CONTRIBUTION 1

Titre : Quelques outils didactiques pour le formateur, illustration sur le thème de la proportionnalité

Auteurs : Magali HERSANT (IUFM des Pays de la Loire)

Date : décembre 2005 (Blois).

Résumé : L'objet de cette intervention est de présenter aux nouveaux formateurs quelques uns des concepts de la didactique des mathématiques qui nous semblent les plus utiles en formation des enseignants pour construire et analyser des séances.

INTRODUCTION

Les didacticiens des mathématiques ont développé depuis un peu plus de trente ans de nombreux concepts qui permettent de mieux comprendre et envisager l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Certains sont particulièrement intéressants pour la formation de professeurs des écoles : ils permettent de comprendre et de justifier la construction de situations didactiques, d'analyser et décrire les procédures des élèves, d'aborder différemment les programmes de mathématiques de l'école primaire.

L'objet de cette intervention est de présenter parmi ces concepts ceux qui nous semblent les plus utiles aux formateurs de professeurs des écoles en IUFM, en les illustrant avec des exemples qui ont trait à la proportionnalité.

Il nous semble que certaines des questions qu'un formateur peut se poser au sujet de l'enseignement de la proportionnalité à l'école primaire sont :

- qu'est-ce qui est enseigné au sujet de la proportionnalité à l'école primaire ? pourquoi en est-il ainsi ?
- quelles sont les difficultés principales des élèves ? d'où viennent-elles ?
- comment enseigner la proportionnalité à l'école primaire ?
- comment former des professeurs d'école à l'enseignement de la proportionnalité ?

Ces questions que nous considérons comme prototypiques relèvent du champ de la didactique qui postule qu'il est possible de décrire, d'expliquer de façon rationnelle les phénomènes d'enseignement des mathématiques. En effet, Guy Brousseau définit la didactique des mathématiques dans son glossaire de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 2002) de la façon suivante :

> *« [...] la science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques nécessaires aux occupations des hommes (sens large). Elle s'occupe (sens restreint) des conditions où une institution dite « enseignante » tente (mandatée au besoin par une autre institution) de modifier les connaissances d'une autre dite « enseignée » alors que cette dernière n'est pas en mesure de le faire de façon autonome et n'en ressent pas*

nécessairement le besoin. Un projet didactique est un projet social de faire approprier par un sujet ou par une institution un savoir constitué ou en voie de constitution. L'enseignement comprend l'ensemble des actions qui cherchent à réaliser ce projet didactique. »

C'est autour de ces questions que nous présentons des outils de la didactique des mathématiques qui nous semblent utiles aux formateurs de prtofesseurs des écoles pour mieux comprendre les phénomènes d'enseignement et donc pour préparer ses formations et aider les professeurs d'école à concevoir des séances.

Pour cela, nous distinguerons d'une part, les outils à propos du savoir et de ses interactions avec l'élève et le maître, et, d'autre part, les outils à propos du maître et de ses relations avec le savoir et les élèves. Autrement dit, nous considérons d'abord le formateur regardant le système didactique fonctionner.

En procédant ainsi, nous choisissons successivement un éclairage différent du triangle dont les sommets sont : le maître, le savoir et les élèves. Pourtant, à chaque fois notre point de vue sera didactique dans le sens où, même si nous entrons par un sommet, nous n'oublions pas qu'il est relié aux deux autres.

Si nous parlons de la proportionnalité, c'est en pensant au savoir en jeu, à son développement historique, à l'évolution de son enseignement, à son enseignement par des maîtres qui ont leurs propres points de vue à ce sujet, à son apprentissage et ses difficultés.

Les outils que nous présentons sont issus de théories « générales », distinctes et complémentaires , de la didactique des mathématiques :

- la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau qui correspond à une approche économique de l'enseignement-apprentissage des mathématiques, fortement marquée par l'idée d'apprentissage par adaptation ;
- la dialectique outil- objet et la notion de cadre développée par Régine Douady qui relèvent d'une approche à la fois économique d'apprentissage par adaptation, et épistémologique des mathématiques ;
- la théorie anthropologique du didactique de Yves Chevallard qui est une approche écologique du didactique (on s'intéresse aux « conditions » dans lesquelles vivent les savoirs) ;
- la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud qui est une approche plus psychologique.

OUTILS A PROPOS DES SAVOIRS, EN INTERACTION AVEC LE MAITRE ET LES ELEVES

Dans cette partie, nous nous intéresserons en particulier aux deux premières questions : qu'est-ce qui est enseigné au sujet de la proportionnalité à l'école primaire ? pourquoi en est-il ainsi ?

Le savoir enseigné à l'école primaire et aux niveaux supérieurs, ne correspond pas au savoir produit par les mathématiciens. Il est « apprêté » pour permettre son enseignement et son apprentissage. Cette préparation des savoirs à des fins d'enseignement correspond à la transposition didactique (Chevallard, 1985) et peut être influencée par différents éléments, comme nous allons le voir pour la proportionnalité.

Les programmes actuels définissent de façon assez précise les savoirs relatifs à la proportionnalité dont l'enseignement relève de l'école primaire :

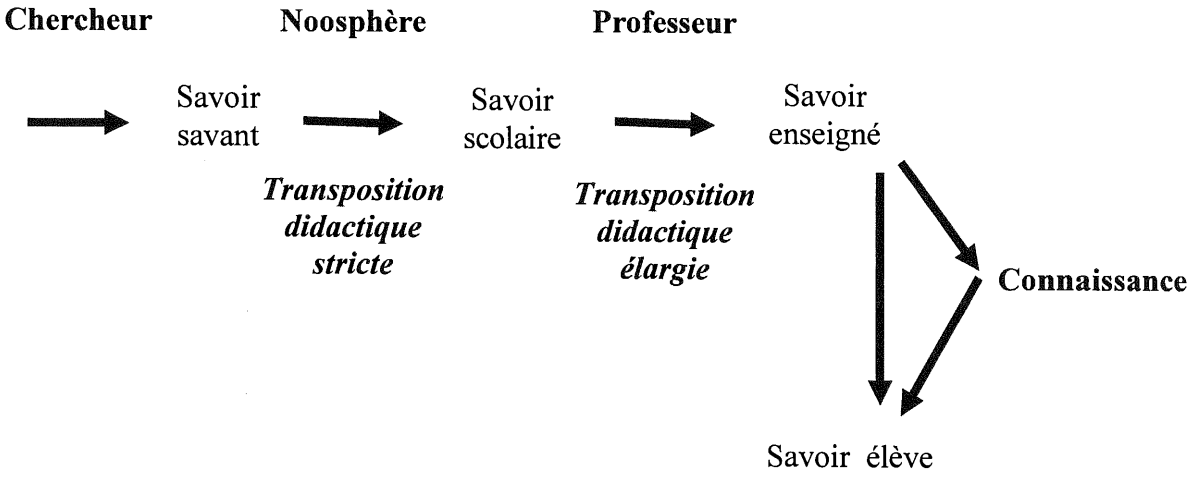
- ils limitent le champ de l'étude : l'étude de la proportionnalité en tant que telle relève du collège ;
- ils indiquent les tâches pour les élèves : différencier les situations qui relèvent de la proportionnalité et celles qui n'en relèvent pas ; identifier une situation de proportionnalité à partir de connaissances sociales, d'expériences ou reconnaissance de la proportionnalité à partir de la donnée de deux couples ; résoudre des problèmes de proportionnalité en utilisant des raisonnements personnels adéquats ;
- ils font le lien avec les connaissances antérieures des élèves : « il s'agit d'étendre la reconnaissance de problèmes qui relèvent du domaine multiplicatif » ;
- ils précisent les domaines des problèmes : consommation, pourcentages, échelles, vitesse moyenne, conversions ;
- ils précisent ce qu'on peut attendre des élèves : raisonnements personnels privilégiés, pas d'application d'une méthode donnée par l'enseignant ; différents types de raisonnements possibles (linéarité multiplicative, additive, utilisation de la valeur unitaire) ;
- ils indiquent les modes de représentation de la proportionnalité : tableaux de nombres, graphiques, textes.

Mais il n'en a pas toujours été ainsi. Souvenez-vous de la façon dont vous avez vous-même appris et, peut-être, enseigné la proportionnalité. Les programmes actuels sont le fruit d'une évolution qui a, entre autres, pris en compte les apports des recherches en didactique et sur laquelle nous allons nous appuyer pour présenter certaines notions de didactique des mathématiques.

Transposition didactique

La ***transposition didactique d'un savoir*** correspond au travail effectué à différents niveaux (société, programmes, professeurs) sur le savoir théorique savant pour le transformer en savoir prêt à être enseigné dans un niveau donné (travail descendant) ou bien à la recherche de l'origine savante d'un savoir pratique enseigné usuel (travail ascendant).

Voici une schématisation pour le travail descendant :



Cette notion, d'abord travaillée par Verret dans une approche sociologique (Verret, 1971), a ensuite été reprise par Yves Chevallard dans le cadre didactique (Chevallard, 1985).

Le savoir mathématique enseigné à l'école n'est pas le savoir produit par le mathématicien. Ce dernier est l'objet de différentes transformations avant de devenir un savoir scolaire qui est en particulier : programmable ; désyncrétisé (c'est-à-dire. découpé en champs de savoirs isolés) ; contrôlable socialement et évaluable. C'est la ***transposition didactique stricte*** qui correspond à la première partie du schéma.

Une fois le savoir scolaire ou savoir à enseigner désigné, le professeur a la charge d'enseigner ce savoir en effectuant le choix de sa programmation (à un niveau donné), et aussi en choisissant la façon dont il va enseigner ce savoir. Cette étape constitue la ***transposition didactique élargie***.

D'un point de vue épistémique, on observe un rôle symétrique du chercheur et du professeur et un rôle similaire du chercheur et de l'élève : le chercheur doit dépersonnaliser et décontextualiser le savoir qu'il a produit ; le professeur doit recontextualiser et repersonnaliser ce savoir ; l'élève doit, avec l'aide du maître, dépersonnaliser et décontextualiser.

Au niveau de la transposition didactique élargie intervient notamment la ***dialectique savoir-connaissance***. En didactique des mathématiques, « savoir » et « connaissance » ne sont pas synonymes : le savoir est public et institutionnel, la connaissance est personnelle. Ainsi, par exemple, l'élève rencontrera dans un premier temps le savoir sous forme de connaissance lors de la résolution d'un problème donné par le maître. Mais si l'on veut que l'élève identifie et retienne cette connaissance pour pouvoir ensuite, notamment, la réutiliser, il faut lui donner un statut public : c'est le ***processus d'institutionnalisation***, dirigé par le maître, qui donnera à cette connaissance ce statut officiel et en fera un savoir.

Revenons à l'exemple de la proportionnalité.

La « proportionnalité » n'existe pas en tant que telle dans les mathématiques « savantes » (on ne la trouve pas dans les théories mathématiques actuelles ou anciennes). Ce savoir identifié dans les programmes renvoie à un champ de problèmes issus de la vie courante et de la physique. Il correspond à une reconstruction à partir de savoirs issus de la théorie des rapports et proportions et de la théorie de l'application linéaire.

Actuellement, la façon de présenter la proportionnalité dans les programmes relève de plusieurs choix qui ne correspondent pas à ceux des programmes précédents :

- associer la proportionnalité à l'application linéaire, alors qu'au début du 20^{e} siècle, la théorie de référence était celle des rapports et proportions (voir Hersant, 2005) ;
- proposer des types de problèmes en rapport avec les vitesses et les sciences ;
- utiliser de façon raisonnable tableaux et graphiques comme support à des raisonnements, alors que, par exemple, au moment des mathématiques modernes, le tableau était la seule représentation officielle de la proportionnalité ;
- ne pas imposer de procédures de résolution des problèmes, alors que la « règle de trois » a longtemps été la seule procédure de résolution enseignée et reconnue par l'institution.

Ces choix correspondent à des choix de transposition didactique de la proportionnalité, c'est-à-dire à des choix d'apprêts didactiques de la notion pour l'enseigner à un niveau donné.

Classification des problèmes et notion de champ conceptuel

Dans les programmes actuels, les problèmes de proportionnalité sont fortement reliés aux problèmes multiplicatifs et ne sont pas regroupés comme ils pouvaient l'être dans les années 30 (et ultérieurement), selon le domaine du problème (problèmes d'intérêts, problèmes de partages proportionnels, problèmes de règle trois…).

Le découpage du champ de savoir est d'avantage lié aux relations mathématiques et aux questions d'apprentissage qu'au domaine économique et à la procédure « standard » pour résoudre le problème.

Il faut voir ici, à notre avis, l'incidence des travaux de Gérard Vergnaud sur les champs conceptuels et en particulier sa classification des problèmes de proportionnalité (Vergnaud, 1991). En effet, à partir des années 80, les chercheurs se sont intéressés à l'identification des facteurs de difficulté des problèmes de proportionnalité pour les élèves. Gérard Vergnaud a alors mis en évidence que certains problèmes présentaient des similitudes au niveau mathématique, par exemple, dans les opérations requises pour les résoudre, et que ces similitudes intervenaient dans la difficulté du problème.

Regroupant les problèmes de proportionnalité selon le nombre de grandeurs qui interviennent et la position de l'inconnue, il distingue ainsi :

- la structure de proportion simple (2 grandeurs proportionnelles) ;
- la structure de proportion simple composée (trois grandeurs A, B, C proportionnelles, avec une proportionnalité simple entre A et B, puis une proportionnalité simple entre B et C) ;
- la structure de produit de mesure (trois grandeurs en jeu, avec une relation de type A = B.C et A vaut 1 quand B et C valent 1, qui correspond à une composition cartésienne, cas des aires et des volumes par exemple) ;
- la structure de proportion double (3 trois grandeurs en jeu, avec une relation de type A = B.C et l'image du couple (1,1) différent de 1, cas de la production de lait par un troupeau de vaches par exemple).

Cette classification permet de distinguer la variable « structure » qui a une influence sur le degré de difficulté du problème des autres variables qui interviennent, comme le domaine du problème et les valeurs numériques.

Seule la proportionnalité simple est au programme de l'école élémentaire, c'est pourquoi nous présentons ci-dessous seulement les quatre cas de problèmes de proportionnalité simple.

Multiplication 1 *a* *b* ?	Division-partition 1 ? *b* *c*
Division – quotition 1 *a* ? *c*	« 4ème proportionnelle » *a* *b* *c* ?

Dans ce tableau, les nombres et lettres désignent les valeurs connues et le point d'interrogation la valeur à trouver. Ainsi, par exemple et de façon générique, un problème de multiplication est du type : Si pour un bonbon je paie *a* centimes d'euros, combien vais-je payer pour *b* bonbons ?

Les problèmes de multiplication, de division-partition et de division- quotition font tous référence à l'unité, mais les valeurs à trouver, et donc les raisonnements de résolution possibles, sont différents : recherche de la valeur de *b* parts, recherche de la valeur d'une part, recherche du nombre de parts. Cette référence à la valeur de l'unité n'existe pas dans les problèmes de 4ème proportionnelle.

Dialectique outil-objet

Actuellement, à l'école élémentaire, l'application linéaire sert de modèle à la proportionnalité mais elle n'est pas un objet d'enseignement : c'est un outil pour résoudre des problèmes multiplicatifs qui reste d'ailleurs implicite.

Au collège, en revanche, l'application linéaire devient explicite et un objet d'enseignement (on fait un cours sur l'application linéaire), qui sera ensuite utilisé pour résoudre d'autres problèmes.

Au cours de la scolarité d'un élève, l'application linéaire prend donc successivement les statuts suivants : outil implicite pour résoudre des problèmes → objet d'enseignement (donc explicite) → outil explicite pour résoudre des problèmes.

Ce changement de statut (outil/objet, implicite/explicite) correspond, à une échelle macro, à ce que Régine Douady a appelé la ***dialectique outil-objet*** (Douady, 1986, p. 9) :

> *« Nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. [...] Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement. »*

La dialectique outil-objet est née d'une référence à l'activité du mathématicien. Régine Douady parle de dialectique outil-objet pour distinguer le processus de changement de statuts des concepts que l'on retrouve en particulier au niveau de la transposition didactique. Elle distingue pour un même concept trois statuts : objet, outil implicite, outil explicite. Elle organise plus largement ces trois statuts dans une dialectique, appelée outil-objet à laquelle nous nous intéresserons dans la seconde partie.

OUTILS A PROPOS DU MAITRE, EN INTERACTION AVEC LES ELEVES ET LE SAVOIR

Abordons maintenant les questions relatives aux interactions entre le maître et le couple (élèves-savoir) : quelles sont les difficultés principales des élèves dans l'apprentissage de la proportionnalité ? d'où viennent-elles ? comment enseigner la proportionnalité ?

Les différentes théories de la didactique des mathématiques ont permis l'émergence de concepts qui peuvent être utiles tant pour la construction et l'analyse de séances de mathématiques que pour la prise en compte des difficultés d'apprentissage des élèves.

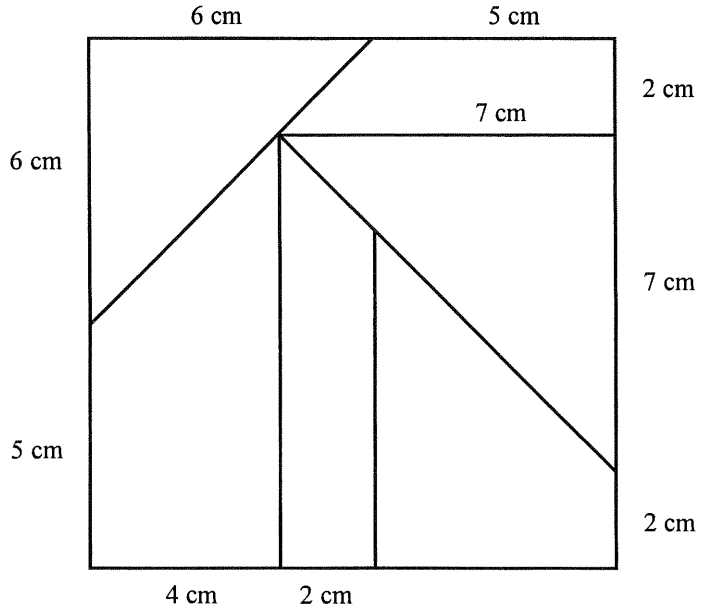
En particulier, la théorie des situations didactiques ainsi que la dialectique outil-objet, qui ont des ancrages piagétiens et se situent dans le courant constructiviste, accordent une place importante aux notions d'erreur et d'obstacle. Elles proposent donc de mettre en place des situations qui vont permettre de faire émerger les obstacles pour les élèves et ensuite de les dépasser.

Pour préciser ces approches, nous développerons plus ou moins les notions d'erreurs, obstacles, conceptions, milieu, dévolution et institutionnalisation, variables didactiques, cadres, dialectique outil- objet et situation- problème.

Erreurs, obstacles et conceptions

Considérons le problème suivant, dû à Guy Brousseau[41] (Brousseau, 1981).

« Voici des puzzles, vous allez en fabriquer des semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 7 cm sur votre production.
Je donne un puzzle par équipe de 5 ou 6, mais chaque élève fait au moins une pièce ou un groupe de 2 fait 2 pièces.
Lorsque vous avez fini, vous devez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle. »



Dans la situation étudiée, ce problème est le premier problème sur la proportionnalité que rencontrent les élèves.

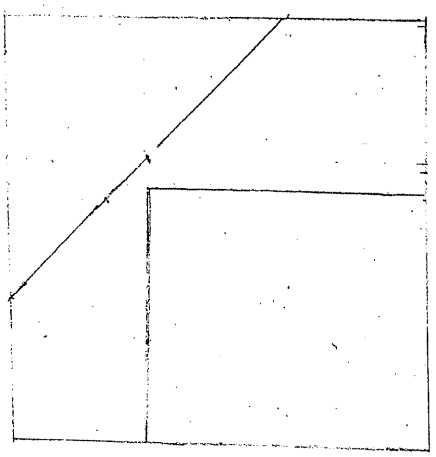
Des élèves de cycles 3 font souvent des erreurs dans la résolution de ce problème. La plus courante consiste à ajouter 3 cm à chacune des mesures du puzzle. Cette procédure correspond à une connaissance erronée de l'élève « pour agrandir la figure tel que c'est demandé j'ajoute la même valeur à chacune des longueurs », elle-même reliée à une autre connaissance des élèves de cycle 3 « quand j'ajoute un nombre à un nombre donné, j'obtiens un nombre plus grand. ».

Ces connaissances erronées correspondent à une partie de l'idée que l'élève se fait de l'agrandissement d'une figure : elles constituent une partie de la ***conception*** que l'élève a de l'agrandissement d'une figure, au sens de Guy Brousseau (Brousseau, 1988) :

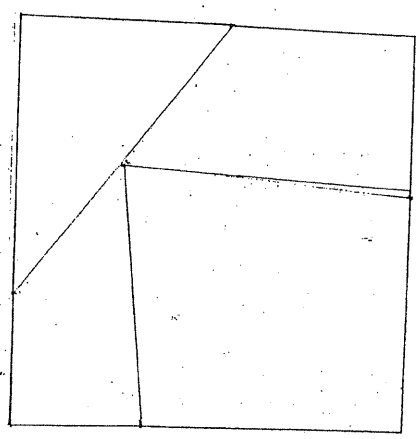
« Une conception permet de traiter (reconnaître et résoudre) une sous-classe de situations considérées comme comparables [...] avec des procédures voisines, justifiées par des « raisonnements semblables » ou traitées à l'aide de connaissances logiquement et fortement liées ».

Mais ces deux connaissances ne constituent pas elles seules, la plupart du temps, la conception des élèves de cycle 3 sur l'agrandissement de figure. En effet, considérons les productions suivantes obtenues en demandant aux élèves non pas de découper les pièces et de reconstituer le puzzle par groupe mais de dessiner chacun le puzzle agrandi.

[41] Initialement cette situation est la première situation d'étude des applications linéaires qui permettra ensuite de travailler sur les fractions et les nombres décimaux.



Nous avons rajouté 2 cm, mais nous n'avons pas réussi à cause du petit carré. Nous n'avons pas réussi



Nous n'avons pas réussi. Nous avons rajouté 2 cm à toutes les mesures par ce que un segment de 4 cm devra mesurer 6 cm.

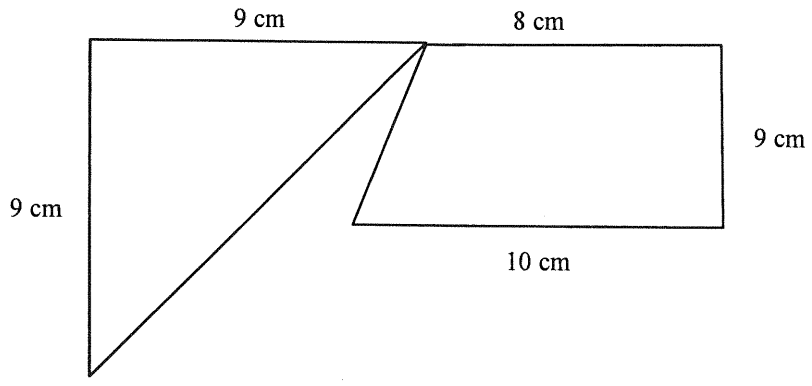
Cela nous permet de compléter ce que nous savons de la conception que l'élève a d'un agrandissement : il faut ajouter la même valeur à chacune des longueurs, un carré est agrandi en un carré (conservation de la forme), un milieu se transforme en milieu (conservation des milieux), conservation de l'incidence.

En particulier, ces productions d'élèves nous montrent aussi qu'une conception peut très bien être composée de connaissances qui nous semblent incohérentes et incompatibles, sans que cette incohérence soit décelée par l'élève. En ce sens, nous disons que les conceptions sont *résistantes*. C'est aussi pourquoi elles risquent de faire obstacle à l'apprentissage.

D'où l'idée de construire des situations didactiques qui vont mettre en défaut les connaissances et conceptions des élèves (soit parce qu'elles sont fausses, soit parce qu'elles sont insuffisantes, soit parce qu'elles sont peu économiques), et permettrent un apprentissage par adaptation de l'élève à la situation. C'est pour cette raison que dans la théorie des situations ont été développés les concepts de rétroaction, validation et milieu.

Rétroaction, validation et milieu

Revenons à notre situation du puzzle. Si on laisse les élèves travailler sans intervention de l'enseignant pour les guider ou les aider, des élèves vont ajouter 3 cm à chacune des mesures. Ils auront alors des ennuis pour reconstituer le puzzle !



Les élèves voient bien qu'il y a une erreur. Si elle leur apparaît de façon évidente c'est bien parce que le maître leur a demandé de *construire* un agrandissement du puzzle et non simplement de calculer les mesures agrandies.

Ce choix permet aux élèves de se rendrent compte par eux-mêmes qu'il y a une erreur. Dans la théorie des situations, on dit que la situation fournit à l'élève des ***rétroactions***. Ces rétroactions lui permettent de comprendre que ce qu'il fait est erroné.

La situation telle qu'elle est pensée devrait permettre aux élèves, non seulement de percevoir leur erreur quasiment sans intervention du maître, mais aussi d'arriver à la procédure correcte. Cela nous amène à la définition de la notion de milieu et à la question de la validation. Guy Brousseau définit ainsi la notion de milieu (Brousseau, 2002) :

> *« Le milieu est constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans une situation. »*

Si le milieu de la situation permet des rétroactions suffisantes, comme dans la situation du puzzle, l'enseignant n'a normalement pas à intervenir pour signifier à l'élève que ce qu'il a fait est erroné : on dit qu'il y a ***validation*** de la procédure des élèves par la situation (le milieu), par opposition à ***évaluation*** lorsque c'est le maître qui signifie à l'élève que sa réponse est correcte ou erronée (Margolinas, 1993).

Processus de dévolution, d'institutionnalisation et contrat didactique

À ce stade, on peut se poser une question. Il n'y a pas trop de doute sur le fait que l'élève accepte de s'engager une première fois dans la construction du puzzle. Mais, une fois qu'il aura produit une réponse erronée, est-on sûr qu'il voudra résoudre le problème jusqu'au bout ?

Pour cela, il faut qu'il accepte le transfert de responsabilité opéré par l'enseignant pour le rendre pleinement responsable de la construction du savoir nouveau. Ce transfert de responsabilité qu'on appelle, en théorie des situations, la ***dévolution*** d'une situation est un processus dirigé par l'enseignant qui vise à maintenir l'élève dans la situation où il interagit seulement avec le milieu et non avec l'enseignant.

Pour cela, le professeur peut être amené, par exemple, à soutenir les efforts des élèves ou à rappeler certaines règles du jeu : toutes les actions de l'enseignant qui ont pour objectif de faire résoudre le problème par l'élève, et lui seul, c'est-à-dire sans lui donner la réponse, relèvent de la dévolution.

L'idée de dévolution est très liée à deux autres concepts de la théorie des situations didactiques, notamment celle de contrat didactique.

Dans la situation du puzzle, le maître veut que l'élève ne tienne la réponse que de lui-même et prévoit donc de se taire au maximum. Mais en même temps, il veut que l'élève donne la bonne réponse. Il y a là une tension. En effet, d'un point de vue social, l'enseignant a l'obligation *d'enseigner* tout ce qui est nécessaire à propos du savoir. Ainsi, un élève qui est échec va demander au professeur de l'aider, le maître ne peut pas refuser mais plus il donne d'indications pour résoudre le problème, plus il prive l'élève des chances d'un apprentissage par adaptation. C'est le paradoxe de la dévolution.

Ce paradoxe sera résolu si le professeur et les élèves conviennent, implicitement pour la plus grande part, de ce dont chacun d'eux sera responsable devant l'autre.

Ce système d'obligations qui existe toujours dans une classe est le ***contrat didactique***. Il dépend fortement des connaissances mathématiques visées, on parle par exemple de contrat géométrique (lié à la règle et au compas) et algébrique (lié à l'utilisation de lettres). De ce fait, le contrat didactique dépend aussi fortement des connaissances de chacun des élèves, de leur degré d'adaptation à la situation, et évolue au fur et à mesure de cette adaptation. Ce contrat est donc naturellement et nécessairement l'objet de fréquentes ruptures et négociations.

Le processus de dévolution renvoie à celui d'institutionnalisation pour deux raisons. D'abord, le processus d'institutionnalisation est issu d'un second paradoxe de la dévolution : c'est parce qu'il y a un transfert de responsabilité vers l'élève qu'il y a nécessité de procéder à l'institutionnalisation.
Ensuite, parce que l'institutionnalisation va modifier le contrat didactique. En effet, une fois un savoir déclaré comme devant être su, l'élève a le devoir de le savoir et au besoin, de le solliciter pour répondre à un nouveau problème.

Avec ces outils (milieu, dévolution, contrat didactique et institutionnalisation), Guy Brousseau et son équipe se sont attaché à construire des séances pour l'apprentissage de notions mathématiques données à un niveau donné : ce sont les *ingénieries didactiques*.

Variables didactiques

Sans entrer dans le détail de l'élaboration d'une ingénierie didactique, pointons toutefois l'importance pour la conception de séances des ***variables didactiques***.

Dans la situation du puzzle, si nous proposons « 4 devient 8 » au lieu de « 4 devient 7 », les procédures des élèves ne seront pas les mêmes. Il est probable que la procédure « multiplier par deux les données initiales » apparaisse rapidement. C'est pourquoi nous disons que dans ce problème le coefficient de proportionnalité est une variable didactique.

Plus généralement, les variables didactiques sont les éléments de la situation sur lesquels l'enseignant peut agir et qui ont une incidence forte sur les procédures utilisées par les élèves pour résoudre le problème.

La notion de milieu illustre la façon dont Guy Brousseau a mis en œuvre les travaux de Piaget pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et la construction d'ingénieries didactiques.

Régine Douady, pour la construction de telles séquences d'enseignement et de façon concomitante, accorde de l'importance à d'autres éléments de la situation qu'elle explicite comme les fondements d'une autre théorie complémentaire de la théorie des situations.

Cadre et jeu de cadres

La situation du puzzle, construite par Guy Brousseau, peut en partie aussi être analysée avec la notion de cadre introduite par Régine Douady (Douady, 1986).

Les élèves travaillent sur la notion de proportionnalité et construisent « eux-mêmes » des connaissances sur la proportionnalité. Pour cela, ils mobilisent leurs connaissances sur l'agrandissement. C'est ce qui fait la richesse de la situation. On dit que la situation est ici proposée dans le cadre géométrique, au sens de Régine Douady (Douady, 1986, p. 11) :

> *« Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. [..] »*

Le passage d'un cadre à un autre au cours d'une séquence permet d'obtenir des formulations différentes d'un même problème, donne accès aux difficultés rencontrées par les élèves et permet la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. C'est que Régine Douady désigne par ***jeu de cadres***.

Situation problème et dialectique outil-objet

La notion de cadre est une partie d'une théorie plus large établie par Régine Douady, par analogie entre l'apprentissage des mathématiques et le travail du mathématicien : jeux de cadres et dialectique outil–objet. Dans cette théorie, elle accorde une place essentielle à trois éléments qui lui servent pour construire des « problèmes » (longs) :

- la dialectique outil- objet, c'est-à-dire. l'introduction du concept comme outil implicite pour résoudre un problème puis évolution vers le statut d'outil explicite et enfin d'objet d'enseignement ;
- la dialectique ancien–nouveau ;
- les jeux de cadres (cf. supra).

En prenant en compte ces éléments, Régine Douady va construire des ingénieries didactiques. Elle précisera aussi les conditions auxquelles doivent répondre les problèmes dans une situation scolaire d'apprentissage, lors d'une première rencontre. C'est la définition des situations-problèmes dont les caractéristiques sont les suivantes :

1. L'élève doit pouvoir s'engager facilement dans la résolution du problème. Il peut envisager ce qu'est une réponse possible du problème.
2. Les connaissances que les élèves ont sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème.
3. La situation doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas.
4. La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève.

EN GUISE DE CONCLUSION

Pour conclure, nous aimerions pointer deux éléments essentiels à l'égard des nouveaux formateurs.

La majorité des outils présentés ici ont été développés par les didacticiens des mathématiques, d'abord avec l'idée de concevoir des séances pour l'apprentissage de notions mathématiques données à un niveau donné. Ils ont donc naturellement un aspect fonctionnel et sont utiles pour la construction de séance avec des professeurs d'école.

Ensuite, ces concepts ont plutôt été utilisés pour analyser les pratiques des enseignants. Ils ont donc aussi une dimension analytique.

Dans notre exposé, nous avons plutôt procédé de l'objet à l'outil, ce qui n'est pas très didactique, mais la transposition didactique de notions didactiques aux nouveaux formateurs n'est pas chose aisée. Pour permettre un passage de l'objet à l'outil, nous vous invitons à comparer la situation du puzzle et celle proposée dans un manuel de votre choix pour une première rencontre avec la proportionnalité.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Brousseau G. (1981) *Problèmes de didactique des décimaux.* Recherches en didactique des mathématiques 2.1, pp. 37-127

Brousseau G.(1998) *Théorie des situations didactiques,* Ed. La pensée sauvage

Brousseau G.(2002) *Glossaire.*
http://perso.orange.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm#ligne

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique,* Ed. La pensée sauvage

Douady R. (1986) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet.* Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 7.2, pp. 5-31, Ed. La Pensée Sauvage

Dupin J.J., Joshua S. (1993) *Introduction à la didactique des mathématiques et des sciences,* PUF

Hersant M. (2005) *La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui*, Repères IREM, 59, pp. 5-41

Margolinas C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques,* Ed. La Pensée Sauvage

Vergnaud G. (1991) *La théorie des champs conceptuels*, Recherches en didactique des mathématiques, 10. *2-3,* 135 - 169

Verret M. (1971) *Le temps des études*, Eds Champion