

CONTRIBUTION 2

Titre : La géométrie dans l'enseignement obligatoire.
Un cadre théorique au service de la formation.

Auteurs : Catherine TAVEAU (IUFM de Paris)

Date : décembre 2005 (Blois).

Résumé : Illustration de l'adaptation et de l'usage de la notion de paradigme géométrique en formation des enseignants du premier et second degré de l'enseignement obligatoire.

Cette contribution a pour objectif de présenter une transposition possible de la recherche en didactique des mathématiques vers la formation des enseignants. Il s'agit ici de montrer comment le cadre théorique élaboré par Catherine Houdement et Alain Kuzniak concernant les géométries, puis enrichi par les travaux d'Alain Kuzniak et Jean-Claude Rauscher permet de construire des formations relatives aux enjeux de l'enseignement de la géométrie auprès de publics variés : PE1, PE2, PLC2, PCL, formateurs de mathématiques, conseillers pédagogiques et IPR.

La transposition de la recherche en didactique à la formation ne va pas de soi et est souvent difficilement intelligible par les stagiaires. Bien que l'appropriation de ce cadre théorique reste très complexe, les éléments qui y sont exposés entrent très rapidement en résonance avec les préoccupations des étudiants et des stagiaires que nous avons en formation.

Pour chacune de mes interventions, j'ai repéré que la présentation de ce cadre éclairait de façon explicite les importants malentendus rencontrés par les stagiaires dans l'enseignement de la géométrie qu'ils avaient reçu ou qu'ils avaient dispensé.

C'est pourquoi le formateur peut l'utiliser régulièrement comme un outil de compréhension des phénomènes d'enseignement de la géométrie et donner des réponses aux difficultés rencontrées par les enseignants. Ainsi ce cadre peut devenir un cadre de référence d'analyse pour l'enseignement de la géométrie.

Après avoir exposé ce cadre théorique, je l'illustrerai par des exemples pris dans l'enseignement obligatoire et j'exposerai des pistes pour la formation des PE et PLC.

Je présente donc ici mon appropriation des travaux de ces chercheurs, ainsi que ma transposition pour la formation. J'espère ne pas trop les déformer même si je ne retiens pas toute la richesse et la complexité des contenus. Je les remercie de ne pas m'en tenir rigueur. Évidemment, j'invite le lecteur de cet article à se référer aux sources citées en bibliographie.

1. LES PARADIGMES GEOMETRIQUES

Selon Kuhn⁴², un *paradigme* désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique, mais aussi des exemples particulièrement significatifs auxquels on peut se référer. Ainsi les personnes s'identifiant à un même paradigme peuvent se comprendre implicitement car elles font référence à des pratiques d'activités scientifiques communes et à des concepts communs. A contrario, lorsque des individus ne s'identifient pas au même paradigme, des attentes et pratiques implicites vont provoquer des malentendus qui seront source d'incompréhension.

Le terme de paradigme étant posé, voici la présentation des trois paradigmes géométriques élaborés par C. Houdement et A. Kuzniak (1999).⁴³

Ces trois géométries sont caractérisées en fonction de trois modes de pensée (l'intuition, l'expérience, et le raisonnement déductif) et associées à des horizons différents.

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géométrie axiomatique formaliste III
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Liée à des schémas de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur des axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Support du raisonnement et « figural concept »	Schéma d'un objet théorique, outil heuristique
Aspect privilégié	Évidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration et lien entre les objets

Ces chercheurs définissent ainsi trois géométries élémentaires dont les caractéristiques pourraient être résumées à :

- la **Géométrie I** (géométrie naturelle) ou la confusion entre la géométrie et la réalité ;
- la **Géométrie II** (axiomatique naturelle) ou la géométrie comme schéma de la réalité ;
- la **Géométrie III** (axiomatique formelle) ou indépendance de la géométrie et de la réalité.

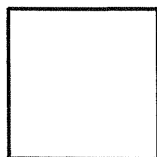
⁴² Kuhn (1922-1996) philosophe et historien des Sciences. Voir l'article sur le sens de paradigme selon Kuhn dans « Dictionnaire d'histoire et philosophie des Sciences » sous la direction de D. Lecourt, PUF, 1999.

⁴³ Houdement C. et Kuzniak A. (1999) Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres, Revue Petit X, n°51.

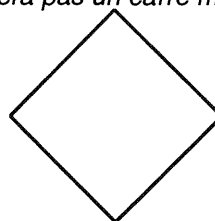
2. LIEN ENTRE LES NIVEAUX DE VAN HIELE ET LES PARADIGMES GEOMETRIQUES

Pour commencer, nous donnons une présentation des niveaux de pensée repérés en géométrie par Van Hiele, adaptée par A.Kuzniak et JC. Rauscher⁴⁴.

Niveau 0 (reconnaissance visuelle) : aucune analyse explicite des propriétés des figures ne préside à leur reconnaissance. Elles sont reconnues par les enfants d'après leur apparence
Un élève qui pense à ce niveau et auquel on demande comment il peut être sûr qu'il a devant lui un carré répondra par exemple que la figure en question en a la "forme". On rencontre alors les élèves pour qui un carré placé de "travers" ne sera pas un carré mais un losange



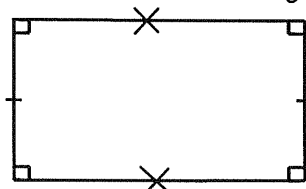
Un carré !



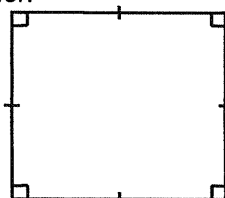
Un losange !

Niveau 1 (analyse) : les figures deviennent porteuses de propriétés. Les enfants analysent les propriétés de chacune des figures, mais ne sont pas amenés à les ordonner à l'intérieur d'une figure ou entre figures.

Les propriétés commencent à être explicitées par les élèves, indépendamment les unes des autres. Pour justifier la nature d'une figure, l'élève dépassera la justification globale pour dresser une liste d'arguments : "la figure a 4 angles droits, ses côtés opposés sont parallèles et ils ont la même longueur, les diagonales ont même longueur etc..". Dans cette accumulation d'arguments, il ne se préoccupera, ni du statut de ses assertions, ni des éventuelles redondances entre arguments ou insuffisances. De ce fait, à ce niveau, un carré n'est pas nécessairement identifié comme un rectangle particulier.



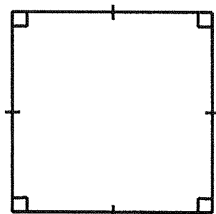
Un rectangle



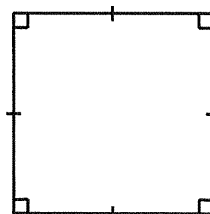
Un carré

Niveau 2 (propriétés semi-ordonnées ou déduction informelle) : les enfants ordonnent et relient les propriétés à l'intérieur d'une figure ou entre figures, mais ils n'organisent pas encore leurs assertions en démonstrations.

Au niveau 2, l'élève ne se contentera pas de donner une accumulation inutile ou insuffisante de faits pour prouver qu'il a devant lui un rectangle : il signalera un fait suffisant pour caractériser la figure : "il y a 4 angles droits". Le carré est alors reconnu comme un rectangle. A ce niveau les définitions des figures entrent en jeu.



Un rectangle



Un carré

⁴⁴ Actes du XXIX^e colloque de la COPIRELEM, La Roche sur Yon, 2002, p.271

Niveau 3 (déduction démonstration) : certaines propriétés sont déduites à partir d'autres organisées en théorèmes ou axiomes, les déductions sont explicitées sous forme de démonstrations.

A ce niveau, un élève admettra que pour avoir un rectangle, il suffit d'avoir un parallélogramme possédant un angle droit, chose qu'il n'aurait pas admise à un niveau précédent. A ce stade l'élève devient attentif au statut des assertions : "on sait, d'après ce qu'indique l'énoncé que la figure est un parallélogramme..."

**ABCD est un parallélogramme et (AB) et (BC) sont perpendiculaires,
donc**

ABCD est un rectangle

A chaque niveau, ce qui est implicite devient explicite au niveau suivant. Par exemple, les caractéristiques qui font qu'une figure est un carré ne sont pas exprimées au niveau 0, mais le sont en vrac au niveau 1 où les figures deviennent porteuses d'informations. Les relations entre ces informations sont explicitées au niveau 2 où apparaissent les propriétés caractéristiques des figures. Les relations entre ces propriétés sont explicitées au niveau 3. Van Hiele considère que l'entrée dans chaque niveau nécessite la maîtrise du niveau précédent et que la progression des élèves dépend de l'enseignement donné.

En articulant les paradigmes géométriques avec les niveaux de pensée repérés en géométrie par Van Hiele⁴⁵, A. Kuzniak et de JC. Rauscher (2002) ont enrichi ce cadre théorique.

	Géométrie I	Géométrie II	Géométrie III	
Niveau 0 Visualisation				pôle empirique (Intuition et expérience)
Niveau 1 Analyse			<i>Outil heuristique</i>	
Niveau 2 Déduction informelle	Transition			
Niveau 3 Déduction démonstration		Transition		pôle théorique (déduction)
Niveau 4 Abstrait Structure				
	<i>Horizon technologique</i>	<i>Horizon axiomatique</i>	<i>Horizon formel</i>	

En s'appuyant sur ce tableau, on repère que la géométrie I sera enseignée à l'école primaire en France jusqu'à son niveau 2. Puis au collège et au lycée, on privilégiera l'enseignement de la géométrie II spécifiquement sur les niveaux 2 et 3, la géométrie III n'étant actuellement enseignée qu'à l'université.

⁴⁵ Van Hiele P.M. (1986) *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*, Orlando. Academic Press.

La partie grisée correspond à cette description et fait apparaître les moments de transition d'une géométrie à l'autre dans le cadre de l'enseignement obligatoire, donc le passage d'un paradigme à un autre.

D'autres choix sont possibles et existent dans d'autres pays.

Il est évident que dans la réalité les choses ne sont pas si simples, ni si tranchées et les phénomènes qui vont intéresser la formation sont les moments de transition.

« Ce tableau doit plutôt être considéré comme un plan de travail que comme un point de vue figé : il est notamment essentiel de vérifier l'existence de chaque case du tableau et de préciser ses propriétés.

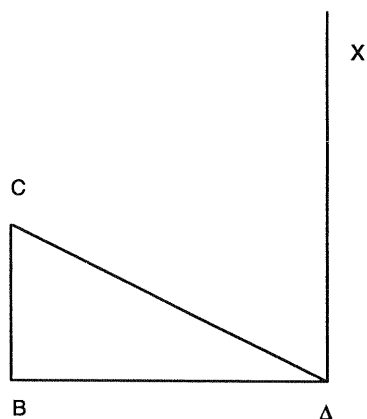
Dans notre perspective, les géométries ne poursuivent pas le même objectif à long terme et ont des horizons de préoccupations différents : un horizon technologique pour la Géométrie I et un horizon formel pour la géométrie III. Dans sa forme la plus élaborée, chaque géométrie suppose de la part d'un utilisateur expert une maîtrise de tous les niveaux de Van Hiele. Il y a en effet des conceptions savantes et abstraites de la géométrie I occultée à l'école mais qui ont fait l'objet de travaux théoriques. La voie privilégiée dans le cadre des mathématiques enseignées [en France] est celle que nous avons grisée. »⁴⁶

Pour ces chercheurs, il est important de spécifier que ces différents paradigmes géométriques ne doivent en aucun cas être hiérarchisés ; il n'existe pas une « sous- géométrie », il n'y a pas une géométrie meilleure qu'une autre ; elles ont tout simplement des horizons de travail différents et des fonctions différentes.

La **G I** s'oriente vers un horizon technologique et pratique, la **G II** vers un horizon axiomatique et modélisant et la **G III** vers un horizon logique et formel.

Voici une illustration de l'articulation de ces géométries avec les niveaux de Van Hiele autour de la résolution d'un problème géométrique.

Extrait de l'énoncé du problème de géométrie posé dans le sujet du CERPE d'Amiens en 2000.



ABC un triangle rectangle en B et $[Ax)$ la demi-droite perpendiculaire au segment $[AB]$. $AB = 4$ cm et $BC = 2$ cm. M est un point de la demi-droite $[Ax)$, on note m la distance AM.

.....
.....

Existe-t-il M tel que le triangle ACM soit équilatéral ? Justifiez.

Voici des exemples de réponses de PE1.

Réponse 1 : je prends mon compas, je construis le triangle équilatéral de côté CA et le troisième sommet n'est pas sur $[Ax)$ donc il n'existe pas de point M tel que ACM soit équilatéral.

Réponse 2 : Tous les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60° . Je mesure l'angle $C\hat{A}x$ qui vaut 63° , donc il n'est pas possible de construire le triangle équilatéral.

⁴⁶ Kuzniak A. Rauscher J.C. (2002) *Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école* Actes du XXX^e colloque de la COPIRELEM La Roche sur Yon p. 271-290.

L'analyse de ces réponses permet de dire que la réponse 1 se situe au niveau 1 dans la Géométrie I car elle utilise la connaissance caractéristique du triangle équilatéral (trois côtés égaux) mise en œuvre pour la construction effective.

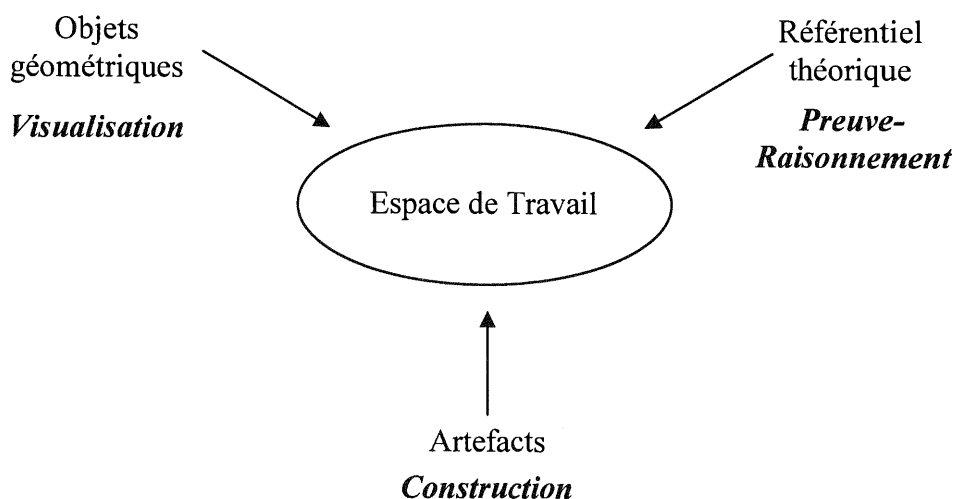
En revanche, la réponse 2 se situe dans le niveau 3 de la Géométrie I car elle fait appel à une propriété plus élaborée, mais la prise d'information sur la valeur de l'angle est aussi faite par mesurage sur la figure.

Ainsi les étudiants ont résolu correctement de leur point de vue le problème posé, ils ont fait appel à un raisonnement élaboré dans la Géométrie I alors que le contrat implicite du CERPE fait appel à un raisonnement dans la Géométrie II. Voici un type de malentendu que l'on rencontrera fréquemment dans l'enseignement.

3. NOTION D'ESPACE DE TRAVAIL

Pour compléter ces cadres théoriques, j'esquisserai la notion d'espace de travail élaboré par A. Kuzniak⁴⁷.

L'espace de travail « virtuel » dans lequel un élève réfléchit et agit est constitué des trois pôles suivants : les objets géométriques (figures, définitions, théorèmes, propriétés...), les artefacts possibles (outils de construction, logiciel de géométrie dynamique,...) et un référentiel théorique (un des paradigmes de la géométrie).



L'individu qui fait de la géométrie raisonne dans son propre espace de travail dans lequel il reconnaît les objets géométriques, pour lequel il a son répertoire de connaissances et dans lequel il s'appuie sur son référentiel de preuves et sur ses outils.

Cet espace de travail, très dépendant du référentiel théorique, est en lien direct avec le paradigme dans lequel cet individu se situe naturellement. Alors que ce passe-t-il dans l'enseignement de la géométrie à l'école et au collège ?

⁴⁷ A. Kuzniak (2006), *Paradigmes et espace de travail géométrique*, Revue Canadienne de l'enseignement des Sciences, des mathématiques et des technologies, vol 6, Toronto.

C. Houdement et A. Kuzniak (2006) *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie*, Annales de didactique et de Sciences cognitives, vol 11, IREM de Strasbourg.

4. LA GEOMETRIE A L'ECOLE PRIMAIRE : UNE FORME INACHEVEE DE LA GEOMETRIE I

L'école élémentaire a pour but de mettre en place les bases de la Géométrie I. Pour bien comprendre cette mise en place, il faut constamment revenir à ce qui fait l'essence de l'activité géométrique, à savoir, s'appuyer sur une coordination de la vue, de l'action et de la réflexion sur des d'objets visibles et constructibles. Ceci renvoie aux trois processus cognitifs complexes que sont la *visualisation*, la *construction* et le *raisonnement*. Chacun de ces processus nécessite une étude approfondie qui peut relever d'approches cognitivistes. Mais, et c'est sans doute un de ses intérêts principaux, la pratique géométrique propose toute une gamme d'activités qui développent la maîtrise de ces processus cognitifs.

Ainsi, nul besoin d'être psychologue pour enseigner et faire de la géométrie, mais par contre, il sera intéressant pour le professeur d'envisager l'activité géométrique à travers le prisme des processus cognitifs précédents, ne serait-ce que pour en comprendre la difficulté et accompagner l'élève dans son apprentissage.

La particularité de cet enseignement est que les élèves et le maître travaillent tous deux dans un espace de travail dépendant du même paradigme géométrique : la Géométrie I. La figure aura un statut de validation, la perception sera très présente et permettra d'entamer un raisonnement.

L'activité géométrique à l'école primaire se fera à partir des ces trois entrées : **voir pour reconnaître, construire pour expérimenter, raisonner pour prouver**⁴⁸.

« La maîtrise du travail géométrique s'appuie donc sur trois processus cognitifs : visualisation, construction et raisonnement déductif. Il est bien clair que la maîtrise simultanée de ces trois aspects du travail géométrique passe par une genèse et une mise en place qui constitue l'essentiel de cet enseignement à l'école élémentaire. »

Voir pour reconnaître

C'est la première entrée dans le champ de l'activité géométrique, il faut pouvoir désigner les objets sur lesquels on travaille avec les termes standards du domaine. Pour cela il ne suffit pas de voir simplement mais aussi d'organiser sa vision grâce à un premier repérage des propriétés invariantes d'une figure à l'autre. De manière implicite l'élève va organiser des classes d'équivalence autour d'objets de référence.

Se dégage ainsi une première notion de la figure comme objet générique illustré par des objets particuliers. Pareil au naturaliste du XVIII^e siècle, l'élève explore le monde des objets géométriques. C'est le temps des pratiques ostensives de la part du maître: il désigne et montre un objet avec le doigt, comme on le fait pour désigner un chien ou un chat, sans pour autant le caractériser. Il est nécessaire d'assumer cette ostension en étant conscient que l'objet montré est typique et non prototypique. Ainsi ce triangle particulier s'inscrit dans le processus de création de la classe « triangle » qui va réunir tous les triangles quelle que soit leur forme. Cela n'exclut pas que, petit à petit, les élèves pourront définir les objets par des propriétés.

Ces propriétés reposeront elles-mêmes, dans un premier temps, sur une éducation du regard de l'élève sur la figure. Ce dernier doit s'habituer à la décrire en prenant en compte des sous- figures et des sous- objets, comme les points (sommets) ou les segments (côtés).

⁴⁸ On trouvera beaucoup d'exemples de ces types d'activités dans CONCERTUM, Dix ans de formation en mathématiques, ARPEME: Jeu du portrait (dans les *quadrilatères particuliers* Tome 2 p.143), la fleur (Tome 2 p.183) ainsi que dans l'ouvrage « Travaux géométriques en 6^{ème} », A.Kuzniak, C.Taveau, Nathan Pédagogie, 1998.

L'importance de ce travail de déconstruction et de reconstruction dimensionnelle est fondamentale dans l'initiation à la géométrie comme le souligne Raymond Duval. Cette phase va être intimement liée à l'activité de construction effective des objets.

Construire pour expérimenter

Lorsqu'on interroge les jeunes élèves sur ce qu'est pour eux la géométrie, leurs réponses la fait apparaître comme le domaine des tracés, des constructions et de l'usage plus ou moins délicat d'instruments comme l'équerre et la règle graduée avec son cortège de mesures, ou encore le compas. Et de fait, préparer le travail géométrique, c'est aussi, c'est d'abord, développer l'activité du géomètre constructeur.

Cette géométrie passe par l'appropriation des instruments et en ce sens l'activité sur le cercle est exemplaire du type d'évolution qui conduit au concept géométrique. Le compas et son usage vont se lier intimement à la notion de cercle dans un processus qualifié d'instrumentalisation. L'appropriation des outils de la géométrie suppose une maîtrise à la fois gestuelle et conceptuelle de l'outil. Savoir utiliser un compas, c'est bien sûr d'abord savoir le manipuler, mais c'est aussi connaître ses usages et donc en savoir un peu plus sur le cercle et sur le report de longueur. Cette fois, l'activité de construction mise en mots va enrichir la visualisation et l'entrée perceptive.

Mais un autre aspect apparaît, construire peut servir à prouver : il s'agit, bien sûr, d'une preuve constructive d'existence. Euclide appelait « problèmes » ces exercices qu'une construction résolvait.

En Géométrie I, la preuve dont il s'agit est une preuve expérimentale qui suppose la mise en place d'un travail sur l'approximation. C'est cette nécessité qu'expriment les enseignants lorsqu'ils parlent de la rigueur et de la précision des tracés. Mais qu'est-ce qu'une précision non mesurée ? Ainsi la nécessité de mesurer des grandeurs (et au cycle II, il s'agit essentiellement de la longueur), va apparaître et harmonieusement accompagner l'activité géométrique de construction qui se met en place au même moment.

Raisonner pour prouver

Il n'est pas de géométrie sans mots car ils sont nécessaires pour argumenter et convaincre : convaincre l'autre bien sûr mais soi-même aussi. Tout le travail effectué autour de la visualisation et de la construction participe de cette mise en place du travail géométrique. La familiarité avec les objets développe l'intuition du géomètre en herbe. Grâce à elle, l'enfant se bâtit une théorie première des objets.

C'est un avantage parce que cela lui permet de dire des choses, de croire que certaines propriétés existent et sont vraies et ainsi de mettre en place des théorèmes en acte.

Cela peut être un inconvénient parce que ce qu'il a ainsi conçu pourra être faux ou surtout parce que cette intuition va lutter contre la nécessité de prouver.

L'intuition est fondamentale en géométrie car c'est sur elle que se fonde tout le développement de la pensée géométrique. Mais un autre versant théorique, appuyé sur le raisonnement déductif, est bien sûr tout aussi fondamental. On ne voit souvent derrière le raisonnement que la pure déduction identifiée à la démonstration et qui n'a formellement pas sa place à l'école. Mais il est possible de valider et de prouver de différentes manières en Géométrie I. Il faut garder une vision assez ouverte sur l'idée de preuve et de validation tout en insistant sur l'importance du discours, et donc sur la nécessité d'avoir des mots précis pour étayer la preuve. C'est ce qui va favoriser l'argumentation, et plus tard le raisonnement démonstratif.

Toute activité géométrique à l'école nous semble devoir être conçue avec une part de raisonnement. »⁴⁹

⁴⁹ Extrait de l'article sur la réflexion didactique de l'enseignement de la géométrie disponible sur le Cdrom accompagnant le DVD « Enseigner les mathématiques au cycle 2 : les bûchettes et le petit moulin », IUFM-CRDP de Créteil, 2005.

5. LA GEOMETRIE AU COLLEGE : LA DIFFICILE TRANSITION DE LA GEOMETRIE I A LA GEOMETRIE II.

Le rapport Kahane⁵⁰ explicite les choix faits par la France concernant l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée. Il affirme que cette géométrie est belle et bien la Géométrie II, même si elle n'est pas citée en ces termes, et il précise que les activités géométriques sont le lieu privilégié des activités de raisonnement.

À la question « *Pourquoi enseigner la géométrie aujourd'hui ?* » il est entre autres proposé comme réponse⁵¹ :

« b) L'apprentissage du raisonnement.

Si le point précédent (l'appropriation de la vision de l'espace) emporte aisément une large adhésion, il n'est pas aussi évident de justifier ce qui est l'une des originalités de l'enseignement de la géométrie (en France), à savoir, la part considérable qu'y occupe l'apprentissage du raisonnement. Certes, chacun s'accorde à dire qu'être capable de raisonner est un atout crucial pour le citoyen, lui permettant d'exercer ses responsabilités de manière lucide dans notre société et de prendre sa part aux débats politiques, économiques et sociaux qui l'agitent. Mais, s'agissant de la géométrie, un débat philosophique récurrent oppose souvent tenants et adversaires de la méthode déductive à laquelle on l'identifie. Pour notre part, nous pensons que cette identification est très réductrice, que le raisonnement géométrique est beaucoup plus riche que la simple déduction formelle et que l'apprentissage de ce raisonnement, convenablement mené, est sans doute l'argument le plus fort en faveur de la géométrie.

Bien entendu, il y a beaucoup d'autres domaines dans lesquels le raisonnement peut s'exercer, avec d'autres formes tout aussi intéressantes, à commencer par d'autres branches des mathématiques et des sciences et il serait désastreux de vouloir aligner tous les modes de raisonnement sur les canons de la démonstration géométrique. »

Malgré les recommandations du rapport Kahane, les observations des pratiques de classes et les souvenirs douloureux de nombreux PE, montrent que la méthode déductive a largement pris la place du raisonnement et que la géométrie du collège ne s'apparente qu'aux démonstrations basées sur l'axiomatique et donne une vision très réductrice et dogmatique à la Géométrie II.

Alors que les élèves arrivant au collège naviguent dans leur espace de travail attaché implicitement à leur référentiel théorique - la Géométrie I-, ils se retrouvent tout à coup face à des professeurs de mathématiques, souvent ignorants de l'enseignement dispensé à l'école élémentaire, qui pensent qu'enfin leurs élèves vont faire de la vraie géométrie. L'espace de travail attendu par ces enseignants a pour référence théorique la Géométrie II.

Ainsi les espaces de travail, liés aux paradigmes géométriques, des élèves et des enseignants sont implicitement différents. La non connaissance de ce phénomène va produire de nombreux malentendus didactiques et la rupture sera importante principalement en classe de 4^e où les professeurs préviennent dès le début de l'année, élèves et parents : « *cette année cela va être dur ! nous allons aborder la démonstration en géométrie !* ».

⁵⁰ <http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/>

La géométrie et son enseignement, janvier 2000.

⁵¹ Rapport Kahane p.5

La difficulté est donc la phase de transition du passage de la Géométrie I à la Géométrie II. Mais à qui est-elle dévolue ? Aux maîtres de CM2 ? Aux professeurs de mathématiques de 6^{ème} ? Ou bien tout simplement à la charge exclusive des élèves ?

Les programmes de l'école primaire proposent d'initier cette transition, très timidement, par l'introduction des figures à main levée.

« L'objectif principal est de permettre aux élèves de se familiariser avec les objets du plan et de l'espace et de passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par un recours à des instruments et par la connaissance de certaines propriétés. Il s'agit également de favoriser la mise en place d'images mentales pour les principaux concepts rencontrés, en permettant aux élèves de les identifier dans des configurations variées.

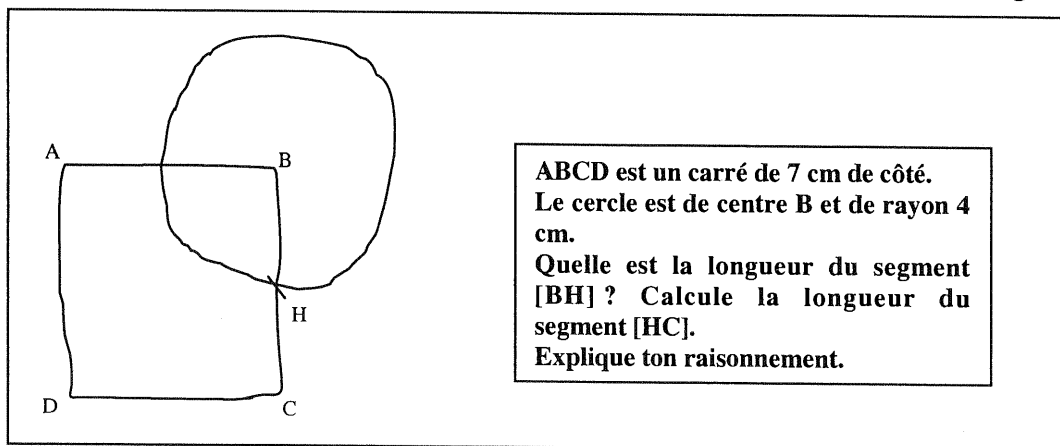
- L'argumentation à propos des outils utilisés, des propriétés mobilisées et des résultats obtenus constitue une part importante du travail des élèves. Dans cette perspective, quelques raisonnements peuvent être conduits, en particulier sur des figures dessinées à main levée.

- »¹

Nous pouvons constater que quasiment aucun manuel scolaire de l'école primaire ne propose des activités favorisant ces raisonnements, ceci ne faisant pas encore partie de la culture des maîtres du cycle 3.

Par l'exemple suivant, nous allons voir que la tâche n'est pas aisée et que cette transition du passage d'une géométrie à l'autre doit être une préoccupation collective des enseignants du cycle 3 et du début du collège.

Dans une classe de CM1 en juin, cet exercice est proposé aux élèves après un travail sur la notion de cercle et sur le statut d'une figure dessinée à main levée. La figure suivante est faite à main levée et est accompagnée du texte. Chaque élève dispose de l'énoncé et de la figure.



N.B. Si on mesure effectivement sur le schéma donné à main levée, on trouve à peu près $BH = 2,3$ cm et $HC = 1,6$ cm.

Voici quelques réponses (corrigées orthographiquement) d'élèves de cette classe :

E1: c'est que le B n'est pas au centre et pas de rayon BH. Comme c'est fait à la main levée, le centre B est mal fait et le rayon aussi est mal fait ; il faut faire au compas, c'est plus pratique.

¹ Document d'application des programmes, mathématiques, cycle 3, CNDP, 2002, p.30

E2: (pour la valeur BH) Elle fait 3,2 cm. J'ai mesuré avec la règle graduée. HC mesure 1,9 cm et j'ai aussi mesuré à la règle graduée. Mais on ne peut pas mesurer. (sous entendu « on n'a pas le droit de mesurer »).

E4: 2,5 j'ai mesuré avec la règle non graduée et j'ai trouvé 2,5. (pour BH)

E5: la longueur est de 4 cm parce que H est dans le rayon BH et que la mesure du rayon est de 4 cm. La longueur de HC est 2 cm puisque c'est la moitié.

E6: l'élève fait au propre la construction et mesure les segments puis trouve $HC = 3,1$ cm.

Une analyse rapide des attitudes et réponses de ces élèves montre qu'ils savent et disent : « C'est un dessin à main levée, donc on ne peut pas mesurer » mais cela ne les empêchent pas de :

- mesurer sur le dessin la longueur effective de HC ;
- estimer à vue d'œil « c'est à peu près la moitié » ;
- construire aux vraies dimensions la figure et mesurer ensuite.

Alors que cet exercice est donné pour être résolu en Géométrie II, les élèves appliquent leurs connaissances de la Géométrie I. Des situations didactiques devront être construites avec l'objectif explicite d'accompagner cette rupture dans la pratique de la géométrie et de favoriser ainsi le passage d'une géométrie à l'autre.

Dans l'enseignement de la géométrie au collège, on peut aussi répertorier les principaux points qui fâchent, ceux pour lesquels le malentendu est le plus fort :

- Le *statut de la figure* : la figure n'est plus support de validation.
- Le *dessin à main levée* n'est pas accepté par les élèves, c'est comme un brouillon, ils n'osent pas le faire ou bien le font si petit qu'il est inexploitable.
- Le *codage et décodage* des figures géométriques sont évidents pour les enseignants mais non porteur de sens pour une grande partie des élèves. La figure codée ajoute une ambiguïté : a-t-on le droit de prendre appui sur ce que l'on voit pour argumenter ?
- L'*argumentation* ou la *preuve* : pourquoi argumenter quand tout se voit et se vérifie sur la figure.
- La « sacro-sainte » *démonstration* qui n'est devenue qu'une démarche formelle de modèle à respecter. En formation, les enseignants sont à la recherche d'outils méthodologiques les aidant dans cette phase de formatage de leurs élèves. Tout le plaisir de faire de la géométrie a disparu. Adieu intuition, expérimentation, créativité, esthétisme ...

On observe que les contraintes qu'imposent les professeurs de mathématiques à leurs élèves en terme de formalisme autour de la démonstration géométrique, aboutissent au fait que peu d'exercices sont finalement cherchés pendant une séance de cours. Ainsi malgré le temps passé, peu d'activités géométriques riches sont abordées en classe et de fait ne permettent pas de stabiliser les connaissances des élèves.

Une des conséquences observées est le ressenti très négatif de la géométrie pratiquée au collège chez les adultes, et notamment chez les PE1 et PE2.

Regardons de plus près les aides institutionnelles proposées aux professeurs des collèges. Voici quelques extraits de manuels scolaires. Quelles que soient les collections les auteurs entretiennent l'ensemble des malentendus cités ci-dessus.

Exemple 1 (extrait de Dimathème 4^{ème} 2002)

Observer la figure ci-contre.

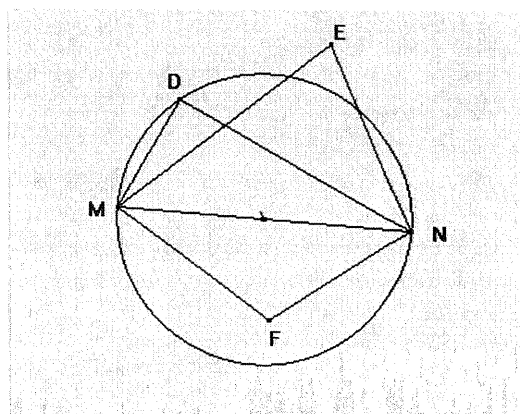
Parmi les angles $\widehat{MDN}$, $\widehat{MEN}$ et $\widehat{MFN}$, quel est celui qui mesure 90° ? Justifier la réponse.

Commentaire :

Cet exercice propose d'observer la figure, construite « proprement » afin de répondre à la question.

Selon l'espace de travail dans lequel l'élève se situe, il répondra soit par une entrée perceptive, soit en utilisant une équerre pour vérifier l'angle qui mesure 90° , soit en utilisant la propriété qui vient d'être abordée dans la leçon.

Le contrat didactique est ici déterminant pour justifier un choix de paradigme (la Géométrie II) que les mots employés dans l'énoncé contredisent.



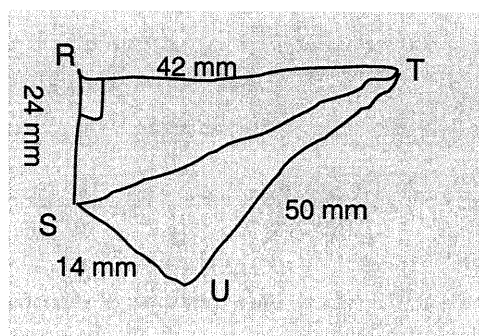
Exemple 2 (extrait de Cinq sur cinq 4^{ème} 2002)

1) Construire la figure ci-contre en vraie grandeur.

2) Le triangle STU semble-t-il rectangle? L'est-il vraiment ?

Commentaire :

Même si cet exercice est proposé pour mettre à défaut une entrée perceptive de la géométrie (la Géométrie I) chez les élèves, demander, en première question, la construction de la figure en vraie grandeur va replonger ces mêmes élèves dans l'espace de travail de la Géométrie I alors que la résolution du problème devrait se faire dans la Géométrie II.



Ces deux exemples sont significatifs de l'ensemble des exercices proposés dans les manuels scolaires du collège. Ils entretiennent constamment, et généralement de façon inconsciente, cette ambiguïté entre une résolution dans la Géométrie II mais en privilégiant un décor de la Géométrie I. Finalement ces malentendus ne sont pas éclaircis et seul le contrat didactique agit sans donner de sens aux activités des élèves.

Mais ce contrat didactique ne fonctionne pas si bien. En effet les professeurs ne comprennent pas les erreurs persistantes de leurs élèves en expliquant que **pourtant ils leur disent bien qu'ils ne doivent plus prendre appui sur les figures et au contraire utiliser des théorèmes vus en cours**. Ils pensent que le dire suffit, et renvoient à la charge de l'élève le passage d'une géométrie à une autre.

Si les professeurs de mathématiques avaient conscience de ces phénomènes d'enseignement, ils gèreraient autrement les énoncés des exercices qu'ils proposeraient à leurs élèves en reportant, par exemple en dernière question, la construction des figures, puisque les compétences des élèves concernant les tracés géométriques doivent continuer à être travaillées au collège. De plus, la mise à distance des figures sur lesquelles les élèves raisonnent faciliterait l'entrée dans la Géométrie II.

Une autre voie possible serait de rendre les élèves conscients de l'existence de ces deux géométries avec leurs propres champs d'application, mais ce n'est pas l'orientation suivie actuellement par les programmes du collège.

On peut par contre, comme nous allons le voir, tenter de sensibiliser les professeurs à ces différents espaces de travail et de paradigmes géométriques.

6. PISTE EN FORMATION PE1

Les épreuves du CERPE font d'une part appel à la Géométrie II pour ce qui est des exercices de mathématiques proposés aux candidats, mais d'autre part elles font appel à la Géométrie I dans le cadre de l'analyse de productions d'élèves et de l'analyse de documents pédagogiques.

C'est un point essentiel que les candidats doivent comprendre, et la présentation du cadre théorique des paradigmes géométriques est une des occasions de compréhension. En voici une mise en œuvre possible.

L'exercice suivant (issu d'un sujet du CERPE de Bordeaux 1995) est donné aux PE1, à faire sous forme de devoir à rendre.

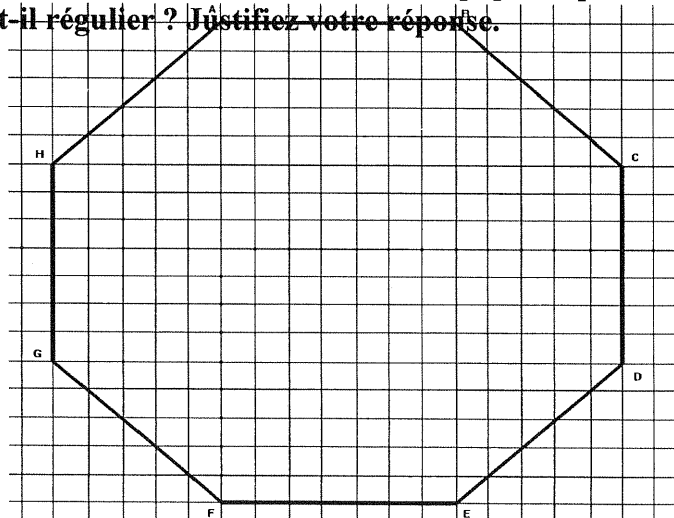
1) Un professeur se propose de réaliser un matériel constitué de 8 pièces triangulaires superposables entre elles et qui permettent, par assemblage, de former un octogone régulier. Donner en les justifiant deux propriétés géométriques de chacun des triangles qu'il doit fabriquer.

2) Construire géométriquement à la règle et au compas un octogone régulier et expliquer votre construction.

3) a)

b) On a dessiné la figure 2 sur un papier quadrillé. L'octogone ABCDEFGH est-il régulier ? Justifiez votre réponse.

Figure 2



Alors qu'il est évident pour les correcteurs du CERPE que les réponses données à la question 3)b) concernant la régularité de l'octogone se situent en Géométrie II, les étudiants le résolvent par l'usage des instruments et l'observation :

- soit avec **le compas**

(Avec le compas, on constate que : $GH = HA = AB = BC = CD = DE = EF = FG$ donc les 8 côtés de l'octogone sont de même longueur. On trace 4 diamètres du cercle : $[HD]$, $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$. Soit O le point d'intersection de ces diamètres. On trace le cercle de centre O et de rayon OH et on s'aperçoit que tous les points G, H, A, B, C, D, E, F sont sur le cercle. Donc l'octogone est inscriptible dans un cercle),

- soit avec le rapporteur et la règle graduée

(Sur la figure 2, l'octogone est régulier. En effet ses 8 sommets ont le même angle de 135° , ses cotés ont même mesure 2,1 cm. Il est inscriptible dans un cercle, l'intersection des segments reliant tous les sommets opposés. De plus en traçant les segments $[AE]$ et $[CG]$, on observe qu'ils sont perpendiculaires et on remarque la même chose pour les segments $[HD]$ et $[BF]$)

- soit en utilisant le quadrillage

(Afin de vérifier si l'octogone est régulier je vais me servir de la propriété suivante: « un octogone est régulier si ses cotés sont égaux ». Pour ce faire, je vais compter le nombre de carreaux pour chaque segment : $AH = BC = \dots = 7$ carreaux, $AB = DC = \dots = 5$ carreaux, donc l'octogone n'est pas régulier).

Il est important de signaler que beaucoup de ces réponses proviennent d'étudiants ayant fait une classe de terminale Scientifique.

L'analyse de ce sujet montre une nouvelle fois toute l'ambiguïté dans les attentes de résolution. Les deux premières questions de ce sujet de concours plongent l'étudiant dans la Géométrie I : fabrication virtuelle de 8 triangles superposables, construction à la règle et au compas de l'octogone. Puis rupture d'espace de travail pour l'auteur du sujet mais pas pour les candidats qui eux résolvent la question 3)b) en Géométrie I. Cet exercice est particulièrement parlant et ambigu sur le passage d'une géométrie à l'autre.

Ainsi, avant de rendre les copies dans lesquelles j'ai repéré les réponses ci-dessus, je décide de faire une présentation rapide des différents paradigmes géométriques à partir du tableau synthétique présenté au début de cet article.

Il est intéressant de constater que les étudiants comprennent aisément de quoi il s'agit et s'approprient très vite cette distinction entre la Géométrie I et de Géométrie II et, face à leurs erreurs suivantes, sont capables de dire que ce qui était demandé était dans la Géométrie II et qu'eux ont répondu dans la Géométrie I.

L'anecdote suivante est révélatrice du grand malaise de l'enseignement de la géométrie au collège et de la persistance des malentendus. À la suite de la présentation du cadre théorique de la géométrie, une PE1, d'une trentaine d'années, me dit qu'elle venait enfin de comprendre ce qui s'était passé pour elle au collège. Elle pensait avoir « loupé » des cours alors qu'elle n'avait jamais été absente. Il y avait des pans entiers qu'elle ne comprenait plus alors qu'à l'école primaire elle prenait plaisir à faire de la géométrie.

7. PISTE EN FORMATION PLC

Les formations aux PLC (aux PLC2 ou en formation continue) sont l'occasion de présenter ce cadre théorique des paradigmes géométriques et doivent permettre de donner des éléments d'analyse des difficultés des élèves dans les phases de transition du passage d'une géométrie à l'autre.

Il est important que les enseignants, stagiaires ou titulaires, prennent conscience *qu'il ne suffit pas de dire ou de répéter* que les attentes de raisonnement sont situées dans un autre espace de travail que la Géométrie I. Il faut aussi les aider à construire des situations didactiques qui provoquent le questionnement et qui donne du sens au changement d'espace de travail.

Pour amorcer le débat, le document « *Charlotte et Marie* »⁵³ est donné aux stagiaires. Chez eux, ils répondent aux questions posées et le débat se déroule la séance suivante à l'IUFM.

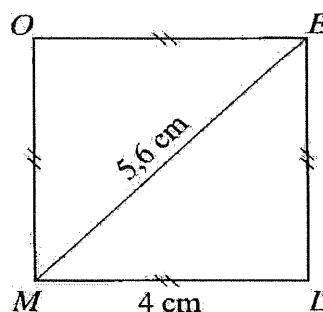
Charlotte et Marie

1° Pourquoi peut-on affirmer que le quadrilatère *OELM* est un losange ?

2° Marie soutient que *OELM* est un carré.

Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai.

Qui a raison ? Et pourquoi ?



Répondre à la question 1.

Répondre à la question 2.

Quelles sont les incertitudes ou difficultés que les élèves peuvent rencontrer dans cet exercice ?

Quelles difficultés vous pose cet exercice en tant qu'enseignant ?

Puis cinq productions d'élèves sont proposées (la résolution étant faite soit en Géométrie I, soit en Géométrie II), et les questions posées aux PLC sont :

1) De quelle production, votre institutionnalisation serait-elle la plus proche, pourquoi ?

2) Comment pensez-vous gérer didactiquement les questions que soulèvent les réponses des élèves ?

Le débat entre stagiaires est fluctuant : très vif et animé lorsque certains proposent comme solution de construire et de mesurer, très consensuel lorsque tous ne voient pas de problème didactique, mais dans tous les cas, le public est toujours très intéressé. Ensuite les différentes Géométries I, II et III ainsi que les liens avec les niveaux de Van Hiele sont exposés aux stagiaires. Cette présentation est complétée par une analyse de productions d'élèves de différents niveaux de classes (de la 5^e à la 2nd) et pour lesquelles le passage à la Géométrie II n'est pas effectif.

Une analyse d'exercices de géométrie issus des manuels scolaires enrichit la réflexion et un travail de réécriture d'énoncés est amorcé. De fait, un débat suivi d'un réel questionnement s'impose concernant les démarches d'enseignement de la géométrie au collège. Les propositions d'activités permettant de faire émerger les conjectures (papier-crayon ou logiciels de géométrie dynamique), s'effectuent toujours dans la Géométrie I et elles sont institutionnalisées et utilisées dans la Géométrie II. Comment gérer cette incohérence ? Des pistes possibles seraient de construire des séances permettant de passer explicitement de la Géométrie I à la Géométrie II.

⁵³ Kuzniak A. Rauscher J.C. (2002) *Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école*, Actes du XXX^e colloque de la COPIRELEM La Roche sur Yon, p. 271-290.

8. CONCLUSION

Bien que l'appropriation du cadre théorique des espaces de travail liés aux paradigmes géométriques reste complexe et nécessite un effort de la part des formateurs, cet apport didactique est un véritable outil pour la formation. Il permet un incontestable travail d'explicitation des difficultés d'enseignement et peut être un réel appui pour les stagiaires. Il me semble important que tout formateur s'en saisisse, le fasse fonctionner à partir des préoccupations des enseignants.

Il serait souhaitable qu'il devienne un cadre de référence naturel en didactique de la géométrie, et reste toujours d'actualité dans les années à venir en vue de professionnaliser encore davantage la formation des enseignants du premier et second degré de l'enseignement obligatoire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Houdement C. et Kuzniak A. (2006) *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie*, Annales de didactique et de Sciences cognitives, vol 11, IREM de Strasbourg.

Houdement C. et Kuzniak A. (1999) *Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres*, Revue Petit X, n°51.

Kuzniak A. (2006) *Paradigmes et espace de travail géométrique*, Revue Canadienne de l'enseignement des Sciences, des mathématiques et des technologies, vol 6, Toronto.

Kuzniak A. (2003) *Espaces de travail géométriques* Actes du XXX^e colloque de la COPIRELEM, Avignon, p.103 -111.

Kuzniak A. Rauscher J.C. (2003) *Processus de formation de PE1 et anamnèse géométrique*, Actes du XXX^e colloque de la COPIRELEM, Avignon, p.231-248.

Kuzniak A. Rauscher J.C. (2002) *Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école*, Actes du XXX^e colloque de la COPIRELEM La Roche sur Yon, p. 271-290.

Parzysz B. (2001) *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1*. Actes du Colloque inter IREM des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres. Université de Tours.

Rauscher J.C. (1993) *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège*. Université de Strasbourg.

Actes du colloque Inter IREM 1^{er} cycle (2001) dont le thème était « *Quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental* », IREM de Montpellier.

Articulation école – collège : des activités géométriques (2001) COPIRELEM et commission Inter IREM 1^{er} cycle, IREM Paris 7.