

GEOMETRIE PLANE AU CYCLE 3 DE L'ECOLE ELEMENTAIRE DANS DIFFERENTS ESPACES INSTRUMENTES.

Jean-Pierre RABATEL

Maître-Formateur

Ecole Jean Moulin, Caluire

Jeanpierre.rabatel@laposte.net

Christiane ROLET

Chercheur

UMR ICAR, Lyon

Christiane.Rolet@univ-lyon2.fr

Résumé

Nous appuyant d'une part sur les travaux de Brousseau et de Berthelot (Colloque COPIRELEM de Chamonix 2000) sur les espaces de tailles différentes, d'autre part sur les travaux de Hoyles & Noss et Rabardel sur le rôle de l'instrumentation dans l'émergence des concepts, nous avons bâti une ingénierie dont le principe fondateur est le travail dans différents espaces instrumentés : cour de récréation avec des cordes, feuille de papier avec instruments divers, écran d'ordinateur avec les commandes d'un logiciel de géométrie dynamique.

Les 4 séquences proposées ont en commun de faire construire un quadrilatère particulier dans les différents espaces instrumentés : un carré, un losange dont l'une des diagonales vaut le double de l'autre, un parallélogramme, un "cerf-volant".

Nous nous sommes également posé le problème du passage des attendus théoriques à une mise en œuvre dans les classes, et de la compréhension de l'ingénierie par un enseignant.

Après avoir analysé les textes officiels relatifs à la géométrie plane au cycle 3, nous donnerons les points de départ de notre réflexion avant de bâtir une ingénierie. Nous donnerons ensuite des réponses de type général, puis les choix spécifiques concernant le changement de taille et d'instrumentation. Enfin nous montrerons comment nous nous sommes préoccupés de la transférabilité de notre ingénierie.

I – REORGANISATION DU SAVOIR A ENSEIGNER

I – 1 Objets et Relations

Le texte du savoir à enseigner présent dans les textes officiels, tels qu'ils sont parus en février 2002, montre une énumération de savoir-faire de natures très différentes sur toute une famille de concepts non vraiment hiérarchisés. Leur organisation, à travers les trois paragraphes "Généralités", "Programmes" et "Compétences", n'est pas évidente même si dans les compétences, ils sont regroupés en deux catégories (relations et propriétés, figures planes). Nous préférons dire que l'élève de l'école élémentaire doit donc acquérir des connaissances

sur des relations et propriétés définies sur des objets de base dont on ne nous dit pas grand chose, et sur des objets et relations construits à partir des objets et des relations de base.

Le choix présenté ci-dessous nous est personnel. Le qualificatif "de base" prend en considération à la fois le savoir mathématique et le niveau d'enseignement considéré. Ce n'est pas le seul choix possible.

Objets de base (de la géométrie plane)

Nous entendons par là le point, la droite, le segment, l'angle.

Ils ne figurent dans les textes officiels que comme arguments des relations à étudier. Ainsi on parle de repérage et d'alignement de points, d'égalité des longueurs de segments, de milieu d'un segment, de parallélisme ou de perpendicularité entre droites. Il est par ailleurs demandé que ces mots soient utilisés à bon escient.

Ces objets n'ont pas d'autonomie et les conceptions que les élèves en auront seront obligatoirement et de façon implicite liées aux situations dans lesquelles ils auront été utilisés : comparaison, reproduction, construction, description.

Relations de base

Elles sont premières (mathématiquement et psychologiquement), montrées et non définies, et portent sur des objets de base.

Nous entendons par là l'alignement, l'égalité de longueurs et la perpendicularité. Les élèves doivent avoir des connaissances à leur propos, leur permettant d'utiliser des instruments divers pour reconnaître, décrire et construire des objets liés par ces relations, en particulier dans des configurations classiques de figures planes. Mais nous prenons également en compte des objets de l'espace ordinaire.

Objets construits

Ce sont les objets définis à partir des objets de base et des relations de base. Ce sont, au cycle 3 de l'école élémentaire, le milieu d'un segment, le cercle et ce que les textes officiels appellent les figures planes particulières. Là aussi, même s'il semble dans les textes officiels que les objets ne sont abordés que dans des micro-espaces (principalement celui de la feuille de papier), nous les étudierons également dans l'espace ordinaire.

Toutes les figures planes dont l'approche est demandée dans les textes officiels peuvent se décrire et se construire à partir de segments et des relations de base ci-dessus. Dans les invariants opératoires du concept de carré il y a nécessairement des invariants liés aux concepts de segment, de perpendicularité et d'isométrie.

Relations construites

Le parallélisme est une relation que l'on peut choisir de présenter aux élèves comme une relation construite. Dans un premier temps et en ne se fiant qu'au contrôle perceptif simple, la

relation peut être vue comme étant de base, et les droites parallèles être reconnues ou tracées à vue. Mais dans un deuxième temps, le seul moyen de reconnaître avec un contrôle instrumenté "correct" et de construire deux droites parallèles est de les voir comme perpendiculaires à la même droite ou à une distance constante l'une de l'autre. Le parallélisme est alors construit à partir de la perpendicularité et/ou de l'isométrie.

De même, la symétrie est, au-delà de la première perception globale qui peut la faire voir comme une relation de base, construite avec les relations d'isométrie et de perpendicularité.

I – 2 Concepts

Si les situations à mettre en place pour acquérir ce savoir peuvent se déduire assez facilement des textes officiels, il n'en va pas de même des procédures, expressions différentes et contrôles possibles et/ou attendus chez les élèves. Nous avons fait une étude de chacune des relations géométriques ci-dessus en terme de concept au sens de Vergnaud (1990)¹.

« Un concept est un triplet de trois ensembles $C = (S, I, S)$

S : ensemble des situations qui donnent sens au concept (la référence)

I : ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié)

S : ensemble des formes langagières et non-langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant) »

Le mot situation est ici entendu dans le sens de tâche. Certaines pourront être problématiques pour un sujet donné, d'autres non. La classification des situations est faite en prenant en compte à la fois des considérations mathématiques et des considérations psychologiques.

Rappelons que les invariants opératoires correspondent aux connaissances contenues dans les schèmes d'un sujet c'est-à-dire dans l'organisation invariante de sa conduite pour une classe de situations données. Ces invariants opératoires sont de 3 types : des invariants de type proposition (théorèmes-en-acte), des invariants de type fonction propositionnelle (concepts-en-acte ou catégories-en-acte : propriétés ou relations), des invariants intervenant dans les deux précédents et de type argument. Ces connaissances sont plus ou moins conscientisées ou automatisées, les schèmes sont disponibles ou en construction selon les sujets.

En géométrie, les signifiants prendront les formes de dessins, de symboles, d'énoncés en langue naturelle et/ou en langue formelle.

Nous obtenons donc bien une manière de caractériser le savoir, si nous prenons en compte toutes les situations possibles, tous les invariants possibles et tous les signifiants possibles.

¹ L'ensemble de cette étude pour les relations citées se trouve sur le site MAGESI dont les références sont en fin de texte.

I – 3 Type de contrôles exercés

Par rapport à cette caractérisation du savoir, nous pouvons situer un sujet et donner sa conception relative à un concept en donnant la classe des situations qu'il sait gérer, avec l'ensemble des procédures et des signifiants dont il dispose. Nous rajouterons à cette trilogie le type de contrôle qu'il exerce, reprenant par là ce qui est évoqué dans le programme officiel, au début du paragraphe 5 :

« ...passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par explicitation de propriétés et recours à des instruments... »

Trois types de contrôle par le sujet nous semblent possibles en géométrie, les deux premiers seulement l'étant à l'école élémentaire (Rolet 1996).

Le contrôle perceptif simple

Il s'exerce sur des propriétés spatiales et/ou spatio-géométriques du dessin. Par propriétés spatiales, nous entendons des propriétés contingentes dans le cadre de la géométrie envisagée et qui sont des composantes contextuelles du dessin ou de la réalisation matérielle : par exemple, en géométrie euclidienne, la forme, la position, la taille. Par propriétés spatio-géométriques, nous entendons la traduction (lorsque cela est possible) dans le dessin ou la réalisation matérielle, de propriétés géométriques relevant de la géométrie théorique sous-jacente considérée (par exemple : alignement, parallélisme, perpendicularité).

Il utilise la vue comme instrument de construction et de validation.

Il a pour finalité la production d'un tracé ou d'un dessin "ressemblant".

Le contrôle perceptif instrumenté

Il s'exerce sur des propriétés spatiales et/ou spatio-géométriques.

Il utilise comme instruments la vue et d'autres instruments qui peuvent être :

- des instruments propres aux méso-espaces
- calque, gabarit, papier quadrillé, papier pointé, règle graduée
- règle, équerre, compas
- commandes d'un logiciel de géométrie dynamique.

Il a pour finalité la production d'un tracé ou d'un dessin possédant certaines propriétés.

Les lots d'instruments ci-dessus ne sont pas de même nature : le premier lot est propre à la taille de l'espace de travail et comporte des cordes dans des versions rudimentaires, des instruments optiques sophistiqués dans des professions du bâtiment ; le deuxième lot est peu propice à la mise en valeur de propriétés géométriques ; le troisième lot, bien que fait d'instruments "géométriques", ne nous semble pas garantir un contrôle ne portant que sur des propriétés géométriques, une équerre pouvant être utilisée comme un simple gabarit ou une règle graduée permettant de placer un point à une distance donnée (ou calculée) de l'extrémité d'un segment sans savoir qu'il est au milieu du segment.

Le contrôle théorique

Il s'exerce sur des propriétés géométriques.

Il utilise comme instruments les démonstrations ou, à tout le moins, la cohérence des résultats.

Il a pour finalité la production d'un dessin possédant des propriétés géométriques.

II – POINTS DE DEPART DE NOTRE REFLEXION

II – 1 Difficultés pour les élèves de conceptualiser à partir du réel

Les principaux obstacles des élèves ont pour origine une modélisation difficile à partir du réel. En effet, bien que les textes officiels le demandent et bien qu'historiquement la géométrie soit née pour modéliser des objets de l'espace ordinaire, cela n'est pratiquement jamais fait à l'école élémentaire. Seuls sont assez souvent pratiqués, dans cet espace, le repérage et le codage de trajets. Les seuls espaces dans lesquels soient observés, décrits, construits des objets et relations est l'espace de la feuille de papier et quelquefois l'espace de l'écran d'un ordinateur.

Les élèves n'ont donc, comme nous avons pu le constater de façon récurrente, aucun invariant opératoire dans le méso-espace. Nous donnerons, comme exemples qui nous ont particulièrement frappés, l'isométrie et la perpendicularité. Les élèves ne savent pas prendre deux morceaux de corde de même longueur, reporter une grande longueur, chercher le milieu d'un "grand" morceau de corde : ils font appel systématiquement à des systèmes de mesure qu'ils inventent (longueurs des pieds, d'objets divers) et se trouvent en échec. Ils doivent se réapproprier la superposition, le report et le pliage. De même, tout en connaissant parfaitement, bien sûr, la perpendicularité présente dans les bâtiments autour d'eux, ils ne savent pas comment est obtenue une telle perpendicularité : ils n'ont jamais rencontré la perpendicularité de la verticale du fil à plomb et de l'horizontale d'une droite portée par une surface d'eau au repos. Ils ne se sont jamais posé le problème de la construction de gabarits dans cet espace.

Enfin, ils ont peu travaillé sur le passage de la langue naturelle, propre en particulier au méso-espace (superposition, corde tendue, verticale, horizontale, etc.) au langage de spécialité propre à la géométrie de la feuille de papier.

II – 2 Difficultés pour passer du spatial au réel

Il est reconnu que les élèves effectuent un passage difficile du dessin à la figure géométrique.

Reprenant partiellement les résultats de notre thèse (Rolet 1996), nous pouvons dire que ces jeunes élèves ont deux grands types de difficultés.

Dans les tâches de reconnaissance, ils lisent et/ou cherchent dans le dessin des propriétés spatiales, des mesures et un nombre "minimal" de propriétés géométriques ; les relations, les figures sont reconnues dans des instantiations stéréotypées. Le dessin n'est pas un représentant possible d'une figure géométrique.

Dans les tâches de construction, ils tracent un dessin "à vue" en faisant fonctionner un contrôle perceptif simple et en prenant en compte des propriétés spatiales non pertinentes (ce qui est très facile dans le contexte papier-crayon) ; ils vérifient après coup leur construction avec un contrôle perceptif instrumenté.

II – 3 Passage difficile du contrôle perceptif simple au contrôle perceptif instrumenté

Le contrôle perceptif simple exercé par les élèves est à la fois pauvre (lecture difficile de propriétés géométriques) et trop riche (lecture non pertinente de propriétés contingentes) ; le contrôle perceptif instrumenté est d'une utilisation difficile, ce problème étant lié aux difficultés de compréhension et d'utilisation des instruments fournis.

Peut-on trouver des raisons à cela ? Il nous semble que les obstacles principaux à une dialectique féconde entre dessin et figure et entre les différents types de contrôle résident dans :

- l'imbrication entre spatial et géométrique ; il y a dans notre enseignement, comme le dit C. Laborde (1994), un écrasement entre propriétés spatiales et géométriques : qu'est-il permis de lire comme propriétés dans un dessin ?
- l'attachement très fort des sujets à l'isométrie et à la similitude (dans cet ordre, alors qu'historiquement la similitude était première)
- le manque d'appréhension opératoire des figures : le sujet n'envisage pas plusieurs lectures possibles du dessin en tant que figure géométrique ; il se focalise sur les mesures, ce qui empêche l'émergence d'autres propriétés telles que l'incidence, l'égalité de mesures, des rapports de mesures, etc...
- l'appréhension d'un dessin unique à un endroit précis de la feuille, sans imagination ou prise en considération d'autres "cas de figure", d'autres instanciations de la même figure géométrique
 - une pratique fréquente, habituelle, de la reproduction de dessins, que cette reproduction soit demandée de façon explicite ou non
 - une difficulté à analyser les rapports entre registres figuraux et discursifs.

Sans nier les origines épistémologiques de ces obstacles (on sait l'émergence difficile du concept d'invariant géométrique), on peut également relever de probables origines didactiques à trouver dans l'enseignement reçu et pratiqué par ces sujets.

II - 4 Problème de la langue de spécialité

Travaillant dans un laboratoire où beaucoup de chercheurs étaient spécialistes de l'étude des interactions verbales, nous avons eu l'occasion de travailler (et d'encadrer un mémoire de DEA) sur le passage de la langue naturelle à la langue de spécialité.

Langue naturelle, langue de spécialité

Les textes officiels insistent en de nombreux endroits sur la nécessité pour les élèves d'acquérir au moins un lexique et des formulations relevant de la langue de spécialité. *"L'usage ordinaire de la langue orale et les formulations spontanées des élèves prévalent. Ils sont toutefois complétés par le recours à un lexique et à des formulations spécifiques,*

nécessaires à la rigueur du raisonnement " trouve-t-on dans les compétences générales. Ces mots et ces formulations doivent surtout servir à décrire des propriétés ; mais il n'est pas question d'en donner une définition de nature mathématique mais d' "Utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : ..."

Dans les manuels scolaires, ce passage délicat est peu évoqué, et bien sûr les mots de la langue de spécialité sont employés. Chaque enseignant se retrouve quasiment seul face à ce problème.

Or, il semble qu'il y ait différents types de mots : ceux qui n'existent que dans la langue de spécialité (perpendicularité, losange...), ceux qui ont des synonymes dans la langue naturelle (segment et trait, par exemple) et ceux qui existent dans les deux langues avec une restriction de sens dans la langue de spécialité (droite, extrémité). Or il semble que l'acquisition de ces divers types de mots soit de difficultés différentes et probablement croissantes.

Problème des syntagmes

Quant aux syntagmes, leur acquisition est encore plus difficile à acquérir car elle se fait après la compréhension par les élèves de la nécessité de donner des noms aux objets pour lever les ambiguïtés et de donner des arguments pour définir certains objets. L'expression "la droite" suffit lorsqu'on la montre d'un geste déictique, l'expression "la parallèle" suffit lorsqu'on vient de la tracer par exemple... Chacun sait combien la dénomination par les élèves eux-mêmes est difficile et combien l'emploi spontané du syntagme "droite parallèle à ... passant par... " est peu fréquent !

La compréhension précède l'emploi

Les élèves comprennent la langue de spécialité avant de l'employer. Cette compréhension est d'abord orale et est facilitée par l'emploi successif par l'enseignant des deux types de langues.

Programmes de construction

L'écriture de programmes de construction n'est pas vraiment dans les textes officiels car "Décrire une figure en vue de l'identifier dans un lot de figures ou de la faire reproduire sans équivoque" ne demande pas l'écriture d'une suite d'ordres simples exprimés dans la langue de spécialité. Les premières années de mise en place d'une ingénierie, nous avons passé beaucoup de temps et d'énergie pour peu de résultats. Les difficultés des élèves (en lien avec leurs difficultés transversales à s'exprimer clairement et à écrire de façon intelligible) étaient telles que nous sommes revenus à la mise en place d'un vocabulaire géométrique et de syntagmes. Il faut beaucoup d'étayage pour passer d'un acte de construction à son expression orale puis à une expression écrite.

Par contre, il nous semble possible de faire suivre aux élèves un programme de construction.

III – REPONSES GENERALES

Nous présentons ici des options générales prises pour la mise en place de l'ingénierie ; options concernant le rôle de l'enseignant, option concernant l'apprentissage des concepts scientifiques et enfin option concernant la séquentialisation de la présentation des savoirs entre les années de CM1 et CM2.

III – 1 Rôle de l'enseignant

Le rôle de l'enseignant, ou nous devrions plutôt dire les rôles de l'enseignant, sont nombreux et concernent à la fois la gestion de la classe sur un plan pédagogique large (gestion des interactions, de la discipline, etc...) et la gestion de la transmission de savoirs. Nous n'évoquerons ici que le rôle de l'enseignant dans sa tâche d'enseignement.

Nous ne reprendrons ici les principales hypothèses sur l'enseignement et l'apprentissage que pour fixer notre propre position.

De la première position, dite rapidement de transmission des savoirs, nous retiendrons qu'elle consiste à présenter le savoir aux apprenants dans la version jugée à leur portée et suffisante pour savoir résoudre un certain nombre de problèmes et d'exercices. Les enseignements consistent donc en un cours magistral suivi d'exercices et de problèmes. Cette façon de faire est efficace dans beaucoup de domaines professionnels, elle permet aux sujets de régler des problèmes et exercices ressortant d'un domaine précis. Elle permet d'acquérir des techniques dans des types de tâches répertoriées et précédemment abordées. Elle est souvent une solution de repli pour des élèves en grande difficulté à qui on veut pouvoir "apprendre" quelques algorithmes (nombreuses recherches dans ce domaine). Mais les recherches ont largement prouvé qu'une telle présentation magistrale (ou même maïeutique sous forme de cours dialogué) d'un savoir non problématisé n'était pas garante d'un apprentissage efficace sur le moyen et le long terme, ou d'une possibilité de transfert pour la majorité des élèves.

Une autre position, souvent appelée "socio-constructiviste", est née à la suite des travaux de Brousseau et consiste à faire construire le savoir par les élèves, en les plaçant dans des situations dites adidactiques (sans intervention de l'enseignant sur le plan du savoir en question), où le savoir visé est l'outil à construire pour résoudre, en groupe, la tâche. Les situations construites sont d'autant plus résistantes que le milieu, système antagoniste de l'élève, permet une validation indépendante de l'intervention de l'enseignant. Cette position a montré ses richesses et ses limites. Richesses pour l'ancrage du savoir, pour le "sens" donné par l'élève au savoir, pour les possibilités de débat et d'argumentation ; limites car de telles situations ne sont pas faciles à construire pour l'ensemble des concepts, sont coûteuses en temps et très difficiles à mener dans des "classes ordinaires" où les synthèses deviennent souvent des transmissions de savoirs pour les élèves les plus en difficulté.

Nous adopterons donc une troisième position intermédiaire entre la position ci-dessus et la position exposée par Vygotski (1985) et Bruner (1983). Nous gardons le fait de donner aux élèves une tâche un peu difficile qui leur pose problème. Cela les motive, leur montre l'origine et/ou l'utilité des savoirs et savoir-faire qui leur sont présentés, leur donne un ancrage de ces savoirs. Nous gardons le fait de **mettre les élèves en activité et de permettre des échanges**.

Nous pensons que le rôle de l'enseignant doit dépasser celui de l'institutionnalisation. Nous optons pour un découpage fait avec les élèves d'une tâche complexe en tâches plus élémentaires **dont la résolution est dans la zone de proche développement** (Vygotski).

Nous optons pour **une aide importante, assumée et réfléchie de l'enseignant** auprès des élèves dans les travaux de groupes, dans les moments collectifs de synthèse et dans les moments individuels. Il peut (il doit) reformuler et/ou corriger l'expression des élèves, trop imprécise, trop ambiguë ; sortir les élèves d'une impasse et leur apporter de nouvelles idées, des outils, des techniques ; apporter une évaluation lorsque le milieu ne peut apporter de validation interne. Pour nous, le milieu (dans lequel nous incluons l'enseignant) doit être davantage un allié qu'un antagoniste. L' "art" consiste à laisser le temps aux élèves de s'emparer du problème et de cerner les difficultés, et peut-être le temps pour certains de commencer une résolution, tout en évitant une perte de temps et/ou un découragement après trop d'essais infructueux. Le temps ainsi récupéré permet de reprendre la tâche dans d'autres contextes et/ou de faire des exercices. Nous savons de toute façon que l'apprentissage ne coïncide pas avec l'enseignement.

Nous nous plaçons donc dans l'hypothèse d'une construction de connaissances chez l'élève avec un étayage important du maître.

C'est pour ces raisons que nous présentons les fiches de préparation avec les tâches à donner aux élèves et les bilans auxquels il est souhaitable d'arriver, mais en indiquant aussi dans des commentaires, les difficultés possibles/probables des élèves et les aides à leur apporter.

III – 2 Apprentissage des concepts scientifiques

Appui sur les concepts quotidiens (Vygotski 1985).

Il s'agit de donner aux élèves un premier contact avec les concepts scientifiques évoqués précédemment. Nous n'adhérons pas complètement à la conception exposée par Vygotski : le concept scientifique (donné de façon explicite et facilement énonçable par l'élève) est "saturé" par le concept quotidien, qui en retour est structuré par le concept scientifique. Il est vrai que le concept scientifique est saturé, précédé par des concepts quotidiens. Mais, d'une part, il n'est pas donné aux élèves, à l'école élémentaire en France en tout cas, avec une définition claire et explicite comme le laisse penser Vygotski. D'autre part, il n'est pas sûr qu'il ait une quelconque influence sur les concepts quotidiens qui peuvent très bien coexister en l'état à côté du concept scientifique.

Autre idée que nous remettons en question : le concept scientifique ne se forme pas seulement par généralisations successives. A partir de concepts quotidiens sur lesquels nous nous appuyons, nous faisons faire aux élèves, au contraire, un travail de tri, de spécification, de restriction du champ sémantique dans le domaine spécifique des mathématiques.

Par exemple, en nous appuyant sur la connaissance d'un "trait" limité tracé à la règle, nous dégageons petit à petit le concept de segment, limité par deux points, possédant un milieu, partie d'une droite, etc. A aucun moment nous ne donnerons une définition de ce qu'est un segment.

Variation des situations (Hoyles et Noss 1996).

En effet, vu notre type d'approche, la première émergence du concept scientifique est encore très largement marquée par le contexte dans lequel celui-ci est apparu. Nous avons donc fait le choix de présenter le même concept (de carré par exemple) dans des situations assez différentes pour que les objets et propriétés géométriques soient "abstraits" indépendamment de leur représentation.

Dans nos séquences de géométrie, nous ferons varier à la fois la taille de l'espace de travail et les instruments, espérant ainsi un meilleur passage de l'espace sensible à l'espace géométrique et une meilleure compréhension des objets géométriques et des relations fondamentales entre objets géométriques.

Variation des registres (Duval 1993)

Les registres envisagés ici sont le registre figural des dessins et les registres de la langue orale et/ou écrite, naturelle et/ou de spécialité. Dans le registre de la langue de spécialité, il s'agit d'abord de mettre en place un lexique et l'expression de syntagmes relevant du domaine géométrique, comme le demandent les Programmes Officiels. Nous avons vu en II.4 les difficultés des élèves à passer d'un registre à l'autre et nous espérons en leur faisant travailler ce point, obtenir d'eux une meilleure compréhension du concept (Duval).

Le passage du registre figural au registre de la langue se fait dans la description de figures simples et de leurs propriétés. L'écriture par les élèves eux-mêmes de programmes de construction nous paraît prématuré, à un stade où l'écrit, en lui-même, est encore un obstacle pour beaucoup d'élèves. Du registre figural les élèves passent à une expression orale d'abord en langue quotidienne puis en langue de spécialité. Le passage de l'oral à l'écrit dans les bilans et institutionnalisations favorise le passage vers une langue de spécialité : le lexique et les expressions syntaxiques sont alors fixées ("on n'écrit pas comme on parle").

Le passage du registre de la langue (orale ou écrite) au registre figural se fait dans l'exécution de consignes et de programmes de construction.

Enfin l'écrit est indispensable pour soutenir la mémoire didactique : à court terme dans une même séance, et à moyen terme pour retrouver les résultats d'une séance à l'autre. Ainsi les élèves constitueront un journal de bord avec les mots du lexique géométrique employés dans des bilans et institutionnalisations des séances.

III – 3 Séquentialisation dans la présentation des savoirs

sans que cela signifie que la première catégorie doive être abordée avant la seconde ??

Comme nous l'avons écrit précédemment, une étude des objets de base n'est pas entreprise en elle-même, et les objets sont seulement nommés et employés de façon fonctionnelle. En CM, nous parlerons seulement des objets construits (milieu, cercle et figures particulières), des relations de base de l'isométrie et de la perpendicularité, des relations construites du parallélisme et de la symétrie.

En CM1

Les objets de base nommés et utilisés au CM1 sont le point, la droite, le segment.

Nous avons fait l'hypothèse que la relation de base "alignement" avait déjà été abordée au cycle 2 et avons réservé pour le CM1 l'étude des deux relations de base que sont **l'isométrie** et **la perpendicularité**. Ce qui permet alors d'aborder les objets construits que sont **le milieu**, **le cercle**, et **des quadrilatères** (carré, rectangle, losange) avec leurs propriétés relatives à l'isométrie et à la perpendicularité.

Nous avons choisi de travailler l'isométrie à travers la plupart des situations ne faisant intervenir que les grandeurs :

- reconnaître des segments de même longueur ;
- construire des segments de même longueur, de façon isolée ou dans des figures telles que carrés, losanges, cercle ;
- chercher le milieu d'un segment ;
- construire un segment x fois plus long.

Nous avons choisi de travailler la perpendicularité :

- à travers des situations présentant toutes les facettes de l'angle droit (sauf celle d'angle de rotation, cf. chapitre 1) : reconnaître, reproduire, construire des angles droits avec deux demi-droites, dans une figure, comme secteur angulaire ;
- à travers des situations de reconnaissance et de reproduction de droites perpendiculaires dans le cas très particulier de l'horizontale et de la verticale et dans les autres cas.

Le "prétexte" a été la construction d'un carré d'une part, la construction d'un losange dont une des diagonales vaut le double de l'autre d'autre part.

En CM2

Dans l'année de CM2, nous ajouterons aux objets de base rencontrés au CM1, l'objet angle.

Après les deux relations de base vues en CM1, nous abordons les relations construites de **parallélisme** et de **symétrie**. Ceci permettra en retour de compléter l'étude **des quadrilatères** rencontrés en CM1 et de compléter avec d'autres quadrilatères dont le parallélogramme et le cerf-volant.

Nous avons choisi de présenter d'abord le parallélisme des droites :

- en faisant construire deux droites équidistantes ;
- puis deux droites perpendiculaires à la même troisième.

Nous abordons ensuite le parallélisme des côtés des parallélogrammes en présentant ces derniers comme l'intersection de deux couples de droites parallèles.

Nous faisons l'hypothèse que l'aspect "axe de symétrie" a déjà été exploré au CE2 avec des manipulations (pliage, papier-calque, gabarit.). En CM2, nous avons choisi de commencer à travailler la symétrie en faisant compléter une figure par symétrie axiale. Nous le faisons dans des espaces non quadrillés, en faisant intervenir les reports d'angle et l'isométrie ; les élèves peuvent alors découvrir le lien entre deux points symétriques.

Puis dans des micro-espaces et en particulier sur l'écran de l'ordinateur, nous étendrons le champ d'expériences des élèves sur cette transformation (cf. document d'application des programmes de l'école primaire) en leur permettant de faire frises et pavages.

IV – PREMIER CHOIX SPECIFIQUE : CHANGER LA TAILLE DE L'ESPACE

Dans les textes officiels, il y a un paradoxe entre la demande générale de présenter les relations et propriétés dans l'espace ordinaire et les instruments cités qui ne sont utilisables que dans des micro-espaces. Le travail dans l'espace ordinaire est du coup rarement pratiqué. Nous avons eu une "révélation" de la richesse de ce type de travail dans l'intervention de René Berthelot au XXVII^e Colloque de la COPIRELEM à Chamonix en 2000. Notre désir a alors été de systématiser ce travail sur l'ensemble du savoir à enseigner, avec une instrumentation à la portée de tous les enseignants.

IV – 1 Différents types d'espace

Reprenons le problème du changement de la taille de l'espace : les objets s'y présentent de façons différentes, mais on peut espérer que le contrôle perceptif instrumenté nécessaire dans le méso-espace sera transféré au micro-espace.

Macro-espace

Nous n'abordons pas ici le macro-espace, de l'espace de la ville à l'espace interstellaire... Au-delà d'un travail de repérage, un travail dans ce type d'espace nous semble faire intervenir des notions complexes de géométrie dans l'espace, de représentation et d'échelle, de géographie. Si une approche du repérage et du codage des trajets peut être faite, y compris dans les cycles précédant le cycle 3, une étude de l'isométrie et de la perpendicularité dans ce type d'espace nous semble prématurée !

Méso-espace

Nous trouvons chez Brousseau (1983) une définition du méso-espace : "espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue, les objets sont fixes et mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet". Le sujet est à l'intérieur de l'espace. Il prend conscience d'objets isolés par des changements de points de vue, des changements de regards. Le contrôle perceptif simple y est très difficile voire impossible : il faut prendre "du recul" et éloigner le méso-espace pour qu'il devienne un micro-espace. Des exemples de méso-espace seront pour nous un mur, le sol d'une salle polyvalente ou d'une cour de récréation

Micro-espace

Un micro-espace est défini par Brousseau comme l' "espace des interactions liées à la manipulation des petits objets". L'élève est extérieur à cet espace et peut avoir une vision (relativement) globale des objets. Des exemples de micro-espaces seront pour nous la feuille de papier ou l'écran d'ordinateur.

Un même espace peut être un méso-espace pour un sujet si sa distance à cet espace est petite et s'il se trouve "dans" cet espace, ou un micro-espace s'il est à une certaine distance de cet espace. Ainsi une feuille de papier A3 peut être soit un méso-espace, soit un micro-espace.

IV – 2 Influence sur les concepts étudiés

Un premier apport est celui cité ci-dessus : une meilleure connaissance des objets géométriques dans le méso-espace. Mais on peut aussi espérer une retombée dans le micro-espace de la géométrie papier-crayon.

Dans un espace sensible micro, une problématique pratique (Berthelot et Salin 1994) et un contrôle perceptif simple conviennent parfaitement. Un problème de construction posé dans un tel espace peut être réglé à moindre coût avec utilisation de calques, de gabarits, de mesures et validation par un contrôle perceptif simple.

Dans un espace sensible méso, le contrôle perceptif simple donne de moins bons résultats, voire est impossible. Il faut alors trouver ou construire des instruments utilisables dans ce type d'espace, et/ou passer à une modélisation (Berthelot et Salin) dans un micro-espace géométrique (pour minimiser les efforts à fournir dans le méso-espace).

Donnons ci-dessous les exemples de l'objet "Droite" et de la relation "Perpendicularité"

	Méso-espace	Micro-espace
Droite	Savoir quotidien Ligne de visée Corde tendue Plus facile à prolonger ?	Lien avec la règle Vision globale Trait droit (non courbe) Trait borné
Perpendicularité	Difficile à lire, sauf pour le cas horizontale-verticale	Vision globale plus facile Stéréotypes

Pour passer d'un type d'espace à un autre, deux types de situations nous semblent a priori possibles :

- poser, dans un méso-espace, un problème de construction dont la résolution demande une utilisation de connaissances géométriques car non résolvable avec le seul contrôle perceptif simple ; puis poser le même problème dans un micro-espace en espérant que la résolution se fera elle aussi avec modélisation spatio-géométrique (et non pas de façon pratique "seulement").

Nous proposons par exemple de faire un grand carré sur le sol puis de faire un carré sur une feuille de papier (sur l'écran de l'ordinateur), en espérant que le carré ne pouvant être fait et validé à vue dans le méso-espace, ne sera plus fait et validé "à vue" dans le micro-espace.

- poser, dans un méso-espace, un problème tel que sa résolution soit facilitée par un passage dans le micro-espace de la feuille de papier.

Nous proposerons par exemple de faire "une route" (une bande aux bords parallèles) sur le sol, en sachant que ce tracé très difficile peut être travaillé dans un micro-espace avant un retour sur le terrain.

V – DEUXIEME CHOIX SPECIFIQUE : CHANGER L'INSTRUMENTATION

Le changement d'instruments peut être inhérent au changement de taille de l'espace. Il peut aussi, dans un même espace, découler d'une volonté didactique. Deux phénomènes sont à prendre en compte : un apprentissage de l'utilisation de ces instruments est un moment important pour les élèves ; selon les instruments fournis, les élèves peuvent être confrontés à des aspects différents des objets et des relations géométriques.

Sur ces deux points, citons Rabardel (1999) :

"L'appropriation de l'instrument par les utilisateurs résulte d'un processus progressif de genèse expérimentale. L'instrument, pour l'utilisateur, évolue tout au long de ce processus de genèse."
 "Ils [de nombreux travaux] mettent en évidence l'impact des instruments sur la conceptualisation et soulignent que l'analyse de leurs propriétés est une nécessité pour l'enseignant s'il veut atteindre ses objectifs didactiques de conceptualisation. "

Nous rejoignons également Hoyles C. & Noss R.(1996), en disant que le concept abstrait n'émerge pas du concret dans un mouvement ascendant, mais qu'il émerge davantage de connexions faites entre situations où des instruments divers sont utilisés.

V-1 Espaces instrumentés

Les différents espaces instrumentés dans lesquels nous avons fait travailler les élèves sont les suivants :

Méso-espace du sol avec corde

La corde est donnée à volonté, un fil à plomb et un niveau à bulle (ou une bassine d'eau, comme témoin de l'horizontalité), avec bien sûr des piquets ou du scotch.

Micro-espace de la feuille de papier avec des ficelles.

Pour faciliter le transfert, il n'y a que la taille de l'espace qui change. La feuille de papier est cependant de format A3, avec des bords déchirés.

Micro-espace de la feuille de papier avec des instruments plus ou moins classiques

Des règles non graduées, des compas (ou des bandelettes de papier) et des gabarits divers d'angle droit. Nous avons pris soin de multiplier les instruments possibles pour le report de longueur et la construction de droites perpendiculaires.

Micro-espace de l'écran de l'ordinateur avec des commandes d'un logiciel de géométrie dynamique (Cabri-géomètre)

Nous pensons que cet espace instrumenté constitue un des milieux possibles pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, (Laborde C. & Capponi B. 1994). Nous ne présentons pas ici le logiciel Cabri-géomètre utilisé dans cette ingénierie et renvoyons

l'utilisateur au fascicule accompagnant le CD-ROM pour une initiation. Nous reprenons simplement les commandes utilisées, en supposant leur usage connu par le lecteur : Point, Segment, Droite, Cercle, Droite perpendiculaire, Milieu, Droite parallèle, Symétrie axiale (auxquelles nous avons ajouté quelques commandes d'édition).

V- 2 Genèses instrumentales

Comme le dit Rabardel, un instrument comporte à la fois contraintes et ressources. Il faut analyser le champ des actions possibles et l'activité requise. Les élèves doivent construire des schèmes d'utilisation, ce qui est possible si ces actions sont dans leur zone proximale de développement instrumental en liaison avec zone proximale d'apprentissage.

Donnons deux exemples des actions requises selon les espaces instrumentés². (Rappelons que nous n'avons donné que certaines commandes de Cabri citées ci-dessus)

	Méso-espace cordes	Feuille papier Instruments classiques	Ecran d'ordinateur Commandes de Cabri
Droite	Tendre une corde	Tracer avec une règle	Utiliser la commande et donner les 2 arguments
Perpend.	Fabriquer et utiliser une équerre-corde	Utiliser une équerre, un gabarit transparent, un secteur angulaire droit	Utiliser la commande et donner les 2 arguments

V- 3 Influence sur les concepts étudiés

Ces activités requises ne correspondant pas obligatoirement aux schèmes de construction des élèves. Le changement d'espace instrumenté n'est pas à lui seul garant d'un changement de type de contrôle et d'utilisation des instruments fournis. Le contrôle instrumenté, nécessaire dans le méso-espace, peut être "oublié" par les élèves lorsqu'ils passent au micro-espace de la feuille de papier où le contrôle perceptif simple peut leur suffire. Deux utilisations du contrôle perceptif instrumenté dans le méso-espace et dans la feuille ne sont pas garants de l'utilisation des commandes dans le logiciel. Le contrôle perceptif simple a la vie dure...

Redisons donc que même si ces changements d'espaces instrumentés sont des facteurs d'évolution du type de contrôle exercé, l'intervention didactique d'étayage de l'enseignant nous semble indispensable.

Certains aspects des concepts se retrouvent d'un espace à l'autre et il est important que les élèves en prennent conscience : ainsi il est essentiel de montrer que tous les gabarits d'angle droit, construits dans les différents espaces, se correspondent ; ainsi il est essentiel de montrer que le report de longueurs est transférable du méso au micro-espace de la feuille.

² L'ensemble du tableau se trouve sur le site MAGESI.

Certains aspects sont nouveaux et en particulier ceux apportés par le logiciel. Il est important aussi que les élèves, avec l'aide du maître, en prennent conscience. Nous donnons ci-dessous les deux exemples de la droite et de la perpendicularité.

	Méso-espace cordes	Feuille papier Instruments classiques	Ecran d'ordinateur Commandes de Cabri
Droite	-lien avec des savoirs quotidiens ou des savoirs physiques (cas de l'horizontale et de la verticale) -prolongeable ? -pas de point	- "bord" d'objets dont on sait qu'ils sont "droits", en particulier bord de la règle, de l'équerre, du double-décimètre - trait limité - les extrémités du trait deviennent des points ; quelques autres points	- donnée par 2 arguments : 1 point et une direction 2 points - trait limité - des points (au moins les arguments de la définition)
Perpend.	Perpendicularité verticale-horizontale Angle droit d'un triangle rectangle (équerre-corde)	Droites perpendiculaires (gabarit transparent) Angle droit d'un triangle rectangle (équerre) Secteur droit (feuille pliée)	Droite perpendiculaire à une autre passant par un point

VI – CONSTRUCTION D'UNE INGENIERIE TRANSFERABLE

Nous nous sommes également posé le problème du passage des attendus théoriques à une mise en œuvre dans les classes, et de la compréhension de l'ingénierie par un enseignant.

Au départ, l'ingénierie se présentait comme un écrit de type mémoire. Elle se composait de deux parties, l'une théorique, l'autre pratique. C'était un travail de chercheur à destination d'autres chercheurs, c'est-à-dire que le style, le vocabulaire employé et les références citées nécessitaient une initiation préalable. Très rapidement apparut la nécessité d'adapter cet écrit pour le rendre plus lisible et utilisable par les enseignants de terrain. Fallait-il pour cela sacrifier la partie théorique pour ne conserver que les fiches de préparation? C'était faire offense aux enseignants de considérer que cet aspect de la discipline ne les concernait pas. Au contraire, il fallait la rendre accessible et mettre en avant la complémentarité des deux parties, théorique et pratique, à charge pour chacun d'effectuer des aller-retours selon ses besoins, son envie d'approfondir.

Notre choix fut donc de conserver la partie théorique qui propose un éclairage des choix opérés dans l'ingénierie. Mais il fallait la réécrire dans un langage non "jargonnant" et supprimer tout ce qui relevait de la recherche pure sans retombée immédiate sur cette ingénierie. En bref, elle devait être lisible et directement reliée aux tâches que les enseignants conduisent avec leurs élèves.

VI – 1 Contraintes didactiques et pédagogiques

Nous étions face à une double contrainte : notre document devait à la fois inciter à la pratique des activités proposées mais aussi permettre aux enseignants, quand ils le souhaiteraient, de trouver des réponses à leurs interrogations sur un plan théorique.

Les premières lectures de la version papier de l'ingénierie par des professeurs d'école avaient découragé ou rebuté certains des lecteurs qui espéraient rapidement trouver dans ce document une réponse directe à leurs préoccupations quotidiennes. Notre ingénierie devait non seulement ne pas décourager ou rebuter les enseignants à la recherche d'activités géométriques mais au contraire permettre à chacun d'entrer par le côté qui lui serait utile. A nous ensuite de les amener à aller plus loin, à s'interroger, à leur proposer des ouvertures, ... à consulter les attendus théoriques.

VI – 1.1 Respect des programmes officiels et horaires

« Les activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais des connaissances fonctionnelles, utiles pour résoudre des problèmes dans l'espace ordinaire, dans celui de la feuille de papier ou sur l'écran d'ordinateur, en particulier des problèmes de comparaison, de reproduction, de construction, de description, de représentation d'objets géométriques ou de configurations spatiales. » Programmes 2002.

L'horaire consacré aux mathématiques est de 5h à 5h30. La part consacrée à la géométrie est d'environ 40 minutes hebdomadaires soit approximativement 24h annuelles (que l'on peut compléter avec des heures de situations-problèmes).

Nous nous sommes appuyés sur les programmes officiels de 2002 pour définir et constituer la trame de l'ingénierie afin de répondre au mieux aux attentes des enseignants en ce domaine.

VI – 1.2 Séparation des documents utilisables en classe et des attendus théoriques

Il est apparu que les enseignants du terrain devaient pouvoir utiliser les fiches directement, sans lire obligatoirement la partie théorique. Mais parfois, il est nécessaire de leur indiquer un choix, une préférence, une non-utilisation volontaire de tel outil par exemple, se référant à un concept théorique développé dans la partie théorique. Pour ne pas alourdir la fiche directement utilisable en classe, la rubrique "Commentaires" joue ce rôle d'informations complémentaires et peut être imprimée si l'enseignant le désire.

Notre ingénierie sépare donc nettement les documents directement utilisables en classe (fiches de préparation et commentaires) de ceux consultables avant et/ou après la conduite des séances en classe (attendus théoriques) bien que des liens directs ou indirects existent entre les deux parties.

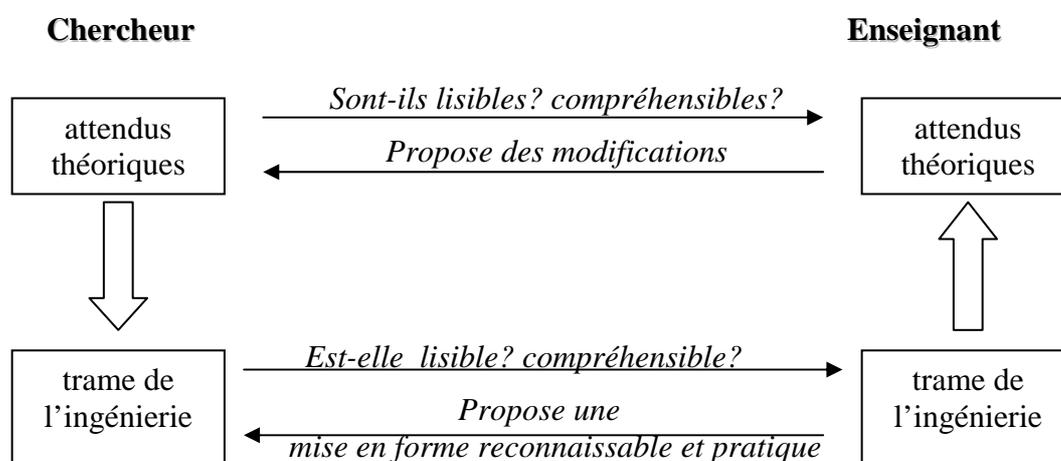
Pourquoi une telle dichotomie ?

Il est important de ne pas perdre de vue que chercheur et professeur d'école n'ont ni les mêmes objectifs de travail ni les mêmes contraintes. Chacun œuvre donc avec sa propre logique. Elles peuvent ne jamais se rencontrer. Mais elles peuvent aussi se rejoindre si l'un et l'autre connaissent les différences avec lesquelles ils abordent une même question. Et la

richesse de leurs échanges viendra de leurs différences face à un même questionnement. Le chercheur s'interroge sur une problématique dans un domaine bien déterminé. Ce sera l'objet de son travail. C'est un spécialiste. Il lui faudra ensuite imaginer une ingénierie pour mettre en application les concepts qu'il aura retenus. Il va lui consacrer toute son énergie pour la développer. Il dispose de temps pour le faire.

Le professeur d'école ne dispose pas de ce temps-là. Il doit prévoir, concevoir, organiser et gérer six heures de classe par jour et ce, dans toutes les disciplines pour assumer au mieux la polyvalence de son métier. Il se préoccupe d'abord d'une activité pédagogique définie ou à définir en relation avec des objectifs bien définis. Il a donc besoin d'outils pratiques directement utilisables. S'il le souhaite, il peut parcourir la partie théorique, selon ses besoins, ses désirs, du temps dont il dispose, pour s'informer, répondre à une interrogation, comprendre les choix de l'ingénierie.

Le schéma ci-dessous illustre la démarche qui fut la nôtre.



Chercheur et professeur d'école sont complémentaires à partir du moment où, d'une part, le chercheur se nourrit des besoins et difficultés rencontrés sur le terrain pour en faire un travail d'analyse et de recherche aboutissant à de propositions concrètes, et où d'autre part, le professeur d'école utilise le travail du chercheur en ayant à sa disposition les appuis théoriques justifiant l'ingénierie proposée, avec une nécessaire et indispensable adaptation à sa personnalité, sa pédagogie, son savoir-faire et les besoins de ses élèves.

VI – 1.3 Faisabilité sur les plans pédagogique et didactique

Comme nous l'avons précédemment évoqué, notre ingénierie a été conçue avec une progression en cohérence avec nos choix didactiques et pédagogiques. Aussi, les quatre séquences ne peuvent être conduites indépendamment ou dans un ordre différent sans des adaptations répondant à de nouveaux choix.

Ainsi, nous présentons la séquence à l'aide d'un texte court et d'un tableau général: ils la situent par rapport aux séquences précédentes, précisent quels seront les objectifs visés, définissent rapidement l'activité des élèves tout en proposant à l'utilisateur des liens directs avec la partie théorique à propos des concepts mathématiques abordés ou des choix

pédagogiques énoncés. (On trouvera l'exemple de la présentation de la séquence "Parallélogramme" en Annexe VI – 1.3).

Le tableau général de la séquence autorise un accès à toutes les séances aussi bien lors du 1^{er} accès que lors d'une utilisation régulière.

Les fiches de préparation sont volontairement courtes et manipulables pour une utilisation plus facile en classe. On y trouve les rubriques classiques dévolues à ce type de document. Les tâches réalisables sont encadrées pour un meilleur repérage en situation. Les conditions d'organisation proposées sont toujours réalisables, quelle que soit la réalité du terrain à laquelle est confronté l'enseignant.

Les commentaires portent sur chacune des rubriques séparément et proposent photos, applets, explications supplémentaires, réponses possibles des élèves, recommandations particulières, etc. Certaines séances comportent également des fichiers annexes (menus et fichiers du logiciel de géométrie dynamique, fiches élèves).

VI – 2 Documents mis à disposition

Les documents de l'ingénierie MAGESI sont consultables sur le site Internet <http://magesi.inrp.fr>

Cette ingénierie comporte deux volets : Faire qui comporte tous les documents nécessaires à l'enseignement proprement dit, et Comprendre qui apporte les éclaircissements théoriques sur cette ingénierie. Dès la page d'accueil, l'utilisateur a le choix entre ces deux parties.

Nous avons retenu le principe d'un affichage distinct à l'écran de chaque rubrique de la fiche de préparation habituellement convenue. Mais l'ensemble des rubriques de la fiche de préparation est également affichable à l'écran et imprimable, généralement sur une seule page, afin de fournir à l'enseignant un document rapidement consultable en situation de conduite de classe. L'enseignant peut y joindre, s'il le souhaite, les commentaires associés destinés à l'aider dans sa préparation et sa conduite de classe.

VI – 2.1 Objectifs et commentaires

Une phrase d'introduction présente toujours l'activité de la séance. L'objectif général de la séance est rappelé puis ceux plus précis, nécessaires à la réalisation de cet objectif. Les commentaires apportent ici un éclairage théorique minimum pour s'assurer que l'enjeu de la séance auquel on souhaite parvenir est bien compris. (On trouvera 3 exemples un peu différents d'objectifs avec leurs commentaires en Annexe VI – 2.1)

VI – 2.2 Matériel et commentaires

Le matériel nécessaire à la conduite de la séance est clairement énoncé sur la fiche de préparation. Il est d'un usage courant. Il demande parfois une préparation spécifique (cordes, baguettes de bois, potence du fil à plomb...). Une photo ou quelques mots dans les commentaires proposent et/ou suggèrent des recommandations ou des petites astuces (on trouvera des exemples de commentaires de matériel dans l'annexe VI – 2.2).

VI – 2.3 Déroulement et commentaires

Nous proposons un déroulement que nous souhaitons voir s'approprier par l'enseignant qui l'utilisera. Il l'adaptera à sa pratique et à ses élèves. C'est pour cela que nous l'avons voulu synthétique. La consigne est clairement énoncée dans un encadré pour aller à l'objectif sans ambiguïté. Mais la conduite de la séance reste à l'initiative de l'enseignant qui s'appuiera à sa convenance sur la trame proposée et testée durant 4 à 5 années.

Nous indiquons également vers quoi il est nécessaire d'aboutir et proposons une énonciation possible, constituant par là-même un repère indispensable pour l'enseignant dans sa tâche d'adaptation à ses élèves et à sa pédagogie. (Annexe VI – 2.3)

ANNEXES

Annexe VI – 1.3 Exemple de présentation d'une séquence

Il s'agit de la séquence "Parallélogramme".

*Cette séquence est la première de l'année de CM2. Il s'agit, en suivant le cadre théorique exposé dans la rubrique **Comprendre**, de travailler sur la relation construite qu'est le parallélisme, en lien avec la perpendicularité et l'isométrie vues dans les séquences précédentes de CM1. Il est demandé aux élèves de construire deux droites parallèles puis un parallélogramme, dans différents espaces instrumentés. Cette séquence permet également de faire une synthèse de l'ensemble des propriétés des **quadrilatères particuliers**.*

Numéro	Espace Instrumenté	But	Type de regroup ^t
<u>Séance n°0</u>	Plusieurs	Rappels sur les séquences de CM1	Classe complète
<u>Séance n°1</u>	Méso-espace du sol avec cordes	Notion d'écart constant	Demi-Classe
<u>Séance n°2</u>	Micro-espace de la feuille : Instruments divers	Construction de deux droites à écart constant	Classe complète
<u>Séance n°3</u>	Plusieurs	Lien entre parallélisme et perpendicularité	"
<u>Séance n°4</u>	Micro-espace de la feuille : Instruments divers	Vérification instrumentée des propriétés du parallélogramme	"
<u>Séance n°5</u>	"	Utilisation des propriétés pour les constructions du parallélogramme	"
<u>Séance n°6</u>	Micro-espace de l'écran : commandes du logiciel	Présentation des commandes du logiciel nécessaires pour la fin de la séquence	Demi-Classe
<u>Séance n°7</u>	"	Exercices dans l'environnement logiciel	"
<u>Séance n°8</u>	"	Transfert de la construction de deux parallèles dans le nouvel espace instrumenté	"
<u>Séance n°9</u>	"	Constructions de parallélogrammes utilisant des propriétés différentes	"
<u>Séance n°10</u>	Plusieurs	Propriétés et hiérarchie des quadrilatères vus. Illustration avec le logiciel.	"
<u>Séance n°11</u>	"	Evaluation sur reconnaissance et construction de parallélogrammes.	Classe complète

La première séance de recherche de la construction de deux droites parallèles dans le méso-espace reçoit une solution dans l'espace de la feuille de papier dans la deuxième séance. Il y a alors réinvestissement dans le méso-espace dans la troisième séance. Le

parallélogramme est alors étudié dans l'espace de la feuille de papier, puis dans l'espace de l'écran de l'ordinateur avec le logiciel de géométrie dynamique. Les séances 6 et 7 pourront être regroupées si les élèves ont une pratique assez aisée du logiciel. Pour la séance 10, le travail peut se faire en classe complète si on dispose en classe d'un ordinateur et d'un vidéoprojecteur.

Annexe VI – 2.1 Exemples d'objectifs et de commentaires d'objectifs .

Premier exemple : séance 1 de la séquence "Carré"

Objectifs

Objectif général : faire construire par les élèves un carré dans un méso-espace (sol de la cour de récréation ou sol d'une salle sans mobilier), avec des cordes.

Dans cette séance :

- travailler tout d'abord sur la modélisation d'un segment par marquage de deux points au feutre sur un morceau de corde tendue ;*
- redonner des propriétés suffisantes pour avoir un carré ;*
- faire résoudre le problème de la "fabrication" de 4 côtés de même longueur par superposition de segments marqués sur la corde.*

Commentaires des objectifs

Il est impossible de faire des angles droits à vue dans le méso-espace et on ne dispose pas immédiatement d'un instrument à faire des angles droits dans cet espace. Il s'agit ici de faire comprendre aux élèves la nécessité de fabriquer un instrument ad hoc, et pour cela de chercher à faire un gabarit de l'angle droit "primitif" qu'est l'angle formé par une droite verticale et une droite horizontale. Il y a déjà, dans cette séance, passage de la notion de droites perpendiculaires à celle d'angle droit. C'est une occasion pour les élèves de voir que deux droites perpendiculaires forment 4 angles droits.

La séance est difficile car les élèves sont provisoirement en échec, mais absolument indispensable pour travailler sur le concept de perpendicularité.

Deuxième exemple : séance 7 de la séquence "Parallélogramme"

Objectifs

Objectif général : faire construire un parallélogramme dans l'espace instrumenté par le logiciel de géométrie dynamique.

Dans cette séance :

- présenter les autres commandes du logiciel nécessaires à la construction : "Milieu", "Cercle" et "Compas" ;*
- insister sur la différence entre dessin à l'écran et figure définie géométriquement.*

Commentaires objectifs

Les deux commandes Cercle et Compas ne sont pas liées à la même définition du cercle : la première correspond à un cercle donné par son centre et un point de sa circonférence, la deuxième correspond à un cercle donné par son centre et son rayon. Cette deuxième définition est utile pour construire des côtés opposés isométriques dans le parallélogramme.

L'objectif de l'exercice 3 est de montrer qu'une propriété réalisée à vue (cercles sécants) ne reste pas toujours réalisée dans les déplacements, et que la droite d'intersection qui dépend des deux cercles n'est pas toujours définie.

L'objectif de l'exercice 4 est de montrer également qu'une définition sous le seul contrôle perceptif simple ne suffit pas (Il est prématuré pour la plupart des élèves de faire une construction correcte de la tangente).

Troisième exemple : séance n°8 de la séquence "Parallélogramme"

Objectifs

Objectif général : faire construire un parallélogramme dans l'espace instrumenté par le logiciel de géométrie dynamique.

Dans cette séance :

- reprendre les constructions d'une droite parallèle à une droite donnée, avec écart constant ou passant par un point, vues dans les autres espaces instrumentés ;
- utiliser la commande "Compas" pour la construction utilisant l'isométrie ;
- présenter la commande "Droite parallèle".

Commentaires des objectifs

Les constructions sont les mêmes que dans les espaces précédents.

La construction d'une droite parallèle à une droite donnée à un écart donné demande le report de cet écart sur deux droites perpendiculaires : la difficulté réside dans l'emploi de la commande "Compas" pour reporter cette longueur.

La construction d'une parallèle à une droite donnée passant par un point demande l'utilisation de la propriété "deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles ».

Annexe VI – 2.3 Exemples de commentaires sur le matériel

Premier exemple : séance 2 de la séquence "Parallélogramme"

Il s'agit de construire deux droites parallèles sur une feuille de papier.

Matériel

Matériel nécessaire pour chaque élève :

- 2 (demi-)feuilles blanches aux bords découpés irrégulièrement : l'une avec une droite et un segment, l'autre avec une droite et un point extérieur à cette droite (on peut éventuellement les trouver en annexe)
- règle non graduée
- bandelette de papier (pas de compas)
- équerres et/ou gabarit de droites perpendiculaires sur transparents

Matériel nécessaire pour l'enseignant :

- quelques constructions faites sur transparents pour une vérification par les élèves (cf. éventuellement fichiers annexes)

Commentaires

Sur la première demi-feuille, on veillera à ce que le segment donné ne soit ni parallèle ni perpendiculaire à la droite et que sa longueur soit supérieure à la largeur du double-décimètre.

Sur la deuxième demi-feuille, on pourra faire varier l'écart (prévoir un double-jeu de transparents).

Le lot des instruments fournis est en principe connu des élèves. Le compas a été enlevé pour interdire la construction (à vue) de la tangente à deux cercles centrés sur la première droite et de rayon l'écart donné.

Les transparents avec le tracé de la parallèle demandée permettent aux élèves et à l'enseignant de vérifier rapidement leurs constructions (les "petites" erreurs seront difficiles à traiter...).

Deuxième exemple : séance 2 de la séquence "Carré"

Il s'agit dans cette séance de construire un carré dans un méso-espace (et plus particulièrement de (re)découvrir l'angle droit fait par une verticale et une horizontale).

Commentaires



L'angle droit est matérialisé par le fil se détachant sur un fond uni et une paille posée à la surface de l'eau.

Troisième exemple : séance 3 de la séquence parallélogramme

Il s'agit dans cette séance de construire des droites parallèles sur une feuille de papier

Commentaires

Si les élèves ont bien rejeté la construction de la tangente à 2 cercles dans la séance précédente, on peut leur laisser le compas pour reporter des longueurs.

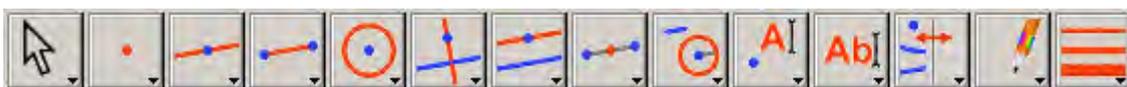
Les transparents avec le tracé de la parallèle demandée permettent aux élèves et à l'enseignant de vérifier rapidement les constructions (les "petites" erreurs seront difficiles à traiter...).

Quatrième exemple : séance 9 de la séquence "Parallélogramme"

Il s'agit dans cette séance de construire des parallélogrammes sur l'écran d'ordinateur.

Commentaires

Le menu "para2.men" se présente comme suit :



Annexe VI – 2.3 Exemple de déroulement et des commentaires

Il s'agit de la première partie de la séance n°8 de la Séquence Parallélogramme : il s'agit de construire 2 droites parallèles sur l'écran d'ordinateur

- Phase 1 / collectif / donnée de la tâche

Ouvrir ou faire ouvrir le logiciel et le fichier "para1.men".

Donner la tâche aux élèves.

Construisez une droite et un segment. Avec les commandes dont vous disposez, reprenez la construction d'une droite parallèle à la droite donnée, située à une distance égale à la longueur du segment. Vérifiez votre construction avec le déplacement des objets attrapables (segment, droite ou points)

- Phase 2 / groupes de 2 / essai de construction

- Phase 3 / collectif / Bilan

Refaire en pas à pas la construction, en nommant les objets et en notant/montrant la ligne de programme correspondante.

Enoncé

$d1$: droite quelconque

segment AB

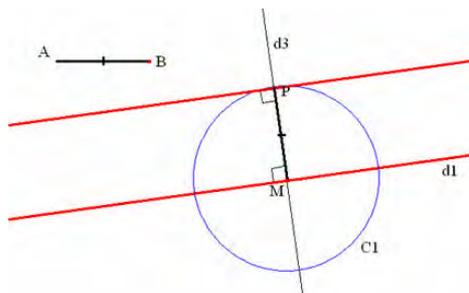
M : point de la droite $d1$

$d3$: droite passant par M et perpendiculaire à $d1$

$C1$: cercle (centre M , rayon AB)

P : intersection de la droite $d3$ et du cercle $C1$

$d2$: droite perpendiculaire au segment PM passant par P



Donner à chaque élève l'encadré ci-dessus qui sera collé dans le journal de bord.

Commentaires

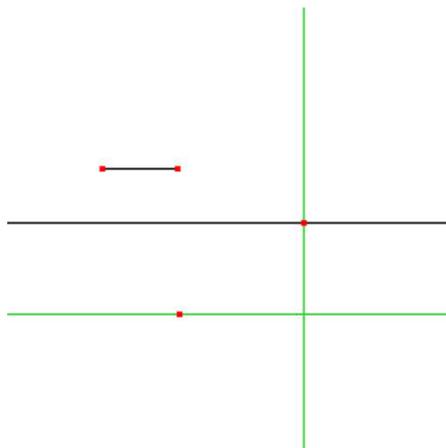
Les commentaires donnent les procédures possibles des élèves et les aides éventuelles à leur apporter. Pour cette partie, ils sont les suivants :

Pour la **première tâche**, les réalisations possibles des élèves sont les suivantes
 - constructions à vue pour un bon nombre d'élèves : la direction des deux droites est souvent proche de l'horizontale, et l'écart est ajusté en déplaçant la seconde droite par son point de base (ce qui ne peut se produire si la commande laissée à la disposition des élèves est "Droite passant par deux points"). Nous avons mis en noir le segment et la première droite construits par les élèves et laissés les couleurs par défaut pour les autres constructions.



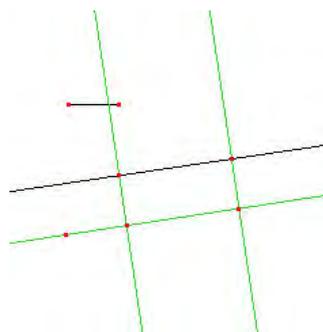
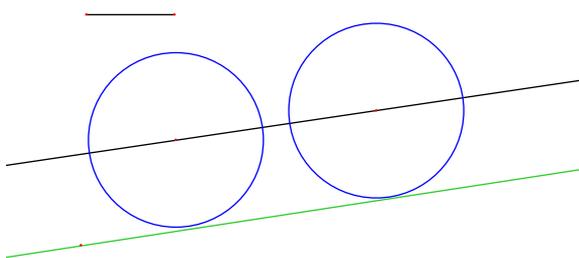
Cliquez sur l'image pour ouvrir l'applet et déplacer les objets.

- construction d'une (ou de deux) perpendiculaires à vue, et report de l'écart à vue.



Cliquez sur l'image pour ouvrir l'applet et déplacer les objets.

- résolution en prenant en compte l'une des deux propriétés : deux écarts isométriques au segment donné avec utilisation de la commande "Compas" (et construction à vue d'une tangente aux deux cercles), un écart isométrique au segment donné et une tangente à vue, deux écarts pris sur des droites perpendiculaires (en réalisant à vue l'isométrie).



Cliquez sur l'image pour ouvrir l'applet et déplacer les objets. Cliquez sur l'image pour ouvrir l'applet et déplacer les objets.

Dans tous les cas, les déplacements généralisés sur la droite construite doivent invalider la réponse. Beaucoup auront besoin d'étayage pour prendre en compte les deux propriétés en même temps et comprendre la construction donnée dans le bilan, plus aisée.

BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de l'Université de Bordeaux I.

BERTHELOT R. (2000) *Quelques moyens pour placer l'espace au centre de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire, et pour préparer tant l'enseignement technique de l'espace que l'enseignement mathématique du premier cycle*. Atelier in Actes du XXVIIe Colloque COPIRELEM, Chamonix.

BROUSSEAU G. (1983) *Etude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie*. Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique n° 45, LSD IMAG et Université J. Fourier, Grenoble.

BRUNER J. (1983) *Le développement de l'enfant. Savoir faire, savoir dire*. PUF, Paris.

HOYLES C. & NOSS R. (1996) *Windows on Mathematical Meanings. Learning cultures and computers*. Kluwer Academic Press.

LABORDE C. & CAPPONI B. (1994) *Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique*, Recherches en didactique des mathématiques Vol. 14 (1/2), pp. 165-210.

RABARDEL P. (1995) *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris.

RABARDEL P. (1999) *Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques*. Conférence in Actes de la IX^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Houlgate.

ROLET C. (1996) *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions de futurs enseignants dans le contexte Cabri-géomètre*, Thèse de l'Université Claude Bernard, Lyon.

VERGNAUD G. (1990) *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en Didactique des Mathématiques vol 10 2/3 pp. 133-170.

VYGOTSKI L. (1985) *Pensée et langage (F. Sève, Trans.)*, Editions sociales, Paris.