

# GEOMETRIE AU CYCLE 3 : OBJETS ET RELATIONS

**Gérard GERDIL-MARGUERON**

Professeur de mathématiques, IUFM de Grenoble

Equipe ERMEL - INRP

gerard.gerdil-margueron@wanadoo.fr

## Résumé

Cette communication prend appui sur les travaux de recherche conduits, au sein de l'INRP, par l'équipe ERMEL. Cette dernière propose une ingénierie complète pour le cycle 3 structurée autour de l'apprentissage des relations géométriques. L'objet de cette communication est de s'interroger sur la place accordée aux objets dans cette ingénierie, sur les apprentissages réalisés sur ces derniers et notamment sur leur changement de statut au cours du cycle.

Mots clés : géométrie, objets, relations, propriétés, rectangle.

L'équipe ERMEL (Equipe de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole Elémentaire) est composée de formateurs en mathématiques venant de huit IUFM, d'un formateur en philosophie, de maîtres-formateurs et de conseillers pédagogiques.

---

## I – OBJECTIFS, MÉTHODE DE TRAVAIL

---

### I – 1. Objectifs

Nos objectifs ont été :

- de préciser pour le cycle 3 les enjeux, les contenus et les objectifs d'un enseignement visant le développement des compétences spatiales et géométriques ;
- d'élaborer, expérimenter, analyser des dispositifs complets d'enseignement (situations, modalités de mise en œuvre, analyses didactiques) cohérents pour l'ensemble du cycle 3 ;
- de conduire, dans le cadre de ces dispositifs, des investigations plus précises sur l'utilisation de phases argumentatives et les capacités des élèves qui y sont sollicitées.

### I – 2. Méthode de travail :

Durant les six années qu'a duré notre travail, l'ensemble de l'équipe s'est réunie 3 à 4 fois par an pour concevoir l'ingénierie (réflexion sur les aspects théoriques, élaboration des situations) et pour analyser a posteriori les situations mises en œuvre.

La progression complète a été expérimentée dans les classes. Aussi, parallèlement, nous avons mené des réunions régulières dans les équipes de sites pour l'analyse préalable des situations, l'observation et le recueil des données.

Environ 80 situations pour le cycle 3 ont été expérimentées plusieurs fois dans des versions successives.

L'ensemble donne lieu à un nouvel ouvrage de la collection ERMEL « Apprentissages géométriques au cycle 3 » à paraître en septembre 2006.

---

## II – QUELQUES ÉLÉMENTS DE CADRAGE

---

### II – 1. L'espace et la géométrie

Nous sommes convaincus qu'au Cycle 3, les connaissances spatiales des élèves doivent être consolidées. Mais la conduite d'activités dans le méso-espace ou le macro-espace est coûteuse et la description des situations liées à un espace particulier difficile. Aussi, nous avons conçu quelques situations reproductibles dans des espaces construits qui ont les caractéristiques du méso-espace ou du macro-espace ; l'objectif principal de ces situations étant l'élaboration de systèmes de repères par les élèves.

Pour la construction des connaissances géométriques, nos travaux nous ont amenés à mesurer l'importance du domaine spatio-graphique.

L'espace que nous appelons ainsi, à la suite des travaux de Colette LABORDE, peut être conçu comme un espace où les objets graphiques sont des représentations d'objets théoriques ou des modélisations d'objets spatiaux usuels.

La majorité des problèmes sont posés dans cet espace, sur des objets graphiques, pris pour eux-mêmes, ou dans une modélisation de l'espace physique fournie par l'enseignant, ou bien encore en référence à des objets théoriques.

### II – 2. Les savoirs abordés en géométrie au cycle 3

Nous avons distingué trois classes de savoirs : les objets, les relations et les propriétés.

#### *Les objets*

Les objets à aborder au cycle 3 sont cités dans les programmes (point, segment, droite, rectangle, pavé...). Les termes correspondants peuvent désigner aussi bien des objets théoriques que des objets matériels existant dans l'espace sensible (il en est ainsi pour le rectangle par exemple). Il peuvent au contraire être spécifiques de l'espace sensible (trait, bord...) ou bien de la théorie (segment, droite...).

Au cours de la scolarité un même objet va changer de statut. Ainsi le carré est d'abord un objet « compact », perçu comme une forme globale ; il est ensuite un objet composé du point de vue des connaissances supposées de l'élève et conçu comme formé de quatre segments de même longueur, deux segments consécutifs étant perpendiculaires. Souvent, la conception première fait obstacle à l'apprentissage de savoirs « plus théoriques ».

### **Les relations**

Le terme « relation » est utilisé selon son sens usuel en mathématiques ; il désigne des liens de la théorie pouvant exister entre les objets. Ces relations peuvent aussi être des modélisations de liens qui existent entre des objets de l'espace sensible. Il en est ainsi de l'égalité de longueur ou du parallélisme des deux bords d'une règle usuelle. Pour la géométrie plane au cycle 3, nous avons retenu l'alignement, l'incidence, l'égalité de longueurs, la perpendicularité, le parallélisme, le repérage et l'isométrie ou la similitude d'objets composés.

### **Les propriétés**

Dans les programmes ou les manuels de l'école élémentaire ou du collège, le terme « propriété » est un terme générique qui n'est pas sans ambiguïté. Nous l'avons retenu en référence à des énoncés – assertion pouvant prendre les valeurs « vrai » ou « faux » - mobilisés à l'école élémentaire et préparant la mise en place de la géométrie du collège. Ces énoncés peuvent rendre compte de propriétés d'objets de l'espace sensible, être éventuellement des éléments d'une définition... (« un cube a 6 faces », « dans un rectangle, il y a quatre angles droits »). Ils relèvent souvent de constats établis dans l'espace spatio-graphique sur lesquels s'appuieront les axiomes de la géométrie au collège (que l'on nomme « propriétés » dans les programmes ...) ou de futurs théorèmes (« si un quadrilatère a au moins trois angles droits alors c'est un rectangle »).

### **Notre choix**

Ce sont ces relations qui structurent notre ingénierie.

Nous avons décidé de commencer par travailler sur les relations pour plusieurs raisons :

- étudier un objet, c'est étudier les relations qui le constituent ou qui le distinguent des autres ;
- c'est un moyen d'inciter les élèves, à passer du global à l'analytique pour la résolution de problèmes, ce que la simple description des objets perçus n'induit généralement pas ;
- les relations sont des éléments moins « apparents » pour les élèves que les objets d'où le recours à une représentation langagière ;
- les « évidences » spatiales sont moins présentes pour les relations que sur les objets usuels, ce qui oblige à des jugements plus « théoriques » .

Par ailleurs, nous avons cherché à faire apparaître les propriétés comme outils implicites pour résoudre des problèmes ou comme outils pour valider une solution, notamment dans des problèmes où la perception ne permet pas de prendre une décision ou, au contraire, amènerait une décision positive en faveur d'un résultat faux. Cependant, ces propriétés ne sont pas réellement des objets d'étude ; il n'est pas question à l'école élémentaire d'explicitier leur statut théorique, ni de viser une forme d'institutionnalisation comme ce sera le cas plus tard au collège.

---

### III - DANS CETTE INGENIERIE STRUCTURÉE PAR LES RELATIONS, COMMENT S'ORGANISE L'APPRENTISSAGE SUR LES OBJETS ?

---

Les savoirs à aborder concernant essentiellement les objets et les relations, nous nous sommes souvent interrogés sur le sort réservé aux objets dans une ingénierie structurée par les relations. Cette question n'est pas anodine dans la mesure où les pratiques usuelles en géométrie à l'école réservent une place importante à l'étude des objets.

Pour apporter des éléments de réponse, nous nous appuyerons sur le cas du rectangle, en présentant sommairement quelques situations concernant cet objet.

#### III – 1. Le rectangle pour « entrer dans la perpendicularité »

##### ***Une forme familière***

Le rectangle est un objet spatial familier des élèves de l'école élémentaire. Dès la maternelle, ils manipulent des collections de formes comprenant toujours des rectangles et ont ainsi appris à distinguer un rectangle (« vrai » rectangle et non rectangle « presque carré ») d'autres formes comme le carré, le rond ou le triangle et à le nommer. Comme tout un chacun, ils vivent dans un environnement où de toute part, on peut identifier des rectangles. Il s'agit bien entendu d'objets spatiaux, perçus dans leur globalité et en aucun cas d'objets géométriques définis par des propriétés.

##### ***Un objet très « riche » du point de vue des relations***

Perpendicularité de deux côtés consécutifs, parallélisme de deux côtés opposés, égalité de longueurs entre deux côtés opposés ou deux diagonales et même présence d'un centre de symétrie ou inscription dans un cercle dont les diagonales sont les diamètres... sont des propriétés en lien direct avec trois relations fondamentales à l'école : la perpendicularité, le parallélisme et l'isométrie.

Souhaitant aborder la perpendicularité par l'angle droit comme le demandent les programmes, nous avons choisi assez naturellement comme première signification rencontrée de l'angle droit : l'angle « d'un coin » d'un rectangle... Le quart de l'angle plein ou l'angle permettant un pliage « trait sur trait » viendront ensuite.

Nous avons ainsi cherché à utiliser les connaissances spatiales de l'élève portant sur des formes 2D pour aller progressivement vers une relation portant sur des droites, tout en sachant que, pendant longtemps, l'élève restera dans l'espace spatio-graphique et n'envisagera qu'une relation entre des traits. Dans leur article « *Les changements de regard nécessaires sur les figures* » paru dans le numéro 76 de la revue *Grand N*, Duval et Godin précisent aussi : « *Ce qui, d'emblée, est reconnu comme une forme 2D, ne se décompose pas perceptivement en un réseau de formes 1D. Autrement dit, il y a une priorité cognitive des figures 2D sur les figures 1D* ».

##### ***La situation « Rectangle à terminer 1 »***

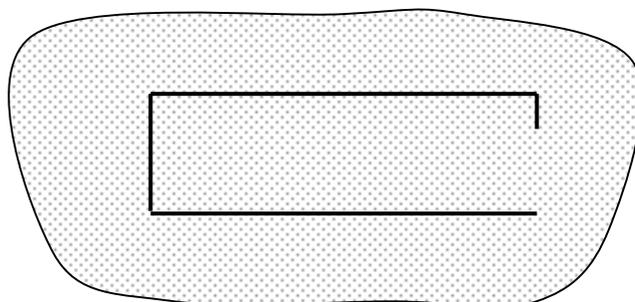
Dans l'article cité ci-dessus, les auteurs se posent la question « *Comment amener les élèves à changer de regard sur les figures ? Comment les faire passer d'un regard centré sur les surfaces et leurs contours à un regard qui fait apparaître le réseau de droites et de points*

*sous-jacent aux différentes figures étudiées à l'école ? » et précisent « Analyser une figure en fonction de la connaissance que l'on a des propriétés géométriques présuppose la déconstruction dimensionnelle des représentations visuelles que l'on veut articuler aux propriétés géométriques. ». Nous avons construit cette situation avec une analyse très voisine des liens entre objet et relations qui le définissent, entre objet spatial et objet géométrique théorique.*

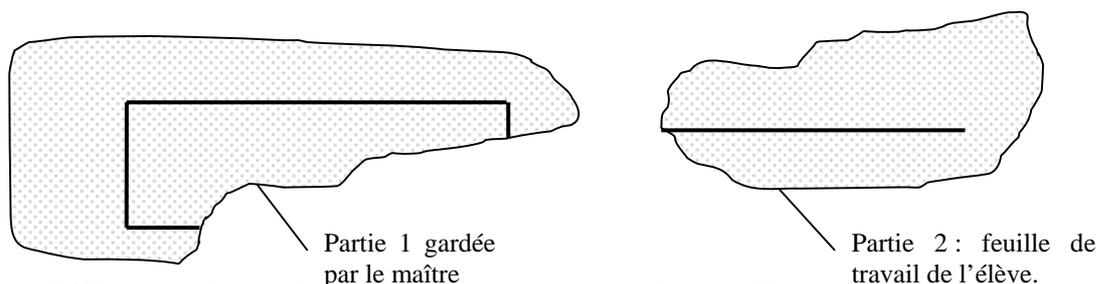
Nous proposons d'utiliser la connaissance qu'ont les élèves de cet objet global qu'est le rectangle pour identifier l'angle droit en isolant un de ses sommets. Ce faisant, nous centrons l'apprentissage sur une des relations présentes dans le rectangle et nous conduisons l'élève à occulter le parallélisme et les égalités de longueurs.

Pour l'élève, le problème mathématique posé est le suivant : construire de manière perceptive le « coin » d'un rectangle, un des deux côtés de ce « coin » étant donné

En pratique, l'élève est amené à considérer un rectangle dont un côté n'est pas terminé :



La mise en œuvre est la suivante : la feuille est coupée en deux parties, de façon à ce que seul un trait du « coin » en question soit présent sur la feuille de travail de l'élève. Il s'agit alors pour lui de reconstruire, sur la partie 2, le « coin » manquant en traçant « le second trait droit » de celui-ci. Il n'a pas accès à la partie 1, même « visuellement ». Dans un premier temps, ce sont des procédures perceptives qui sont visées, puisque, à ce stade, aucun apprentissage sur les outils relatifs à l'angle droit (gabarits, équerre...) n'a encore été organisé. L'élève dispose cependant d'une boîte à outils complète<sup>1</sup> lorsqu'il réalise cette tâche.



Les différentes phases de la situation permettront de travailler sur les différents « coins » du rectangle et de voir évoluer les procédures et les capacités de jugement des élèves sur la validité de leur production. Ce « coin » de rectangle sera une référence pour l'angle droit. Du point de vue du rectangle, cette situation permet de constater et formuler des propriétés comme « à chaque coin du rectangle, il y a un angle droit » ou bien « dans un rectangle, il y

<sup>1</sup> Le lecteur trouvera des informations précises sur le contenu de la boîte à outils dans l'ouvrage « ERMEL (2006). Apprentissages géométriques et résolution de problèmes. Hatier » pp 74 à 77.

*a quatre angles droits* » - même si cela n'est pas un objectif premier de cette situation. Ces propriétés peuvent d'ailleurs rester implicites mais faire l'objet d'un théorème en acte : « *Dès que j'ai identifié un rectangle, je peux me servir de n'importe lequel de ses « coins » pour construire un angle droit.* »

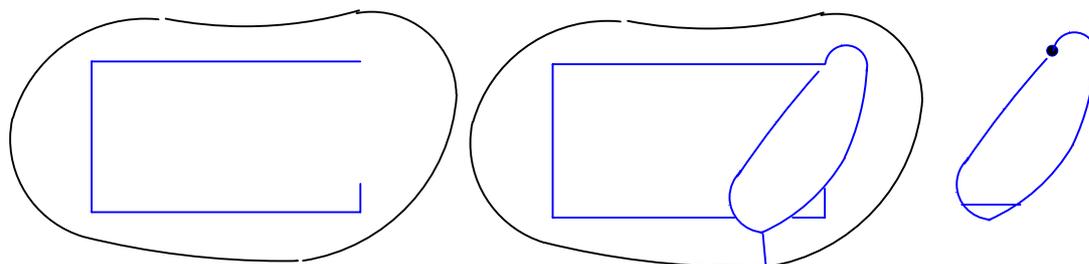
### III – 2. De l'angle droit aux droites perpendiculaires

Après avoir conduit l'élève à rencontrer plusieurs significations de la perpendicularité au travers de l'angle droit au cours de la première année du cycle 3, nous continuons cette « déconstruction de la forme 2D » qu'est le rectangle pour aborder lors de la deuxième année de ce cycle la notion de droites perpendiculaires. Et une fois encore, ce sont les côtés consécutifs d'un rectangle qui vont servir de support à la tâche choisie ! Entre temps, les situations proposées auront permis à l'élève de construire (au sens défini par Rabardel) les différents instruments relatifs à la perpendicularité (gabarits d'angle droit, équerre, réquerre).

#### **La situation « Rectangle à terminer 2 »**

Le contexte et la tâche sont très voisins de ce qui a été présenté ci-dessus.

Le problème pratique est analogue à celui de la situation « Rectangle à terminer 1 » ; il s'agit encore de terminer un rectangle, mais bien entendu, le découpage de la feuille est différent comme l'indiquent les dessins ci-dessous.



Le premier dessin correspond à la feuille présentée pour la communication du problème ; le deuxième à la partie du « puzzle » gardée par le maître et le dernier correspond à la feuille de travail de l'élève.

Pour l'élève, le problème mathématique posé est donc cette fois : construire un segment, passant par un point donné, perpendiculaire au support (non tracé) d'un segment donné (le fragment du côté en jeu du rectangle).

Du point de vue de la perpendicularité, cette situation permet de passer de l'angle droit (forme 2D) aux droites perpendiculaires et d'obtenir des formulations comme « *Quand deux traits sont perpendiculaires, si je les prolonge, je peux toujours marquer quatre angles droits.* » par exemple. Du point de vue du rectangle, c'est encore l'occasion de travailler la perpendicularité des côtés consécutifs et de faire formuler cette propriété en utilisant la terminologie « droites perpendiculaires ».

### III – 3. Plusieurs relations pour un même objet

Dans la progression que nous proposons, nous n'utilisons pas l'objet rectangle pour introduire d'autres relations que la perpendicularité afin que celui-ci reste une référence forte de ce

concept. Cependant, après avoir introduit les concepts de parallélisme et de distance, nous allons proposer des problèmes de construction du rectangle en jouant sur les éléments donnés de façon à permettre l'explicitation de propriétés de cet objet.

### ***La situation « Construire un rectangle »***

Cette situation met en scène plusieurs problèmes de construction d'un rectangle.

#### ***Problème 1 : Construire un rectangle dont on connaît un sommet***

Pour résoudre ce problème, dans une première phase, tous les outils habituels sont disponibles. Les procédures visées ici relèvent de tracés relatifs à la perpendicularité des côtés consécutifs et ce sont effectivement celles qui sont obtenues spontanément dans les expérimentations.

Dans une seconde phase, aucun outil n'est disponible. Il s'agit alors pour l'élève de mettre en œuvre des procédures de construction de droites perpendiculaires en utilisant le pliage.

Il est essentiel que les élèves perçoivent qu'il est possible de construire un rectangle sans utiliser de mesure et ce problème leur en donne l'occasion.

Dans les mises en commun, on arrive alors à des constats comme :

- « *Pour vérifier si c'est un rectangle avec les instruments, on doit vérifier si les quatre angles sont droits.* » ;
- « *Quand je trace, si je fais trois angles droits et que je vérifie le quatrième, c'est bien un angle droit.* » ;
- « *S' il y a quatre angles droits, ça suffit, les côtés sont égaux deux à deux.* » ;
- « *Si on raccourcit un trait, on voit bien qu'on n'aura plus un angle droit.* » ;
- « *Pour dire que ce n'est pas un rectangle, on peut le dire dès qu'on a trouvé un angle pas droit.* »

Ces propriétés constatées sont ainsi l'occasion d'aller vers cet objet géométrique théorique complexe qu'est le rectangle, de percevoir dans cet objet les liens de dépendance entre des perpendicularités construites et des égalités de longueur obtenues.

#### ***Problème 2 : Construire le quatrième sommet d'un rectangle dont on connaît deux côtés consécutifs (ou trois sommets) en utilisant une règle non graduée et un compas puis terminer le rectangle***

C'est l'égalité de longueur des côtés opposés qui est visée ici, les reports de longueur s'effectuent au compas. Cela permet, d'une part, d'éviter le recours à des procédures de construction basées sur la mesure - celles-ci masqueraient les propriétés géométriques utilisées - et d'autre part d'installer le compas comme outil de report de longueurs.

La validation pratique s'effectuant par vérification des trois autres angles à l'équerre, ce problème donne l'occasion de constater que, grâce à cet objet qu'est le rectangle, il est

possible, sous certaines conditions, de construire « de la perpendicularité » en construisant « de l'égalité de longueur ».

Les techniques usuelles de production de parallélisme faisant toutes appel soit à l'égalité de longueurs, soit à de la perpendicularité, il est difficile de poser un problème de construction de rectangle débouchant sur des procédures n'utilisant que le parallélisme. Cependant, les problèmes de réinvestissement ci-dessous vont donner lieu lors des mises en commun à des constats dans lesquels la propriété de parallélisme des côtés opposés est explicitée. C'est notamment la discussion sur le nombre de solutions qui va conduire à des constats comme : « *on a plusieurs solutions (une infinité...) et tous les côtés BC possibles sont parallèles entre eux.* » dans le problème 3.

*Problème 3 : un côté est donné (ou bien deux sommets).*

*Problème 4 : un côté et un point du côté opposé (différent des sommets) sont donnés.*

*Problème 5 : Un point de chacun des côtés, différent des sommets, est donné.*

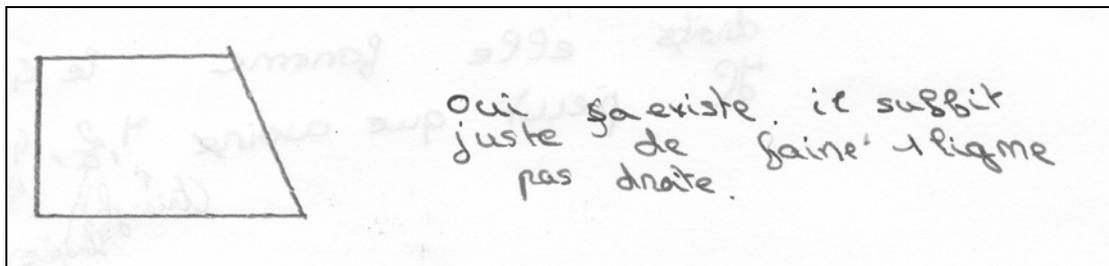
### III – 4. Un problème théorique en fin de cycle 3

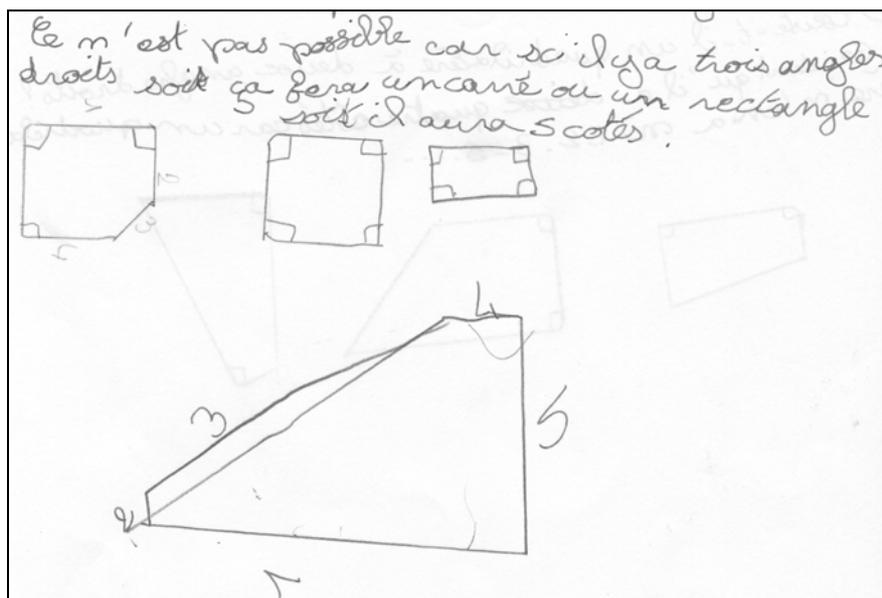
Au cours du cycle 3, le rectangle a progressivement changé de statut, passant d'un objet spatial global identifié perceptivement à un objet géométrique du domaine spatio-graphique muni de propriétés géométriques mettant en relation ses côtés.

Nous proposons alors un problème plus théorique : « Est-il possible de construire un quadrilatère qui a deux angles droits ? Est-il possible de construire un quadrilatère qui a trois angles droits ? ». Bien entendu, à ce niveau, même si cela n'est pas explicité, il ne s'agit pas de « *au moins deux* » ou « *au moins trois* » mais bien de « *exactement deux* » ou « *exactement trois* ».

La résolution va alors se faire soit dans le domaine spatio-graphique (production d'un schéma commenté), soit dans le domaine « théorique » avec des arguments relevant de propriétés certes souvent mal formulées mais bien support d'argumentation comme : « *si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles* » ou « *si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre* ».

#### Exemples de productions d'élèves de CM2





Non, impossible

Parce que il y aura 2 droites parallèles, une autre perpendiculaire aux deux droites alors on va rejoindre par un autre segment et ça fera 4 angles droits et non 3

Non,

Il y aurait 5 côtés

Il y aurait 4 angles droits

Il faudrait qu'il y ait 2 droites parallèles et aussi deux droites parallèles

#### IV - CONCLUSION

Le document d'application des programmes de 2002 pour le cycle 3 précise dans le texte introductif de la partie « Espace et géométrie » que « l'objectif principal est de permettre aux élèves de se familiariser avec les objets du plan et de l'espace et de passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par un recours à des instruments et par la connaissance de propriétés ».

Cela sous-entend donc que les propriétés possibles des objets puissent être identifiées, que ce soit par la perception ou par l'usage des instruments. En géométrie plane, les invariants qui fondent ces propriétés sont issus de relations comme l'alignement, la perpendicularité, le parallélisme, l'égalité de longueur. S'appuyant sur les connaissances spatiales des élèves et notamment celle des objets 2D usuels de l'espace sensible, leur construction impose des allers et retours permanents entre objets et relations. Ce faisant, les objets changent de nature pour progressivement devenir des objets géométriques théoriques définis par des relations entre leurs constituants, qu'ils soient objets 1D ou points.

A travers l'utilisation de l'objet rectangle tout au long de l'ingénierie proposée par l'équipe Ermel pour le cycle 3, nous avons mis en évidence la contribution de cet objet familier à la construction du concept de perpendicularité mais aussi comment la résolution de problèmes dans lesquels les relations usuelles apparaissent comme outils de solutions permet une connaissance de l'objet géométrique associé à l'objet initial de l'espace sensible.

---

**BIBLIOGRAPHIE**

---

ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes*. Hatier

Berthelot R, Salin M.H. (1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N* n°53. IREM de Grenoble.

Berthelot R, Salin M.H. (1995). Savoirs et connaissances dans l'enseignement de la géométrie. *Différents types de savoirs et leur articulation*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Duval R, Godin M. (2006). Le changement de regard nécessaire sur les figures. *Grand N* n° 76. IREM de Grenoble.

Laborde C (1990). L'enseignement de la géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques, vol 9/3*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Rabardel P (1995). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de la 10<sup>ème</sup> école d'été de didactique des mathématiques*. ARDM.