

LES SITUATIONS-RECHERCHE POUR LA CLASSE

Cécile OUVRIER-BUFFET

Maître de Conférences, IUFM de Melun

DIDIREM, Paris 7

ERTé Maths à Modeler

cecile.ob@wanadoo.fr

Résumé

Le savoir scientifique se construit dans le domaine de la recherche. Le chercheur peut, et doit, pour faire évoluer son questionnement, choisir lui-même le cadre de résolution, modifier les règles ou en changer, s'autoriser à redéfinir les objets ou à transformer la question posée. Il peut momentanément s'attaquer à une autre question si cela lui semble nécessaire. C'est à ce type de pratiques que nous souhaitons confronter l'élève. Mais quelles mathématiques est-il pertinent et possible d'enseigner dans des « situations de recherche en classe » ?

Nous avons utilisé le cadre de cet atelier pour développer le thème suivant : la construction, la dévolution et la gestion de Situations-Recherche (SR) pour l'enseignement de la démarche scientifique en mathématiques.

Dans les programmes scolaires de mathématiques se dessine un intérêt relativement nouveau pour la démarche de recherche. L'expression même de « *démarche de recherche en mathématiques* » a pris une place importante et apparaît actuellement de manière transversale dans les instructions officielles françaises, et ce dès le primaire. Il est en effet préconisé de confronter les élèves à « *de véritables problèmes de recherche* » (cycle 2). L'introduction de ce type d'activités vise à « *intéresser les élèves à la pratique des mathématiques* », en faisant de la classe « *une véritable petite communauté mathématique* ». Cette dimension « recherche », qui se veut donc proche de l'expérience des chercheurs professionnels, s'inscrit dans une vision des mathématiques scolaires qui donnerait plus de poids au raisonnement mathématique qu'aux connaissances notionnelles. Nous allons interroger cette dimension « recherche » et questionner le thème suivant : la construction, la dévolution et la gestion de Situations-Recherche (SR) pour l'enseignement de la démarche scientifique en mathématiques. Nous spécifierons les particularités des SR, illustrerons la dévolution et la gestion des SR sur « la chasse à la bête » et conclurons sur le vécu des participants à cet atelier.

I – LES SITUATIONS-RECHERCHE

I – 1 Une caractérisation

Les recherches conduites au sein de l'ERTé¹ *Maths à Modeler* s'articulent autour de situations que nous appelons Situations-Recherche. Ce sont des situations particulières qui peuvent être considérées comme la transposition pour la classe de l'activité du chercheur en mathématiques. Nous les caractérisons ainsi :

- Le problème abordé est le plus souvent issu de problèmes de recherche actuels. Il peut donc comporter une, plusieurs ou aucune solution. Il peut être encore ouvert dans la recherche mathématique actuelle.
- Le point de départ est une question facilement compréhensible pour celui à qui elle est posée. Elle n'est pas formalisée en termes mathématiques. C'est la situation qui amène l'élève à l'intérieur des mathématiques.
- Les méthodes de résolution ne sont pas désignées. Plusieurs pistes peuvent être suivies.
- Les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et réduites possibles. Ainsi, le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème, même s'il n'est pas familier, est d'un accès facile pour que l'on puisse prendre facilement possession de la situation, s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution.
- Une question résolue peut amener à se poser de nouvelles questions. Il n'y a que des critères de fin locaux (Grenier et Payan, 2002 ; Godot, 2005).

Cette caractérisation n'est pas sans rappeler certains des éléments de définition des problèmes ouverts (Arsac, Germain et Mante, 1988). On peut noter plusieurs points communs entre les Situations-Recherche et les problèmes ouverts : l'énoncé n'induit ni la méthode ni la solution, la solution n'est pas une application directe des résultats présentés en classe mais demeure tout de même accessible, et la résolution nécessite la mise en œuvre d'une démarche de recherche. Cependant, plusieurs différences existent.

Une Situation-Recherche peut avoir une, plusieurs ou aucune solution, contrairement à un problème ouvert ou au *problem solving* chez les anglo-saxons qui n'en ont généralement qu'une. De plus, les valeurs des variables de recherche ne sont pas fixées au préalable. Les variables de recherche sont des variables de tâches inhérentes à la Situation-Recherche, leurs valeurs permettent de caractériser les différents sous-problèmes de la situation et les procédures afférentes (Godot, 2005, p. 133). Enfin, dans une Situation-Recherche, il n'y a pas nécessairement de savoir mathématique notionnel visé ou à mobiliser. En effet, nous cherchons avant tout à mettre l'accent sur la démarche de recherche en elle-même : c'est pourquoi nous proposons des situations où les savoirs notionnels ne viennent pas faire obstacle au développement de la démarche de recherche.

¹ ERTé : Equipe Recherche Technologie Éducation.

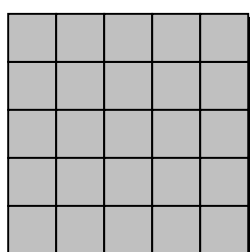
I – 2 Des heuristiques spécifiques

Les situations que nous proposons sont de plusieurs types : elles peuvent être liées à un travail plus spécifique sur une ou plusieurs heuristiques (par exemple : prouver, conjecturer, réfuter, créer, modéliser, définir, étendre mais aussi transformer un questionnement, être capable de mettre en œuvre un raisonnement non linéaire, expérimenter, décomposer/recomposer, avoir une responsabilité scientifique, reconnaître que deux problèmes issus de contextes différents sont en fait les mêmes, etc.). Les SR peuvent impliquer des notions mathématiques données, appartenir à un ou plusieurs domaines mathématiques. Remarquons que la plupart des situations que nous avons conçues sont proches des mathématiques discrètes, un champ des mathématiques comportant de nombreux problèmes compréhensibles et encore ouverts dans la recherche actuelle. L'équipe dans laquelle s'inscrivent nos travaux, *Maths à Modeler*, est composée notamment de chercheurs en mathématiques discrètes, ce qui nous donne un accès privilégié aux recherches mathématiques en cours et à l'observation de la démarche du chercheur elle-même. Quelques exemples de Situations-Recherche que nous avons développées au sein de Maths à Modeler et expérimentées auprès de différents publics se trouvent en ligne à l'adresse : <http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE>.

II – LA CHASSE À LA BÊTE

II – 1 Un exemple de Situation-Recherche : la chasse à la bête

On considère un territoire (un carré 5×5 dans le cas ci-dessous). Une bête est un polymino composé de carrés. Le problème est la recherche du plus petit nombre de mines (ici un carré) à placer sur le territoire de telle façon à ce qu'aucune bête ne puisse se poser.



le territoire



une mine



une bête



une autre bête !

Ce problème est un problème d'optimisation. Pour prouver la valeur optimale, il est nécessaire de produire une solution réalisant cette valeur (condition suffisante) et de démontrer que l'on ne peut pas faire mieux (condition nécessaire). Le problème qui nous a inspiré la chasse à la bête est dû à Golomb (1994).

II – 2 Proposition d'une séquence de chasse à la bête

Selon l'âge des élèves, le problème peut être adapté. Il est possible de le « fermer » plus ou moins par le choix des bêtes et/ou le choix des territoires. Pour cet atelier, nous avons choisi

de faire chercher les participants sur un territoire carré 5×5 avec les bêtes suivantes (une mine étant un carré comme illustré précédemment) :

- les bêtes « domino » 
- les bêtes « trimino long » 
- les bêtes « trimino en L » 

Cet ensemble de situations implique un travail sur des heuristiques de la recherche, suscite un intérêt d'élaboration de méthode de construction, de généralisation et de décontextualisation, pose la question de l'existence d'une ou plusieurs solution(s), confronte à la question de l'impossibilité ainsi qu'à celle du « pourquoi » (là se trouve un enjeu de « preuve »).

II – 3 Analyse du problème

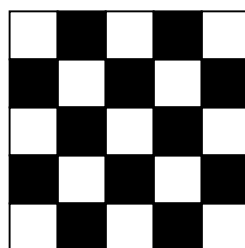
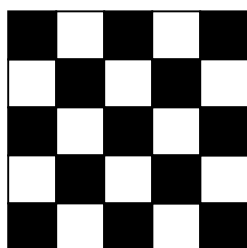
Nous avons choisi de présenter ici un déroulement possible de la situation, telle qu'elle peut être implémentée en classe.

1) Dévolution de la situation et du problème d'optimisation.

Un terrain 8×8 est donné. Chaque groupe d'élèves choisit une bête (composée d'au plus 5 carrés connexes par les côtés). Indiquons que les mathématiciens ne connaissent pas nécessairement les solutions optimales pour toutes les configurations. Les élèves proposent rapidement des solutions. L'enseignant (dans une posture de gestionnaire-observateur) peut enlever une mine d'une solution proposée par les élèves : ce genre d'interactions, pouvant être répété, favorise la dévolution du problème d'optimisation. Cela conduit les élèves à une question cruciale lorsqu'ils pensent ne pas pouvoir « faire mieux ». A ce stade, le fait qu'ils ne peuvent « faire mieux » suffit à les convaincre sur le fait qu'ils détiennent l'optimum, jusqu'à ce qu'un autre groupe propose une meilleure solution. Pour faire évoluer la situation, l'enseignant peut alors proposer des cas de recherche plus simples, tels ceux évoqués ci-dessus (territoire 5×5).

2) Recherche sur un cas particulier : le territoire 5×5 et la bête « domino ».

Il existe une solution à 13 mines ... et une solution à 12 mines.



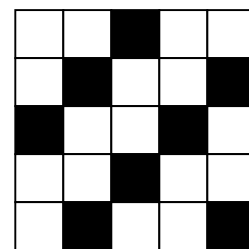
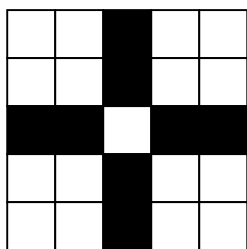
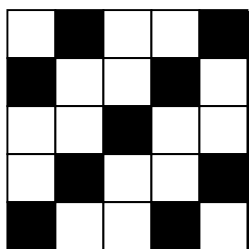
La solution à 12 mines est-elle optimale ?

Une idée généralement évoquée par les enfants consiste à argumenter ainsi : si l'on enlève une mine, ce n'est plus une solution. Ainsi, la solution à 12 mines serait optimale. Or, un tel raisonnement montrerait que la solution à 13 mines serait, elle aussi, optimale, ce qui n'est pas le cas puisque une solution à 12 mines a été exhibée. Cela pose la question de la différence entre un minimum *local* et un minimum *global*.

Comment pouvons-nous alors démontrer que 12 est la solution optimale dans cette configuration ? Nous pouvons facilement montrer que 12 bêtes « domino » peuvent se poser sur le territoire 5×5 : ainsi, 12 mines « au moins » sont nécessaires (borne inférieure). Il suffit alors d'exhiber une solution à 12 mines pour pouvoir conclure que 12 est effectivement la solution optimale.

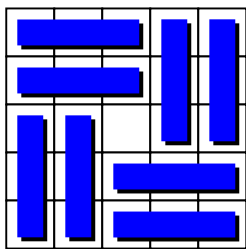
3) Considérons maintenant le cas de la bête « trimino long ».

Après que des solutions à 11, 10 ou 9 mines aient été produites par les élèves, certains groupes exhibent des solutions ne comportant que 8 mines.



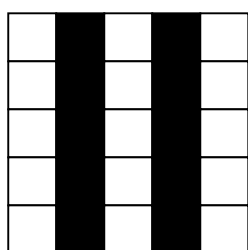
Les élèves sont alors persuadés que la valeur optimale est 8 car de nombreuses tentatives avec 7 mines ont échoué. Un point critique apparaît ici : la nécessité d'une preuve. La posture de l'enseignant devient alors importante afin d'engager les élèves dans une problématique de preuve rationnelle. Ce dernier peut référer à des cas plus simples (prouver que cela est impossible avec 1, 2 ou 3 mines par exemple). Cette phase est délicate dans la gestion car il s'agit de « preuve ».

Pendant cette phase d'argumentation, une procédure mobilisant les pavages peut apparaître : si l'on peut placer 8 bêtes disjointes sur le territoire, alors 8 mines (au moins) sont nécessaires. Et plusieurs solutions à 8 mines ont été exhibées, nous laissons le lecteur conclure ...



4) Recherche sur un autre cas particulier : la bête « trimino en L ».

L'organisation de cette phase est semblable à la précédente. Cependant, l'argument « pavage » n'est pas suffisant car l'on peut placer au mieux 8 bêtes « trimino en L » sur le territoire 5×5, alors qu'une solution nécessite 10 mines (voir ci-après).



Ainsi, la valeur optimale est-elle comprise entre 8 et 10. De tels résultats sont courants en mathématiques, et l'on pourrait alors s'en contenter. Cependant, il est possible de « raffiner » la preuve mobilisant les pavages afin de démontrer que 10 mines sont nécessaires. Nous avons obtenu de telles preuves dans certains groupes d'élèves. Les figures ci-dessous représentent le « film » de la preuve en question. Indiquons seulement que pour chaque carré 2×2 , où peut se poser une bête « trimino en L », deux mines sont nécessaires.



4) Réinvestissement des procédures des élèves à des territoires différents (sur un territoire 7×7 par exemple).

5) Réalisation d'une poster et d'une présentation orale.

Les élèves présentent, lors d'un séminaire (*Maths à Modeler Junior*) leurs processus de recherche : idées, résultats, procédures, conjectures, nouveaux problèmes.

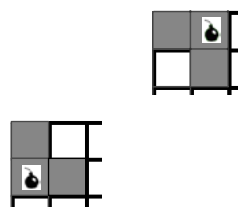
II – 4 Posture des acteurs dans une SR

Dans de telles situations, il est nécessaire que l'enseignant n'apparaisse pas comme le détenteur du savoir. De fait, les SR étant issues de la recherche actuelle, l'enseignant se retrouve dans une double posture : celle de gestionnaire et de chercheur. L'élève, quant à lui, est chercheur et gestionnaire de sa propre recherche. Le dispositif que nous utilisons habituellement est le suivant : les élèves travaillent en groupe de 3 ou 4, avec des feuilles de recherche (ils gardent ainsi une trace « privée » de leur recherche). L'enseignant organise une ou deux mise(s) en commun : il est nécessaire que celle(s)-ci ne vienne(nt) pas trop tôt dans le déroulement des séances, et ne soient pas trop nombreuses, au risque de détruire certaines procédures dont le développement nécessite un temps long. Un séminaire dans un laboratoire de recherche permet de finaliser la recherche de la classe devant des professionnels, d'autres classes et les parents.

II – 5 Exemples de productions d'élèves

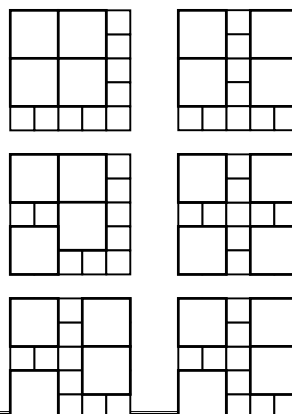
Les extraits ci-dessous proviennent d'élèves de fin de primaire.

Une solution à 10 mines ...
mais 8 bêtes maximum ???
Le nombre de mines est compris entre 8
et 10.
On simplifie le problème.

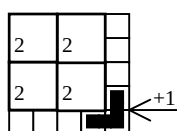


Sur un territoire
de 2 sur 2,
il nous faut
minimum 2
mines.

Sur notre territoire,
on peut poser 4 territoires de 2 sur 2



Maintenant,
comptons les mines nécessaires.

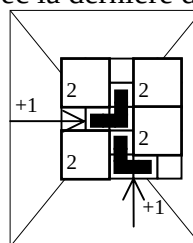


Ici, il faudra 9 mines.

Le nombre minimum de mines
n'est donc pas 8.

[Les élèves procèdent ainsi pour 6
autres découpages et montrent pour
chacun que 9 mines sont nécessaires]

Mais, avec la dernière disposition



Le nombre minimum de mines
n'est donc pas 9.

Il faut 10 mines au minimum
pour que la bête  ne s'installe pas
sur le territoire de 5 sur 5.

Et les conclusions des élèves parlent d'elles-mêmes ...

« Nous avons commencé à apprendre à :

- Travailler ensemble
- Écouter un peu mieux les autres
- Ne pas dire tout de suite « c'est impossible »
- Simplifier un problème pour mieux l'étudier
- Essayer de trouver des preuves, des arguments
- Discuter de ces preuves avec d'autres
- Comprendre des fautes de raisonnement ».

III – REMARQUES SUR LE DEROULEMENT DE L'ATELIER

Après une brève introduction sur les enjeux de cet atelier, les participants, répartis en groupes de trois ou quatre, ont été confrontés à la chasse à la bête. Les remarques qui suivent ont été rédigées sur la base de commentaires de participants².

Tous les participants sont rentrés facilement dans la tâche et ont éprouvé beaucoup de « plaisir » à le traiter. Le traitement des bêtes « domino » s'est effectué rapidement. Dans certains groupes, la chronologie « domino – trimino long – trimino en L » a été respectée alors que d'autres participants ont réalisé des allers-retours entre ces trois types de bêtes, remettant à plus tard la résolution avec justification. La mise en commun a fait ressortir des résultats (nombre minimal de mines), les preuves de cette minimalité ne venant que dans un second temps, parfois partiellement. Ces preuves mobilisaient la récurrence, des arguments de symétrie, des arguments de pavage, des encadrements. Le traitement du raisonnement a été repris ensuite. Outre les interactions autour de la résolution des problèmes, le matériel et son usage ont été source d'échanges. L'utilisation du matériel fut en effet variable d'un groupe à l'autre. Dans le contexte d'une classe, ce dernier favorise clairement la dévolution de la situation et de la question de l'optimalisation. Nous pouvons de plus montrer comment ce matériel peut se révéler un support à la verbalisation d'un raisonnement (cf. raisonnement conduit avec la bête « trimino en L »).

IV – CONCLUSION

Au niveau didactique, les Situations-Recherche requièrent des conditions particulières de gestion en classe. Il s'agit en effet d'organiser une prise de notes pour les plus jeunes en particulier. Ces notes représentent la mémoire du groupe sur l'état de leur recherche et seront utilisées en particulier lors de la communication ultérieure des résultats. Elles ne sont a priori pas destinées à l'enseignant. Insistons enfin sur le point suivant : la finalisation de la recherche des élèves par un séminaire ou par la création d'un poster s'avère fondamentale.

Pour que l'apprentissage des heuristiques soit effectif, une pratique régulière se révèle nécessaire. Se pose alors la question de l'institutionnalisation de ces nouvelles compétences, dans le double objectif de répondre à la demande conjointe des enseignants qui enseignent et des élèves qui apprennent, mais aussi de rendre disponibles et mobilisables ces heuristiques, dans tout type de situations, qu'il s'agisse alors de nouvelles Situations-Recherche ou de situations-problèmes.

En cela, la formation des enseignants vient au cœur de la discussion : l'entrée par les Situations-Recherche est tout à la fois une nouvelle voie pour explorer la démarche de recherche, mathématiquement et didactiquement, mais aussi un moyen de requestionner l'intitulé « résolution de problèmes ».

Cette recherche est en cours. Nous espérons avoir montré dans cet article des perspectives didactiques nouvelles offertes par les Situations-Recherche.

² Je remercie personnellement Gwenola Madec pour la contribution qu'elle a apportée à ce paragraphe.

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G., GERMAIN G. & MANTE M. (1988) Problème ouvert et situation-problème. *IREM de Lyon*.

GRENIER D., PAYAN C. (2002) *Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation en mathématiques discrètes*. Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques. Édité par l'ARDM, Paris.

GODOT K. (2005) Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation – Exemple de la roue aux couleurs, *thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier*, Grenoble.

GOLOMB S.W. (1994), Polyominoes – Puzzles, Patterns, Problems and Packings. *Princeton Science Library*, Princeton, NJ.

Sites : <http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE> www.mathsamodeler.net