc.
Il faut attendre la deuxième séance pour en savoir plus quant à la nature des connaissances éventuellement acquises par les élèves.

II – 4 Analyse d'épisodes de la deuxième séance

Le document qui a servi de support à la deuxième séance est le suivant :

	Nombre	% inscrits
Inscrits	684 036	100,00%
Abstention	215 638	31,52%
Votants	468 398	68,48%
	Nombre	% votants
Blancs ou nuls	8 597	1,84%
Exprimés	459 801	98,16%
Approuvez-vous le projet de loi qui autorise la ratification du traité établissant une Constitution pour l'Europe ?		
	Voix	% exprimés
OUI	229 880	49,99556
NON	229 921	50,004 458

• Calcule :
- le nombre de votants
- le nombre d'exprimés
- les pourcentages du oui et du non

Figure 3 : document élève – deuxième séance « pourcentages et élections »

[12] cette opération n'ayant a priori aucune signification particulière pour les élèves : elle semble en quelque sorte « tirée du chapeau ». Ce qui m'a fait surnommer cette séance « mathémagie »…

Ce deuxième document correspond à un tableau à compléter, organisé de la même façon que celui de la séance précédente, comportant les résultats des élections non plus de la commune, mais du département.

Si l'on considère les connaissances à mobiliser autour des pourcentages pour compléter les cases correspondantes (*pourcentages du oui,* et *du non*) dans ce tableau, le saut de complexité entre la première situation et la deuxième situation paraît conséquent. Les nombres mis en jeu sont nettement plus grands : on passe des milliers aux centaines de mille. Plus encore, les variables intervenant dans l'application de la formule ne sont pas les mêmes : il faut donc les identifier en identifiant la partie et le tout à considérer (le nombre de *oui* et le nombre d'*exprimés*[13]) en décontextualisant fortement les deux exemples précédents. Par ailleurs, ces calculs de pourcentages ne sont pas sans soulever des problèmes d'approximation (éludés lors de la première séance) : les divisions indiquées ne tombant pas juste.

Nous n'analysons ici que quelques épisodes révélateurs de processus de différenciation à l'œuvre, pour quelques-uns des élèves.

Alors que tous les autres élèves se sont répartis en binômes (à la demande de la maîtresse : « vous pouvez vous mettre par deux, avec qui vous voulez »), Milan travaille seul et complète l'ensemble du tableau (y compris les pourcentages du oui ou du non), en 5 minutes à peine avec l'aide de sa calculatrice. Quand je lui demande, à chaud, avant la récréation, s'il a travaillé à la maison entre la première et la deuxième séance, il m'affirme, je cite : « *avoir relu l'exercice parce qu'il n'était pas sûr d'avoir tout bien compris en classe, comment on calcule les pourcentages*[14] *».* Si l'on en croit ses propos, on peut faire l'hypothèse que cet élève développe un fort rapport stratégique aux tâches données à accomplir en classe : adoptant de lui-même[15] une position d'autodidacte local par rapport à la situation didactique correspondant à la séance précédente, il aurait opéré les décontextualisations nécessaires pour calculer quasi-immédiatement les pourcentages demandés.

S'ils ont rapidement réussi à répondre aux deux premières questions concernant les nombres de votants et d'exprimés, la plupart des élèves dont Jérémie et Nabil, ont eu plus de difficultés à calculer les « pourcentages du oui et du non ». Ils se sont engouffrés, dans un premier temps, dans des stratégies erronées, inspirées de la première séance (par exemple diviser le nombre de oui par le nombre d'inscrits). Suite à de nombreuses aides individuelles de la part de la maîtresse qui circule dans les rangs, ils finissent par trouver la bonne méthode de calcul.

Soumaya et Judith, réunies dans un binôme, sont en difficulté dès la première question : « calcule le nombre de votants ». Au bout de 5 minutes, Soumaya interpelle Emilie :

[13] qui n'apparaît pas dans la même zone du tableau que les nombres et les pourcentages des oui et des non. Un indice textuel (l'intitulé « % inscrits » de la colonne de droite) peut cependant aider les élèves à comprendre que c'est bien le nombre d'inscrits, qui fait d'ailleurs l'objet de la question précédente qui est à prendre en considération.

[14] A la question : « tout seul ou avec tes parents ? », il répond aussitôt : « tout seul ».

[15] sans injonction de la part de la maîtresse dans ce sens : à ma connaissance, Emilie n'a pas demandé à ses élèves de revoir la fiche sur les pourcentages pour la deuxième séance.

« Maîtresse, on n'a rien compris. ». A la grande surprise de l'enseignante, la première opération que l'élève propose de faire pour trouver le nombre de votants est une division ! Qui plus est, Judith, interrogée par la maîtresse, approuve ce choix. Suivant un effet de contrat didactique, les deux élèves cherchent visiblement à réinvestir l'opération « magique » de la séance précédente. L'enseignante, déconcertée, les désavoue : « il ne faut pas faire n'importe quelle opération ! Il faut réfléchir un peu… ». A travers l'évocation d'une situation concrète de vote au sein de la classe (« rappelez-vous, quand on a fait des élections dans la classe…), elle arrive à leur faire trouver la solution.
Un peu plus tard, pour le calcul des pourcentages, Soumaya arrivera à faire le calcul attendu, mais après une prise d'indices importante auprès du binôme voisin et une demande de confirmation de ces informations auprès de la maîtresse (« il faut diviser par le nombre d'exprimés ? »). En position d'actrice dans la situation, sa posture contraste néanmoins avec celle de Judith qui se contente visiblement de recopier sur sa feuille les résultats des calculs de Soumaya sur la calculatrice.

Les cheminements des élèves liés aux apprentissages mathématiques semblent encore une fois pouvoir différer fortement d'un élève à l'autre au travers de cette séance : l'activité de Judith et de Soumaya semble contraster fortement avec celle de Milan. En ce qui concerne les autres élèves, nous n'avons pas de données filmiques suffisamment « focalisées », qui nous permettraient d'en dire plus. Cependant, au vu de quelques interactions vidéoscopées, l'hétérogénéité initiale des élèves est susceptible d'être accentuée par la nature diverse des contenus des aides apportées par l'enseignante, et leur fréquence variée d'un binôme d'élèves à un autre.

CONCLUSIONS

Précisons tout d'abord que les séances, qui ont fait l'objet de cette présentation, sont assez révélatrices des pratiques de cette enseignante (le lecteur se reportera au début du II), mais peut-être également d'un nombre non négligeable de professeurs des écoles : d'autres études de cas (présentées dans le cadre du réseau RESEIDA) présentent des points communs. Notamment, nombreux sont les enseignants qui élaborent et mettent en œuvre des situations de « pseudo-découverte », qui s'étirent dans le temps, et qui aboutissent rarement à autre chose qu'à la « vérité révélée » plus ou moins directement par l'enseignant.

Différents éléments de nos analyses permettent pourtant de pointer le potentiel a-didactique faible associé à ce type de situations d'enseignement : les apprentissages mathématiques visés paraissent difficilement pouvoir émerger de la plupart des interactions des élèves avec le milieu de ces situations.

Mais de fait, ces situations d'enseignement se traduisent plutôt par une différenciation forte des apprentissages des élèves. Si l'on considère les extrêmes de ce processus de différenciation, certains élèves développant un rapport stratégique aux situations scolaires, arrivent d'eux-mêmes, à partir d'un nombre restreint de tâches, à opérer des opérations de décontextualisation, recontextualisation des savoirs en jeu. Tandis que d'autres restent dans un réinvestissement immédiat de ce qui a été fait ou vu auparavant, sans même parfois se soucier du caractère inopportun de leurs actions dans un nouveau contexte : pour ces élèves, les malentendus à l'œuvre sont nombreux, parfois révélés, mais le plus souvent masqués par les interactions avec l'enseignant quand celles-ci permettent finalement aux élèves d'accomplir les tâches prescrites.

Cependant, il ne faut pas entrer trop rapidement dans une lecture trop pessimiste ou fataliste de nos analyses.

Notamment, pour certains des élèves pour qui la différenciation se fait de façon récurrente « vers le bas », il faudrait peut-être reconsidérer une partie des effets potentiels de telles situations d'enseignement sur un temps plus conséquent. Les situations de « pseudo-découverte », du type de la première séance autour des pourcentages et des élections, ne permettent-elles pas au final d'engager massivement les élèves dans la relation didactique ? Et en cela de maintenir un certain équilibre du système, qui suivant Bonnéry (2004) permet à certains élèves en difficulté de réinvestir le *métier d'élève* en mathématiques ? Et cela ne peut-il pas avoir un effet sur leur *travail d'apprenant*, dans d'autres situations d'enseignement, à plus long terme ?

BIBLIOGRAPHIE

BAUTIER E., ROCHEX J-Y. (2004), Activité conjointe ne signifie pas significations partagées, in C. Moro, et R. Rickenmann, *Situations éducatives et significations*, Raisons éducatives, De Boeck, Bruxelles.

BAUTIER E. (2005), Formes et activités scolaires, secondarisation, reconfiguration, in N. Ramognino, P. Vergès (eds), *Le français, hier et aujourd'hui. Politiques de la langue et apprentissages scolaires.* Etudes offertes à V. Isambert-Jamati, Publications de l'Université de Provence.

CHARLOT B., BAUTIER E. et ROCHEX J-Y., *Ecole et savoir dans les banlieues et ailleurs*, Paris, Armand Colin, 1992.

BONNERY S. (2004), Construction des inégalités scolaires dans la confrontation des élèves à l'École, in Perrin M-J. et Matheron Y. (éds.), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques,* IREM de Paris et ARDM, 261-294.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7, n° 2, pp. 33–116, Editions La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. et WARFIELD V. (2002), *Le cas de Gael*, Les cahiers du laboratoire Leibniz n°55.

CASTELA C. (2005), Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes, *Actes de la 13ème école d'été de recherche en didactique des mathématiques*.

COULANGE L., MARGOLINAS C. (2005), *Introduction au thème scientifique hétérogénéités et différenciations de la 13ème école d'été de didactique des mathématiques.*

DE CERTEAU M. (1980), *L'invention du quotidien. 1.Arts de faire*. Paris : Gallimard, Folio Essais n° 146, 1990 ; rééd. 2002.

MARGOLINAS (2004), *Points de vue de l'élève et du professeur, essai de développement de la théorie des situations didactiques,* Note de synthèse, Habilitation à diriger des recherches en sciences de l'éducation, Université de Provence.

PERRIN M-J. (1993), Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des « classes faibles », *RDM* vol.13 n°1-2, 5-118, La Pensée Sauvage.

HISTOIRE

L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Troisième République aux années 1960 : enjeux sociaux et culturels d'une scolarisation « de masse »

Renaud d'Enfert[1]

Depuis plusieurs années, des voix s'élèvent pour déplorer les transformations disciplinaires qu'a connues l'école ces quatre dernières décennies et pour proposer un retour aux principes qui auraient guidé l'école de la Troisième République. La tribune libre publiée récemment par Laurent Lafforgue dans ces colonnes en est un exemple : les responsables de l'Éducation nationale et leur bras armé que sont, selon lui, les IUFM seraient en effet les principaux fossoyeurs de la « grande culture léguée par les siècles[2] » que le modèle lycéen des humanités était chargé de transmettre. Les modalités actuelles de l'enseignement des « savoirs fondamentaux » – les mathématiques sont notamment concernées – sont également questionnées. Dans un texte publié en 2004 sous le titre « Les savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique : comment les réenseigner », Laurent Lafforgue et plusieurs de ses collègues scientifiques contestent la validité des programmes actuels sur la base de témoignages recueillis dans leur entourage, de constats effectués auprès de quelques futurs ou jeunes bacheliers, ou encore de livres s'alarmant d'une hypothétique « faillite programmée de l'école française[3] ». Ils suggèrent en conséquence de revenir aux pratiques d'enseignement en vigueur (ou supposées comme telles) avant les années 1960 afin de « mettre les élèves en situation d'appréhender des notions fondamentales à partir de la culture et du savoir tels qu'ils ont été patiemment construits et reconstruits au cours des siècles[4] ».

Afin de prendre toute la mesure d'une telle proposition, l'analyse historique s'impose. Car si l'école du XXI^{e} siècle a l'ambition d'offrir une « culture commune »

---

[1] IUFM de l'académie de Versailles et Groupe d'histoire et de diffusion des sciences d'Orsay – Université Paris XI.

[2] L. Lafforgue, « De l'école et de ce qui fonde la valeur de la culture et du savoir », *Gazette des mathématiciens*, n° 105, juillet 2005, p. 77.

[3] C'est du moins ce qu'annonce le service de presse de l'éditeur de Marc Le Bris, *Et vos enfants ne sauront pas lire... ni compter*, Paris, Stock, 2004 (`www.editions-stock.fr/media/docs/avantprog03-042004.pdf`), dont le livre constitue une référence pour les auteurs de ce texte. Venant de scientifiques éminents, l'unilatéralisme des sources comme l'absence d'explicitation des modalités de la collecte des témoignages apparaissent d'ailleurs surprenants.

[4] R. Balian et al., *Les Savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique : comment les réenseigner*, Les Cahiers du débat, Fondation pour l'innovation politique, novembre 2004, p. 22.

à tous ceux qui la fréquentent, tel n'était pas le cas avant les années 1960 où les cultures scolaires étaient – et depuis longtemps – largement déterminées par l'origine et le supposé destin social des élèves. Laissant à d'autres le soin d'évoquer le cas de la formation littéraire[5], je voudrais, pour ma part, esquisser les principaux caractères de l'acculturation mathématique effectuée dans le cadre de l'école primaire – l'école du peuple – depuis l'avènement de la Troisième République jusqu'au début des années 1960[6]. Compte tenu des critiques adressées aux programmes actuels de mathématiques de l'école primaire, je voudrais également tenter d'expliquer les raisons pour lesquelles l'enseignement mathématique a connu, à ce niveau, une profonde mutation dans le dernier tiers du XX^e siècle : les programmes scolaires et les contenus enseignés à l'école comme les méthodes pédagogiques sont en effet largement dépendants de son organisation interne et des fonctions qui lui sont assignées.

Primaire et secondaire : les deux écoles

Contrairement à la situation qui prévaut aujourd'hui, l'école de la Troisième République est une école duale : deux systèmes d'enseignement coexistent, qui sont clairement différenciés par leurs publics, par la longueur des études proposées, par leurs finalités. D'un côté, l'enseignement primaire constitue « l'école du peuple » : gratuit depuis 1881, il scolarise les enfants jusqu'à l'âge de 12 ou 13 ans dans des écoles primaires élémentaires, mais permet également des scolarités prolongées dans des cours complémentaires ou dans des écoles primaires supérieures, voire dans les écoles normales d'instituteurs ou d'institutrices[7]. D'un autre côté, l'enseignement secondaire forme « l'école des notables » : payant jusqu'à la fin des années 1920, il est dispensé dans des lycées et des collèges communaux qui, outre les classes allant de la 6^e aux sections terminales, comportent des classes primaires (avant la 8^e) et élémentaires (8^e et 7^e) qui favorisent l'autorecrutement. Supprimées par une ordonnance de 1945, ces dernières subsisteront jusqu'aux années 1960 dans certains lycées. Enfin, c'est également au cours de la décennie 1920 que l'enseignement secondaire féminin, de création plus récente (1880), est identifié à son homologue masculin.

Outre la question de la gratuité, plusieurs caractéristiques distinguent ces deux « ordres » d'enseignement. La dissymétrie des effectifs doit tout d'abord être soulignée : vers 1900, le nombre d'élèves, garçons et filles, scolarisés dans les lycées et collèges publics ne dépasse guère 100 000, quand les écoles primaires

[5] Voir notamment M. Jey, *La Littérature au lycée : invention d'une discipline (1880-1925)*, Paris, Klincksieck, 1998 ; P. Boutan, *La Langue des Messieurs. Histoire de l'enseignement du français à l'école primaire*, Paris, Colin, 1996 ; A. Chervel, *La Culture scolaire. Une approche historique*, Paris, Belin, 1998.

[6] R. d'Enfert, *L'Enseignement mathématique à l'école primaire, de la Révolution à nos jours. Textes officiels. Tome 1 : 1791-1914*, Paris, INRP, 2003 (avec la collaboration d'H. Gispert et de J. Hélayel). Afin de ne pas alourdir les notes, nous renvoyons à cet ouvrage où figurent les textes officiels antérieurs à 1914 ici mentionnés.

[7] Au risque de la simplification, nous n'évoquerons pas les établissements d'enseignement technique, et notamment les école pratiques de commerce et d'industrie qui, faisant pendant aux écoles primaires supérieures, se développent sous la Troisième République.

élémentaires et leurs filières de scolarisation prolongée en accueillent plus de 4 millions. Bien que l'établissement de la gratuité du secondaire, mais aussi la conjoncture démographique, permette une croissance massive de ses effectifs à partir des années 1930, la très grande majorité des enfants ne fréquente pas d'autre école que l'école primaire à la veille de la Deuxième Guerre mondiale. Les classes primaires et élémentaires des lycées et collèges, qui sont restées payantes, ne scolarisent que quelques dizaines de milliers d'élèves[8], et seulement 6,3% d'une génération de garçons entre en classe de 6^{e} vers 1933 quand le taux d'accès à l'enseignement primaire supérieur masculin (écoles primaires supérieures et cours complémentaires) est de 10,4%[9]. Ensuite, les études dispensées dans l'un et l'autre ordre d'enseignement sont d'inégale longueur : alors que l'enseignement primaire dispense des études courtes débouchant sur la vie active, l'enseignement secondaire engage ses élèves dans un cursus long (7 ans à partir de la 6^{e}) dont l'enseignement supérieur constitue l'issue naturelle. En 1902, une importante réforme organisera bien la scolarité secondaire en deux cycles, de façon à ménager une porte de sortie à l'issue de la classe de 3^{e}, mais cette mesure sera abandonnée au milieu des années 1920. La sanction des études elles-mêmes diffère entre les deux ordres d'enseignement. Le baccalauréat, acquis par environ 5% d'une génération à la veille de la Deuxième Guerre mondiale et qui permet d'accéder à l'enseignement supérieur, se prépare au lycée ou au collège. De leur côté, les établissements primaires conduisent leurs (meilleurs) élèves au certificat d'études primaires, lequel n'est même pas obtenu par la moitié d'une classe d'âge[10], voire au brevet élémentaire ou d'études primaires supérieures. Certes, le système des bourses constitue une passerelle vers le secondaire. Mais ces dernières sont distribuées avec parcimonie avant le milieu des années 1920, et l'instauration en 1926 d'un concours commun des bourses d'enseignement secondaire et primaire supérieur n'empêche pas la grande majorité des reçus (environ 80%) d'opter pour l'enseignement primaire supérieur. Même après l'établissement de la gratuité du secondaire, les parents des milieux populaires hésitent encore à diriger leurs enfants vers celui-ci car ils en saisissent mal les finalités[11].

Car s'ils suivent des logiques de fonctionnement différenciées, les deux réseaux d'enseignement s'opposent également dans leurs finalités. On l'a dit, l'école primaire débouche *a priori* sur la vie active tandis que l'enseignement secondaire vise le baccalauréat puis l'enseignement supérieur. Aussi l'enseignement primaire est-il essentiellement pratique, voire « utilitaire », quand le secondaire se veut théorique et « désintéressé » : « Il ne lui appartient pas de préparer les élèves qui s'adressent à lui à une profession déterminée [...] Il fait plus et mieux : sa tâche est, sans les

[8] A. Prost, *Histoire de l'enseignement en France, 1800-1967*, Paris, A. Colin, 1968, p. 294, 327, 346 ; J.-P. Briand et *al.*, *L'Enseignement primaire et ses extensions, XIX^{e}-XX^{e} siècle. Annuaire statistique*, Paris, INRP/CNRS, 1987, p. 150 pour les « petites classes » du secondaire.
[9] Pour l'enseignement féminin, ces taux sont respectivement de 3,4% et de 10,8%. Cf. J.-P. Briand et J.-M. Chapoulie, *Les Collèges du peuple. L'enseignement primaire supérieur et le développement de la scolarisation prolongée sous la Troisième République*, INRP/CNRS/ENS Fontenay-Saint Cloud, 1992, p. 174 et 304.
[10] P. Cabanel, *La République du certificat d'études. Histoire et anthropologie d'un examen (XIX^{e}-XX^{e} siècles)*, Paris, Belin, 2002, pp. 56-57.
[11] J.-P Briand et J.-M. Chapoulie, *Les Collèges du peuple, op. cit.*, pp. 426-427.

préparer à rien, de les rendre aptes à tout[12] ». La formule, énoncée dans les instructions de 1925, pourrait bien être la devise de l'enseignement secondaire dont la filière classique, où prévaut l'étude des langues anciennes, symbolise pleinement ce caractère désintéressé : le latin et le grec, et plus généralement les « humanités classiques », sont la marque d'une « vraie » culture secondaire car dénués d'utilité immédiate. L'enseignement primaire, en revanche, se préoccupe de former aussi bien le producteur que l'homme et le citoyen. Tel est le sens, par exemple, de l'inscription en 1882 du travail manuel au programme de l'enseignement primaire qui, sans négliger le fait que l'école est avant tout un « établissement d'éducation », vise à préparer les garçons aux activités ouvrières. Tel est le sens, également, du caractère « usuel » imprimé à l'enseignement scientifique. Comme le soulignent les instructions du 20 juin 1923 : « Nous n'oublions pas que la plupart de nos élèves devront, dès qu'ils nous auront quittés, gagner leur vie par leur travail, et nous voulons les munir de connaissances pratiques qui, dès demain, leur serviront dans leur métier[13] ». Certes, il n'y a pas, dans l'esprit des principaux responsables de l'enseignement primaire, d'antinomie *a priori* entre le caractère utilitaire et la dimension éducative de l'école primaire, nous y reviendrons. Il n'empêche : c'est bien son aspect utilitaire qui caractérise, aux yeux des élites notamment, l'enseignement primaire et qui l'oppose, dans son principe même, aux études secondaires.

Un enseignement mathématique « utilitaire » et pratique

Sous la Troisième République, c'est donc l'école primaire, et non l'enseignement secondaire, qui assure la scolarisation de la très grande majorité des enfants. Mais si les contenus enseignés sont largement commandés par le fait que ces derniers entrent tôt dans la vie active, l'école de Jules Ferry et de ses successeurs n'est pas, pour autant, l'école du « lire-écrire-compter », comme on le dit trop souvent. Rompant largement avec le régime scolaire du Second Empire, elle propose au contraire une approche encyclopédique des savoirs dont témoigne la multiplicité des matières qui figurent à son programme : les sciences physiques et naturelles, le travail manuel, le dessin, le chant, la gymnastique sont autant de disciplines rendues obligatoires au début des années 1880 et qui viennent s'ajouter dans l'emploi du temps des classes. De même, la loi du 28 mars 1882 sur l'enseignement primaire substitue les sciences « mathématiques » au « calcul » de la loi Falloux du 15 mars 1850 : au-delà du symbole, cette mesure trouve sa traduction concrète dans l'introduction d'un enseignement de géométrie dans les écoles élémentaires d'où il était quasiment exclu avant cette date[14].

Cette volonté d'encyclopédisme comme la nécessité, compte tenu de la brièveté des scolarités, d'une acquisition rapide des connaissances jugées nécessaires pour entrer dans la vie sont des déterminants essentiels de l'enseignement primaire. À cet effet, les républicains retiennent le principe de l'enseignement « concentrique » : à l'école élémentaire, la scolarité est divisée en trois cours – élémentaire, moyen,

[12] *Instructions du 2 septembre 1925 relatives aux programmes de l'enseignement secondaire*, Paris, Vuibert 1928, p. 10.
[13] Instructions du 20 juin 1923 relatives au nouveau plan d'études des écoles primaires élémentaires, *Bulletin administratif du ministère de l'instruction publique*, tome 114, p. 83.
[14] Inscrite au programme des écoles primaires supérieures en 1833 mais exclue par la loi Falloux en 1850, la géométrie devient une matière facultative de l'enseignement primaire en 1865.

supérieur[15] – où l'on étudie le même programme mais à chaque fois de façon plus étendue de telle sorte que les élèves revoient en les approfondissant les connaissances déjà acquises au cours de leur scolarité. Quel que soit le temps passé à l'école, les élèves auront ainsi étudié, certes de façon plus ou moins complète, l'ensemble des notions inscrites au programme. Dans les premières décennies de la Troisième République, cette formule de l'enseignement concentrique constitue une spécificité de l'ordre primaire, qui le différencie nettement du secondaire. Certes, le ministre Victor Duruy l'avait adoptée pour l'enseignement secondaire spécial, cet enseignement court, sans latin et à dominante scientifique créé en 1865. Mais la réforme de cette filière, menée en 1882 par les républicains, lui substitue un système d'études graduées sur le modèle de l'enseignement secondaire classique afin de mieux le démarquer des écoles primaires supérieures qui optent, elles aussi, pour l'enseignement concentrique[16].

Ce choix d'un enseignement concentrique n'est pas sans répercussions sur l'économie interne des programmes de l'école élémentaire publiés en 1882 (et confirmés en 1887), quitte à bouleverser parfois certaines pratiques enseignantes jusqu'alors en vigueur. Désormais, l'enseignement du calcul commence dès l'entrée à l'école, en même temps que la lecture et l'écriture : cette mesure, qui postule la simultanéité des apprentissages « fondamentaux », marque l'achèvement d'un processus de longue durée dont on relève les prémices dans les années 1830 mais qui commence véritablement sous le Second Empire. Mais surtout, le système adopté conduit à mener de front l'apprentissage de notions mathématiques qui autrefois se succédaient et donc à rendre certains apprentissages plus précoces. C'est ainsi que l'étude de la division est déplacée vers l'amont de la scolarité, de telle sorte que les quatre opérations sont inscrites non seulement au programme des cours élémentaire, moyen et supérieur, mais aussi à celui de la section enfantine qui accueille les enfants de 5 à 7 ans. De la même façon, l'apprentissage du système métrique, autrefois rejeté en fin de cursus car lié à l'étude des fractions, est entrepris dès l'entrée à l'école et sera poursuivi tout au long de la scolarité. Enfin, la concentricité des programmes modifie la façon d'envisager l'enseignement de la géométrie. Celui-ci commence dès le cours élémentaire : il n'est donc plus besoin, comme c'est souvent l'usage, d'avoir parcouru l'ensemble du cours d'arithmétique avant d'accéder à la géométrie. De plus, les élèves sont initiés quasi simultanément à la géométrie plane et à la géométrie dans l'espace, et non successivement comme le voudrait l'ordre géométrique classique.

Commandé par la brièveté des études primaires, le principe de l'enseignement concentrique contribue donc à modifier en profondeur l'ordre d'exposition des connaissances mathématiques enseignées à l'école primaire. Il est officiellement abandonné en 1923 au profit d'un enseignement « progressif », de telle sorte que « la graduation des programmes apportera à chaque âge ce qui lui convient[17] ». Il s'agit de mieux adapter l'enseignement au développement de l'enfant mais aussi d'éviter la monotonie des répétitions trop nombreuses. Peut-être s'agit-il aussi de

---

[15] Le cours préparatoire, qui remplace la section enfantine, n'est officiellement organisé qu'en 1922.

[16] Sur l'enseignement scientifique dans le secondaire, voir B. Belhoste, *Les Sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels. Tome 1 : 1789-1914*, Paris, INRP/Économica, Paris, 1995.

[17] Instructions du 20 juin 1923, p. 80.

rapprocher les méthodes pédagogiques en vigueur de celles du secondaire, alors que le ministère de l'Instruction publique aligne les programmes des petites classes des lycées et collèges sur ceux de l'école primaire, et cherche à ouvrir les classes de 6e aux élèves de la communale. En réalité, les programmes de 1923, qui resteront en vigueur jusqu'à la Deuxième Guerre mondiale, et, dans une moindre mesure, ceux de 1945 ensuite, conservent une large dose de concentricité. Celle-ci apparaît pourtant moins nécessaire, du fait de l'allongement des scolarités, que ce soit en direction du secondaire, du primaire supérieur ou des classes de fin d'études primaires créées après 1936 pour recevoir les élèves jusqu'à 14 ans. Comme le remarque Antoine Prost, aucun texte ne vient « débarrasser les programmes du cours élémentaire et moyen d'éléments que la prolongation de la scolarité rend superflus à ce niveau[18] ».

Pour autant, les programmes de l'école primaire élémentaire ne restent pas totalement figés dans leurs contenus. Comme le note Charles Bayet, directeur de l'enseignement primaire au ministère de l'Instruction publique, « il faut les simplifier sans cesse, afin que l'enseignement soit mieux à la portée des jeunes esprits[19] ». Certes, on peut y relever des points fixes. Tel est le cas de la règle de trois qui, invariablement enseignée dès le cours moyen depuis 1882, constitue pour de nombreux élèves le point culminant de leur éducation arithmétique. Mais au cours de la période qui nous occupe, on assiste à des aménagements ou à des allègements de programme. L'ordre de certains apprentissages change, et des notions disparaissent tandis que de nouvelles apparaissent. Les programmes de 1923, par exemple, font évoluer l'enseignement de la numération de telle sorte que les élèves n'étudient plus les fractions décimales comme des cas particuliers des fractions « ordinaires », mais comme une écriture particulière des nombres décimaux. L'importance des fractions ordinaires, étudiées ensuite mais dont la manipulation semble moins primordiale depuis que l'usage des mesures décimales s'est définitivement imposé, s'en trouve du même coup minorée et les opérations sur ces dernières restreintes à des cas « numériquement très simples » (programme de 1923), et plus tard à des fractions dont le dénominateur est un multiple de 2, 3 ou 5 (programme de 1941). Corrélativement, le programme du cours supérieur (11-13 ans) est déchargé de ce que les instructions du 20 juin 1923 appellent « l'arithmologie pure » – nombres premiers, caractères de divisibilité, décomposition en facteurs premiers, plus grand commun diviseur qui sont considérés comme autant d'« enseignements de luxe » [20] –, ce qui permet en retour l'introduction de quelques notions d'algèbre et des représentations graphiques, lesquelles doivent permettre de résoudre rapidement certains types de problèmes. On a gagné ici ce qu'on a perdu là.

Parce qu'elle prépare ses élèves à entrer dans la vie, l'école primaire dispense un enseignement essentiellement pratique, concret, usuel, répondant aux nécessités de la vie quotidienne et de leur activité professionnelle future, que ce soit à l'atelier, au comptoir ou dans l'exploitation familiale. Plus que les instructions officielles, qui

---

[18] A. Prost, *Histoire de l'enseignement en France, op. cit.* p. 278. Seuls les programmes du cours supérieur sont révisés en 1938. C'est également en 1938 que sont définis les programmes des classes de fin d'études primaires élémentaires. Notons que, des années 1880 à la Deuxième Guerre mondiale, les programmes de l'enseignement primaire supérieur sont plus fréquemment révisés (1893, 1909, 1920, 1937-38) que ceux de l'école élémentaire.

[19] Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts, *Rapport sur l'organisation et la situation de l'enseignement primaire public en France*, Paris, Imprimerie nationale, 1900, pp. x-xi.

[20] Instructions du 20 juin 1923, p. 110. L'étude des caractères de divisibilité est rétablie à ce niveau en 1938.

s'en tiennent le plus souvent à des points de vue très généraux, les discours tenus (ou implicitement soutenus) par la hiérarchie de l'instruction primaire renseignent sur la mise en musique de la partition ministérielle. L'inspecteur général de l'enseignement primaire Pierre Leyssenne rappelle ainsi que l'écolier doit avant tout « savoir calculer sûrement et rapidement et résoudre toutes les questions pratiques qu'il peut être amené à rencontrer sur sa route pendant sa vie[21] ». Dans la *Revue pédagogique*, publication patronnée par le ministère de l'Instruction publique, François Vintéjoux ne dit pas autre chose lorsqu'il demande aux instituteurs de « rendre les enfants capables de faire plus tard avec intelligence et avec sûreté toutes les opérations pratiques qui se présentent journellement dans le cours ordinaire de la vie[22] ». Aussi la résolution de « problèmes usuels » forme-t-elle un pan essentiel de l'éducation mathématique des écoliers du primaire. Le mot « usuel » doit cependant s'entendre dans un double sens. D'une part, les problèmes proposés doivent mettre en jeu des nombres et des pratiques opératoires dont l'usage est avéré : si les additions « peuvent être longues, parce qu'on en rencontre de telles dans la pratique », les soustractions, les multiplications et les divisions doivent au contraire être « simples et courtes, comme elles le sont dans le monde des affaires[23] ». D'autre part, ces problèmes doivent rendre compte de situations réelles, susceptibles d'être rencontrées dans la vie courante[24]. « Les problèmes sur le temps que mettent des robinets ou à remplir ou à vider un bassin, sur l'heure à laquelle se rencontrent les aiguilles d'une montre, sur le nombre de sauts que doit faire un lévrier pour atteindre un renard, sur des mélanges ou des alliages qu'on se garderait bien de composer ou que la loi interdit [...] ne sont pas des exercices pratiques », estime ainsi l'inspection générale de l'enseignement primaire avant de proposer que ces derniers soient interdits aux examens[25]. L'actualité du sujet comme la véracité des données numériques (le bon sens permettant alors de contrôler la pertinence des résultats) constituent un enjeu d'importance : résoudre un problème, c'est aussi, par delà l'aspect strictement mathématique, apprendre des choses « utiles » concernant la vie domestique, le commerce, l'industrie ou l'agriculture. Certains recueils de problèmes sont d'ailleurs spécialisés dans telle ou telle branche d'activité, tel ce *Recueil de problèmes sur les engrais et l'alimentation du bétail* publié en 1899 à l'intention des élèves des cours moyen et supérieur. Reste la question – essentielle – de la mise à jour des données numériques. En 1915, un inspecteur primaire, soucieux de voir les instituteurs de sa circonscription composer des problèmes « ayant trait à la vie actuelle », recommande à ces derniers de « se méfier [...] des prix anciens d'avant-guerre donnés dans les livres[26] ».

21 P. Leyssenne, « Problème », in F. Buisson (dir.), *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, 1re partie, tome 2, Paris, Hachette, 1887, p. 2441.

22 F. Vintéjoux, « L'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie à l'école primaire », *Revue pédagogique*, 15 mars 1887, p. 223. Ce texte est publié dans R. d'Enfert, *L'Enseignement mathématique, op. cit.*, pp. 240-248.

23 P. Leyssenne, « Problème », art. cit., p. 2442.

24 Cet appel à l'expérience de la vie courante est encore requis au lendemain de la Deuxième Guerre mondiale. Cf. Instructions du 7 décembre 1945 sur les horaires et les programmes de l'école primaire, *Bulletin officiel du ministère de l'éducation nationale* (désormais BOEN) nº 3, 10 janvier 1946, pp. 91-104.

25 Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts, *Rapport, op. cit.*, p. 392.

26 Conférence pédagogique du canton de Montmorency, 19 mars 1915, Musée départemental de l'éducation de Saint-Ouen l'Aumône.

Former des « hommes de bon sens »

Cette dimension pratique invalide-t-elle toute ambition éducative ? S'il s'agit, à un premier niveau, de la formation morale et civique du futur citoyen, nul doute alors que l'enseignement mathématique est partie prenante de l'éducation des écoliers et répond aux objectifs généraux d'une institution scolaire qui structure les classes sociales et « s'efforce de les faire admettre dans leur hiérarchie[27] ». Non seulement celui-ci, on l'a vu, est en phase avec leur probable destination sociale et professionnelle, mais il énonce implicitement les normes et les valeurs qui règlent les comportements et les rapports sociaux et garantissent ainsi l'ordre établi. Grands classiques du certificat d'études, les problèmes relatifs à l'épargne sont « indéfiniment déclinables, avec leur moralisme implicite[28] » : outre leur dimension proprement mathématique, ils familiarisent les élèves avec le fonctionnement de la caisse d'épargne où ces derniers devenus adultes déposeront probablement leurs économies, et incitent à l'économie et à la prévoyance, érigées en vertus morales[29]. Au cours de la période, l'enseignement mathématique est également mis au service de quelques grandes causes, ainsi lors de la campagne organisée à la fin du XIX^e^ siècle pour faire face aux « ravages de l'alcoolisme » ou dans le cadre de la « semaine du doryphore » programmée au début des années 1930 dans certains départements où les cultures sont menacées par cet insecte.

À un second niveau, le caractère éducatif de l'enseignement mathématique réside dans sa contribution à ce que les instructions de 1882 appellent la « culture de l'esprit », c'est-à-dire le développement de la réflexion et de l'esprit critique, du sens de la rigueur et de l'exactitude. C'est ainsi que François Vintéjoux, déjà cité, voit dans l'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie le moyen de « donner de bonne heure aux enfants l'habitude de réfléchir et de ne risquer une réponse qu'à bon escient » et donc de former « des hommes de bon sens » [30]. Le fait que les règles d'alliage, pourtant d'un usage restreint, fournissent « un grand nombre de questions qui sont d'excellents exercices de calcul et de raisonnement » suffit à ses yeux pour justifier leur inscription au programme. Toutefois, cette finalité proprement éducative de l'enseignement mathématique n'est pas unanimement approuvée. Plus exactement, on observe, chez les acteurs de l'instruction primaire, une tension permanente entre finalité utilitaire et finalité éducative. L'examen des différents articles du *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire* (1887) relatifs à l'enseignement mathématique permet d'en rendre compte. L'ouvrage, quasi mythique aujourd'hui, ne peut en effet être considéré comme une sorte de manuel officiel déclinant fidèlement la politique scolaire de la Troisième République, tant des points de vue contrastés, voire antagonistes, peuvent y cohabiter et parfois s'y confronter[31]. Si l'article « Arithmétique », signé Hippolyte Sonnet, place ces deux

---

27 A. Prost, *Histoire de l'enseignement en France, op. cit.* p. 334.

28 P. Cabanel, *La République du certificat d'études, op. cit.*, p. 144.

29 Sur la portée idéologique de l'enseignement mathématique à l'école primaire, voir notamment Guy Vincent, *L'École primaire française, étude sociologique*, Lyon, PUL, 1980, pp. 129-186, ainsi que André Harlé, *L'Arithmétique dans les manuels de l'enseignement élémentaire français au début du XX^e^ siècle*, Thèse de didactique de l'Université Paris VII, 1984.

30 F. Vintéjoux, « L'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie... », art. cit., p. 225.

31 T. Assude et H. Gispert, « Les mathématiques et le recours à la pratique : une finalité ou une démarche d'enseignement ? », *in* D. Denis et P. Kahn (dir.), *L'École républicaine et la question des savoirs. Enquête au cœur du Dictionnaire de pédagogie de F. Buisson*, Paris, CNRS, 2003,

finalités sur un pied d'égalité en voyant dans cet enseignement « une discipline incomparable pour l'intelligence[32] », l'article « Problème » rédigé par Pierre Leyssenne s'inscrit dans une perspective radicalement opposée : l'enseignement primaire devant privilégier « l'acquisition la plus prompte et la plus solide des éléments indispensables de chaque science », la contribution de l'enseignement mathématique à l'éducation générale de l'esprit semble à son auteur une « grave illusion » [33].

C'est que, derrière la « culture de l'esprit », se profile le risque d'une secondarisation de l'enseignement primaire, c'est-à-dire de sa transformation en un enseignement plus spéculatif qu'utilitaire, au risque de détourner les élèves de la vie pratique et des professions auxquelles ils sont *a priori* destinés. L'opposition utilitaire/éducatif renvoie en effet à la dualité scolaire, qui concerne principalement, il est vrai, l'enseignement post-élémentaire. « Plus ces finalités éducatives sont affirmées, plus les frontières institutionnelles qui séparent le primaire du secondaire tendent à être remises en cause », estime Pierre Kahn à propos des articles du *Dictionnaire de pédagogie* relatifs aux sciences physiques et naturelles[34]. La réflexion pourrait aussi valoir pour l'enseignement mathématique. Examinons l'article « Géométrie » du même *Dictionnaire*, également rédigé par Leyssenne[35]. Ce dernier distingue entre l'école élémentaire d'une part, et l'école primaire supérieure d'autre part. À l'école élémentaire, l'enseignement de la géométrie doit éveiller chez les plus jeunes « leur attention, leur intelligence et leur sagacité », mais présenter des « avantages immédiats » dans les classes plus élevées (cours moyen et cours supérieur) : maîtrise du système métrique et de l'évaluation des surfaces et des volumes notamment. À l'école primaire supérieure (ou à l'école normale primaire), en revanche, la géométrie doit « reprendre tous ses droits » et l'ensemble des énoncés faire l'objet de démonstrations rigoureuses et méthodiques[36]. Mais si l'auteur reconnaît là une identité de méthode avec l'enseignement secondaire, c'est pour mieux caractériser ce qui fait la spécificité du primaire : « c'est qu'il ne faut admettre dans cet enseignement que deux sortes de propositions : celles qui peuvent donner lieu à des applications pratiques directes et immédiates, et celles qui sont indispensables à la démonstration rigoureuse des premières. Tout le reste doit être

---

pp. 175-196. Les mathématiques ne sont pas seules concernées par ce type d'analyse, comme le montrent les différentes études publiées dans cet ouvrage, qu'elles concernent le français, les sciences, le travail manuel ou la gymnastique. La thèse soutenue en 1994 par Patrick Dubois a largement contribué à renouveler l'intérêt pour le *Dictionnaire*. Cf. P. Dubois, *Le Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire de Ferdinand Buisson. Unité et disparités d'une pédagogie pour l'école primaire (1876-1911)*, Thèse de doctorat en sciences de l'éducation de l'Université L. Lumière-Lyon II, 1994.

[32] H. Sonnet, « Arithmétique » in F. Buisson (dir.), *Dictionnaire de pédagogie, op. cit.*, 1re partie, tome 1, p. 114.

[33] P. Leyssenne, « Problème », art. cit., p. 2441.

[34] P. Kahn, « Les sciences : trois modèles pour un enseignement nouveau », in D. Denis et P. Kahn (dir.), *L'École républicaine, op. cit.*, p. 165.

[35] P. Leyssenne, « Géométrie » in F. Buisson, (dir.), *Dictionnaire de pédagogie, op. cit.*, 1re partie, tome 1, pp. 1162-1166, et plus particulièrement pp. 1163-1164. Cf. Teresa Assude et Hélène Gispert, « Les mathématiques et le recours à la pratique », art. cit., pp. 188-190.

[36] Cette différenciation entre enseignement primaire élémentaire et primaire supérieur prévaut encore au début des années 1930. Voir A. Marijon et T. Leconte, « Rapport sur les conférences pédagogiques de 1928 (L'arithmétique et la géométrie à l'école primaire) », *Bulletin de l'instruction primaire du département de la Seine*, janvier-février 1930, p. 104.

écarté, comme oiseux, inutile ou nuisible[37] ». Aussi recommande-t-il d'abandonner les ouvrages classiques, composés « pour des besoins scolaires tout autres » : ni leurs plans, ni leurs démonstrations ne conviennent à l'enseignement primaire.

Des élèves actifs

On l'a vu, l'ancrage de l'enseignement primaire dans la vie courante, quotidienne, constitue un élément essentiel de son identité. Cette dimension pratique peut se décliner en un deuxième sens : l'appel à l'activité des élèves, à leur expérience sensible, à l'observation, constitue une autre caractéristique de cet enseignement, qui n'est pas sans connexion avec les ambitions éducatives de l'école primaire et qui le distingue assez largement, une fois encore, de l'ordre secondaire. C'est à l'école primaire, en effet, que se développe une approche concrète et expérimentale des objets mathématiques et de leurs propriétés : nombres, mais aussi figures géométriques planes ou spatiales. Sous la Troisième République, l'institution de l'enseignement mathématique comme discipline d'observation et d'action, voire comme discipline proprement expérimentale, est partie prenante d'un projet pédagogique global qui rejette des pratiques scolaires jugées trop souvent livresques et routinières : à l'école primaire, l'enseignement doit être intuitif et inductif et recourir à des méthodes actives. Pour utiliser un langage actuel, il s'agit de rendre l'élève « acteur de ses apprentissages ». Entretenant avec les élèves « un continuel échange d'idées », indiquent les programmes de 1882, le maître doit partir de ce que les enfants savent et les amener à découvrir de nouvelles notions en procédant « du connu à l'inconnu ». La démarche préconisée – observer, comparer, généraliser –, participe de la construction d'une véritable culture primaire où la pratique fait partie intégrante de la formation générale. Dans les premières leçons de calcul, le maniement et l'observation d'objets matériels tels que bûchettes, boulier, etc., visent à réduire l'usage souvent trop exclusif de la mémoire au profit des capacités d'intuition des élèves. Comme le rappellent les instructions de 1923, « l'opération manuelle précède l'opération arithmétique[38] ». En géométrie, le dessin – dessin linéaire ou dessin géométrique – comme le travail manuel sont mis à contribution : ils permettent des vérifications expérimentales et des justifications intuitives, et rendent plus tangible un enseignement qui, rappelons-le, commence désormais dès l'entrée à l'école. De fait, les exercices de pliage, de découpage ou de cartonnage sont envisagés comme la partie expérimentale – ou appliquée – de l'enseignement mathématique, à l'instar des manipulations ou des travaux agricoles dans l'enseignement des sciences physiques et naturelles[39]. Appartenant à la tradition déjà ancienne de la géométrie pratique, les activités de mesurage sont également encouragées. En milieu rural, notamment, les instituteurs sont invités à exercer leurs élèves du cours supérieur à la mesure des terrains : « Aucun exercice sur les évaluations de surface ne vaut ceux qu'on aura à résoudre après une séance d'arpentage[40] ».

[37] P. Leyssenne, « Géométrie », art. cit., p. 1164.

[38] Instruction du 20 juin 1923, p. 108.

[39] R. d'Enfert, « "Manuel (Travail)" : préparer au métier ou éduquer ? », *in* Daniel Denis et Pierre Kahn (dir.), *L'École républicaine, op. cit.*, pp. 199-222. Voir également R. d'Enfert, « L'introduction du travail manuel dans les écoles primaires de garçons, 1880-1900 », *Histoire de l'éducation*, janvier 2007, à paraître.

[40] A. Marijon et T. Leconte, « Rapport sur les conférences pédagogiques de 1928 », art. cit., p. 104.

Au reste, cette conception expérimentale de la discipline ne se limite pas à la seule école élémentaire. Elle se développe aussi dans le cadre de l'enseignement primaire supérieur pour lequel les programmes de 1909 recommandent aux maîtres de « relier entre eux les enseignements de la géométrie, du dessin et du travail manuel » : « Bien des vérités géométriques essentielles peuvent être mises en évidence au moyen d'exercices de "géométrie expérimentale" figurant au programme de travaux manuels ». C'est que, enseignement court oblige, il faut « suppléer, par l'application et des expériences répétées, aux raisonnements rigoureux et abstraits pour lesquels le temps et l'attention font également défaut[41] ». Au début du XXe siècle, l'enseignement secondaire est également concerné. Les instructions de 1905 relatives au premier cycle (6e à 3e) des lycées et collèges affirment ainsi le caractère expérimental de la géométrie[42]. Cette approche, particulièrement novatrice dans le cadre secondaire, est soutenue par des mathématiciens comme Paul Appell, Émile Borel, Jacques Hadamard ou Jules Tannery. « En traitant la géométrie comme une science physique – ce qu'elle est véritablement –, on fera disparaître ce que son enseignement a présenté jusqu'ici d'artificiel et de rebutant[43] », déclare par exemple Jacques Hadamard. Dans une conférence intitulée de façon significative « Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire », Émile Borel va même jusqu'à proposer la création, dans les lycées et collèges, d'un « laboratoire de mathématiques » sous forme d'un atelier de menuiserie où les élèves confectionneraient des solides géométriques ou des appareils simples de mécanique. Répondant par avance à l'objection d'une éventuelle primarisation du secondaire, qui perdrait ainsi sa valeur éducative, Borel ajoute : « la valeur éducative de l'enseignement ne pourra être qu'augmentée si la théorie y est, le plus souvent possible, mêlée à la pratique[44] ». Mais il n'est pas entendu et les instructions de 1905 ne font pas référence au travail manuel qui constitue donc une spécificité de l'enseignement primaire. Plus généralement, et contrairement au primaire où l'on observe une certaine pérennité, cette veine expérimentale et pratique qui se développe dans le secondaire au début du XXe siècle résiste difficilement à la réforme menée par le ministre Léon Bérard en 1923 et à ses aménagements ultérieurs[45]. Les mesures d'alignement des programmes des deux ordres d'enseignement, prises ensuite dans le cadre de la réalisation de l'école unique, conduiront à renouer avec cette dimension expérimentale, tant dans les classes élémentaires que dans les classes du

[41] Exposé des motifs du projet de programme de l'enseignement primaire supérieur, juillet 1908, publié dans R. d'Enfert, *L'Enseignement mathématique, op. cit.*, pp. 312-315, ainsi que les programmes de 1909 cités plus haut.

[42] Ces instructions sont publiées par B. Belhoste, *Les Sciences dans l'enseignement secondaire, op. cit.*, pp. 658-671.

[43] Cité par B. Belhoste, *Les Sciences dans l'enseignement secondaire, op. cit.*, p. 57. S'inscrivant dans la même veine, le point de vue exprimé par Carlo Bourlet dans l'article « Mathématiques » du *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, Paris, Hachette, 1911, dirigé par F. Buisson est analysé dans l'article de T. Assude et H. Gispert mentionné plus haut.

[44] É. Borel, « Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire, conférence faite le 3 mars 1904 au Musée pédagogique », *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 1904, p. 439. Ce texte a été publié par Hélène Gispert dans la *Gazette des mathématiciens*, n° 93, juillet 2002, pp. 47-64.

[45] Selon les *Instructions du 2 septembre 1925 relatives aux programmes de l'enseignement secondaire, op. cit.*, p. 162, « il n'y a pas lieu d'encourager, au début tout au moins, l'emploi des constructions qui conduiraient à une sorte de découverte ou de vérification et introduiraient l'expérience là où elle n'a rien à faire ».

premier cycle secondaire. Il faut néanmoins attendre 1957 pour que des « travaux pratiques » intégrant des exercices manuels soient inscrits au programme de mathématiques des classes de 6^{e} et de 5^{e}.

Les années 1960 : l'école élémentaire change de fonction

Nous n'évoquerons pas la politique scolaire de Vichy qui transforme les écoles primaires supérieures en collèges modernes, modifie l'organisation des études primaires et y remanie les programmes de calcul. À la Libération, en effet, l'enseignement élémentaire (et plus généralement l'enseignement du premier degré qui inclut toujours les cours complémentaires) retrouve à peu près la configuration qui prévalait avant 1940, tandis que de nouveaux programmes sont publiés, non sans emprunts, du reste, à ceux de 1941. Les programmes de 1945 visent à recentrer l'enseignement sur les matières fondamentales : lecture, écriture, français, calcul. Les options pédagogiques qui régissaient l'enseignement mathématique avant-guerre sont réaffirmées avec force : « Les principes, énoncés dans les instructions de 1923 et repris dans celles de 1938 (pour le cours supérieur) restent valables [...] Les modifications apportées au programme ne font que confirmer ces principes et en préciser l'application[46] ». Ces programmes resteront en vigueur jusqu'en 1970 : date majeure qui marque l'avènement des « mathématiques modernes » à l'école, mais correspond également à un changement de perspective plus général qui vise à prendre en compte la démocratisation de l'accès à l'enseignement secondaire.

La question de la généralisation des scolarisations prolongées et de la rénovation de l'enseignement est posée au lendemain de la Deuxième Guerre mondiale au niveau national, avec le plan Langevin-Wallon notamment, comme à l'échelle internationale avec des organismes tels que l'Organisation européenne de coopération économique (OECE, future OCDE) et l'UNESCO ou encore l'Union mathématique internationale qui, tout juste refondée, permet la renaissance de la Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM). Lors de sa première assemblée générale en 1952, son président Marshall H. Stone souligne ainsi la nécessité pour de nombreux pays de généraliser l'« instruction populaire obligatoire » – entendons la scolarisation post-élémentaire de niveau « moyen » – au lieu de la réserver à un petit nombre de privilégiés, et d'y donner une place significative aux mathématiques compte tenu des besoins engendrés par une industrialisation accélérée, en ayant soin néanmoins d'en rénover les méthodes pédagogiques afin d'en rendre l'enseignement plus accessible à un public désormais élargi[47]. En France, le mouvement de démocratisation commence dès la fin des années 1950 avec l'organisation des cycles d'observation au niveau des classes de 6^{e} et 5^{e} – les cours complémentaires sont alors rebaptisés collèges d'enseignement général – et la prolongation à 16 ans de la scolarité obligatoire (1959) puis la création des collèges d'enseignement secondaire (1963). L'élargissement du recrutement des classes de sixième à tous les élèves bouleverse l'architecture générale du système

[46] Instructions du 7 décembre 1945, p. 94.
[47] M. H. Stone, « L'Union mathématique internationale et ses activités. Rapport sur la première assemblée générale (Rome, 6-8 mars 1952) », *L'Enseignement mathématique*, tome 39, 1942-1950, pp. 156-161. Sur l'activité de la CIEM dans cette période, voir H. Gispert, « Applications : les mathématiques comme discipline de service dans les années 1950-1960 » *in* D. Coray et al., *One Hundred Years* of L'Enseignement Mathématique. *Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century*, Genève, L'Enseignement mathématique, 2003, pp. 253-270.

scolaire et modifie en profondeur les fonctions mêmes de l'école primaire. L'enseignement élémentaire ne constitue plus un enseignement terminal mais un enseignement préparatoire à un secondaire diversifié (long, court, pratique) dont il forme désormais la base et aux exigences duquel il doit s'adapter. Dès 1960, une circulaire ministérielle invite les maîtres de l'enseignement élémentaire à « établir les fondations solides et durables de tout l'édifice scolaire » : « On est en droit d'attendre des enfants de 10 ou 12 ans d'intelligence normale [...] qu'ils n'hésitent pas sur le sens d'une opération arithmétique, qu'ils ne commettent pas des erreurs dues à une connaissance imparfaite des tables[48] ».

La réforme de l'enseignement mathématique, dite des « maths modernes », n'intervient qu'à la fin de la décennie 1960. Elle résulte des travaux d'une commission ministérielle présidée par André Lichnerowicz et qui publie un premier rapport en mars 1967. Elle est très largement soutenue par l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public qui propose quelques mois plus tard un projet de programmes pour les écoles maternelles et primaires tenant compte du fait que « la dernière année d'école primaire n'est plus pour aucun élève sa dernière année d'école[49] ». L'année suivante, la « Charte de Chambéry » élaborée au sein de l'Association prône une réforme associant actualisation des contenus et renouvellement des méthodes « de la maternelle aux Facultés » : l'acquisition des notions mathématiques est affaire de long terme[50]. Partie prenante d'une rénovation générale de l'enseignement mathématique depuis la maternelle jusqu'à l'université, la révision des programmes de l'école primaire en 1970 est largement motivée par la démocratisation de l'enseignement : « Il s'agit dès lors de faire en sorte que cet enseignement contribue efficacement au meilleur développement intellectuel de tous les enfants de six à onze ans afin qu'ils entrent dans le second degré avec les meilleures chances de succès. L'ambition d'un tel enseignement n'est donc plus essentiellement de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquérir des techniques de résolution de problèmes catalogués et suggérés par la "vie courante", mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à ces techniques[51] ». Le programme de 1970 est substantiellement allégé. Les écoliers n'ayant plus besoin d'être rapidement préparés à résoudre les problèmes de la vie courante ou professionnelle, il devient en effet possible, en les étalant dans le temps, de proposer des apprentissages mieux adaptés aux différentes étapes du développement de l'enfant, et de reporter l'enseignement de certaines connaissances aux classes du premier cycle secondaire : au cours préparatoire, l'apprentissage arithmétique ne va pas plus loin que l'addition de deux nombres entiers, tandis qu'au cours moyen les pourcentages et les calculs d'intérêts n'apparaissent plus explicitement.

---

[48] Circulaire du 19 octobre 1960 relative à l'enseignement du français et calcul dans les classes primaires, *BOEN* n° 37, 24 octobre 1960, p. 3109.
[49] « Projet de programme pour les écoles maternelles et primaires. Rapport élaboré par la commission R.R. de l'APMEP », *Bulletin de l'APMEP*, n° 258, mai-septembre 1967, p. 279.
[50] « Charte de Chambéry. Étapes et perspectives de la réforme de l'enseignement des mathématiques », *Bulletin de l'APMEP,* n° 261, mars-avril 1968 pp. 167-189.
[51] Circulaire du 2 janvier 1970 concernant le programme de mathématiques à l'école élémentaire, *BOEN* n° 5, 29 janvier 1970, p. 349.

Au demeurant, le programme de 1970 ne présente pas en lui-même de rupture majeure avec celui de 1945 : sa rédaction, simplifiée à l'extrême, pouvait sembler familière aux maîtres de l'époque. Dans l'esprit de ses concepteurs, il ne s'agit d'ailleurs que d'un texte de transition, préalable à une rénovation plus complète, laquelle n'interviendra qu'à partir de 1977. Les transformations n'en apparaissent pas moins profondes, et les instructions qui accompagnent le programme de 1970 ont probablement dérouté plus d'un instituteur avec leurs définitions plus abstraites, leurs tableaux de nombres et leurs chaînes d'opérateurs. La nouvelle dénomination du programme – « Mathématiques » – vise à signifier que le calcul ne constitue qu'une partie de l'enseignement mathématique des élèves, qui doit aussi inclure l'observation de l'espace et des objet géométriques, ainsi que des exercices pratiques de mesure. L'accent est mis sur l'élaboration des concepts sous-tendus par l'activité mathématique des élèves, de façon à leur permettre une meilleure compréhension des notions de base. L'apprentissage des techniques opératoires n'est pas minoré pour autant : au lieu d'être apprises de façon purement mécanique, elle seront découvertes par les élèves eux-mêmes, « comme synthèse d'expériences effectivement réalisées, nombreuses et variées ». Le caractère « résolument concret » de l'enseignement est affirmé et les élèves sont appelés à « manipuler effectivement » de façon à découvrir progressivement des notions abstraites et générales.

L'école primaire d'avant 1960 apparaît donc bien différente de celle d'aujourd'hui. Recrutant dans les milieux populaires, elle propose une culture scolaire – et notamment mathématique – bien spécifique qui se démarque du modèle secondaire. La rénovation pédagogique menée dans les premières années de la Troisième République en a largement dessiné les contours : soutenue par un enseignement à la fois intuitif et actif, l'école primaire donne des connaissances pratiques, concrètes, usuelles, qui répondent aux besoins de la vie quotidienne et professionnelle. Passé ce moment fondateur de ce qu'il est convenu d'appeler « l'école républicaine », les programmes scolaires n'échappent pas aux réformes qui, moins souvent qu'aujourd'hui il est vrai, visent tout à la fois à adapter l'enseignement aux évolutions de la société, à promouvoir certaines conceptions didactiques ou épistémologiques, à intégrer les réflexions psychopédagogiques, ou encore à rénover des pratiques enseignantes jugées trop routinières. Enfin, la démocratisation de l'accès à l'enseignement secondaire, commencée dès la fin de la décennie 1950, n'est pas sans effet sur l'enseignement du premier degré. Si l'école élémentaire reste une école de masse, ce qui change, en revanche, c'est sa fonction : d'école du peuple, elle devient l'école de tous ; d'une préparation à la vie, elle devient une préparation aux études longues. Ce changement de perspective, joint à la volonté de rénovation des disciplines d'enseignement et des méthodes pédagogiques, explique très largement la transformation en profondeur de l'enseignement mathématique qui s'opère alors, et dont les programmes scolaires actuels portent encore la marque malgré le reflux des « mathématiques modernes ».

Mais si la transformation des méthodes et des contenus enseignés à l'école élémentaire est le résultat d'une véritable réflexion sur la mission assignée à cette dernière, tel n'est pas le cas, en revanche, de l'enseignement dispensé au sein du « collège unique » issu de la fusion, en 1975, des collèges d'enseignement général héritiers des cours complémentaires d'une part, et des collèges d'enseignement secondaire d'autre part[52]. Car l'unification des structures du premier cycle ne s'est pas traduite par une synthèse réfléchie des deux cultures primaire et secondaire, intégrant les atouts de l'une comme de l'autre. À ce niveau, en effet, le modèle secondaire, entendons ses contenus, ses méthodes, ses pratiques, ses valeurs, son corps enseignant même, s'est imposé comme un horizon naturel et indépassable, sans que soit véritablement discutée la pertinence de ce non-choix. Aussi l'enseignement du second degré, et plus particulièrement le collège, est-il devenu une école « de masse » tout en restant largement fidèle aux conceptions qui ont fondé, depuis le XIXe siècle au moins, la formation d'une élite sociale restreinte et homogène destinée à occuper les positions les plus élevées. Seule une réflexion de fond sur la « culture commune » délivrée par l'école, mais aussi sur ses méthodes pédagogiques, pourra permettre de tenter de résoudre ce paradoxe.

[52] Voir A. Prost, *Éducation, société et politiques. Une histoire de l'enseignement de 1945 à nos jours*, Paris, Seuil, 1997, et plus particulièrement le chapitre intitulé « École et stratification sociale. Le paradoxe de la réforme des collèges en France au XXe siècle », pp. 47-62.

QUELQUES ENJEUX DIDACTIQUES DE LA PRISE EN COMPTE DE LA DIMENSION EXPERIMENTALE EN MATHEMATIQUES À L'ECOLE ELEMENTAIRE.

LE CAS DE LA MESURE DES GRANDEURS

Viviane DURAND-GUERRIER
Maître de conférences,
IUFM de Lyon,
LIRDHIST[1] et IREM, Université Claude Bernard Lyon1
vdurand@univ-lyon1.fr

Résumé

Cet article se propose, au travers de l'enseignement des grandeurs à l'école élémentaire, de poser la question de la nature et des modalités d'élaboration des objets mathématiques et de leurs propriétés en lien avec les objets sensibles d'une part, avec les objets déjà naturalisés d'autre part. Cette question est étroitement liée à celle des enjeux épistémologiques et didactiques de la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques.
En s'appuyant sur les programmes de 2002 dans lesquels apparaît explicitement la notion de grandeur et sur les documents d'accompagnement qui insistent sur la nécessité de travailler les notions de grandeur avant celle de la mesure, l'article développe trois exemples proposés en formation initiale et/ou continue.

Introduction

L'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire pose selon moi de manière fondamentale et incontournable la question de la nature et des modalités d'élaboration des objets mathématiques et de leurs propriétés en lien avec les objets sensibles d'une part, avec les objets déjà naturalisés d'autre part. Je m'attacherai à montrer, sur le cas du concept de grandeur, que cette question est étroitement liée à celle des enjeux épistémologiques et didactiques de la prise en compte de la dimension expérimentale en mathématique.

1. Les relations entre objets, grandeurs, mesures et nombres

1.1. Les grandeurs à l'école élémentaire dans les programmes de 2002

Lors de la mise en place des nouveaux programmes de l'école primaire en 2002, une modification importante est apparue avec l'introduction de la notion de grandeur qui n'apparaissait pas en tant que telle dans les programmes de 1995.

[1] Laboratoire de Recherche en Didactique et en Histoire des Sciences et Techniques

Ainsi pour le cycle des apprentissages fondamentaux, on trouvait une rubrique « Mesure », indiquant que les élèves devaient commencer à maîtriser les mesures de longueur et de masse, tandis que dans les programmes de l'école élémentaire de 2002, pour le cycle 2, on trouve une entrée « Grandeurs et mesures », dans laquelle on peut lire :

> « Au cycle 2, sur la base des premières expériences fournies par l'école maternelle, les élèves étudient les notions de longueurs et de masse. Ils commencent à appréhender la notion de volume par le biais de la contenance de certains récipients. Ils apprennent à repérer le temps et commencent à distinguer dates et durées, grâce aux calendriers et aux montres. Les concepts de grandeurs et de mesure prennent du sens à travers des problèmes liés à des situations vécues par des enfants : comparaison directe ou indirecte d'objets (relativement à une grandeur : longueur, masse, contenance), mesurage à l'aide d'un étalon. C'est l'occasion de renforcer et de relier entre elles les connaissances numériques et géométriques, ainsi que celles acquises dans le domaine « découvrir le monde ». Les objets mesurés doivent être de nature et de dimensions variées, le choix de l'instrument approprié constituant un objectif important. Les instruments utilisés peuvent être soit « inventés » pour répondre aux problèmes posés (par exemple, recours à la ficelle pour obtenir la longueur d'un objet courbe…), soit être des instruments usuels : mètre ruban ou mètre de couturière, double décimètre, balance et masses marquées. » (MEN, 2004, p.103)

La suite du texte reprend presque à l'identique ce qui relevait de la rubrique « Mesure » dans les programmes précédents. On retrouve une situation analogue au cycle 3 où là encore dans les anciens programmes, on avait une entrée « Mesure », remplacée également dans les programmes de 2002 par l'entrée « Grandeurs et mesure ». En introduction, on peut lire

> « L'essentiel des activités concerne la résolution de problèmes « concrets », réels ou évoqués, en utilisant des procédés directs, des instruments de mesure, des estimations ou des informations données avec les unités usuelles. Les activités scientifiques et technologiques fournissent un champ d'application privilégié pour ce domaine. » (MEN, 2004, p. 227).

Concernant les aires, qui comme dans les anciens programmes sont introduites au cycle 3, on peut lire, ce qui est nouveau par rapport aux anciens programmes.

> « La notion d'aire est mise en place, notamment, par des activités de classement et de rangement de surfaces qui précèdent les activités de mesurage avec une unité choisie. L'étude des aires se prolonge au collège. » (ibid. p. 227)

On retrouve par ailleurs pour les aires les compétences déclinées dans les anciens programmes.

On peut remarquer que concernant les angles, le texte des programmes est resté sensiblement le même : « comparaison de deux angles ; reproduction d'un angle donné ». En effet, bien que les angles apparaissent dans la rubrique « Mesure », la mesure des angles n'était pas au programme, l'étude de l'utilisation du rapporteur en particulier étant renvoyé au collège, ce qui est toujours le cas.

L'importance de travailler la grandeur avant la mesure est développée et explicitée dans le document d'accompagnement des programmes intitulé « Grandeurs et mesure à l'école élémentaire ».[2]

On sait que les intentions des auteurs des programmes ont parfois du mal à se traduire dans les pratiques. Comme j'ai eu maintes de fois l'occasion de le constater tant en formation initiale que continue, pour de nombreux professeurs, il est difficile de concevoir la grandeur sans la mesure. Il y a donc un enjeu fort, au niveau de la formation des maîtres, à rendre sensible cette distinction introduite clairement dans les programmes et de montrer ce qu'elle apporte en termes de gain conceptuel. Je présente ci-dessous des éléments du module « Grandeurs et mesure » que je propose en formation initiale ou continue depuis la rentrée 2002 à l'IUFM de Lyon, en m'appuyant principalement sur Brousseau (2001).

1.2. Objets, grandeurs, mesures et nombres

Selon d'Alembert, la grandeur est la qualité de ce qui est susceptible d'être grand ou petit. Dans un point de vue plus moderne, on peut considérer que la grandeur est un type de variable que l'on peut attribuer à certains objets, et qui permet des comparaisons suivant un ordre total: étant donnés deux objets, on peut toujours les comparer du point de vue de la grandeur choisie. On peut associer une ou plusieurs grandeurs à une catégorie d'objets indépendamment de toute unité : la longueur, l'aire, le volume, la contenance, la masse, la durée… La notion de grandeur est liée à la mise en place d'un protocole expérimental qui permet des comparaisons lorsque les contrôles sensoriels, en particulier perceptifs (mais pas seulement, que l'on pense à la masse qui met en jeu des contrôles kinesthésiques), ne suffisent pas. Ce protocole doit être en accord avec les résultats obtenus par le contrôle sensoriel lorsque celui-ci fournit des informations non ambiguës. De ce fait, la première rencontre avec

[2] Disponible en ligne sur le site d'Eduscol : http://eduscol.education.fr/D0048/primacc.htm

la notion de grandeur passe par la manipulation d'objets sensibles et l'élaboration de protocoles permettant les comparaisons, directes ou indirectes. Ceci est explicité également dans le document d'accompagnement des programmes, déjà cité, dans le paragraphe intitulé : « les grandeurs avant leur mesure ». On peut y lire en particulier :

> « Les premières activités visent à construire chez les élèves le sens de la grandeur, indépendamment de la mesure et avant que celle-ci n'intervienne. Le concept s'acquiert progressivement en résolvant des problèmes de comparaison, posés à partir de situations vécues par les élèves, suivi de moment d'institutionnalisation par le maître ».(p. 3)

Ceci suppose une anticipation, une mise à l'épreuve avec les objets, des ajustements éventuels, et des retours vers les objets, ce qui est tout à fait caractéristique de la démarche expérimentale (Dias & Durand-Guerrier, 2005). Dans ce processus dynamique, la notion de mesure intervient lorsque l'on fait le choix d'un étalon, c'est-à-dire d'une mesure unitaire de référence ; on va pouvoir alors, sous certaines conditions, attribuer un nombre qui sera la mesure de la grandeur pour l'unité choisie et faire des comparaisons indirectes[3]. On passe alors progressivement d'un point de vue qualitatif (d'Alembert) à un point de vue quantitatif.

La notion de grandeur intervient dans de très nombreux domaines de l'activité humaine, tant relevant des activités scientifiques que technologiques, que dans le champ des sciences humaines et sociales. Dans les activités technologiques, le choix d'une ou plusieurs grandeurs pour caractériser un objet, le reproduire, l'agrandir, ou l'ajuster avec d'autres objets est tout à fait fondamental. Dans ce contexte, les choix des outils et instruments et de leurs usages pour mener à bien ces activités sont tout à fait cruciaux. Il semble donc essentiel qu'à un moment donné du cursus de la scolarité obligatoire, les élèves aient rencontré des situations nécessitant de faire de tels choix. Dans les activités scientifiques, en particulier en physique, les grandeurs jouent un rôle fondamental dans l'étude des phénomènes physiques et dans les applications qui en découlent. Une des difficultés rencontrées en physique tient au fait que pour de nombreuses grandeurs physiques, il n'y a pas d'accès sensoriel direct permettant de faire des comparaisons avant la mesure, et les protocoles expérimentaux mis en place conduisent en général directement à des mesures (par exemple, pour comparer l'intensité d'un courant, on note la déviation d'une aiguille dans un ampèremètre qui est un appareil gradué), si bien que les grandeurs physiques peuvent apparaître comme indissolublement liées à leur

[3] On demande en outre aux mesures d'être additives, ce qui suppose que l'on puisse définir la somme des grandeurs : par exemple, pour la longueur des segments, la mise bout à bout.

mesure. De ce point de vue, on peut faire l'hypothèse que c'est à travers un travail sur les grandeurs géométriques que peut en effet commencer à se construire le concept de grandeur indépendamment de la mesure, et qu'il s'agit là d'un enjeu tout à fait fondamental pour l'école élémentaire. Toutefois, et suivant en cela Brousseau (2001), le premier exemple que je donne en formation pour expliciter la distinction entre *objets, grandeurs, mesure et nombre* n'est pas un exemple géométrique.

II. Trois exemples pour la formation

II.1 Un premier exemple très élémentaire : le cardinal d'une collection

Pour illustrer, en formation, ce qu'est une grandeur et les relations entre objets, grandeurs, mesures et nombre, je m'appuie sur l'exemple du cardinal d'une collection, présenté dans Brousseau (2001)[4].

Dans le cadre de la formation initiale, cet exemple a l'avantage d'avoir été travaillé auparavant dans le domaine de la numération, sous un autre point de vue, et a priori il est également familier aux enseignants en poste. Dans cet exemple, les objets que l'on considère sont les collections finies. La grandeur associée est la taille de la collection. Dans certains cas, en fonction de l'organisation spatiale de la collection, et / ou de la nature, de la taille ou de la forme des objets, matériels ou non, qui composent les collections, on peut comparer à vue la taille de deux collections : il y a plus ou moins ou autant d'objet dans les deux collections que l'on compare. Sinon, la comparaison peut se faire par la mise en place d'un protocole expérimental permettant de réaliser une correspondance terme à terme. On est bien là dans la grandeur (la taille d'une collection) avant sa mesure, avec une comparaison suivant un ordre total. La mesure est alors le dénombrement associé à la structure numérique des entiers. On retrouve, sous ce point de vue, la nécessité de coordonner les aspects ordinaux et cardinaux mobilisés dans le schème du dénombrement, qui requiert en outre une organisation spatiale[5]. Une fois la technique du dénombrement acquise, elle permet de comparer la taille de deux collections sans faire appel à la correspondance terme à terme, celle-ci pouvant permettre de valider en retour les comparaisons faites par dénombrement ; il faut noter aussi que la mise en correspondance terme à terme entre les objets et les désignations de ces objets est au cœur même du schème du dénombrement comme le rappelle Gérard Vergnaud:

[4] Voir aussi Brousseau, Montréal, juin 1997, texte disponible à math.unipa.it/~grim/mesure.pdf

[5] Ceci renvoie en particulier au travail sur l'énumération de Briand (1999), repris par l'équipe Démathé de l'INRP.

> « Dans le cas du dénombrement, on peut identifier aisément deux idées mathématiques indispensable au fonctionnement du schème : celle de bijection, et celle de cardinal, sans lesquelles en effet, il ne peut pas y avoir de conduite de dénombrement possible » (Vergnaud, 1991, p. 139).

Ce double mouvement entre élaboration du schème du dénombrement et travail sur les collections est également à l'œuvre dans la construction des opérations : le travail sur les collections permet de fonder les opérations sur les nombres entiers, puis en retour de valider les résultats des opérations conduites dans le domaine numérique. En effet, l'addition correspond à la réunion de deux collections disjointes ; la soustraction à l'action de retirer une sous collection d'une collection initiale, ou à l'action de compléter une collection initiale pour obtenir une collection équipotente à une collection donnée ; la multiplication correspond à la réunion de plusieurs collections disjointes de même cardinal. Il faut noter que dans ce cas, le nombre de collections équipotentes joue le rôle d'un scalaire[6]. Ceci est tout à fait essentiel, car ici le produit ne modifie la nature de la grandeur (la taille de la collection), contrairement à ce qui se passe lorsque l'on multiplie des mesures de longueurs entre elles, ce qui donne un résultat homogène à une aire. Enfin, comme c'était le cas pour la soustraction, deux actions distinctes permettent de rendre compte de l'opération de division : la première correspond à l'action de retirer d'une collection donnée plusieurs sous collections de même cardinal autant de fois qu'il est possible ; tandis que la seconde correspond à l'action de fabriquer un nombre donné de sous collections équipotentes ayant le plus grand cardinal possible à partir d'une collection donnée ; dans les deux cas, les éléments non utilisés correspondent au reste. Pour éviter toute confusion, je tiens à préciser que dire que ces actions *fonde*nt les opérations correspondantes ne signifie nullement qu'elles suffisent pour *élaborer conceptuellement* les opérations. Ce que je veux dire, c'est que les allers et retours entre les actions et les opérations mathématiques favorisent l'élaboration conceptuelle dans la mesure où elle permettent de comprendre pourquoi et comment les choix théoriques faits pour les opérations permettent d'agir efficacement dans le monde sensible.

1I.2. Un exemple fondamental : le concept de longueur

[6] Une conséquence de ceci est que la commutativité de la multiplication n'est pas inscrite naturellement dans le type d'action qui la fonde, contrairement à ce qui se passe pour l'addition. Cette difficulté est bien connue des enseignants.

En dehors de l'exemple précédent, la première grandeur rencontrée à l'école est la longueur. Les auteurs du document d'accompagnement de programmes déjà cités attirent l'attention sur les questions de vocabulaire dans le paragraphe 3 « Le vocabulaire des grandeurs ». Concernant le concept de longueur, on peut lire :

> « Les mots du domaine des longueurs sont assez nombreux. Sans chercher à être exhaustifs, citons *hauteur* d'un monument, d'un arbre (par contre la *hauteur du soleil* est un angle…) ; *altitude* d'un sommet, d'un avion en vol ; *dénivelé* d'une route, *profondeur* d'une piscine, d'un placard ; *taille* d'une personne ; t*our* de cou ; *tour* de taille ; *distance* entre deux lieux, entre deux points ; largeur d'un fleuve, d'un rectangle ; *périmètre* d'un polygone ; *circonférence* d'un cercle. Il est important pour l'élève, que tous ces mots, utilisés dans des contextes différents, se réfèrent au même concept, appelé en mathématiques *longueur*. » (ibid. p.3)

Concernant le vocabulaire, on peut ajouter que le mot *longueur* est utilisé dans le langage courant et en mathématiques dans un sens plus restrictif que celui définit ci-dessus ; ainsi on parle de la *longueur* de l'intestin, ou de la *longueur* d'un chemin, ou d'un itinéraire ; de la *longueur* d'un tuyau ; d'une pièce de tissu : de la *longueur* d'un texte, d'un programme etc... On parle aussi de la *longueur* d'un rectangle, qui n'est évidemment pas son *périmètre ; de la longueur* d'un arc de cercle, ou d'un arc de courbe.

On parle aussi naturellement de la *longueur* d'un segment, qui joue évidemment le premier rôle dans cette affaire. En effet, pour *comparer des longueurs avant la mesure,* le protocole expérimental standard consiste à se ramener à *des segments parallèles* que l'on sait dans de très nombreux cas comparer à vue. Et pour mesurer des longueurs, on va utiliser le plus souvent une règle graduée, c'est-à-dire un support pour un segment gradué. Ceci montre clairement que si l'on introduit le concept de longueur uniquement par le biais de la comparaison de segments, on ne pourra pas construire de manière idoine ce concept. Comme nous l'avons vu plus haut, la grandeur est associée à un protocole expérimental permettant les comparaisons et c'est en élaborant de tels protocoles dans des situations finalisées lorsque les contrôles sensoriels ne suffisent pas que le concept de longueur va peu à peu prendre sens. Par exemple, pour comparer avec précision la taille de deux enfants lorsqu'on ne peut pas le faire à vue, on respecte un protocole bien établi : talons au sol collés contre le support, dos droit collé au support, regard droit devant et barre rigide horizontale posé sur le somment du crâne, marque sur le support (ou lecture si le support est gradué, ce qui donne alors la mesure). De même, les protocoles pour déterminer l'envergure d'un oiseau ou le garrot d'un cheval sont très précis et codifiés. Pour comparer la longueur de deux tuyaux enroulés côte à côte lorsque la perception ne suffit pas, on peut les dérouler pour une comparaison directe.

En outre, d'une manière générale, un même objet peut se voir attribuer plusieurs grandeurs relevant du concept de longueur. Pour un être humain, en lien avec les vêtements : *tour de cou ; tour de taille ; tour de poitrine ; longueur des bras ; largeur des épaules etc…* Pour un cylindre : *diamètre du cercle de base ; circonférence de ce cercle ; hauteur du cylindre ; périmètre de la surface latérale ; etc....* Pour une figure géométrique plane, on peut s'intéresser aux longueurs permettant de le caractériser, à une isométrie près. Par exemple, pour un triangle, les longueurs des trois côtés ; pour un parallélogramme, les longueurs des quatre côtés et d'une diagonale … On peut se poser le même type de question pour un solide. Au cycle 3, la confection d'un patron permet également de travailler sur les comparaisons de longueurs. Dans la plupart des cas, on peut organiser les situations d'apprentissage pour qu'elles favorisent les allers et retours entre anticipation et mise à l'épreuve avec les objets sensibles, qui sont caractéristiques de la dimension expérimentale des mathématiques (Dias & Durand-Guerrier, 2005). Les situations de communications favorisent quand à elles l'émergence de la nécessité du choix d'un étalon commun et de la mesure pour les comparaison indirectes.

II.3 Une situation de formation : le volume du cylindre

Parmi les grandeurs que l'on peut introduire précocement à l'école primaire, se trouve la notion de contenance, qui apparaît dans les programmes dès l'école maternelle dans la rubrique « Découverte des formes et des grandeurs » (MEN, 2002, p.130). L'une des raisons qui permet cette approche précoce tient à ce que l'on dispose de protocoles expérimentaux permettant de comparer des contenances faciles à mettre en place. La situation que je présente ci-dessous est adaptée de Cerquetti-Aberkane (1999), et venant après l'exemple de la taille d'une collection, elle fournit un exemple qui peut être adapté pour des élèves du cycle 3. Le problème est connu sous le nom de Problème de Galilée, et aurait été posé par des paysans qui cherchaient à savoir comment fabriquer un sac à partir d'une pièce de tissu rectangulaire pour que la quantité de grain contenue soit la plus grande.

En formation, je pose le problème sous la forme suivante :

Étant donné un rectangle non carré, on peut fabriquer deux cylindres dont ce rectangle constitue la surface latérale. Quelle est selon vous la bonne réponse ?

(1) *Les deux cylindres ont le même volume*
(2) *Le cylindre le plus haut à le plus grand volume*
(3) *Le cylindre le plus haut a le plus petit volume*
(4) On ne peut pas savoir

Je demande dans un premier temps aux participants de répondre à cette question sans faire de calcul. Ils peuvent par contre prendre une feuille rectangulaire et la manipuler. En général, la réponse n°1 est majoritaire ; il y a un nombre significatif de réponses n°4, et quelques réponses n°3. Comme souvent dans les situations de ce type, la réponse n°1 est très résistante chez ceux qui l'ont fournie spontanément. Ils ne voient pas comment il pourrait en être autrement. Pour la réponse n° 3, on peut rencontrer le type d'argument suivant (avant tout calcul écrit) : la longueur du côté utilisé pour faire le cercle de base (L) contribue au volume par son carré, tandis que l'autre dimension (L') contribue pour elle-même. Donc, le volume le plus grand est obtenu lorsque la dimension la plus grande est utilisée pour faire le cercle de base.

Le calcul littéral des deux volumes permet d'établir que si on appelle *k* le rapport entre la longueur (L) et la largeur (ℓ) ($L = k\,\ell$, $k > 1$), le rapport des volumes obtenus en choisissant respectivement L comme hauteur (V_L) et ℓ comme hauteur (V_ℓ) est égal à $1/k$. Ce calcul permet de travailler sur les relations entre les grandeurs. On utilise en particulier la relation entre la circonférence $\mathcal{C}$ du cercle et l'aire $\mathcal{A}$ du disque correspondant ($\mathcal{C}^2 = 4\pi\mathcal{A}$), qui surprend toujours beaucoup les participants. Le calcul permet également de voir, au sens propre du terme, que le rapport des volumes ne dépend que du rapport des mesures des côtés du rectangle non carré utilisé.

Une fois ceci établi, les participants proposent facilement un protocole expérimental qui permette de trancher sans faire de calcul. On peut en effet fabriquer deux cylindres avec deux rectangles en carton superposables ; découper les bases, dans une autre pièce de carton, pour qu'elles s'ajustent et assembler les deux parties de façon étanche (par exemple avec du scotch). Remplir alors l'un des cylindres à ras bord avec du sable (ou de la farine). Vider le contenu dans l'autre cylindre. La réalisation effective du protocole (que nous ne faisons pas) permet d'éliminer les réponses (1) et (2) comprises comme des réponses générales. Il reste alors les réponses (3) et (4). Si lors de la réalisation effective du protocole des rectangles de dimensions différentes ont été utilisés (par exemple, en donnant des rectangles de dimension différentes dans chaque groupe), on peut faire la conjecture (3). En choisissant en outre une mesure étalon et des valeurs adaptées pour les mesures des rectangles, on peut mettre en évidence expérimentalement la relation de proportionnalité inverse. Ceci montre que la situation peut-être adaptée avec des élèves de cycle 3, ce qu'atteste également l'article de Cerquetti-Aberkane (1999), que je donne à lire aux participants, même si on ne peut pas aller, à ce niveau-là, jusqu'à une résolution mathématique complète du problème.

CONCLUSION

Se donner comme ambition de faire construire la notion de grandeur à l'école élémentaire met en lumière la nécessité de la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques dans leur apprentissage. Un des bénéfices attendu pour les élèves est le fait de pouvoir éprouver les relations dialectiques qu'entretiennent les nombres avec les objets du monde dans un va et vient entre situations mettant en jeu les grandeurs avant la mesure ; élaboration d'une mesure adaptée et pouvoir prédictif, en retour, des résultats des calculs numériques. Ceci rend justice à la nécessité d'une dialectique du sens et des techniques dans l'apprentissage des mathématiques, dont l'apprentissage de la division est un exemple particulièrement éclairant[7]. Ceci met également en lumière le défi que représente, pour un enseignant polyvalent l'enseignement des mathématiques[8]. La formation doit absolument permettre aux futurs enseignants de l'école primaire de faire ce travail de retour sur les savoirs fondamentaux et, pour un nombre non négligeable d'entre eux, de se réconcilier par là même avec une discipline dont les aspects formels avaient pu les détourner à un certain moment de leur cursus scolaire ou universitaire.

Références

BROUSSEAU, G.(2001) Les grandeurs dans la scolarité obligatoire, *Actes de la XIème école d'été de Didactique des Mathématiques*, la Pensée Sauvage.

CERQUETTI-ABERKANE F. (1999), Introduction à une démarche scientifique en primaire à partir du problème de Galilée, *Repères* 35, p. 5-12.

DOUADY, R., (1987) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 7.2

[7] Ceci renvoie également à la dialectique outil /objet (Douady, 1987)
[8] Sur ce défi à relever, voir aussi Durand-Guerrier (2004)

DIAS, T. & DURAND-GUERRIER, V. Expérimenter pour apprendre en mathématiques, Repères *Irem*, n°60.

DURAND-GUERRIER, V. (2004) Enseigner les mathématiques à l'école primaire. Un défi à relever, La *Gazette du mathématicien.*

VERGNAUD, G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, 133-170.

ETUDE DE LA FORMATION DES PRATIQUES A TRAVERS L'ETUDE D'UN SCENARIO DE FORMATION

Christine Mangiante
ATER, IUFM ORLEANS TOURS
DIDIREM PARIS 7
christine.mangiante@orleans-tours.iufm.fr

Résumé

Cette recherche se présente comme une étude de la formation des pratiques des enseignants débutants vue à travers l'analyse des effets d'un scénario de formation centré sur l'analyse de pratiques : des Ateliers de Pratiques Professionnelles avec utilisation de la vidéo.

Utilisant à la fois les outils de la didactique des mathématiques et les concepts définis en psychologie ergonomique, nous décrivons ce qui se passe lorsqu'un enseignant en formation initiale élabore, met en œuvre et analyse *a posteriori* un projet d'enseignement. L'analyse de l'activité du formé dans le cadre de ces ateliers consistera à étudier comment celui-ci modifie, pour le mettre en œuvre, le projet de séances proposé par le formateur et réfléchit, *a posteriori*, sur sa pratique.

Nous étudierons comment ce processus de modifications, de la tâche prescrite à la tâche réalisée, permet, non seulement, d'étudier le fonctionnement du dispositif de formation mais aussi, de mettre en lumière certains phénomènes qui nous renseignent sur la façon dont se constituent les pratiques des enseignants débutants.

I – PRESENTATION DE LA PROBLEMATIQUE ET DE LA METHODOLOGIE

Comment les enseignants, au cours de leur formation, initient ce qui deviendra leur pratique future ? Que se passe-t-il lorsque ces enseignants préparent, mettent en oeuvre des séances et réfléchissent sur leur pratique ?

Ce questionnement, point de départ de notre recherche[1], s'inscrit dans une question à la fois vaste et complexe : Comment se forment les pratiques ? C'est cette question qui est au centre de notre travail.

I – 1 Un moyen d'accès aux pratiques

Comment aborder la question de la formation des pratiques ? Comment décrire le processus de la formation des pratiques en tenant compte simultanément des multiples influences auxquelles sont soumis les enseignants tout au long de leur formation initiale ? On peut penser qu'il faudrait tenir compte, en premier lieu, de leur vécu, notamment de leur expérience d'élève qui leur sert de référence mais aussi des savoirs théoriques et pratiques rencontrés dans les cours à l'IUFM et en stage.

[1] *Thèse en cours sous la direction de Denis Butlen, Université de Paris 7 (DIDIREM).*

De plus, comment appréhender, dans la durée, le cheminement- probablement non linéaire- de l'enseignant novice ? Il faudrait pouvoir décrire le processus de formation des pratiques avec ses avancées, ses hésitations, ses retours en arrière et l'instabilité des pratiques qui en résulte.

La complexité de la question de la formation des pratiques nous amène à trouver un moyen pour accéder aux pratiques. Il s'agit de regarder la formation des pratiques à travers l'analyse des effets d'un scénario de formation : des Ateliers d'Analyse de Pratiques Professionnelles (que nous noterons AAPP).

I – 2 Présentation générale du dispositif de formation

Le plan de formation prévoit pour la deuxième année de formation IUFM, un module « Analyser les pratiques professionnelles, préparer et exploiter les stages » qui se déroule sur cinq périodes réparties tout au long de l'année de formation.

- La première période est consacrée à une initiation à l'observation et au stage de pratique accompagnée.
- Les trois périodes suivantes sont organisées de façon identique. Pour chacune de ces trois périodes sont prévus un stage en responsabilité précédé d'une série d'AAPP. Les PE2 sont répartis en petits groupes de 4 à 7. Chaque groupe est accueilli dans la classe d'un maître formateur.
- La dernière de ces cinq périodes permet d'exploiter et d'approfondir les AAPP, les stages en responsabilité et d'en faire les bilans.

Sur les 115 heures consacrées au module d'analyse de pratiques, 20 heures correspondent aux AAPP en mathématiques.
Au cours de ces AAPP, des PE2, par petits groupes, élaborent et mettent en oeuvre une séquence de mathématiques avec l'aide des maîtres formateurs et des professeurs d'IUFM. Les séances menées par les PE2 donnent lieu à une analyse « à chaud » puis une analyse en différée grâce à l'utilisation de la vidéo. Deux catégories professionnelles de formateurs interviennent conjointement : des professeurs d'IUFM et des maîtres formateurs. Les AAPP concernent plusieurs disciplines : mathématiques, français, découverte du monde, technologie.
Voici le planning type d'une série d'AAPP. Ce planning se répète trois fois au cours de l'année de formation.

Lundi	*Séance de préparation*
Jeudi	*Mise en œuvre du projet, observation et analyse*
Lundi	*Affinements des préparations*
Jeudi	*Mise en œuvre du projet, observation et analyse*
Lundi	*Affinements des préparations*
Jeudi	*Mise en œuvre du projet, observation et analyse*
Lundi	*Analyses différées - documents vidéo*

Le lundi, tous les formés et tous les formateurs intervenant dans les AAPP se réunissent à l'IUFM pour une séance au cours de laquelle chaque groupe de PE2 prépare avec le maître formateur désigné pour les accueillir un projet d'enseignement pour chacune des disciplines. Les professeurs d'IUFM interviennent ponctuellement auprès des différents groupes pour apporter des informations, des documents, une aide supplémentaire en fonction des besoins ou des sollicitations des PE2. A l'issue de la séance, un PE2 doit être investi par le groupe de la responsabilité de la mise en œuvre de la première séance, pour chacune des disciplines. Il a jusqu'au jeudi pour affiner la préparation.

Le jeudi matin, le petit groupe de PE2 est accueilli dans la classe du maître formateur pour mettre en œuvre les séances préparées le lundi. L'un d'entre eux est chargé de la première séance de mathématiques, un autre de la séance de français, un troisième de la première séance d'un projet dans une autre discipline. Les autres PE2 observent leur prestation avec l'aide du maître formateur et éventuellement d'un professeur d'IUFM. Un entretien « à chaud » suit la séance auquel participent les PE2 et le(s) formateur(s).

Le lundi suivant, formateurs et formés se réunissent à nouveau à l'IUFM pour affiner les préparations, apporter des ajustements au projet initial en fonction de bilan de la séance menée le jeudi. Un PE2 doit être investi par le groupe de la responsabilité de la mise en œuvre de la deuxième séance qui aura lieu le jeudi suivant.

Et le scénario se poursuit ainsi, alternant les séances à l'IUFM destinées à la préparation du projet avec les séances en classe où les PE2 sont chargés de le mettre en œuvre.

I – 3 Notre choix et ses conséquences

I – 3.1 Un découpage

Réduire l'étude de la formation des pratiques au cadre du scénario de formation choisi nous permet de restreindre les paramètres à prendre en compte dans cette étude.

I – 3.2 Un certain regard sur ce découpage

Une autre conséquence de ce choix est la façon dont nous allons regarder ce découpage de la réalité. En effet, nous aborderons l'étude du scénario de formation non pas pour lui-même mais dans le but de mieux appréhender la formation des pratiques et nous proposons pour cela, d'analyser les effets de ce scénario. Notre ambition n'est pas de juger de la pertinence du scénario de formation mais d'étudier la formation des pratiques. Notre méthodologie ne vise pas à mesurer les effets *réels* du scénario en comparant un "avant" et un "après" ou de rapprocher les effets *observés* de ceux *attendus* mais à rechercher à travers les effets de la formation, des renseignements sur le "mécanisme" de la formation des pratiques.

I – 4 Les grands axes de la méthodologie

Parce que nous avons fait le choix de regarder la formation des pratiques à travers l'analyse des effets d'un scénario de formation, notre problématique se précise.

Evaluer les effets des AAPP, nécessite de cerner, préalablement, comment ce scénario de formation est conçu. Sur quelles hypothèses repose-t-il ? Quels sont les effets *attendus a priori* des concepteurs ? Mieux appréhender le contexte dans lequel se forment les pratiques sera un préalable nécessaire à notre travail, c'est pourquoi nous étudierons <u>le scénario conçu</u>.

Pour étudier les effets du scénario, nous devrons, bien sûr, étudier le scénario tel qu'il s'est effectivement déroulé : le scénario effectif. Afin de répondre aux questions posées, nous décrirons l'acte de formation qui se joue pendant ces AAPP de la séance de préparation jusqu'aux entretiens à chaud et en différé, afin de le caractériser et d'en dégager les effets produits.

Enfin, à travers le suivi de certains enseignants sur leur premier poste, nous chercherons des traces de ces effets dans leur pratique, non pas, bien évidemment, dans le but de mener une évaluation des effets à long terme du scénario mais toujours pour mieux comprendre comment se forment les pratiques.

Le questionnement de départ se contextualise au découpage choisi et notre méthodologie consistera à analyser “ce qui se passe” lorsqu'un PE2 élabore, met en œuvre et réfléchit sur sa pratique.

II – CADRE THEORIQUE

Quels cadres théoriques devons-nous mobiliser pour aborder notre questionnement ? Quelles hypothèses allons-nous retenir ? Quels outils allons-nous utiliser ?

II – 1 Cadre théorique général : les recherches sur les pratiques des enseignants

Si l'objet principal de notre recherche porte sur la formation des pratiques des enseignants débutants, nous devons préciser le cadre théorique général dans lequel nous situons cette question.

Le cadre théorique retenu est celui de la double approche, didactique et ergonomique des pratiques d'enseignement, développée par Robert, en collaboration avec Rogalski. Il s'agit de tenir compte à la fois des apprentissages potentiels des élèves et du métier d'enseignant pour décrire les pratiques. Ainsi, si les descriptions des pratiques en classe se font en analysant les activités des élèves que l'enseignant provoque, à la fois par les tâches prescrites et par le déroulement fin qu'il organise, des déterminants externes sont convoqués pour comprendre et interpréter les choix (sociaux, institutionnels, personnels).

II – 2 Comment analyser les pratiques enseignantes ?

Nous retenons de la théorie de la double approche, le choix méthodologique consistant à utiliser les notions de tâche et d'activité pour analyser les pratiques enseignantes et l'hypothèse selon laquelle les pratiques sont cohérentes et stables et les régularités intrapersonnelles sont la manifestation d'une cohérence en germe chez les enseignants débutants.

III – METHODOLOGIE

III – 1 Définir le “cahier des charges”

La méthodologie générale peut se résumer ainsi : rechercher des éléments de réponse à une question très large en examinant celle-ci à travers une certaine focale. Par conséquent, la première des conditions requises est de tenir compte, à la fois, des questions posées et de l'objet d'étude à travers lequel nous cherchons à répondre à ces question.

III – 1.1 Une méthodologie adaptée à l'objet d'étude

Pour être adaptée à l'étude du scénario de formation choisi, la méthodologie doit tenir compte de ce qui le caractérise. Un groupe composé de PE2 (aux cursus universitaires et aux expériences professionnelles diverses) encadré par une équipe de formateurs intercatégorielle (MF et professeurs d'IUFM) et pluridisciplinaire doit préparer, mettre en œuvre et analyser *a posteriori* une séquence d'enseignement.

Par conséquent, la méthodologie utilisée doit tenir compte :

- de la diversité des acteurs qui participent à la formation (les PE2 et leurs parcours universitaire et/ou professionnel, les formateurs et leur expertise liée à leur catégorie professionnelle)
- des différents épisodes imposés par le scénario (la préparation de la séquence, la mise en œuvre, les entretiens *a posteriori*)

➢ <u>Prendre en compte la diversité des acteurs de la formation</u>

Différents acteurs interviennent dans cette formation. Les PE2 abordent ces AAPP, avec certaines représentations (des mathématiques, de leur enseignement, du métier en général), des savoirs susceptibles d'être mobilisés (mathématiques, didactiques, pédagogiques, pratiques…). Les formateurs possèdent également des représentations des mathématiques, de leur enseignement et des savoirs à enseigner. Mais, de plus, ils abordent les AAPP avec une certaine expertise issue de leur expérience professionnelle. Avant d'étudier le scénario de formation, il convient de s'interroger sur ce qui constitue le “bagage” de chacun des acteurs de cette formation.

Nous distinguerons, parmi les formateurs, les maîtres formateurs et les professeurs d'IUFM.

L'expertise du maître formateur est caractérisée par le fait que celui-ci est à la fois enseignant et formateur. Le professeur d'IUFM dispense des cours, il effectue des visites de stage (stage en responsabilité) et participe aux AAPP. Par conséquent, il est à la fois en contact avec le volet théorique, le volet pratique la formation, éventuellement, avec la recherche. Chacun des formateurs aborde, donc, ces AAPP avec son expertise : des savoirs, des représentations du métier en partie liés à sa catégorie professionnelle.

Les PE2 ont des représentations (sur les mathématiques et leur enseignement) et acquièrent des savoirs de différents types : mathématiques, didactiques, pédagogiques, pratiques… pendant les cours en IUFM, les stages de formation et les séances d'AAPP déjà vécues (en tant qu'observateur, ou en tant qu'acteur), pendant les séances menées par les maîtres formateurs et les professeurs d'IUFM sur un thème, éventuellement grâce à leur expérience de l'enseignement, d'autres peuvent avoir une expérience de l'animation, tous ont leur expérience d'élèves.

Comment chacun de ces acteurs aborde-t-il les AAPP ? Afin de cerner quel “rapport” chacun entretien avec cette formation, nous chercherons à répondre à trois types de questions à décliner en fonction des différents types de partenaires de la formation.

- Quel sens lui donne-t-il ? À quoi, d'après lui, cela sert-il ?

- A-t-il un projet par rapport aux AAPP ? Lequel ?
- Quelle est la part des contraintes qui lui sont imposées ? Comment les gère-t-il ?

➢ Distinguer les cinq phases imposées par le scénario

Le scénario de formation détermine cinq épisodes distincts dans l'activité du maître, cinq phases pendant lesquelles le PE2 est en train de réfléchir sur sa pratique. Deux phases se déroulent avant la mise en oeuvre de la séance et deux après celle-ci.

Ces cinq phases correspondent à :

AVANT : Phase n°1 : La séance de préparation et Phase n°2 : Le PE2 prépare seul la séance à mener

PENDANT : Phase n°3 : La mise en œuvre de la séance

APRES : Phase n°4 : L'entretien “à chaud” et Phase n°5 : L'entretien en différé

III – 1.2 Une méthodologie au service de la problématique développée

Comme cela a été précisé précédemment, la problématique de cette recherche est organisée autour d'une question centrale, celle de la formation des pratiques et les grandes lignes de la méthodologie consistent à étudier cette question à travers l'étude d'AAPP. Le fait que l'étude des effets du scénario soit au cœur de notre travail ne doit pas induire en erreur sur l'objet de la problématique. Les effets du scénario de formation sont recherchés, ici, dans la perspective d'une description des pratiques des PE2.

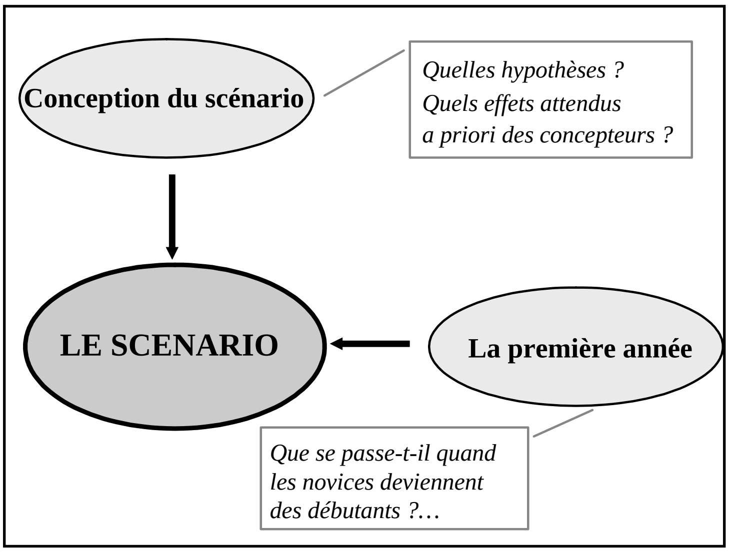
A cette fin, la méthodologie visée doit permettre non pas de rechercher des traces *a posteriori* des effets attendus *a priori* par les formateurs mais de décrire et analyser le parcours des PE2 tout au long des AAPP. Les outils choisis doivent fournir les moyens de comprendre ce qui se passe lorsque le PE2 réfléchit sur sa pratique de la séance de préparation jusqu'au moment des entretiens. Comment retracer le cheminement du PE2 chargé de la séance, du projet initial à sa mise en œuvre ? Quelle analyse fait-il de sa pratique tout au long de ce cheminement et au moment des entretiens *a posteriori* ? La méthodologie utilisée devra nous fournir des éléments de réponses à ces questions afin d'y déceler les effets du scénario. Elle devra également, permettre de mieux cerner les effets attendus *a priori* des concepteurs et des formateurs afin de dépeindre le contexte dans lequel se développent les pratiques.

Ainsi, de la nécessité de tenir compte, à la fois, des questions posées et de l'objet d'étude à travers lequel nous cherchons à y répondre, se dégage le “cahier des charges” suivant :

La méthodologie utilisée doit permettre d'appréhender ce qui se passe au cours des différentes phases et selon le point de vue de chacun des acteurs afin d'une part d'analyser l'écart entre le projet initial et la séquence réalisée et d'autre part d'analyser comment est pris en compte cet écart par la formation.

A partir de ce “cahier des charges”, seront mises au point la méthodologie de recueil des données et celle du traitement de ces données.

III – 2 Méthodologie de recueil des données : choix et planning



Le recueil des données s'est déroulé sur trois années consécutives.

Au cours de la première année, nous avons observé le dispositif en réalisant des enregistrements de séance et d'entretiens, afin de mieux comprendre le fonctionnement du scénario et au-delà comment il a été conçu.

Au cours de la deuxième année, de nombreuses séances et entretiens ont été filmés. Parmi les données recueillies, nous avons retenu celles concernant cinq PE2.

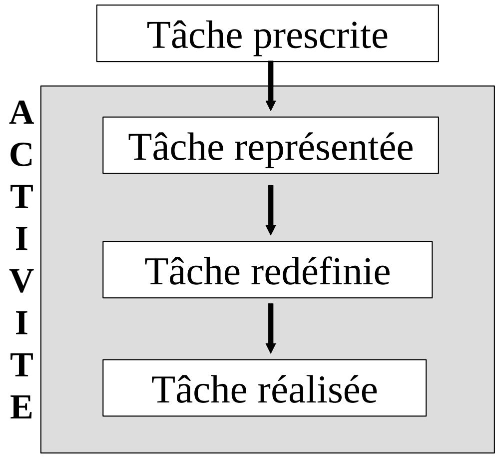
Au cours de la troisième année, nous avons retenu les données de trois PE2 parmi les cinq suivis l'année précédente. Ces trois stagiaires paraissaient emblématiques par rapport aux questions que nous nous posions.

III – 3 Méthodologie de traitement des données

L'objet de ce paragraphe est d'exposer comment à partir des conditions listées dans le paragraphe précédent a été construite la méthodologie utilisée pour analyser le corpus de cette recherche.

Tout d'abord, précisons notre point de départ : la référence au schéma proposé par Jacques Leplat (Leplat, 1997, p.17).

Dans ce schéma, Jacques Leplat décrit la tâche du sujet comme une succession de tâches.



Jacques Leplat : Regards sur l'activité en situation de travail

Le schéma de Leplat est général. Pour l'adapter à notre objet d'étude et à notre problématique, nous devons le modifier. Cette adaptation va se faire en trois étapes, présentées ci-dessous.

III – 3.1 Première étape : Transposition du schéma de Leplat à la situation de formation

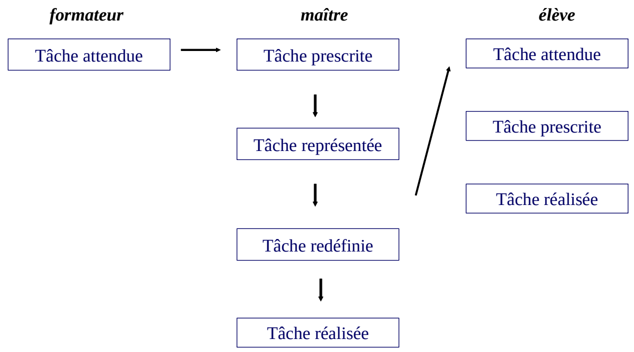
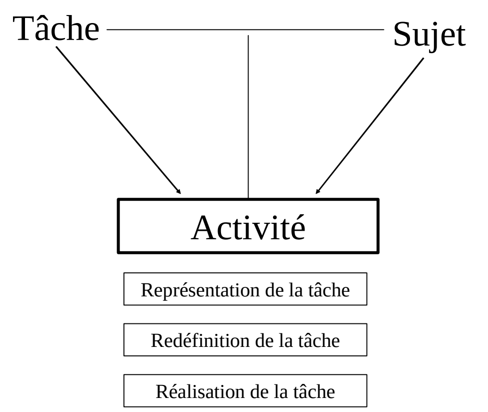


Schéma de Leplat transposé à la situation de formation

Afin de décrire l'activité des différents acteurs, tout au long du scénario, reprenons le schéma de Leplat : "de la tâche à réalisée à l'activité décrite en terme de tâches".

Nous transposons ce schéma dans le cadre de la situation de formation en faisant apparaître l'activité du formateur, du maître et celle de l'élève.

III – 3.2 Deuxième étape : centration de l'activité à la fois sur la tâche et sur le sujet



Analyse de l'activité centrée à la fois sur la tâche et sur le sujet

Le schéma proposé par Leplat est centré sur la tâche. Or, répondre à la problématique qui est la nôtre nécessite de prendre en compte grâce à la méthodologie utilisée, ce qui peut générer ces écarts : les personnes, les savoirs mobilisés, les représentations, leurs rapports aux AAPP, les contraintes auxquels elles sont soumises. C'est pourquoi, nous faisons le choix de prendre en compte l'activité et non la tâche.

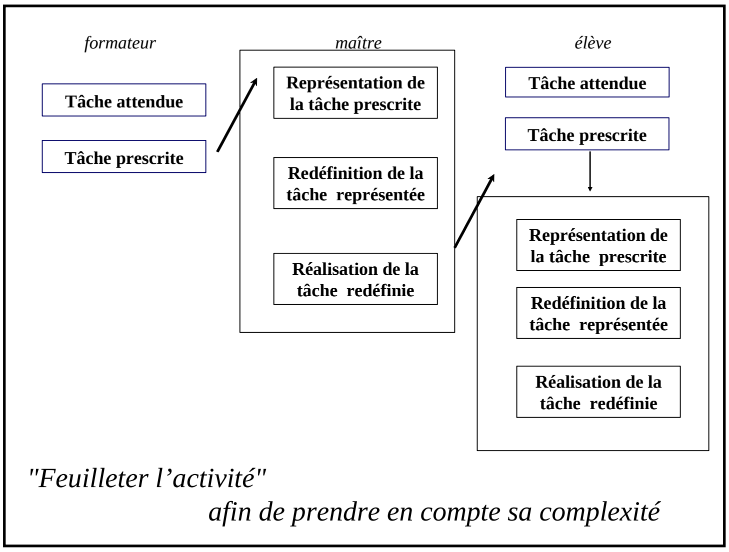
Par conséquent, reprenant le choix fait à l'étape précédente et centrant notre analyse à la fois sur la tâche et sur le sujet, nous définissons : trois niveaux qui correspondent à trois positions du maître.

- REPRESENTATION DE LA TACHE
- REDEFINITION DE LA TACHE
- REALISATION DE LA TACHE

L'étude de l'activité du maître consistera à décrire comment le maître passant d'une position à l'autre (certaines peuvent avoir lieu simultanément) prépare et met en œuvre la séance. L'analyse des entretiens consistera pour l'essentiel à cerner sur quel niveau ou position porte les échanges.

III – 3.3 Troisième étape : prise en compte de la complexité des pratiques par un feuilletage de l'activité

Afin de prendre en compte la complexité des pratiques, nous allons "feuilleter" l'activité du maître. Suivant l'ordre chronologique, décrivons l'activité du formateur et celle du maître à partir du schéma ci-dessous.



a) Au moment de la préparation du projet, le formateur envisage l'activité du maître, celle des élèves. Il les analyse par anticipation et commence à préciser la tâche attendue du PE2 par le formateur. Mais, bien sûr, l'activité du maître ne sera pas tout à fait celle-là et il en va de même pour celle des élèves.

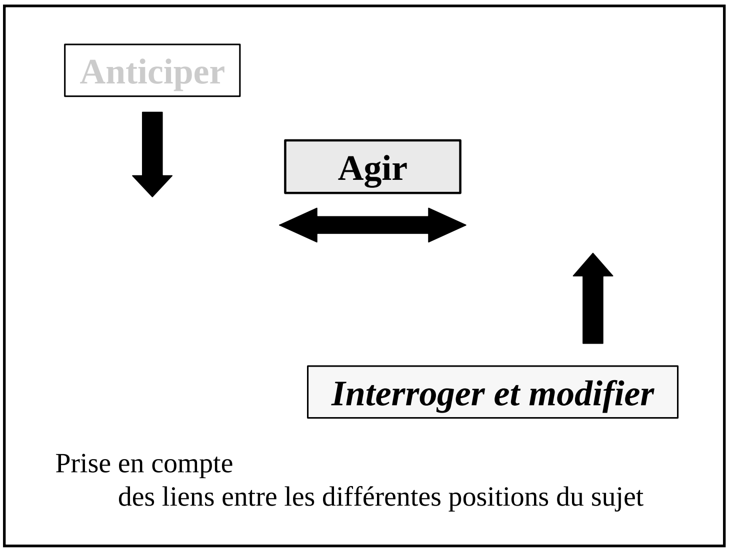
b) Quant au maître, au moment de la préparation de la séance, il commence à se représenter la tâche prescrite par le formateur, c'est-à-dire "ce qu'il pense qu'on attend de lui".

c) La tâche représentée n'est qu'un modèle imparfait, pour l'opérationnaliser, le maître, tout en se représentant la tâche commence à la redéfinir. A cette fin, il est amené à interroger voire modifier la représentation de la tâche prescrite.

d) Enfin, le maître met en œuvre la séance, c'est le moment de la réalisation de la tâche du maître et de celle des élèves. Au cours de l'action, il est probablement amené à apporter des modifications au projet tel qu'il l'avait anticipé, et par conséquent à interroger et modifier la représentation et la réalisation de la tâche.

Ainsi, en feuilletant l'activité, nous percevons les liens existant entre les différents niveaux ou, en d'autres termes, les changements de positions effectués par le maître.

Au cours de son activité, il agit dans une position donnée mais il peut, pour cela, envisager une autre position par anticipation ou alors, réinterroger voire modifier des positions précédemment occupées. (cf. schéma ci-dessous)



IV – LA PREMIERE ANNEE

Les données recueillies au cours de la première année ont permis de dégager les hypothèses sur lesquelles se sont appuyés les concepteurs du scénario.

Trois effets attendus *a priori* peuvent être mis en évidence.

- placer les PE2 dans le contexte "protégé" des classes des maîtres formateurs facilite l'acquisition de gestes professionnels adaptés

- l'intervention conjointe de maîtres formateurs et de professeurs d'IUFM favorise le lien entre la théorie et la pratique vers une plus forte cohésion des savoirs

- les entretiens « à chaud » puis en différé avec l'utilisation de la vidéo aident les PE2 à adopter une posture de “praticien réflexif.”

V– LA DEUXIEME ANNEE

V – 1 Première question : Comment interpréter les écarts entre le projet du formateur et la séance observée ?

Pour trouver des éléments de réponse à cette question, examinons les conclusions de l’analyse de la séance menée par Julie au cours de la troisième série d’AAPP.

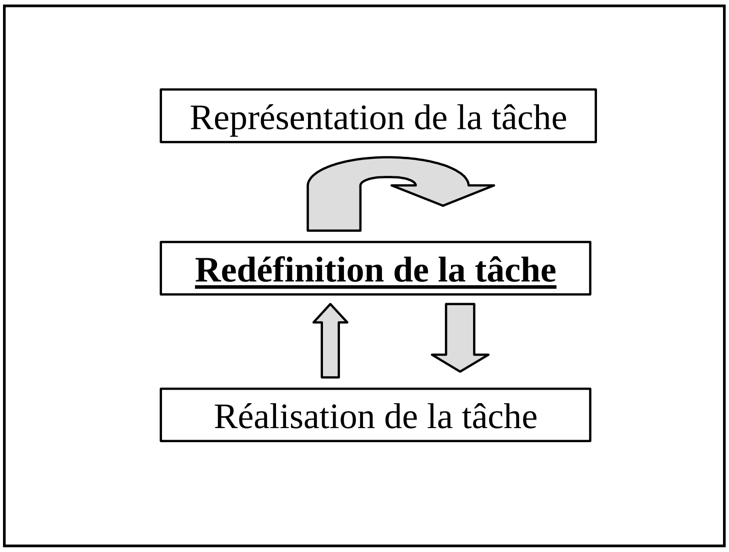
Le projet mis au point pendant la séance de préparation est le suivant. Il s’agit d’introduire l'écriture multiplicative comme une écriture plus économique de l’addition réitérée.

Pour cela, le MF conseille de mettre en place une situation de communication : les enfants doivent commander les cubes nécessaires à la construction de tours de même taille et laisser apparents leurs calculs (par ex : 15+15+15 +…..). Julie devra, au cours d’une phase de synthèse, introduire le signe “x” afin de simplifier les écritures utilisées par les enfants.

La méthodologie que nous avons mise au point nous permet de déceler et de décrire un processus de modifications de la tâche prescrite par le formateur au PE2.

En effet, dans un premier temps, Julie pense ne pas réussir à gérer le projet des formateurs et fait le choix de procéder autrement. Elle modifie, donc, le projet initial. Elle supprime la situation de communication et met des cubes à disposition des élèves. Elle propose des exercices issus du fichier CAP MATHS[2] sans tenir compte de la progression dans laquelle ils s'inscrivent. Les modifications apportées ne sont pas sans conséquence sur la tâche réalisée par les enfants. Ceux-ci construisent des tours et dénombrent les cubes utilisés mais n'ont pas besoin d'écrire de calcul. L'objectif qu'elle s'est fixé n'est pas en cohérence avec le parcours proposé aux les élèves. Au cours de la mise en œuvre, elle n'anticipe pas le "piège" dans lequel elle est en train de s'enfermer et tente d'institutionnaliser l'écriture multiplicative comme une écriture plus économique.

Par conséquent, l'écart constaté au moment de la réalisation de la tâche est issu "en amont", d'un écart créé au moment de la redéfinition de la tâche lorsque Julie, anticipant les difficultés qu'elle pensait rencontrer au moment de sa réalisation a fait le choix de s'écarter du projet du formateur. Utilisant deux sources différentes et construisant une représentation erronée de la tâche du maître, Julie s'enferme dans un processus qui s'amplifie peu à peu. Les modifications s'enchaînent et se renforcent mutuellement.



V–2 Deuxième question : qu'est ce qui initie ce processus de modifications ?

---

[2] *Cap maths CE1, Guide des activités, édition 2000 Roland Charnay, Marie-Paule Dussuc, Paul Madier , Hatier*

Au cours de la séance menée par Julie, le processus de modifications a été initié par un problème rencontré par Julie au niveau de la redéfinition de la tâche : comment gérer une situation de communication ? Mais, le processus de modifications peut être initié à d'autres niveaux comme le montre la séance menée par Pierre à la suite de celle de Julie.

Le professeur d'IUFM a remis à Pierre une fiche présentant une situation de communication au cours de laquelle les enfants vont devoir rédiger un message susceptible de caractériser un quadrillage de *a* lignes et *b* colonnes. La tâche de l'enseignant est d'amener les élèves à utiliser l'écriture *a x b* et de mettre en évidence le caractère numérique de cette écriture (*axb* désigne le nombre de carreaux de la grille)

Pierre respecte les grandes lignes du projet du formateur : l'organisation générale de la séance, les grandes étapes de son déroulement. Il conserve également les données numériques.

Par contre, il s'écarte du projet du formateur car dans le document, on fait référence à la notion de jeu de cadres[3] et il ne comprend pas pourquoi le maître doit montrer aux élèves que l'écriture a × b désigne un nombre. Alors, il ne donne qu'une partie de la consigne, il ne fait pas valider les messages par un retour vers les émetteurs et il donne, en fin de séance, des explications sur des notions qu'il juge, probablement, plus importantes comme la commutativité, les tables de multiplication.

Ici, le processus de modifications a été initié dès le niveau de la représentation de la tâche car Pierre ne peut mobiliser les savoirs nécessaires pour se représenter l'intérêt d'un jeu de cadres. L'écart, ainsi créé, se répercute sur la redéfinition et la réalisation de la tâche. Pierre conserve du projet initial ce qui est le moins coûteux pour lui en terme de difficultés (le plus facile à comprendre, à préparer, à mettre en œuvre…) et s'écarte du projet lorsque cela lui pose problème et/ou lui demande un effort d'adaptation trop important. Se dégage à travers les choix de Pierre, une stratégie qui consiste à donner l'impression de respecter le projet du formateur tout en poursuivant son propre projet.

---

[3] *Notion définie par Régine Douady. Les jeux de cadres sont des changements provoqués à l'initiative de l'enseignant pour faire avancer les phases de recherche et notamment pour élaborer une filiation de questions pertinentes par rapport au problème posé. Ici, il s'agit de présenter l'écriture multiplicative dans deux cadres. Un cadre géométrique : a x b désigne le nombre d'objets d'une collection organisée ou pouvant s'organiser sous forme de grille rectangulaire. Un cadre numérique : a x b sera une écriture plus courte de l'écritures additives réitérées.*

<u>Représentation de la tâche</u>

⇓

Redéfinition de la tâche

⇓

Réalisation de la tâche

La difficulté à laquelle le PE2 est confrontée et qui initie un processus de modifications peut se situer à différents niveaux.

- Au niveau de la représentation de la tâche : Pierre ne maîtrise pas suffisamment les savoirs didactiques nécessaires
- Au niveau de la redéfinition de la tâche.

V – 3 Troisième question : quels sont les paramètres susceptibles de jouer sur ce processus ?

Nous cherchons à isoler à partir du corpus recueilli au cours des trois séries d'AAPP, les paramètres dont dépendent les difficultés rencontrées par les PE2 et qui sont à l'origine de processus de modifications.

➢ <u>Du côté du groupe : le rôle joué par le “collectif”</u>

Alors que Julie s'était écartée, dès la préparation, du projet des formateurs, alors que Pierre avait redéfinie la tâche dans l'action en menant son propre projet, Cécile parvient à résoudre le problème qui lui est posé et satisfait à la volonté du groupe, moyennant quelques difficultés au niveau de la mise en œuvre. Est-ce dû aux compétences de Cécile ou à l'aide apportée par le groupe ? Quel est le rôle joué par le “collectif” ?

Un élément de réponse se trouve dans l'adhésion de Cécile au projet construit, en commun, en cohérence avec les observations réalisées, dans le respect et à partir des remarques faites par les PE2. Au cours de l'entretien précédent, les échanges entre les différents membres du groupe ont créé une synergie. Parce que formateurs et PE2 ont *ensemble*, réfléchi aux problèmes posés et proposé, *ensemble*, des éléments de réponses, ils ont partagé la prescription de la tâche construisant dans le même temps sa représentation et réduisant les sources d'écarts au moment de sa redéfinition. Tout se passe comme si la tâche prescrite coïncidait avec la tâche que Cécile se prescrit à elle-même.

➢ <u>Du côté de la situation</u>

Examinons, les situations proposées par les formateurs aux cours de ces AAPP afin de caractériser celles dont la préparation et la mise en œuvre ont posé problème au PE2 et l'ont, de ce fait, engagé dans un processus de modifications.

Parce qu'elle fait appel à des connaissances didactiques, la situation proposée à Pierre va le confronter à un problème dès la représentation de la tâche. L'analyse *a priori* de la séance proposée à Pierre révèle que les modalités prévues pour amener les élèves à prendre conscience du caractère numérique de l'écriture multiplicative reposent sur la volonté du maître. Cette partie de la séance est didactique. Par conséquent, Pierre peut la modifier. Parce qu'elle n'est pas robuste sur cet aspect-là, Pierre va pouvoir s'écarter du projet du formateur et s'engager dans un processus de modification.

Au cours de la deuxième série d'AAPP, Julie a préparé et mené, en grande section de maternelle, une séance au cours de laquelle les enfants devaient reproduire des modèles en utilisant les pièces du jeu du TANGRAM. La situation ne posait pas de problème ni au niveau de la représentation de la tâche, ni au niveau de la redéfinition. Seule la mise en œuvre pouvait donner lieu à modifications.

Nous avons mis en évidence deux paramètres qui interviennent du côte du choix de la situation : sa robustesse (au plus la situation est robuste au moins il y a de modifications au niveau de la redéfinition) et sa complexité (le processus est d'autant plus important que la situation est complexe). Pour un processus de modifications important, on peut, donc, penser qu'il faut réduire les contraintes et complexifier la situation.

- Du côté du formateur

La tâche peut être seulement définie à travers ses buts. Le problème posé au PE2 est d'autant plus important que celui-ci doit prévoir les modalités de la situation mathématique à faire vivre aux élèves.

Le problème posé sera d'autant plus réduit que le formateur anticipe sur l'activité du maître et envisage par anticipation les différents niveaux ou positions de l'activité du maître.

- Du côté du PE2

Les savoirs du PE2, ses représentations sur les mathématiques et sur leur enseignement mais aussi le rapport que celui-ci entretient avec la formation en général et les AAPP en particuliers pèsent sur le processus de modifications.

V – 4 Quatrième question : comment ce processus de modifications est-il pris en compte au cours du scénario ?

- Par anticipation sur l'activité du maître ?

Les difficultés auxquelles sont confrontées les PE2 ne sont pas forcement celles prévues par le formateur. Lorsqu'un décalage est mis en évidence entre la tâche prescrite et la tâche réalisée, l'écart peut provenir de la réalisation de la tâche, mais aussi de la redéfinition de la tâche ou encore de la représentation de la tâche. Il est d'autant plus difficile pour le formateur de prévoir les problèmes rencontrés par les PE2 que la situation proposée est peu robuste et/ou complexe. En effet, si le PE2 modifie la tâche prescrite au moment de la représentation et/ou de la redéfinition, il va devoir réaliser une tâche qui n'est pas celle prévue par le formateur et faire face, au moment de la mise en œuvre, à des problèmes auxquels il ne s'attendait pas.

Il est, par conséquent, difficile pour le formateur d'anticiper sur ce que sera l'activité du maître.

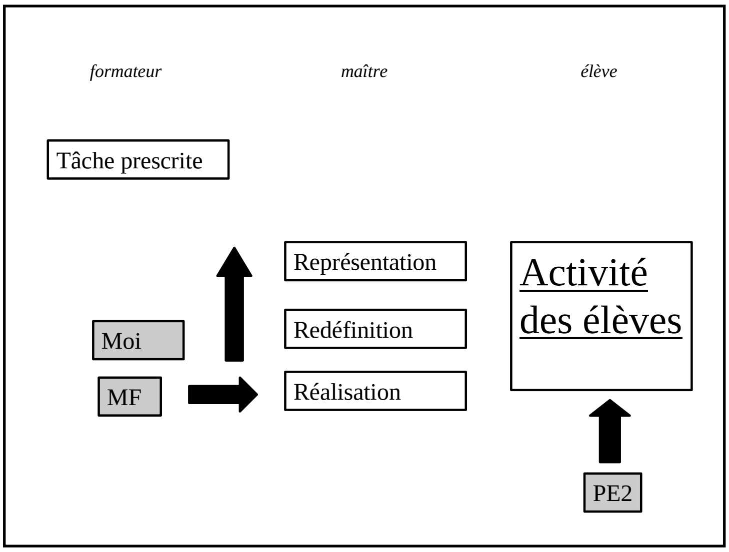
➢ <u>Grâce à un retour réflexif sur l'activité du maître ?</u>

L'analyse des entretiens révèle des régularités dans l'analyse que fait chacun des acteurs de la séance. En effet, selon la catégorie à laquelle il appartient, chacun des acteurs regarde une partie de ce processus :

- au cours des entretiens enregistrés, les échanges initiés par le maître formateur portent majoritairement sur le même niveau : celui de la réalisation par le maître de la tâche ;

- ceux initiés par les PE2 portent sur l'activité de l'élève ;

- les interventions des professeurs d'IUFM consistent essentiellement à placer les échanges au niveau de la représentation ou la redéfinition de la tâche.



A travers les entretiens, le scénario de formation permet aux différents acteurs d'effectuer un retour réflexif sur l'activité du maître et de prendre en compte le processus de modifications. Toutefois, même si leur point de vue se complètent, les différents acteurs de la formation ne portent pas, nécessairement, un regard commun sur l'ensemble du processus de modifications.

V – 5 Cinquième question : à quelles conditions les partenaires de la formation "redéroulent"-ils ensemble le processus de modifications ?

L'analyse des entretiens montre que lorsque le "ressenti" des PE2 rejoint les objectifs de formation des formateurs alors, il est plus fréquent de constater qu'ensemble ils "redéroulent" le processus de modifications. C'est le cas de Pierre qui s'est senti en difficulté au moment de la mise en commun.

Il faut, pour cela, que le formateur, en invitant le formé à rechercher l'origine du problème rencontré, l'amène à changer de niveau, à revisiter les différentes positions de son activité afin d'identifier le problème à l'origine du processus de modifications.

VI– LA TROISIEME ANNEE

A travers l'analyse des séances enregistrées, se dégagent des régularités intrapersonnelles qui permettent de définir trois profils différents.

➢ **Julie**

- Julie n'hésite pas à modifier les documents.
- Julie a des difficultés à anticiper l'activité des élèves et notamment, à envisager le cheminement cognitif qu'ils vont suivre.
- Julie n'hésite pas à apporter des ajustements à son projet. Si nécessaire, elle expose le savoir visé par la séance et elle l'institutionnalise.

➢ **Pierre**

- Pierre utilise peu de documents issus de manuels.
- Pierre s'interroge sur l'activité des élèves.
- Pierre a un projet précis, il anticipe sur ce qu'il doit dire, il veille à être clair et à mettre rapidement les élèves au travail.

➢ **Cécile**

- Cécile s'autorise peu d'autonomie par rapport au manuel même si elle n'est pas convaincue.
- Cécile estime que pour se former, elle doit, avant tout, apprendre des élèves.
- Cécile veille à laisser les élèves s'exprimer, elle les met en situation d'apprentissage mais intervient peu.

Par conséquent, il existe des régularités intrapersonnelles au niveau du crédit accordé à chacune des sources d'informations que le maître utilise pour se représenter, redéfinir et réaliser la tâche, c'est-à-dire :

- le projet du formateur ou les documents utilisés ;
- l'analyse de l'activité des élèves ;
- l'analyse de l'activité du maître.

Ces trois profils, déjà distinguables au cours de l'année de formation, perdurent lorsque les novices sont devenus des débutants. Cependant, les trois PE2 ont acquis de l'assurance et conduisent les séances avec davantage de maîtrise. Leurs pratiques se sont opérationnalisées. Tout ce passe comme si la formation avait permis d'opérationnaliser leur façon d'utiliser les sources, de dérouler le processus de modifications.

VII– CONCLUSION

La méthodologie mise au point nous permet de décrire comment les enseignants novices ou débutants, transforment le projet initial. En montrant ce qui, en amont de l'action est souvent difficile à appréhender, cette méthodologie nous permet d'identifier l'origine des écarts constatés par les formateurs entre leur projet et la séance observée et de décrire le cheminement des maîtres jusque dans la mise en œuvre du projet ainsi modifié.

En traduisant l'activité du maître en termes de processus, nous avons mis en évidence, dans les pratiques des trois PE2 suivis, des régularités dans la façon de traiter les problèmes auxquels ils sont confrontés. Trois profils se dégagent et tout se passe comme si la formation opérationnalisait leur façon de faire fonctionner le processus de modifications.

BIBLIOGRAPHIE (TITRE 2)

BROUSSEAU G. (1986) *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 7/2, Grenoble, La pensée sauvage

BUTLEN D., MASSELOT P., PEZARD M. (2003) *De l'analyse de pratiques effectives de professeurs d'école débutants nommés en ZEP/REP à des stratégies de formation*, Recherche et Formation , 44, pp. 45-61.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 7/2, Grenoble, La pensée sauvage

LEPLAT J. (1997) Regards sur l'activité en situation de travail, Contribution à la psychologie ergonomique, Paris, PUF.

ROBERT A. (2001) *Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant*, Recherches en didactique des mathématiques, Vol 21/1-2, pp. 57- 80.

ROBERT A. (2003) De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques : le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée), Didaskalia. 22 pp99-116.

ROBERT A. ET ROGALSKI J (2002) *Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche,* Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, vol2, n°4 pp505-528.

TOCHON F.V. (1993) *L'enseignant expert,* Nathan

SHON D.A. (1994) *Le praticien réflexif. A la recherche du savoir caché dans l'agir professionnel,* trad. par J.Heynemand et D. Gagnon, Montréal, Les Editions Logiques

GEOMETRIE PLANE AU CYCLE 3 DE L'ECOLE ELEMENTAIRE DANS DIFFERENTS ESPACES INSTRUMENTES.

Jean-Pierre RABATEL
Maître-Formateur
Ecole Jean Moulin, Caluire
Jeanpierre.rabatel@laposte.net

Christiane ROLET
Chercheur
UMR ICAR, Lyon
Christiane.Rolet@univ-lyon2.fr

Résumé
Nous appuyant d'une part sur les travaux de Brousseau et de Berthelot (Colloque COPIRELEM de Chamonix 2000) sur les espaces de tailles différentes, d'autre part sur les travaux de Hoyles & Noss et Rabardel sur le rôle de l'instrumentation dans l'émergence des concepts, nous avons bâti une ingénierie dont le principe fondateur est le travail dans différents espaces instrumentés : cour de récréation avec des cordes, feuille de papier avec instruments divers, écran d'ordinateur avec les commandes d'un logiciel de géométrie dynamique.
Les 4 séquences proposées ont en commun de faire construire un quadrilatère particulier dans les différents espaces instrumentés : un carré, un losange dont l'une des diagonales vaut le double de l'autre, un parallélogramme, un "cerf-volant".
Nous nous sommes également posé le problème du passage des attendus théoriques à une mise en œuvre dans les classes, et de la compréhension de l'ingénierie par un enseignant.

Après avoir analysé les textes officiels relatifs à la géométrie plane au cycle 3, nous donnerons les points de départ de notre réflexion avant de bâtir une ingénierie. Nous donnerons ensuite des réponses de type général, puis les choix spécifiques concernant le changement de taille et d'instrumentation. Enfin nous montrerons comment nous nous sommes préoccupés de la transférabilité de notre ingénierie.

I – REORGANISATION DU SAVOIR A ENSEIGNER

I – 1 Objets et Relations

Le texte du savoir à enseigner présent dans les textes officiels, tels qu'ils sont parus en février 2002, montre une énumération de savoir-faire de natures très différentes sur toute une famille de concepts non vraiment hiérarchisés. Leur organisation, à travers les trois paragraphes "Généralités", "Programmes" et "Compétences", n'est pas évidente même si dans les compétences, ils sont regroupés en deux catégories (relations et propriétés, figures planes). Nous préférons dire que l'élève de l'école élémentaire doit donc acquérir des connaissances sur des relations et propriétés définies sur des objets de base dont on ne nous dit pas grand chose, et sur des objets et relations construits à partir des objets et des relations de base.

Le choix présenté ci-dessous nous est personnel. Le qualificatif "de base" prend en considération à la fois le savoir mathématique et le niveau d'enseignement considéré. Ce n'est pas le seul choix possible.

Objets de base (de la géométrie plane)

Nous entendons par là le point, la droite, le segment, l'angle.

Ils ne figurent dans les textes officiels que comme arguments des relations à étudier. Ainsi on parle de repérage et d'alignement de points, d'égalité des longueurs de segments, de milieu d'un segment, de parallélisme ou de perpendicularité entre droites. Il est par ailleurs demandé que ces mots soient utilisés à bon escient.

Ces objets n'ont pas d'autonomie et les conceptions que les élèves en auront seront obligatoirement et de façon implicite liées aux situations dans lesquelles ils auront été utilisés : comparaison, reproduction, construction, description.

Relations de base

Elles sont premières (mathématiquement et psychologiquement), montrées et non définies, et portent sur des objets de base.

Nous entendons par là l'alignement, l'égalité de longueurs et la perpendicularité. Les élèves doivent avoir des connaissances à leur propos, leur permettant d'utiliser des instruments divers pour reconnaître, décrire et construire des objets liés par ces relations, en particulier dans des configurations classiques de figures planes. Mais nous prenons également en compte des objets de l'espace ordinaire.

Objets construits

Ce sont les objets définis à partir des objets de base et des relations de base. Ce sont, au cycle 3 de l'école élémentaire, le milieu d'un segment, le cercle et ce que les textes officiels appellent les figures planes particulières. Là aussi, même s'il semble dans les textes officiels que les objets ne sont abordés que dans des micro-espaces (principalement celui de la feuille de papier), nous les étudierons également dans l'espace ordinaire.

Toutes les figures planes dont l'approche est demandée dans les textes officiels peuvent se décrire et se construire à partir de segments et des relations de base ci-dessus. Dans les invariants opératoires du concept de carré il y a nécessairement des invariants liés aux concepts de segment, de perpendicularité et d'isométrie.

Relations construites

Le parallélisme est une relation que l'on peut choisir de présenter aux élèves comme une relation construite. Dans un premier temps et en ne se fiant qu'au contrôle perceptif simple, la relation peut être vue comme étant de base, et les droites parallèles être reconnues ou tracées à vue. Mais dans un deuxième temps, le seul moyen de reconnaître avec un contrôle instrumenté "correct" et de construire deux droites parallèles est de les voir comme perpendiculaires à la même droite ou à une distance constante l'une de l'autre. Le parallélisme est alors construit à partir de la perpendicularité et/ou de l'isométrie.

De même, la symétrie est, au-delà de la première perception globale qui peut la faire voir comme une relation de base, construite avec les relations d'isométrie et de perpendicularité.

I – 2 Concepts

Si les situations à mettre en place pour acquérir ce savoir peuvent se déduire assez facilement des textes officiels, il n'en va pas de même des procédures, expressions différentes et contrôles possibles et/ou attendus chez les élèves. Nous avons fait une étude de chacune des relations géométriques ci-dessus en terme de concept au sens de Vergnaud (1990)[1].

> « Un concept est un triplet de trois ensembles C= (S, I, *S*)
> S : ensemble des situations qui donnent sens au concept (la référence)
> I : ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié)
> *S* : ensemble des formes langagières et non-langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant) »

Le mot situation est ici entendu dans le sens de tâche. Certaines pourront être problématiques pour un sujet donné, d'autres non. La classification des situations est faite en prenant en compte à la fois des considérations mathématiques et des considérations psychologiques.

Rappelons que les invariants opératoires correspondent aux connaissances contenues dans les schèmes d'un sujet c'est-à-dire dans l'organisation invariante de sa conduite pour une classe de situations données. Ces invariants opératoires sont de 3 types : des invariants de type proposition (théorèmes-en-acte), des invariants de type fonction propositionnelle (concepts-en-acte ou catégories-en-acte : propriétés ou relations), des invariants intervenant dans les deux précédents et de type argument. Ces connaissances sont plus ou moins conscientisées ou automatisées, les schèmes sont disponibles ou en construction selon les sujets.

En géométrie, les signifiants prendront les formes de dessins, de symboles, d'énoncés en langue naturelle et/ou en langue formelle.

Nous obtenons donc bien une manière de caractériser le savoir, si nous prenons en compte toutes les situations possibles, tous les invariants possibles et tous les signifiants possibles.

---

[1] L'ensemble de cette étude pour les relations citées se trouve sur le site MAGESI dont les références sont en fin de texte.

I – 3 Type de contrôles exercés

Par rapport à cette caractérisation du savoir, nous pouvons situer un sujet et donner sa conception relative à un concept en donnant la classe des situations qu'il sait gérer, avec l'ensemble des procédures et des signifiants dont il dispose. Nous rajouterons à cette trilogie le type de contrôle qu'il exerce, reprenant par là ce qui est évoqué dans le programme officiel, au début du paragraphe 5 :

> « …passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par explicitation de propriétés et recours à des instruments… »

Trois types de contrôle par le sujet nous semblent possibles en géométrie, les deux premiers seulement l'étant à l'école élémentaire (Rolet 1996).

Le contrôle perceptif simple

Il s'exerce sur des propriétés spatiales et/ou spatio-géométriques du dessin. Par propriétés spatiales, nous entendons des propriétés contingentes dans le cadre de la géométrie envisagée et qui sont des composantes contextuelles du dessin ou de la réalisation matérielle : par exemple, en géométrie euclidienne, la forme, la position, la taille. Par propriétés spatio-géométriques, nous entendons la traduction (lorsque cela est possible) dans le dessin ou la réalisation matérielle, de propriétés géométriques relevant de la géométrie théorique sous-jacente considérée (par exemple : alignement, parallélisme, perpendicularité).

Il utilise la vue comme instrument de construction et de validation.

Il a pour finalité la production d'un tracé ou d'un dessin "ressemblant".

Le contrôle perceptif instrumenté

Il s'exerce sur des propriétés spatiales et/ou spatio-géométriques.

Il utilise comme instruments la vue et d'autres instruments qui peuvent être :

- des instruments propres aux méso-espaces
- calque, gabarit, papier quadrillé, papier pointé, règle graduée
- règle, équerre, compas
- commandes d'un logiciel de géométrie dynamique.

Il a pour finalité la production d'un tracé ou d'un dessin possédant certaines propriétés.

Les lots d'instruments ci-dessus ne sont pas de même nature : le premier lot est propre à la taille de l'espace de travail et comporte des cordes dans des versions rudimentaires, des instruments optiques sophistiqués dans des professions du bâtiment ; le deuxième lot est peu propice à la mise en valeur de propriétés géométriques ; le troisième lot, bien que fait d'instruments "géométriques", ne nous semble pas garant d'un contrôle ne portant que sur des propriétés géométriques, une équerre pouvant être utilisée comme un simple gabarit ou une règle graduée permettant de placer un point à une distance donnée (ou calculée) de l'extrémité d'un segment sans savoir qu'il est au milieu du segment.

Le contrôle théorique

Il s'exerce sur des propriétés géométriques.

Il utilise comme instruments les démonstrations ou, à tout le moins, la cohérence des résultats.

Il a pour finalité la production d'un dessin possédant des propriétés géométriques.

II – POINTS DE DEPART DE NOTRE REFLEXION

II – 1 Difficultés pour les élèves de conceptualiser à partir du réel

Les principaux obstacles des élèves ont pour origine une modélisation difficile à partir du réel. En effet, bien que les textes officiels le demandent et bien qu'historiquement la géométrie soit né pour modéliser des objets de l'espace ordinaire, cela n'est pratiquement jamais fait à l'école élémentaire. Seuls sont assez souvent pratiqués, dans cet espace, le repérage et le codage de trajets. Les seuls espaces dans lesquels soient observés, décrits, construits des objets et relations est l'espace de la feuille de papier et quelquefois l'espace de l'écran d'un ordinateur.

Les élèves n'ont donc, comme nous avons pu le constater de façon récurrente, aucun invariant opératoire dans le méso-espace. Nous donnerons, comme exemples qui nous ont particulièrement frappés, l'isométrie et la perpendicularité. Les élèves ne savent pas prendre deux morceaux de corde de même longueur, reporter une grande longueur, chercher le milieu d'un "grand" morceau de corde : ils font appel systématiquement à des systèmes de mesure qu'ils inventent (longueurs des pieds, d'objets divers) et se trouvent en échec. Ils doivent se réapproprier la superposition, le report et le pliage. De même, tout en connaissant parfaitement, bien sûr, la perpendicularité présente dans les bâtiments autour d'eux, ils ne savent pas comment est obtenue une telle perpendicularité : ils n'ont jamais rencontré la perpendicularité de la verticale du fil à plomb et de l'horizontale d'une droite portée par une surface d'eau au repos. Ils ne se sont jamais posé le problème de la construction de gabarits dans cet espace.

Enfin, ils ont peu travaillé sur le passage de la langue naturelle, propre en particulier au méso-espace (superposition, corde tendue, verticale, horizontale, etc.) au langage de spécialité propre à la géométrie de la feuille de papier.

II – 2 Difficultés pour passer du spatial au réel

Il est reconnu que les élèves effectuent un passage difficile du dessin à la figure géométrique.

Reprenant partiellement les résultats de notre thèse (Rolet 1996), nous pouvons dire que ces jeunes élèves ont deux grands types de difficultés.

Dans les tâches de reconnaissance, ils lisent et/ou cherchent dans le dessin des propriétés spatiales, des mesures et un nombre "minimal" de propriétés géométriques ; les relations, les figures sont reconnues dans des instanciations stéréotypées. Le dessin n'est pas un représentant possible d'une figure géométrique.

Dans les tâches de construction, ils tracent un dessin "à vue" en faisant fonctionner un contrôle perceptif simple et en prenant en compte des propriétés spatiales non pertinentes (ce qui est très facile dans le contexte papier-crayon) ; ils vérifient après coup leur construction avec un contrôle perceptif instrumenté.

II – 3 Passage difficile du contrôle perceptif simple au contrôle perceptif instrumenté

Le contrôle perceptif simple exercé par les élèves est à la fois pauvre (lecture difficile de propriétés géométriques) et trop riche (lecture non pertinente de propriétés contingentes) ; le contrôle perceptif instrumenté est d'une utilisation difficile, ce problème étant lié aux difficultés de compréhension et d'utilisation des instruments fournis.

Peut-on trouver des raisons à cela ? Il nous semble que les obstacles principaux à une dialectique féconde entre dessin et figure et entre les différents types de contrôle résident dans :

- l'imbrication entre spatial et géométrique ; il y a dans notre enseignement, comme le dit C. Laborde (1994), un écrasement entre propriétés spatiales et géométriques : qu'est-il permis de lire comme propriétés dans un dessin ?
- l'attachement très fort des sujets à l'isométrie et à la similitude (dans cet ordre, alors qu'historiquement la similitude était première)
- le manque d'appréhension opératoire des figures : le sujet n'envisage pas plusieurs lectures possibles du dessin en tant que figure géométrique ; il se focalise sur les mesures, ce qui empêche l'émergence d'autres propriétés telles que l'incidence, l'égalité de mesures, des rapports de mesures, etc…
- l'appréhension d'un dessin unique à un endroit précis de la feuille, sans imagination ou prise en considération d'autres "cas de figure", d'autres instanciations de la même figure géométrique
- une pratique fréquente, habituelle, de la reproduction de dessins, que cette reproduction soit demandée de façon explicite ou non
- une difficulté à analyser les rapports entre registres figuraux et discursifs.

Sans nier les origines épistémologiques de ces obstacles (on sait l'émergence difficile du concept d'invariant géométrique), on peut également relever de probables origines didactiques à trouver dans l'enseignement reçu et pratiqué par ces sujets.

II - 4 Problème de la langue de spécialité

Travaillant dans un laboratoire où beaucoup de chercheurs étaient spécialistes de l'étude des interactions verbales, nous avons eu l'occasion de travailler (et d'encadrer un mémoire de DEA) sur le passage de la langue naturelle à la langue de spécialité.

Langue naturelle, langue de spécialité

Les textes officiels insistent en de nombreux endroits sur la nécessité pour les élèves d'acquérir au moins un lexique et des formulations relevant de la langue de spécialité. "*L'usage ordinaire de la langue orale et les formulations spontanées des élèves prévalent. Ils sont toutefois complétés par le recours à un lexique et à des formulations spécifiques,* *nécessaires à la rigueur du raisonnement* " trouve-t-on dans les compétences générales. Ces mots et ces formulations doivent surtout servir à décrire des propriétés ; mais il n'est pas question d'en donner une définition de nature mathématique mais d' "Utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : …"

Dans les manuels scolaires, ce passage délicat est peu évoqué, et bien sûr les mots de la langue de spécialité sont employés. Chaque enseignant se retrouve quasiment seul face à ce problème.

Or, il semble qu'il y ait différents types de mots : ceux qui n'existent que dans la langue de spécialité (perpendicularité, losange…), ceux qui ont des synonymes dans la langue naturelle (segment et trait, par exemple) et ceux qui existent dans les deux langues avec une restriction de sens dans la langue de spécialité (droite, extrémité). Or il semble que l'acquisition de ces divers types de mots soit de difficultés différentes et probablement croissantes.

Problème des syntagmes

Quant aux syntagmes, leur acquisition est encore plus difficile à acquérir car elle se fait après la compréhension par les élèves de la nécessité de donner des noms aux objets pour lever les ambiguïtés et de donner des arguments pour définir certains objets. L'expression "la droite" suffit lorsqu'on la montre d'un geste déictique, l'expression "la parallèle" suffit lorsqu'on vient de la tracer par exemple… Chacun sait combien la dénomination par les élèves eux-mêmes est difficile et combien l'emploi spontané du syntagme "droite parallèle à … passant par… " est peu fréquent !

La compréhension précède l'emploi

Les élèves comprennent la langue de spécialité avant de l'employer. Cette compréhension est d'abord orale et est facilitée par l'emploi successif par l'enseignant des deux types de langues.

Programmes de construction

L'écriture de programmes de construction n'est pas vraiment dans les textes officiels car "Décrire une figure en vue de l'identifier dans un lot de figures ou de la faire reproduire sans équivoque" ne demande pas l'écriture d'une suite d'ordres simples exprimés dans la langue de spécialité. Les premières années de mise en place d'une ingénierie, nous avons passé beaucoup de temps et d'énergie pour peu de résultats. Les difficultés des élèves (en lien avec leurs difficultés transversales à s'exprimer clairement et à écrire de façon intelligible) étaient telles que nous sommes revenus à la mise en place d'un vocabulaire géométrique et de syntagmes. Il faut beaucoup d'étayage pour passer d'un acte de construction à son expression orale puis à une expression écrite.

Par contre, il nous semble possible de faire suivre aux élèves un programme de construction.

III – REPONSES GENERALES

Nous présentons ici des options générales prises pour la mise en place de l'ingénierie ; options concernant le rôle de l'enseignant, option concernant l'apprentissage des concepts scientifiques et enfin option concernant la séquentialisation de la présentation des savoirs entre les années de CM1 et CM2.

III – 1 Rôle de l'enseignant

Le rôle de l'enseignant, ou nous devrions plutôt dire les rôles de l'enseignant, sont nombreux et concernent à la fois la gestion de la classe sur un plan pédagogique large (gestion des interactions, de la discipline, etc…) et la gestion de la transmission de savoirs. Nous n'évoquerons ici que le rôle de l'enseignant dans sa tâche d'enseignement.

Nous ne reprendrons ici les principales hypothèses sur l'enseignement et l'apprentissage que pour fixer notre propre position.

De la première position, dite rapidement de transmission des savoirs, nous retiendrons qu'elle consiste à présenter le savoir aux apprenants dans la version jugée à leur portée et suffisante pour savoir résoudre un certain nombre de problèmes et d'exercices. Les enseignements consistent donc en un cours magistral suivi d'exercices et de problèmes. Cette façon de faire est efficace dans beaucoup de domaines professionnels, elle permet aux sujets de régler des problèmes et exercices ressortant d'un domaine précis. Elle permet d'acquérir des techniques dans des types de tâches répertoriées et précédemment abordées. Elle est souvent une solution de repli pour des élèves en grande difficulté à qui on veut pouvoir "apprendre" quelques algorithmes (nombreuses recherches dans ce domaine). Mais les recherches ont largement prouvé qu'une telle présentation magistrale (ou même maïeutique sous forme de cours dialogué) d'un savoir non problématisé n'était pas garante d'un apprentissage efficace sur le moyen et le long terme, ou d'une possibilité de transfert pour la majorité des élèves.

Une autre position, souvent appelée "socio-constructiviste", est née à la suite des travaux de Brousseau et consiste à faire construire le savoir par les élèves, en les plaçant dans des situations dites adidactiques (sans intervention de l'enseignant sur le plan du savoir en question), où le savoir visé est l'outil à construire pour résoudre, en groupe, la tâche. Les situations construites sont d'autant plus résistantes que le milieu, système antagoniste de l'élève, permet une validation indépendante de l'intervention de l'enseignant. Cette position a montré ses richesses et ses limites. Richesses pour l'ancrage du savoir, pour le "sens" donné par l'élève au savoir, pour les possibilités de débat et d'argumentation ; limites car de telles situations ne sont pas faciles à construire pour l'ensemble des concepts, sont coûteuses en temps et très difficiles à mener dans des "classes ordinaires" où les synthèses deviennent souvent des transmissions de savoirs pour les élèves les plus en difficulté.

Nous adopterons donc une troisième position intermédiaire entre la position ci-dessus et la position exposée par Vygotski (1985) et Bruner (1983). Nous gardons le fait de donner aux élèves une tâche un peu difficile qui leur pose problème. Cela les motive, leur montre l'origine et/ou l'utilité des savoirs et savoir-faire qui leur sont présentés, leur donne un ancrage de ces savoirs. Nous gardons le fait de **mettre les élèves en activité et de permettre des échanges**.

Nous pensons que le rôle de l'enseignant doit dépasser celui de l'institutionnalisation. Nous optons pour un découpage fait avec les élèves d'une tâche complexe en tâches plus élémentaires **dont la résolution est dans la zone de proche développement** (Vygotski).

Nous optons pour **une aide importante, assumée et réfléchie de l'enseignant** auprès des élèves dans les travaux de groupes, dans les moments collectifs de synthèse et dans les moments individuels. Il peut (il doit) reformuler et/ou corriger l'expression des élèves, trop imprécise, trop ambiguë ; sortir les élèves d'une impasse et leur apporter de nouvelles idées, des outils, des techniques ; apporter une évaluation lorsque le milieu ne peut apporter de validation interne. Pour nous, le milieu (dans lequel nous incluons l'enseignant) doit être davantage un allié qu'un antagoniste. L' "art" consiste à laisser le temps aux élèves de s'emparer du problème et de cerner les difficultés, et peut-être le temps pour certains de commencer une résolution, tout en évitant une perte de temps et/ou un découragement après trop d'essais infructueux. Le temps ainsi récupéré permet de reprendre la tâche dans d'autres contextes et/ou de faire des exercices. Nous savons de toute façon que l'apprentissage ne coïncide pas avec l'enseignement.

Nous nous plaçons donc dans l'hypothèse d'une construction de connaissances chez l'élève avec un étayage important du maître.

C'est pour ces raisons que nous présentons les fiches de préparation avec les tâches à donner aux élèves et les bilans auxquels il est souhaitable d'arriver, mais en indiquant aussi dans des commentaires, les difficultés possibles/probables des élèves et les aides à leur apporter.

III – 2 Apprentissage des concepts scientifiques

Appui sur les concepts quotidiens (Vygotski 1985).

Il s'agit de donner aux élèves un premier contact avec les concepts scientifiques évoqués précédemment. Nous n'adhérons pas complètement à la conception exposée par Vygotski : le concept scientifique (donné de façon explicite et facilement énonçable par l'élève) est "saturé" par le concept quotidien, qui en retour est structuré par le concept scientifique. Il est vrai que le concept scientifique est saturé, précédé par des concepts quotidiens. Mais, d'une part, il n'est pas donné aux élèves, à l'école élémentaire en France en tout cas, avec un définition claire et explicite comme le laisse penser Vygotski. D'autre part, il n'est pas sûr qu'il ait une quelconque influence sur les concepts quotidiens qui peuvent très bien coexister en l'état à côté du concept scientifique.

Autre idée que nous remettons en question : le concept scientifique ne se forme pas seulement par généralisations successives. A partir de concepts quotidiens sur lesquels nous nous appuyons, nous faisons faire aux élèves, au contraire, un travail de tri, de spécification, de restriction du champ sémantique dans le domaine spécifique des mathématiques.

Par exemple, en nous appuyant sur la connaissance d'un "trait" limité tracé à la règle, nous dégageons petit à petit le concept de segment, limité par deux points, possédant un milieu, partie d'une droite, etc. A aucun moment nous ne donnerons une définition de ce qu'est un segment.

Variation des situations (Hoyles et Noss 1996).

En effet, vu notre type d'approche, la première émergence du concept scientifique est encore très largement marquée par le contexte dans lequel celui-ci est apparu. Nous avons donc fait le choix de présenter le même concept (de carré par exemple) dans des situations assez différentes pour que les objets et propriétés géométriques soient "abstraits" indépendamment de leur représentation.

Dans nos séquences de géométrie, nous ferons varier à la fois la taille de l'espace de travail et les instruments, espérant ainsi un meilleur passage de l'espace sensible à l'espace géométrique et une meilleure compréhension des objets géométriques et des relations fondamentales entre objets géométriques.

Variation des registres (Duval 1993)

Les registres envisagés ici sont le registre figural des dessins et les registres de la langue orale et/ou écrite, naturelle et/ou de spécialité. Dans le registre de la langue de spécialité, il s'agit d'abord de mettre en place un lexique et l'expression de syntagmes relevant du domaine géométrique, comme le demandent les Programmes Officiels. Nous avons vu en II.4 les difficultés des élèves à passer d'un registre à l'autre et nous espérons en leur faisant travailler ce point, obtenir d'eux une meilleure compréhension du concept (Duval).

Le passage du registre figural au registre de la langue se fait dans la description de figures simples et de leurs propriétés L'écriture par les élèves eux-mêmes de programmes de construction nous paraît prématuré, à un stade où l'écrit, en lui-même, est encore un obstacle pour beaucoup d'élèves. Du registre figural les élèves passent à une expression orale d'abord en langue quotidienne puis en langue de spécialité. Le passage de l'oral à l'écrit dans les bilans et institutionnalisations favorise le passage vers une langue de spécialité : le lexique et les expressions syntaxiques sont alors fixées ("on n'écrit pas comme on parle").

Le passage du registre de la langue (orale ou écrite) au registre figural se fait dans l'exécution de consignes et de programmes de construction.

Enfin l'écrit est indispensable pour soutenir la mémoire didactique : à court terme dans une même séance, et à moyen terme pour retrouver les résultats d'une séance à l'autre. Ainsi les élèves constitueront un journal de bord avec les mots du lexique géométrique employés dans des bilans et institutionnalisations des séances.

III – 3 Séquentialisation dans la présentation des savoirs

sans que cela signifie que la première catégorie doive être abordée avant la seconde ??

Comme nous l'avons écrit précédemment, une étude des objets de base n'est pas entreprise en elle-même, et les objets sont seulement nommés et employés de façon fonctionnelle. En CM, nous parlerons seulement des objets construits (milieu, cercle et figures particulières), des relations de base de l'isométrie et de la perpendicularité, des relations construites du parallélisme et de la symétrie.

En CM1

Les objets de base nommés et utilisés au CM1 sont le point, la droite, le segment.

Nous avons fait l'hypothèse que la relation de base "alignement" avait déjà été abordée au cycle 2 et avons réservé pour le CM1 l'étude des deux relations de base que sont **l'isométrie** et **la perpendicularité**. Ce qui permet alors d'aborder les objets construits que sont **le milieu**, **le cercle**, et **des quadrilatères** (carré, rectangle, losange) avec leurs propriétés relatives à l'isométrie et à la perpendicularité.

Nous avons choisi de travailler l'isométrie à travers la plupart des situations ne faisant intervenir que les grandeurs :

- reconnaître des segments de même longueur ;
- construire des segments de même longueur, de façon isolée ou dans des figures telles que carrés, losanges, cercle ;
- chercher le milieu d'un segment ;
- construire un segment x fois plus long.

Nous avons choisi de travailler la perpendicularité :

- à travers des situations présentant toutes les facettes de l'angle droit (sauf celle d'angle de rotation, cf. chapitre 1) : reconnaître, reproduire, construire des angles droits avec deux demi-droites, dans une figure, comme secteur angulaire ;
- à travers des situations de reconnaissance et de reproduction de droites perpendiculaires dans le cas très particulier de l'horizontale et de la verticale et dans les autres cas.

Le "prétexte" a été la construction d'un carré d'une part, la construction d'un losange dont une des diagonales vaut le double de l'autre d'autre part.

En CM2

Dans l'année de CM2, nous ajouterons aux objets de base rencontrés au CM1, l'objet angle.

Après les deux relations de base vues en CM1, nous abordons les relations construites de **parallélisme** et de **symétrie**. Ceci permettra en retour de compléter l'étude **des quadrilatères** rencontrés en CM1 et de compléter avec d'autres quadrilatères dont le parallélogramme et le cerf-volant.

Nous avons choisi de présenter d'abord le parallélisme des droites :

- en faisant construire deux droites équidistantes ;
- puis deux droites perpendiculaires à la même troisième.

Nous abordons ensuite le parallélisme des côtés des parallélogrammes en présentant ces derniers comme l'intersection de deux couples de droites parallèles.

Nous faisons l'hypothèse que l'aspect "axe de symétrie" a déjà été exploré au CE2 avec des manipulations (pliage, papier-calque, gabarit.). En CM2, nous avons choisi de commencer à travailler la symétrie en faisant compléter une figure par symétrie axiale. Nous le faisons dans des espaces non quadrillés, en faisant intervenir les reports d'angle et l'isométrie ; les élèves peuvent alors découvrir le lien entre deux points symétriques.

Puis dans des micro-espaces et en particulier sur l'écran de l'ordinateur, nous étendrons le champ d'expériences des élèves sur cette transformation (cf. document d'application des programmes de l'école primaire) en leur permettant de faire frises et pavages.

IV – PREMIER CHOIX SPECIFIQUE : CHANGER LA TAILLE DE L'ESPACE

Dans les textes officiels, il y a un paradoxe entre la demande générale de présenter les relations et propriétés dans l'espace ordinaire et les instruments cités qui ne sont utilisables que dans des micro-espaces. Le travail dans l'espace ordinaire est du coup rarement pratiqué. Nous avons eu une "révélation" de la richesse de ce type de travail dans l'intervention de René Berthelot au XXVII^e Colloque de la COPIRELEM à Chamonix en 2000. Notre désir a alors été de systématiser ce travail sur l'ensemble du savoir à enseigner, avec une instrumentation à la portée de tous les enseignants.

IV – 1 Différents types d'espace

Reprenons le problème du changement de la taille de l'espace : les objets s'y présentent de façons différentes, mais on peut espérer que le contrôle perceptif instrumenté nécessaire dans le méso-espace sera transféré au micro-espace.

Macro-espace

Nous n'abordons pas ici le macro-espace, de l'espace de la ville à l'espace interstellaire... Au-delà d'un travail de repérage, un travail dans ce type d'espace nous semble faire intervenir des notions complexes de géométrie dans l'espace, de représentation et d'échelle, de géographie. Si une approche du repérage et du codage des trajets peut être faite, y compris dans les cycles précédant le cycle 3, une étude de l'isométrie et de la perpendicularité dans ce type d'espace nous semble prématurée !

Méso-espace

Nous trouvons chez Brousseau (1983) une définition du méso-espace : "espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue, les objets sont fixes et mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet". Le sujet est à l'intérieur de l'espace. Il prend conscience d'objets isolés par des changements de points de vue, des changements de regards. Le contrôle perceptif simple y est très difficile voire impossible : il faut prendre "du recul" et éloigner le méso-espace pour qu'il devienne un micro-espace. Des exemples de méso-espace seront pour nous un mur, le sol d'une salle polyvalente ou d'une cour de récréation

Micro-espace

Un micro-espace est défini par Brousseau comme l' "espace des interactions liées à la manipulation des petits objets". L'élève est extérieur à cet espace et peut avoir une vision (relativement) globale des objets. Des exemples de micro-espaces seront pour nous la feuille de papier ou l'écran d'ordinateur.

Un même espace peut être un méso-espace pour un sujet si sa distance à cet espace est petite et s'il se trouve "dans" cet espace, ou un micro-espace s'il est à une certaine distance de cet espace. Ainsi une feuille de papier A3 peut être soit un méso-espace, soit un micro-espace.

IV – 2 Influence sur les concepts étudiés

Un premier apport est celui cité ci-dessus : une meilleure connaissance des objets géométriques dans le méso-espace. Mais on peut aussi espérer une retombée dans le micro-espace de la géométrie papier-crayon.

Dans un espace sensible micro, une problématique pratique (Berthelot et Salin 1994) et un contrôle perceptif simple conviennent parfaitement. Un problème de construction posé dans un tel espace peut être réglé à moindre coût avec utilisation de calques, de gabarits, de mesures et validation par un contrôle perceptif simple.

Dans un espace sensible méso, le contrôle perceptif simple donne de moins bons résultats, voire est impossible. Il faut alors trouver ou construire des instruments utilisables dans ce type d'espace, et/ou passer à une modélisation (Berthelot et Salin) dans un micro-espace géométrique (pour minimiser les efforts à fournir dans le méso-espace).

Donnons ci-dessous les exemples de l'objet "Droite" et de la relation "Perpendicularité"

	Méso-espace	Micro-espace
Droite	Savoir quotidien Ligne de visée Corde tendue Plus facile à prolonger ?	Lien avec la règle Vision globale Trait droit (non courbe) Trait borné
Perpendicularité	Difficile à lire, sauf pour le cas horizontale-verticale	Vision globale plus facile Stéréotypes

Pour passer d'un type d'espace à un autre, deux types de situations nous semblent a priori possibles :

- poser, dans un méso-espace, un problème de construction dont la résolution demande une utilisation de connaissances géométriques car non résolvable avec le seul contrôle perceptif simple ; puis poser le même problème dans un micro-espace en espérant que la résolution se fera elle aussi avec modélisation spatio-géométrique (et non pas de façon pratique "seulement").

Nous proposons par exemple de faire un grand carré sur le sol puis de faire un carré sur une feuille de papier (sur l'écran de l'ordinateur), en espérant que le carré ne pouvant être fait et validé à vue dans le méso-espace, ne sera plus fait et validé "à vue" dans le mico-espace.

- poser, dans un méso-espace, un problème tel que sa résolution soit facilitée par un passage dans le micro-espace de la feuille de papier.

Nous proposerons par exemple de faire "une route" (une bande aux bords parallèles) sur le sol, en sachant que ce tracé très difficile peut être travaillé dans un micro-espace avant un retour sur le terrain.

V – DEUXIEME CHOIX SPECIFIQUE : CHANGER L'INSTRUMENTATION

Le changement d'instruments peut être inhérent au changement de taille de l'espace. Il peut aussi, dans un même espace, découler d'une volonté didactique. Deux phénomènes sont à prendre en compte : un apprentissage de l'utilisation de ces instruments est un moment important pour les élèves ; selon les instruments fournis, les élèves peuvent être confrontés à des aspects différents des objets et des relations géométriques.

Sur ces deux points, citons Rabardel (1999) :

"L'appropriation de l'instrument par les utilisateurs résulte d'un processus progressif de genèse expérimentale. L'instrument, pour l'utilisateur, évolue tout au long de ce processus de genèse." "Ils [de nombreux travaux] mettent en évidence l'impact des instruments sur la conceptualisation et soulignent que l'analyse de leurs propriétés est une nécessité pour l'enseignant s'il veut atteindre ses objectifs didactiques de conceptualisation. "

Nous rejoignons également Hoyles C. & Noss R.(1996), en disant que le concept abstrait n'émerge pas du concret dans un mouvement ascendant, mais qu'il émerge davantage de connexions faites entre situations où des instruments divers sont utilisés.

V-1 Espaces instrumentés

Les différents espaces instrumentés dans lesquels nous avons fait travailler les élèves sont les suivants :

Méso-espace du sol avec corde

La corde est donnée à volonté, un fil à plomb et un niveau à bulle (ou une bassine d'eau, comme témoin de l'horizontalité), avec bien sûr des piquets ou du scotch.

Micro-espace de la feuille de papier avec des ficelles.

Pour faciliter le transfert, il n'y a que la taille de l'espace qui change. La feuille de papier est cependant de format A3, avec des bords déchirés.

Micro-espace de la feuille de papier avec des instruments plus ou moins classiques

Des règles non graduées, des compas (ou des bandelettes de papier) et des gabarits divers d'angle droit. Nous avons pris soin de multiplier les instruments possibles pour le report de longueur et la construction de droites perpendiculaires.

Micro-espace de l'écran de l'ordinateur avec des commandes d'un logiciel de géométrie dynamique (Cabri-géomètre)

Nous pensons que cet espace instrumenté constitue un des milieux possibles pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, (Laborde C. & Capponi B. 1994). Nous ne présentons pas ici le logiciel Cabri-géomètre utilisé dans cette ingénierie et renvoyons l'utilisateur au fascicule accompagnant le CD-ROM pour une initiation. Nous reprenons simplement les commandes utilisées, en supposant leur usage connu par le lecteur : Point, Segment, Droite, Cercle, Droite perpendiculaire, Milieu, Droite parallèle, Symétrie axiale (auxquelles nous avons ajouté quelques commandes d'édition).

V- 2 Genèses instrumentales

Comme le dit Rabardel, un instrument comporte à la fois contraintes et ressources. Il faut analyser le champ des actions possibles et l'activité requise. Les élèves doivent construire des schèmes d'utilisation, ce qui est possible si ces actions sont dans leur zone proximale de développement instrumental en liaison avec zone proximale d'apprentissage.

Donnons deux exemples des actions requises selon les espaces instrumentés[2]. (Rappelons que nous n'avons donné que certaines commandes de Cabri citées ci-dessus)

	Méso-espace **cordes**	Feuille papier **Instruments classiques**	Ecran d'ordinateur **Commandes de Cabri**
Droite	Tendre une corde	Tracer avec une règle	Utiliser la commande et donner les 2 arguments
Perpend.	Fabriquer et utiliser une équerre-corde	Utiliser une équerre, un gabarit transparent, un secteur angulaire droit	Utiliser la commande et donner les 2 arguments

V- 3 Influence sur les concepts étudiés

Ces activités requises ne correspondant pas obligatoirement aux schèmes de construction des élèves. Le changement d'espace instrumenté n'est pas à lui seul garant d'un changement de type de contrôle et d'utilisation des instruments fournis. Le contrôle instrumenté, nécessaire dans le méso-espace, peut être "oublié" par les élèves lorsqu'ils passent au micro-espace de la feuille de papier où le contrôle perceptif simple peut leur suffire. Deux utilisations du contrôle perceptif instrumenté dans le méso-espace et dans la feuille ne sont pas garants de l'utilisation des commandes dans le logiciel. Le contrôle perceptif simple a la vie dure…

Redisons donc que même si ces changements d'espaces instrumentés sont des facteurs d'évolution du type de contrôle exercé, l'intervention didactique d'étayage de l'enseignant nous semble indispensable.

Certains aspects des concepts se retrouvent d'un espace à l'autre et il est important que les élèves en prennent conscience : ainsi il est essentiel de montrer que tous les gabarits d'angle droit, construits dans les différents espaces, se correspondent ; ainsi il est essentiel de montrer que le report de longueurs est transférable du méso au micro-espace de la feuille.

[2] L'ensemble du tableau se trouve sur le site MAGESI.

Certains aspects sont nouveaux et en particulier ceux apportés par le logiciel. Il est important aussi que les élèves, avec l'aide du maître, en prennent conscience. Nous donnons ci-dessous les deux exemples de la droite et de la perpendicularité.

	Méso-espace **cordes**	Feuille papier **Instruments classiques**	Ecran d'ordinateur **Commandes de Cabri**
Droite	-lien avec des savoirs quotidiens ou des savoirs physiques (cas de l'horizontale et de la verticale) -prolongeable ? -pas de point	- "bord" d'objets dont on sait qu'ils sont "droits", en particulier bord de la règle, de l'équerre, du double-décimètre - trait limité - les extrémités du trait deviennent des points ; quelques autres points	- donnée par 2 arguments : 1 point et une direction 2 points - trait limité - des points (au moins les arguments de la définition)
Perpend.	Perpendicularité verticale-horizontale Angle droit d'un triangle rectangle (équerre-corde)	Droites perpendiculaires (gabarit transparent) Angle droit d'un triangle rectangle (équerre) Secteur droit (feuille pliée)	Droite perpendiculaire à une autre passant par un point

VI – CONSTRUCTION D'UNE INGENIERIE TRANSFERABLE

Nous nous sommes également posé le problème du passage des attendus théoriques à une mise en œuvre dans les classes, et de la compréhension de l'ingénierie par un enseignant.

Au départ, l'ingénierie se présentait comme un écrit de type mémoire. Elle se composait de deux parties, l'une théorique, l'autre pratique. C'était un travail de chercheur à destination d'autres chercheurs, c'est-à-dire que le style, le vocabulaire employé et les références citées nécessitaient une initiation préalable. Très rapidement apparut la nécessité d'adapter cet écrit pour le rendre plus lisible et utilisable par les enseignants de terrain. Fallait-il pour cela sacrifier la partie théorique pour ne conserver que les fiches de préparation? C'était faire offense aux enseignants de considérer que cet aspect de la discipline ne les concernait pas. Au contraire, il fallait la rendre accessible et mettre en avant la complémentarité des deux parties, théorique et pratique, à charge pour chacun d'effectuer des aller-retours selon ses besoins, son envie d'approfondir.

Notre choix fut donc de conserver la partie théorique qui propose un éclairage des choix opérés dans l'ingénierie. Mais il fallait la réécrire dans un langage non "jargonnant" et supprimer tout ce qui relevait de la recherche pure sans retombée immédiate sur cette ingénierie. En bref, elle devait être lisible et directement reliée aux tâches que les enseignants conduisent avec leurs élèves.

VI – 1 Contraintes didactiques et pédagogiques

Nous étions face à une double contrainte : notre document devait à la fois inciter à la pratique des activités proposées mais aussi permettre aux enseignants, quand ils le souhaiteraient, de trouver des réponses à leurs interrogations sur un plan théorique.

Les premières lectures de la version papier de l'ingénierie par des professeurs d'école avaient découragé ou rebuté certains des lecteurs qui espéraient rapidement trouver dans ce document une réponse directe à leurs préoccupations quotidiennes. Notre ingénierie devait non seulement ne pas décourager ou rebuter les enseignants à la recherche d'activités géométriques mais au contraire permettre à chacun d'entrer par le côté qui lui serait utile. A nous ensuite de les amener à aller plus loin, à s'interroger, à leur proposer des ouvertures, … à consulter les attendus théoriques.

VI – 1.1 Respect des programmes officiels et horaires

« Les activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais des connaissances fonctionnelles, utiles pour résoudre des problèmes dans l'espace ordinaire, dans celui de la feuille de papier ou sur l 'écran d'ordinateur, en particulier des problèmes de comparaison, de reproduction, de construction, de description, de représentation d 'objets géométriques ou de configurations spatiales. » Programmes 2002.

L'horaire consacré aux mathématiques est de 5h à 5h30. La part consacrée à la géométrie est d'environ 40 minutes hebdomadaires soit approximativement 24h annuelles (que l'on peut compléter avec des heures de situations-problèmes).

Nous nous sommes appuyés sur les programmes officiels de 2002 pour définir et constituer la trame de l'ingénierie afin de répondre au mieux aux attentes des enseignants en ce domaine.

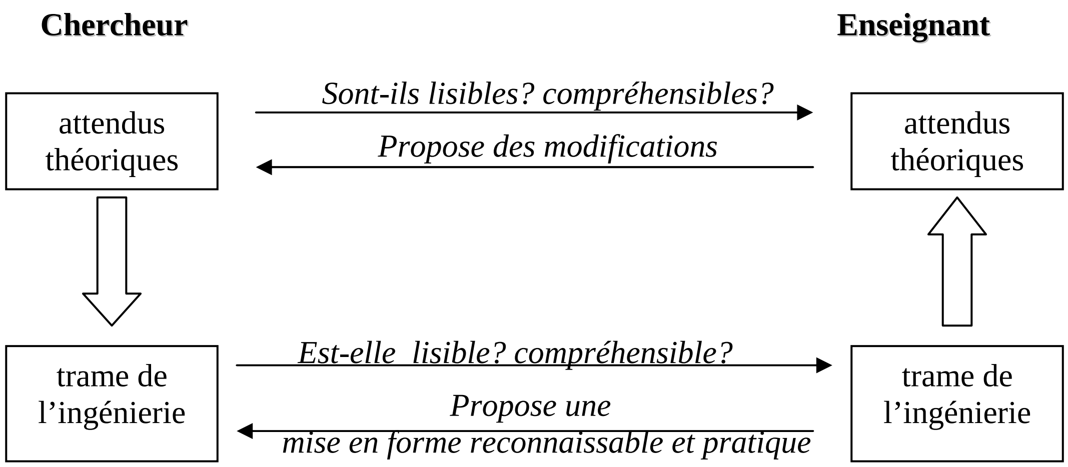
VI – 1.2 Séparation des documents utilisables en classe et des attendus théoriques

Il est apparu que les enseignants du terrain devaient pouvoir utiliser les fiches directement, sans lire obligatoirement la partie théorique. Mais parfois, il est nécessaire de leur indiquer un choix, une préférence, une non-utilisation volontaire de tel outil par exemple, se référant à un concept théorique développé dans la partie théorique. Pour ne pas alourdir la fiche directement utilisable en classe, la rubrique "Commentaires" joue ce rôle d'informations complémentaires et peut être imprimée si l'enseignant le désire.
Notre ingénierie sépare donc nettement les documents directement utilisables en classe (fiches de préparation et commentaires) de ceux consultables avant et/ou après la conduite des séances en classe (attendus théoriques) bien que des liens directs ou indirects existent entre les deux parties.

Pourquoi une telle dichotomie ?
Il est important de ne pas perdre de vue que chercheur et professeur d'école n'ont ni les mêmes objectifs de travail ni les mêmes contraintes. Chacun œuvre donc avec sa propre logique. Elles peuvent ne jamais se rencontrer. Mais elles peuvent aussi se rejoindre si l'un et l'autre connaissent les différences avec lesquelles ils abordent une même question. Et la

richesse de leurs échanges viendra de leurs différences face à un même questionnement. Le chercheur s'interroge sur une problématique dans un domaine bien déterminé. Ce sera l'objet de son travail. C'est un spécialiste. Il lui faudra ensuite imaginer une ingénierie pour mettre en application les concepts qu'il aura retenus. Il va lui consacrer toute son énergie pour la développer. Il dispose de temps pour le faire.
Le professeur d'école ne dispose pas de ce temps-là. Il doit prévoir, concevoir, organiser et gérer six heures de classe par jour et ce, dans toutes les disciplines pour assumer au mieux la polyvalence de son métier. Il se préoccupe d'abord d'une activité pédagogique définie ou à définir en relation avec des objectifs bien définis. Il a donc besoin d'outils pratiques directement utilisables. S'il le souhaite, il peut parcourir la partie théorique, selon ses besoins, ses désirs, du temps dont il dispose, pour s'informer, répondre à une interrogation, comprendre les choix de l'ingénierie.

Le schéma ci-dessous illustre la démarche qui fut la nôtre.



Chercheur et professeur d'école sont complémentaires à partir du moment où, d'une part, le chercheur se nourrit des besoins et difficultés rencontrées sur le terrain pour en faire un travail d'analyse et de recherche aboutissant à de propositions concrètes, et où d'autre part, le professeur d'école utilise le travail du chercheur en ayant à sa disposition les appuis théoriques justifiant l'ingénierie proposée, avec une nécessaire et indispensable adaptation à sa personnalité, sa pédagogie, son savoir-faire et les besoins de ses élèves.

VI – 1.3 Faisabilité sur les plans pédagogique et didactique

Comme nous l'avons précédemment évoqué, notre ingénierie a été conçue avec une progression en cohérence avec nos choix didactiques et pédagogiques. Aussi, les quatre séquences ne peuvent être conduites indépendamment ou dans un ordre différent sans des adaptations répondant à de nouveaux choix.

Ainsi, nous présentons la séquence à l'aide d'un texte court et d'un tableau général: ils la situent par rapport aux séquences précédentes, précisent quels seront les objectifs visés, définissent rapidement l'activité des élèves tout en proposant à l'utilisateur des liens directs avec la partie théorique à propos des concepts mathématiques abordés ou des choix

pédagogiques énoncés. (On trouvera l'exemple de la présentation de la séquence "Parallélogramme" en Annexe VI – 1.3).
Le tableau général de la séquence autorise un accès à toutes les séances aussi bien lors du 1er accès que lors d'une utilisation régulière.

Les fiches de préparation sont volontairement courtes et manipulables pour une utilisation plus facile en classe. On y trouve les rubriques classiques dévolues à ce type de document. Les tâches réalisables sont encadrées pour un meilleur repérage en situation. Les conditions d'organisation proposées sont toujours réalisables, quelle que soit la réalité du terrain à laquelle est confronté l'enseignant.

Les commentaires portent sur chacune des rubriques séparément et proposent photos, applets, explications supplémentaires, réponses possibles des élèves, recommandations particulières, etc. Certaines séances comportent également des fichiers annexes (menus et fichiers du logiciel de géométrie dynamique, fiches élèves).

VI – 2 Documents mis à disposition

Les documents de l'ingénierie MAGESI sont consultables sur le site Internet http://magesi.inrp.fr

Cette ingénierie comporte deux volets : Faire qui comporte tous les documents nécessaires à l'enseignement proprement dit, et Comprendre qui apporte les éclaircissements théoriques sur cette ingénierie. Dès la page d'accueil, l'utilisateur a le choix entre ces deux parties.

Nous avons retenu le principe d'un affichage distinct à l'écran de chaque rubrique de la fiche de préparation habituellement convenue. Mais l'ensemble des rubriques de la fiche de préparation est également affichable à l'écran et imprimable, généralement sur une seule page, afin de fournir à l'enseignant un document rapidement consultable en situation de conduite de classe. L'enseignant peut y joindre, s'il le souhaite, les commentaires associés destinés à l'aider dans sa préparation et sa conduite de classe.

VI – 2.1 Objectifs et commentaires

Une phrase d'introduction présente toujours l'activité de la séance. L'objectif général de la séance est rappelé puis ceux plus précis, nécessaires à la réalisation de cet objectif. Les commentaires apportent ici un éclairage théorique minimum pour s'assurer que l'enjeu de la séance auquel on souhaite parvenir est bien compris. (On trouvera 3 exemples un peu différents d'objectifs avec leurs commentaires en Annexe VI – 2.1)

VI – 2.2 Matériel et commentaires

Le matériel nécessaire à la conduite de la séance est clairement énoncé sur la fiche de préparation. Il est d'un usage courant. Il demande parfois une préparation spécifique (cordes, baguettes de bois, potence du fil à plomb…). Une photo ou quelques mots dans les commentaires proposent et/ou suggèrent des recommandations ou des petites astuces (on trouvera des exemples de commentaires de matériel dans l'annexe VI – 2.2).

VI – 2.3 Déroulement et commentaires

Nous proposons un déroulement que nous souhaitons voir s'approprier par l'enseignant qui l'utilisera. Il l'adaptera à sa pratique et à ses élèves. C'est pour cela que nous l'avons voulu synthétique. La consigne est clairement énoncée dans un encadré pour aller à l'objectif sans ambiguïté. Mais la conduite de la séance reste à l'initiative de l'enseignant qui s'appuiera à sa convenance sur la trame proposée et testée durant 4 à 5 années.

Nous indiquons également vers quoi il est nécessaire d'aboutir et proposons une énonciation possible, constituant par là-même un repère indispensable pour l'enseignant dans sa tâche d'adaptation à ses élèves et à sa pédagogie. (Annexe VI – 2.3)

ANNEXES

Annexe VI – 1.3 Exemple de présentation d'une séquence

Il s'agit de la séquence "Parallélogramme".

*Cette séquence est la première de l'année de CM2. Il s'agit, en suivant le cadre théorique exposé dans la rubrique **Comprendre**, de travailler sur la relation construite qu'est le parallélisme, en lien avec la perpendicularité et l'isométrie vues dans les séquences précédentes de CM1. Il est demandé aux élèves de construire deux droites parallèles puis un parallélogramme, dans différents espaces instrumentés. Cette séquence permet également de faire une synthèse de l'ensemble des propriétés des **quadrilatères particuliers**.*

Numéro	***Espace Instrumenté***	***But***	***Type de regroup[t]***
Séance n°0	*Plusieurs*	*Rappels sur les séquences de CM1*	*Classe complète*
Séance n°1	*Méso-espace du sol avec cordes*	*Notion d'écart constant*	*Demi-Classe*
Séance n°2	*Micro-espace de la feuille : Instruments divers*	*Construction de deux droites à écart constant*	*Classe complète*
Séance n°3	*Plusieurs*	*Lien entre parallélisme et perpendicularité*	"
Séance n°4	*Micro-espace de la feuille : Instruments divers*	*Vérification instrumentée des propriétés du parallélogramme*	"
Séance n°5	"	*Utilisation des propriétés pour les constructions du parallélogramme*	"
Séance n°6	*Micro-espace de l'écran : commandes du logiciel*	*Présentation des commandes du logiciel nécessaires pour la fin de la séquence*	*Demi-Classe*
Séance n°7	"	*Exercices dans l'environnement logiciel*	"
Séance n°8	"	*Transfert de la construction de deux parallèles dans le nouvel espace instrumenté*	"
Séance n°9	"	*Constructions de parallélogrammes utilisant des propriétés différentes*	"
Séance n°10	*Plusieurs*	*Propriétés et hiérarchie des quadrilatères vus. Illustration avec le logiciel.*	"
Séance n°11	"	*Evaluation sur reconnaissance et construction de parallélogrammes.*	*Classe complète*

La première séance de recherche de la construction de deux droites parallèles dans le méso-espace reçoit une solution dans l'espace de la feuille de papier dans la deuxième séance. Il y a alors réinvestissement dans le méso-espace dans la troisième séance. Le *parallélogramme est alors étudié dans l'espace de la feuille de papier, puis dans l'espace de l'écran de l'ordinateur avec le logiciel de géométrie dynamique. Les séances 6 et 7 pourront être regroupées si les élèves ont une pratique assez aisée du logiciel. Pour la séance 10, le travail peut se faire en classe complète si on dispose en classe d'un ordinateur et d'un vidéoprojecteur.*

Annexe VI – 2.1 Exemples d'objectifs et de commentaires d'objectifs .

Premier exemple : séance 1 de la séquence "Carré"

Objectifs

Objectif général : faire construire par les élèves un carré dans un méso-espace (sol de la cour de récréation ou sol d'une salle sans mobilier), avec des cordes.

Dans cette séance :
- travailler tout d'abord sur la modélisation d'un segment par marquage de deux points au feutre sur un morceau de corde tendue ;
- redonner des propriétés suffisantes pour avoir un carré ;
- faire résoudre le problème de la "fabrication" de 4 côtés de même longueur par superposition de segments marqués sur la corde.

Commentaires des objectifs

Il est impossible de faire des angles droits à vue dans le méso-espace et on ne dispose pas immédiatement d'un instrument à faire des angles droits dans cet espace. Il s'agit ici de faire comprendre aux élèves la nécessité de fabriquer un instrument ad hoc, et pour cela de chercher à faire un gabarit de l'angle droit "primitif" qu'est l'angle formé par une droite verticale et une droite horizontale. Il y a déjà, dans cette séance, passage de la notion de droites perpendiculaires à celle d'angle droit. C'est une occasion pour les élèves de voir que deux droites perpendiculaires forment 4 angles droits.

La séance est difficile car les élèves sont provisoirement en échec, mais absolument indispensable pour travailler sur le concept de perpendicularité.

Deuxième exemple : séance 7 de la séquence "Parallélogramme"

Objectifs

Objectif général : faire construire un parallélogramme dans l'espace instrumenté par le logiciel de géométrie dynamique.

Dans cette séance :
- présenter les autre commandes du logiciel nécessaires à la construction : "Milieu", "Cercle" et "Compas" ;
- insister sur la différence entre dessin à l'écran et figure définie géométriquement.

Commentaires objectifs

Les deux commandes Cercle et Compas ne sont pas liées à la même définition du cercle : la première correspond à un cercle donné par son centre et un point de sa circonférence, la deuxième correspond à un cercle donné par son centre et son rayon. Cette deuxième définition est utile pour construire des côtés opposés isométriques dans le parallélogramme.

L'objectif de l'exercice 3 est de montrer qu'une propriété réalisée à vue (cercles sécants) ne reste pas toujours réalisée dans les déplacements, et que la droite d'intersection qui dépend des deux cercles n'est pas toujours définie.

L'objectif de l'exercice 4 est de montrer également qu'une définition sous le seul contrôle perceptif simple ne suffit pas (Il est prématuré pour la plupart des élèves de faire une construction correcte de la tangente).

Troisième exemple : séance n°8 de la séquence "Parallélogramme"

Objectifs

Objectif général : faire construire un parallélogramme dans l'espace instrumenté par le logiciel de géométrie dynamique.

Dans cette séance :
- reprendre les constructions d'une droite parallèle à une droite donnée, avec écart constant ou passant par un point, vues dans les autres espaces instrumentés ;
- utiliser la commande "Compas" pour la construction utilisant l'isométrie ;
- présenter la commande "Droite parallèle".

Commentaires des objectifs

Les constructions sont les mêmes que dans les espaces précédents.
La construction d'une droite parallèle à une droite donnée à un écart donné demande le report de cet écart sur deux droites perpendiculaires : la difficulté réside dans l'emploi de la commande "Compas" pour reporter cette longueur.
La construction d'une parallèle à une droite donnée passant par un point demande l'utilisation de la propriété "deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles ».

Annexe VI – 2.3 Exemples de commentaires sur le matériel

Premier exemple : séance 2 de la séquence "Parallélogramme"

Il s'agit de construire deux droites parallèles sur une feuille de papier.

Matériel

Matériel nécessaire pour chaque élève :

- 2 (demi-)feuilles blanches aux bords découpés irrégulièrement : l'une avec une droite et un segment, l'autre avec une droite et un point extérieur à cette droite (on peut éventuellement les trouver en annexe)
- règle non graduée
- bandelette de papier (pas de compas)
- équerres et/ou gabarit de droites perpendiculaires sur transparents

Matériel nécessaire pour l'enseignant :
- quelques constructions faites sur transparents pour une vérification par les élèves (cf. éventuellement fichiers annexes)

Commentaires

Sur la première demi-feuille, on veillera à ce que le segment donné ne soit ni parallèle ni perpendiculaire à la droite et que sa longueur soit supérieure à la largeur du double-décimètre.
Sur la deuxième demi-feuille, on pourra faire varier l'écart (prévoir un double-jeu de transparents).
Le lot des instruments fournis est en principe connu des élèves. Le compas a été enlevé pour interdire la construction (à vue) de la tangente à deux cercles centrés sur la première droite et de rayon l'écart donné.

Les transparents avec le tracé de la parallèle demandée permettent aux élèves et à l'enseignant de vérifier rapidement leurs constructions (les "petites" erreurs seront difficiles à traiter...).

Deuxième exemple : séance 2 de la séquence "Carré"

Il s'agit dans cette séance de construire un carré dans un méso-espace (et plus particulièrement de (re)découvrir l'angle droit fait par une verticale et une horizontale).

Commentaires

L'angle droit est matérialisé par le fil se détachant sur un fond uni et une paille posée à la surface de l'eau.

Troisième exemple : séance 3 de la séquence parallélogramme

Il s'agit dans cette séance de construire des droites parallèles sur une feuille de papier

Commentaires

Si les élèves ont bien rejeté la construction de la tangente à 2 cercles dans la séance précédente, on peut leur laisser le compas pour reporter des longueurs.

Les transparents avec le tracé de la parallèle demandée permettent aux élèves et à l'enseignant de vérifier rapidement les constructions (les "petites" erreurs seront difficiles à traiter...).

Quatrième exemple : séance 9 de la séquence "Parallélogramme"

Il s'agit dans cette séance de construire des parallélogrammes sur l'écran d'ordinateur.

Commentaires

Le menu "para2.men" se présente comme suit :

Annexe VI – 2.3 Exemple de déroulement et des commentaires

Il s'agit de la première partie de la séance n°8 de la Séquence Parallélogramme : il s'agit de construire 2 droites parallèles sur l'écran d'ordinateur

- *Phase 1 / collectif / donnée de la tâche*
Ouvrir ou faire ouvrir le logiciel et le fichier "para1.men".
Donner la tâche aux élèves.

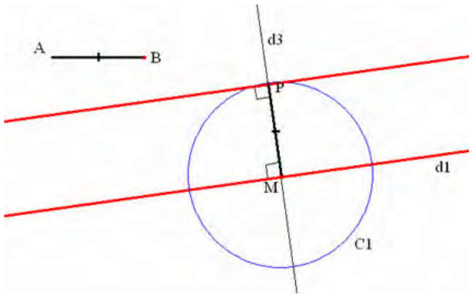
Construisez une droite et un segment. Avec les commandes dont vous disposez, reprenez la construction d'une droite parallèle à la droite donnée, située à une distance égale à la longueur du segment. Vérifiez votre construction avec le déplacement des objets attrapables (segment, droite ou points)

- *Phase 2 / groupes de 2 /essai de construction*

- *Phase 3 / collectif / Bilan*
Refaire en pas à pas la construction, en nommant les objets et en notant/montrant la ligne de programme correspondante.

<u>Enoncé</u>

d1:droite quelconque
segment AB
M : point de la droite d1
d3 : droite passant par M et perpendiculaire à d1
C1 : cercle (centre M, rayon A B)
P : intersection de la droite d3 et du cercle C1
d2 : droite perpendiculaire au segment PM passant par P



Donner à chaque élève l'encadré ci-dessus qui sera collé dans le journal de bord.

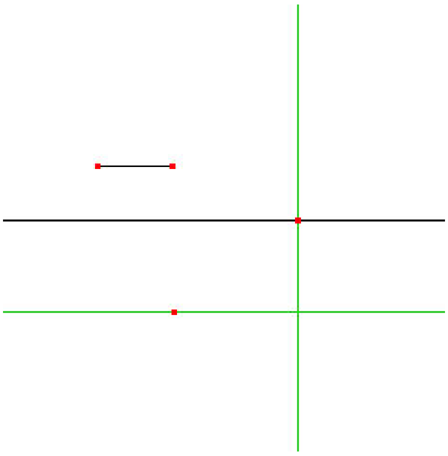
Commentaires

Les commentaires donnent les procédures possibles des élèves et les aides éventuelles à leur apporter. Pour cette partie, ils sont les suivants :

*Pour **la première tâche**, les réalisations possibles des élèves sont les suivantes*
- constructions à vue pour un bon nombre d'élèves : la direction des deux droites est souvent proche de l'horizontale, et l'écart est ajusté en déplaçant la seconde droite par son point de base (ce qui ne peut se produire si la commande laissée à la disposition des élèves est "Droite passant par deux points"). Nous avons mis en noir le segment et la première droite construits par les élèves et laissés les couleurs par défaut pour les autres constructions.

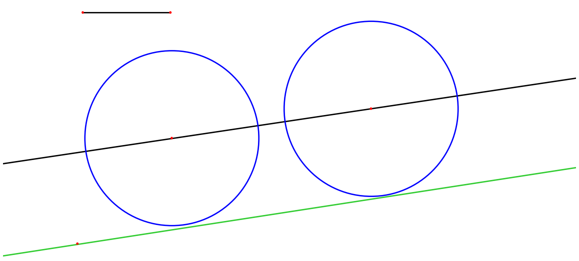
<u>Cliquez sur l'image pour ouvrir l'applet et déplacer les objets.</u>

- construction d'une (ou de deux) perpendiculaires à vue, et report de l'écart à vue.

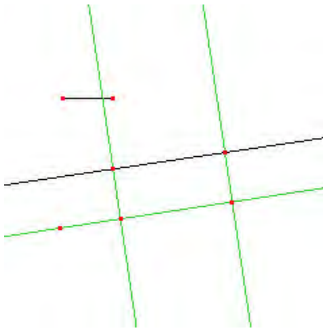


Cliquez sur l'image pour ouvrir l'applet et déplacer les objets.

- résolution en prenant en compte l'une des deux propriétés : deux écarts isométriques au segment donné avec utilisation de la commande "Compas" (et construction à vue d'une tangente aux deux cercles), un écart isométrique au segment donné et une tangente à vue, deux écarts pris sur des droites perpendiculaires (en réalisant à vue l'isométrie).



Cliquez sur l'image pour ouvrir l'applet et déplacer les objets.



Cliquez sur l'image pour ouvrir l'applet et déplacer les objets.

Dans tous les cas, les déplacements généralisés sur la droite construite doivent invalider la réponse. Beaucoup auront besoin d'étayage pour prendre en compte les deux propriétés en même temps et comprendre la construction donnée dans le bilan, plus aisée.

BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire,* Thèse de l'Université de Bordeaux I.

BERTHELOT R. (2000) *Quelques moyens pour placer l'espace au centre de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire, et pour préparer tant l'enseignement technique de l'espace que l'enseignement mathématique du premier cycle.*Atelier in Actes du XXVIIe Colloque COPIRELEM, Chamonix.

BROUSSEAU G. (1983) *Etude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie*. Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique n° 45, LSD IMAG et Université J. Fourier, Grenoble.

BRUNER J. (1983) *Le développement de l'enfant. Savoir faire, savoir dire*. PUF, Paris.

HOYLES C. & NOSS R. (1996) *Windows on Mathematical Meanings. Learning cultures and computers*. Kluwer Academic Press.

LABORDE C. & CAPPONI B. (1994) *Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique*, Recherches en didactique des mathématiques Vol. 14 (1/2), pp. 165-210.

RABARDEL P. (1995) *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris.

RABARDEL P. (1999) *Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques.* Conférence in Actes de la IXe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Houlgate.

ROLET C. (1996) *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions de futurs enseignants dans le contexte Cabri-géomètre*, Thèse de l'Université Claude Bernard, Lyon.

VERGNAUD G. (1990) *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en Didactique des Mathématiques vol 10 2/3 pp. 133-170.

VYGOTSKI L. (1985) *Pensée et langage (F. Sève, Trans.)*, Editions sociales, Paris.

EXPERIMENTATION EN MATHS : DE QUOI PARLE-T-ON ?

Thierry DIAS
Formateur associé, IUFM
Laboratoire LIRDHIST Lyon 1
thdias@wanadoo.fr

Résumé
L'article suivant propose une brève présentation du travail de Gérard Kuntz publié dans la lettre de la veille scientifique et technique de l'INRP à laquelle j'ai participé en tant que co-auteur avec Viviane Durand Guerrier. Cette lettre traite de la dimension expérimentale des mathématiques dans l'enseignement. J'en proposerai une lecture spécifique en essayant notamment de clarifier la notion d'expérimentation sur un plan épistémologique, mais aussi en abordant quelques principes didactiques qui lui sont corrélés.

I – QU'EST-CE QUE "LA LETTRE DE LA VST"

Ces lettres d'information sont des publications de la cellule Veille Scientifique et Technologique de l'Institut National de Recherche Pédagogique. Elles offrent un panorama relativement exhaustif des ressources mises à disposition sur le site de l'INRP. Elles traitent chaque mois d'une thématique en relation avec l'actualité française et internationale des recherches en éducation.

"Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques", dernier numéro en date de ces lettres, est une étude collaborative entre un auteur principal, Gérard Kuntz, et une équipe restreinte[1]. On peut à ce jour la consulter sur le site Educmath (http://educmath.inrp.fr/Educmath) dans la rubrique Etudes.

Elle propose dans une première partie une réflexion sur la question très actuelle du "pourquoi" de l'expérimentation dans l'enseignement des sciences. Les arguments avancés concernent à la fois les difficultés ressenties par les enseignants de REP dans la transmission des savoirs de leur discipline, mais aussi l'arrivée massive des outils TICE dans les cartables des collégiens. Enfin, est évoqué aussi comme argument la toute récente prise en compte de la transdisciplinarité au sein de dispositifs institutionnalisés comme les IDD et les TPE.

Vient ensuite l'inventaire des prescriptions institutionnelles prélevées dans les différents programmes de l'école, du collège et du lycée. C'est ici l'occasion de montrer que les textes

[1] Cette étude de MathEduc est le fruit d'une collaboration entre : l'auteur principal Gérard Kuntz (animateur de l'APMEP et du réseau des IREM), F. Poyet (Veille Scientifique et Technologique), F. Carraud (Centre Alain Savary, Lyon), V. Durand-Guerrier et T. Dias (IUFM et LIRDHIST, Université Lyon 1), L. Trouche (INRP).

institutionnels sont extrêmement nombreux et convergents sur la place à accorder aux démarches expérimentales au sein même de la discipline mathématique.

De nombreux exemples de mise en œuvre d'une démarche expérimentale dans l'enseignement des mathématiques illustrent pour terminer cette première partie de l'étude. Ils proviennent d'horizons multiples et internationaux, et témoignent d'une histoire déjà fournie sur les projets concernant la dimension expérimentale.

Mais l'introduction d'une dimension expérimentale dans l'enseignement des mathématiques n'est pas sans soulever des débats au sein de la communauté éducative, la lettre en propose alors une lecture personnalisée en présentant un certain nombre de questions parfois douloureuses.

II – EXPÉRIMENTATION EN MATHS : DE QUOI PARLE-T-ON

Expérimenter en mathématiques, pratiquer la démarche expérimentale, ces expressions ont dans la lettre comme dans les propos qui vont suivre un sens très défini. Il s'agit avant tout de ne pas assimiler l'expérimentation à une simple manipulation concrète qui serait en elle-même une source de connaissance. Expérimenter tel que nous l'entendons, n'a de sens que par ses articulations avec la formulation (dimension langagière au service de la communication) et la validation (par la preuve). Le va et vient entre théorie et expérience étant alors pour nous ce qui caractérise la démarche expérimentale.

En conséquence, le "défi" (terme que nous préfèrerons à difficulté) pour l'enseignement réside dans le développement et la mise en œuvre de situations d'apprentissage qui permettent ces allers-retours entre expérimentation et preuve.

II – 1 Un ancrage épistémologique

L'expérimentation en sciences ne prend pas racine dans la manipulation des objets du réel, mais dans les moyens que se donne le scientifique de se frotter à l'incertitude : sa raison d'être. Si révolution il y a (et surtout en mathématique), elle se situe bien dans la situation où la connaissance se trouve confrontée à ses propres doutes, à ses propres limites, à ses propres domaines de validité. Ainsi, et selon la démarche dite scientifique, apparaît-il nécessaire d'aller chercher à l'extérieur (hors de soi), la source d'une décision sans cela inaccessible[2]. On voit alors que la recherche provoquée par un dispositif externe à l'individu (mais néanmoins conçu par lui) n'est pas limitée à une manipulation sans intention d'objets sensibles, c'est-à-dire qu'elle se fonde toujours sur une théorie qui la précède.

L'expérimentation en tant que processus intentionnel, s'appuie sur l'activité de pensée qui n'a rien de "concret" a priori. Cette démarche fait intervenir des objets du monde grâce auxquels des allers-retours entre théorie et expérience sont générateurs de la construction de la connaissance scientifique.

-> l'expérimentation n'est pas une observation béate et spontanée.

---

[2] Conformément à l'origine latine du mot "experiri" qui signifie à la fois "essayer" et "éprouver".

Epistémologiquement parlant, c'est donc une rupture avec Aristote qui séparait l'objet mathématique de l'objet physique (la séparation ontologique : *chorismos*).

II – 2 Outils et objets

Si, comme l'affirme Paul Langevin dans "La pensée et l'action" : "Le concret, c'est de l'abstrait rendu familier par l'usage", les objets qui permettent l'expérimentation ne sont pas nécessairement des objets matériels. Ce sont des objets suffisamment familiers pour le sujet qui servent de domaine d'expérience pour construire des connaissances plus complexes. C'est par exemple le cas des nombres entiers et de leurs propriétés élémentaires pour la théorie des nombres.

Les objets dont il est question en mathématiques naissent de la pratique de celui qui les donne à voir, c'est là une des principales différences avec les autres disciplines scientifiques qui utilisent pour partie des objets extérieurs à l'activité de pensée de celui qui expérimente. En mathématiques, l'élève (ou plus généralement celui qui apprend) témoigne pour partie[3] de son activité par la production symbolique pouvant être assimilé à une sorte de "chosification" pour emprunter le paradigme à Conne[4]. Ces objets peuvent alors être soumis à des traitements instrumentaux divers comme on le pratique régulièrement au sein d'un laboratoire, ce qui permet aux mathématiques d'être envisagées comme une science expérimentale à part entière.

II – 3 Les mathématiques : une science expérimentale

L'expression "sciences expérimentales" n'est pas un pléonasme. Les deux mots de cet énoncé renvoient à quelques références implicites partagées par la communauté scientifique : une science dite expérimentale est au service de la compréhension du monde tel qu'il nous apparaît et nous questionne. Le média de cette compréhension est lié à l'activité de l'individu dans l'accès à la connaissance, activité le plus souvent instrumentée, parfois modélisée mais toujours guidée par la théorie. Une des finalités de ce système étant d'entretenir un rapport constant à la vérité.

Cette représentation certes un peu caricaturale dans son acception généralisante, n'en contient pas moins un certain nombre de constantes qui peuvent être apparentées à des critères de caractérisation.

- Chaque individu entretient un rapport médiatisé aux objets du monde, aux faits de la science. L'interprétation qui en naît se fait par confrontation à une théorie plus ou moins élaborée.

- L'accès à la connaissance est un projet d'activité du sujet s'appuyant sur un processus de type constructiviste.

- Le processus d'expérimentation s'accompagne nécessairement d'un projet explicatif et critique.

---

[3] Le reste de l'activité mathématique est mise à jour par la mise en mots, elle-même problématique du fait d'une indétermination sémantique quasi systématique.

[4] Choses et objets, mai 1997. Par F. Conne Distribué lors du workshop sur l'objet, fpse, 19.11.1999

- Le débat est possible, la réfutation des savoirs est toujours envisageable, la validation par la preuve est nécessaire.

- La modélisation et l'utilisation d'instruments sont des gestes qui caractérisent l'expérience scientifique. L’espace de mise en œuvre de l’activité est le « laboratoire ».

Autant de caractéristiques qui font des mathématiques une discipline dont l'enseignement se doit d'utiliser les démarches préconisées en didactique des sciences.

II – 4 Une question de démarche

Faire des mathématiques c'est avant tout résoudre des problèmes. L'enseignement de la discipline doit conduire à l'éducation des individus au raisonnement et à la réflexion, avec pour objectif de leur donner des outils pour observer le monde avec un esprit critique, autrement dit de leur permettre de se doter de connaissances pour le comprendre. L'enseignement des mathématiques a donc besoin de l'expérimentation comme méthode de recherche, d'investigation. Une démarche prônant l'observation réfléchie, l'expérience sur les objets (matériels ou de pensée), la formulation de conjectures, la tentative de preuve par le choix des données ou des arguments. Un projet scientifique qui peut d'ailleurs comporter un certain nombre de boucles répétitives dans la mesure où les conjectures sont des affirmations plus ou moins erronées puisqu'elles naissent parfois d'une observation d'expérience, parfois de l'imagination créative des individus.

La question du milieu de l'apprentissage est alors centrale dans le processus d'enseignement/apprentissage. Quels sont les dispositifs, les enseignants, les supports de travail, les matériaux, les conditions d'énonciation, la place de l'erreur qui permettent la mise en œuvre de la démarche d'investigation ? Telles sont les questions qui se doivent d'être étudiées pour étayer la recherche en didactique des mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

BLOCH I. (2001) "Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations", *Actes de la 11ème école d'été de Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (2004) "Pour une nouvelle épistémologie scolaire", c*ahiers pédagogiques*, Paris, CRAP, n°427, pp. 34-36.

CONNE F. (1999) "Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne", in *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Les Presses de l'Université de Montréal

DIAS T., DURAND-GUERRIER V. (2006) "Expérimenter pour apprendre en mathématiques", *Repères IREM*, Metz, Topiques, n°60

GONSETH F. (1974) *Les Mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomatique*, Paris, Albert Blanchard.

HACKING I. (1989) *Concevoir et expérimenter*, Paris, Christian Bourgeois.

GEOMETRIE AU CYCLE 3 : OBJETS ET RELATIONS

Gérard GERDIL-MARGUERON
Professeur de mathématiques, IUFM de Grenoble
Equipe ERMEL - INRP
gerard.gerdil-margueron@wanadoo.fr

Résumé
Cette communication prend appui sur les travaux de recherche conduits, au sein de l'INRP, par l'équipe ERMEL. Cette dernière propose une ingénierie complète pour le cycle 3 structurée autour de l'apprentissage des relations géométriques. L'objet de cette communication est de s'interroger sur la place accordée aux objets dans cette ingénierie, sur les apprentissages réalisés sur ces derniers et notamment sur leur changement de statut au cours du cycle.

Mots clés : géométrie, objets, relations, propriétés, rectangle.

L'équipe ERMEL (Equipe de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole Elémentaire) est composée de formateurs en mathématiques venant de huit IUFM, d'un formateur en philosophie, de maîtres-formateurs et de conseillers pédagogiques.

I – OBJECTIFS, MÉTHODE DE TRAVAIL

I – 1. Objectifs

Nos objectifs ont été :

- de préciser pour le cycle 3 les enjeux, les contenus et les objectifs d'un enseignement visant le développement des compétences spatiales et géométriques ;
- d'élaborer, expérimenter, analyser des dispositifs complets d'enseignement (situations, modalités de mise en œuvre, analyses didactiques) cohérents pour l'ensemble du cycle 3 ;
- de conduire, dans le cadre de ces dispositifs, des investigations plus précises sur l'utilisation de phases argumentatives et les capacités des élèves qui y sont sollicitées.

I – 2. Méthode de travail :

Durant les six années qu'a duré notre travail, l'ensemble de l'équipe s'est réunie 3 à 4 fois par an pour concevoir l'ingénierie (réflexion sur les aspects théoriques, élaboration des situations) et pour analyser a posteriori les situations mises en oeuvre.

La progression complète a été expérimentée dans les classes. Aussi, parallèlement, nous avons mené des réunions régulières dans les équipes de sites pour l'analyse préalable des situations, l'observation et le recueil des données.

Environ 80 situations pour le cycle 3 ont été expérimentées plusieurs fois dans des versions successives.

L'ensemble donne lieu à un nouvel ouvrage de la collection ERMEL « Apprentissages géométriques au cycle 3 » à paraître en septembre 2006.

II – QUELQUES ÉLÉMENTS DE CADRAGE

II – 1. L'espace et la géométrie

Nous sommes convaincus qu'au Cycle 3, les connaissances spatiales des élèves doivent être consolidées. Mais la conduite d'activités dans le méso-espace ou le macro-espace est coûteuse et la description des situations liées à un espace particulier difficile. Aussi, nous avons conçu quelques situations reproductibles dans des espaces construits qui ont les caractéristiques du méso-espace ou du macro-espace ; l'objectif principal de ces situations étant l'élaboration de systèmes de repères par les élèves.

Pour la construction des connaissances géométriques, nos travaux nous ont amenés à mesurer l'importance du domaine spatio-graphique.

L'espace que nous appelons ainsi, à la suite des travaux de Colette LABORDE, peut être conçu comme un espace où les objets graphiques sont des représentations d'objets théoriques ou des modélisations d'objets spatiaux usuels.

La majorité des problèmes sont posés dans cet espace, sur des objets graphiques, pris pour eux-mêmes, ou dans une modélisation de l'espace physique fournie par l'enseignant, ou bien encore en référence à des objets théoriques.

II – 2. Les savoirs abordés en géométrie au cycle 3

Nous avons distingué trois classes de savoirs : les objets, les relations et les propriétés.

Les objets

Les objets à aborder au cycle 3 sont cités dans les programmes (point, segment, droite, rectangle, pavé…). Les termes correspondants peuvent désigner aussi bien des objets théoriques que des objets matériels existant dans l'espace sensible (il en est ainsi pour le rectangle par exemple). Il peuvent au contraire être spécifiques de l'espace sensible (trait, bord…) ou bien de la théorie (segment, droite…).

Au cours de la scolarité un même objet va changer de statut. Ainsi le carré est d'abord un objet « compact », perçu comme une forme globale ; il est ensuite un objet composé du point de vue des connaissances supposées de l'élève et conçu comme formé de quatre segments de même longueur, deux segments consécutifs étant perpendiculaires. Souvent, la conception première fait obstacle à l'apprentissage de savoirs « plus théoriques ».

Les relations

Le terme « relation » est utilisé selon son sens usuel en mathématiques ; il désigne des liens de la théorie pouvant exister entre les objets. Ces relations peuvent aussi être des modélisations de liens qui existent entre des objets de l'espace sensible. Il en est ainsi de l'égalité de longueur ou du parallélisme des deux bords d'une règle usuelle. Pour la géométrie plane au cycle 3, nous avons retenu l'alignement, l'incidence, l'égalité de longueurs , la perpendicularité, le parallélisme, le repérage et l'isométrie ou la similitude d'objets composés.

Les propriétés

Dans les programmes ou les manuels de l'école élémentaire ou du collège, le terme « propriété » est un terme générique qui n'est pas sans ambiguïté. Nous l'avons retenu en référence à des énoncés – assertion pouvant prendre les valeurs « vrai » ou « faux » - mobilisés à l'école élémentaire et préparant la mise en place de la géométrie du collège. Ces énoncés peuvent rendre compte de propriétés d'objets de l'espace sensible, être éventuellement des éléments d'une définition… (« un cube a 6 faces », « dans un rectangle, il y a quatre angles droits »). Ils relèvent souvent de constats établis dans l'espace spatio-graphique sur lesquels s'appuieront les axiomes de la géométrie au collège (que l'on nomme « propriétés » dans les programmes …) ou de futurs théorèmes (« si un quadrilatère a au moins trois angles droits alors c'est un rectangle »).

Notre choix

Ce sont ces relations qui structurent notre ingénierie.

Nous avons décidé de commencer par travailler sur les relations pour plusieurs raisons :

- étudier un objet, c'est étudier les relations qui le constituent ou qui le distinguent des autres ;

- c'est un moyen d'inciter les élèves, à passer du global à l'analytique pour la résolution de problèmes, ce que la simple description des objets perçus n'induit généralement pas ;

- les relations sont des éléments moins « apparents » pour les élèves que les objets d'où le recours à une représentation langagière ;

- les « évidences » spatiales sont moins présentes pour les relations que sur les objets usuels, ce qui oblige à des jugements plus « théoriques » .

Par ailleurs, nous avons cherché à faire apparaître les propriétés comme outils implicites pour résoudre des problèmes ou comme outils pour valider une solution, notamment dans des problèmes où la perception ne permet pas de prendre une décision ou, au contraire, amènerait une décision positive en faveur d'un résultat faux. Cependant, ces propriétés ne sont pas réellement des objets d'étude ; il n'est pas question à l'école élémentaire d'expliciter leur statut théorique, ni de viser une forme d'institutionnalisation comme ce sera le cas plus tard au collège.

III - DANS CETTE INGENIERIE STRUCTURÉE PAR LES RELATIONS, COMMENT S'ORGANISE L'APPRENTISSAGE SUR LES OBJETS ?

Les savoirs à aborder concernant essentiellement les objets et les relations, nous nous sommes souvent interrogés sur le sort réservé aux objets dans une ingénierie structurée par les relations. Cette question n'est pas anodine dans la mesure où les pratiques usuelles en géométrie à l'école réservent une place importante à l'étude des objets.

Pour apporter des éléments de réponse, nous nous appuierons sur le cas du rectangle, en présentant sommairement quelques situations concernant cet objet.

III – 1. Le rectangle pour « entrer dans la perpendicularité »

Une forme familière

Le rectangle est un objet spatial familier des élèves de l'école élémentaire. Dès la maternelle, ils manipulent des collections de formes comprenant toujours des rectangles et ont ainsi appris à distinguer un rectangle (« vrai » rectangle et non rectangle « presque carré ») d'autres formes comme le carré, le rond ou le triangle et à le nommer. Comme tout un chacun, ils vivent dans un environnement où de toute part, on peut identifier des rectangles. Il s'agit bien entendu d'objets spatiaux, perçus dans leur globalité et en aucun cas d'objets géométriques définis par des propriétés.

Un objet très « riche » du point de vue des relations

Perpendicularité de deux côtés consécutifs, parallélisme de deux côtés opposés, égalité de longueurs entre deux côtés opposés ou deux diagonales et même présence d'un centre de symétrie ou inscription dans un cercle dont les diagonales sont les diamètres… sont des propriétés en lien direct avec trois relations fondamentales à l'école : la perpendicularité, le parallélisme et l'isométrie.

Souhaitant aborder la perpendicularité par l'angle droit comme le demandent les programmes, nous avons choisi assez naturellement comme première signification rencontrée de l'angle droit : l'angle « d'un coin » d'un rectangle… Le quart de l'angle plein ou l'angle permettant un pliage « trait sur trait » viendront ensuite.

Nous avons ainsi cherché à utiliser les connaissances spatiales de l'élève portant sur des formes 2D pour aller progressivement vers une relation portant sur des droites, tout en sachant que, pendant longtemps, l'élève restera dans l'espace spatio-graphique et n'envisagera qu'une relation entre des traits. Dans leur article « *Les changements de regard nécessaires sur les figures* » paru dans le numéro 76 de la revue *Grand N,* Duval et Godin précisent aussi : *« Ce qui, d'emblée, est reconnu comme une forme 2D, ne se décompose pas perceptivement en un réseau de formes 1D. Autrement dit, il y a une priorité cognitive des figures 2D sur les figures 1D ».*

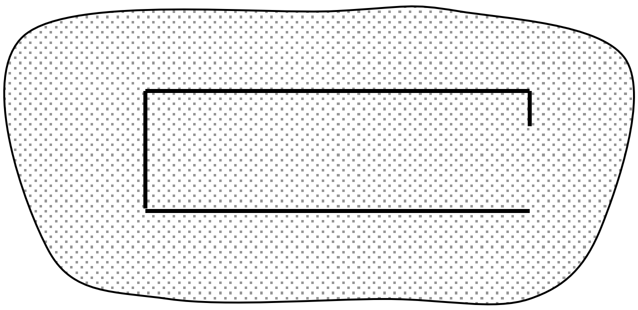
La situation « Rectangle à terminer 1»

Dans l'article cité ci-dessus, les auteurs se posent la question « *Comment amener les élèves à changer de regard sur les figures ? Comment les faire passer d'un regard centré sur les surfaces et leurs contours à un regard qui fait apparaître le réseau de droites et de points* *sous–jacent aux différentes figures étudiées à l'école ?* » et précisent « *Analyser une figure en fonction de la connaissance que l'on a des propriétés géométriques présuppose la déconstruction dimensionnelle des représentations visuelles que l'on veut articuler aux propriétés géométriques.* ». Nous avons construit cette situation avec une analyse très voisine des liens entre objet et relations qui le définissent, entre objet spatial et objet géométrique théorique.

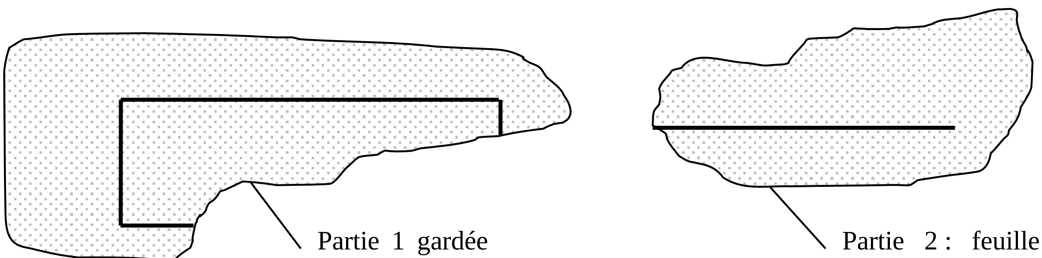
Nous proposons d'utiliser la connaissance qu'ont les élèves de cet objet global qu'est le rectangle pour identifier l'angle droit en isolant un de ses sommets. Ce faisant, nous centrons l'apprentissage sur une des relations présentes dans le rectangle et nous conduisons l'élève à occulter le parallélisme et les égalités de longueurs.

Pour l'élève, le problème mathématique posé est le suivant : construire de manière perceptive le « coin » d'un rectangle, un des deux côtés de ce « coin » étant donné

En pratique, l'élève est amené à considérer un rectangle dont un côté n'est pas terminé :



La mise en œuvre est la suivante : la feuille est coupée en deux parties, de façon à ce que seul un trait du « coin » en question soit présent sur la feuille de travail de l'élève. Il s'agit alors pour lui de reconstruire, sur la partie 2, le « coin » manquant en traçant « le second trait droit » de celui-ci. Il n'a pas accès à la partie 1, même « visuellement ». Dans un premier temps, ce sont des procédures perceptives qui sont visées, puisque, à ce stade, aucun apprentissage sur les outils relatifs à l'angle droit (gabarits, équerre…) n'a encore été organisé. L'élève dispose cependant d'une boîte à outils complète[1] lorsqu'il réalise cette tâche.



Les différentes phases de la situation permettront de travailler sur les différents « coins » du rectangle et de voir évoluer les procédures et les capacités de jugement des élèves sur la validité de leur production. Ce « coin » de rectangle sera une référence pour l'angle droit. Du point de vue du rectangle, cette situation permet de constater et formuler des propriétés comme « *à chaque coin du rectangle, il y a un angle droit* » ou bien « *dans un rectangle, il y*

---

[1] Le lecteur trouvera des informations précises sur le contenu de la boîte à outils dans l'ouvrage « ERMEL (2006). Apprentissages géométriques et résolution de problèmes. Hatier » pp 74 à 77.

a quatre angles droits » - même si cela n'est pas un objectif premier de cette situation. Ces propriétés peuvent d'ailleurs rester implicites mais faire l'objet d'un théorème en acte : « *Dès que j'ai identifié un rectangle, je peux me servir de n'importe lequel de ses « coins » pour construire un angle droit.* »

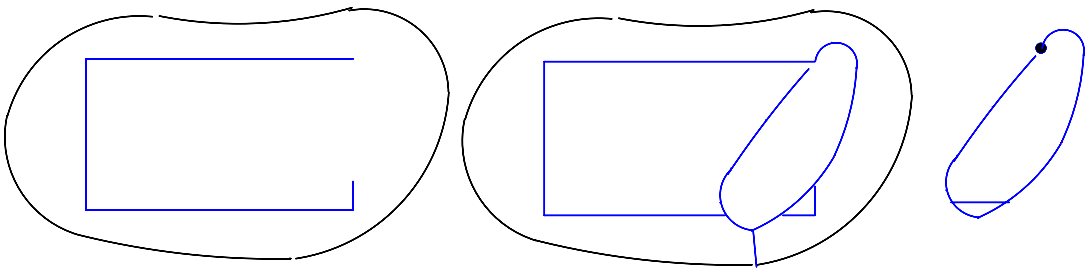
III – 2. De l'angle droit aux droites perpendiculaires

Après avoir conduit l'élève à rencontrer plusieurs significations de la perpendicularité au travers de l'angle droit au cours de la première année du cycle 3, nous continuons cette « déconstruction de la forme 2D » qu'est le rectangle pour aborder lors de la deuxième année de ce cycle la notion de droites perpendiculaires. Et une fois encore, ce sont les côtés consécutifs d'un rectangle qui vont servir de support à la tâche choisie ! Entre temps, les situations proposées auront permis à l'élève de construire (au sens défini par Rabardel) les différents instruments relatifs à la perpendicularité (gabarits d'angle droit, équerre, réquerre).

La situation « Rectangle à terminer 2 »

Le contexte et la tâche sont très voisins de ce qui a été présenté ci-dessus.

Le problème pratique est analogue à celui de la situation « Rectangle à terminer 1 » ; il s'agit encore de terminer un rectangle, mais bien entendu, le découpage de la feuille est différent comme l'indiquent les dessins ci-dessous.



Le premier dessin correspond à la feuille présentée pour la communication du problème ; le deuxième à la partie du « puzzle » gardée par le maître et le dernier correspond à la feuille de travail de l'élève.

Pour l'élève, le problème mathématique posé est donc cette fois : construire un segment, passant par un point donné, perpendiculaire au support (non tracé) d'un segment donné (le fragment du côté en jeu du rectangle).

Du point de vue de la perpendicularité, cette situation permet de passer de l'angle droit (forme 2D) aux droites perpendiculaires et d'obtenir des formulations comme « *Quand deux traits sont perpendiculaires, si je les prolonge, je peux toujours marquer quatre angles droits.* » par exemple. Du point de vue du rectangle, c'est encore l'occasion de travailler la perpendicularité des côtés consécutifs et de faire formuler cette propriété en utilisant la terminologie « droites perpendiculaires ».

III – 3. Plusieurs relations pour un même objet

Dans la progression que nous proposons, nous n'utilisons pas l'objet rectangle pour introduire d'autres relations que la perpendicularité afin que celui-ci reste une référence forte de ce concept. Cependant, après avoir introduit les concepts de parallélisme et de distance, nous allons proposer des problèmes de construction du rectangle en jouant sur les éléments donnés de façon à permettre l'explicitation de propriétés de cet objet.

La situation « Construire un rectangle»

Cette situation met en scène plusieurs problèmes de construction d'un rectangle.

Problème 1 : Construire un rectangle dont on connaît un sommet

Pour résoudre ce problème, dans une première phase, tous les outils habituels sont disponibles. Les procédures visées ici relèvent de tracés relatifs à la perpendicularité des côtés consécutifs et ce sont effectivement celles qui sont obtenues spontanément dans les expérimentations.

Dans une seconde phase, aucun outil n'est disponible. Il s'agit alors pour l'élève de mettre en œuvre des procédures de construction de droites perpendiculaires en utilisant le pliage.

Il est essentiel que les élèves perçoivent qu'il est possible de construire un rectangle sans utiliser de mesure et ce problème leur en donne l'occasion.

Dans les mises en commun, on arrive alors à des constats comme :

– *« Pour vérifier si c'est un rectangle avec les instruments, on doit vérifier si les quatre angles sont droits. » ;*

– *« Quand je trace, si je fais trois angles droits et que je vérifie le quatrième, c'est bien un angle droit. » ;*

– *« S' il y a quatre angles droits, ça suffit, les côtés sont égaux deux à deux. » ;*

– *« Si on raccourcit un trait, on voit bien qu'on n'aura plus un angle droit. » ;*

– *« Pour dire que ce n'est pas un rectangle, on peut le dire dès qu'on a trouvé un angle pas droit. »*

Ces propriétés constatées sont ainsi l'occasion d'aller vers cet objet géométrique théorique complexe qu'est le rectangle, de percevoir dans cet objet les liens de dépendance entre des perpendicularités construites et des égalités de longueur obtenues.

Problème 2 : Construire le quatrième sommet d'un rectangle dont on connaît deux côtés consécutifs (ou trois sommets) en utilisant une règle non graduée et un compas puis terminer le rectangle

C'est l'égalité de longueur des côtés opposés qui est visée ici, les reports de longueur s'effectuent au compas. Cela permet, d'une part, d'éviter le recours à des procédures de construction basées sur la mesure - celles-ci masqueraient les propriétés géométriques utilisées – et d'autre part d'installer le compas comme outil de report de longueurs.

La validation pratique s'effectuant par vérification des trois autres angles à l'équerre, ce problème donne l'occasion de constater que, grâce à cet objet qu'est le rectangle, il est possible, sous certaines conditions, de construire « de la perpendicularité » en construisant « de l'égalité de longueur ».

Les techniques usuelles de production de parallélisme faisant toutes appel soit à l'égalité de longueurs, soit à de la perpendicularité, il est difficile de poser un problème de construction de rectangle débouchant sur des procédures n'utilisant que le parallélisme. Cependant, les problèmes de réinvestissement ci-dessous vont donner lieu lors des mises en commun à des constats dans lesquels la propriété de parallélisme des côtés opposés est explicitée. C'est notamment la discussion sur le nombre de solutions qui va conduire à des constats comme : « *on a plusieurs solutions (une infinité…) et tous les côtés BC possibles sont parallèles entre eux.* » dans le problème 3.

Problème 3 : un côté est donné (ou bien deux sommets).
Problème 4 : un côté et un point du côté opposé (différent des sommets) sont donnés.
Problème 5 : Un point de chacun des côtés, différent des sommets, est donné.

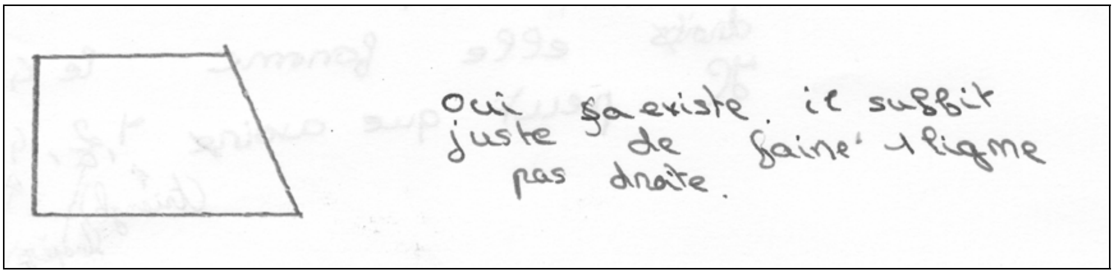
III – 4. Un problème théorique en fin de cycle 3

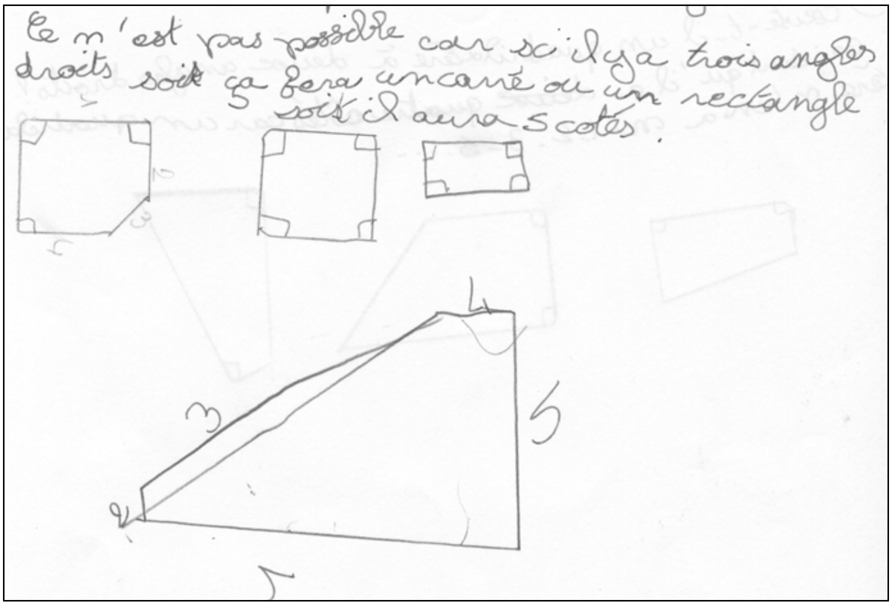
Au cours du cycle 3, le rectangle a progressivement changé de statut, passant d'un objet spatial global identifié perceptivement à un objet géométrique du domaine spatio-graphique muni de propriétés géométriques mettant en relation ses côtés.

Nous proposons alors un problème plus théorique : « Est-il possible de construire un quadrilatère qui a deux angles droits ? Est-il possible de construire un quadrilatère qui a trois angles droits ? ». Bien entendu, à ce niveau, même si cela n'est pas explicité, il ne s'agit pas de « *au moins deux* » ou « *au moins trois* » mais bien de « *exactement deux* » ou « *exactement trois* ».

La résolution va alors se faire soit dans le domaine spatio-graphique (production d'un schéma commenté), soit dans le domaine « théorique » avec des arguments relevant de propriétés certes souvent mal formulées mais bien support d'argumentation comme : « *si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles* » ou « *si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre* ».

Exemples de productions d'élèves de CM2





Non, impossible
Parce que il y aura 2 droites parallèles, une autre perpendiculaire aux deux droites alors on va rejoindre par un autre segment et ça fera 4 angles droits et non 3

Non,
Il y aurait 5 côtés
Il y aurait 4 angles droits
Il faudrait qu'il y ait 2 droites parallèles et aussi deux droites parallèles

IV - CONCLUSION

Le document d'application des programmes de 2002 pour le cycle 3 précise dans le texte introductif de la partie « Espace et géométrie » que « *l'objectif principal est de permettre aux élèves de se familiariser avec les objets du plan et de l'espace et de passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par un recours à des instruments et par la connaissance de propriétés* ».

Cela sous-entend donc que les propriétés possibles des objets puissent être identifiées, que ce soit par la perception ou par l'usage des instruments. En géométrie plane, les invariants qui fondent ces propriétés sont issus de relations comme l'alignement, la perpendicularité, le parallélisme, l'égalité de longueur. S'appuyant sur les connaissances spatiales des élèves et notamment celle des objets 2D usuels de l'espace sensible, leur construction impose des allers et retours permanents entre objets et relations. Ce faisant, les objets changent de nature pour progressivement devenir des objets géométriques théoriques définis par des relations entre leurs constituants, qu'ils soient objets 1D ou points.

A travers l'utilisation de l'objet rectangle tout au long de l'ingénierie proposée par l'équipe Ermel pour le cycle 3, nous avons mis en évidence la contribution de cet objet familier à la construction du concept de perpendicularité mais aussi comment la résolution de problèmes dans lesquels les relations usuelles apparaissent comme outils de solutions permet une connaissance de l'objet géométrique associé à l'objet initial de l'espace sensible.

BIBLIOGRAPHIE

ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes*. Hatier

Berthelot R, Salin M.H. (1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. Grand N n°53. IREM de Grenoble.

Berthelot R, Salin M.H. (1995). Savoirs et connaissances dans l'enseignement de la géométrie. *Différents types de savoirs et leur articulation*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Duval R, Godin M. (2006). Le changement de regard nécessaire sur les figures. *Grand N n° 76*. IREM de Grenoble.

Laborde C (1990). L'enseignement de la géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques, vol 9/3*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Rabardel P (1995). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de la 10ème école d'été de didactique des mathématiques.* ARDM.

LE JEU COMME MODÉLISATEUR DES SAVOIRS MATHÉMATIQUES

Didier Faradji
Concepteur de jeux mathématiques
Intervenant extérieur en formation continue
Le Carré Musical Paris
Didier@faradji.fr

Résumé

Dans ce texte, Didier Faradji propose aux enseignants de moyenne et grande section de maternelle d'aider leurs élèves à appréhender la notion de différence entre deux nombres et à parvenir ainsi à construire par eux-mêmes « la transformation de la quantité » au moyen d'un jeu intitulé le Quadruplay.

Préambule

Les mathématiques mettent en oeuvre des principes, des objets, des notions et des outils qui, de par leur caractère abstrait échappent naturellement à nos sens parce qu'ils sont par nature hors de notre portée. L'investigation est un moyen de nous les faire découvrir. Pour cela, il faut d'abord les rendre accessibles à notre entendement. L'observation est la voie privilégiée pour nous en révéler leur existence. Grâce à elle, on peut comparer des faits, les interroger, proposer des réponses et les contrôler en les rapprochant les unes des autres. Ces faits et leur contrôle au moyen du raisonnement, constituent à proprement parler l'expérience. L'expérience est le procédé idéal que nous ayons pour nous instruire sur la nature des choses qui sont en dehors de nous. « L'observation montre et l'expérience instruit » disait Claude Bernard (Introduction à l'étude de la médecine expérimentale).

La démarche du créateur de jeux mathématiques telle que je l'envisage, procède de cette méthodologie. Celle de créer des univers ludiques et mathématisés dont l'utilisation est mue par une double finalité, - celle de pouvoir provoquer artificiellement l'apparition d'objets ou de concepts mathématiques qui, dans la réalité appartiennent au monde des idées et qui de manière courante et régulière n'auraient jamais pu se présenter aussi directement à l'observateur. – Celle de proposer au joueur d'atteindre un objectif en mettant en oeuvre une stratégie qui induira le recours auxdits objets et concepts que le jeu hissera au rang de phénomènes. Grâce au jeu, ce qui est hors de notre portée peut devenir observable et accessible à nos sens. Dans le jeu, la notion mathématique se fait objet pour devenir ensuite un outil (Douady) que l'élève mobilisera de manière autonome.

I- LA MODÉLISATION D’UNE COMPÉTENCE : LA TRANSFORMATION DE LA QUANTITÉ

I – 1 Que doit on entendre par transformation de la quantité ?

Avant de créer le Quadruplay, je suis parti du constat selon lequel un grand nombre d’élèves de Grande Section de maternelle réussissaient à dénombrer avec aisance de grandes collections sans parvenir toutefois à transformer correctement la quantité.

Je définis la « transformation de la quantité » comme l’opération mentale qui nous permet de déterminer le nombre d’éléments qu’on doit ajouter ou retirer à une collection pour qu’elle atteigne une quantité désirée.

Cette compétence, qui est mentionnée à la page 29 des documents d’accompagnement des programmes de mathématiques 2002, aurait pu échapper au champ de mes préoccupations créatives si de manière constante et concordante elle ne m’avait pas été signalée par des pédagogues (IEN, CP, formateurs mathématiques) qui voient en elle, lorsqu’elle est bien assimilée, une des principales raisons de la réussite en mathématiques des élèves entrant en cours préparatoire. Cette compétence permet à l’élève de se représenter le nombre dans ce qu’il a de plus abstrait et de l’utiliser non plus uniquement comme un outil devant servir pour effectuer un dénombrement mais également et plus principalement comme d’un outil de contrôle des quantités.

La transformation de la quantité est une compétence difficilement transmissible dans la mesure où elle s’appuie sur le concept de nombre pris non plus comme l’indicateur d’une quantité préhensible ou dénombrable par le comptage mais utilisé comme outil mental pouvant servir à opérer sur une quantité représentée abstraitement que l’on peut accroître ou diminuer à loisir.

Il est difficile de dire comment la transformation de la quantité se construit et quelles sont les étapes qu’il faut suivre pour pourvoir à sa transmission. On sait en revanche qu’il n’est pas possible d’agir correctement sur le nombre tant que cette compétence n’a pas été construite.

Il apparaît ainsi également très clairement que l’élève qui ne parvient pas, en début de cours préparatoire, à transformer correctement une quantité aussi faible soit-elle peut être mis de manière injuste et durable en position de fragilité au regard de ses apprentissages mathématiques.

Reste pour l’enseignant de Grande Section un défi pédagogique de première importance à relever :

Comment aider un élève à construire une compétence aussi abstraite que celle qui touche à la transformation de la quantité sans pour autant l’amener à recourir de manière explicite aux mécanismes opératoires de l’addition et de la soustraction et à l’utilisation de l’écriture chiffrée ?

Pour illustrer ce que pourrait être la mise en oeuvre du principe de la transformation de la quantité, je me propose d’utiliser la situation didactique suivante :

J’ai cinq timbres dans une enveloppe. Que dois-je faire pour qu’il en reste trois ?

Le raisonnement utilisé bien qu’en apparence évident est en réalité subtil.

- Il part d'une simple situation de dénombrement mais ne se limite pas à celle-ci :

  Combien ai-je d'objets dans cette collection ?

- Il se poursuit par une approche de l'écart numérique.

  Combien en ai-je en plus ou combien en ai-je en moins ?

- Par une conclusion :

  Combien m'en faut-il en plus s'il m'en manque ou combien m'en faut-il en moins si je n'en ai trop.

- Il se termine par une vérification :

  Est ce que j'obtiendrai la quantité d'objets désirée si j'en ajoutais tant ou si j'en retirais tant ?

Cette problématique étant posée, je me suis mis en recherche d'un principe ludique qui modéliserait de manière évidente cette compétence délicate à construire qui suppose que l'on puisse à la fois abstraire le nombre, le garder en mémoire et s'en servir non seulement comme indicateur de quantité mais aussi comme d'un outil lui permettant de modifier celle-ci.

Il s'agissait pour moi de trouver un principe de jeu qui placerait l'enfant en situation de modifier une collection d'objets par actions successives jusqu'à ce que celle-ci atteigne une quotité précise définie à l'avance.

I – 2 Les contraintes du modèle

Le protocole de recherche tel que je me le suis fixé tient toutefois à quelques contraintes :

- Le principe de jeu doit être d'une abstraction totale et ne pas s'inspirer de situations empruntées à la vie quotidienne. Les compétences construites à travers le jeu mathématique doivent pouvoir être aisément transposables à des situations aussi éloignées que possible du contexte dans lequel elles ont été construites.

- Il doit placer l'élève devant un problème à résoudre dont la solution conduira à la construction de la compétence visée par la finalité didactique du jeu. Il s'agit ici de la transformation de la quantité.

- L'enfant doit oeuvrer sur des collections fixes et non mobiles. Les collections fixes n'étant pas préhensibles, leur utilisation par le joueur nécessite un plus fort degré d'abstraction et force le recours préalable à la représentation du concept de nombre.

- Ces collections doivent être inégales entre elles. Il s'agit de montrer comment un même nombre peut être construit à partir d'autres nombres différents les uns des autres.

- Le jeu doit se dérouler en interaction avec un adversaire et créer entre les joueurs un conflit devant générer chez eux de la rigueur, de l'anticipation et du dépassement de soi.

- Le jeu doit être accessible à l'enfant à partir de la Moyenne Section.

- La règle du jeu doit être simple et demeurer la même quelque soit le niveau des joueurs.

- Le jeu doit apparaître comme un système c'est à dire une construction théorique cohérente sur laquelle le joueur peut agir positivement en faisant preuve de déduction et d'anticipation.

- Le jeu doit placer les joueurs au devant de problèmes qu'ils doivent résoudre par la seule puissance de leur raisonnement et au moyen de leurs premières connaissances des nombres aussi modestes soient-elles.

- Le jeu ne doit pas se vider de son ressort ludique sitôt la compétence visée acquise. Il doit pouvoir être pratiqué comme tout autre jeu de société par un élève de Cycle 3, de collège et bien entendu par des adultes.

I – 3 Présentation du Quadruplay

L'idée de départ consistait à demander à l'enfant de construire un nombre qu'il sait déjà reconnaître : en l'occurrence le nombre 4 en l'amenant à envisager l'écart numérique pouvant exister entre ce nombre et ceux qui entretiennent avec lui un rapport de proximité et l'initier par là même aux situations additives et soustractives. Une collection comprenant jusqu'à 4 éléments présente l'avantage d'être reconnue par l'élève sans recourir au comptage) et se prête donc bien aux combinaisons que l'on peut exercer sur ce nombre. Celui-ci est à la fois simple et suffisamment complexe pour servir de base à la résolution des premières opérations. En offrant à l'enfant la possibilité de construire ses premières compétences en oeuvrant sur le nombre 4, le Quadruplay constitue un bon point de départ pour travailler ensuite « la transformation de quantité » sur des collections plus importantes.

I – 3.1 La description du jeu

Le Quadruplay est un jeu numérique composé de 9 constellations disposées en carré contenant 0, 1, 2 ou 3 points (voir plateau en annexe 1). Pour symboliser le nombre 0 le jeu va recourir au principe de la case vide. Les cases contenant 0 ou 2 points sont en triples exemplaires. Il y a deux cases contenant 1 points. La case contenant 3 points est unique.

I – 3.2 La règle du jeu

Les joueurs disposent de 4 anneaux. A tour de rôle, ils les déposent sur le plateau en essayant de réunir quatre constellations totalisant quatre points. Par un jeu de blocage, ils tentent d'atteindre l'objectif fixé par le jeu tout en empêchant l'adversaire d'y parvenir avant.

Une fois les huit anneaux posés et si personne n'a réuni 4 points, les joueurs poursuivent cet objectif en déplaçant à tour de rôle un de leurs anneaux en le faisant glisser d'une case à l'autre en suivant les traits du quadrillage. Le premier qui totalise 4 points avec ses 4 anneaux a gagné. Quand on ne peut pas jouer, on doit passer son tour.

II – L'EXERCICE DE LA TRANSFORMATION DE LA QUANTITÉ

En jouant au Quadruplay, les élèves recourent à des stratégies fondées sur la recherche d'une différence. Celle-ci fait intervenir le principe de la soustraction à chaque fois que l'on cherche à accroître ou à diminuer son total de points en déplaçant un anneau.

La pratique du Quadruplay vise l'acquisition de plusieurs compétences étroitement liées entre elles. On peut citer : l'approche du concept de quantité, la construction d'une

collection équipotente à une collection donnée sans qu'elle soit disponible, l'initiation aux situations additives et soustractives.

En jouant, l'élève utilise le concept de zéro sans avoir à le matérialiser par un signe, ne recourt pas aux nombres sous la forme d'image chiffrée.

En jouant, l'enfant comprendra que les problèmes posés par le jeu peuvent être résolus grâce aux nombres et uniquement avec ceux-ci.

II – 1 De la construction du nombre à l'approche du concept de quantité

La représentation du concept de nombre peut être considérée comme effective dès que l'enfant parvient à mettre en équivalence deux ensembles numériques dont l'un n'est pas marqué physiquement. C'est précisément cette compétence que le Quadruplay vise au premier chef. Ainsi, il est utile de s'interroger, lorsque l'on joue à ce jeu, sur les différentes manières de décomposer 4 en quatre nombres puisque l'objectif du jeu exige que le joueur parvienne à atteindre ce nombre cible en additionnant quatre petites valeurs.

Il existe trois configurations gagnantes possibles : 2, 2, 0, 0

2, 1, 1, 0

1, 3, 0, 0

II – 1.1 La décomposition du nombre 4 en quatre autres valeurs

- ***Construire une collection de 4 points en additionnant quatre quantités : La dépose des anneaux***

Au début du jeu, l'enfant cherche à totaliser le plus rapidement possible 4 points en déposant ses deux premiers anneaux. Il est ainsi tenté d'occuper les cases contenant 3 et 1 point ou les deux cases contenant 2 points. Il ne pense pas à introduire au départ le zéro. Il compte ensuite avec celui-ci en lui faisant jouer le rôle d'un élément neutre lorsqu'il a atteint 4 points ou s'il a dépassé ce total. Il apprend peu à peu à obtenir 4 avec ses 4 anneaux puis il mémorise les configurations gagnantes et les différentes décompositions de ce nombre en quatre autres valeurs (le zéro étant compris).

Rapidement il parvient à additionner deux puis trois et quatre collections de points.

Ainsi, à travers la résolution de petits problèmes additifs ou soustractifs que lui pose le jeu, l'enfant découvre les fonctions du nombre comme représentation de la quantité et comme outil servant à le renseigner sur celle-ci. Par le jeu de la répétition, le Quadruplay amène l'élève à construire un nombre en le décomposant en d'autres nombres plus petits. Lors des séances de jeu, il est à même de donner à chaque fois le nombre d'objets qu'il doit ajouter ou retirer à une collection existante et dire ainsi s'il en manque ou s'il y en trop.

La part de calcul mental que le jeu induit est conséquente. L'essentiel de la difficulté réside toutefois dans la justesse de l'opération mentale utilisée, celle qui permet à l'enfant de programmer une action et d'anticiper un résultat sans qu'aucune consigne n'induise le moyen à utiliser.

Une fois la transformation de la quantité acquise dans le cadre de pratiques régulières du Quadruplay, l'élève peut aisément mobiliser cette compétence pour traiter des collections plus importantes n'excédant toutefois pas 10 éléments. Et de ce point de vue, il apparaît surprenant de voir des élèves qui pratiquent en autonomie le Quadruplay passer sans aucune difficulté sur l'Octuplay. Dans ce dernier jeu (Plateau de l'Octuplay en annexe 2), le principe du jeu reste le même. Son objectif consiste à atteindre 8 points avec ses quatre anneaux et non plus 4. Le contenu des cases a toutefois été incrémenté d'un élément et les cases vides ont disparu.

Ces jeux offrent l'avantage de la progressivité. Ce que l'enfant est capable de faire sur de faibles quantités, il peut ensuite le reproduire sur des quantités plus grandes. La difficulté d'ordre didactique que le jeu prend bien en charge réside surtout dans l'amorçage de la compétence et dans sa consolidation. La progression sur les quantités s'effectue ensuite de manière linéaire selon des paliers qu'on situera pour le premier au niveau de la dizaine.

II – 1.2 La transformation de la quantité

- ***Modifier le cardinal d'une collection en lui ajoutant ou en lui retirant quelques éléments : le déplacement des anneaux***

Une fois que les deux joueurs ont déposé leurs quatre anneaux sur le plateau sans être parvenu à l'objectif, ils doivent alors déplacer tout à tour un de leurs anneaux.

Pour parvenir à l'objectif numérique fixé par le jeu, ils doivent soit accroître soit diminuer leur total de points et résoudre par là même des petits problèmes liés à l'augmentation ou à la diminution d'une quantité.

Par le jeu, le jeune enfant va dépasser les simples possibilités du dénombrement pour faire appel au nombre 4 qu'il mettra en oeuvre dans de petits problèmes additifs et soustractifs auxquels le jeu le confrontera continuellement.

La pratique du Quadruplay l'aide à franchir une nouvelle étape, celle qui lui permet de passer du dénombrement au calcul. Grâce à lui, le joueur construit le nombre quatre ainsi que tous ceux qui lui sont proches dans la chaîne numérique.

Il parvient ainsi à décomposer une collection en plusieurs parties sans jamais perdre de vue le tout. En jouant, l'enfant devient ainsi peu à peu capable d'ajouter ou de retirer mentalement un ou plusieurs éléments à la collection qu'il vient de dénombrer sans avoir besoin de tout recompter.

Les points contenus dans les cases ne pouvant pas être appréhendés ou déplacés, l'enfant est obligé de transformer son total de points en substituant une collection par une autre en déplaçant un de ses anneaux vers une case voisine.

L'enfant n'accroît donc pas son total de points par ajouts de points mais en comparant le nombre d'éléments contenus dans une case avec celui d'une case voisine et en recourant à la notion d'écart numérique. Si la case d'origine contient 1 point et la case d'arrivée 3 points, en déplaçant son anneau de la case 1 vers la case 3, on substitue la case 3 à la case 1 et on augmente le total de 2 points.

Au moyen du Quadruplay, il devient possible d'anticiper des actions élaborées mentalement ayant pour but de modifier le cardinal d'une collection, de contrôler a priori les modifications qui vont intervenir en simulant les coups à jouer et de vérifier a posteriori les résultats obtenus par le comptage. Il est donc possible de faire entrer l'élève au moyen de ce jeu dans des activités de résolution de problème visant à développer chez lui sa capacité à chercher.

III – L'INTRODUCTION DU JEU DANS LA CLASSE

III – 1 Comment pratiquer le jeu en classe ?

III – 1.1 La pratique en deux petits groupes de quatre joueurs sur deux plateaux de jeux : 8 enfants au maximum

L'enfant a besoin au départ d'être guidé par l'adulte dans l'apprentissage du jeu. Aussi, on suggèrera à l'enseignant de réunir autour de chaque plateau de jeux un ou deux groupes de quatre élèves qu'il guidera dans la phase de découverte et dans celle d'appropriation du jeu tandis que le reste de la classe participera en toute autonomie à des activités qui leur seront tout spécialement destinées.

III – 1.2 La pratique du jeu en situation collaborative

Il existe plusieurs manières de pratiquer un jeu mathématique en classe. L'objectif est d'amener l'enfant à délaisser les stratégies aléatoires pour le faire entrer dans la réflexion, l'anticipation, calcul mental ou le calcul réfléchi. Les pratiques en situation collaborative favorisent la progression de l'enfant dans la maîtrise du jeu et des stratégies. Elles mettent en présence d'un même jeu quatre élèves jouant en deux équipes de deux. Les coéquipiers sont disposés de manière alternée afin d'éviter qu'ils dialoguent sur le mode chuchoté, ce qu'ils auraient été incités à faire s'ils avaient été placés côte à côte. Les joueurs d'une même équipe reçoivent 4 anneaux d'une même couleur (deux chacun). Lors du jeu, ils déposent un à un et à tour de rôle leurs anneaux. C'est au joueur dont c'est le tour de jouer de décider de la stratégie à adopter. Son partenaire fait office selon les cas de conseiller ou de contradicteur. Il pourra alerter son coéquipier des conséquences néfastes d'un coup jugé trop intempestif ou lui signaler une erreur de calcul.

Les pratiques collaboratives placent ainsi l'enfant en situation d'apprendre au contact d'autres enfants soit en dialoguant avec leur partenaire soit en écoutant les adversaires débattre de leurs stratégies.

III – 1.3 Le rôle de l'enseignant

Si à travers le jeu, l'enfant est bien l'artisan de ses propres apprentissages, il convient toutefois de dire qu'il y a une différence entre ce que l'enfant peut réaliser seul dans le cadre d'un jeu et ce qu'il est capable de faire avec l'aide d'un adulte.

L’implication de l’enseignant

Doit-on souligner, avant d’aller plus loin dans cet exposé, la nécessaire implication de l’enseignant quant au succès des séances de jeux mathématiques qu’il peut être amené à conduire dans sa classe. Le jeu mathématique est un accélérateur de compétences certes, à condition toutefois que l’enseignant se montre confiant et patient à l’égard de ses élèves.

Pratiquer le jeu en situation collective est sûrement l’activité pédagogique la plus délicate qu’il soit même si elle parait simple au premier abord. Elle ne laisse aucune trace écrite et peut ne pas porter ses fruits dès la première séance. Ces deux points peuvent rebuter de nombreux enseignants qui peuvent hâtivement croire en l’inutilité de leur travail.

La progression rapide de l’élève dans l’étude d’un jeu est liée à l’aisance dont son enseignant peut faire preuve dans sa manière de guider la séance. Cette aisance s’acquiert par l’expérience en multipliant les séances de jeu avec les élèves et en les guidant dans leur expression et dans la conduite de leur raisonnement.

L’enseignant ne doit pas être impatient

La consolidation des compétences construites par l’enfant au moyen du jeu s’effectue à des rythmes divers qu’on ne peut pas bousculer. Certains enfants progressent très vite avant de donner l’impression de stagner, d’autres fonctionnent de manière inverse. L’enseignant doit avant tout, lorsqu’il anime une séance de jeu en classe, se considérer comme un passeur.

L’expérience mathématique que l’on peut vivre au travers d’un jeu est incommunicable si celui avec qui on veut la partager ne l’a pas lui-même déjà vécue. Si l’enfant n’adhère pas au jeu, c’est peut-être parce qu’on est passé trop vite sur la phase d’observation. Il faut alors reprendre la règle du jeu dans chacune de ses étapes. Peut-être faut-il (dans le cadre du Quadruplay) se limiter à la seule dépose des anneaux et programmer la phase de déplacement à une autre séance.

La pédagogie du questionnement

Lorsqu’il initie des séances de jeu en pratique collective, l’enseignant laisse aux enfants, autant qu’ils le peuvent, le soin d’apporter eux-mêmes les réponses aux questions qu’ils se posent.

Celles-ci peuvent être provoquées par l’enseignant à condition qu’elles aident l’élève à comprendre la démarche qui a été la sienne lorsqu’il se trompe et surtout lorsqu’il dit juste. Les situations de jeu se prêtent au débat. Soit on s’interroge parce que l’on n’est pas sûr ou parce qu’on n’a pas compris. C’est sur ce terrain là que l’enseignant doit véritablement s’engager et gagner en expérience.

- ***Pour commencer, l’enseignant peut lancer le débat en demandant à un enfant :***

- D’exposer la règle du jeu à un autre élève

- D’expliciter les raisons d’un coup

- De récapituler une situation de jeu

- De vérifier un total de points

- De verbaliser les conséquences d'une stratégie

- L'enseignant peut également susciter chez l'enfant des questionnements ***:***

En lui suggérant plusieurs solutions et en lui laissant la possibilité de choisir celle qui lui semble la mieux adaptée à la situation.

En lui montrant comment il est possible de conduire un échange avec son partenaire dans le but de parvenir à un accord avec lui.

<u>L'enseignant et le langage</u>

Grâce à l'action éducative conjuguée du jeu et de l'enseignant, l'enfant pourra progresser mieux et plus vite dans l'étude du jeu que s'il avait été livré à lui-même. Dans tous les cas, l'enseignant doit être attaché à faire sortir l'élève de son mutisme naturel en l'amenant à verbaliser ses actions et à rendre compte à voie haute des résultats obtenus. Peu à peu, en jouant, l'enfant se familiarisera avec les représentations du nombre que lui proposera le jeu. Celui-ci lui fera vivre une expérience qui le conduira à répéter inlassablement les mêmes calculs jusqu'à ce que les mécanismes inhérents à l'augmentation et à la diminution de la quantité finissent par fonctionner comme des automatismes.

III – 2 La phase d'initiation

Par le jeu, l'enfant est confronté à un petit univers manipulable qui obéit à des lois qui lui sont propres et à la découverte desquelles il va peu à peu se préparer.

Il y parviendra notamment en décrivant les éléments qui le composent, en s'interrogeant, par exemple, sur les contenus caractéristiques d'une case, sur sa place sur le plateau ou en définissant son cardinal.

III – 2.1 Introduction du zéro sans recourir à une écriture chiffrée

Les cases violettes dans le Quadruplay sont vides. Un anneau posé sur une case vide ne modifie en rien la somme des cases sélectionnées par les autres anneaux.

Ainsi, dans le cas du Quadruplay, le joueur qui a déjà atteint ses quatre points avec trois anneaux devra, pour gagner, occuper une case vide avec son quatrième anneau.

Cela lui permettra de conserver son total de 4 points et de remplir l'objectif posé par le jeu à savoir totaliser 4 points en sélectionnant 4 cases avec ses 4 anneaux. Par ce jeu, il est possible d'aborder le zéro sans recourir à son écriture chiffrée.

III – 2.2 L'appropriation du plateau

Il est essentiel que l'enfant puisse rapidement se sentir à l'aise dans un jeu. Afin de faciliter son appropriation, on pourra privilégier le recours à des questions d'observation ou à de petites consignes ayant pour but de l'entraîner à détailler les différents objets figurant sur le plateau. On peut commencer par cette première question :

- ***Quel point commun ont tous les disques qui sont de la même couleur ?***

Dans le Quadruplay les cases d'une même couleur contiennent toutes un même nombre de points. Ainsi, dans le Quadruplay, si une case verte contient trois points, peut-on pour autant en déduire que toutes les cases vertes contiennent exactement le même nombre de points ? On procèdera à la vérification de cette hypothèse en dénombrant les points de chaque case verte.

La couleur des cases du Quadruplay ne sert pas la fonctionnalité du jeu. Elle contribue à mettre en valeur la disposition harmonieuse des nombres sur le plateau et contribue ainsi à l'esthétisme de certaines configurations gagnantes. Sur un plan plus pratique, elle permet de repérer d'un coup d'œil les cases d'une même valeur et facilite la reconnaissance des collections de même quotité.

On peut poursuivre cette phase de découverte en amenant l'enfant à répondre à cette deuxième question :

- ***Est-ce que chaque ligne contient un même nombre de points ?***

On peut en effet constater que la somme des alignements de trois cases (la somme des quantités représentées sur trois cases alignées) du Quadruplay est bien constante. Elle est de 5 points.

III –2.3 La reconnaissance de certaines formes de géométrie plane (élèves de primaire)

Certaines configurations totalisant 4 points débouchent sur des figures géométriques constituées par les quatre sommets de la configuration gagnante. Ces figures de géométrie plane ne sont pas toutes aussi facilement identifiables. La reconnaissance de ces figures par le joueur ne le dispensera toutefois pas de compter.

Il en sera ainsi des deux triangles que l'on obtiendra en disposant ses quatre anneaux de la manière suivante :

- Case rouge droite, case jaune centrale, deux cases violettes en bas et en haut à gauche.
- Case rouge gauche, case jaune centrale, deux cases violettes en bas et en haut à droite.

La case 3 jaune est située au centre du triangle ainsi constitué.

- ***Il en sera ainsi des carrés que l'on obtiendra en disposant ses quatre anneaux de la manière suivante :***

- Deux cases rouges droite et gauche puis case bleue haut et case violette bas.
- Deux cases violettes en haut droite et gauche puis deux cases bleues en bas droite et gauche.

- ***On trouvera également en jouant un grand nombre de trapèzes, de rectangles et de parallélogrammes gagnants dont les quatre sommets totalisent 4.***

IV – CONCLUSION

Le Quadruplay a bien pour but d'aider l'enfant à se représenter le nombre comme indicateur de la quantité et à l'abstraire.

- **En jouant, il apprend :**

- à créer une relation d'équipotence entre deux collections

- à associer un nombre à une quantité

- à comparer le cardinal de plusieurs collections

- à résoudre des problèmes liés à l'augmentation et à la diminution d'une quantité

- à mettre en œuvre des petits problèmes additifs et soustractifs

- à approcher la notion d'écart numérique

- à aborder la notion (les problèmes du type) « combien de plus » et « combien de moins ».

- à donner du sens aux opérations

- **En jouant, il peut dire :**

- si l'ensemble des points obtenus correspond bien au total requis par la règle du jeu

- s'il a besoin d'un ou de plusieurs déplacements pour obtenir le total requis

- si la quantité à réaliser (4) est supérieure ou inférieure à son total de points

- combien d'éléments il va devoir ajouter ou retirer pour parvenir à 4

MATHÉMATIQUES ET MULTIÂGE

Marie-Pierre Galisson
Maître de conférences, centre IUFM d'Arras
DIDIREM
mpgalisson@aol.com

Résumé
Quelles mathématiques fait-on vivre dans une école qui fonctionne en multi-âge ? Comment y apprend-on les mathématiques ? Comment y enseigne t-on les mathématiques quand on décide de faire de l'hétérogénéité des âges et des compétences un levier d'apprentissage ?
Ces questions définissent, depuis septembre 2005, les axes de travail d'un groupe Recherche- Action-Formation mis en place dans le Val d'Oise. Le projet est né du besoin d'interroger les pratiques pédagogiques qui prévalent en regroupement multiâge pour analyser leurs effets sur les apprentissages mathématiques des élèves. Rappelons que ces activités s'organisent sous forme de « rituels », de « démarches d'auto-socio construction des savoirs (GFEN), d'ateliers de résolution de problèmes et de travail d'entraînement et de systématisation. Ces activités sont pensées dans le cadre d'une pédagogie interactive fondée sur les échanges entre élèves, un étayage par les « plus compétents ».
Nous présentons quelques aspects du cheminement réflexif de l'équipe et quelques éléments révélateurs de la dynamique impulsée : nous mettons ainsi en évidence l'influence de l'organisation pédagogique sur les situations d'apprentissage et les questions que soulève l'analyse *a posteriori* de quelques-unes de ces situations.
Notre cadre d'analyse se propose de prendre appui sur les apports de « l'auto-évaluation régulatrice » (CRESAS) et sur les apports de la didactique des mathématiques (conditions et contraintes déterminées au niveau de la pédagogie et de l'école, caractéristiques et co-détermination des organisations mathématiques et didactiques qui en résultent).

Cet exposé a pour objectif de dresser un premier état des lieux d'une expérimentation qui a débuté il y a deux ans.

Ce travail, qui s'inscrit officiellement depuis cette année dans le cadre d'une recherche-action du PAF de Versailles, mobilise l'ensemble des écoles « multiâge » d'un réseau départemental (Val d'Oise) ; il concerne l'école ouverte des Bourseaux (Saint-Ouen L'Aumône –antenne de Cergy), l'école Van Gogh (Montigny –antenne d'Argenteuil), les écoles Kergomard (Sarcelles) et Jean-Baptiste Clément (Montmagny) –antenne de Sarcelles).

Je n'évoquerai que le travail engagé pour le cycle 3 avec l'équipe de l'école Kergomard et ne présenterai donc qu'une facette de l'étude : j'ai fait le choix de suivre l'équipe avec laquelle une réflexion commune avait déjà été amorcée.

La problématique de la recherche action, à savoir, questionner les pratiques pédagogiques qui prévalent en regroupement multiâge pour analyser leurs effets sur les apprentissages mathématiques des élèves, nous renvoie, en termes mathématiques et didactiques, aux questions suivantes :

Quelles mathématiques fait-on vivre dans une école qui fonctionne en multi-âge ? Comment y apprend-on les mathématiques ? Comment y enseigne-t-on les mathématiques quand on décide de faire de l'hétérogénéité des âges et des compétences un levier d'apprentissage ?

En quoi, les conditions et les contraintes que peut générer le fonctionnement en regroupement multi-âge peuvent-elles permettre de porter un regard différent sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans la classe ?

Mais qu'entendre par multiâge ?

I – UNE ORGANISATION PÉDAGOGIQUE EN MULTIÂGE

I – 1 Une conception pédagogique et politique

Dans le Val d'Oise, le multiâge porte l'héritage d' « un projet d'école » qui s'est réalisé aux Bourseaux dans les années 80. Le multiâge emprunte ses principes aux divers courants de l'Ecole Nouvelle et s'appuie sur des recherches conduites par Legrand et Foucambert, dans les années 70, sur les cycles et les cycles multiâge.

Je retiendrais deux caractérisations du multiâge « regroupement d'élèves d'âges différents » proposées par P. Clerc[1] :

<u>Un groupe institutionnel</u> *: Le groupe multiâge est un groupe qui a du pouvoir : celui du savoir, de la loi, de la force. C'est parce qu'il est riche de puissance, qu'il pousse l'enfant à valoriser le sens de la prise de parole. C'est un aspect dynamique qui force chaque enfant à se situer et à accéder à une autonomie, à une connaissance de soi, réfléchie.*

<u>Un groupe d'apprentissage</u> *: Le groupe multiâge est un groupe institutionnellement mis en place pour accéder au savoir. L'aide y joue un rôle important ; elle est stimulante car elle s'accouple avec la quête du savoir et le temps modelé au rythme de l'enfant : chacun peut gérer son rapport au savoir sereinement, avec une hâte mesurée, avec l'espoir. On se sent fort, parce qu'aidé et non jugé.*

Cette conception pédagogique substitue donc à tout principe de concurrence, de compétition individuelle et aux contraintes temporelles d'une progression calquée sur le cours d'une année, des principes qui reposent sur la coopération, sur le développement d'une autonomie qui se construit dans la durée et dans une communauté fondée sur des différences qui évoluent aussi au cours du temps.

D'un point de vue pragmatique, chaque année le groupe classe se renouvelle : en cycle 3, tandis qu'un tiers des élèves rejoint le collège, la classe accueille les sortants de cycle 2 déjà un peu connus ; ils ont participé à des activités avec le cycle 3.

Conception innovante ? Pour reprendre les termes de De Peretti (psycho-sociologue) lors de son allocution pour les 25 ans des Bourseaux, elle est ancrée dans l'histoire de l'enseignement ; elle emprunte certains de ses traits à la méthode mutuelle (qui permet sous la Restauration d'éradiquer la méthode individuelle). Pour pallier à l'insuffisance de maîtres formés et au grand nombre d'élèves, le maître instruisait préalablement les élèves plus compétents et les désignait pour enseigner à des groupes d'enfants moins avancés. Madame Guizot, en 1816, caractérisait ainsi cet enseignement : *« L'enseignement mutuel est le régime*

---

[1] Clerc P. (1993), Le multiâge, Nathan.

constitutionnel introduit dans l'éducation : c'est la Charte qui assure à l'enfant la part de sa volonté dans la loi à laquelle il obéit ». Les détracteurs de la méthode (tant sur le plan politique que sur le plan pédagogique) obtiendront toutefois sa disparition au profit de la méthode simultanée (des maîtres plus nombreux, bien formés, vecteur de la politique officielle grâce aux écoles normales (instrument de l'Etat) nouvellement créées).

Actuellement, cette conception peut s'inscrire en toute légitimité dans le cadre pédagogique préconisé par la loi d'orientation de 1989, cadre à nouveau ratifié par les programmes de 1995 et 2002 : *« L'indispensable cohérence des apprentissages met en évidence l'importance, dans le premier degré du maître polyvalent, responsable de la progression globale des élèves ; parallèlement, la prise en compte de la diversité des élèves peut justifier la mise en œuvre de différents modes d'organisation de la classe »*[2] ; *« La nécessité de prendre en compte la diversité des élèves s'impose aujourd'hui avec acuité. Elle implique deux questions importantes : celle de l'évaluation des élèves et celle de la différenciation des modalités d'apprentissage. […] La différenciation est souvent pensée au travers de la mise en place d'activités différentes pour des groupes d'élèves dont les performances ont été repérées comme elle-même différentes. Sans renoncer à ce type de différenciation, il convient d'en relativiser l'usage dans la mesure où il risque de conduire à un éclatement du groupe classe. La différenciation peut être pensée différemment, en proposant les mêmes tâches à tous [...] »*[3]. Nous pouvons préciser : à travers la possibilité de démarches différentes et la confrontation collective de celles-ci ; le jeu sur les variables didactiques de la situation, le support, les outils …

S'il n'y a pas réelle innovation, s'il peut y avoir compatibilité avec la pédagogie officielle, ce qui fonde la pertinence du modèle dynamique repose sur les hypothèses élaborées par les chercheurs du CRESAS[4] :

<u>On n'apprend pas tout seul</u> : Les interactions sociales jouent un rôle majeur dans le processus de construction des savoirs et des savoir-faire des enfants ; la diversité des enfants peut être une richesse à condition que les enseignants organisent le milieu de vie des enfants et adoptent une approche pédagogique pertinente. Dans ce cas, l'hétérogénéité des élèves peut être un levier d'apprentissage.

<u>On n'enseigne pas tout seul</u> : L'approche pédagogique susceptible de favoriser l'engagement de tous les élèves dans les processus d'apprentissage se caractérise brièvement ainsi : les enseignants qui se réclament de cette approche ont pour objectif principal le désir de donner aux élèves le goût d'apprendre, de leur faire prendre conscience qu'ils construisent des connaissances pour réussir à l'école ; ces enseignants doivent s'investir encore dans un travail d'expérimentation méthodique (faire des hypothèses, concevoir des situations, les ajuster après expérimentation avec les élèves) ; ils travaillent en équipe, conçoivent et confrontent ensemble situations et progression. Cette approche est désignée sous les termes d'« une pédagogie interactive ».

---

[2] Extrait des programmes de 1995

[3] Extrait du document d'application du programme de mathématiques 2002

[4] Cresas (2001), *On n'enseigne pas tout seul à la crèche, à l'école, au collège et au lycée,* Paris, INRP, (Platone F.& Hardy M . coordonnateurs).

Cette conception pédagogique détermine à priori les rôles que vont tenir les élèves et les maîtres dans les situations d'enseignement/apprentissage, en l'occurrence mathé-matique.

En adoptant l'approche écologique de Chevallard[5], localement, on peut penser qu'au sein d'un réseau d'écoles, un certain niveau pédagogique détermine des conditions et des contraintes qui peuvent modifier des organisations mathématiques et didactiques officielles et, à fortiori, les « topos » de l'élève et du maître.

I – 2 Quelques caractéristiques des mathématiques en multiâge : des maths autrement (le cas particulier du cycle 3)

Y a-t-il une possible différence d'appréciation entre l'enseignant qui s'interroge sur « Qu'est-ce que faire des mathématiques à l'école ? » en ouvrant les programmes ou les documents d'application et d'accompagnement et l'enseignant en multiâge qui se questionne sur « Quelles mathématiques faire vivre dans cette organisation pédagogique ?».

Le modèle épistémologique des mathématiques primaires auquel renvoient les deux questions est bien commun : il s'agit bien pour les deux enseignants de faire vivre des organisations mathématiques conformes au programme, organisations qui se réfèrent à un modèle épistémologique où se conjuguent dimension expérimentale, dimension pratique et dimension éducative.

Les contraintes qui pèsent au niveau de l'école primaire, propédeutique au collège, et qui se traduisent au travers de la définition des compétences de fin de cycle et de l'existence des évaluations nationales déterminent le socle officiel des tâches que devront savoir exécuter les élèves et des techniques qu'ils devront maîtriser.

Seuls certains des enjeux des mathématiques primaires qui n'ont d'ailleurs guère varié au cours du temps, peuvent être plus particulièrement privilégiés dans cette approche pédagogique. Ainsi que l'écrit D. Butlen[6] : « *[…] l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire ne se réduit pas à la transmission de notions mathématiques ou de savoir-faire liés à ces notions mais prend en compte des préoccupations plus générales qui dépassent largement le domaine strictement disciplinaire […]. L'enseignement des mathématiques vise des enjeux généraux et transversaux qui replacent celui-ci dans l'objectif plus général d'éducation du futur citoyen ».*

Si ce n'est en accordant une part privilégiée à l'éducation du futur citoyen, les mathématiques en multiâge construites par un élève de fin de cycle s'inscrivent *a priori* fidèlement dans une culture partagée officielle.

C'est en posant la question seconde « Qu'est-ce que mettre en place une activité mathématique ? » que se révèle non pas le rejet de l'ensemble des dispositifs didactiques

---

[5] Chevallard Y. (2001), Organiser l'étude. Ecologie et régulation, in *Actes de la 11ème école de didactique des mathématiques,* La Pensée Sauvage.

[6] D. Butlen, (2004), Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs d'école. (Note de synthèse). Vol.1, Université de Paris 8, Ed. IREM, Université Paris VII. (p.19)

préconisés par les concepteurs des programmes, mais l'influence déterminante d'une conception pédagogique sur des types d'organisations didactiques.

Deux conceptions spiralaires de la progression dans le savoir se distinguent dès lors :

La première, officielle, peut s'envisager comme un processus dans lequel l'élève rencontre, puis retrouve des situations problématiques dans lesquelles il ébauche, puis consolide ses savoirs, dans lequel encore il aborde des problèmes nouveaux qui lui permettront à nouveau d'approcher et de construire des concepts plus complexes. L'introduction des fractions et nombres décimaux, en termes de nouveaux nombres en CM1, peut ainsi s'expliquer par le fait que l'élève a acquis dès lors une connaissance des entiers naturels et de la numération suffisante pour lui permettre d'appréhender quelque peu ce qui est novateur d'un point de vue topologique et algébrique chez les rationnels ; l'introduction de la proportionnalité en milieu de cycle peut se justifier de même par le fait que l'élève familiarisé avec un grand nombre de situations relevant du champ des structures multiplicatives (ne requérant que la multiplication ou la division), habile à identifier les relations arithmétiques entre les nombres, est désormais capable de mettre en œuvre des raisonnements arithmétiques plus complexes.

Le parti pris des pédagogues qui se réclament du multiâge est autre en termes de rapport au temps de l'apprentissage : si, conformément à l'esprit du GFEN et sans rupture notable avec l'esprit des programmes, les mathématiques primaires doivent être envisagées comme une architecture de savoirs qui impose en termes de démarche d'apprentissage « une approche cohérente des fondements conceptuels de ses contenus » (O. Bassis) et par suite une approche fondée sur l'auto-socio-construction des savoirs, il n'y a aucune raison d'organiser la rencontre avec certaines notions à un moment déterminé d'une progression « cumulative ». Les contenus liés aux pratiques sociales (propices à la résolution de problèmes) ou à des pratiques de classe pourront être introduits dans des situations accessibles à tous, quelles que soient leurs connaissances. Le problème du mathématicien d'école en multiâge est de faire vivre ces notions dans une situation, en faisant en sorte de dévoluer cette situation à l'ensemble du groupe classe hétérogène.

Se posent *a priori* quelques questions :

Par exemple, en dehors de la conception d'une situation adéquate, se pose encore la question de la nature de la méthode : ne s'apparente t-elle pas à une méthode concen-trique, méthode qui en privilégiant le travail des techniques et des problèmes type, s'est vue disqualifiée dès que l'obligation de l'instruction et l'allongement de la scolarité ont pris effet ?

La question de l'introduction des nombres décimaux peut illustrer la diversité des points de vue actuels des pédagogues multiâge eux-mêmes.

Pour certains, la familiarité des élèves avec certains nombres à virgule peut légitimer une première approche voisine de celle préconisée par les programmes de 1945. Mais savoir appliquer des techniques sur les nombres à virgule (en utilisant leur parenté avec les nombres concrets et ses connaissances du système métrique) peut-il rendre compte du fait qu'une approche conceptuelle pertinente des nombres décimaux a pu opérer ? La fidélité à une démarche d'auto-socio-construction impose donc de faire vivre dans la classe des situations dans lesquelles le concept de nombre décimal libère le nombre à virgule de ses liens avec les « nombres concrets », avec le système métrique : dans ce cas, cette démarche ne sera que seconde...

Pour d'autres, la démarche d'auto-socio-construction proposée par O. Bassis[7] qui commence par la comparaison de longueurs dont il faudra coder les mesures en base trois et s'achève sur l'introduction du système décimal semble pouvoir s'inscrire dans le cadre temporel comme une étape première.

Pour d'autres encore, c'est la progression officielle (relayée par les activités proposées par « Cap maths, CM1 »[8]) qu'il faut tenter d'inscrire cet apprentissage dans une programmation spiralaire sur l'ensemble du cycle : la trame des situations visitées puis revisitées devra être adaptée à des niveaux de conceptualisation différenciés.

La question d'une approche conceptuelle cohérente (et non seulement pratique et utilitaire) des notions est au cœur du problème ; le socle d'une première culture mathématique ne peut être envisagé comme un agrégat d'outils adaptés à des problèmes type mais non nécessairement adaptables à des situations plus ouvertes. Le mathématicien d'école en multiâge s'assujettit à la contrainte de proposer à chaque élève des tâches communes à tous, qui permettront à chacun, non pas seulement d'imiter, mémoriser ou imposer mais encore de chercher, confronter et construire son savoir.

Pour mieux expliquer ce parti pris, à savoir une programmation sur trois années, tâchons de comprendre comment une organisation pédagogique en multiâge détermine de manière « originale » les structures didactiques relatives aux mathématiques et leur mise en réseau.

Les programmes et documents d'application et d'accompagnement nous renseignent sur les différentes phases et la diversification des modes d'organisation qui règlent la mise en œuvre des séances d'enseignement ; si l'on se réfère au modèle descriptif des organisations didactiques en termes de moments de l'étude (Chevallard[9]), on peut ainsi obtenir le tableau ci-dessous :

Phases	**Modes d'organisation**	**Fonctions**	**Structures**	**Fonctions didactiques (moments)**
Présentation de la tâche	Groupe classe	Appropriation du problème		Appropriation du problème
Phase de recherche	Individuel Groupe ou atelier	Entrer dans le problème et élaborer ses premières idées sur la résolution Confronter les idées et favoriser l'intérêt pour la	Activités d'étude et de recherche	Première rencontre avec la tâche Exploration de la tâche et émergence de la technique

[7] Bassis O. (2003) Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques, numération, opérations, nombres décimaux et proportionnalité, Hachette Education

[8] Charnay R. (2005) Hatier

[9] Chevallard Y. (2001), Organiser l'étude. Ecologie et régulation, in *Actes de la 11ème école de didactique des mathématiques,* La Pensée Sauvage.

		tâche proposée		
Phase de mise en commun, débat	Groupe classe	Confrontation, argumentation		Construction du bloc technologico-théorique
Synthèse	Groupe classe		Synthèse	Institutionnalisation
Phase d'entraînement, de répétition	individuel		Exercices et problèmes	Travail de la technique
Phase d'évaluation	individuel	Contrôler le niveau de progression individuel (par rapport à une performance « moyenne »).	Contrôle	Evaluation
Phase de recherche ou de rédaction	individuel	Remobiliser de façon autonome des connaissances.	Activité d'étude et de recherche	Rencontre avec une tâche Exploration de la tâche et mise en œuvre d'une technique
Phase d'aide personnalisée	Petit groupe dont les performances ont été repérées	Effectuer une tâche commune avec des aides ou une procédure moins experte Travailler des techniques en lien avec leur compréhension.	Dispositif d'aide personnalisée	

Cette grille nous renseigne donc sur les dispositifs didactiques et leurs fonctions : il est aisé d'apprécier l'importance accordée à ces dernières. La fonction déterminante de la résolution de problèmes (seul et en groupes), les activités d'entraînement individuelles, une évaluation qui doit permettre de réguler le temps de l'apprentissage en aménageant des temps de différenciation et des travaux personnels, rendent compte d'un ensemble d'activités qui doit guider le maître quand il devra concevoir ses séances de mathématiques et plus largement sa programmation sur l'année ou le cycle. Cette grille permet aussi d'identifier les types de tâches qui spécifient l'activité de l'élève et celle du maître.

En multiâge, les modes d'organisation vont être assujettis à des contraintes spécifiques. L'organisation pédagogique générale est régie selon des règles qui régissent l'organisation temporelle et matérielle de la classe et les organisations didactiques désignées comme des mises en système d'activités spécifiques à un domaine d'apprentissage.

La classe dispose d'un espace « regroupement collectif » où le maître prend place côte à côte avec les élèves et d'un espace permettant le travail en petits groupes (assemblages de tables permettant de réunir 3 à 5 élèves).

Dans un cadre temporel s'inscrivent : le lundi matin, le moment de la réunion coopérative ; chaque matin les « quoi de neuf ? » ou les rituels ; chaque jeudi après-midi l'évaluation des contrats qui conduit, le vendredi matin, chaque enfant à s'auto-évaluer et à passer (s'il est prêt) la ceinture de la couleur qui révèle son niveau d'expertise. Les dispositifs didactiques se déclinaient jusqu'à présent, sous forme de rituels, de démarches d'auto-socio-construction du savoir, d'ateliers de résolutions de problèmes, de travail d'entraînement et de systématisation à partir de fichiers ou de fiche-contrat. Ce mode de fonctionnement vient de faire l'objet d'une nouvelle réflexion.

Le choix d'un système commun de dispositifs didactiques, élaboré par l'ensemble des équipes lors d'un stage GRAP en mars dernier, s'est porté sur le système suivant :

Un système d'activités : tous les ingrédients suivants doivent s'intégrer dans le système d'activités mathématiques :

- *Rituels (mathématiques) : C'est, indépendamment des enjeux de socialisation, une gymnastique collective et répétitive visant à développer des automatismes par imprégnation (langage, stratégies, justification).*
- *Jeux mathématiques et ateliers libres.*
- *Démarche exploratoire ou projet : [la démarche exploratoire], c'est la mise en place d'une situation de recherche, à partir de situations concrètes, sur laquelle se fonde la construction des apprentissages à partir des interactions et des coopérations entre les élèves ayant des compétences différentes. La situation proposée par l'enseignant ou par l'équipe doit être accessible à tous les enfants et doit pouvoir être résolue par l'utilisation de différentes procédures allant de la plus simple à la plus experte. […]*
- *Démarches dirigées : postérieurement à la démarche exploratoire ou dans le cadre des nécessités d'un projet, des démarches dirigées, plus ciblées, peuvent être mises en œuvre (par exemple pour contraindre, en raison des variables didactiques choisies, à utiliser des procédures expertes en lien avec les compétences de fin de cycle).*
- *Entraînement/ Contrats/ Fichiers.*
- *Evaluation*

En utilisant le modèle utilisé précédemment, nous pouvons décrire brièvement le lien entre ces activités et des structures didactiques :

Types d'activités	**Mode d'organisation**	**Structures**	**Fonctions didactiques**
Rituels (calcul mental et réfléchi, jeux, défi logique)	Collectif	Exercices ou problèmes (oraux)	Travail de la technique par adaptation ou imitation
Jeux mathématiques/ ateliers libres	Collectif et en groupes	Exercices ou problèmes (oraux)	Travail de la technique par adaptation ou imitation
Démarche exploratoire ou projet	Individuel Groupes hétérogènes Collectif	Activités d'étude et de recherche	Rencontre (première ou non) avec la tâche Exploration de la tâche et émergence ou travail de techniques en

			coopération Construction éventuelle de blocs technologico-théoriques différenciés
Démarche dirigée	En coopération ou en autonomie (étayage du maître)	Exercices ou problèmes ciblés	Travail de techniques
Entraînement / contrats / fichier	En coopération ou en autonomie (étayage du maître)	Exercices techniques	Travail de techniques Auto-évaluation
Évaluation	Individuel	Contrôle	Auto-évaluation (retour au cahier de progrès) Évaluation en lien avec les exigences officielles.

Si l’on peut établir de nombreux parallèles avec l’organisation officielle, ce qui peut rendre spécifique cette interprétation du cadre officiel se révèle *a priori* à travers les tâches dévolues à l’élève. Les tâches coopératives sont explicitement désignées, le travail en autonomie clairement signalé. La configuration organique n’est pas sans évoquer une continuité avec celle du cycle 1 ; un mode d’apprentissage par familiarisation, ou imitation apparaît comme licite sur l’ensemble des cycles ; la configuration sous-tend que les élèves eux-mêmes disposent de l’initiative de gérer un certains nombre de tâches (en autonomie). Enfin, il convient de souligner l’importance octroyée aux dispositifs collectifs censés susciter l’investissement des élèves pour faire des mathématiques autrement.

L’évaluation occupe elle aussi une fonction spécifique : elle est pour l’élève un outil d’appréciation de ses progrès (par rapport à lui-même), elle lui permet de se situer par rapport au groupe et elle est pour le maître un moyen d’établir un contrat avec l’élève.

D’une certaine façon, ces dispositifs peuvent sembler conçus pour articuler deux logiques interdépendantes : une logique des apprentissages et une logique de socialisation. Comment ces dispositifs s’inscrivent-ils dans le temps de la classe et peuvent-ils régler le processus d’étude des élèves ? La réponse réside dans la « mise en système » de ces activités. La « mise en système des activités mathématiques » rend compte des relations entre ces diverses structures et règle le processus d’étude de l’élève ; celle présentée ci-dessous est celle déterminée par l’équipe cycle 3 de Kergomard.

Évaluation de départ → Cahier de progrès

Activités autonomes (2 fois 45mn)

Fichiers Ateliers

Activités régulières

Familles virtuelles

2 h/ semaine

Contrats techniques

Ceintures / Brevets

Démarches exploratoires

Ateliers de résolution de problèmes

Rituels

- Calcul réfléchi
- Jeux
- Défis logiques

4 fois 30 minutes

Cahier de progrès → Evaluation de départ

Dans l’organisation institutionnelle et temporelle d’une semaine, l’élève rencontre des tâches qui relèvent d’une « routine » favorisant d’abord, en terme de durée, des activités où peuvent se confronter, se mutualiser des compétences diverses, incluant par ailleurs des activités où, en autonomie, il peut prendre la mesure de ce qu’il a appris et de ce qu’il doit encore travailler.

Si ces quelques éléments nous informent sur les tâches « génériques » qui incombent à l’élève, comment précisément se déclinent les tâches du maître ?

Lors du stage GRAP, cette question a conduit à l’élaboration d’une grille qui peut permettre d’identifier la posture du maître pendant une activité particulière : la démarche exploratoire. Nous donnons celle-ci en annexe 1.

Le descriptif des tâches du maître met spécifiquement en évidence l’action de celui-ci dans les phases de dévolution, de mise en commun et d’institutionnalisation. Le retrait du maître pendant la phase d’étude et de recherche, ou du moins l’absence d’une nécessité de réguler, de relancer l’activité mathématique du groupe, renvoie au fait que la situation proposée a été conçue de façon conforme aux enjeux de l’apprentissage. L’accompagnement du maître a pour fonction essentielle une prise d’information sur le cheminement des élèves et sur les productions qui lui permettront de mettre en place la synthèse. Les interactions maître-élèves de la mise en commun sont envisagées comme un outil pour établir une synthèse co-construite. On peut sans doute identifier l’influence d’une réflexion conduite précédemment dans le domaine de la maîtrise de la langue : les apports du maître se réduiraient à la mise en place d’un vocabulaire mathématique adéquat… (du moins dans les moments de synthèse). On peut aussi identifier une réflexion à poursuivre concernant *a priori* les règles du jeu relatives à la légitimité des traces de l’affiche du groupe et l’élaboration d’une synthèse différenciée en fonction d’un degré variable de conceptualisation.

Nous disposons, à partir de ces éléments, d’une certaine image des mathématiques qui peuvent vivre en multiâge, des mathématiques censées prendre en compte deux logiques, celle de l'apprentissage et celle de la socialisation, et du cadre d'une organisation didactique « générique » déterminée par une organisation pédagogique.

Qu'en est-il dans la réalité de la classe ?

II – LE PROJET KERGOMARD

II – 1 Le contexte.

L'école Kergomard est située en REP (réseau d'éducation prioritaire) ; elle regroupe des élèves d'origine sociale différentes (plutôt défavorisées dans le sens que lui octroient certains sociologues) et d'ethnies tout aussi diverses.

Les équipes enseignantes des divers cycles comprennent à la fois des professeurs expérimentés et des professeurs plus jeunes. Toutes les équipes fonctionnent en multiâge ; l'équipe cycle 3 que j'ai plus particulièrement accompagnée comprend 5 enseignants et un collègue poste E. L'un des cinq enseignants (nouveau titulaire, l'an dernier) nous a quittés et a été remplacé par une nouvelle collègue, elle aussi nouvelle titulaire.

Le projet lancé à la rentrée scolaire 2004-2005 par le groupe de travail cycle 3 (sous la tutelle de la circonscription) avait pour objectif (sur le long terme) de concevoir une mallette « les maths en cycle 3 ».

La réflexion initiale des enseignants de l'équipe cycle 3 avait donné lieu à l'élaboration d'un cadre de réflexion dont nous donnons ci-après copie en annexe 2. Ce cadre de réflexion explicite tout à la fois les références théoriques et les objectifs concrets en jeu, à savoir la conception d'un ensemble de jeux, de fichiers, de séances permettant la programmation d'un apprentissage spiralaire de l'ensemble des compétences devant être acquises en fin de cycle 3. J'ai donc été invitée à accompagner ce projet : institutionnellement, cinq réunions de travail en 2004-2005 avaient été prévues pour faire avancer le projet. Ma méconnaissance du multiâge m'a conduit à suivre les enseignants dans les classes, tout d'abord pour comprendre ce qui s'y passait, puis pour y observer les activités expérimentées. Cette année, le groupe a été reconduit, tout comme les réunions de travail « institutionnelles» ; des observations de classes et des réunions informelles m'ont permis de suivre le projet.

En terme de besoins exprimés, la demande initiale me concernant portait plus particulièrement sur l'élaboration d'une programmation spiralaire : le concept n'est pas nouveau. La collection de manuels « Vivre les mathématiques » (Ed. A. Colin-Bourrelier) entre 1985 et 1990, publiée avec la caution de l'Inspecteur Général Louis Corrieu préconisait et mettait *a priori* en œuvre une démarche d'apprentissage censée organiser *« une approche spiralaire des notions , une pédagogie en étoile permettant de varier les approches, une construction spiralaire favorisant à la fois les révisions systématiques et les enrichissements progressifs* » ; certes, mais comment envisager dans l'immédiateté et sans connaître le multiâge une telle programmation ?

Le principe d'une telle programmation reste au cœur du projet de l'école : mais ce sont sur les conditions et les contraintes qui permettraient de faire faire des maths à tous les élèves, que nous avons finalement porté notre réflexion. La démarche exploratoire, en quelque sorte, a consisté à expérimenter des dispositifs (des activités) en s'appuyant sur certains des axes présentés dans le cadre de réflexion.

Brièvement, le contenu des cinq réunions de travail résume les pistes un peu éclatées qui ont été suivies :

La première a abouti d'une part à la constitution d'une bibliographie susceptible d'ancrer certaines notions dans leur contexte historique (en lien avec les numérations anciennes et les décimaux …), d'une bibliographie plus didactique (comprenant notamment « Calcul mental, calcul rapide »[10]) et l'ouvrage « Dur d'enseigner en ZEP »[11], et, d'autre part, à la recherche de jeux (APMEP, commerce, …) afin d'en définir les objectifs en termes d'apprentissage, d'entraînement.

La seconde réunion a eu pour objet la présentation de la démarche d'apprentissage autonome proposée à l'élève notamment à travers l' « Atelier de regard sur Soi » (dispositif d'auto-évaluation et négociation d'un contrat) et l'usage des fichiers (réalisation du contrat). Des actions ont été programmées : élaboration d'énigmes mathématiques, conception de situations problèmes permettant aux élèves de s'approprier la signification des pratiques sociales et de travailler en acte sur les notions de grandeurs.

La troisième réunion a permis le compte rendu des actions : une énigme rédigée sous la conduite du collègue poste E, « le 100 a disparu de la file numérique » (dictée à l'adulte) ; les familles virtuelles ou « Comment les diverses pratiques quotidiennes d'une famille inventée par un groupe d'enfants sollicitent les savoirs et savoir-faire mathématiques » ; la poursuite du travail sur « voyage au cœur des numérations anciennes ».

La quatrième séance a été l'occasion de soulever le questionnement sur la conception des situations, la fonction du maître…

La dernière a permis tout d'abord de décider la reconduction du travail et d'axer plus précisément la réflexion sur un questionnement des pratiques expérimentées à partir de leurs effets sur l'apprentissage des élèves (projet du réseau multiâge). Nous avons donc cherché à décrire et caractériser les démarches des élèves et celles du maître dans des « séances liées à la maîtrise des concepts », séances où se succèdent recherche individuelle, coopération en petits groupes hétérogènes et mise en commun collective.

C'est sur cet axe que je développerai la réflexion menée.

II – 2. Cadre d'analyse et méthodologie.

Des hypothèses pédagogiques préalables dans ce contexte particulier.

Les choix pédagogiques conditionnent un type d'organisation didactique propice aux apprentissages de tous, ensemble.

---

[10] Butlen&Pézard, IREM Paris VII

[11] Peltier-Barbier (dir), La Pensée Sauvage, 2004

Le projet d'enseignement et d'apprentissage d'un savoir mathématique s'inscrit dans le cadre d'une organisation pédagogique qui libère l'enseignant d'un certain nombre de contraintes liées à la gestion de la relation pédagogique. Pratiquement cela se traduit ainsi :

En réunissant une communauté d'enfants, des petits « commençants » et des plus grands « peu ou prou initiés », autour du même projet d'apprentissage, une « dynamique de groupe » se met en place qui permet d'écarter un certain nombre de conflits : ce fonctionnement permet, non pas d'éluder les difficultés dues parfois à des rapports conflictuels entre élèves, parfois encore à des problèmes comportementaux individuels, mais du moins de préserver la qualité d'un temps d'apprentissage pour tous, d'un temps du savoir.

Par ailleurs, la structuration des moments d'études entre « rituels », « démarches d'auto-socio-construction des savoirs » redéfinies en termes de « démarches exploratoires », ateliers de résolution de problèmes, activités de systématisation ou de consolidation (fichiers), semble pertinente pour mettre en place une programmation de l'apprentissage qui prenne en compte « le cheminement cognitif de l'élève » (Butlen[12], p.7). Elle balise ce que les enseignants de l'école désignent sous les termes de « parcours autonome de l'élève » » qui conduit ce dernier à s'évaluer, à renseigner son cahier de progrès pour identifier ce qu'il doit travailler puis à passer la « ceinture » qui atteste de son apprentissage. Le cahier de progrès s'inspire de la grille des compétences exigibles en fin de cycle.

Nous ne focaliserons pas ici notre réflexion sur un parcours autonome de l'élève mais sur les situations situées en amont, dans un espace–temps partagé par le groupe classe.

Des outils pour décrire et analyser.

Les outils d'analyse doivent donc nous permettre de décrire d'une part, les conditions et les contraintes qui déterminent l'activité mathématique des élèves et d'autre part, d'apprécier leurs effets sur les apprentissages. Ils relèvent pour les premiers du cadre anthropologique, il s'agit de décrire et analyser des organisations mathématiques et didactiques, les conditions et contraintes pédagogiques qui influent sur leur codétermination, et pour les seconds, d'une approche que j'ai essayé d'emprunter aux chercheurs du CRESAS et d'adapter, à savoir la méthode d' « auto-évaluation régulatrice », méthode censée permettre la régulation des actions du maître pour favoriser l'apprentissage. Cette méthode peut faciliter la compréhension et l'analyse de ces actions pour l'observateur.

Le choix des situations par les enseignants, à savoir « les maths qu'il faut faire vivre » peut très clairement être analysé en termes d'orientation et de types d'apprentissages (tels que le propose le canevas d'étude élaboré par la COPIRELEM).

CANEVAS D'ETUDE (COPIRELEM Strasbourg 2005)

Orientations	Types d'apprentissages

[12] D. Butlen, (2004), Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs d'école. (Note de synthèse). Vol.1, Université de Paris 8, Ed. IREM, Université Paris VII.

1) Rationalité et Raisonnement.	Apprentissage de raisonnement ; Apprentissage de modèle ; Apprentissage de méthodes.
2) Culture.	Apprentissage de référents culturels mathématiques ; Acquisition d'une culture commune ; Développement du plaisir de chercher, de la capacité à produire des efforts.
3) Intégration sociale et formation du citoyen.	Apprentissage de l'argumentation avec des pairs ; Développement de l'esprit critique et apprentissage au discernement ; Développement de compétences ouvrant des perspectives d'avenir ; Construction d'outils ; Acquisition de méthodes pragmatiques.

Un sujet ou un thème d'étude est en quelque sorte contraint (dans la conception pédagogique adoptée) de répondre à plusieurs orientations et de conjuguer de fait plusieurs types d'apprentissage (notamment liés aux compétences transversales); ces déterminations jouent par ailleurs sur le type d'organisation didactique qui va dès lors pouvoir être mis en place : les fonctions qu'elles caractérisent induisent les dispositifs didactiques.

Dans le déroulement de la séance, de nouvelles conditions (les procédures effectives des élèves, les interactions sociales entre ceux-ci) peuvent générer des modifications (immédiates ou à venir) des organisations en place.

La méthodologie

Certaines des activités expérimentées actuellement ne font l'objet que d'un bref descriptif. Les séances présentées ont fait l'objet d'une observation extérieure ou faiblement participante. Il n'y a pas eu de vidéo ; des enregistrements (mise en commun au tableau, échanges verbaux dans des petits groupes) ont été tentés mais n'ont pas été d'une grande utilité ; les analyses reposent sur mes notes et des échanges avec le maître en fin de séance ; on ne peut parler de réelle co-analyse.

Dans ces séances, j'ai essayé de reconstituer quelques moments d'études, de m'attacher aux comportements et aux procédures d'élèves particuliers.

II – 3. Quelques activités « nouvelles » et quelques séances analysées.

Les problèmes familiers et quotidiens

Dans le domaine de la résolution de problèmes, la question des problèmes quotidiens et familiers a conduit à l'élaboration d'un projet non sans traits communs avec un « projet d'étude et de recherche » tel que le conçoit Y. Chevallard[13] . Conçue dans la perspective de développer la rationalité, l'éducation du futur citoyen et son intégration sociale, la situation proposée a aussi pour objectif la maîtrise d'une mathématique liée aux pratiques sociales recouvrant l'ensemble du programme. Le projet des familles virtuelles, mis en place par l'équipe depuis l'an dernier, est un projet conduit sur une année : un groupe hétérogène de trois ou quatre enfants invente une famille (père, mère, enfants, animaux domestiques, description physique, âge, professions et salaires des parents, lieux d'habitation, loisirs). Cette famille va gérer un budget (dépense alimentaire mensuelle (après élaboration de menus), impôts sur le revenu, inscription à des clubs sportifs, voyage et location de vacances), elle va déménager et concevoir le plan d'une maison … Les élèves travaillent de façon coopérative : enquêtes, recherche de documents (la déclaration d'impôt est une photocopie donnée par le maître). Ils résolvent les problèmes qui résultent de ces situations. Ce contexte virtuel suscite un intérêt tout à la fois mathématique et social : se confrontent par exemple des points de vue très distincts entre des élèves qui ont choisi des familles emblématiques d'une catégorie socio-professionnelle moyenne et ceux qui ont jeté leur dévolu sur des familles prototypiques des VIP. Les enjeux sont à la fois mathématiques (ordre de grandeur des nombres exprimant les salaires, relations arithmétiques entre ces nombres) et sociologiques (salaires moyens, catégorie socio–professionnelle).

Les jeux.

Dans le domaine des jeux, l'expérimentation de certains jeux introduits, par exemple Le Pythagore (ERMEL et APMEP), le PLIX (APMEP), le MATHADOR[14], a nécessité d'introduire une grille d'analyse fortement inspirée par celle proposée dans « Jeux 6 » de l'APMEP.

Le tableau synoptique a été complété par les rubriques variables didactiques, variantes envisagées.

La grille comprend donc :

Nom du jeu : Pythagore ; **Domaine** : numérique ; **Notions** : tables de multiplication ; **Niveau** : CE2 ; **Matériel** : photocopie ; **Pratique et Nature** : entraînement en groupe; **Variables** : limitation des tables à 6, 7 ; tableau à compléter en partie ; **Variantes** : en individuel, tableau à achever. Ce travail est encore à faire, notamment pour le MATHADOR.

---

[13] Chevallard Y. (2004), La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire (3ème université d'été Animath, Saint Flour)

[14] Concepteur : E. Trouillot. http://www.mathador.fr

Une séance de résolution de problèmes.

Les objectifs envisagés : Éveiller la vigilance des élèves sur les mots inducteurs d'un énoncé de problèmes ; identifier et discuter en groupe hétérogène des expressions qui permettent de se représenter le problème et d'identifier l'opération à effectuer.

La résolution des problèmes à proprement parler ne fait pas partie des tâches prescrites *a priori.*

La situation est orientée vers le raisonnement, l'intégration sociale et la formation du citoyen ; il s'agit d'apprendre à raisonner, voire d'acquérir des modèles ; il faut encore apprendre à argumenter avec des pairs et construire des outils de compréhension.

L'organisation pédagogique et didactique :

En regroupement collectif, la tâche va être motivée par le maître. Le thème du problème précédent « La tirelire » (d'après ERMEL) a suscité des difficultés comme le relèvent les élèves : ils n'ont pas réussi à tenir compte de deux contraintes (une somme d'argent fixée, un nombre de pièces déterminé). Un des obstacles apparaît comme lié à une mauvaise représentation du problème liée à la non prise en compte de toutes les données dans un problème de recherche. Un travail sur la lecture fine d'un énoncé apparaît donc comme une première remédiation à ces obstacles.

Les feuilles de problèmes sont distribuées :

Problème 1- Yann a 15 billes. Pendant la récréation, il joue contre Nassim. Il perd 5 billes. Combien de billes lui reste-t-il ?

Problème 2- Yann a 25 billes. Il les partage équitablement entre ses 5 meilleurs copains. Combien de billes donne-t-il à chaque copain ?

Problème 3- Yann a 58 billes. Il donne 35 billes à son petit frère. Combien de billes lui reste-t-il maintenant ?

Problème 4- Yann a 64 billes. Il les partage équitablement entre ses 7 meilleurs copains. Combien de billes donne-t-il à chaque copain ?

Problème 5- La mère de Yann a acheté 5 filets de billes. Dans chaque filet, il y a 15 billes. Combien de billes a-t-elle acheté ?

Problème 6- Yann a déjà 30 billes. Sa mère lui achète un filet de 50 billes. Combien de billes a-t-il maintenant ?

Problème 7- Pour l'anniversaire de Yann, sa mère a acheté 18 petits gâteaux. Malheureusement il y a 24 invités. Combien lui manque-t-il de gâteaux ?

Problème 8- Pendant la récréation, Yann a joué contre Théo. Il a perdu 5 billes. Puis il a joué contre Nassim. Il a alors gagné 8 billes. Au départ il avait 56 billes. Combien de billes a-t-il maintenant ?

Problème 9- La mère de Yann lui a donné 15∈ pour son anniversaire. Il achète un livre à 4 ∈50 et une bande dessinée à 8 ∈99. Combien lui reste-t-il d'argent après ses courses ?

La phase qui suit porte sur l'énonciation et l'explicitation de la consigne, des tâches prescrites :

« Ce que je vais vous demander à chacun, individuellement, tout seul, c'est d'abord de bien lire, vous intéresser aux problèmes, ensuite d'essayer de comprendre ce qu'on vous demande pour ensuite mettre à côté de chaque problème ce qu'il va falloir faire, une addition, une soustraction ou encore une division pour réussir à résoudre ».

Un élève réagit : « Maître, c'est obligé ! ». Il intervient deux autres fois, le maître précise qu'il ne donne pas le choix.

Une dizaine de minutes se sont écoulées. La phase d'étude et de recherche commence ; les élèves sont regroupés par tablées « hétérogènes » : à chaque table, vont travailler ensemble des élèves de 1ère, 2ème et 3ème année. Cette étape va durer une petite demi-heure. Les élèves sont actifs ; nombre d'entre eux ont cependant réinterprété la tâche : ils résolvent les problèmes oralement (seule apparaît une réponse chiffrée) ou en s'appuyant sur des procédures écrites (peu lisibles, car le support n'est pas prévu pour).

Le maître a pris la décision, dans l'action, de modifier la tâche ou du moins d'en proposer une nouvelle : *(le maître prend en compte la démarche naturelle des élèves (ils veulent trouver la solution, résoudre les problèmes) ou perçoit que pour certains élèves « savoir comment on peut faire » ne peut être explicité qu'après avoir fait).*

« Bien, tout le monde va écouter. Ce que je vais vous demander maintenant, c'est de les résoudre [les problèmes]. Faites les opérations et trouvez le résultat ».

Les échanges oraux sont nombreux : confrontation des résultats, en cas de désaccord reformulation de l'énoncé (les élèves qui expliquent s'appuient sur la signification de mots inducteurs, « perdre » par exemple) et discussion des procédures.

Avant que ne survienne la phase de synthèse, des affiches sont distribuées (une par groupe). Il s'agit de classer les problèmes en fonction des opérations utilisées : le maître explique et exemplifie. Les confrontations sont nombreuses dans les groupes, activées par les relances du maître. Cette étape dure une petite dizaine de minutes.

La synthèse : le maître a reproduit la grille de classification au tableau.

« Stop, on arrête tout ». Le calme se fait ; le maître reprend : « Il y en a un qui va lire le problème ; on regarde s'il y avait plusieurs solutions. Ensuite on notera dans le tableau ».

Successivement les problèmes sont lus ; les opérations, identifiées comme permettant de résoudre le problème, sont justifiées par les élèves qui, pour certains, s'appuient sur une reformulation de l'énoncé.

Le tableau complété révèle finalement pour les élèves la multiplicité des procédures envisageables et des opérations possibles pour résoudre les problèmes.

Nous pouvons émettre une hypothèse sur l'évolution de l'organisation mathématique mise en place : la tâche qui sollicitait la lecture, la compréhension, l'interprétation et la structuration des données du problème, la mise en évidence des mots inducteurs lors des échanges (les valeurs des données numériques ne contribuant qu'à mieux se représenter le problème) change de nature parce que le maître, en regard de ce que font les élèves, doit réguler ses actions. La tâche se transforme en une résolution de problèmes, qui cette fois, pilotée par les variables numériques des données, va permettre l'émergence d'une multiplicité de procédures et donc conduire à une synthèse un peu différente.

En utilisant la typologie des problèmes de Vergnaud, une analyse en termes de « nature du problème », « opération », « mots qui aident à comprendre » permettait de générer la synthèse. Mais qu'ont fait les élèves ?

Quelques procédures et formulations d'élèves :

La phase de recherche individuelle, qui naturellement porte sur les premiers problèmes, conduit les enfants à procéder oralement pour résoudre les problèmes : calcul mental, voire décomptage 15, 14, …11, 10.

Un certain nombre d'élèves font appel à leurs connaissances en calcul mental ou réfléchi pour résoudre ces problèmes.

Quelques exemples :

Une élève qui ne maîtrise sans doute pas, par cœur, la table de 7 s'empare d'une table pour obtenir le quotient entier de 64 par 7. Elle a déterminé de tête le quotient de 25 par 5. Les décompositions additives de nombres inférieurs ou égaux à 50, 24, 15 sont aussi utilisées. D'autres procédures, surcomptage pour aller de 18 à 24, de 35 à 58, décomptage pour retirer 5 à 56 sont présentes. L'absence de place pour poser des opérations peut peut-être faire croire aux élèves que les résolutions se font de tête ?

La confrontation des résultats dans les groupes conduisent à des reformulations : celui qui a su faire (ou du moins qui a trouvé une réponse) interprète l'énoncé en plaçant celui qui ne sait pas en position de sujet du problème : « tu perds… ». Le message semble convaincre pour résoudre…

La mise en commun va donc consister à établir la pertinence de plusieurs procédures qui n'utilisent pas les mêmes opérations et leurs liens : soustraction et addition à trous, multiplication et addition itérée, division et multiplication à trous. Les interventions du maître sont dans cette phase déterminantes.

Quelques exemples :

Problème n°4 :

M : « tu as fait quoi ? » ... « une division, c'est le mot que tu as dit ? »

E : « j'ai cherché dans la table de 7 »

M : « tu as fait quoi ? »... « qui a fait une multiplication ? » des doigts se lèvent.

Problème n°5 :

E : « j'ai fait une addition »

E' : « j'ai fait 15 fois 5 ».

M : « qui a fait autrement ? »

E : « j'ai fait une addition 15 + 15…

M : « 15 fois 5 c'est la même chose, c'est 5 fois le nombre 15 ».

Conclusion :

Chaque élève, quel que soit son « niveau d'expertise », a donc pu participer à cette mise en commun, puisque chacun a pris conscience qu'une procédure connue pouvait s'avérer performante.

La synthèse écrite ne peut mettre en évidence la priorité des facteurs liés au lexique des énoncés dans la représentation du problème et le choix de l'opération pertinente (toutefois, oralement, les élèves s'appuient sur le sens des mots ; « perdre ou gagner » sont associés à retirer ou ajouter, mais le « chaque » du problème 5 est aussi lié à une addition). Pour les élèves, la synthèse commune met en exergue la diversité des procédures envisageables pour résoudre le problème, une fois celui-ci compris.

Pour le maître qui a observé le travail des élèves, la synthèse révèle encore les outils dont se sont emparés les élèves pour construire du sens : le calcul mental et le calcul réfléchi permettent d'une part de favoriser la représentation du problème et les liens entre soustraction et addition à trous, addition itérée et multiplication, division et multiplication à trous. Elle révèle encore les capacités de certains pour passer de procédures s'appuyant sur ces calculs vers les techniques opératoires « usuelles ».

Synthèse évaluative, elle permet donc d'envisager des prolongements différenciés en fonction des besoins des élèves.

L'organisation didactique mise en œuvre (AER, institutionnalisation) met en évidence la fonction majeure de ce que font effectivement (individuellement et en collaboration) les élèves ; le moment fort est la mise en commun. La fonction du maître révèle aussi l'importance des actions de régulation décidées en regard du cheminement des élèves et, lors de la synthèse, la complexité d'adapter dans l'immédiateté une synthèse même commune ayant du sens pour tous les élèves. Si dans un premier temps, elle permet d'établir un état des lieux de procédures possibles, dans un temps différé, à l'appui des procédures convoquées par certains élèves, elle peut permettre d'institutionnaliser les procédures attendues selon les compétences des élèves. Il s'agit donc de mettre en place une synthèse en deux temps.

D'autres situations observées mettent en évidence les questions que soulève la co-construction d'une synthèse collective mais aussi différenciée en fonction des compétences des élèves.

Une séance intitulée « les familles géométriques » porte sur la construction d'un jeu.

Elle se situe dans le prolongement de situations dans lesquelles les élèves ont été amenés à élaborer des classifications de configurations géométriques. La démarche mise en œuvre dans cet « avant » emprunte à celle proposée par O. Bassis[15] dans le chapitre « des polygones aux carrés ».

Les objectifs de la séance : Associer une figure géométrique à sa désignation, à sa famille (selon un classement travaillé préalablement), en tenant compte de ses propriétés et non pas seulement d'une simple perception visuelle. Appréhender la notion de propriétés communes.

---

[15] O. Bassis, (2004), Concepts clés et situations problèmes en mathématiques, géométrie, mesures et processus cognitifs, Hachette Education

En termes d'orientations, la situation est censée développer la rationalité et le raisonnement, l'intégration sociale du citoyen ; les apprentissages portent sur le raisonnement, l'argumentation.

L'organisation mathématique proposée met en jeu un grand nombre de tâches pratiques, logiques et géométriques : répartir équitablement des vignettes, faire des classements, apparier en utilisant des connaissances géométriques, valider. Ces tâches coopératives requièrent des techniques induites initialement mais non explicites (classification) ou encore à construire (décodage des propriétés, liens des propriétés et des figures, codage des angles). Lors de cette activité d'étude et de recherche des élèves en petits groupes, les actions de régulation et d'étayage du maître jouent un rôle essentiel sur l'avancée du travail de groupe. Cette situation de construction du jeu semble caractéristique d'une phase de synthèse prise en charge (en partie seulement) par les élèves. Les élèves sont appelés à remobiliser des connaissances précédemment abordées, à les reformuler et à constituer ce qui est finalement la trace écrite d'une leçon.

Ce premier jeu peut constituer une sorte de première phase de « cours » permettant aux élèves de se l'approprier par routine (tant que le jeu ne devient pas obsolescent).

La réalisation du jeu présente donc l'intérêt suivant : les élèves construisent leur synthèse et ils montrent leurs connaissances et leurs besoins. Cette réalisation révèle aussi la nécessité d'une synthèse que n'avaient pas réellement pu s'approprier les élèves dans les séances antérieures. C'est aussi un outil pour s'informer sur les connaissances des élèves (les élèves n'utilisent pas tous les mêmes critères de reconnaissance des figures) et réguler les situations d'apprentissage à venir.

Des jeux coopératifs sont aussi expérimentés.

Deux séances ont été observées, l'une en cycle 3, l'autre en cycle 2 ; les supports respectifs sont le « Mathador classique» et le « Mathador junior ».

<u>Matériel et organisation pédagogique :</u>

Les supports comprennent respectivement des pistes de 63 cases et 28 cases. Les cases désignent, soit les signes des opérations usuelles (les 4, voire deux opérations à prendre en compte pour le jeu classique, seulement les trois premières opérations à l'exclusion de la division dans le jeu junior), soit un point d'interrogation correspondant à une carte énigme. Dans le jeu classique, trois cases 99 peuvent permettre un arrêt de jeu : il s'agit de « faire 99 ». En dehors d'un dé bleu classique qui permet le déplacement de 4 pions sur les pistes, les joueurs disposent de deux dés rouges à dix faces dans la version traditionnelle, le premier désignant les nombres de 0 à 9, l'autre les multiples de 10 (de 0 à 90) ; dans la version junior, au dé des multiples est substitué un dé classique qui désigne le chiffre des dizaines (1 à 6). Cinq autres dés blancs multifaces (polyèdres de Platon) vont permettre à l'aide d'une (ou des) opération(s) fixée(s) d'atteindre ou d'approcher le nombre donné : un dé tétraèdre à 4 faces (1 à 4) ; dé cubique (1 à 6) ; dé dodécaèdre (1 à 12) ; dé icosaèdre (1 à 20). Le lancer des cinq dés fixe les nombres qui doivent permettre « le compte est bon ».

La tâche des joueurs consiste donc à organiser une suite d'opérations comprenant au moins une fois l'opération fixée (ou les deux opérations) à l'aide des nombres qui ne peuvent être utilisés qu'une fois, ou de résoudre une énigme. Est « Mathador » celui qui trouve le nombre cible en utilisant tous les nombres. Les énigmes du jeu classique peuvent être brièvement classées en petits problèmes de logique (sollicitant compétences spatiales et langagières), problèmes de proportionnalité, problèmes de dénombrement, problèmes de recherche (système de deux équations à deux inconnues, partages inégaux, mobilisant des raisonnements arithmétiques, essais-erreurs, double fausse supposition…). Dans le jeu junior, les problèmes relèvent de la logique, du champ des structures additives et multiplicatives.

Les jeux révèlent donc un grand nombre de variables de contrôle qui peuvent permettre au maître (en les adaptant) d'octroyer au jeu le statut d'une activité d'entraînement, de réinvestissement, tant en calcul qu'en résolution de problèmes.

Les deux classes ne disposent que d'un jeu pour tous : celui-ci est donc fixé au mur de façon à permettre à l'ensemble des élèves de suivre le jeu. Les élèves sont regroupés en équipes hétérogènes, de façon à ce que les équipes jouent les unes contre les autres. Les dés sont jetés par un membre de l'équipe : les nombres, les opérations, ou l'énigme sont écrits au tableau par le maître qui est aussi le maître du temps. En effet, le travail de groupe s'articule en trois temps en cycle 3 (3 fois la durée d'une minute, correspondant à l'écoulement du sablier). Le premier temps est un temps de recherche individuelle sur le cahier du jour ; le second temps est un temps de confrontation et d'échange sur les procédures ; le troisième temps correspond au temps d'élaboration de la procédure commune, qui devra pouvoir être communiquée par l'un quelconque des membres de l'équipe. En cycle 2, le jeu se joue en 2 temps : recherche individuelle, arrêt, nouvelle recherche individuelle.

En cycle 3, l'un des membres de l'équipe « gagnante » ou la plus proche du résultat expose sa procédure au tableau ; en cycle 2, la procédure est verbalisée par un élève, le maître, sous la dictée, la retraduit en langage arithmétique.

Ce jeu peut s'inscrire dans les trois orientations, il peut développer le plaisir de chercher, de raisonner, il favorise l'apprentissage de méthodes.

Les fonctions de ces jeux coïncident, en effet, avec les attributs que D. Butlen octroie au calcul mental :

« Les activités de calcul mental sont à notre avis des moments privilégiés pour travailler sur les nombres et sur les techniques opératoires. En effet, l'élève devant par souci d'économie mettre à distance les algorithmes écrits, est amené à adapter ses stratégies en fonction des nombres intervenant dans les calculs ; il a la possibilité d'explorer et de mobiliser diverses propriétés des nombres et des opérations »[16].

---

[16] D. Butlen, (2004), Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs d'école. (Note de synthèse). Vol.1, Université de Paris 8, Ed. IREM, Université Paris VII. (page 52)

Ici, les jeux proposés en favorisant de plus les tâches coopératives peuvent donc permettre de croiser enjeux d'apprentissage et enjeux de socialisation ; les premières expérimentations mettent cependant en évidence l'influence des actions du maître pour institutionnaliser des procédures qui ne peuvent, dans l'immédiateté, être appropriées par les élèves (fixation sur des procédures routinières). Qu'il s'agisse en amont d'anticiper sur les tâches et les techniques qui seront accessibles aux élèves (l'anticipation d'une synthèse différenciée), ou qu'il s'agisse, dans l'action, de réguler, d'institutionnaliser des procédures (la synthèse à réaliser), les gestes du maître sont essentiels pour baliser ensuite le parcours autonome de l'élève. Le travail d'analyse de ces jeux est actuellement en cours.

III – CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les mathématiques qui doivent être enseignées en multiâge sont dans les principes celles qui existent dans les programmes officiels. En multiâge, en REP, le pari soutenu est qu'elles doivent satisfaire à deux logiques indissociables, une logique d'apprentissage et une logique de socialisation.

Ces principes déterminent des dispositifs didactiques qui, en favorisant la coopération, l'émulation, l'imitation, une régulation du maître dans l'action et la recherche, somme toute modeste, doivent permettre à l'élève de définir son parcours autonome d'apprentissage. C'est en grande partie à l'élève, après qu'il s'est investi dans une action coopérative, de définir avec l'aide du maître l'ensemble des tâches et techniques qu'il devra travailler.

La mise en place de ces dispositifs reposant sur la coopération exige par conséquent, de la part du maître, une analyse approfondie des tâches possibles, non seulement une anticipation de l'activité potentielle des élèves, fonction de leur niveau de conceptualisation mais aussi la capacité à évaluer au plus près le cheminement d'un élève particulier.

La méthode en multiâge conjugue finalement les méthodes mutuelle (activités d'études et de recherche), simultanée (dévolution, mise en commun et synthèse) et individuelle (guidage individualisé)[17].

Si le moment de mise en commun, naturalisée dans le cadre de l'organisation pédagogique, apparaît comme mobilisateur et unificateur, sa structuration en un système d'institutionnalisations différenciées se révèle autrement plus complexe. C'est la question de cette structuration qui est au cœur de la problématique d'une possible programmation spiralaire : l'une des conditions qui apparaît essentielle pour organiser cette structuration dépend étroitement de l'analyse « auto-évaluo-régulatrice » que celui-ci peut opérer dans la

---

[17] La méthode mutuelle a été introduite sous la Restauration par les mouvements philanthropiques pour pallier aux insuffisances de la méthode individuelle pratiquée dans les petites école de l'Ancien Régime (le maître n'enseignait qu'à un élève à la fois, les autres élèves devaient attendre ; cet enseignement s'avérait inadapté à des enfants nombreux, peu assidus et d'âges divers). La méthode mutuelle repose sur le principe suivant : un élève plus avancé reçoit un enseignement du maître et le dispense ensuite à ses pairs (le maître peut ainsi gérer l'enseignement d'un plus grand nombre d'élèves, tout en différenciant des « niveaux »). La méthode simultanée, empruntée aux frères des Ecoles Chrétiennes est sécularisée par Guizot (Monarchie de Juillet) : le maître dispense un enseignement commun à des élèves réunis selon leur niveau de compétences : une classe où chacun doit acquérir les mêmes connaissances.

phase d'action et de recherche. La capacité du maître à identifier les procédures de chaque élève, l'évolution de ces procédures au cours du travail coopératif impose des dispositifs d'investigation et de réflexion qui n'ont pas encore pu être mis en place.

Si l'objectif du projet réside dans l'évaluation et le développement d'organisations mathématiques et didactiques pertinentes en fonctionnement multiâge, les étapes d'observation et d'analyse nécessitent la constitution d'une réelle communauté de recherche, des appuis institutionnels et les moyens que cela entraîne.

Dans cette perspective, c'est avec l'ensemble des membres de l'équipe qu'une analyse « auto-évaluo-régulatrice » doit pouvoir être menée dans une classe même ou à partir d'une vidéo, et dans un second temps, conduire à se questionner sur l'organisation qui a été mise en place.

Le travail engagé et qui était sans doute nécessaire dans une première étape peut, nous semble-t-il, permettre d'identifier certains phénomènes. Il y a eu co-apprentissage au sens entendu par Jaworski[18] : l'ensemble des acteurs impliqués dans la recherche, -praticiens qui se questionnent sur leurs pratiques et l'observateur extérieur-, ont appris sur les mondes des uns et des autres. Il reste encore à établir que ces pratiques d'investigation et de questionnement jouent un rôle déterminant sur l'apprentissage des élèves. Comment réellement questionner les remarques d'un observateur « extérieur » quand celles-ci n'ont pas été partagées ?

Rendre compte précisément des mathématiques enseignées et apprises par les élèves en multiâge et des développements envisageables doit donc nous renvoyer à un autre modèle de recherche-action. Un certain nombre de conditions sont réalisées :

- une communauté d'enseignants qui ont le souci de s'interroger sur ce qu'ils proposent aux élèves ;
- un projet de transformation des pratiques qui doit conduire à l'amélioration de l'apprentissage des élèves ;
- des outils d'analyse qui tout à la fois peuvent questionner les pratiques et les réguler.

Il convient donc de mettre en place ces outils, non plus seulement dans l'espace privé de la classe, mais dans un espace, qui, dans la durée, réunisse l'ensemble des membres d'une communauté ouverte à des chercheurs extérieurs.

Il semble pertinent de penser que, dans ce contexte pédagogique français, le modèle de « formation interactive » qui s'apparente au courant dit « *d'analyse de pratique professionnelle, en privilégiant, dans une perspective constructiviste et interactionniste, la dimension du collectif et de l'expérimentation* », qui vise « *à engager les professionnels en équipe dans une dynamique de découverte et de transformation pédagogique et institutionnelle centrée sur la conduite d'apprentissage des élèves* »[19] puisse ouvrir des perspectives pour mieux comprendre et développer l'apprentissage des mathématiques en multiâge.

---

[18] Jaworski B. (2003), Research practice into/influencing mathematics teaching an learning development : towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. E.S.m. 54: 249-282

[19] Hugon&Hardy, (2005), Susciter des dynamiques de découverte et de changement, *Recherche et formation,* INRP

BIBLIOGRAPHIE

BASSIS O. (2003) Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques, numération, opérations, nombres décimaux et proportionnalité, *Hachette Education.*

BUTLEN D. (2004) Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs d'école. (Note de synthèse). *Vol.1, Université de Paris 8, Ed. IREM, Université Paris VII.*

CLERC P. (1993), Le multiâge, *Nathan.*

CRESAS (2001), *On n'enseigne pas tout seul à la crèche, à l'école, au collège et au lycée,* Paris, INRP, (Platone F. & Hardy M . coordonnateurs)

CHEVALLARD Y., (2001), *Organiser l'étude. Ecologie et régulation*, in Actes de la 11ème école de didactique des mathématiques, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y., (2004), *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire : Transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire*, 3ème Université d'été Animath, 22-27 août 2004, www.animath.fr/UE/UE04/chevallard.pdf

HUGON&HARDY, (2005), Susciter des dynamiques de découverte et de changement, *Recherche et formation*, INRP

JAWORSKI B. (2003), Research practice into/influencing mathematics teaching an learning development : towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. E.S.M. 54: 249-282

ANNEXE 1 : LA DEMARCHE EXPLORATOIRE

Les étapes successives peuvent s'inscrire dans l'ordre suivant (plusieurs séances peuvent être nécessaires pour une même étape, sachant en revanche qu'il ne faut pas être trop long) :

Etapes de la démarche	Rôle de l'enseignant
1. Recherche individuelle	• il prépare le matériel nécessaire à la mise en œuvre de la démarche • il explicite l'organisation des différents temps de la séance • il permet l'appropriation des consignes • il s'assure de la compréhension et de la mise au travail de tous les enfants
2. Confrontation et mise en commun en petits groupes pour produire une affiche commune au groupe ; l'affiche présente les stratégies mathématiquement acceptables et justifiées *Ce moment de travail en petit groupe a fait l'objet d'un débat au sein du groupe : il conviendra d'approfondir la réflexion à son propos, notamment sur la méthodologie à mettre en œuvre par le maître et par les élèves.*	• Il observe et écoute l'argumentation des enfants • Plusieurs accompagnements sont possibles. Selon ses objectifs, l'enseignant peut décider de suivre successivement l'ensemble des groupes (notamment pour favoriser les relances) ou se concentrer sur un seul groupe (éventuellement deux) pour une observation plus fine ou s'il y a des problèmes spécifiques entre les membres d'un groupe particulier. • Avant la fin de la séance, le maître demande aux groupes de vérifier que les deux conditions de validation sont respectées : stratégie acceptable ; justification. *Selon le cas, le maître intervient auprès d'un groupe ou renvoie cette phase à l'étape 3 (ou à une séance intermédiaire).*
3. Analyse collective des affiches produites par les petits groupes • lister les procédures sans classement • comparer et classer les procédures selon leur efficacité en fonction de la situation explorée ➢ Cette classification est formalisée par écrit (tableau, affiche), puis le cas échéant, mise	• Il amène les élèves à valider l'adéquation entre le travail demandé et le résultat visible sur l'affiche • Il amène les élèves à expliciter les difficultés du groupe, le cas échéant • Il a pensé à la synthèse, mais il la construit avec les enfants *en leur apportant le vocabulaire mathématique approprié si*

au propre par l'enseignant sous forme de synthèse écrite (affiche collective et/ou documents individuels à coller ou glisser dans un porte -vues) ➢ Pour les collègues de cycle 1, c'est prioritairement la « trace » (l'affiche même élaborée lors de la séance d'analyse) qui doit être le document final.	*nécessaire*
4. Relecture collective de la synthèse • Proposition de transfert sur des travaux correspondant à chaque niveau de la synthèse : les élèves choisissent leur niveau d'exercice d'application et, selon les cas, le maître les aide, les pousse à tenter une stratégie plus « experte » ou les ramène à ce qu'ils peuvent maîtriser	• L'enseignant s'assure de la bonne compréhension de l'outil de synthèse – et notamment de la re/connaissance du vocabulaire mathématique spécifique qui aura été apporté.

ANNEXE 2 : LA MALLETTE KERGOMARD