SITUATIONS DE FORMATION EN PE1 POUR ABORDER LA MODÉLISATION DE NOTIONS MATHÉMATIQUES

Michel Jaffrot
Formateur à l'IUFM des Pays de la Loire
Catherine Taveau
Formatrice à l'IUFM de Paris

Résumé :

A partir d'une situation proposée en PE1, la modélisation de savoirs mathématiques en formation a été questionnée. Après avoir analysé la situation des poignées de mains, les participants de l'atelier ont échangé autour des différents modèles proposés par les étudiants et, de fait, se sont interrogés sur la notion de modélisation.

Nous avons aussi recherché des situations potentielles de formation qui amèneraient, elles aussi, à une démarche de modélisation de savoirs mathématiques.

NOS OBJECTIFS DE TRAVAIL DANS L'ATELIER

Lors de cet atelier, notre intention a été de questionner la notion de modélisation dans le cadre de la formation en mathématiques des étudiants PE1. Nous nous sommes demandés si nous proposions des situations didactiques qui nécessitaient une modélisation ? Si oui, lesquelles ? Est-ce qu'elles étaient réellement des situations de modélisation ? Puis de quelle modélisation parlions nous ?

Ces questions nous ont donné l'occasion de débattre, entre nous formateurs, sur nos propres représentations de la « modélisation » et par conséquent de notre façon de la faire vivre en formation avec les étudiants PE1.

En d'autres termes, nous avons été amenés à nous interroger sur des questions fondamentales comme « c'est quoi les mathématiques pour moi ?» ou « c'est quoi enseigner les mathématiques ? » ou encore « c'est quoi former à l'enseignement des mathématiques ? ».

Cet atelier a été essentiellement un lieu de réflexion et d'échanges dans lequel quelques pistes de mise en œuvre ont été proposées mais où tout est encore à débattre, et ceci dans le cadre de la plus grande place donnée aux mathématiques dans le concours de recrutement des professeurs des écoles.

Ce compte rendu ne peut pas refléter la richesse des débats mais nous présentons les phases essentielles du travail mené.

MISE EN SITUATION

Pour illustrer notre réflexion, nous avons présenté une situation que nous avons fait vivre déjà plusieurs fois dans nos groupes PE1, la situation des poignées de mains, et que nous pensons être une situation de modélisation. Chaque fois, cette situation est proposée lors de la première séance de l'année avec nos étudiants.

Au sein de l'atelier, nous souhaitons aborder les questions suivantes : en quoi cette situation permet-elle de mobiliser un modèle déjà disponible pour résoudre le problème ou en quoi permet-elle de se placer dans un processus de modélisation ? Que signifie pour nous le terme de modélisation ? Quel est l'intérêt de faire vivre cette situation à des PE1 ? Quelle démarche de formation mettre en œuvre pour aborder ces notions ?

Présentation de la situation de formation

Cette situation intitulée *les poignées de mains* a été initiée par Michel Jaffrot.

Lors de la première séance de formation avec son groupe de PE1, le formateur, sans rien dire de plus, propose à chacun de se lever (le formateur y compris). Les " 35 " PE1 sont répartis en deux groupes bien séparés dans la salle et le formateur propose que dans chaque groupe "*on se dise bonjour*" de telle sorte que chacun échange une poignée de mains avec chacun (suivant les moments, le formateur donne aussi des poignées de mains, il montre ou il ne montre pas).
Ensuite chacun retourne à sa place et le formateur annonce qu'il va poser plusieurs questions qu'il notera au tableau, qu'il y aura d'abord un moment de travail individuel (5 à 10 minutes), puis un travail par petits groupes de quatre PE1 (environ de 30 minutes) qui devra aboutir à l'élaboration d'une affiche permettant de comprendre les réponses et les démarches. Ces affiches seront analysées avec l'ensemble des PE1 après la pause.
Voici les questions :

- *Combien de poignées de mains ont été échangées dans votre groupe ?*
- *Combien de poignées de mains auraient été échangées pour la salle entière (les 35 PE1) ?*
- *Combien de poignées de mains auraient été échangées si nous avions été le double de personnes ?*
- *Combien de poignées de mains auraient été échangées si nous avions été tous les PE1 du site (400 PE1 pour IUFM de Paris) ?*
- *Et peut-on aussi le savoir quelque soit le nombre de personnes dans le groupe ?*

Suite à l'exposition des affiches de chaque groupe, une présentation en est faite par les auteurs et des questions ou demandes d'explications sont exprimées. Le formateur organise le débat, facilite le questionnement, fait formuler les accords ou désaccords ainsi que les validations.

Puis le formateur valide et institutionnalise le savoir mathématique en jeu. Pour la séance suivante, il propose une série d'exercices (Annexe 3), posés dans un contexte différent, faisant appel, pour les résoudre, à cette nouvelle connaissance.

Dans un premier temps, nous avons proposé aux participants de l'atelier de faire une analyse a priori de la situation des poignées de mains en explorant différentes dimensions :

- du côté du vécu des PE1 ;
- du côté des mathématiques en jeu ;
- du côté des productions possibles ;
- et bien sûr, du côté de la modélisation.

Ces analyses ont été retranscrites sur des affiches (Annexe 1) et ont donné lieu à des échanges. Puis dans un second temps, nous avons présenté un choix d'affiches réalisées par nos PE1 (Annexe 2) et y avons apporté quelques éléments du vécu des mises en œuvre de cette situation dans nos groupes.

Voici une synthèse de ces deux moments de travail.

Analyse a priori

Concernant l'analyse a priori, plusieurs questions concernant la situation elle-même, proposée en première séance de formation PE1 ont alimenté le débat :

- Quels sont les objectifs visés, en termes de démarches et de contenus mathématiques, mais aussi pour la formation didactique (l'établissement du contrat avec le formateur) ?

- Quelle gestion des affiches produites par les groupes de PE1, et des nécessaires liens entre les différentes affiches ?

- Comment travailler le réinvestissement et le transfert ?

- La présentation de la situation peut-elle influencer les procédures ?

- Est-ce une situation d'homologie ?

- Peut-on transposer cette situation dans une classe de primaire (partie didactique du concours) ?

- Comment « gérer » les PE1 « faibles » en mathématiques, voire en souffrance ?

Il ressort des échanges, la certitude que cette situation permet d'aborder à la fois des contenus mathématiques et des notions de didactique. D'autre part, c'est une situation où les étudiants ne disposent pas généralement de technique connue et mettent en œuvre seulement des procédures personnelles très variées utilisant des registres de représentation différents.

Analyse des productions de PE1

Concernant la présentation des affiches produites par les PE1, voici quelques questions :

- Quelle exploitation en faire ? Faut-il les organiser en les classant ?

- Quelle est la réponse attendue ? La démarche ? Les résultats ? La formule ou les formules plus ou moins réduites ?

- Qui valide les productions ?

- Comment montrer le lien entre les différentes procédures, sachant qu'elles sont exprimées dans des registres de représentations différentes :

  • registre utilisant la langue naturelle (souvent utilisé par des PE1 ayant des difficultés en mathématiques mais étant à l'aise avec les mots pour « dire des choses »);

  • registre schématique (en diagramme cartésien ou graphe, en arbre) ;

  • registre symbolique (utilisation des expressions mathématiques, des formules…).

Donc comment aider les PE1 à passer d'un registre à l'autre ?

D'autres questions ont porté sur la gestion des affiches comportant des erreurs, sachant que certaines peuvent permettre de réfléchir sur le statut de la démonstration.

Enfin, comment éviter la déperdition des procédures entre la production de chaque individu et l'affiche du groupe ?

Nous rappelons que cette situation est proposée lors de notre première séance avec les PE1, car elle nous semble pouvoir illustrer deux idées :

C'est quoi faire des mathématiques ? Nous pensons que la richesse des procédures utilisées par les PE1 permet de modifier leurs représentations de la discipline et ainsi de se lancer plus confiants dans la formation que nous leur proposerons pour la préparation du concours.

Notre positionnement de formateur à l'IUFM. Nous sommes dans la pré-professionnalisation c'est-à-dire dans une démarche de revisite des savoirs mathématiques pour en donner du sens dans un objectif d'enseignement.

LA PLACE DE LA MODÉLISATION

Face à la situation des *poignées de mains*, nous avons recueilli des résolutions très différentes les unes des autres (Annexe 2) mais les formateurs, que nous sommes, souhaitent institutionnaliser aussi un savoir : un savoir mathématique et/ou un savoir méthodologique.

Finalement cette situation est-elle une situation adaptée à nos objectifs de formation ? Est-ce une occasion pour l'étudiant de remobiliser des connaissances en appliquant un modèle déjà disponible, ou est-ce une occasion de mettre en œuvre une démarche créant un nouveau modèle qui sera ensuite éprouvé et qui s'avérera pertinent ?

Que souhaitons-nous institutionnaliser à travers cette situation ? Une démarche de construction de modèles ou des savoirs mathématiques ?

Différentes démarches

Regardons ce que font les étudiants PE1. Nous avons recensé deux démarches différentes, en excluant les rares d'entre eux qui reconnaissent d'emblée un problème de dénombrement.

La première démarche consiste à dénombrer les poignées de mains. Ce peut être en augmentant un à un le nombre d'individus dans le groupe : 1 poignée de mains pour 2 individus, (1+2) poignées de mains si une 3ème personne entre dans le groupe, (1+2+3) pour une 4ème personne, etc. Cette démarche aboutit, pour *n* personnes, à la réponse suivante : *1 + 2 + 3 + 4 +………+ (n-1).* Ce peut être en ordonnant les individus du groupe de *n* personnes : le 1er échange (*n-1*) poignées de mains, (*n-2*) pour le 2ème, etc jusqu'à 1 pour l'avant-dernier et 0 pour le dernier. Cette démarche aboutit à la réponse suivante : *(n-1) + (n-2) + … + 3 + 2 + 1.*

La deuxième démarche consiste à dénombrer les gestes effectués par chaque individu du groupe de *n* personnes. Chaque individu va tendre le bras à *(n-1)* autres personnes, soit pour *n* personnes, on obtient *n x (n-1)* bras tendus. Comme une poignée de mains correspond à deux bras tendus, le résultat s'obtient en prenant la moitié du résultat précédent $\frac{n(n-1)}{2}$.

Nous avons ici la mise en œuvre de la construction de deux modèles différents.

Par la combinatoire, il s'agit de trouver le nombre de combinaisons possibles de *deux* mains (une poignée) parmi *n* mains : $C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

On peut donc penser que chaque méthode de résolution est en elle-même l'aboutissement d'une modélisation de la situation ou l'application d'un modèle pour les étudiants « matheux ». En ce sens nous avons, par les procédures développées par les PE1 (Annexe 2), une illustration des propos tenus par Guy Brousseau dans la brochure de l'ADIREM concernant le thème de la modélisation[1].

---

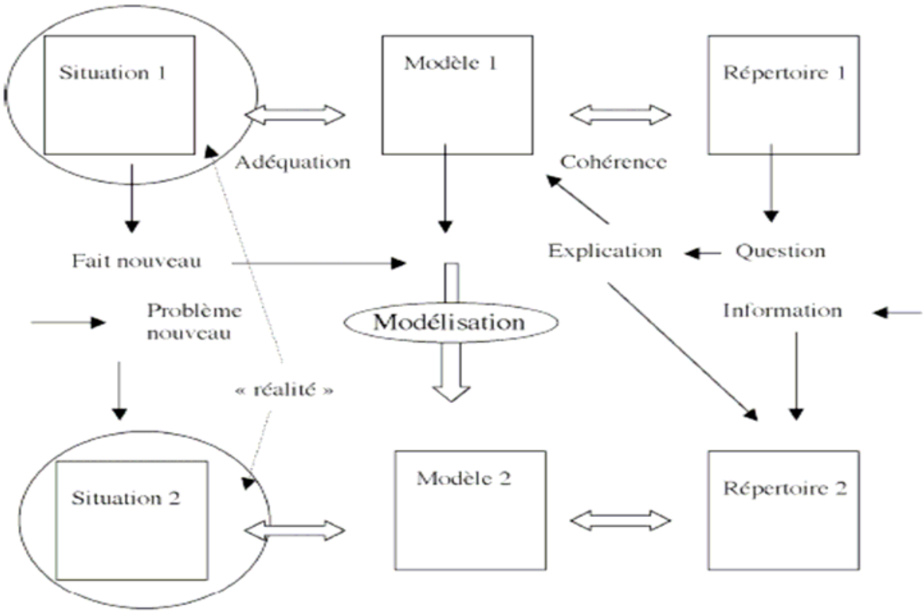
[1] Guy Brousseau, (2003), *Quel type de savoirs mathématiques utilise-t-on dans la modélisation ?* dans la brochure éditée par le Comité Scientifique des IREM *La modélisation*, p.19.

Dynamique des modèles, modélisation (Guy Brousseau)

En élargissant l'étude des modèles aux situations en justifient l'usage, nous facilitons l'étude des processus qui en amènent l'apparition ou l'évolution.

Un modèle est avancé par un actant pour répondre à une question ou à un problème, à l'aide de son répertoire de connaissances. Conformément à notre approche, la question et la réponse sont conditionnées par ce répertoire. Le meilleur modèle dans un répertoire peut ne pas l'être dans un autre ou même s'y avérer faux. Le fait pour un modèle d'être incorrect dans un répertoire et une situation donnée n'est pas contradictoire avec le fait qu'il soit « correct » dans une situation très voisine avec un répertoire différent.

Nous avons ainsi le schéma de la modélisation suivant :



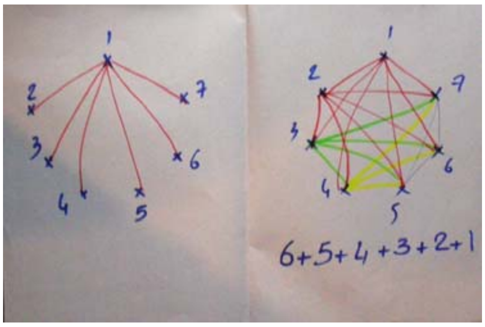
La résolution d'une situation S1 a appelé la construction d'un modèle M1 grâce à un répertoire R1. M1 est cohérent avec R1 et adéquat à S1. Survient alors une perturbation qui remet en cause le système S1, M1, R1 : l'agrégation d'un fait nouveau à S1 (passage de S1 à S'), l'adjonction d'une connaissance ou d'une question nouvelle (passage d'un répertoire R1 à un répertoire R'). Alors se repose l'examen de l'adéquation et de la consistance de M1. La confrontation aboutit parfois à la création d'un nouveau modèle M2 et parfois aussi à la création de R2, et parfois à une extension ou une réduction de S1 à S2. Nous appelons création aussi bien la modification que le remplacement.

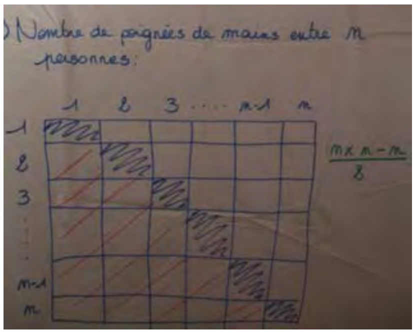
Ainsi la modélisation, en tant que fait " historique " est, pour un actant, le passage de la conception ou de l'usage d'un système S1, M1, R1 à un système S2, M2, R2, d'un candidat-modèle ou d'un modèle à un modèle différent.

Ainsi pour une situation S_1, l'étudiant va élaborer une représentation R_1 qui sera considérée comme un « petit » modèle. Pour cette même situation, un autre étudiant élaborera une représentation R_2 qui sera aussi considérée comme un « petit » modèle, différent du précédent. Mais chacun de ces « petits » modèles se réfère à un modèle générique $\mathfrak{M}$.

Modélisation dans la situation des poignées de mains

Concernant la situation des *poignées de mains* si nous prenons la représentation sous la forme du tableau cartésien, la modélisation de la situation n'est pas du tout semblable à celle utilisant, par exemple, un graphe.





Le savoir mathématique construit n'est, de fait, pas de même nature dans chacune de ces modélisations même si cette situation se réfère à un modèle mathématique générateur.

Comme les affiches l'attestent, la spécificité de cette situation est qu'elle va générer globalement deux types de modélisations : celle qui amène à la solution de $\frac{n(n-1)}{2}$ en lien avec les productions n°1, 2, 4, 6, 7, 8 et 9 (Annexe 2), et celle qui amène à la solution *1 + 2 + 3 + 4 +………+ (n-1)* en lien avec les productions n°3, 5 et 10 (Annexe 2). Le lien d'une modélisation à l'autre n'est qu'une affaire d'astuce de calculs.

Institutionnalisation et transfert

Notre souci est donc de déterminer ce que nous souhaitons institutionnaliser : un savoir ou des savoirs mathématiques, une démarche d'investigation, différentes représentations ? Le débat au sein de l'atelier a montré que nous n'avions pas de réponse unique et collective à ces réponses.

D'autre part, l'analyse décrite ci-dessus, nous permet de comprendre pourquoi, contrairement à ce que nous pourrions penser, les PE1 n'effectuent pas de transfert immédiat pour résoudre les problèmes posés en Annexe 3.

Même s'ils ont pour objectif de réinvestir les savoirs institutionnalisés dans la situation des *poignées de mains,* et même s'ils se résolvent finalement tous par le calcul d'une formule proche de celle élaborée $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$, ces problèmes ne sont pas tous congruents et ne se réfèrent pas au même modèle mathématique.

Ainsi certains étudiants repèreront le même modèle pour ce qui est du *nombre de diagonales dans un polygone* ou *le nombre de droites passant par deux points*, comme étant le nombre de combinaisons possibles de deux points parmi *n* points, s'ils ont utilisé ce modèle pour résoudre la situation des *poignées de mains*. En revanche, le nombre de marches de l'escalier sera pour eux un nouveau problème, dont la conjecture amènera la résolution par la somme des *n* premiers nombres entiers.

De même, les étudiants ayant abouti à la solution arithmétique (*1 + 2 + 3 +……+ n*) n'appliqueront pas la formule pour résoudre les problèmes de l'Annexe 3.

Il est intéressant de constater que le recours à la connaissance mathématique construite dans la situation des *poignées de mains* est souvent proposée dans les sujets de mathématiques du CERPE alors qu'elle ne fait pas partie des savoirs enseignés au collège. Les auteurs pensent l'éprouver à partir d'une démarche de conjecture et la connaissance arithmétique de l'égalité suivante :

1 + 2 + 3 + 4 +………+ (n-1)= $\frac{n(n-1)}{2}$ qui ne favorisera que les « matheux ».

D'AUTRES SITUATIONS…

Après l'étude de la situation des *poignées de mains,* le groupe a essayé de chercher d'autres situations de formation qui favoriseraient des conditions de modélisation mathématique.

Voici une liste non exhaustive proposée par les participants, soit de savoirs à construire, soit de situations existantes qui peuvent permettre à chacun d'entre nous d'aller explorer la pertinence du terme « modélisation » et de vérifier la transférabilité des savoirs construits dans d'autres problèmes posés.

- *Si les shadoks m'étaient comptés…*Mathilde Lahaye-Hitier, plot n°11, ed APMEP, 2005

- *Le pays de quatre,* O. Bassis, in Concepts clés et situations problèmes, Hachette éducation, 2003

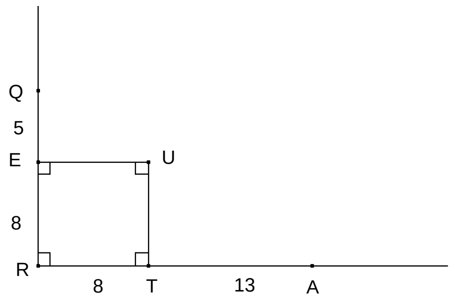
Deux situations autour de la numération de position

- *Concertum, la division en formation initiale*, H.Péault, in *Concertum, dix ans de formation des professeurs d'école en mathématiques,* Tome 2, Ed Arpeme,

- *La course à 20,* G. Brousseau in La théorie des situations didactiques, La pensée sauvage, Grenoble, 1998 ;

- Problème de l'alignement des points issus d'un sujet du CERPE de Bordeaux 94 ;

Les points Q, U et A sont-ils alignés ?



- Recherche du nombre de diviseurs d'un nombre ;

- Mise en équations et système d'équations avec sa résolution ;

- Finir les cercles à partir seulement d'arcs de cercle.

CONCLUSION

En guise de conclusion, nous voulions apporter notre témoignage sur l'impact du vécu de cette première séance avec nos PE1.

Nous pensons que la situation des *poignées de mains* reste, pour un très grand nombre des étudiants, une situation de référence de formation. Mais pour quelles raisons ? Pour la démarche de formation proposée ? Pour la surprise occasionnée chez ces étudiants ayant une autre représentation de l'enseignement des mathématiques ? Pour les savoirs abordés dans cette situation ? Pour le premier contact avec leur formateur de mathématiques (poids important dans l'admissibilité au CERPE) ?

En tout cas cette situation les marque tellement, qu'ils nous demandent les années suivantes si nous avons fait les *poignées de mains* avec nos PE1 de l'année.

Annexe 1 : les 4 affiches produites par les groupes

affiche 1

I – **Situation**
- énoncé simple, facilement compréhensible ;
- mise en situation réelle : expérimentation facile ;
- validation possible sur des petits nombres.

II – **Variables didactiques**
- taille des groupes ;
- expérimentation avant résolution ? oui /non
- outils à disposition : calculatrice – tableur.

III – **Techniques**
- dénombrement par expérience ;
- essais de formules de combinatoire (pour les matheux) ;
- utilisation de tableaux (genre Pythagore) ;
- représentations dessinées.

IV – **Objectifs**
- faire vivre une situation de recherche sans procédure experte .

V – **Modélisation**
- situation modélisable ;
- différence entre modélisation et représentation.

***affiche 2* – analyse a priori**

I – L**e savoir savant** :
- dénombrement (suite, combinaison, formule directe) ;
- représentation de données.

II **– Procédures**
- de la plus personnelle aux expertes (graphiques, dessins, manipulations…)

III – **Objectifs visés**
- créer une dynamique de groupe (1ère séance) ;
- présenter la modalité de formation par homologie (ici, la résolution de problème) ;
- mettre en évidence que les notions mathématiques sont des outils de résolution de problèmes concrets ;
- acquérir des compétences mathématiques et professionnelles.

affiche 3 – intentions du formateur

I – présenter l'année de préparation tout en bousculant leurs représentations sur l'enseignement des mathématiques.

II – **Objectifs**
- mettre en place le contrat didactique ;
- présenter une « nouvelle » notion mathématique.

III – **Analyse a priori**
- différentes procédures possibles (mimer, dessiner, calculer…) ;
- difficultés prévisibles (recherche individuelle difficile, travail de groupe, difficultés à modéliser…).

IV – P**erspectives**
- retour et analyse sur la situation vécue ;
- transposition dans une classe ;
- présentation du concours (volet didactique et volet mathématique).

affiche 4 – ce qu'on peut en « tirer » (PE1 / PE2 / FC) → institutionnalisation

I – M**athématiques** (en PE1)
- intérêt de l'inconnue ;
- modèle mathématique ;
- contre-exemple pour invalider une formule.

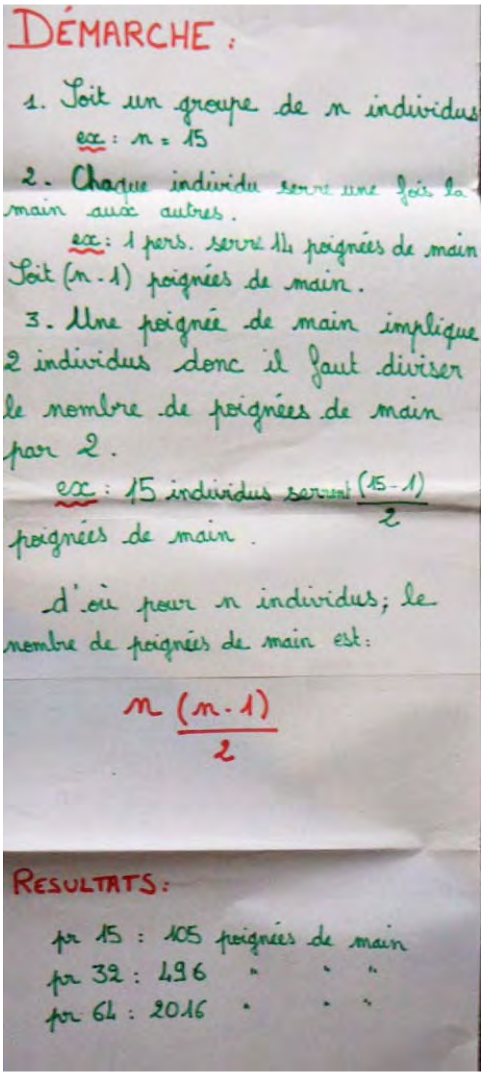
II – **Didactique**

- « casser » les conceptions initiales sur les mathématiques :

→ place de la résolution de problèmes dans les programmes ;
- diversité des procédures (menant à la réussite ou non) (en PE2 ou FC) :
  → classer les procédures selon différents niveaux de procédures ;
  → hiérarchisation par rapport à la mise en œuvre ;
- rôle des schémas (en PE2 ou FC) ;
- situation de référence pour les problèmes de dénombrement ;
- changement de cadre (en PE2 ou FC)
  → physique / arithmétique
- intérêt du travail individuel suivi d'un travail de groupes (en PE2 ou FC) ;
- situation de réinvestissement (en PE1)
  → nombre de matchs disputés entre n équipes (formule championnat) ;
  → nombre de cordes à partir du nombre de points sur un cercle ;
  → nombre de diagonales d'un polygone à n côtés ;

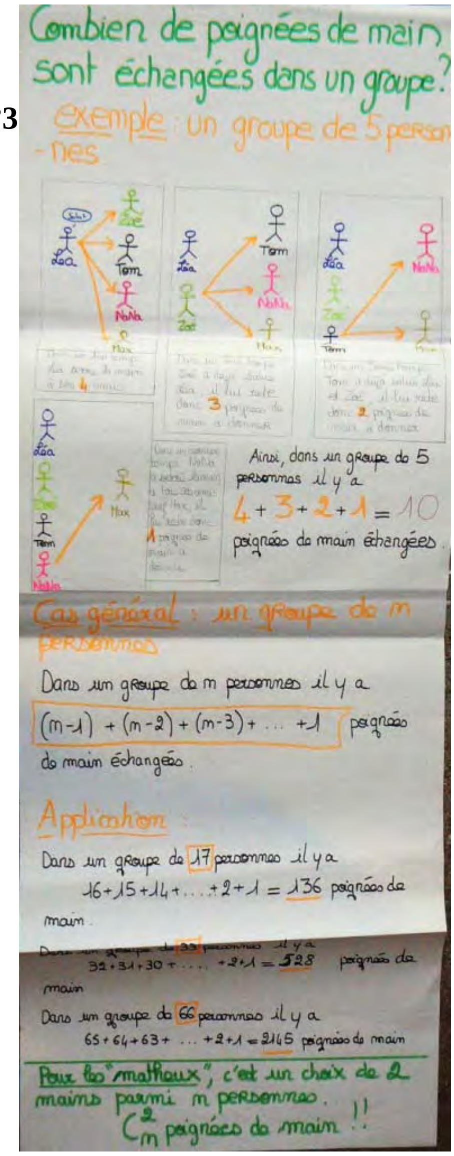
Annexe 2
Choix de quelques affiches produites par des PE1

N°1

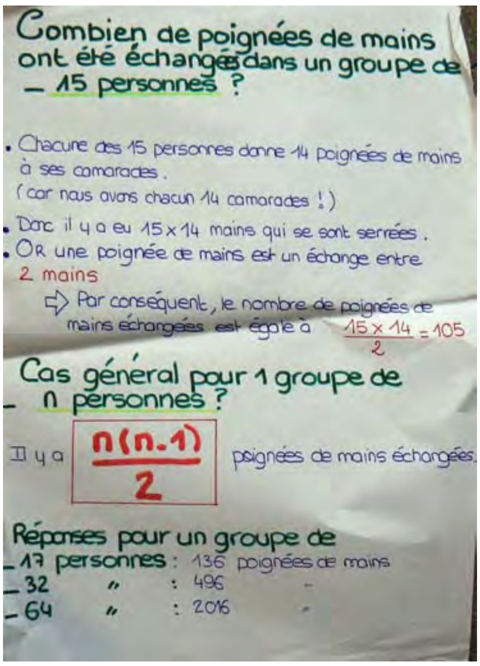


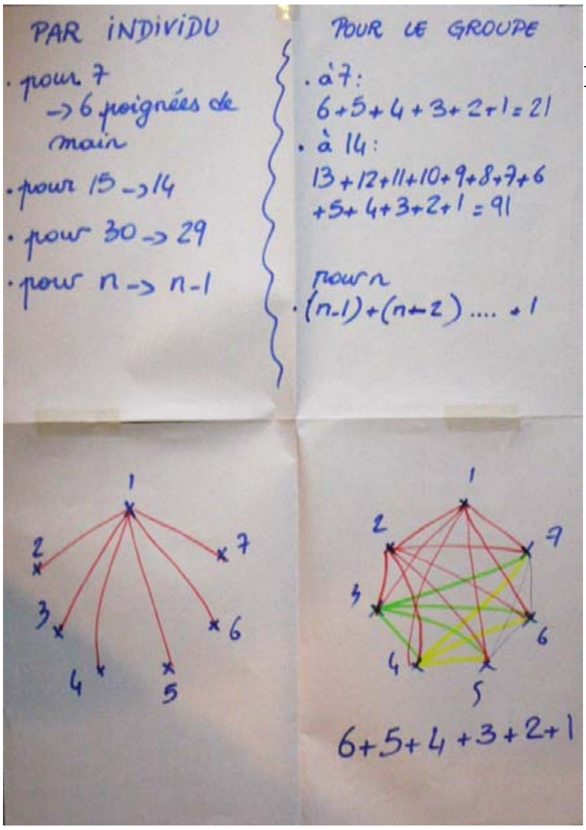
N°2

N°3

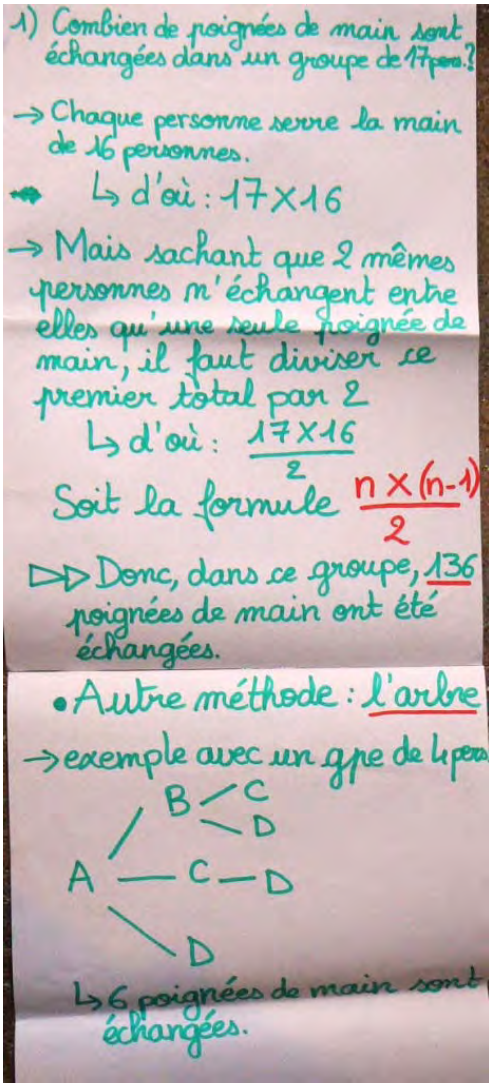


N°4

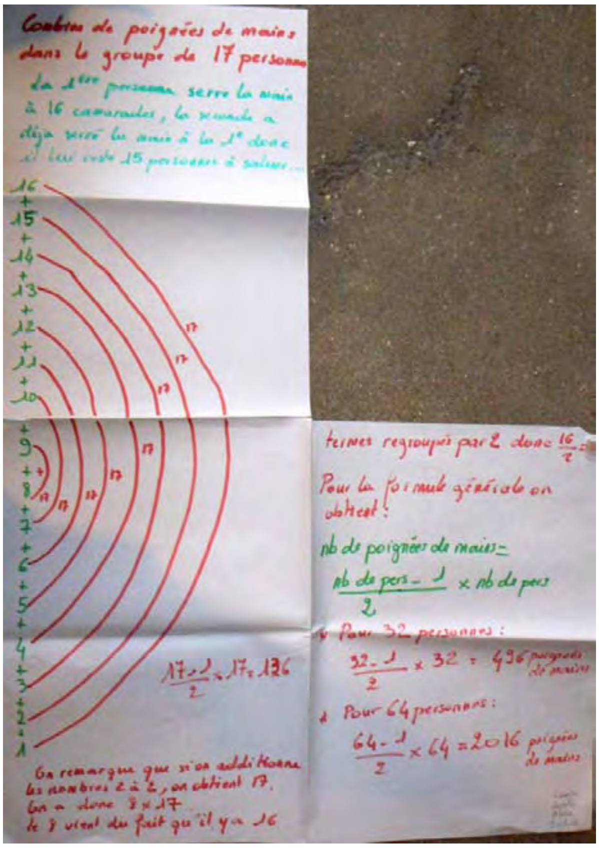



PAR INDIVIDU
. pour 7
-> 6 poignées de main
. pour 15 -> 14
. pour 30 -> 29
. pour n -> n-1
POUR LE GROUPE
. à 7 :
6+5+4+3+2+1 = 21
. à 14 :
13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 91
pour n
. (n-1)+(n-2) .... +1
6+5+4+3+2+1

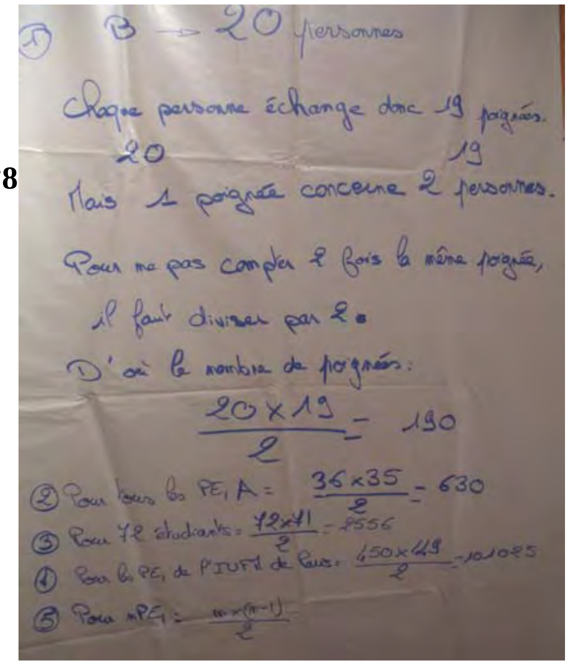
N°5


1) Combien de poignées de main sont échangées dans un groupe de 17 pers. ?
-> Chaque personne serre la main de 16 personnes.
↳ d'où : 17×16
-> Mais sachant que 2 mêmes personnes n'échangent entre elles qu'une seule poignée de main, il faut diviser ce premier total par 2
↳ d'où : 17×16 / 2
Soit la formule n×(n-1) / 2
Donc, dans ce groupe, 136 poignées de main ont été échangées.
• Autre méthode : l'arbre
-> exemple avec un gpe de 4 pers
↳ 6 poignées de main sont échangées.

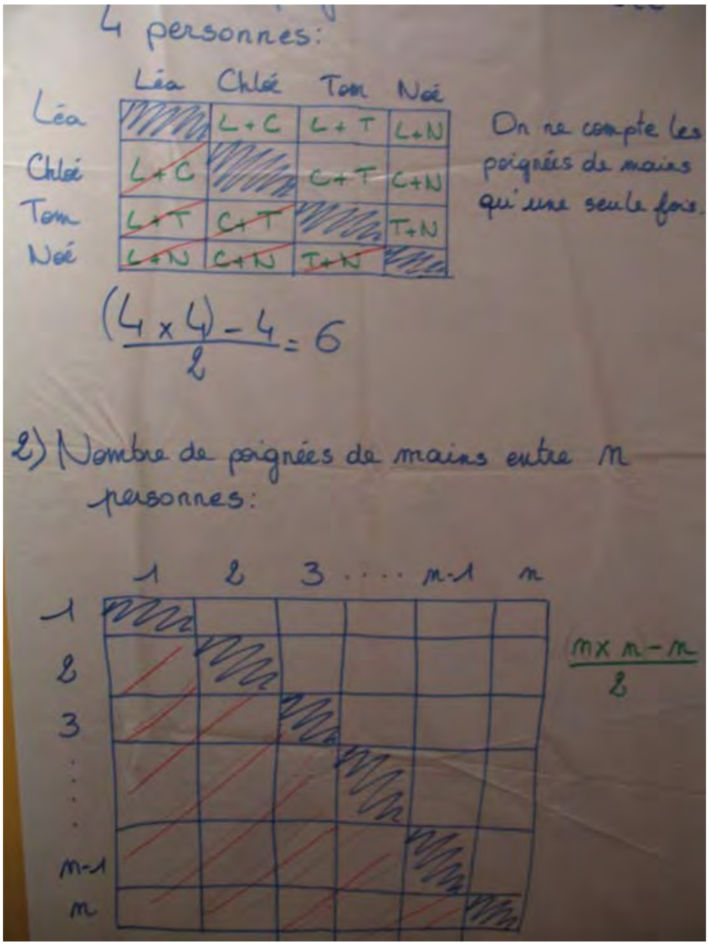
N°6


Combien de poignées de mains dans le groupe de 17 personnes
La 1ère personne serre la main à 16 camarades, la seconde a déjà serré la main à la 1re donc il lui reste 15 personnes à saluer...
17-1 / 2 × 17 = 136
termes regroupés par 2 donc 16/2
Pour la formule générale on obtient :
nb de poignées de mains = nb de pers - 1 / 2 × nb de pers
Pour 32 personnes : 32-1 / 2 × 32 = 496 poignées de mains
Pour 64 personnes : 64-1 / 2 × 64 = 2016 poignées de mains

N°7

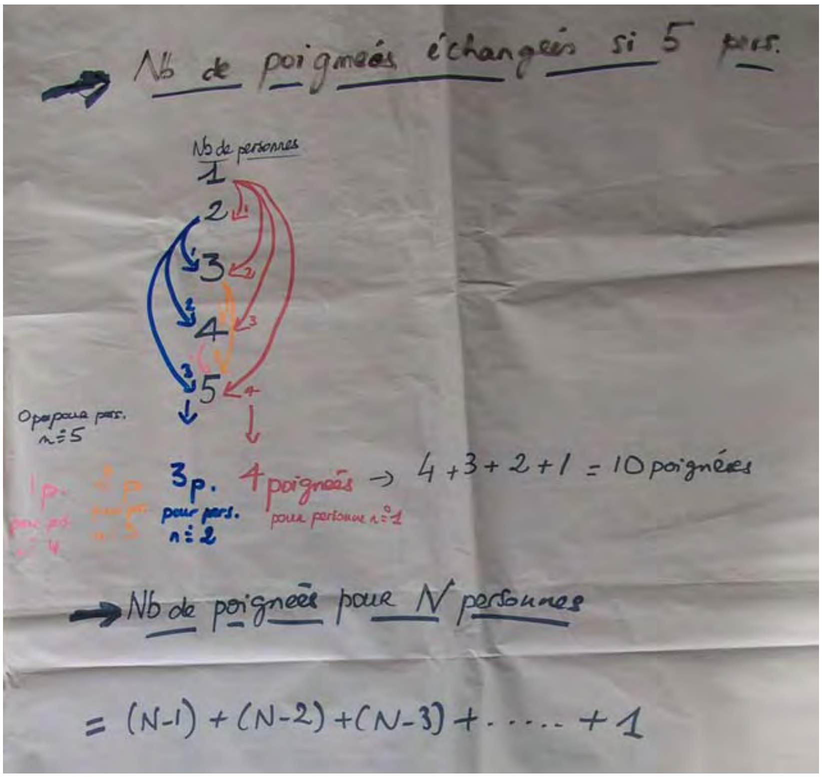

1 B -> 20 personnes
Chaque personne échange donc 19 poignées.
Mais 1 poignée concerne 2 personnes.
Pour ne pas compter 2 fois la même poignée, il faut diviser par 2.
D'où le nombre de poignées :
20×19 / 2 = 190
2 Pour tous les PE, A = 36×35 / 2 = 630
3 Pour 72 étudiants = 72×71 / 2 = 2556
5 Pour nPE = n×(n-1) / 2

N°8


4 personnes:
Léa Chloé Tom Noé
L+C L+T L+N
L+C C+T C+N
L+T C+T T+N
L+N C+N T+N
On ne compte les poignées de mains qu'une seule fois.
(4 x 4) - 4 / 2 = 6
2) Nombre de poignées de mains entre n personnes:
1 2 3 .... n-1 n
n x n - n / 2

N°9

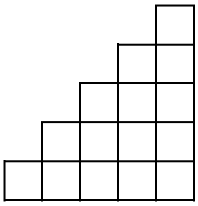
N°10


Nb de poignées échangées si 5 pers.
Nb de personnes
1
2
3
4
5
3p. pour pers. n°2
4 poignées pour personne n°1
→ 4 + 3 + 2 + 1 = 10 poignées
Nb de poignées pour N personnes
= (N-1) + (N-2) + (N-3) + ... + 1

Annexe 3
Exercices donnés aux PE1 à la suite de la situation des *poignées de mains*.
Réinvestissement ou situations nouvelles?

1) L'escalier

Cet escalier est formé de cubes et il a 5 marches.
Combien de cubes faudra-t-il pour construire un escalier de 10 marches ? Un escalier de 27 marches ? Un escalier de ***p*** marches ?



2) Les diagonales

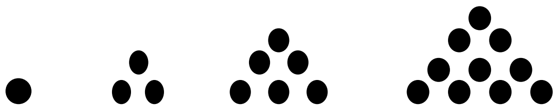
Quel est le nombre de diagonales d'un hexagone ? d'un décagone ? d'un polygone à ***n*** côtés ?

3)Points et lignes

Quel est le nombre de segments qui relient **N** points, sachant que 3 de ces points ne sont jamais alignés ?

4)Les nombres triangulaires

Un nombre est appelé « triangulaire » s'il peut représenter une quantité disposée sous la forme d'un triangle équilatéral. Par exemple :



1 **3** **6** **10** sont les premiers nombres triangulaires.
Donnez les six nombres triangulaires qui suivent le nombre triangulaire **10**. Quel est le 55ème nombre triangulaire ?

5) Le renard et les raisins

Un renard aimait manger les grains de raisins. Le premier jour il en mange 6, puis le 2ème jour il en mange 6 de plus que ce qu'il avait mangé le premier jour.
Ainsi de suite, tous les jours il mangeait 6 grains de plus que chaque jour précédent. Combien de jours lui faudra-t-il pour avoir mangé au total 1800 grains ?

Annexe 4

Modèle

selon le dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences
Dominique Lecourt, PUF, 1999

Le terme « modèle » présente une grande variété d'usages dans les sciences, de la logique aux sciences de la nature et sciences de l'homme. De plus, à travers la diversité des usages et des domaines, le sens oscille entre concret et abstrait, figuration et formalisme, image et équation, échantillon et étalon, réalisation matérielle et norme abstraite. Paradoxalement, cette équivocité essentielle est le trait permanent à travers tout le large spectre des différents usages.

1) Le sens originaire est celui de « maquette », le latin *modulus* étant un terme d'architecture désignant la mesure arbitraire servant à établir des rapports de proportion entre les parties d'un ouvrage. Par généralisation, « maquette » s'applique à toute matérialisation, en dimensions réduites ou grandeur nature, d'un dispositif architectural (édifice), mécanique (navire, avion) ou d'une autre nature (appareils électriques ou autres) dont ne sont reproduites, schématiquement, que les formes et propriétés reconnues essentielles au détriment des détails tenus pour accessoires. Une maquette est plus commodément soumise aux calculs, mesures et tests qui permettent d'améliorer la construction effective de l'objet ou du prototype correspondant. On trouve là, déjà, des caractéristiques générales des modèles, qui sont donc des réalisations ou des figurations utiles à l'avancement des connaissances et des technologies. Tout matériel qu'il puisse être, un modèle n'est pas un objet réel, mais un objet artificiel, qui appartient au registre de (invention. C'est un intermédiaire entre une situation qui nous paraît énigmatique et les questions que nous posons pour tâcher de réduire (énigme et comprendre la situation. Les modèles assument donc une fonction heuristique dans le processus de connaissance théorique ou technique. Dans cette fonction, René Thom observe que le modèle a un champ d'application qui dépasse largement la science et englobe des pratiques d'ajustement de nos moyens à nos buts et à nos désirs.

2) Un usage assez proche du précédent est celui qui a cours dans les amphithéâtres de physique et de biologie, où des processus naturels sont imités dans des conditions qui facilitent l'observation et l'étude. Ainsi les planétariums reproduisent la cinématique du système solaire en négligeant partiellement les proportions géométriques et en changeant sa dynamique : pour des raisons pratiques, on exagère les dimensions du soleil et des autres planètes par rapport à leurs distances et on remplace la gravitation comme moteur du système par un mécanisme artificiel comparable à celui d'une horloge. Autres exemples : la machine d'Atwood imitant la chute libre des graves sur une échelle de temps ralentie grâce à une forte réduction de la constante de gravitation ou un modèle de la circulation du sang où la force motrice du coeur est remplacée par une pompe.

3) La prédominance des modèles issus de la mécanique a pu inciter à associer à tout modèle une construction dans (espace respectant la loi d'inertie, les lois du choc, les principes de conservation, etc. Mais l'expérience physique peut être structurée selon d'autres lois que mécaniques. « Modèle » reçoit alors un tout autre sens, celui de schéma théorique, non matérialisé en général, qui n'est pas censé reproduire fidèlement un phénomène. Mais au contraire le simplifie suffisamment pour pouvoir l'analyser, l'expliquer (partiellement au moins) et en prédire (dans certaines marges) la répétition. Le modèle est un simple instrument d'intelligibilité sans prétention ontologique : il est aussitôt remplacé si l'on trouve un modèle meilleur. Ainsi les modèles d'un éther élastique, milieu de propagation des vibrations optiques, qui ont été rendus caduques par la théorie électromagnétique de la lumière, le modèle de Bohr pour expliquer le comportement de l'atome, qui ne marche bien que pour l'atome d'hydrogène, etc. Plus généralement, toute expérience de pensée constitue un modèle en ce sens. Et même toute théorie constituée peut servir de modèle à la constitution d'une théorie nouvelle.

4) C'est en ce sens qu'il a été fait systématiquement usage de la notion de modèle au XIXè s., du moins en physique. Comme le note S. Bachelard cet usage conscient n'est pas contingent. La mécanique, bien établie, a servi de réservoir de modèles, mécaniques ou théoriques, aux nouvelles sciences : électrostatique, électrodynamique, thermodynamique, électromagnétisme, etc. A côté de sa fonction heuristique, le modèle assume une fonction de garantie, de justification et de norme d'intelligibilité des faits et idées nouveaux. En même temps apparaît très clairement ce qui est au fondement de l'activité de modélisation : l'analogie. Par « analogie physique, écrit Maxwell, j'entends cette ressemblance partielle entre les lois d'une science et les lois d'une autre science qui fait que l'une des deux peut servir à illustrer l'autre ». Qu'une théorie puisse en illustrer une autre, en vertu d'identités formelles (les mêmes formes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles) suggère une notion de modèle assez large pour englober physique et mathématiques à la fois. D'ailleurs, la reconnaissance systématique de la polysémie d'une théorie advient d'abord en mathématiques, comme conséquence du développement de l'axiomatique, et elle n'a lieu ensuite en physique que grâce, précisément, à l'utilisation des concepts algébriques de groupe et d'invariance par tel ou tel groupe.

5) En mathématiques modèle s'emploie en deux sens nettement distincts et cependant corrélés, comme nous pouvons le pressentir déjà avec le texte de Maxwell et comme nous allons le montrer précisément. Le premier sens est caractérisé aujourd'hui de « logique

», bien qu'il soit apparu de façon informelle en mathématiques, et d'abord en géométrie. On a construit en effet, à la fin du XIXè° s., des modèles euclidiens des géométries non euclidiennes (Beltrami en 1868, Klein en 1871-1873 et Poincaré en 1891), c'est-à-dire des espaces euclidiens vérifiant les axiomes des géométries lobatchevskienne et riemannienne respectivement. Ces modèles ont assumé la double fonction justificative et heuristique : ils ont servi à fournir un contenu intuitif aux nouvelles géométries et une preuve (relative) de leur cohérence tout en permettant des applications mathématiques nouvelles. Poincaré (1854-1912) notamment atteste de la fécondité de la géométrie de Lobatchevski pour l'intégration des équations linéaires. Ainsi, un modèle est une représentation concrète dans une théorie familière d'énoncés et de relations, qui sont d'abord perçus comme purement formels. Plus généralement, un modèle d'un ou plusieurs énoncés est un ensemble d'éléments quelconques vérifiant ou, comme on dit encore, satisfaisant ces énoncés et illustrant de ce fait la structure déterminée par eux. C'est l'attribution d'un sens déterminé à des entités a priori sans signification tel que les énoncés formels soient vérifiés. Si l'on rappelle qu' « attribuer un sens » c'est « interpréter », on voit qu'un modèle est une interprétation de ces énoncés dans laquelle ceux-ci sont vrais. La question du contenu mathématiquement viable et non vide d'un formalisme (entité, équation théorie) cesse de se poser dès qu'on a un modèle de celui-ci. On a cessé de discuter du bien-fondé des nombres imaginaires et de se demander s'ils étaient bien des nombres au même titre que les nombres entiers ou les nombres réels une fois trouvée pour ces entités (au début du XIXè s.) une représentation par un couple de points du plan euclidien.

David Hilbert (1862-1943) généralisa l'usage de cette notion sémantique de modèle. En 1899, il systématise dans les, fondements de la géométrie la technique de constructions de modèles pour prouver la compatibilité ou l'indépendance mutuelle de certains axiomes. Ce faisant, il opère un décrochement important dans la compréhension de la notion de modèle. En effet, les modèles qu'il fabrique sont non pas des visualisations dans l'espace euclidien de théories plus abstraites ou moins familières mais des modes formels; construits à partir de résultats algébriques ou arithmétiques ou assez abstraits. La structure de géométrie non archimédienne, par exemple, est réalisée (vérifiée) dans un modèle inimaginable sans tout un savoir sur les formes algébriques et sur les sommes de carrés.

L'algèbre et l'arithmétique permettent ici de valider une construction géométrique alors que traditionnellement c'était plutôt l'inverse, la géométrie euclidienne: ayant toujours servi de cadre de représentation intuitive. Il en résulte. L'idée moderne qu'une géométrie est un modèle d'un certain langage formel, plutôt que la formalisation de propriétés idéalisées à partir de l'observation de l'espace sensible. C'était bien, du reste, l'idée mise en œuvre par Félix Klein (1849-1925), dès 1872, dans la formulation du problème qui commande « le programme d'Erlangen » et aboutit à la classification des différentes géométries en fonction des groupes de transformations : « Étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations, quelles sont « les figures » (en un sens analogique) de la multiplicité, qui demeurent invariantes par les transformations du groupe ? » Une géométrie est donc un ensemble de sous-ensembles d'éléments (de « figures ») demeurant invariants par certaines transformations.

C'est là la racine de la définition logique du terme modèle fournie par la théorie des modèles, qui est l'étude systématique des relations réciproques entre ensembles E d'énoncés et ensembles M de modèles de ces énoncés. On appelle langage formel L du calcul des prédicats du premier ordre la donnée de trois collections disjointes de symboles : symboles de relations, de fonctions et de constantes. Une réalisation R de L est constituée par la donnée d'un ensemble non vide d'individus et d'une fonction d'interprétation qui associe un sens déterminé respectivement aux symboles de constantes, de relations et de fonctions. Un modèle M d'un énoncé E de L est une réalisation R (on dit aussi une interprétation) où E est vrai. Une théorie mathématique spécifique (la théorie des groupes, la théorie des corps, la théorie des espaces vectoriels, etc.) est un langage formel interprété, et elle a généralement plusieurs modèles non forcément isomorphes, ainsi qu'on s'y est maintenant tout à fait habitué par familiarité avec les méthodes de l'analyse classique d'un côté, de l'analyse non standard de l'autre.

Le concept de modèle mathématique est souvent aussi utilisé en un deuxième sens, qui est le plus courant aujourd'hui et à donner lieu aux termes modernes de « modéliser » et de « modélisation ». Il désigne alors le processus inverse de celui que nous venons de décrire. Au lieu associer un sens déterminé et une illustration concrète à symboles et énoncés formels, il consiste à associer à un phénomène empirique un schéma symbolique, figurant de manière partielle et simplifiée les propriétés reconnues principales du phénomène et facilitant aussi bien l'expérimentation que la construction d'une théorie le concernant. A son tour,la théorie construite à partir du modèle peut être appréciée comme un «modèle théorique » , ainsi que le souligne M. Bunge. Modéliser c'est donc trouver les expressions mathématiques les équations qui « simulent », c'est-à-dire représentent schématiquement et analogiquement un processus physique, biologique, psychologique, économique, social, etc. Un grand nombre d'observations peuvent être synthétisées par un nombre relativement petit de paramètres : un modèle est forcément réducteur. La modélisation est, depuis toujours, au coeur de la physique mathématique : une série de Fourier avec un nombre fini de termes non nuls, par exemple, est une modélisation des fonctions périodiques, qui sont des modélisations des phénomènes de vibration, de diffusion, etc. Elle s'est étendue aux autres sciences après la Seconde Guerre mondiale, avec le développement de la recherche opérationnelle et de la théorie des jeux, appliquées pour représenter et faciliter l'organisation d'opérations militaires, d'échanges économiques, d'activités administratives, de flux de circulation dans une ville, etc. Les modèles sont des instruments, imparfaits et réducteurs, mais efficaces d'analyse de la réalité.

Dans certains cas, ils suppléent l'observation impossible : le retour au big-bang, par exemple, ne peut emprunter la voie expérimentale, mais seulement celle de la modélisation.

La modélisation, dont certains pensent qu'elle constitue une véritable révolution scientifique, a été rendue possible par le rapprochement physique et la collaboration des mathématiciens avec les physiciens, les ingénieurs, les biologistes, les psychologues, les sociologues, etc. La modélisation au confluent de plusieurs sciences et nécessite une approche pluridisciplinaire des problèmes. Aujourd'hui elle complétée par la simulation numérique et l'utilisation systématique d'images de synthèse. L'explosion informatique ainsi que les nouveaux paradigmes scientifiques apportés par la théorie des systèmes, la théorie des catastrophes, la théorie des fractals, la théorie du chaos, etc., ont favorisé la prolifération des modèles pour l'analyse de systèmes d'organisation complexe, physiques (systèmes dynamiques) ou humains (mécanismes de développement économique et culturel).

Il est certain que la pluralité des modèles - la polysémie- d'une théorie est une chose et la pluralité des énoncés non équivalents pour modéliser un processus empirique une autre. Il n'empêche que les deux sens du concept de modèle ne sont que les deux faces complémentaires d'une même activité : interpréter. C'est pourquoi les glissements qui sont fréquents mais rarement et pour ainsi dire jamais explicitement assumés, d'un sens à l'autre sont parfaitement légitimes. D'autant plus qu'il est fréquent que des modèles sémantiques d'un formalisme soient des modèles théoriques d'un processus empirique. Interpréter est inéluctable, qu'il s'agisse d'interpréter un formalisme, ou inversement d'interpréter mathématiquement un ensemble de données. D'une part, parce qu'un langage qui n'aurait pas de modèle n'a aucun intérêt, d'autre part et réciproquement, parce que l'expression n'est pas le miroir de l'expérience : « Nous ne pouvons prononcer une seule phrase qui traduise un pur fait d'expérience... toute traduction de l'expérience par des mots nous oblige à aller au-delà de l'expérience», comme le soulignait judicieusement Boltzmann. Aussi existe-t-il plusieurs manières défendables de concevoir ou d'expliquer le monde, plusieurs modèles du monde. On parle alors de « sous-détermination empirique » des théories, phénomène réciproque de leur polysémie. L'une et l'autre caractéristique impliquent une philosophie non réaliste de la science. Comme y insiste B. van Fraassen, notre discours, en particulier lorsqu'il traite de causalité et de nécessité, porte sur nos modèles du monde, plutôt que directement sur le monde.

En résumé, sous quelque aspect qu'on le prenne, un modèle fait toujours fonction de médiateur entre un champ théorique dont il est une interprétation et un champ empirique dont il est une formalisation. Sa double face abstraite-concrète le rend apte à remplir le double rôle d'illustration et de support de preuve d'une part, de paradigme et de support d'analogies d'autre part. Un modèle est à la fois la concrétisation opérationnelle d'analogies constatées ou supposées entre des domaines distincts et le terreau expérimental sur lequel peuvent naître de nouvelles analogies. L'efficacité cognitive, heuristique, prédictive et décisionnelle, ou comme on dit d'un terme générique la « pertinence » d'un modèle, ne peut être évaluée indépendamment des objectifs qui lui sont assignés, des stratégies de recherche, de décision et de planification dont il est l'instrument et qui dépendent elles-mêmes des lignes de force du champ socio-politique où elles sont définies.

- BACHELARD S. « Quelques aspects historiques des notions de modèle et de justification des modèles », Élaboration et justification des modèles, éd. P. Delattre & M. Thellier, Paris, Maloine, 1979, p. 3-19.

- BRISSAUD M., FORSÉ M. & ZIGHED A. éd., La Modélisation, confluent des sciences, Paris, Éd. du CNRS, 1990.

- BUNGE M., « Les Concepts de modèle», L'âge de la science, n' 3, juil.-sept. 1968, p. 165-180.

- DELATTRE P. & THELLIER M. éd., «Modélisation et scientificité », Élaboration et justification des modèles, Paris, Maloine, 1979, p. 21-29. FREUDENTHAL H., The concept and the role of the models in mathmatics and natural sciences, Dordrecht, Reidel, 1961.

- KLEIN F., Le programme d Erlangen texte all. dans les Mathematische Annalen, 43, 1893, p. 63-100 (trac. fr., réimpr., Paris, Gauthier Villars, 1974). - POINCARÉ H., La Science et l'hypothèse (1902), rééd. Paris, Flammarion, 1968, chap. III et IV. - SINACEUR H., Corps et modèles, Paris, Vrin, 1991, 4` partie. –

- TARSKI A., « Contributions to the theory of models » , Collected papers, III, Birkhàuser, 1986. - TARSKi A., MOSTOWSKi A. & RoQINSON R.M., Undecidable theories, Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1953 (« A general method in proofs of undecidability », chap. I). - Thom R., Modèles mathématiques de la morphogenèse, Pais, UGE, 1974. - VAN FRAASSLN B., Laws and symmetrie, Oxford Univ. Press, 1989 (trad. fr. C. Chevalley, Paris, Vrin, 1995). - WALLISER B., Systèmes et modèles. Introduction critique à fanalvse des systèmes; Paris, Le Seuil, 1977.

- Coll. : Article « Modèle » de l'Encyclopédia Universalis. --- « La Sémantique du terme modèle », La Sémantique dans les sciences, colloque de l'Académie internationale de philosophie des sciences, Paris. Beauchesne, 1978, p. 158-172.

Hourya SINACOEUR

Eléments de bibliographie

Conseil scientifique de l'ADIREM, *Modélisation,* IREM Paris 7, 2003.

APMEP, Bulletins verts n° 440 (mai juin 2002), n° 441 (sept-octobre 2002), n° 456 (janv-février 2005) et n° 458 (mai-juin 2005).

Péault H., *La division en formation initiale* in CONCERTUM : Dix ans de formation en mathématiques des professeurs des écoles, ARPEME, 2003.
Voir spécifiquement la situation didactique appelée *Concertum*.

Lecourt D., *Dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences, PUF, 1999.*

Modelling and Application in Mathematics Education, the 14th ICMI Study, Springer 2007.